



Księgozbiór
Instytutu Matematyki
WSP w Krakowie

S 2083

„BIBLIOTEKA MATEMATYCZNA“

MATEMATYKI CZYTEJ I STOSOWANEJ. WYDAWANY PRZEZ
PAŃSTWOWY INSTYTUT MATEMATYCZNY, S. STRASZEWICZA I W. WOJTCOWICZA.

WSTĘP DO ANALIZY

NAPISAŁ

STANISŁAW ZAREMBA

PROFESOR UNIwersYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

CZĘŚĆ II

TEORIA LICZB RZECZYWISTYCH

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWYM
IMIENIA DRA JÓZEFA MIANOWSKIEGO

WARSZAWA

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA
1918.

WSTĘP DO ANALIZY

„WIEDZA MATEMATYCZNA“

ZBIÓR DZIEŁ Z DZIEDZINY MATEMATYKI CZYSTEJ I STOSOWANEJ, WYDAWANY PRZEZ
S. KWIETNIEWSKIEGO, S. STRASZEWICZA I W. WOJTOWICZA.

WSTĘP DO ANALIZY

NAPISAŁ

STANISŁAW ZAREMBA

PROFESOR UNIwersYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

CZĘŚĆ II

TEORIA LICZB RZECZYWISTYCH

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWYM
IMIENIA DRA JÓZEFA MIAŃKOWSKIEGO

WARSZAWA

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA

1918.



M 52 780/1

UP - Kraków BG



1050284277

Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem Józefa Piłpowskiego.

20.19 D. 87-7
BG. UP

15

PRZEDMOWA DO CZĘŚCI II.

Ze względu na cele dydaktyczne niniejszego dzieła, myśl o wyczerpującym wykładzie przedmiotu była wykluczona z góry. Teorię liczb całkowitych pominąłem w zupełności, gdyż sądzę, że dziełko moje, *Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych* (Kraków 1909, nakładem Akademii Umiejętności), zawiera wykład tego działu Arytmetyki w odpowiednim zakresie. Wobec tego, rozpoczynam od teorii liczb ułamkowych. Pominąłem wszystko to, co ze stanowiska teoretycznego ma drugorzędne tylko znaczenie; w szczególności nie uwzględniłem wcale teorii liczb dziesiętnych, albowiem zdaje mi się że kto, po ukończeniu szkoły średniej, przeczyta niniejszy tomik, ten z łatwością sam zdoła uzupełnić w należyтым stopniu swoje wiadomości o liczbach dziesiętnych.

Ograniczenie zakresu niniejszego wykładu teorii liczb rzeczywistych do najistotniejszych części tejże wydawało mi się tem bardziej wskazane, że w obszernym dziele *Arytmetyka teoretyczna* (Kraków 1912, nakładem Akademii Umiejętności) usiłowałem podać wyczerpujące opracowanie całej Arytmetyki.

Pozostaje mi do spełnienia miły obowiązek podziękowania memu Szanownemu Koledze Drowi Antoniemu Hoborskiemu za łaskawą pomoc przy sporządzaniu wykazu błędów drukarskich.

Wobec trudności, z jakimi musiała walczyć Drukarnia uniwersytecka ze względu na wyjątkową epokę, w której druk odbywał się, należy podnieść z uznaniem staranność, z którą wywiązała się ze swojego zadania.

Kraków, 8 listopada 1917 r.

S. Zaremba.

I. Mierzenie odcinków i liczby wymierne.

§ 44. Zagadnienie o mierzeniu odcinków polega na tem, aby przez pośrednictwo odcinka właściwego u , oznaczonej długości, zwanego *jednostką długości*, określić w zupełności długość, dowolnie danego odcinka a . Rozwiązywanie tego zagadnienia zowiemy *mierzeniem* odcinka a .

W niniejszym rozdziale poprzestaniemy na badaniu powyższego zagadnienia tylko w przypadku, kiedy odcinek a , mający ulegać mierzeniu, jest współmierny (I str. 108) z odcinkiem u , przyjętym za jednostkę.

§ 45. Chwila uwagi wystarczy, aby czytelnik przekonał się, że zachodzi okoliczność następująca: jeżeli pewien odcinek a jest współmierny z oznaczonym odcinkiem *właściwym* u , to określimy w zupełności długość odcinka a w zależności od długości odcinka u , skoro wyznaczymy układ dwóch liczb całkowitych m i p w ten sposób, aby mu odpowiadała pewna wspólna podwielokrotność d rozważanych odcinków, mieszcząca się dokładnie p razy w odcinku u i m razy w odcinku a . Możemy więc powiedzieć, że wyznaczenie układu liczb całkowitych m i p stanowi rozwiązanie problemu zmierzenia odcinka a w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę.

Liczba całkowita, którą oznaczyliśmy wyżej przez p , zawsze będzie od zera większa. Z drugiej znów strony, jeżeli na liczbę całkowitą p przyjmiemy jakąkolwiek, byle od zera większą wartość, a na liczbę całkowitą m — już całkiem dowolną wartość, chociażby równą zeru, to, do dowolnie naprzód danego odcinka *właściwego* u , możebnem będzie dobranie takiego odcinka a współmiernego z odcinkiem u , żeby pewna wspólna podwielokrotność odcinków u i a mieściła się w odcinku u p razy, a w odcinku a m razy, gdyż wystarczyłoby podzielić w tym celu odcinek u na p równych części i, oznaczwszy przez d jedną z tych części odcinka u , wyznaczyć odcinek a z równości

$$a = m \cdot d.$$

W przypadku szczególnym, w którymbyśmy mieli

$$m = 0,$$

zaszłaby tylko ta osobliwość, iż odcinek a byłby odcinkiem *niewłaściwym*.

§ 46. W powyższem rozwiązaniu problemu mierzenia odcinków współmiernych z jednostką, liczby całkowite występują *parami*. Okoliczność ta doprowadza nas do rozważania par liczb całkowitych jako samoistnych przedmiotów. Ale wogóle, wobec przedmiotów (P), z których każdy jest sam układem dwóch rzeczy, z których znów każda należy do oznaczonej klasy (K), możliwem jest zajęcie jednego z dwóch zasadniczo odmiennych stanowisk:

1° Indywiduum klasy (P) możemy uważać za oznaczone w zupełności, skoro są oznaczone te dwa przedmioty klasy (K), które razem tworzą rozważane indywiduum.

2° Możemy umówić się, że indywiduum I klasy (P) dopiero wówczas uważać będziemy za oznaczone w zupełności, kiedy, prócz samych dwóch przedmiotów klasy (K), które razem tworzą indywiduum I , oznaczone będą jeszcze pewne numery porządkowe dla tych dwóch przedmiotów w ten sposób, żeby pewien jeden z nich miał numer pierwszy, a drugi — numer drugi.

Żeby zaznaczyć, że stajemy na pierwszym stanowisku orzekamy krótko, iż przedmioty (P) są parami przedmiotów klasy (K). Żeby zaś wyrazić, iż zajmujemy drugie stanowisko, orzekamy, iż każdy przedmiot klasy (P) stanowi parę przedmiotów klasy (K) ułożonych w *oznaczonym porządku*.

Ponieważ w problemie mierzenia odcinków współmiernych z jednostką pary liczb całkowitych występują w ten sposób, iż każda z liczb całkowitych, należących do jednej takiej pary, ma sobie właściwą rolę, przeto staniemy wobec par liczb całkowitych na drugim z dwóch wyżej omówionych stanowisk i rozważać będziemy zatem taki zbiór przedmiotów (Z), którego każdy element jest zespołem dwóch liczb całkowitych, ułożonych w pewnym porządku. Żeby zbiór (Z) określić w zupełności zważmy, iż, jakeśmy stwierdzili w paragrafie poprzedzającym, pary liczb całkowitych, występujące w problemie mierzenia odcinków współmiernych z jednostką, nie są całkiem dowolne, lecz scharakteryzowane są przez to, iż pewna jedna z nich jest od zera większa. Uwaga ta wskazuje na to, iż stosownem będzie zaliczać do zbioru (Z) albo tylko wszystkie takie pary w oznaczonym porządku ułożonych liczb całkowitych, w których liczba całkowita, mająca numer pierwszy, jest od zera większa, albo tylko wszystkie takie, w których liczba całkowita, mająca numer drugi, jest większa od zera. Obojętnem jest, którą z tych alternatyw wybierzemy. Istotnie, gdybyśmy wybrali pierwszą, to w problemie mierzenia odcinków współmiernych z jednostką pierwsza liczba każdej pary służyłaby do oznaczenia, ile razy pewna wspólna podwielokrotność jednostki i odcinka mierzonego mieści

się w jednostce; gdybyśmy zaś wybrali drugą alternatywę, to pierwsza rola przypadłaby nie pierwszej, lecz drugiej liczbie każdej pary. Ponieważ jednak jakiś wybór jest konieczny, przeto umówimy się, że do zbioru (Z) zaliczać będziemy tylko wszystkie takie pary w oznaczonym porządku ułożonych liczb całkowitych, w których liczba całkowita, mająca numer drugi, jest od zera większa.

Bliższe zbadanie problemu mierzenia odcinków współmiernych z jednostką doprowadzi nas do badania następstw, wynikających z przyjęcia szeregu umów i definicyi, odnoszących się do zbioru, któryśmy przed chwilą oznaczyli przez (Z).

Def. I. Żeby wyrazić, iż pewien element zbioru (Z) (a więc para dwóch liczb całkowitych, z których jedna, ta mianowicie, której nadany jest numer pierwszy, ma wartość jakąkolwiek, a druga, zaopatrzona w numer drugi, jest od zera większa) uważany jest jako podlegający wspomnianym umowom, orzekać będziemy, że rozważany element zbioru (Z) jest liczbą *ułamkową*; jednocześnie nadawać będziemy tej z dwóch liczb całkowitych, która w parze, tworzącej liczbę ułamkową, ma numer pierwszy, nazwę *licznika*, a tej z nich, która ma numer drugi — nazwę *mianownika* odnośnej liczby ułamkowej.

Z powyższej definicyi wynika, że za licznik liczby ułamkowej może być przyjęta każda liczba całkowita, za mianownik zaś tylko liczba całkowita od zera większa, ale pozatem już jakąkolwiek.

Tymczasowo oznaczać będziemy liczbę ułamkową, której licznikiem i mianownikiem są odpowiednio pewne liczby całkowite m i p , symbolem

$$(m, p).$$

Def. II. Orzeczenie, iż pewna liczba ułamkowa (m, p) jest *miarą* oznaczonego ułamka a w razie przyjęcia pewnego odcinka właściwego u za jednostkę wyraża, iż odcinki a i u są współmierne, a pewna ich wspólna podwielokrotność mieści się w odcinku u tyle razy, ile wynosi mianownik p , w odcinku zaś a tyle razy, ile wynosi licznik m rozważanej liczby ułamkowej.

Na podstawie powyższych definicyi możemy wyrazić fakta, które stanowiły podstawę rozważań, wyłożonych w § 45, w postaci twierdzeń następujących:

Tw. I. Jeżeli jednostka długości jest oznaczona, to długość odcinka, którego miarą jest oznaczona liczba ułamkowa t. j. liczba ułamkowa, której licznik i mianownik są pewne oznaczone liczby całkowite) jest oznaczona w zupełności.

Tw. II. Jeżeli oznaczymy przez u dowolnie dany odcinek *właściwy*, a przez m i p odpowiednio licznik i mianownik do-

wolnie danej liczby ułamkowej, to zawsze istnieć będzie taki odcinek a , którego miarą, w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę, będzie właśnie liczba ułamkowa (m, p) .

Uwaga. Gdybyśmy mieli

$$m = 0,$$

to odcinek a , byłby odcinkiem *niewłaściwym*.

§ 47. Oznaczmy przez

$$(m, p) \text{ i } (m', p')$$

dwie liczby ułamkowe, dowolnie dane i, przyjąwszy pewien odcinek właściwy u za jednostkę, uważajmy odcinki

$$a \text{ i } a'$$

których miarami są w takim razie odpowiednio powyższe liczby ułamkowe. Z natury rzeczy nastrocza się myśl o nadaniu liczbom ułamkowym charakteru wielkości przez przyjęcie definicyi następującej.

Def. I. Związki

$$(1) \quad (m, p) = (m', p'),$$

$$(2) \quad (m, p) < (m', p')$$

$$(3) \quad (m, p) > (m', p')$$

uważać będziemy za równoważne odpowiednio związkom

$$(4) \quad a = a',$$

$$(5) \quad a < a',$$

$$(6) \quad b > a'.$$

Jednakowoż, żebyśmy byli uprawnieni do przyjęcia powyższej definicyi, jest rzeczą konieczną i wystarczającą, żeby ta definicya czyniła zadość wszystkim warunkom, omówionym w rozdz. III części I. Żeby zaś okoliczność ta zachodziła, koniecznem jest (choć oczywiście nie wystarczającym), żeby wynik porównywania ilościowego dwóch liczb ułamkowych nie był zależny od wyboru jednostki długości, gdyż w przeciwnym razie ta sama para liczb ułamkowych (m, p) i (m', p') mogłaby, zależnie od wyboru jednostki, spełniać, wbrew zasadom rozdziału III, prócz jednego ze związków (1), (2), (3) jeszcze jakiś drugi z nich. Przekonamy się niebawem, że w rzeczywistości powyższa definicya czyni zadość nietylko temu warunkowi, ale i wszystkim innym, wynikającym z zasad, podanych w rozdziale III-cim I-szej części.

Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez

$$(m, p) \text{ i } (m', p')$$

dwie liczby ułamkowe, to związki

$$(1) \quad (m, p) = (m', p'),$$

$$(2) \quad (m, p) < (m', p')$$

i

$$(3) \quad (m, p) > (m', p')$$

są odpowiednio równoważne związkom:

$$(4) \quad m \cdot p' = m' \cdot p,$$

$$(5) \quad m \cdot p' < m' \cdot p$$

i

$$(6) \quad m \cdot p' > m' \cdot p.$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, uważajmy jakikolwiek odcinek właściwy u i podzielmy go na tyle równych części, ile wynosi iloczyn

$$p \cdot p'.$$

Jeżeli tedy oznaczymy przez δ jedną z uzyskanych części odcinka u , to otrzymamy:

$$(7) \quad u = (p \cdot p') \cdot \delta.$$

Oznaczmy teraz przez d i d' dwa odcinki tak dobrane, żebyśmy mieli:

$$(8) \quad d = p' \cdot \delta$$

oraz

$$(9) \quad d' = p \cdot \delta.$$

W takim razie, ze względu na (7), będzie

$$u = p \cdot d$$

oraz

$$u = p' \cdot d'.$$

Jeżeli więc założymy, że, po przyjęciu odcinka u za jednostkę, miarami odcinków a i a' są odpowiednie liczby ułamkowe

$$(m, p) \text{ i } (m', p'),$$

to mieć będziemy

$$(10) \quad a = m \cdot d$$

$$(11) \quad a' = m' \cdot d'.$$

Z drugiej zas strony ze związków (8) i (10) mamy

$$(12) \quad a = (m \cdot p') \cdot \delta,$$

a ze związków (9) i (11):

$$(13) \quad a' = (m' \cdot p) \cdot \delta$$

Z równości (12) i (13) wynika, że związki (4), (5) i (6) są odpowiednio równoważne związkom

$$a = a', \quad a < a' \quad \text{i} \quad a > a'$$

bez względu na wybór odcinka u , a ponieważ te ostatnie związki równoważne są odpowiednio związkom (1), (2), (3) na mocy przyjętej przez nas reguły porównywania ilościowego liczb ułamkowych, przeto związki (1), (2) i (3) są odpowiednio równoważne związkom (4), (5) i (6), a na tem właśnie polega twierdzenie, o które chodziło.

Wniosek. Wynik porównywania ilościowego dwóch liczb ułamkowych jest niezależny od wyboru jednostki długości. Istotnie, dowiedzione przed chwilą twierdzenie poucza nas, iż porównanie ilościowe dwóch liczb ułamkowych może być dokonane bez rozważania jakichkolwiek odcinków, opierając się wyłącznie na wartościach, jakie mają liczniki i mianowniki rozważonych liczb ułamkowych.

Możemy teraz udowodnić, że jeżeli oznaczymy przez α , β i γ trzy liczby ułamkowe, to zachodzić będą twierdzenia następujące:

(A) Jakakolwiek byłaby liczba ułamkowa α , w każdym razie mamy:

$$\alpha = \alpha.$$

(B) Równości

$$\alpha = \beta \quad \text{i} \quad \beta = \alpha$$

są równoważne pomiędzy sobą.

(C) Równości

$$\alpha = \beta \quad \text{i} \quad \beta = \gamma$$

pociągają za sobą równość

$$\alpha = \gamma.$$

(D) Dwie liczby ułamkowe α i β spełniają zawsze jeden, ale tylko jeden z trzech związków

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta \quad \text{i} \quad \alpha > \beta.$$

(E) Związki

$$\alpha < \beta \quad \text{i} \quad \beta > \alpha$$

są równoważne pomiędzy sobą.

(F) Związki

$$\alpha < \beta \text{ i } \beta < \gamma$$

pociągają za sobą związek

$$\alpha < \gamma.$$

Żeby powyższe twierdzenia uzasadnić, zaznaczamy najpierw, że z samego brzmienia reguły, podanej na początku niniejszego paragrafu, wynika bezpośrednio, że twierdzenia (A), (B) i (E) niezawodnie zachodzą. Co do twierdzenia (D) to stan rzeczy jest następujący: jeżeli celem wykonania porównania ilościowego liczb α i β przyjmiemy za jednostkę dowolnie wybrany odcinek właściwy u i wyznaczmy następnie odcinki a i b , których miarami byłyby odpowiednio liczby ułamkowe α i β to odcinki a i b niezawodnie spełniać będą jeden i tylko jeden z trzech związków

$$a = b, \quad a < b \text{ lub } a > b,$$

zatem, na podstawie naszej reguły, dojdziemy niezawodnie do wyniku, że liczby α i β spełniają także jeden i tylko jeden ze związków

$$(1) \quad \alpha = \beta, \quad \alpha < \beta \text{ lub } \alpha > \beta.$$

Ale nasuwa się zarzut, że, w razie gdybyśmy zamiast odcinka u przyjęli jakiś inny odcinek właściwy za jednostkę, to może okazałoby się, że liczby α i β spełniają jakiś inny ze związków (1), ponieważ jednak (tw. I, Wniosek) ta okoliczność w rzeczywistości wydarzyć się nie może, przeto twierdzenie (D) zachodzi w podanym brzmieniu.

Żeby uzasadnić twierdzenie (C) przyjmijmy za jednostkę jakikolwiek odcinek właściwy u i wyznaczmy odcinki a , b i c , których miarami byłyby odpowiednio liczby α , β i γ . Ponieważ założenie twierdzenia (C) polega na istnieniu związków

$$\alpha = \beta \text{ i } \beta = \gamma$$

ponieważ nadto, ze względu na wniosek z tw. I wybór jednostki długości nie wywiera wpływu na wynik porównywania ilościowego dwóch liczb ułamkowych, przeto mieć będziemy

$$a = b \text{ i } b = c,$$

skąd znów wynika równość

$$a = c,$$

która pociąga za sobą równość

$$\alpha = \gamma,$$

która właśnie była do udowodnienia.

Oczywiście udowodnilibyśmy w sposób całkiem analogiczny prawdziwość twierdzenia (F).

Ostatecznie więc stwierdzamy, że każde z twierdzeń

(A), (B), (C), (D), (E) i (F)

rzeczywiście zachodzi.

Jako pouczające ćwiczenie, polecamy czytelnikowi wyprowadzenie twierdzeń (A), (B), (C), (D), (E) i (F) z tw. I bez opierania się na związku pomiędzy liczbą ułamkową, a odcinkiem, którego miarą ona się staje po oznaczeniu jednostki długości.

Na podstawie uzyskanych wyników stwierdzamy, że reguła porównywania ilościowego liczb ułamkowych przez nas przyjęta jest zgodna z ogólnymi zasadami, omówionymi w Rozdz. III. Części I,

Z rozważań powyższych wynika jeszcze, że, po ustaleniu jednostki długości, miara odcinka współmiernego z jednostką jest liczbą ułamkową, która jest oznaczona co do swej wartości, ale tylko pod tym względem, innemi słowy, jeżeli jednostka długości jest ustalona, a pewna liczba ułamkowa α jest miarą pewnego odcinka a , współmiernego z jednostką, to każda liczba ułamkowa, równa liczbie α , i tylko liczba ułamkowa sprawdzająca ten warunek jest także miarą odcinka a .

§ 48 Tw. I. Jeżeli liczniki i mianowniki dwóch liczb ułamkowych

$$(m, p) \text{ i } (m', p')$$

sprawdzają równości postaci

$$(1) \quad \begin{cases} m' = \lambda \cdot m \\ p' = \lambda \cdot p, \end{cases}$$

gdzie λ oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą (koniecznie jednak od zera większą), to w takim razie zachodzi równość

$$(2) \quad (m', p') = (m, p).$$

Istotnie równości (1) pociągają za sobą równość:

$$m \cdot p' = m' \cdot p,$$

z której (§ 47 Tw, I) wynika właśnie równość (2)

Z powyższego twierdzenia wynika, że wartość liczby ułamkowej nie zmienia się jeżeli zastąpimy jej licznik i mianownik odpowiednio, albo przez iloczyn tych liczb całkowitych, pomnożonych przez jakąkolwiek trzecią byle od zera odmienną liczbę, albo przez ilorazy podziału tychże liczb przez jakąkolwiek ich wspólną podwielokrotność.

Fakta te dają nam możność przekształcania liczb ułamkowych czyli tworzenia liczb ułamkowych równych danej liczbie ułamkowej, ale mających odmienne liczniki i mianowniki.

Def. I. Jeżeli licznik i mianownik oznaczonej liczby ułamkowej

$$(m, p)$$

są liczbami względnie pierwszymi, to ta liczba ułamkowa zowie się *nieprzywiedlną*.

Tw. II. Zawsze istnieje liczba ułamkowa nieprzywiedlna równa dowolnie naprzód danej liczbie ułamkowej.

Istotnie liczbę, o którą chodzi, uzyskamy oczywiście, dzieląc licznik i mianownik danej liczby ułamkowej przez ich największą wspólną podwielokrotność.

Tw. III. Jeżeli pewna liczba ułamkowa (m', p') sprawdza równość

$$(1) \quad (m', p') = (m, p),$$

a liczba (m, p) jest *nieprzywiedlna*, to w takim razie licznik i mianownik liczby (m', p') są odpowiednie podzielne przez licznik i mianownik liczby (m, p) a odnośne ilorazy są równe pomiędzy sobą.

Istotnie, na podstawie tw. I paragrafu poprzedzającego, równość (1) pociąga za sobą równość

$$(2) \quad m' \cdot p = m \cdot p'.$$

Z równości tej wynika, że iloczyn

$$m \cdot p'$$

jest podzielny przez liczbę p . Ponieważ zaś liczby całkowite p i m są względnie pierwsze, przeto¹⁾ liczba p' jest podzielna przez liczbę p . Mamy więc

$$(3) \quad p' = l \cdot p,$$

gdzie l oznacza pewną liczbę całkowitą.

Z równości (2) i (3) mamy:

$$m' \cdot p = m \cdot l \cdot p,$$

skąd

$$m' \cdot p = (m \cdot l) \cdot p,$$

a ponieważ

$$p > 0,$$

¹⁾ Zob. n. p. Zaremba. *Zarys pierwszych zasad teorii liczb całkowitych*, Kraków, 1907, str. 137, tw. VII.

przeto

$$(4) \quad m' = m \cdot l$$

Równości (3) i (4) wyrażają łącznie twierdzenie, o którego udowodnienie właśnie chodziło.

Tw. IV. Jeżeli dwie liczby ułamkowe nieprzywiedlne (m, p) i (m', p') są równe pomiędzy sobą, to licznik i mianownik każdej z nich równają się odpowiednio licznikowi i mianownikowi drugiej.

Żeby twierdzenie to uzasadnić zważmy, iż na podstawie twierdzenia poprzedzającego znamy

$$(1) \quad \begin{cases} m' = l \cdot m \\ p' = l \cdot p, \end{cases}$$

gdzie l oznacza pewną liczbę całkowitą koniecznie od zera większą. Gdybyśmy mieli

$$l > 1,$$

to z równości (1) wynikałoby, że wbrew założeniu liczba ułamkowa ($m' p'$) nie jest nieprzywiedlna. Mamy więc

$$l = 1,$$

a zatem, na podstawie równości (1) mamy

$$m = m' \quad \text{oraz} \quad p = p',$$

a te równości wyrażają właśnie twierdzenie, o które chodziło.

Opierając się na twierdzeniach, podanych w tym paragrafie możemy zawsze rozwiązać zagadnienie następujące: do kilku dowolnie danych liczb ułamkowych dobrać liczby ułamkowe odpowiednio im równe, a przytem takie, żeby ich mianowniki były równe pomiędzy sobą. Czynność rozwiązywania tego zagadnienia zowiemy *sprowadzaniem danych liczb ułamkowych do wspólnego mianownika*. Liczba całkowita, przedstawiająca wspólną wartość mianowników liczb ułamkowych, stanowiących rozwiązanie powyższego zagadnienia, zowie się *wspólnym mianownikiem*, do którego dane liczby zostały sprowadzone.

Żeby się przekonać, że jakąkolwiek ilość dowolnie danych liczb ułamkowych można zawsze sprowadzić do wspólnego mianownika, oznaczmy przez w jakąkolwiek, byle od zera większą wspólną wielokrotność mianowników liczb ułamkowych danych. Jeżeli tedy pomnożymy licznik i mianownik każdej z danych liczb ułamkowych przez iloraz podziału liczby w przez mianownik rozważanej liczby ułamkowej, to oczywiście sprowadzimy dane liczby do wspólnego mianownika, którym będzie liczba w . Stwierdzamy więc, że sprowadzenie danych

liczb ułamkowych do wspólnego mianownika jest zawsze możliwe i stwierdzamy nadto, że za wspólny mianownik można przyjąć jakąkolwiek od zera większą wspólną wielokrotność mianowników liczb ułamkowych danych.

Ze stanowiska techniki rachunkowej zaleca się przyjmować, przy sprowadzaniu danych liczb ułamkowych do wspólnego mianownika, za wspólny mianownik jaknajmniejszą liczbę, innemi słowy, ważnem jest sprowadzanie danych liczb ułamkowych do najmniejszego wspólnego mianownika. Z tw. III wnosimy łatwo, że w przypadku, kiedy dane liczby ułamkowe są nieprzywiedlne, wspólny mianownik, do jakiego je sprowadzić można, zawsze równa się pewnej wspólnej wielokrotności ich mianowników. Zatem, w tym przypadku, najmniejszym wspólnym mianownikiem, do jakiego rozważane liczby mogą być sprowadzone, równa się najmniejszej od zera większej wspólnej wielokrotności ich mianowników. Stąd wnosimy łatwo, że najmniejszy wspólny mianownik, do jakiego możemy sprowadzić dowolnie już dane liczby ułamkowe, równa się najmniejszej od zera większej wspólnej wielokrotności mianowników liczb ułamkowych nieprzywiedlnych, odpowiednio równych liczbom ułamkowym danym.

§. 49. Uważajmy dwie liczby ułamkowe

$$(m, p) \text{ i } (m' p'),$$

przyjmijmy jakikolwiek odcinek właściwy u za jednostkę i oznaczmy przez a i a' odcinki, których miarami byłyby odpowiednie liczby (m, p) i $(m' p')$, a przez b sumę odcinków a i a' . Przy tych oznaczeniach możemy podać definicję dodawania liczb ułamkowych, jak następuje:

Def. I. Wynikiem dodania liczby ułamkowej (m', p') do liczby ułamkowej (m, p) , czyli sumą liczby ułamkowej (m, p) i liczby $(m' p')$, nazywać będziemy każdą liczbę ułamkową będącą miarą odcinka b w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę.

Za symbol sumy liczb ułamkowych (m, p) i $(m' p')$ przyjmujemy symbol

$$(m, p) + (m', p'),$$

a liczby ułamkowe

$$(m, p) \text{ i } (m', p')$$

zowiemy *składnikami* tej sumy. Czynność wytwarzania sumy liczb ułamkowych zowie się ich *dodawaniem*.

Powyższa definicja dodawania następcza pewne wątpliwości:

1° Nie jest bezpośrednio oczywistem, że odcinek, któryśmy wyżej oznaczyli przez b jest współmierny z jednostką u ; gdyby zaś okoliczność ta nie zawsze zachodziła, to dodawanie liczb ułamkowych mogłoby być niekiedy niewykonalne.

2° Ponieważ długości odcinków a i a' , a więc i długość odcinka b , zależne są od wyboru jednostki długości u , przeto powstaje wątpliwość czy wybór

jednostki długości nie wywiera wpływu na wartość sumy dwóch oznaczonych liczb ułamkowych.

Wspomniane wątpliwości usuwa twierdzenie następujące:

Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez w jakąkolwiek, byle od zera większą wspólną wielokrotność mianowników dwóch liczb ułamkowych

$$(m, p) \text{ i } (m' p'),$$

a przez l i l' ilorazy podziału liczby w odpowiednio przez p i p' , to, bez względu na wybór jednostki, każda liczba ułamkowa, równa liczbie

$$(l.m + l'.m', w)$$

i tylko liczba ułamkowa, spełniająca ten warunek, przedstawiać będzie sumę

$$(m, p) + m', p').$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zachowajmy wszystkie oznaczenia, któremi posługiwaliśmy się wyżej przy podawaniu definicji dodawania liczb ułamkowych.

Ponieważ (§ 48, tw. I) mamy

$$(l.m, l.p) = (m, p)$$

$$(l'.m', l'.p) = (m', p'),$$

ponieważ nadto

$$l.p = l'.p' = w$$

przeto

$$(l.m, w) = (m, p)$$

$$(l'.m', w) = (m', p').$$

Z tego znów wynika, na podstawie definicji równości liczb ułamkowych, że liczby

$$(l.m, w) \text{ i } (l'.m', w)$$

jako równe liczbom

$$(m, p) \text{ i } (m', p'),$$

będącymi odpowiednio miarami odcinków a i a' , są także same odpowiednio miarami tychże odcinków a i a' . Zatem odcinek d , który mieści się dokładnie w razy w jednostce długości u mieścić się będzie

$$l.m \text{ razy } w \text{ o odcinku } a$$

a

$$l'.m' \text{ razy } w \text{ o odcinku } a'.$$

Z tego zaś wynika, że odcinek d mieści się w sumie b odcinków a i a' tyle razy, ile wynosi suma

$$l.m + l'.m'.$$

Ponieważ zaś odcinek d mieści się w jednostce u , przeto liczba ułamkowa

$$(1) \quad (l.m + l'.m', w)$$

jest miarą odcinka b , gdy za jednostkę przyjmujemy odcinek u .

Ponieważ zaś każda liczba ułamkowa, równa liczbie (1), przedstawia, na podstawie definicji równości liczb ułamkowych, także miarę odcinka b przy rozważanej jednostce, przeto każda liczba ułamkowa, równa liczbie (1), uważana być może za sumę liczb ułamkowych

$$(2) \quad (m, p) \text{ i } (m', p').$$

Chodzi jeszcze tylko o to, czy za sumę liczb (2) uważana być może tylko liczba ułamkowa, równa liczbie (1). Otóż, jeżeli pewna liczba ułamkowa (m'', p'') może być uważana za sumę liczb (2), to przy stosownym wyborze odcinka u i po wyznaczeniu odcinka b w sposób określony wyżej, będzie ona przedstawiać miarę odcinka b , gdy odcinek u przyjmiemy za jednostkę. Ponieważ zaś widzieliśmy, że, bez względu na wybór odcinka właściwego u liczba (1) przedstawia miarę odcinka b , gdy odcinek u przyjmiemy za jednostkę, przeto liczba (m'', p'') i liczba (1), jako miary tego samego odcinka przy tej samej jednostce długości, są równe pomiędzy sobą, a to tylko pozostawało jeszcze do udowodnienia.

Bezpośrednim następstwem twierdzenia powyższego są twierdzenia następujące:

Tw. II. Jeżeli pewna liczba ułamkowa przedstawia sumę

$$(1) \quad (m, p) + (m', p')$$

dwóch liczb ułamkowych (m, p) i (m', p') , to każda liczba ułamkowa, jej równa, i tylko liczba ułamkowa, spełniająca ten warunek, przedstawia także powyższą sumę.

Z twierdzenia poprzedzającego wynika bezpośrednio tw. następujące:

Tw. III. Warunek konieczny i wystarczający, aby pewna liczba ułamkowa (u'', p'') przedstawiała sumę (1), wyrazić możemy przez równość

$$(m'', p'') = (m, p) + (m', p')^1).$$

¹⁾ W podręcznikach arytmetyki orzeczenie,

(A) że liczba ułamkowa u'' jest sumą liczb ułamkowych u i u' i orzeczenie,

Tw. IV. Jeżeli oznaczymy przez

$$(m, p), (m', p'), (m_1, p_1) \text{ i } (m'_1, p'_1)$$

cztery liczby ułamkowe, spełniające równości

$$(1) \quad (m, p) = (m_1, p_1); \quad (m', p') = (m'_1, p'_1),$$

to w takim razie zachodzi także równość:

$$(2) \quad (m, p) + (m', p') = (m_1, p_1) + (m'_1, p'_1).$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zwróćmy się znowu do definicji dodawania liczb ułamkowych i zachowajmy wszystkie oznaczenia, któremiśmy się przy podawaniu tej definicji posługiwali. Ze względu na równości (1) liczby

$$(m_1, p_1) \text{ i } (m'_1, p'_1)$$

będą odpowiednio, po przyjęciu odcinka u za jednostkę, miarami tych odcinków a i a' , których miarami są liczby

$$(m, p) \text{ i } (m', p')$$

przy rozważonej jednostce; jeżeli więc pewna liczba ułamkowa (m'', p'') jest miarą sumy b odcinków a i a' , to ona przedstawia zarówno sumę

$$(m, p) + (m', p')$$

jako też i sumę

$$(m_1, p_1) + (m'_1, p'_1).$$

że zachodzi równość

$$(B) \quad u'' = u + u'$$

przyjmowane bywają najczęściej za dwa zdania równoważne bez żadnych wyjaśnień, jako rzecz sama przez się rozumiejąca się. Takie postępowanie jest niezawodnie niepoprawne: istotnie, z definicji symbolu

$$u + u'$$

wynika, że ten symbol przedstawia nie jakąś jedną liczbę ułamkową, lecz jest wspólnym symbolem liczb ułamkowych, stanowiących razem pewną klasę (K). Póki więc nie jest udowodnionem, że wszystkie liczby klasy (K) są równe pomiędzy sobą, póki nadto nie jest wykazaniem, że każda liczba równa jednej z liczb klasy (K) sama do tej klasy należy, póty nie można, niewykraczając przeciwko zasadom rozdz. III-go części I-szej, wyrażać przez równość (B) treści zdania (A), albowiem, gdyby nie wszystkie liczby klasy (K) były równe pomiędzy sobą, to, wbrew rzeczonym zasadom, równość (B) i równość

$$u''' = u + u'$$

gdzie u''' przedstawia czwartą liczbę ułamkową, nie pociągałyby za sobą równości

$$u'' = u''';$$

gdyby zaś nie każda liczba, równa jakiejś liczbie klasy (K), sama do klasy (K) należała, to równość (B) nie stanowiłaby warunku wystarczającego, ażeby u'' była sumą liczb $u + u'$.

Nadmieniamy, że przy innych działaniach można poczynić całkiem analogiczne uwagi.

Mamy więc (tw. III) zarazem

$$(m'', p'') = (m, p) + (m', p')$$

i

$$(m'', p'') = (m_1, p_1) + (m'_1, p'_1),$$

skąd wynika równość (2), którą mieliśmy właśnie uzasadnić.

Tw. V. (Własność przemienności sumy dwóch składników). Jakiegolwiek liczby ułamkowe oznaczylibyśmy przez (m, p) i (m', p') , mamy w każdym razie

$$(1) \quad (m, p) + (m', p') = (m' p') + (m, p).$$

Prawdziwość twierdzenia tego dostrzegamy już intuicyjnie bezpośrednio ze względu na definicję dodawania liczb ułamkowych, ale rozważane twierdzenie jest także łatwe do uzasadnienia na podstawie Tw. I; jeżeli bowiem zwrócimy się do oznaczeń, którymi w tym twierdzeniu posługiwaliśmy się, to natychmiast stwierdzimy, że prócz równości

$$(2) \quad (m, p) + (m', p') = (l \cdot m + l' \cdot m' w)$$

mamy i równość

$$(3) \quad (m' p') + (m, p) = (l' \cdot m' + l \cdot m, w),$$

a ponieważ na podstawie znanych własności liczb całkowitych

$$l \cdot m + l' \cdot m' = l' \cdot m' + l \cdot m;$$

ponieważ więc mamy

$$(l \cdot m + l' \cdot m, w) = (l' \cdot m' + l \cdot m, w),$$

przeto ze względu na (2) i (3) zachodzi równość (1), o uzasadnienie której właśnie chodziło.

Tw. VI. Jeżeli dwie liczby ułamkowe

$$(m, p) \text{ i } (m_1, p_1)$$

sprawdzają nierówność

$$(1) \quad (m, p) < (m_1, p_1),$$

to, jakąkolwiek liczbę ułamkową

$$(m', p')$$

rozważalibyśmy, mamy w każdym razie:

$$(2) \quad (m' p') + (m, p) < (m', p') + (m_1, p_1).$$

Istotnie, przyjmijmy za jednostkę jakiegokolwiek odcinek właściwy u i uważajmy odcinki

$$a, a_1 \text{ i } a',$$

których miarami byłyby odpowiednio liczby

$$(m, p), (m_1, p_1) \text{ i } (m', p').$$

Ze względu (1) mamy

$$a < a_1,$$

zatem

$$(3) \quad a' + a < a' + a_1,$$

a ponieważ sumy

$$(m', p') + (m, p) \text{ i } (m', p') + (m_1, p_1)$$

przedstawiają odpowiednio, przy rozważanej jednostce, miary odcinka

$$a' + a$$

i odcinka

$$a' + a_1,$$

przeto (§ 47, Def. I), nierówność (3) pociąga za sobą nierówność (2), o dowód której właśnie chodziło.

§ 50. Zwróćmy się do tego przypadku szczególnego mierzenia odcinków współmiernych z jednostką długości u , w którym odcinek u jest podwielokrotnością odcinka a , mającego uleżć mierzeniu. Jeżeli tedy odcinek u mieści się w odcinku a m razy, to na podstawie ogólnych definicji, podanych w ustępach poprzedzających, miarą odcinka a będzie liczba ułamkowa

$$(m, 1),$$

tę osobiwość mająca, iż mianownikiem jej będzie jedność. Z drugiej znów strony, żeby określić długość odcinka a w rozważanym przypadku, dostatecznem jest oznaczyć liczbę całkowitą m , określającą ile razy odcinek u mieści się w odcinku a . Z tego powodu umawiamy się, że orzeczenie:

»Pewna liczba całkowita m jest miarą odcinka a w razie przyjęcia pewnego odcinka u za jednostkę« wyraża iż odcinek u mieści się m razy w odcinku a .

Z natury rzeczy zwraca się teraz nasza uwaga do zbioru, który powstaje przez złączenie razem zbioru liczb ułamkowych i zbioru liczb całkowitych. Nowy zbiór, w ten sposób utworzony, zowie się **zbiorem liczb wymiernych bezwzględnych** a każdy element tego zbioru, bez względu na to, czy jest liczbą ułamkową czy też całkowitą, zowie się **liczbą wymierną bezwzględną**.

Ponieważ w niniejszym rozdziale nie będziemy rozważać żadnych innych liczb wymiernych, prócz liczb wymiernych bezwzględnych, przeto, dla krótkości,

zastępować będziemy wyrażenie »liczba wymierna bezwzględna« przez wyrażenie »liczba wymierna«.

Czytelnik uzasadni sam z łatwością twierdzenie następujące:

Tw. I. Jeżeli odcinek właściwy u , przyjęty za jednostkę długości, jest oznaczony, to w takim razie każdej, dowolnie naprzód danej liczbie wymiernej, odpowiada odcinek oznaczonej długości, którego miarą jest właśnie owa liczba wymierna.

Okoliczności, które doprowadziły nas do ogólnego pojęcia liczby wymiernej, nastroją nam definicje następujące:

Def. I. Jeżeli oznaczymy przez w i w' dwie dowolnie dane liczby wymierne, to orzekać będziemy, że te liczby spełniają pierwszy drugi lub trzeci ze związków

$$w = w', \quad w < w' \quad \text{i} \quad w > w',$$

zależnie od tego, czy odcinki a i a' wyznaczone z warunku, aby po przyjęciu, dowolnie naprzód wybranego, odcinka właściwego u za jednostkę, miarami ich były liczby w i w' , spełniają związek

$$a = a',$$

związek

$$a < a'$$

czy też związek

$$a > a'.$$

Def. II. Wynikiem dodania jakiejkolwiek liczby wymiernej w' do jakiejkolwiek drugiej liczby wymiernej w , czyli sumą liczb w i w' , zwiemy każdą liczbę wymierną, która, w razie przyjęcia jakiegokolwiek odcinka właściwego u za jednostkę, może być uważana za miarę odcinka, równego sumie tych dwóch odcinków a i a' , których miarami byłyby odpowiednie liczby w i w' ; za symbol sumy liczb w i w' przyjmujemy symbol

$$w + w',$$

a liczby w i w' zwiemy *składnikami* ich sumy.

Powyższe definicje oczywiście nie mogą doprowadzić do żadnej sprzeczności z definicjami, przyjętymi już przez nas w teorii liczb ułamkowych, ale zachodzi wątpliwość czy one nie naruszają zasad, wyłożonych w rozdziale III-cim części I i czy nie mogą doprowadzić do sprzeczności z teorią liczb całkowitych. Żeby wątpliwości te usunąć i zdobyć przez to prawo do ostatecznego przyjęcia rzeczonych definicji, wystarczy oczywiście uzasadnić twierdzenia następujące:

(A) Definicja I czyni zadość ogólnym zasadom wyłożonym w rozdziale III-cim części I-szej.

(B) Porównanie ilościowe dwóch liczb całkowitych na podstawie def. I doprowadza zawsze do tego samego wyniku, co ich porównanie według reguły, przyjętej w teorii liczb całkowitych.

(C) Jeżeli pewna liczba całkowita jest wynikiem dodawania dwóch liczb całkowitych na podstawie def. II, to ta liczba zlewa się z wynikiem dodawania rozważanych liczb według reguły, przyjętej w teorii liczb całkowitych.

Upewnijmy się najpierw o słuszności twierdzeń (B) i (C). W tym celu oznaczmy przez m m' dwie liczby całkowite jakiegokolwiek i oznaczmy przez a i a' odcinki, których miarami byłyby odpowiednio te liczby w razie przyjęcia za jednostkę pewnego odcinka właściwego u . Ponieważ mamy

$$a = m \cdot u$$

$$a' = m' \cdot u,$$

przeto, na podstawie def. I liczbę m należy uważać albo za równą liczbie m' , albo za mniejszą lub też za większą od niej zależnie od tego, czy mamy

$$a = a', \quad a < a' \quad \text{czy też} \quad a > a'.$$

Z drugiej znów strony, zależnie od tego, czy odcinki a i a' sprawdzać będą pierwszy, drugi czy też trzeci z powyższych związków, liczba m oczywiście będzie, w znaczeniu przyjętym w teorii liczb całkowitych, albo równa liczbie m' , albo mniejsza lub większa od niej. Zatem, twierdzenie (B) zachodzi w podanym brzmieniu. Żeby upewnić się także o słuszności tw. (C) należy tylko zważyć, iż miarą odcinka

$$a + a'$$

będzie liczba całkowita, przedstawiająca, w znaczeniu, przyjętym w teorii liczb całkowitych, sumę

$$m + m',$$

skąd wynika, że, zgodnie z brzmieniem tw. (C), suma dwóch liczb całkowitych w znaczeniu, przyjętym w teorii liczb całkowitych, jest zarazem i sumą tychże liczb w znaczeniu def. II.

Pozostaje jeszcze do uzasadnienia tw. (A). Twierdzenie to wysnujemy w odpowiednim miejscu z twierdzeń, które podajemy niżej.

Tw. II. Jeżeli oznaczmy przez (m, p) jakąkolwiek liczbę ułamkową, a przez l jakąkolwiek liczbę całkowitą, to związki

$$(1) \quad (m, p) = l, \quad (m, p) < l \quad \text{i} \quad (m, p) > l$$

będą równoważne odpowiednio związkom

$$(2) \quad m = l.p, \quad m < l.p \text{ i } m > l.p.$$

Istotnie, przyjąwszy jakikolwiek odcinek właściwy u za jednostkę, uważamy odcinki a i b , których miarami byłyby odpowiednio liczba ułamkowa (m, p) i liczba całkowita l . Ponieważ sam odcinek u jest wspólną podwielokrotnością odcinków b i u i ponieważ odcinek u mieści się w odcinku b tyle razy, ile wynosi liczba l , a w odcinku u jeden raz, przeto liczba ułamkowa

$$(l, 1)$$

jest, przy rozważanej jednostce długości, miarą odcinka b . Zatem na podstawie reguły porównywnia ilościowego liczb ułamkowych, związki

$$(3) \quad (m, p) = (l, 1), \quad (m, p) < (l, 1) \text{ i } (m, p) > (l, 1)$$

są równoważne związkom

$$a = b, \quad a < b \text{ i } a > b.$$

Ponieważ zaś te ostatnie trzy związki są, na podstawie def. I, odpowiednio równoważne związkom (1), przeto związki (1) są odpowiednio równoważne związkom (3). Ale (§ 47, tw. I) związki (3) są równoważne odpowiednio związkom

$$m.1 = l.p, \quad m.1 < l.p \text{ i } m.1 > l.p,$$

które znów oczywiście równoważne są związkom (2). Zatem związki (1) i (2) są, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, odpowiednio równoważne pomiędzy sobą.

Wniosek I. Żeby liczba ułamkowa równała się liczbie całkowitej, koniecznem jest i wystarczajacem, żeby jej licznik podzielny był przez mianownik; odnośny iloraz przedstawia właśnie liczbę całkowitą, równą rozważanej liczbie ułamkowej.

Wniosek II. Żeby oznaczona liczba ułamkowa równała się zeru, koniecznem jest i wystarczajacem, żeby jej licznik równał się zeru.

Obecnie możemy już łatwo uzasadnić tw. (A). Udowodnione przed chwilą twierdzenie poucza nas w szczególności, iż wynik porównania ilościowego liczby ułamkowej i liczby całkowitej nie jest zależny od wyboru jednostki długości. Z drugiej strony wynik porównania ilościowego dwóch liczb ułamkowych jest również niezależny (§ 47, tw. I, Wniosek) od wyboru jednostki. Nadto, ze względu na tw. (B), wynik porównania ilościowego dwóch liczb całkowitych także nie zależy od wyboru jednostki. Zatem, wynik porównania ilościowego dwóch liczb wymiernych w żadnym razie nie zależy od wyboru jednostki długości. Opierając się na tej uwadze, możemy w twier-

dzeniach, podanych pod (A), (B), (C), (D), (E) i (F) w § 47, uważać, że symbole

$$\alpha, \beta \text{ i } \gamma$$

nie koniecznie oznaczające liczby ułamkowe, lecz jakiekolwiek już liczby wymierne, i uzasadnić je w tej ogólniejszej postaci tą samą metodą, którą posługiwaliśmy się w § 47-ym. Ponieważ zaś twierdzenie, podane w niniejszym paragrafie pod (A), równoważne jest układowi w powyższy sposób rozszerzonych, a pod (A), (B), (C), (D), (E) i (F) w § 47-ym podanych twierdzeń, przeto należy uważać tw. (A) niniejszego paragrafu za uzasadnione.

Ostatecznie uzasadniliśmy każde z twierdzeń, podanych wyżej pod (A), (B) i (C), i tem samym usunęliśmy wszelką wątpliwość co do poprawności definicyi I II.

Tw. III. Jeżeli cztery liczby wymierne

$$w, w', w \text{ i } w'$$

spełniają równości

(1) i

$$\begin{cases} w = w_1, \\ w' = w'_1 \end{cases}$$

a jakaś piąta liczba wymierna W uważana być może za sumę

$$(2) \quad w + w',$$

to liczba W może być uważana także za sumę

$$(3) \quad w_1 + w'_1$$

Istotnie, z założeń twierdzenia wynika, że istnieje pewien odcinek właściwy u , który ma własność następującą: jeżeli odcinek ten przyjmujemy za jednostkę i wyznaczymy dwa odcinki a i a' , których miarami byłyby odpowiednio liczby w i w' , to miarą odcinka

$$a + a'$$

będzie liczba W . Ponieważ zaś, na podstawie def. I, z równości (1) wynika, że miarami odcinków a i a' , przy rozważanej jednostce, będą odpowiednio i liczby

$$w_1 \text{ i } w'_1,$$

przeto, na podstawie def. II, liczbę W , zgodnie z brzmieniem twierdzenia, uważać można za sumę

$$w_1 + w'_1.$$

Tw. IV. Jeżeli pewna liczba wymierna W przedstawia sumę

$$(1) \quad w + w'$$

pewnych dwóch liczb wymiernych

$$w \text{ i } w',$$

a pewna czwarta liczba wymierna W_1 sprawdza równość:

$$(2) \quad W_1 = W,$$

to liczba W_1 może także być uważana za sumę (1).

Istotnie, z założeń twierdzenia wynika, że istnieje pewien odcinek właściwy u , który ma własność następującą: jeżeli odcinek ten przyjmiemy za jednostkę i wyznaczymy odcinki a i a' , których miarami byłyby odpowiednio liczby w i w' , to liczba W będzie miarą odcinka

$$(3) \quad a + a'.$$

Ale, ze względu na równość (2) i na def. I, liczba W_1 będzie również miarą sumy (3). Zatem, na podstawie def. II, liczba W_1 może być także uważana, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, za sumę (1).

Tw. V. Jeżeli każda z pewnych dwóch liczb wymiernych W i W_1 uważana być może za sumę

$$(1) \quad w + w'$$

dwóch liczb wymiernych w i w' , to w takim razie zachodzi równość

$$(2) \quad W = W_1$$

Żeby twierdzenie to udowodnić, zważmy najpierw, że, ze względu na tw. II można do każdej liczby wymiernej, chociażby i całkowitej, dobrać liczbę ułamkową jej równą. Zatem, można będzie niezawodnie znaleźć cztery liczby ułamkowe spełniające równości następujące:

$$(3) \quad \begin{cases} (m, p) = w \\ (m', p') = w' \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} (q, r) = W \\ (q_1, r_1) = W_1. \end{cases}$$

Otóż na podstawie założeń twierdzenia niniejszego jako też równości (4) i tw. IV, każdą z liczb ułamkowych

$$(5) \quad (q, r) \text{ i } (q_1, r_1)$$

uważać można za sumę

$$w + w'.$$

Z tego zaś wynika, na podstawie równości (3) i tw. III, że każdą z liczb ułamkowych (5) uważać można za sumę

$$(m, p) + (m', p').$$

Zatem (§ 49, tw. II) zachodzi niezawodnie równość

$$(q, r) = (q_1, r_1),$$

a z tej równości, jakoteż równości (4), wynika równość

$$W = W_1,$$

na której właśnie twierdzenie polega.

Tw. VI. Wyznaczenie sumy dwóch liczb wymiernych jest zawsze wykonalne.

Istotnie, ze względu na tw. III możemy zawsze zastąpić przy dodawaniu liczb wymiernych każdy składnik przez równą mu liczbę ułamkową i sprowadzić w ten sposób zagadnienie do wyznaczenia sumy dwóch liczb ułamkowych. To zaś ostatecznie zagadnienie jest zawsze (§ 49, Tw. I) rozwiązalne. Zatem wyznaczenie sumy dwóch liczb wymiernych jest rzeczywiście zawsze wykonalne.

Twierdzenia III, IV, V i VI możemy oczywiście wyrazić łącznie w postaci jedyne go twierdzenia następującego:

Tw. VII. Dodawanie liczb wymiernych jest zawsze wykonalne, a wynik dodawania zależy jedynie od wartości składników i jest oznaczony w zupełności co do wartości, ale też tylko co do wartości.

Uwaga I. Z powyższego twierdzenia wynika, że warunek konieczny i wystarczający, aby pewna liczba wymierna W uważana być mogła za wynik dodania pewnej liczby wymiernej w do pewnej drugiej liczby wymiernej w' można wyrazić przez równość

$$W = w + w'.$$

Uwaga II. Z uwagi I wynika, że treść tw. III możemy obecnie wyrazić jak następuje: jeżeli cztery liczby wymierne

$$w, w', w_1 \text{ i } w'_1$$

spełniają równości

$$w = w_1 \text{ i } w' = w'_1,$$

to w takim razie zachodzi równość:

$$(1) \quad w + w' = w_1 + w'_1$$

Tw. VIII. (Własność łączności dodawania). Jeżeli oznaczymy przez

$$w, w' \text{ i } w''$$

trzy dowolnie dane liczby wymierne, to mieć będziemy:

$$(2) \quad (w + w') + w'' = w + (w' + w'')$$

Istotnie, w każdym razie znajdują się trzy liczby ułamkowe o pewnym wspólnym mianowniku

$$p$$

odpowiednio równe liczbom (1). Oznaczywszy odpowiednio przez

$$m, m' \text{ i } m''$$

liczniki rzeczonych liczb ułamkowych, mieć będziemy

$$w = (m, p), w' = (m', p), w'' = (m'', p).$$

Zatem,

$$w + w' = (m + m', p),$$

$$w' + w'' = (m' + m'', p)$$

skąd

$$(3) \quad \begin{cases} (w + w') + w'' = ([m + m'] + m'', p) \\ w + (w' + w'') = (m + [m' + m''], p). \end{cases}$$

Ponieważ zaś, na podstawie znanych własności liczb całkowitych, mamy

$$[m + m'] + m'' = m + [m' + m''],$$

przeto

$$([m + m'] + m'', p) = (m + [m' + m''], p),$$

a z tej równości, jakoteż równości (3) wynika właśnie równość (2), którą chcieliśmy uzasadnić.

Tw. IX. (Własność przemienności). Jakiegokolwiek liczby wymierne oznaczylibyśmy przez w i w' , mamy zawsze

$$(1) \quad w + w' = w' + w.$$

Istotnie oznaczmy przez

$$(m, p) \text{ i } (m', p')$$

dwie liczby ułamkowe spełniające równości

$$(m, p) = w \text{ i } (m', p') = w'$$

Ze względu na Uw. II przy tw. VII mamy

$$w + w' = (m, p) + (m', p'); w' + w = (m', p') + (m, p),$$

a ponieważ (§ 49, tw. V) mamy

$$(m, p) + (m', p') = (m' p') + (m, p)$$

przeto równość (1) będzie rzeczywiście zawsze spełniona.

Tw. X. Jeżeli oznaczymy przez w jakąkolwiek liczbę wymierną, a przez w_1 i w_2 dwie liczby wymierne, spełniające nierówność

$$(1) \quad w_1 < w_2,$$

to mieć będziemy

$$(2) \quad w + w_1 < w + w_2.$$

Istotnie, uważajmy liczby ułamkowe

$$(m, p), (m_1, p_1) \text{ i } (m_2, p_2),$$

spełniające równości

$$(3) \quad (m, p) = w, (m_1, p_1) = w_1 \text{ i } (m_2, p_2) = w_2.$$

Ze względu na (1) mamy

$$(m_1, p_1) < (m_2, p_2)$$

zatem (§ 49, tw. VI)

$$(4) \quad (m, p) + (m_1, p_1) < (m, p) + (m_2, p_2).$$

Ale ze względu na (3) (Uwaga II przy tw. VII) mamy

$$w + w_1 = (m, p) + (m_1, p_1)$$

$$w + w_2 = (m, p) + (m_2, p_2)$$

a z tych równości i nierówności (4) wynika nierówność (2) o uzasadnienie której właśnie chodziło.

Tw. XI. Każda liczba wymierna w spełnia równości następujące

$$(1) \quad w + 0 = w$$

oraz

$$(2) \quad 0 + w = w.$$

Istotnie, oznaczwszy przez

$$(m, p)$$

liczbę ułamkową, spełniającą równość

$$(3) \quad (m, p) = w$$

i zważywszy następnie, że

$$(4) \quad (0, p) = 0,$$

wnosimy z równości (3) i (4) (Uwaga II przy tw. VII) że

$$w + 0 = (m, p) + (0, p) = (m + 0, p) = (m, p);$$

mamy więc

$$w + 0 = (m, p),$$

a zatem, ze względu na (3), równość (1) rzeczywiście zachodzi. Ponieważ zaś (Tw. IX)

$$0 + w = w + 0,$$

przeto zachodzi i równość (2), a więc twierdzenie jest uzasadnione w zupełności.

W tym rozdziale pomijamy teorię sum, więcej niż dwóch składników, ze względu na ogólną teorię, którą wyłożymy w dwóch następujących rozdziałach.

§ 51. Ułamkiem *właściwym* nazywamy każdą liczbę ułamkową

$$(m, p),$$

która sprawdza nierówność

$$0 < (m, p) < 1.$$

Opierając się na tw. II § poprzedzającego, upewniamy się łatwo, że warunek konieczny i wystarczający, aby liczba ułamkowa

$$(m, p)$$

była ułamkiem właściwym, polega na nierównościach

$$0 < m < p.$$

Powiadam teraz, że każda liczba ułamkowa, która nie jest ułamkiem właściwym i nie równa się przy tem żadnej liczbie całkowitej, może być przedstawiona w postaci sumy liczby całkowitej, od zera większej, i ułamka właściwego. Przekonywamy się o tem w sposób następujący: Uważajmy jakąkolwiek liczbę ułamkową

$$(m, p);$$

gdybyśmy mieli

$$m = 0 \text{ albo } m = p,$$

to mielibyśmy w pierwszym przypadku

$$(m, p) = 0,$$

a w drugim

$$(m, p) = 1.$$

Gdyby zaś było

$$0 < m < p,$$

to rozważona liczba byłaby już ułamkiem właściwym. Pozostaje więc do zbadania przypadek, kiedy

$$(1) \quad m > p.$$

Na podstawie teorii dzielenia liczb całkowitych możemy zawsze wyznaczyć dwie liczby całkowite q i r w ten sposób, żeby

$$(2) \quad m = q \cdot p + r$$

oraz

$$(3) \quad r < p,$$

a ze względu na (1) okaże się, że mieć będziemy

$$(4) \quad q > 0.$$

Gdyby wypadło

$$r = 0,$$

to mielibyśmy

$$(m, p) = q$$

i rozważana liczba ułamkowa równałaby się liczbie całkowitej q . Jeżeli zaś ta okoliczność nie zachodzi, to mamy

$$(5) \quad r > 0.$$

Z drugiej znów strony ze względu na (2) mamy:

$$(m, p) = (q \cdot p, p) + (r, p),$$

a ponieważ

$$(q \cdot p, p) = q$$

przeto

$$(6) \quad (m, p) = q + (r, p).$$

Ponieważ, ze względu na (3) i (4) mamy

$$0 < (r, p) < 1,$$

a nadto liczba q spełnia nierówność (4), przeto wzór (6) jest dowodem słuszności uwagi, którą pragnęliśmy uzasadnić.

Liczba q zowie się *częścią całkowitą*, a liczba ułamkowa

$$(r, p),$$

częścią właściwie ułamkową liczby ułamkowej

$$(m, p).$$

Suma liczby całkowitej i liczby ułamkowej zowie się *liczbą ułamkową mieszaną*.

§ 52. Def. I. *Odejmowaniem* jakiegokolwiek wymiernej¹⁾ b , przyjętej za *odjemnik*, od jakiegokolwiek liczby wymiernej a , przyjętej za *odjemną*, zowiemy *czynność*, polegającą na dobraniu, do liczb wymiernych a i b , takiej liczby wymiernej x , która sprawdziłaby przynajmniej jedną równość

¹⁾ W dalszym ciągu niniejszego rozdziału będziemy niekiedy zastępować wyrażenie »liczba wymierna« przez wyrażenie krótsze »liczba«.

$$(1) \quad b + x = a,$$

lub

$$(2) \quad x + b = a.$$

Ponieważ, bez względu na to, jaką liczbę wymierną oznaczymy przez x , mamy (§ 50, tw. IX) w każdym razie

$$b + x = x + b,$$

przeto, skoro tylko liczba x sprawdza jedną z równości (1) lub (2), to ta liczba sprawdza i drugą z rzeczonych równości.

Z uwagi tej wynika, że w dalszym ciągu będziemy mogli bez różnicy uważać równość (1) albo równość (2) jako tę, która określa liczbę x w zależności od liczb a i b .

Przy powyższem znaczeniu liter a , b i x , liczba x zowie się *resztą* odejmowania liczby b od liczby a . Reszta odejmowania liczby b od liczby a zowie się także *różnicą* liczb a i b . Za symbol tej różnicy przyjmujemy symbol $a - b$.

Przy odejmowaniu obejmujemy odjemną i odjemnik wspólną nazwą *wyrazów* odnośnej różnicy; przy czem uważamy odjemną za *pierwszy*, a odjemnik za *drugi* wyraz różnicy.

Tw. I. Żeby odejmowanie przy danych odjemnej i odjemniku było wykonalne, koniecznem jest i wystarczajacem, żeby odjemna nie była mniejsza od odjemnika.

Istotnie, załóżmy, iż do pewnych liczb wymiernych a i b można dobrać taką liczbę x , żebyśmy mieli

$$(1) \quad b + x = a.$$

Ponieważ mamy w każdym razie

$$x \geq 0,$$

przeto (§ 50, tw. X),

$$b + x \geq b + 0,$$

a ponieważ

$$b + 0 = b,$$

przeto

$$b + x \geq b.$$

Otóż ze związku tego i ze związku (1) wynika związek

$$(2) \quad b \leq a.$$

Zatem, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, związek ten jest koniecznym warunkiem wykonalności odejmowania. Pozostaje więc tylko do okazania że, gdy związek (2) zachodzi, to istnieje liczba wymierna x , sprawdzająca równość (1). Otóż, jakiegokolwiek byłyby liczby wymierne a i b , zawsze istnieć będą dwie liczby ułamkowe

$$(l, p) \text{ i } (m, p)$$

o pewnym wspólnym mianowniku p , takie, żeby

$$(3) \quad (l, p) = a, (m, p) = b.$$

Ponieważ zaś ze związków (2) i (3) wynika związek

$$l \geq m,$$

przeto odejmowanie liczby całkowitej m od liczby całkowitej l będzie wykonalne. Oznaczywszy przez r odnośną resztę, mieć będziemy

$$(4) \quad m + r = l.$$

Jeżeli więc przyjmiemy

$$(5) \quad x = (r, p),$$

to zachodzić będzie związek

$$(m, p) + x = (l, p).$$

Zatem, ze względu na (3), liczba x , określona równością (5), sprawdza równość (1). Udowodniliśmy więc, że związek (2) jest wystarczającym warunkiem wykonalności odjęcia liczby b od liczby a , co właśnie pozostawało jeszcze do okazania.

Uwaga. Z twierdzenia powyższego wynika, że, jeżeli oznaczymy przez a i b jakiegokolwiek dwie liczby wymierne, to zawsze wykonalne będzie albo odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$a - b$$

albo odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$b - a^1);$$

odejmowania zaś, zaznaczone w obu tych wzorach, wykonalne będą jednocześnie w razie, i to tylko w razie, kiedy zachodzić będzie równość

$$a = b.$$

Tw. II. Jeżeli każda z pewnych dwóch liczb wymiernych x i x' uważana być może za resztę odejmowania pewnej liczby wymiernej b od pewnej liczby wymiernej a , to liczby x i x' są pomiędzy sobą równe. Odwrotnie, jeżeli dwie liczby wymierne x i x' są pomiędzy sobą równe, a jedna z nich x przedstawia

¹⁾ W związku z powyższą uwagą znajduje się pewna chwiejność w używaniu wyrażenia »różnica liczb a i b «; niekiedy oznaczają przez to wyrażenie, w przeciwieństwie do definicji podanej poprzednio w tekście, wynik odejmowania tej z liczb a i b od drugiej, która nie jest od tej ostatniej większa. Żeby zapobiedz nieporozumieniu nie będziemy używać wyrazu »różnica« w takim znaczeniu, lecz w miejsce jego posługiwaliśmy się będziemy wyrażeniem *różnica bezwzględna*. Wobec tego istnienie różnicy bezwzględnej dwóch danych liczb wymiernych jest zapewnione w każdym razie.

wynik odejmowania liczby b od liczby a , to druga przedstawia także wynik odejmowania liczby b od liczby a .

Istotnie, jeżeli każdą z liczb x i x' uważać można za resztę odejmowania liczby b od liczby a , to mieć będziemy

$$(1) \quad b + x = a$$

oraz

$$(2) \quad b + x' = a,$$

skąd

$$(3) \quad b + x = b + x'.$$

Ponieważ zaś ta równość (§ 50 tw. X) nie mogłaby zachodzić, gdybyśmy mieli

$$x \neq x',$$

przeto, zgodnie z brzmieniem pierwszej części twierdzenia, mamy rzeczywiście

$$(4) \quad x = x'.$$

Jeżeli zaś spełnione są założenia drugiej części twierdzenia (która stanowi odwrócenie pierwszej), to w takim razie zachodzą równości (1) i (4). Ale z równości (4) wynika równość (3), a z równości (3) i (1) wynika równość (2), która właśnie wyraża, iż liczba x' rzeczywiście przedstawia wynik odejmowania liczby b od liczby a . Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Wniosek I. Z twierdzenia powyższego wynika, że warunek konieczny i wystarczający, aby pewna liczba x była wynikiem odejmowania pewnej liczby b od pewnej liczby a , wyrazić możemy przez równość

$$(1) \quad x = a - b.$$

Wniosek II. Równość (1) i równości

$$(2) \quad b + x = a \quad \text{oraz} \quad x + b = a$$

są pomiędzy sobą równoważne.

Istotnie, ze względu na wniosek I równość (1) wyraża warunek konieczny i wystarczający, aby liczba x była wynikiem odejmowania liczby b od liczby a ; z drugiej zaś strony, ze względu na Def. I i na uwagi, poczynione na początku niniejszego paragrafu, każdy ze związków (2) wyraża także warunek konieczny i wystarczający, aby liczba x była resztą odejmowania liczby b od liczby a . Zatem omawiane związki są rzeczywiście pomiędzy sobą równoważne.

Wniosek III. Ponieważ na podstawie teorii dodawania liczb wymiernych (§ 50, Tw. XI) mamy

$$a + 0 = a,$$

jakakolwiek liczbę wymierną oznaczylibyśmy przez a , przeto ze względu na Wniosek II, związku

$$a = b \text{ i } a - b = 0$$

między dwoma liczbami wymiernymi a i b są równoważne między sobą.

Tw. III. Jeżeli cztery liczby wymierne a, b, a' i b' , spełniają równości

$$(1) \quad a = a'; \quad b = b',$$

a odejmowanie, zaznaczone w jednym ze wzorów

$$(2) \quad a - b \text{ i } a' - b',$$

jest wykonalne, to odejmowanie, zaznaczone w drugim wzorze, jest także wykonalne, a nadto mamy

$$(3) \quad a - b = a' - b'.$$

Istotnie, przyjmijmy istnienie równości (1) oraz wykonalność odejmowania, zaznaczonego w jednym ze wzorów (2). Ze względu na ostatnie założenie i na Tw. I zachodzić będzie jeden przynajmniej ze związków

$$a \geq b \text{ i } a' \geq b',$$

a stąd wynika, na podstawie równości (1), że drugi z tych związków także zachodzić będzie. Zatem (Tw. I), w rzeczywistości, odejmowanie zaznaczone w każdym ze wzorów (1) będzie wykonalne. Pozostaje jeszcze do uzasadnienia istnienie równości (3). W tym celu przyjmijmy

$$(4) \quad x = a - b.$$

Mamy tedy (Tw. II, Wnios. II)

$$b + x = a$$

skąd, ze względu na (1) i na Tw. VII z § 50, wynika

$$b' + x = a'$$

a stąd dalej (Tw. II, Wnios. II)

$$x = a' - b'.$$

Z tej równości i równości (4) wynika równość (3), która pozostawała jeszcze do uzasadnienia.

Treść twierdzeń I, II i III możemy wyrazić krótko w sposób następujący:

Tw. IV. Odejmowanie oznaczonej liczby wymiernej b od oznaczonej drugiej liczby wymiernej jest wykonalne w razie i tylko w razie, kiedy odjemnik b nie jest większy od odjemnej

a ; gdy warunek ten jest spełniony, to reszta jest oznaczona w zupełności co do wartości, ale też tylko pod tym względem i zależy jedynie od wartości odjemnej i odjemnika.

§ 53. Często zachodzi potrzeba rozwiązania zagadnienia typu następującego: dana jest liczba wymierna w , przedstawiająca miarę pewnego odcinka a w przypadku, kiedy za jednostkę przyjmujemy pewien odcinek właściwy u' , współmierny z odcinkiem a ; dana jest również liczba wymierna w' , przedstawiająca miarę odcinka u' w razie, kiedy za jednostkę przyjmujemy pewien inny odcinek właściwy u , współmierny z odcinkiem u' . Wyznaczyć liczbę, przedstawiającą miarę odcinka a w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę.

W przypadku szczególnym, kiedy każda z liczb wymiernych w i w' jest liczbą całkowitą, iloczyn (§ 42, tw. VII) liczb w i w' przedstawia właśnie liczbę, która czyni zadość warunkom zadania, a nadto, jak łatwo stwierdzić po bliższym zbadaniu dowodu tego faktu, liczba w' występuje jako mnożna, a liczba w jako mnożnik. Te uwagi doprowadzają nas do przyjęcia definicji następującej:

Def. I. *Iloczynem* mnożenia oznaczonej liczby wymiernej w' , przyjętej za *mnożną* przez drugą liczbę wymierną w , przyjętą za *mnożnik*, zwiemy liczbę wymierną, przedstawiającą po dowolnym oznaczeniu odcinka właściwego u , mającego być przyjętym za jednostkę, miarę odcinka a , określonego przez to, iż miarą jego byłaby liczba w , gdybyśmy przyjęli za jednostkę taki odcinek u' , którego miarą, w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę, byłaby liczba w' .

Mnożnej i mnożnikowi w iloczynie dwóch liczb wymiernych dajemy wspólną nazwę *czynników* iloczynu. Za symbol iloczynu, w którym pewna liczba wymierna w' przyjęta jest za mnożną, a pewna druga liczba wymierna w — za mnożnik, przyjmujemy bez różnicy każdy z symbolów

$$w' \times w \text{ i } w' \cdot w.$$

Powyższa definicja z pewnością nie może być zastosowana do przypadku, kiedy liczba w' , przyjęta za mnożną, równa jest zeru, albowiem, gdybyśmy mieli

$$w' = 0,$$

to odcinek u' byłby odcinkiem niewłaściwym i nie mógłby zatem w żadnym razie być przyjęty za jednostkę. Natomiast, jeżeli liczba wymierna w' , przyjęta za mnożną, nie równa się zeru, a liczba w , przyjęta za mnożnik, jest równa zeru, to definicja nasza może być stosowana, ale w takim razie zachodzi ta osobliwość, iż odcinek, oznaczony w definicji przez a , jest odcinkiem niewła-

ściwym; zatem w rozważanym przypadku każda liczba wymierna równa zeru i tylko liczba, spełniająca ten warunek, uważana być może za iloczyn

$$w \times w'.$$

Okoliczność ta doprowadza nas do uzupełnienia Def. I. przez przyjęcie definicji następującej.

Def. II. Iloczynem mnożenia liczby wymiernej równej zeru przyjętej za mnożną, przez jakąkolwiek drugą liczbę wymierną, przyjętą za mnożnik, zwiemy każdą liczbę równą zeru i tylko liczbę, spełniającą ten warunek.

Zanim przejdziemy do badania dalszych następstw definicji I i II zaznaczamy przede wszystkim, że, jak to czytelnik sam spostrzeże, zwróciwszy się do rozważań, które doprowadziły nas do przyjęcia def. I, iloczyn dwóch liczb całkowitych w znaczeniu definicji I i II nie różni się od iloczynu ich w znaczeniu przyjętym w teorii liczb całkowitych.

(A) Jeżeli pewne dwie liczby wymierne w_1 i w'_1 sprawdzają równości

$$(1) \quad w_1 = w, \quad w'_1 = w'$$

a pewna liczba wymierna x uważana być może za iloczyn

$$(2) \quad w'_1 \cdot w_1,$$

to liczba x może być uważana także za iloczyn

$$(3) \quad w' \cdot w.$$

(B) Mnożenie zaznaczone we wzorze

$$w' \cdot w.$$

jest zawsze wykonalne, a za odnośny iloczyn uważana być może każda liczba wymierna i to tylko liczba wymierna równa liczbie ułamkowej, której licznik i mianownik równają się odpowiednio iloczynowi liczników i iloczynowi mianowników dwóch liczb ułamkowych

$$(4) \quad (m', p') \text{ i } (m, p).$$

podlegających temu tylko warunkowi, żeby

$$(5) \quad \begin{cases} (m', p') = w' \\ (m, p) = w \end{cases}$$

(C) Jeżeli każda z pewnych dwóch liczb wymiernych x i x' uważana być może za iloczyn

$$w \cdot w',$$

to te liczby spełniają równość

$$(6) \quad x = x'.$$

Przystępując do dowodu tego twierdzenia, zważmy przedewszystkiem, że jeżeli jedna przynajmniej z liczb w albo w' równa się zeru, to, jak czytelnik sam stwierdzi, opierając się na Def. I i II, twierdzenie niniejsze niezawodnie zachodzi. Wobec tego rozwinie my dowód twierdzenia niniejszego w założeniu, iż mamy

$$(7) \quad w > 0 \text{ oraz } w' > 0.$$

Żałómy, że pewna liczba wymierna x uważana być może za iloczyn (2). Ponieważ, ze względu na (1), i (7) mamy

$$w'_1 > 0,$$

przeto na podstawie Def. I, rzeczone założenie wyraża, iż istnieje pewien odcinek właściwy u , spełniający warunek następujący: jeżeli wyznaczysz odcinek u' , którego miarą, w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę, byłaby liczba w'_1 , wyznaczysz jeszcze odcinek a , którego miarą, w razie przyjęcia odcinka u' za jednostkę, byłaby liczba w_1 , to liczba x będzie miarą odcinka a , gdy przyjmiesz odcinek u za jednostkę. Ale ze względu na równości (1) liczba w' uważana być może za miarę odcinka u' w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę, a liczba w — za miarę odcinka a , gdy przyjmiesz odcinek u' za jednostkę. Zatem na podstawie Def. I, liczba x zgodnie z brzmieniem części (A) twierdzenia, uważana być może za iloczyn (3).

Przechodząc do części (B) naszego twierdzenia, załómy że liczby ułamkowe (4) spełniają równości (5), i oznaczmy przez u dowolnie przyjęty odcinek właściwy. Następnie, wyznaczysz odcinek u' , z tego warunku, aby miarą jego była liczba

$$(m', p')$$

w razie przyjęcia za jednostkę odcinka u , uważajmy odcinek a , którego miarą jest liczba

$$(m, p)$$

w przypadku, kiedy za jednostkę przyjmujemy odcinek u' . Odcinek a istnieje będzie niezawodnie, gdyż, ze względu na związki (5) i (7), mieć będziemy

$$(m' p') > 0,$$

skąd znów wynika, że odcinek u' będzie odcinkiem właściwym, a na tem właśnie polega konieczny i wystarczający warunek istnienia odcinka a . Mamy

$$(m' \cdot p, p' \cdot p) = (m', p')$$

oraz

$$(m' \cdot m, m' \cdot p) = (m, p),$$

albowiem żadna z liczb całkowitych p' i m' zeru równać się nie może.

Z równości powyższych wynika, że w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę, liczbę

$$(m' \cdot p, p' \cdot p)$$

można uważać za miarę odcinka u' , a w razie przyjęcia odcinka u' za jednostkę, za miarę odcinka a możemy uważać liczbę

$$(m' \cdot m, m' \cdot p).$$

Z tego zaś wnosimy, że jeżeli oznaczymy przez d odcinek, mieszczący się dokładnie tyle razy w odcinku u' ile wynosi iloczyn

$$m' \cdot p,$$

to odcinek d mieścić się będzie w odcinkach a i u odpowiednio tyle razy, ile wynoszą iloczyny

$$m' \cdot m \text{ i } p' \cdot p.$$

Zatem liczba ułamkowa

$$(8) \quad (m' \cdot m, p' \cdot p)$$

przedstawia miarę odcinka a w przypadku, kiedy przyjmiemy odcinek u za jednostkę. Przeto, na podstawie Def. I, każda liczba wymierna, równa liczbie (8), przedstawia iloczyn

$$(9) \quad (m', p') \cdot (m, p).$$

Z tego znów wynika, że względu na równości (5) i na to, żeśmy część (A) naszego twierdzenia już uzasadnili, że każda liczba wymierna, równa liczbie (8), uważana być może za iloczyn (3). Zatem żeby uzasadnić w zupełności część (B) naszego twierdzenia, pozostaje tylko do udowodnienia, że tylko liczba wymierna równa liczbie (8) uważana być może za iloczyn (3). Otóż, jeżeli pewna liczba x iloczyn ten przedstawia to, że względu na wynik podany pod (A) i na równości (5) liczba x uważana być może za iloczyn (9). Ale powiedzenie, że liczba x przedstawia iloczyn (9) wyraża, iż można odcinek u tak dobrać, żeby po kolejnym wyznaczeniu odcinków u' i a w sposób, omówiony wyżej, okazało się, że liczba x uważana być może za miarę odcinka a w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę. Ponieważ zaś stwierdziliśmy już, że bez względu na wybór odcinka właściwego u , liczba (8) może w każdym razie być uważana za miarę odcinka a , gdy za jednostkę przyjmiemy odcinek u , przeto liczba x i liczba (8), jako będące miarami tego samego odcinka przy tej samej jednostce długości, spełniają równość

$$x = (m' \cdot m, p' \cdot p).$$

Zatem uzasadniliśmy w zupełności tę część twierdzenia, którą podaliśmy pod (B). Żeby nareszcie uzasadnić i część (C) twierdzenia, oznaczmy przez

$$(m, p) \text{ i } (m', p')$$

dwie liczby ułamkowe, spełniające równości (5). Ponieważ na podstawie uzasadnionej już części (B) naszego twierdzenia tylko liczba równa liczbie ułamkowej (8) uważana być może za iloczyn (3), przeto, skoro każda z liczb x i x' uważana być może za iloczyn (3), to będziemy mieli

$$x = (m' \cdot m, p' \cdot p)$$

oraz

$$x' = (m' \cdot m, p' \cdot p),$$

skąd wynika równość

$$x = x',$$

na której właśnie polega część (C) naszego twierdzenia.

Wniosek I. Ze względu na część (C) powyższego twierdzenia i ze względu na to, że na podstawie Def. I i Def. II, każda liczba wymierna, równa liczbie wymiernej, przedstawiającej iloczyn oznaczonych dwóch liczb wymiernych, może być sama uważana za rzeczony iloczyn, warunek konieczny i wystarczający, aby oznaczona liczba x uważana być mogła za iloczyn

$$w' \cdot w$$

liczby wymiernej w' , przyjętej za mnożną, przez liczbę w , przyjętą za mnożnik, wyrazić możemy przez równość

$$x = w' \cdot w.$$

Wniosek II. Zestawiając powyższy wniosek z częścią (A) twierdzenia dostrzegamy, że, skoro cztery liczby wymierne w , w' , w_1 i w'_1 spełniają równości

$$w_1 = w \text{ oraz } w' = w',$$

to w takim razie mamy:

$$w' \cdot w = w'_1 \cdot w'_1.$$

Wniosek III. Iloczyn dwóch liczb wymiernych, z których jedna równa się jedności, równa się zawsze drugiej z tych liczb.

Treść części (A) i (C) powyższego twierdzenia możemy wyrazić przez twierdzenie następujące.

Tw. II. Iloczyn dwóch liczb wymiernych zależy tylko od wartości mnożnej i mnożnika, jest zaś oznaczony tylko co do wartości, ale pod tym względem jest oznaczony w zupełności.

Tw. III. Żeby iloczyn dwóch liczb wymiernych w i w' równał się zeru potrzeba i wystarcza, żeby jedna przynajmniej z tych liczb równała się zeru.

Istotnie, to iż podany w twierdzeniu warunek jest wystarczającym, abyśmy mieli

$$(1) \quad w' \cdot w = 0$$

wynika już z Def. II i rozważań, które ją nastęrczyły; o tem zaś, że rzeczonny warunek jest konieczny, przekonywamy się w sposób następujący: na podstawie części (B) tw. I mamy

$$(2) \quad w' \cdot w = (m' \cdot m, p' \cdot p),$$

jeżeli tylko liczby całkowite m, m', p i p' tak są dobrane, abyśmy mieli

$$(3) \quad (m, p) = w \text{ oraz } (m', p') = w';$$

jeżeli więc równość (1) zachodzi, to ze względu na (2) mamy

$$(m' \cdot m, p' \cdot p) = 0,$$

skąd

$$m' \cdot m = 0,$$

zatem jedna przynajmniej z liczb całkowitych m i m' równa się zeru. Z tego zaś i z równości (3) wynika, że jedna przynajmniej z liczb w i w' musi równać się zeru. Tak więc uzasadniliśmy twierdzenie w zupełności.

Tw. IV. (Własność łączności). Jeżeli oznaczymy przez

$$(1) \quad w, w' \text{ i } w''$$

trzy liczby wymierne dowolnie dane, to mieć będziemy:

$$(2) \quad (w \cdot w') \cdot w'' = w \cdot (w' \cdot w'').$$

Istotnie, oznaczmy przez

$$(m, p), (m', p'), (m'', p'')$$

trzy liczby ułamkowe, odpowiednio równe liczbom (1). Mamy tedy

$$w \cdot w' = (m \cdot m', p \cdot p')$$

zatem

$$w' \cdot w'' = (m' \cdot m'', p' \cdot p'')$$

$$(w \cdot w') \cdot w'' = (m \cdot m', p \cdot p') \cdot (m'', p'')$$

$$w \cdot (w' \cdot w'') = (m, p) \cdot (m' \cdot m'', p' \cdot p''),$$

skąd

$$(3) \quad \begin{cases} (w \cdot w') \cdot w'' = ([m \cdot m'] \cdot m'', [p \cdot p'] \cdot p'') \\ w \cdot (w' \cdot w'') = (m \cdot [m' \cdot m''], p \cdot [p' \cdot p'']), \end{cases}$$

a ponieważ, na podstawie znanych własności liczb całkowitych, mamy

$$[m \cdot m'] \cdot m'' = m \cdot [m' \cdot m'']$$

$$[p \cdot p'] \cdot p'' = p \cdot [p' \cdot p'']$$

przeto

$$([m \cdot m'] m'', [p \cdot p'] \cdot p'') = (m \cdot [m' \cdot m''], p \cdot [p' \cdot p''])$$

a z tej równości jako też równości (3) wynika właśnie równość (2), którą mieliśmy udowodnić.

Tw. V. (Własność przemienności). Jeżeli mnożna pewnego iloczynu równa się mnożnikowi pewnego drugiego iloczynu, a mnożnik pierwszego — mnożnej drugiego, to rozważane dwa iloczyny są także pomiędzy sobą równe. Innymi słowy, jakiegokolwiek liczby wymierne oznaczylibyśmy przez w i w' , mamy zawsze

$$w \cdot w' = w' \cdot w.$$

Istotnie, jeżeli oznaczymy przez

$$(m, p) \text{ i } (m', p')$$

dwie liczby ułamkowe, spełniające równości

$$(m, p) = w \text{ oraz } (m', p') = w',$$

i uwzględnimy własność przemienności iloczynów liczb całkowitych, to na podstawie części (B) tw. I łatwo stwierdzimy, że mamy

$$w' \cdot w = (m \cdot m', p \cdot p)$$

oraz

$$w \cdot w' = (m \cdot m', p \cdot p'),$$

skąd wynika równość, na której niniejsze twierdzenie właśnie polega.

Tw. VI. Jeżeli oznaczymy przez

$$w, w_1 \text{ i } w_2$$

trzy liczby wymierne, z których pierwsza spełnia nierówność

$$(1) \quad w > 0,$$

to nierówność

$$(2) \quad w_1 < w_2$$

jest równoważna nierówności

$$(3) \quad w \cdot w_1 < w \cdot w_2.$$

Istotnie, jeżeli sprowadzimy do wspólnego mianownika dwie liczby ułamkowe odpowiednio równe liczbom w_1 i w_2 , to uzyskamy dwie liczby ułamkowe

$$(m_1, p) \text{ i } (m_2, p)$$

o wspólnym mianowniku p , spełniające równości

$$(4) \quad (m_1, p) = w_1, (m_2, p) = w_2.$$

Jeżeli znowu oznaczymy przez

$$(m', p'),$$

liczbę ułamkową spełniającą równość

$$(5) \quad (m', p') = w,$$

to ze względu na (1) będzie

$$(6) \quad m' > 0.$$

Ale z równości (4) i (5) mamy:

$$w \cdot w_1 = (m' \cdot m_1, p' \cdot p)$$

$$w \cdot w_2 = (m' \cdot m_2, p' \cdot p)$$

Zatem związek (3) równoważny jest związkowi

$$(m' \cdot m_1, p' \cdot p) < (m' \cdot m_2, p' \cdot p),$$

równoważnemu nierówności

$$m' \cdot m_1 < m' \cdot m_2$$

która znów, na podstawie znanych własności liczb całkowitych, równoważna jest, ze względu na (6), nierówności

$$m_1 < m_2.$$

Ale ta nierówność, ze względu na (4), jest równoważna nierówności (2). Ostatecznie więc, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, nierówności (2) i (3) są równoważne pomiędzy sobą.

Tw. VII. (*Własność rozdzielności mnożenia w stosunku do dodawania i odejmowania*). Jeżeli oznaczymy przez w , w_1 i w_2 jakiekolwiek trzy liczby wymierne, to w takim razie zachodzi zawsze równość

$$(1) \quad w \cdot (w_1 + w_2) = w \cdot w_1 + w \cdot w_2$$

oraz równoważna jej (tw. V) równość

$$(2) \quad (w_1 + w_2) \cdot w = w_1 \cdot w + w_2 \cdot w;$$

nadto jeżeli zachodzi związek

$$(3) \quad w_1 \geq w_2,$$

to w takim razie prócz równości (1) i (2) mamy równość

$$(4) \quad w \cdot (w_1 - w_2) = w_3 \cdot w_1 - w \cdot w_2$$

oraz równoważną jej (tw. V) równość

$$(5) \quad (w_1 - w_2) \cdot w = w_1 \cdot w - w_2 \cdot w.$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, oznaczmy przez

$$(m, p), (m_1, p_1) \text{ i } (m_2, p_2)$$

trzy liczby ułamkowe spełniające równości

$$(6) \quad (m, p) = w, (m_1, p_1) = w_1, (m_2, p_2) = w_2.$$

Mamy tedy

$$w_1 + w_2 = \frac{m_1 \cdot p_2 + m_2 \cdot p_1}{p_1 \cdot p_2},$$

skąd

$$(7) \quad w \cdot (w_1 + w_2) = \frac{m \cdot (m_1 \cdot p_2 + m_2 \cdot p_1)}{p \cdot p_1 \cdot p_2}$$

Na podstawie jednak równości (6), mamy jeszcze

$$w \cdot w_1 = \frac{m \cdot m_1}{p \cdot p_1} = \frac{m \cdot m_1 \cdot p_2}{p \cdot p_1 \cdot p_2}$$

$$w \cdot w_2 = \frac{m \cdot m_2}{p \cdot p_2} = \frac{m \cdot m_2 \cdot p_1}{p \cdot p_2 \cdot p_1},$$

skąd

$$(8) \quad w \cdot w_1 + w \cdot w_2 = \frac{m \cdot m_1 \cdot p_2 + m \cdot m_2 \cdot p_1}{p \cdot p_1 \cdot p_2},$$

a ponieważ, na podstawie znanych własności liczb całkowitych, mamy

$$m \cdot (m_1 \cdot p_2 + m_2 \cdot p_1) = m \cdot m_1 \cdot p_2 + m \cdot m_2 \cdot p_1$$

przeto z równości (7) i (8) wynika równość (1), a więc i równoważna jej równość (2).

Żeby uzasadnić równość (4), zważmy, że, ze względu na (3) odejmowanie zaznaczam we wzorze

$$w_1 - w_2$$

jest wykonalne. Z tego zaś wynika, że wzór

$$w \cdot (w_1 - w_2)$$

przedstawia liczbę wymierną oznaczonej wartości. Przyjmijmy

$$(9) \quad x = w \cdot (w_1 - w_2).$$

Mamy tedy

$$(10) \quad x + w \cdot w_2 = w \cdot (w_1 - w_2) + w \cdot w_2.$$

Ale ze względu na twierdzenie, jakie wyraża (1), mamy:

$$w \cdot (w_1 - w_2) + w \cdot w_2 = w \{ (w_1 - w_2) + w_2 \},$$

a ponieważ

$$(w_1 - w_2) + w_2 = w_1,$$

przeto

$$w \cdot (w_1 - w_2) + w \cdot w_2 = w \cdot w_1.$$

Z tej zaś równości i równości (10) wynika równość

$$x + w \cdot w_2 = w \cdot w_1,$$

równoważna równości

$$(11) \quad x = w \cdot w_1 - w \cdot w_2.$$

Z równości (9) i (11) wynika równość (4) a więc i równoważna jej równość (5). Zatem uzasadniliśmy w zupełności nasze twierdzenie.

W rozdziale tym pomijamy teorię iloczynu dowolnej ilości czynników, gdyż ze względu na ogólną teorię, którą podamy w dwóch następujących rozdziałach, osobny wykład tego przedmiotu jest zbędny.

§ 54. Def. *Dzieleniem* oznaczonej liczby wymiernej a , przyjętej za *dzielną*, przez oznaczoną liczbę b , przyjętą za *dzielnik* zowiemy czynność, polegającą na wyznaczeniu takiej liczby x , zwanej *ilorazem*, żeby ta liczba spełniała jedną przynajmniej z równości

$$(1) \quad b \cdot x = a$$

lub

$$(2) \quad x \cdot b = a;$$

za symbol ilorazu przyjmujemy bez różnicy którykolwiek z symbolów:

$$a : b \text{ i } \frac{a}{b}$$

Uwaga. Ponieważ (§ 53, Tw. V), bez względu na wartość liczby x , mamy

$$b \cdot x = x \cdot b,$$

przeto równości (1) i (2) są pomiędzy sobą równoważne; jeżeli więc zachodzi jedna z nich, to zachodzi i druga. Z tego zaś wynika, że, nadmieniwszy, iż pewne liczby wymierne a i b mają być przyjęte odpowiednio za dzielną i dzielnik, zbytecznem jest bliżej zaznaczać, czy odnośny iloraz x ma być wyznaczany z równości (1) czy też z równości (2).

Ponieważ iloczyn dwóch liczb wymiernych zależy tylko od wartości czynników i jest sam oznaczony tylko pod względem wartości, przeto przy dzieleniu liczb wymiernych iloraz zależy tylko od wartości dzielnej i dzielnika i jest sam oznaczony tylko pod względem wartości. Innemi słowy, jeżeli cztery liczby wymierne a , b , i a' b' spełniają równości

$$a = a' \text{ i } b = b',$$

a pewna liczba x sprawdza jedną z równości

$$b \cdot x = a \text{ lub } b' \cdot x = a',$$

to ta liczba x sprawdza i drugą z tych równości, a każda liczba x' , równa liczbie x , spełniającej równość

$$b \cdot x = a,$$

spełnia równość

$$b \cdot x' = a.$$

Tw. I. Jeżeli przy dzieleniu liczb wymiernych dzielnik b jest od zera większy, a dzielna a ma jakąkolwiek wartość, to dzielenie jest wykonalne, a za odnośny iloraz uważana być może każda taka i tylko taka liczba wymierna, która równa się liczbie ułamkowej

$$(1) \quad (m \cdot p', p \cdot m')$$

gdzie symbole

$$(2) \quad m, p, m' \text{ i } p'$$

oznaczają cztery liczby całkowite, których wybór ogranicza jedynie warunek, aby

$$(3) \quad (m, p) = a \text{ oraz } (m', p') = b.$$

Istotnie, jeżeli pewna liczba x uważana być może za iloraz podziału liczby a , przyjętej za dzielną, przez liczbę b przyjętą za dzielnik, to ta liczba spełnia równość

$$(4) \quad b \cdot x = a$$

a więc, ze względu na (3), i równość

$$(5) \quad (m', p') \cdot x = (m, p).$$

Jeżeli liczba wymierna x istnieje, to istnieje i liczba ułamkowa

$$(u, v)$$

taka, iżby

$$(6) \quad (u, v) = x.$$

Z równości (5) i (6) mamy

$$(m', p') \cdot (u, v) = (m, p),$$

skąd

$$(m' \cdot u, p' \cdot v) = (m, p),$$

a z tej równości wynika

$$(7) \quad p \cdot m' \cdot u = m \cdot p' \cdot v.$$

Ponieważ na podstawie założeń twierdzenia mamy

$$b > 0,$$

przeto ze względu na (3) mamy

$$m' > 0,$$

a ponieważ z drugiej strony liczba p , jako mianownik pewnej liczby ułamkowej, spełnia nierówność

$$p > 0,$$

przeto

$$p \cdot m' > 0.$$

Z tego wynika, że symbol (1) przedstawia oznaczoną liczbę ułamkową. Z tego zaś wynika dalej na podstawie równości (7), że mamy

$$(u, v) = (m \cdot p', p \cdot m'),$$

skąd ze względu na (6) mamy

$$(8) \quad x = (m \cdot p', p \cdot m')$$

Jeżeli więc liczba wymierna x , przedstawiająca iloraz

$$(9) \quad a : b,$$

istnieje, to ona spełnia równość (8). Zatem, żeby uzasadnić w zupełności nasze twierdzenie, należy już tylko wykazać, że, skoro pewna liczba wymierna spełnia (8), to ona przedstawia iloraz (9), czyli spełnia (4). Załóżmy więc, że liczba x spełnia (8). Ze względu na (3) i (8) mamy tedy:

$$b \cdot x = (m', p') \cdot (m \cdot p', p \cdot m') = (m' \cdot m \cdot p', p' \cdot p \cdot m'),$$

a ponieważ

$$(m' \cdot m \cdot p', p' \cdot p \cdot m') = (m, p),$$

przeto

$$b \cdot x = (m, p)$$

a z tego wynika ze względu na (3), że liczba x spełnia (4). Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Wniosek I. Jeżeli przy dzieleniu liczb wymiernych dzielnik b jest od zera większy, to, jakkolwiek wartość miałaby dzielna a , warunek konieczny i wystarczający, aby liczba wymierna x mogła być uważana za odnośny iloraz, polega na równości

$$x = a : b,$$

lub na równości równoważnej

$$x = \frac{a}{b}$$

Innymi słowy, każda z dwóch powyższych równości jest równoważna równości

$$b \cdot x = a.$$

Tw. II. Jeżeli przy dzieleniu liczb wymiernych dzielnik b równa się zero, a dzielna a jest od zera większa, to dzielenie nie jest wykonalne; jeżeli zaś prócz dzielnika i dzielna jest równa zero, to iloraz jest całkiem nieoznaczony, innymi słowy w tym przypadku każda liczba wymierna bez wyjątku uważana być może za iloraz.

Istotnie, jeżeli mamy

$$(1) \quad b = 0 \text{ oraz } a > 0,$$

to równość

$$(2) \quad b \cdot x = a$$

nie może zachodzić przy żadnej wartości na x , albowiem mamy w każdym razie

$$(3) \quad b \cdot x = 0,$$

a więc i

$$b \cdot x < a.$$

Zatem w razie istnienia związków (1) dzielenie, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, nie jest wykonalne. Jeżeli zaś mamy jednocześnie

$$b = 0 \text{ i } a = 0,$$

to ze względu na (3) równość (2) będzie spełniona, jakkolwiek liczbę wy-

mierną oznaczylibyśmy przez x . Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Wniosek I. Jeżeli pewna liczba wymierna a jest od zera większa, to każdy z symbolów

$$a : 0 \text{ i } \frac{a}{0}$$

jest pozbawiony znaczenia, gdyż rzecz czyniąca zadość definicji tych symbolów (iloraz podziału większej od zera liczby, przyjętej za dzielną, przez dzielnik równy zeru) *nie istnieje*.

Wniosek II. Symbol

$$0 : 0 \text{ albo } \frac{0}{0}$$

nie jest wprawdzie pozbawiony znaczenia, ale ze względu na nieoznaczoność wartości ilorazu w przypadku, kiedy dzielnia i dzielnik równają się zeru, winien być uważany za nazwę gatunkową liczb wymiernych i z tego powodu, jako nie przedstawiający żadnej oznaczonej wartości, nie może być kojarzony znakiem równości z żadnym symbolem, przedstawiającym oznaczoną liczbę¹⁾.

§ 55. Tw. I. Każda liczba ułamkowa może być uważana za iloraz podziału licznika przez mianownik.

Istotnie, uważajmy jakąkolwiek liczbę ułamkową

$$(m, p).$$

Ponieważ mamy

$$(m, 1) = m, (p, 1) = p,$$

ponieważ nadto ze względu na definicję liczb ułamkowych mamy

$$p > 0,$$

przeto

$$m : p = (m, 1) : (p, 1) = (m, p),$$

skąd

$$m : p = (m, p),$$

a ta równość wyraża właśnie twierdzenie, o które chodziło.

¹⁾ Gdybyśmy się umówili, że wogóle równość

$$x = a : b$$

ma wyrażać, że liczba x uważana być może za iloraz podziału dzielnej a przez dzielnik b , to w takim razie, jakiegokolwiek liczby oznaczylibyśmy przez x i y , mielibyśmy

$$x = 0 : 0 \text{ oraz } 0 : 0 = y,$$

ale te równości wbrew zasądom rozdziału III Części I nie pociągałyby za sobą związku

$$x = y.$$

Uwaga. Powyższe twierdzenie poucza nas, że osobny symbol na liczbę ułamkową jest zbędny, gdyż ze względu na rzeczone twierdzenie możemy, jak to się w praktyce zawsze robi, przyjąć za symbol liczby ułamkowej o liczniku m i mianowniku p symbol ilorazu podziału licznika przez mianownik a więc symbol

$$m : p$$

lub (częściej używany) symbol

$$\frac{m}{p}$$



II. Ogólne zasady teorii działań podstawowych.

§ 56. Przy studyowaniu początków teorii liczb całkowitych poznajemy już pod nazwami *dodawania*, *odejmowania*, *mnożenia* i *dzielenia* cztery czynności wykonywalne na liczbach całkowitych. W rozdziale poprzedzającym zapoznaliśmy się pod temi samemi nazwami z czterema czynnościami, wykonywalnemi na liczbach wymiernych wogóle. Przy dalszym studyowaniu matematyki poznamy nowe gatunki wielkości, na których wykonywalne są pewne cztery czynności, również oznaczane przez nazwy *dodawania*, *odejmowania*, *mnożenia* i *dzielenia*. Zaznaczamy jednak z naciskiem na samym początku niniejszych dociekań, że nie istnieją żadne tak ogólne definicje powyższych czynności, żeby na podstawie tych definicji natura każdej z rzeczonych czterech czynności była określona ogólnie w stosunku do każdego rodzaju wielkości. W rzeczywistości, nazwy: *dodawanie*, *odejmowanie*, *mnożenie* i *dzielenie* mają znaczenie tylko w odniesieniu do oznaczonego gatunku wielkości, na podstawie pewnych definicji specjalnie dla rozważanego gatunku wielkości obmyślanych. Jednakowoż, przy podawaniu takich definicji kierujemy się pewnemi ogólnemi zasadami, które zamierzamy obecnie wytłómaczyć.

§ 57. Zarówno w teorii liczb całkowitych, jak i w teorii liczb wymiernych, każda z nazw:

dodawanie, *odejmowanie*, *mnożenie* i *dzielenie*

oznacza pewną czynność (C) polegającą na tem, żeby do danych wielkości rozważanego rodzaju dobrać taką nową wielkość tego samego rodzaju, żeby czyniła zadość pewnym warunkom (W), określonym przez osobną definicyę (D). Zwracając się do teorii liczb wymiernych, stwierdzamy a posteriori, że definicya (D) w każdym razie tak jest ułożona, iż w jej następstwie, zachodzą w odniesieniu do liczb wymiernych, (a więc w szczególności i w odniesieniu i do liczb całkowitych), twierdzenia następujące:

Tw. I. Jeżeli pewna wielkość x rozważanego gatunku sprawdza warunki (W), to każda wielkość x' , równa wielkości x , sprawdza także warunki (W).

Tw. II. Jeżeli pewna wielkość x sprawdza warunki (W), to ta sama wielkość sprawdza jeszcze i te warunki (W'), w które przechodzą warunki (W) wskutek podstawienia w miejsce danych wielkości jakichkolwiek wielkości, odpowiednio im równych.

Jeżeli na przykład liczba wymierna x jest sumą pewnych liczb a i b , to każda liczba x' , równa liczbie x , jest także sumą liczb a i b , a sama liczba x jest sumą każdej pary liczb a' i b' , odpowiednio równych liczbom a i b .

Twierdzenie I oczywiście równoważne jest następującemu:

Tw. I. a. Warunki (W) odnoszą się wyłącznie do wartości wielkości x , a nie do żadnej innej własności tej wielkości.

Natomiast, ściśle rzecz biorąc, twierdzenie II niezupełnie jest równoważne następującemu:

(B) »Wielkość, spełniająca warunki (W), zależy jedynie od wartości wielkości danych«.

Istotnie, w przypadku na przykład dzielenia liczb wymiernych iloraz zależy nie tylko od wartości tych dwóch liczb wymiernych, na których dzielenie ma być wykonane, ale jeszcze od tego, która z tych liczb ma być przyjęta za dzielną, a która za dzielnik. Innymi słowy, iloraz zależy nie tylko od wartości obu liczb, ulegających dzieleniu, ale jeszcze i od roli, przypadającej każdej z nich wobec dzielenia. Ale wogóle, jeżeli chodzi o oznaczenie roli, jaka przypada każdemu z kilku przedmiotów wobec jakiejś rzeczy (C), to, po uprzednim wprowadzeniu stosownej umowy, dostatecznem będzie *uszeregować* rozważone przedmioty w pewnym porządku¹⁾, aby tym samym określić w zupełności rolę każdego z nich. Jeżeli na przykład umówimy się, że przy dzieleniu liczb wymiernych, uważać będziemy za pierwszą tę z dwóch liczb, mających uleść rzeczonemu działaniu, która ma być przyjęta za dzielnik, to, aby oznaczyć rolę każdej z dwóch danych liczb wymiernych, na których dzielenie ma być wykonane, dostatecznem będzie uszeregować te dwie liczby, czyli nadać pewnej jednej z nich numer pierwszy, a tamtej — numer drugi.

Otóż, jeżeli pewien przedmiot (P) zależy nie tylko od natury każdego z kilku innych przedmiotów A, B, C... F, ale i od roli każdego z nich, to (zwykle milcząco) zakładamy, iż wprowadzona została umowa, umożliwiająca określić rolę każdego z przedmiotów A, B, C... F przez stosowne uszerego-

¹⁾ Przypominamy, że uszeregowanie w oznaczonym porządku tylu oznaczonych przedmiotów, ile wynosi pewna liczba całkowita n ($n > 0$), polega na skojarzeniu z każdym z rzeczonych przedmiotów jednej z liczb

1, 2, 3... n

ale z każdym innej; przy tych warunkach liczby, skojarzone z rozważanymi przedmiotami, zowią się ich *numerami* czyli *liczbami porządkowymi*.

wanie tych przedmiotów, i powiadamy dla tego, że przedmiot (P) zależy nie tylko od natury przedmiotów A, B, C... F, ale i od ich uszeregowania. Ostatecznie tecznie więc twierdzenie II w takim tylko razie możnaby uważać za równoważne tw. (B), gdyby przyjęte było za skróconą postać twierdzenia następującego:

Tw. II. *b.* Wielkość, sprawdzająca warunki (W), zależy jedynie od wartości i od uszeregowania wielkości danych, a nie od jakichkolwiek innych okoliczności.

Def. I. Wogóle nazywamy *działaniem arytmetycznem* każdą czynność (C), polegającą na tem, żeby do danych wielkości oznaczonego rodzaju (R) dobrać taką wielkość tegoż rodzaju, zwaną *wynikiem* rozważanego działania na wielkościach danych, żeby ta wielkość spełniała pewne warunki (W), określone przez pewną definicyę (D), umyślnie dla wielkości rodzaju (R) tak obmyślaną, żeby czynność (C) była wykonalna przynajmniej w przypadku, kiedy wartości wielkości danych spełniają pewne warunki ograniczające, i żeby nadto twierdzenia I II należały do koniecznych następstw rzeczowej definicyi.

Z powyższej definicyi i uwag poczynionych poprzednio wynika, że, w odniesieniu do liczb wymiernych, nazwy

dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie

oznaczają pewne *działania arytmetyczne*. W rzeczywistości we wszystkich przypadkach, w których rzeczono nazwy uważane są za nazwy czynności wykonywalnych (może z pewnemi zastrzeżeniami) na wielkościach oznaczonej kategorii¹⁾, oznaczają one pewne działania arytmetyczne.

Działania dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia obejmujemy wspólną nazwą *działań podstawowych*.

§ 58. Zanim zwrócimy się do ogólnej teorii działań podstawowych, podamy niektóre wiadomości, których znaczenie polega między innemi i na tem, że przyczyni się do lepszego uwydatnienia ogólnego pojęcia działania arytmetycznego.

Przedewszystkiem zaznaczamy z naciskiem, że bardzo łatwo jest podać przykłady takich reguł na wytwarzanie z danych wielkości oznaczonego rodzaju nowych wielkości tegoż rodzaju, które nie mogą być uważane za definicje oznaczonych działań arytmetycznych. Na przykład do każdego układu dwóch liczb ułamkowych

$$(1) \quad \frac{m}{p} \quad \text{ i } \quad \frac{m'}{p'}$$

¹⁾ Omawiane nazwy używane bywają niekiedy do oznaczenia rzeczy, które *nie są* czynnościami wykonalnemi na wielkościach, jak n. p. w pewnych teoriach logiki; w tych przypadkach rozważane wyrazy oczywiście nie oznaczają działań arytmetycznych.

możemy zawsze dobrać liczbę ułamkową

$$(2) \quad \frac{m + p'}{p + p'}$$

której licznik równa się sumie liczników, a mianownik sumie mianowników liczb ułamkowych danych. Jednakowoż czynność polegająca na wyznaczeniu liczby (2), gdy liczby (1) są dane, nie jest wcale działaniem arytmetycznym na liczbach ułamkowych, albowiem, jak się o tem czytelnik łatwo sam przekona, definicya rozważanej czynności nie jest taka, żeby w jej następstwie zachodziły twierdzenia I i II.

Obecnie pragniemy zwrócić uwagę czytelnika na inną okoliczność. Przy rozważaniu oznaczonego działania arytmetycznego (D), określonego dla pewnej kategorii wielkości (K), może się wydarzyć, iż pewnym danym wielkościami kategorii (K), uszeregowanym w danym porządku, odpowiada pewien zbiór takich nierównych pomiędzy sobą wielkości rozważanego rodzaju, że każda z nich uważana być może za wynik wykonania działania (D) na danych wielkościach, przy danym ich uszeregowaniu. W takim razie orzekamy, że rozważane działanie jest *wieloznaczne*. Jeżeli zaś wszystkie wielkości, z których każda uważana być może za wynik wykonania pewnego działania arytmetycznego na oznaczonych wielkościach, uszeregowanych w oznaczony sposób, są równe pomiędzy sobą, to wówczas mówimy, że rozważane działanie jest *jednoznaczne*. Na przykład dzielenie liczb wymiernych jest działaniem jednoznacznym, skoro tylko dzielnik nie równa się zeru; w przypadku zaś, kiedy dzielnik równa się zeru, a działanie jest wykonalne, w przypadku więc, kiedy prócz dzielnika i dzielna równa się zeru, dzielenie staje się działaniem wieloznacznym.

Nawiązując do podziału działań arytmetycznych na *jednoznaczne* i *wieloznaczne*, czynimy pewną ważną uwagę, odnoszącą się do symboliki działań arytmetycznych. W tym celu zaznaczamy najpierw, że jeżeli pewien symbol S określony został jako symbol wyniku wykonania pewnego działania arytmetycznego (D) na pewnym ciągu (C) wielkości oznaczonej klasy (K)¹⁾, to nie należy uważać symbolu S za symbol pewnego oznaczonego elementu klasy (K); w rzeczywistości należy uważać symbol S za wspólny symbol każdego z tych elementów klasy (K), z których każdy uważany być może za wynik wykonania działania (D) na ciągu elementów (C) i których pełny zbiór oznaczmy przez (Z); tak np. symbol

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$$

należy uważać za wspólny symbol wszystkich liczb ułamkowych, równych liczbie

$$\frac{3}{5}$$

¹⁾ Żeby należycie rozumieć dalsze rozważania, nie należy zapominać, że litera S jest symbolem symbolu wyniku działania (D), nie zaś samym symbolem tego wyniku.

podobnie, jak uważamy n. p. wyraz »drzewo« za wspólną nazwę wszystkich roślin dobrze nam znanej natury. Ze względu na taki stan rzeczy zachodzi okoliczność następująca: jeżeli symbol S wchodzi do pewnego zdania (T), to to zdanie, w braku osobnej umowy, określałające jego znaczenie, w takim tylko razie może być słuszne, jeżeli jest słuszne każde ze zdań, w które przechodzi zdanie (T) wskutek podstawienia w miejsce symbolu S indywidualnej nazwy (albo indywidualnego symbolu) któregośkolwiek z elementów zbioru (Z).

Z tej uwagi wynika konieczność pilnego rozróżniania przypadku, kiedy działanie (D) jest jednoznaczne, od przypadku, kiedy okoliczność ta nie zachodzi: jeżeli działanie (D) jest jednoznaczne to w razie, kiedy jedynie wartość wyniku wykonania działania (D) jest ważna, możemy posługiwać się symbolem S , jakgdyby symbol ten był symbolem pewnego jednego elementu klasy (K); w szczególności w rozważanym przypadku dowolnie przyjęty element a klasy (K) będzie albo spełniał równość

$$(1) \quad a = S,$$

albo jej nie spełni, a istnienie powyższej równości stanowić będzie warunek konieczny i wystarczający, ażeby element a mógł być uważany za wynik wykonania działania (D) na ciągu (C). Inny jest stan rzeczy, kiedy działanie (D) jest wieloznaczne: w takim razie żaden element a klasy (K) nie może spełnić równości (1), gdyż żaden element tej klasy nie może równać się jednocześnie każdemu elementowi zbioru (Z); z tego powodu, w razie wieloznaczności działania (D), nie możemy, bez popełnienia błędu, posługiwać się równością (1) i wogóle nie możemy, nawet kiedy chodzi jedynie o wartość wyniku wykonania działania (D) na ciągu (C), tak traktować symbol S , jak gdyby ten symbol oznaczał pojedynczy element klasy (K). Gdybyśmy np., w razie wieloznaczności działania (D), umówili się, że równość (1) ma wyrazić, iż element a jest jeden z tych, z których każdy uważany być może za wynik wykonania działania (D) na ciągu (C), to umowa ta byłaby sprzeczna z ogólnymi zasadami, do których postanowiliśmy zastosowywać się przy określaniu równości, gdyż w rozważanym przypadku, wbrew wspomnianym zasadom, dwa elementy a i b mogłyby spełniać odpowiednio równość (1) i równość

$$b = S$$

pomimo istnienia nierówności

$$a \neq b.$$

W dydaktyce powyższe uwagi nie zawsze bywają należycie uwzględniane; tak np. pomimo że w trygonometrii symbol

$$\arctg x$$

jest symbolem wykonania działania wieloznacznego na wielkości x , posługują się niekiedy równością

$$x = \operatorname{arctg} \alpha,$$

żeby wyrazić, iż wielkość x jest jedną z tych, z których każda uważana być może za wynik wykonania działania

$$\operatorname{arctg}$$

na wielkości

$$\alpha.$$

Niekonsekwencje tego rodzaju stanowią źródło niezliczonej ilości błędów i nieporozumień.

Żeby zapobiedz wszelkiego rodzaju nieporozumieniom, zaznaczamy, że z powyższych rozważań bynajmniej nie wynika, żeby w razie wieloznaczności działania (D), symbol S wogóle nie mógł być kojarzony znakiem równości z jakimś innym symbolem; gdyby np. symbol a określony był jako wspólny symbol czyli ogólna nazwa gatunkowa wszystkich wielkości, należących do pewnego zbioru (Z'), to nie byłoby żadnej przeszkody do umówienia się, że równość (1) ma wyrażać, iż do każdego elementu któregośkolwiek ze zbiorów (Z') i (Z) można dobrać w drugim z tych zbiorów element równy rozważanemu elementowi.

§ 59. Teorya działań *podstawowych* dla jakiegokolwiek rodzaju wielkości zawsze się opiera na sześciu definicyach podstawowych, a ten układ sześciu definicyi obejmuje dwie kategorie tychże, a mianowicie:

(A) Dwie definicje, które muszą być specjalnie obmyślane dla klasy (K) tych wielkości, dla której ma być stworzona teorya działań podstawowych.

(B) Cztery definicje, których brzmienie z góry jest ustalone bez względu na rodzaj rozważanych wielkości.

Definicje kategorii (A) są następujące:

(A₁) Definicja *sumy* dwóch danych elementów a i b klasy (K), czyli definicja wyniku dodania elementu b do elementu a . Zaznaczamy przytem, że za symbol sumy elementów a i b przyjmujemy symbol

$$a + b;$$

akt wyznaczania sumy zowiemy *dodawaniem*, a elementy a i b , ulegające dodawaniu, obejmujemy wspólną nazwą *składników*.

(A₂) Definicja *iloczynu* mnożenia danego elementu a klasy (K), przyjętego za *mnożną*, przez drugi dany element b tejże klasy, przyjęty za *mnożnik*.

Za symbol iloczynu mnożnej a i mnożnika b przyjmujemy bez różnicy symbol

$$a \cdot b \text{ lub } a \times b;$$

akt wyznaczania iloczynu zowiemy *mnożeniem*, a elementy, ulegające mnożeniu, obejmujemy wspólną nazwą *czynników*.

Jedyna całkiem ogólna zasada, do której zastosowujemy się zawsze przy podawaniu definicji (A_1) i (A_2), jest następująca:

(C) Każda z tych definicji winna określać w znaczeniu, omówionym w § 57 i § 58, oznaczone działania arytmetyczne jednoznaczne, wykonalne bez zastrzeżeń.

Z zasady tej wynika że przy danych wartościach dwóch elementów a i b klasy (K), każdy z symbolów

$$a + b \text{ i } a \cdot b \text{ (albo } a \times b)$$

przedstawia oznaczonej wartości element zbioru (K). Zatem, na podstawie końcowych uwag paragrafu poprzedzającego, warunek konieczny i wystarczający, aby pewien element s klasy (K) mógł być uważany za sumę elementów a i b , polega na równości

$$s = a + b,$$

a warunek konieczny i wystarczający, aby pewien element t klasy (K) przedstawiał iloczyn elementów a i b , polega na równości

$$t = a \cdot b \text{ (albo } t = a \times b).$$

Należy przy tem wyraźnie nadmienić, że bynajmniej nie wyklucza się z góry przypadku, w którymby sumy

$$a + b \text{ i } b + a$$

albo iloczyny

$$a \cdot b \text{ i } b \cdot a$$

nie były równe pomiędzy sobą.

Omawiając definicje należące do klasy $2^{\circ}(A)$ musieliśmy z konieczności porzucić na ogólnikowym scharakteryzowaniu tychże. Natomiast możemy podać definicje, należące do klasy (B), w ich właściwym brzmieniu.

Definicje te opiewają jak następuje:

(B₁) Sumą tylu danych elementów klasy (K) uszeregowanych w oznaczonym porządku (P) i zwanych *składnikami*, ile wynosi pewna liczba całkowita n , większa od liczby 2, ale pozatem mogąca mieć jakąkolwiek wartość, zowiemy wynik dodania ostatniego składnika do sumy reszty składników, przy zachowaniu liczb porządkowych, jakie te składniki mają w uszeregowaniu (P); jeżeli więc oznaczymy ogólnie składnik o liczbie porządkowej i przez symbol a_i , to w takim razie wyrażenie »suma rozważanych składników przy rozważanym ich uporządkowaniu« oznacza ostatni wyraz ciągu

$$s_1, s_2, \dots, s_n,$$

którego pierwszy wyraz s_1 spełnia równość

$$s_1 = a_1,$$

a i -ty, przy

$$1 < i \leq n,$$

równość

$$s_i = s_{i-1} + a_i.$$

Wyznaczanie sumy ilukolwiek składników zowiemy dodawaniem tychże.

(B₂) *Resztę* odejmowania od oznaczonego elementu a klasy (K), przyjętego za *odjemną*, drugiego elementu b tejże klasy, przyjętego za *odjemnik*, zowiemy każdy element x klasy (K), spełniający jedną przynajmniej z równości

$$(1) \quad b + x = a$$

lub

$$(2) \quad x + b = a.$$

Uwaga. Jeżeli przy dodawaniu dwóch wielkości rozważanej klasy porządek składników nie jest bez wpływu na wartość sumy, to należy rozróżnić dwa rodzaje odejmowania, zależnie od tego, czy reszta x ma być wyznaczana z równości postaci (1) czy też postaci (2). Jeżeli zaś wartość sumy dwóch składników od ich uszeregowania nie zależy, to równości (1) i (2) są pomiędzy sobą równoważne, gdyż, bez względu na wartość elementu x , mamy tedy

$$b + x = x + b,$$

skąd oczywiście wynika, że równości (1) i (2) albo obie zachodzą albo też obie nie zachodzą; w tym przypadku istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania.

(B₃) *Iloczynem* tylu danych, w danym porządku (P) uszeregowanych elementów klasy (K), zwanych *czynnikami*, ile wynosi pewna liczba całkowita n , większa od 2, ale pozatem jakakolwiek, zowiemy iloczyn mnożenia przez ostatni element, przyjęty za mnożnik, iloczynu reszty elementów, wyznaczonego przy zachowaniu numerów porządkowych, jakie te elementy mają w uszeregowaniu (P); jeżeli więc oznaczymy ogólnie przez a_i czynnik o liczbie porządkowej i , to w takim razie wyrażenie »iloczyn rozważanych elementów przy rozważanym ich uszeregowaniu« oznacza ostatni wyraz ciągu

$$t_1, t_2, \dots, t_n,$$

którego pierwszy wyraz t_1 spełnia równość

$$t_1 = a_1,$$

a i -ty, równość

$$t_i = t_{i-1} \cdot a_i$$

przy każdej od jedności większej, ale od liczby n nie większej wartości wskaźnika i ; wyznaczanie iloczynu ilukolwiek czynników zowie się *mnożeniem*.

(B₄) *Ilorazem* podziału danego elementu a klasy (K), przyjętego za *dzielną*, przez drugi dany element b tejże klasy, przyjęty za *dzielnik*, zowiemy każdy element x klasy (K), spełniający jedną przynajmniej z równości

$$(3) \quad b \cdot x = a$$

lub

$$(4) \quad x \cdot b = a.$$

Czynność wyznaczania ilorazu zowiemy *dzieleniem*.

Uwaga. Jeżeli prosta zmiana porządku czynników w iloczynie dwóch elementów klasy (K) może spowodować zmianę wartości iloczynu, to należy oczywiście rozróżnić dwa rodzaje dzielenia, zależnie od tego, czy iloraz x ma być wyznaczony z równości postaci (3), czy też z równości postaci (4). Jeżeli zaś wartość iloczynu dwóch elementów klasy (K) nie zależy od ich uszeregowania, to, bez względu na wartość elementu x , mamy

$$b \cdot x = x \cdot b;$$

a ponieważ stąd wynika, że równości (3) i (4) są równoważne pomiędzy sobą, przeto w tym przypadku istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia.

Ze względu na powyższe zasady będziemy w przyszłości, przy rozwijaniu teorii działań podstawowych na wielkościach jakiegokolwiek szczególnej klasy, podawać tylko definicje, wymienione pod (A₁) i (A₂), a po podaniu tych definicji uważać będziemy pojęcia sumy i iloczynu n wielkości ($n > 2$) rozważanego rodzaju oraz pojęcia odejmowania i dzielenia za rzeczy znane, określone przez definicje (B₁), (B₂), (B₃) i (B₄).

Żeby wykończyć ogólną teorię działań podstawowych, winniśmy jeszcze podać, prócz niektórych uzupełniających wskazówek, odnoszących się do symboliki, pewne ogólne twierdzenia, z których wynika w szczególności, że w następstwie zasady (C) i definicji (B₁), (B₂), (B₃) i (B₄) każde z czterech działań podstawowych jest zgodnie z tem, cośmy powiedzieli przy końcu § 57-go, działaniem arytmetycznem w znaczeniu Def. I rzeczonego paragrafu. Tym właśnie przedmiotom poświęcimy resztę niniejszego rozdziału.

§ 60. Tw. I. Jeżeli dodawanie wielkości oznaczonej klasy (K) określone zostało w sposób zgodny z zasadami, wyłożonemi w § 59-tym, to dodawanie wielkości klasy (K) jest, bez względu na ilość składników, działaniem arytmetycznem jednoznacz-nem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

Słuszność tego twierdzenia dostrzegamy wyraźnie przez intuicję, ale właśnie ta okoliczność utrudnia poprawne rozwinięcie dowodu i z tego po-wodu podajemy szczegółowo rzeczowy dowód. Ponieważ słuszność naszego twierdzenia przy dwóch tylko składnikach jest bezpośrednio zapewniona przez zasadę (C) paragrafu poprzedzającego, przeto zakładamy, że ilość n składników jest większa od liczby 2. Zachowajmy wszystkie oznaczenia, któremi posługi-waliśmy się przy podawaniu def. (B₁) i upewnijmy się najpierw o bezwarunkowej wykonalności dodawania.

Ponieważ w klasie (K) istnieje element s_1 , spełniający równość

$$s_1 = a_1,$$

gdyż do danej wielkości należy przynajmniej jedna wielkość jej równa (mia-nowicie sama wielkość dana), ponieważ dalej, ze względu na zasadę (C) § 59-go, w razie istnienia w klasie (K) elementu s_{i-1} ($i \geq 2$), istnieje w tej klasie i ele-ment s_i , spełniający równość

$$s_i = s_{i-1} + a_i,$$

przeto, na podstawie zasady indukcji matematycznej, istnieje także element s_n , spełniający definicję sumy danych elementów, bez względu na wielkość liczby całkowitej n . Udowodniliśmy zatem bezwarunkowej wykonalności dodawania. Pozostaje więc tylko do wykazania, że dodawanie jest działaniem arytmetycznem, jednoznacznem.

Ponieważ element s_n podlega jedynie warunkowi spełniania równości

$$s_n = s_{n-1} + a_n,$$

przeto każdy element e , równy oznaczonemu elementowi s_n , spełniającemu po-wyższą równość, spełnia równość

$$e = s_{n-1} + a_n$$

i może zatem sam być uważany za sumę, którą przedstawia element s_n . Z tego wynika, że warunki (W), określające sumę iluokolwiek elementów klasy (K, są tego rodzaju, iż tw. I § 57 zachodzi. Powiadam, że w stosunku do rzeczonych warunków (W) zachodzi również i tw. II § 57-go.

Istotnie, uważajmy n elementów

$$a'_1, a'_2 \dots a'_n$$

klasy (K) i załóżmy, że elementy te spełniają równości

$$a'_i = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Jeżeli wyznaczymy wyrazy ciągu

$$s'_1, s'_2, \dots, s'_n$$

z równości

$$s'_1 = a'_1$$

i

$$s'_i = s'_{i-1} + a'_i; \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

to, zważywszy, iż ze względu na zasadę (C) tw. II § 57-go jest słuszne w odniesieniu do sumy dwóch elementów, łatwo stwierdzimy drogą indukcji matematycznej, że

$$(5) \quad s'_n = s_n,$$

Ponieważ już stwierdziliśmy, że każdy element, równy sumie w danym porządku uszeregowanych, danych elementów klasy (K), sam uważany być może za tę sumę, przeto z równości (5) wynika, że s'_n uważać możemy za sumę elementów

$$(6) \quad a_1, a_2, \dots, a_n$$

przy tym właśnie ich uszeregowaniu, przy którym s_n przedstawia ich sumę. Z drugiej znów strony, na podstawie definicji elementu s_n , warunki (W'), z których wyznaczaliśmy element s'_n są to warunki w jakie przechodzą warunki (W), określające s_n , wskutek podstawienia w miejsce elementów (6) elementów

$$(7) \quad a'_1, a'_2, \dots, a'_n,$$

odpowiednio im równych, ale pozatem dowolnie wybranych. Stwierdzamy więc, że w zastosowaniu do warunków (W), określających element s_n , tw. II § 57-go rzeczywiście zachodzi. Obecnie okazaliśmy już, że dodawanie jest działaniem arytmetycznym bezwarunkowo wykonalnym. Pozostaje tylko do udowodnienia, że działanie to jest jednoznaczne. W tym celu zachowajmy powyższe oznaczenia i zważmy, że równość (5) wyraża twierdzenie, które możemy wysłowić w sposób następujący: jeżeli elementy s_n i s'_n klasy (K) przedstawiają odpowiednio sumy elementów (6) i (7) przy takim ich uszeregowaniu, przy którym symbole

$$a_i \text{ i } a'_i$$

oznaczają odpowiednio składniki i -te rozważanych sum przy każdej wartości całkowitej na i , nie mniejszej od jednośc i nie większej od n , jeżeli nadto mamy

$$a_i = a'_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

to wówczas elementy s_n i s'_n , są równe pomiędzy sobą. Ponieważ zaś każda wielkość jest sama sobie równa, przeto założenia powyższego twierdzenia spełnione będą w szczególności i w tym razie, kiedy każdy element a'_i , ($1 \leq i \leq n$) zlewać się będzie z elementem a_i . Ale w takim razie rzeczzone twierdzenie przybiera postać następującą: jeżeli każdy z dwóch elementów s_n i s'_n uważany być może za sumę tych samych i w tym samym porządku uszeregowanych elementów klasy (K), to te elementy są równe pomiędzy sobą. Innymi słowy, dodawanie jest rzeczywiście działaniem jednoznacznym. Ostatecznie uzasadniłmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

§. 61. Niniejszy paragraf poświęcamy niektórym ogólnym regułom, odnoszącym się do symbolizowania sum.

Jeżeli chodzi o przedstawienie wyniku dodania pewnego elementu b do elementu, przedstawionego przez pewien symbol złożony S , to na podstawie ogólnych zasad symboliki matematycznej (§ 16), uzyskamy odnośny symbol, zastępując w symbolu

$$a + b$$

symbol a przez symbol złożony S , zamknięty w nawiasie. Jednakowoż celem uproszczenia symboliki zastrzegamy sobie raz na zawsze prawo upuszczenia nawiasu przy symbolu S . Jeżeli więc np. pragniemy przedstawić wynik dodania elementu b do sumy

$$d + c,$$

to, na podstawie powyższej umowy, możemy zastąpić symbol

$$(d + c) + b$$

przez symbol prostszy

$$d + c + b.$$

Analogicznie możemy, na podstawie powyższej umowy, zastąpić symbol

$$(d \cdot c) + b$$

przez symbol

$$d \cdot c + b.$$

Często zachodzi konieczność utworzenia symbolu sumy w przypadku, kiedy ilość składników nie jest oznaczona liczbowo, lecz tylko przez pewną literę n . W takich razach posługujemy się pewnym symbolem, z którym obecnie zapoznamy czytelnika.

Założmy, że przy każdej wartości całkowitej wskaźnika i , nie większej od pewnej liczby całkowitej N ($N > 1$)

$$a_i$$

przedstawia, na podstawie odpowiedniej definicji, pewną wielkość takiej klasy (K) wielkości, dla której dodawanie zostało określone, i uważajmy dwie liczby całkowite

$$p \text{ i } q,$$

spełniające związki

$$p \leq N, \quad q \leq N.$$

Przy tych warunkach łatwo wyprowadzić z zasady indukcji matematycznej, że określimy w zupełności wartość elementu klasy (K), za symbol którego przyjmujemy symbol

$$(8) \quad \sum_{i=p}^q a_i,$$

przez przyjęcie umów następujących:

1^o Jeżeli zachodzi równość

$$q = p,$$

jeżeli więc symbol (8) przybiera postać

$$\sum_{i=p}^p a_i,$$

to w takim razie zachodzi równość

$$\sum_{i=p}^p a_i = a_p$$

2^o Jeżeli zachodzi nierówność

$$p < q,$$

to wówczas mamy

$$\sum_{i=p}^q a_i = \sum_{i=p}^{q-1} a_i + a_q$$

3^o Jeżeli wreszcie mamy

$$p > q,$$

to natenczas mamy

$$\sum_{i=p}^q a_i = \sum_{i=p}^{q+1} a_i + a_q$$

Symbol (8), który w taki sposób określiliśmy, jest właśnie symbolem, którego definicję pragnęliśmy podać.

Z definicji symbolu (8) wynika, że w razie istnienia nierówności

$$p < q,$$

symbol ten przedstawia sumę, której składnikiem o liczbie porządkowej k ($k = 1, 2, \dots, q - p + 1$), jest element

$$a_{p+k-1}$$

klasy (K).

Jeżeli zaś mamy

$$p > q,$$

to symbol (3) przedstawia sumę, w której składnikiem o liczbie porządkowej k ($k = 1, 2, \dots, p - q + 1$) jest element

$$a_{p-k+1}.$$

Z uwag tych wynika, że w razie istnienia nierówności

$$p \neq q$$

każdy z symbolów

$$\sum_{i=p}^q a_i \quad \text{ i } \quad \sum_{i=q}^p a_i$$

przedstawia sumę pewnych tych samych elementów klasy (K), ale każda z tych sum odpowiada innemu uszeregowaniu składników. Zatem, jeżeli porządek składników może wpływać na wartość sumy, jeżeli dodawanie elementów klasy (K) nie posiada własności przemienności, to w takim razie powyższe dwie sumy mogą nie być równe pomiędzy sobą.

Jeżeli dla przykładu przyjmiemy

$$p = 2, \quad \text{ a } \quad q = 4,$$

to mieć będziemy

$$(9) \quad \sum_{i=2}^4 a_i = a_2 + a_3 + a_4$$

oraz

$$(10) \quad \sum_{i=4}^2 a_i = a_4 + a_3 + a_2.$$

W razie istnienia równości

$$p = q$$

symbol (8) nie przedstawia już sumy, lecz tylko element, równy elementowi

$$a_p;$$

jednakowoż rozszerzając znaczenie wyrazu »suma« w ten sposób, aby wyra-

żenie »suma o jednym składniku« nie było pozbawione znaczenia i oznaczało element równy jednemu składnikowi sumy, zachowujemy dla symbolu (8) nazwę sumy, a symbol

$$\sum_{i=1}^n$$

zowiemy w każdym razie *symbolem sumowania*.

§ 62. Tw. I. Jeżeli mnożenie elementów oznaczonej klasy wielkości (K) zostało określone w sposób zgodny z zasadami § 59-go, to w takim razie bez względu na ilość czynników mnożenie elementów klasy (K) jest działaniem arytmetycznem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

Przyjawszy za wzór dowód tw. I § 60-go, czytelnik sam rozwinie z łatwością dowód niniejszego twierdzenia. Ale rozwijanie tego dowodu zalecamy tylko jako pouczające ćwiczenie, gdyż w rzeczywistości twierdzenie niniejsze, jego założenia, oraz jego dowód wyprowadzić możemy z tw. I § 60-go, założeń tegoż i odnośnego dowodu, przez podstawienie wyrazów

	mnożenie, iloczyn, czynnik
w miejsce wyrazów	
	dodawanie, suma, składnik
oraz symbolu	

$$\times$$

w miejsce symbolu

$$+$$

a z tego wynika, że rozwijanie dowodu niniejszego twierdzenia jest rzeczywiście zbędne.

§ 63. Żeby w zupełności wyjaśnić tę okoliczność, iż w rzeczywistości dostatecznem jest uzasadnić albo tw. I § 60 albo tw. § 62, aby uzasadnić tem samem i drugie z nich, czynimy uwagę następującą: załóżmy, że dla oznaczonej klasy wielkości (K) określone zostało oznaczone działanie arytmetyczne jednoznaczne, wykonalne bez zastrzeżeń na każdej parze elementów klasy (K), dowolnie danych i w dowolnie danym porządku uszeregowanych, i niech symbol

$$f(a, b)$$

oznacza wynik wykonania rozważanego działania na elementach a i b w przypadku, kiedy element a ma być uważany za pierwszy, a element b za drugi. Jeżeli tedy oznaczamy przez (C) czynność polegającą na tem, aby do danego ciągu

$$a_1, a_2 \dots a_n$$

elementów klasy (K) ($n \geq 2$) dobrać element s_n w ten sposób, żebyśmy do elementu s_n mogli tak dobrać ciąg

$$s_1, s_2, \dots, s_{n-1},$$

aby spełniony był związek

$$s_1 = a_1$$

oraz związek

$$s_i = f(s_{i-1}, a_i)$$

przy każdej od jedności większej, ale od liczby n nie mniejszej wartości całkowitej wskaźnika i , to w takim razie, o ile przedtem dodawanie lub mnożenie elementów klasy (K) nie zostało określone, oczywiście będziemy mogli, nie naruszając wyżej omówionych zasad, oświadczyć, że czynności (C) nadajemy pewną jedną (tę, którą sami zechcemy) z nazw »dodawanie« albo »odejmowanie«. Z drugiej strony, jakąkolwiek nazwę nadalibyśmy czynności (C), zachodziłoby w każdym razie twierdzenie następujące: czynność (C) jest działaniem arytmetycznem jednoznacznem, wykonalnem bez zastrzeżeń na jakiegokolwiek ilości n ($n \geq 2$) dowolnie danych, w dowolnie danym porządku uszeregowanych elementach klasy (K). Dowodem zaś tego twierdzenia stanie się oczywiście dowód tw. I, jeżeli tylko zastąpimy symbol $f(a, b)$ przez symbol

$$a + b.$$

Oczywiście moglibyśmy dowód niniejszego twierdzenia także uzyskać przez zastąpienie w dowodzie tw. I symbolu

$$a + b$$

przez symbol

$$f(a, b).$$

Ostatecznie nic w tym, cośmy dotychczas powiedzieli o *dodawaniu* i *mnożeniu*, nie powoduje różnicy pojęciowej pomiędzy temi działaniami; różnicę znajdujemy tylko w terminologii i symbolice. Pojęciowej natury różnice pomiędzy dodawaniem a mnożeniem powstaną wtedy dopiero, kiedy opuścimy całkiem ogólne stanowisko, zajmowane przez nas w niniejszym rozdziale.

§ 64. Do teorii mnożenia wprowadzamy symbol iloczynu, całkiem analogiczny symbolowi sumy (8). Zachowując znaczenie, jakie mają symbole postaci

$$a_i,$$

oraz litery p i q we wzorze (8), określamy symbol

(11)

$$\prod_{i=p}^q a_i$$

jako symbol elementu klasy (K), którego wartość tylko jest oznaczona, a to w sposób następujący:

1° Jeżeli zachodzi równość

$$p = q,$$

jeżeli więc symbol (11) przybiera postać

$$\prod_{i=p}^p a_i,$$

to w takim razie mamy

$$\prod_{i=p}^p a_i = a_p$$

2° Jeżeli zachodzi nierówność

$$p < q,$$

to wówczas mamy

$$\prod_{i=p}^q a_i = \left\{ \prod_{i=p}^{q-1} a_i \right\} \times a_q$$

3° Jeżeli nareszcie zachodzi nierówność

i

$$p > q,$$

to przyjmujemy

$$\prod_{i=p}^q a_i = \left\{ \prod_{i=p}^{q+1} a_i \right\} \times a_q.$$

Jeżeli zachodzi nierówność

$$p \neq q,$$

to symbol (11) przedstawia oczywiście iloczyn, w którym czynnik k -ty jest element

$$a_{p+k-1} \quad \text{lub} \quad a_{p-k+1}$$

zależnie od tego, czy mamy

$$p < q, \quad \text{czy też} \quad p > q;$$

w pierwszym z tych przypadków ilość czynników równa się

$$q - p + 1,$$

a w drugim

$$p - q + 1.$$

Jeżeli zaś mamy

$$p = q,$$

to symbol (11) nie przedstawia już iloczynu, ale rozszerzając nieco znaczenie wyrazu »iloczyn«, i w tym nawet przypadku zowiemy symbol (11) *symbolem iloczynu*.

Podobnie jak przy symbolizowaniu sum o liczbowo danej ilości składników, opuszczamy także przy symbolizowaniu iloczynów nawiasy i oznaczamy porządek czynników przy mnożeniu przez porządek, w którym je piszemy. Na przykład zamiast symbolu

$$\{ (a \cdot b) \cdot c \} \cdot d$$

piszemy symbol

$$a \cdot b \cdot c \cdot d.$$

Zaznaczamy wyraźnie, że w razie, kiedy porządek czynników może wpływać na wartość iloczynu, błędem byłoby myśleć, że iloczyny

$$\prod_{i=p}^q a_i \quad \text{i} \quad \prod_{i=q}^p a_i$$

są koniecznie równe pomiędzy sobą; wprowadzie w obu iloczynach czynniki są te same, ale inny jest ich porządek w jednym z tych iloczynów, a inny w drugim. Jeżeli np. przyjmiemy

$$p = 2, \quad q = 4,$$

to mieć będziemy:

$$\prod_{i=2}^4 a_i = a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$$

oraz

$$\prod_{i=4}^2 a_i = a_4 \cdot a_3 \cdot a_2.$$

Przy kombinowaniu iloczynów drogą dodawania umawiamy się raz na zawsze, że opuszczać będziemy nawiasy, w których, na podstawie ogólnych zasad używania nawiasów, należałoby je właściwie zamykać; nie piszemy więc np

$$(a \cdot b) + (c \cdot d),$$

ale

$$a \cdot b + c \cdot d.$$

Winniśmy zaznaczyć, że umowa, podana w § 61-ym, upoważnia już nas do opuszczenia nawiasu przy iloczynie $a \cdot b$, a więc i do zastąpienia symbolu (1) przez symbol

$$a \cdot b + (c \cdot d),$$

ale żeby usprawiedliwić opuszczenie drugiego nawiasu, konieczna jest dodatkowa umowa, np. ta, którą właśnie przyjęliśmy.

§ 65. Tw. I. Def. (B_4) (str. 53) określa odejmowanie elementów klasy (K) jako oznaczone działanie arytmetyczne.

Istotnie, założmy, że pewien element x klasy (K) uważany być może za resztę odejmowania elementu b od elementu a . W takim razie zachodzi jedna przynajmniej z równości

$$(12) \quad b + x = a \quad \text{lub} \quad x + b = a.$$

Ponieważ równość

$$(13) \quad x' = x$$

pociąga za sobą obie równości

$$b + x' = b + x \quad \text{oraz} \quad x' + b = x + b,$$

przeto w następstwie równości (13) zachodzić będzie jedna przynajmniej z równości

$$b + x' = a \quad \text{lub} \quad x' + b = a.$$

Jeżeli więc x uważany być może za resztę odejmowania elementu b od elementu a , a element x' spełnia (13), to element x' może także być uważany za resztę odejmowania elementu b od elementu a . Zatem, co do warunków (W) określających resztę odejmowania elementu b od elementu a , tw. I § 57 zachodzi. W odniesieniu do tychże warunków (W) tw. II § 57 jest również słuszne; jeżeli bowiem mamy

$$a' = a \quad \text{oraz} \quad b' = b,$$

a element x spełnia jedną z równości (12), to ze względu na istnienie równości

$$b' + x = b + x \quad \text{oraz} \quad x + b' = x + b,$$

zachodzić będzie jedna przynajmniej z równości

$$b' + x = a' \quad \text{lub} \quad x + b' = a',$$

skąd właśnie wynika, że w zastosowaniu do warunków (W) tw. II § 57 rzeczywiście zachodzi. Zatem uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Uwaga. Z powyższego twierdzenia bynajmniej nie wynika, żeby odejmowanie konieczne było działaniem jednoznaczem. Istotnie:

1^o, jeżeli suma dwóch elementów klasy (K) zależy od porządku składników, to ze względu na konieczność rozróżnienia (§ 59) dwóch rodzajów odejmowania, zależnie od tego, czy reszta x ma być wyznaczona z równości

$$b + x = a,$$

czy też z równości

$$x + b = a,$$

może się wydarzyć, że każdy z pewnych dwóch nierównych pomiędzy sobą elementów uważany być winien za resztę odejmowania elementu b od elementu a .

²⁰ Niezależnie od powyższej przyczyny, nie mamy na razie podstaw do wykluczenia ewentualności, w której istniałyby dwie albo i więcej wartości na x , sprawdzające jakąś jedną z powyższych równości. Gdybyśmy na przykład nazwali dodawaniem liczb wymiernych to działanie, które poznaliśmy w rozdz. I-szym pod nazwą mnożenia (a taka zmiana terminologii nie naruszyłaby żadną z zasad przez nas przyjętych), to w takim razie odejmowanie (które stałoby się tedy działaniem, które dotychczas nazywaliśmy dzieleniem liczb wymiernych) byłoby wieloznacznem w przypadku, w którymby odjemna i odjemnik równały się zeru. Z tych samych przyczyn, dla których tw. I § 62 uważać należy (na podstawie obszernych wyjaśnień podanych wyżej) za następstwo tw. I § 60 go, należy też uważać za następstwo tw. I niniejszego paragrafu twierdzenie następujące:

Tw. IV. Def. (B_4) określa dzielenie elementów klasy (K) jako pewne działanie arytmetyczne.

Uwaga. Podobnie jak przy odejmowaniu, błędem byłoby myśleć, przy dzieleniu, że to działanie koniecznie jest jednoznaczne.

§ 66. Na zakończenie tych ogólnych rozważań, omówimy jedyny przypadek, w którym wyjątkowo odstępujemy od ogólnych zasad, podanych w paragrafach poprzedzających: w teorii liczb całkowitych określamy dzielenie jako czynność, polegającą na tem, żeby do dwóch danych liczb całkowitych a i b , przyjętych odpowiednio za dzielną i dzielnik, dobrać dwie liczby całkowite q i r , zwane odpowiednio całkowitą częścią ilorazu i resztą, w taki sposób, żebyśmy mieli

$$a = b \cdot q + r$$

i żeby nadto liczba r spełniała jeden przynajmniej ze związków

$$r = 0 \text{ lub } r < b.$$

Definicja ta oczywiście jest wogóle sprzeczna z definicyą (B_4) § 59-go. Z tej przyczyny niewątpliwie byłoby lepiej, gdybyśmy powyższej czynności dawali jakąś nazwę odmienną od nazwy »dzielenie«. W rzeczywistości jednak, pod naciskiem przyjętych zwyczajów, zachowujemy w tym przypadku, jako też i we wielu innych terminologię wadliwą. Należy jednak zaznaczyć, że, po ugruntowaniu teorii liczb wymiernych, niezgodność powyższej definicyi z definicyą (B_4) może być uważana za nieistniejącą: istotnie, przy powyższem znaczeniu symbolów a , b , q i r może być mowa o niezgodności definicyi dzielenia liczb całkowitych z def. (B_4) § 59-go tylko w razie, kiedy

$$b > 0;$$

jeżeli bowiem

$$b = 0,$$

to dzielenie, w znaczeniu obu definicyi jest niewykonalne, chyba że mamy jeszcze

$$a = 0,$$

w którym to przypadku obie definicje doprowadzają do wyniku, iż iloraz jest całkiem nieoznaczony.

Jeżeli zaś mamy

$$b > 0,$$

to mamy także

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b},$$

możemy więc powiedzieć, że w tym razie dzielenie liczb całkowitych jest czynnością, która służy do nadania pewnej szczególnej postaci ilorazowi

$$\frac{a}{b},$$

rozumianemu w sposób, określony przez def. (B₄) § 59-go.

III. Działania podstawowe w przypadku, kiedy definicje dodawania i mnożenia spełniają pewne szczególne warunki.

§ 67. Oznaczmy przez (K) taką klasę wielkości, dla której suma i iloczyn dwóch elementów zostały określone w sposób zgodny z ogólnymi zasadami § 59-go, a przy tem taki, aby zachodziły twierdzenia następujące:

Tw. I. Jakiegokolwiek elementy klasy (K) oznaczylibyśmy przez a , b i c , mamy w każdym razie

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ } ^1).$$

Tw. II. Jakiegokolwiek elementy klasy (K) oznaczylibyśmy przez a i b , mamy zawsze

$$a + b = b + a.$$

Tw. III. Jeżeli dwa elementy b i b' klasy (K) spełniają związek

$$b \neq b'$$

to, bez względu na wartość trzeciego elementu a rozważanej klasy, mamy

$$a + b \neq a + b'$$

Tw. IV. Jakiegokolwiek elementy klasy (K) oznaczylibyśmy przez a i b , zawsze jest rozwiązalne jedno przynajmniej z dwóch zagadnień następujących:

¹⁰ Wyznaczyć taki element x klasy (K), który spełniałby równość

$$b + x = a.$$

¹⁾ Ze względu na ogólne zasady, podane w § 61, symbol $(a + b) + c$ jest równoważny symbolowi prostszemu $a + b + c$; zachowaliśmy jednak pierwszy symbol, jako bardziej wyrazisty.

2° Wyznaczyć taki element y klasy (K), żebyśmy mieli

$$a + y = b.$$

Tw. V. Bez względu na wartość elementów a , b i c klasy (K) mamy

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)^1).$$

Tw. VI. Bez względu na wartości dwóch elementów a i b klasy (K) mamy zawsze

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Tw. VII. Jeżeli tylko oznaczony element a klasy (K) spełnia związek

$$a + a \neq a,$$

a symbole b i b' oznaczają takie elementy klasy (K), które sprawdzają nierówność

$$b \neq b',$$

to w takim razie zachodzi zawsze nierówność

$$a \cdot b \neq a \cdot b'.$$

Tw. VIII. Jeżeli tylko pewien element b klasy (K) spełnia warunek

$$+ b \neq b$$

to do elementu b i drugiego dowolnie danego elementu a klasy (K) można zawsze dobrać jeden przynajmniej element x , spełniający równość

$$b \cdot x = a.$$

Tw. IX. Jakiegokolwiek elementy klasy (K) oznaczylibyśmy przez a , b i c , mamy w każdym razie

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

O tem, że możliwą jest rzeczą utworzenie klasy wielkości (K), dla której definicje sumy i iloczynu dwóch jej elementów tak można ułożyć, żeby czyniły zadość ogólnym zasadom, omówionym w § 59, i żeby nadto, w na-

¹⁾ Ze względu na ogólne zasady, podane w § 64, moglibyśmy zastąpić symbol $(a \cdot b) \cdot c$ przez symbol prostszy $a \cdot b \cdot c$. Jednakowoż woleliśmy użyć symbol pierwszy jako bardziej wyraziisty.

stępstwie tych definicji, każde z powyższych dziewięciu twierdzeń rzeczywiście zachodziło, przekonujemy się z łatwością, zważywszy, iż klasa wielkości, jaką tworzy zbiór wszystkich liczb wymiernych, stanowi właśnie przykład na klasę wielkości, spełniającą powyższe warunki. Przy dalszych studiach stwierdzimy, że istnieją, prócz liczb wymiernych bezwzględnych, inne jeszcze, nadzwyczaj dla nauki ważne, klasy wielkości (liczby bezwzględne, liczby rzeczywiste i liczby zespolone), których dodawanie i mnożenie również spełniają wszystkie powyższe warunki.

Wobec takiego stanu rzeczy wskazaniem jest zbadać następstwa założenia, iż, w odniesieniu do pewnej klasy wielkości (K), zachodzą wszystkie twierdzenia, wyszczególnione wyżej. Uczyniwszy to, skrócimy w znacznej mierze dalszy wykład, zdołamy nadać mu większą jasność, a nadto, zdołamy lepiej uwydatnić właściwy charakter teorii wielkości wspomnianych wyżej. Temu właśnie przedmiotowi poświęcimy cały prawie niniejszy rozdział; tylko w końcowym paragrafie zbadamy dodatkowo wyniki, do których dochodzi się w przypadku, kiedy się przyjmuje, że w odniesieniu do pewnej klasy wielkości (K) zachodzi nie tylko każde z dziewięciu twierdzeń, wyszczególnionych wyżej, ale jeszcze pewne dwa nowe twierdzenia. Z wyjaśnień tych wynika że:

1^o Z wyjątkiem teorii, stanowiącej przedmiot ostatniego paragrafu niniejszego rozdziału, układ postulatów¹⁾, stanowiących łącznie podstawę teorii, wykładanych w tym rozdziale, składa się ze zdań wyrażających, że klasa (K) jest klasą wielkości przynajmniej w znaczeniu szerszem, a działania podstawowe na tych wielkościach określone zostały w myśl zasad, podanych w rozdziale poprzedzającym, oraz dziewięciu twierdzeń, wyszczególnionych wyżej w niniejszym paragrafie.

2^o Układ postulatów teorii, wyłożonej w ostatnim paragrafie niniejszego rozdziału, tym tylko różni się od układu postulatów, przyjętych w paragrafach wcześniejszych, iż obejmuje zdania, których ważność wyraża, że klasa (K) jest klasą wielkości w znaczeniu ściślejszym, oraz dwa postulaty dodatkowe, polegające na ważności twierdzeń, wysłowionych w rzeczonym paragrafie pod I i II.

Uwaga. W powyższym wykazie twierdzeń twierdzenia I i V z jednej strony, a twierdzenia II i VI z drugiej tworzą dwie pary twierdzeń, z których każda ma własność następującą: jeżeli w którymkolwiek z twierdzeń jednej pary podstawimy w miejsce symbolu dodawania albo symbolu mnożenia drugi

¹⁾ Mówiąc o postulatach jakiejś teorii matematycznej, wymieniamy tylko te, które nie należą do pewników logiki, uważając za rzecz samą przez się rozumiejącą się, że pewniki logiki zawsze dołączone być winne do pełnego układu postulatów rozważonej teorii.

z tych symbolów, to uzyskamy drugie twierdzenie rozważanej pary. Jeżeli więc w dalszym ciągu przy uzasadnieniu jakiegoś twierdzenia (T) nie wypadnie nam powoływać się na żaden z postulatów, wymienionych w tym rozdziale, prócz tylko na postulaty, polegające na ważności twierdzeń I, II, V i VI, to wzięwszy pod uwagę

symbole dodawania i symbole mnożenia,

(symbole, do których należą i pewne wyrazy zwykłej mowy, jak dodawanie etc.), wystarczy zastąpić te z powyższych symbolów, które napotykamy w twierdzeniu (T) i jego dowodzie, odpowiednio przez

symbole mnożenia i symbole dodawania,

żeby z twierdzenia (T) i jego dowodu wyprowadzić nowe twierdzenie (T) wraz z jego dowodem. W taki właśnie sposób można naprzykład wyprowadzić z twierdzeń I i II § 68-go twierdzenie I i II-go § 70-go. Natomiast całkiem inny jest stan rzeczy, jeżeli chodzi o twierdzenie, opierające się na jednym lub kilku z twierdzeń III, IV, VII, VIII, IX, gdyż żadne z tych pięciu twierdzeń nie posiada odpowiednika, dającego się z niego wyprowadzić przez wykonanie wyżej wymienionych podstawień, i z tego powodu twierdzenia te wywołują zasadnicze różnice pomiędzy teorią dodawania a teorią mnożenia.

§ 68. Tw. I. (Własność łączności dodawania). Jeżeli w sumie n ($n > 2$) wielkości klasy (K) zastąpimy układ k ($1 < k < n$) składników, bezpośrednio po sobie następujących, przez ich sumę, to nie spowodujemy żadnej zmiany wartości rozważanej sumy.

Żeby twierdzenie to uzasadnić jasno i ściśle, należy najpierw wyrazić treść jego w odpowiednich symbolach. Oznaczywszy ogólnie przez a_i składnik i -ty sumy, będziemy na nią mieli (§ 61) symbol następujący

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n a_i$$

Jeżeli teraz oznaczymy przez p i k dwie liczby całkowite, spełniające związki

$$(2) \quad 1 \leq p \leq n - k + 1, \quad 1 < k < n,$$

to suma

$$(3) \quad \sum_{i=p}^{p+k-1} a_i$$

przedstawiać będzie sumę k bezpośrednio następujących po sobie składników. Określmy teraz symbol¹⁾

$$(4) \quad s_j$$

¹⁾ Czytelnik ułatwi sobie zrozumienie definicji symbolu s_j jeżeli rozważy przykład, w którymby liczby p , k i n , występujące niżej, miały jakieś szczególne wartości, np.:

$$p = 3, k = 4, n = 9.$$

dla każdej, od jedności nie mniejszej, a od liczby

$$n - k + 1$$

nie większej wartości całkowitej wskaźnika j , w sposób następujący: jeżeli j spełnia związek

$$1 \leq j < p$$

(co może się zdarzyć tylko przy $p > 1$), to w takim razie symbol (4) przedstawia ten sam element klasy (K), co symbol

$$a_j;$$

jeżeli zaś mamy

$$j = p,$$

to symbol s_p , równoważny wówczas symbolowi (4), ma znaczenie określone równością:

$$(5) \quad s_p = \sum_{i=p}^{p+k-1} a_i;$$

jeżeli nareszcie wskaźnik j spełnia związek:

$$p < j \leq n - k + 1$$

(co oczywiście zdarzyć się może tylko w razie, kiedy $p < n - k + 1$), to wówczas symbol (4) oznacza ten sam element co symbol

$$a_{k+j-1}.$$

Na podstawie powyższego określenia symbolów postaci (4), sumą, w którą przeszłaby suma (1), gdybyśmy w niej zastąpili następujące po sobie składniki

$$a_p, a_{p+1}, \dots, a_{p+k-1}$$

przez ich sumę, a więc przez element s_p , określony równością (5), byłaby suma następująca:

$$(6) \quad \sum_{j=1}^{n-k+1} s_j.$$

Z tego wynika, że twierdzenie, o które chodzi, polega na równości

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^{n-k+1} s_j.$$

Tę więc równość winniśmy uzasadnić.

Lemat I. Jeżeli oznaczymy przez α i β dwie liczby całkowite, spełniające związki

$$1 \leq \alpha < n; \quad 1 \leq \beta \leq n - \alpha,$$

to zachodzić będzie równość:

$$(8) \quad \sum_{i=\alpha}^{\alpha+\beta} a_i = a_\alpha + \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+\beta} a_i.$$

Istotnie, przy

$$\beta = 1,$$

równość (8) oczywiście zachodzi ze względu na definicję symbolu sumowania. Załóżmy chwilowo, że rzeczona równość zachodziłaby, gdybyśmy mieli

$$\beta = \gamma, \quad (1 \leq \gamma < n - \alpha);$$

powiadam, że w takim razie równość (8) zachodziłaby i przy

$$\beta = \gamma + 1.$$

Istotnie, z założenia mamy

$$\sum_{i=\alpha}^{\alpha+\gamma} a_i = a_\alpha + \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+\gamma} a_i,$$

zatem

$$\sum_{i=\alpha}^{\alpha+\gamma} a_i + a_{\alpha+\gamma+1} = \left\{ a_\alpha + \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+\gamma} a_i \right\} + a_{\alpha+\gamma+1},$$

skąd (§ 67 tw. I)

$$\sum_{i=\alpha}^{\alpha+\gamma} a_i + a_{\alpha+\gamma+1} = a_\alpha + \left\{ \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+\gamma} a_i + a_{\alpha+\gamma+1} \right\},$$

skąd znów, na podstawie definicji symbolu sumowania

$$\sum_{i=\alpha}^{\alpha+\gamma+1} a_i = a_\alpha + \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+\gamma+1} a_i,$$

a ta równość wyraża właśnie, że równość (8) zachodzi przy

$$\beta = \gamma + 1.$$

Z uzyskanych wyników wnosimy, na podstawie zasady indukcji matematycznej, że lemat zachodzi w podanym brzmieniu.

Lemat II. Jeżeli oznaczymy przez t jakąkolwiek liczbę całkowitą, spełniającą związki

$$1 \leq t < n,$$

to mieć będziemy

$$(9) \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^t a_i + \sum_{i=t+1}^n a_i.$$

Istotnie, ponieważ

$$\sum_{i=1}^t a_i = a_t$$

na podstawie definicji symbolu sumy, przeto, przy

$$t = 1,$$

równość (9) zachodzi na podstawie Lem. I. Założmy chwilowo, że ta równość zachodzi jeszcze przy

$$t = q \quad (1 \leq q < n - 1).$$

Mamy tedy

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=q+1}^n a_i,$$

a ponieważ (Lem. I)

$$\sum_{i=q+1}^n a_i = a_{q+1} + \sum_{i=q+2}^n a_i,$$

przeto

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^q a_i + \left\{ a_{q+1} + \sum_{i=q+2}^n a_i \right\},$$

zatem (§ 67 tw. I)

$$\sum_{i=1}^n a_i = \left\{ \sum_{i=1}^q a_i + a_{q+1} \right\} + \sum_{i=q+2}^n a_i$$

czyli

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{q+1} a_i + \sum_{i=q+2}^n a_i.$$

Gdyby więc równość (9) zachodziła przy

$$t = q,$$

to zachodziłaby również i przy

$$t = q + 1.$$

Ponieważ zaś, jakśmy wyżej stwierdzili, rozważana równość zachodzi przy

$$t = 1,$$

przeto nasz lemat zachodzi w podanym brzmieniu.

Obecnie łatwo możemy uzasadnić równość (7). W tym celu zwróćmy się najpierw do ogólnego przypadku, w którym zachodzą obie nierówności następujące:

$$(10) \quad p > 1 \quad \text{oraz} \quad p + k - 1 < n.$$

Na podstawie Lem. II mamy:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{p+k-1} a_i + \sum_{i=p+k}^n a_i$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{p+k-1} a_i = \sum_{i=1}^{p-1} a_i + \sum_{i=p}^{p+k-1} a_i;$$

mamy więc:

$$(11) \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{p-1} a_i + \sum_{i=p}^{p+k-1} a_i + \sum_{i=p+k}^n s_j.$$

W podobny sposób znajdziemy:

$$(12) \quad \sum_{j=1}^{n-k+t} s_j = \sum_{j=1}^{p-1} s_j + \sum_{j=p}^p s_j + \sum_{j=p+t}^{n-k+t} s_j$$

Uwzględniając wzór (5) i zważywszy, że

$$\sum_{i=p}^p s_j = s_p,$$

otrzymujemy równość

$$(13) \quad \sum_{i=p}^p s_j = \sum_{i=p}^{p+k-1} a_i$$

Z drugiej znów strony, na podstawie definicji symbolów s_j , mamy

$$(14) \quad \sum_{j=1}^{p-1} s_j = \sum_{j=1}^{p-1} a_j = \sum_{i=1}^{p-1} a_i$$

oraz

$$(15) \quad \sum_{j=p+t}^{n-k+t} s_j = \sum_{i=p+k}^n a_i$$

Na podstawie wzorów (13), (14) i (15) wyprowadzamy ze wzoru (12) wzór następujący:

$$\sum_{j=1}^{n-k+l} s_j = \sum_{i=1}^{p-1} a_i + \sum_{i=p}^{p+k-1} a_i + \sum_{i=p+k}^n a_i,$$

a ta równość i równość (11) pociągają za sobą równość (7), o dowód której właśnie chodziło.

Zwracając się do przypadków szczególnych, kiedy nierówności (10) nie zachodzą obie, zaznaczamy przedewszystkiem, że, ze względu na nierówność

$$k < n,$$

która należy do założeń twierdzenia, dwa tylko przypadki rzeczzonego rodzaju zdarzyć się mogą: a mianowicie albo

$$p = 1 \quad \text{ i } \quad p + k - 1 < n,$$

albo

$$p > 1 \quad \text{ i } \quad p + k - 1 = n.$$

W pierwszym przypadku w miejsce wzorów (10) i (12) mamy następujące

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{p+k-1} a_i + \sum_{i=p+k}^n a_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n-k+l} s_j = \sum_{j=1}^p s_j + \sum_{j=p+1}^{n-k+l} s_j,$$

z których ze względu na (13) i (15) wynika znowu równość (7). W drugim zaś przypadku mamy

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{p-1} a_i + \sum_{i=p}^{p+k-1} a_i$$

oraz

$$\sum_{j=1}^{n-k+l} s_j = \sum_{j=1}^{p-1} s_j + \sum_{j=p}^p s_j,$$

a stąd, ze względu na (13) i (14), wynika, że i w niniejszym przypadku równość (7) zachodzi. Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Uwaga. Przy powyższym dowodzie opieraliśmy się na tw. I paragrafu poprzedzającego, ale nie powoływaliśmy się na żadne inne z dziewięciu twierdzeń, podanych w rzeczonym paragrafie. Zatem, aby niniejsze twier-

dzenie zachodziło, wystarczy, żeby zachodziło tw. I paragrafu poprzedzającego¹⁾, bez względu na to, czy pozostałe 8 twierdzenia zachodzą. Ze względu na ten stan rzeczy mówimy często, że tw. I § 67-go wyraża własność łączności dodawania, jakkolwiek w rzeczywistości rzeczony twierdzenie wyraża ją dla trzech składników, a pociąga ją tylko za sobą w przypadku ogólnym.

Tw. II. (Własność przemienności dodawania). Wartość sumy jakiegokolwiek ilości oznaczonych elementów klasy (K) jest niezależna od ich uszeregowania.

Istotnie, oznaczmy przez s sumę iluokolwiek elementów klasy (K), uszeregowanych w pewnym porządku, a przez s' sumę, w którą przechodzi suma s wskutek przemiany numerów porządkowych dwóch bezpośrednio następujących po sobie składników a i b . Jeżeli z jednej strony zastąpimy w sumie s składniki a i b przez ich sumę

$$a + b,$$

a w sumie s' przez ich sumę

$$b + a,$$

to uzyskamy dwie nowe sumy s_1 i s'_1 , które, ze względu na tw. I, równać się będą odpowiednio sumom s i s' . Ponieważ zaś (§ 67 tw. II) mamy

$$a + b = b + a,$$

przeto sumy s_1 i s'_1 są sumami, w których składniki równorzędne są równe pomiędzy sobą. Mamy więc

$$s_1 = s'_1,$$

a więc i

$$s = s'.$$

Przekonaliśmy się zatem, że przemiana numerów porządkowych dwóch jakichkolwiek, byle sąsiednich, składników na wartość sumy nie wpływa.

Z tego zaś wynika (§ 31 Tw. I), że niniejsze twierdzenie zachodzi w po-danem brzmieniu.

Uwaga. Z twierdzeń I i II wynika, że przy wyznaczaniu sumy (S) n danych elementów klasy (K), możemy którekolwiek k ($k < n$) z nich zastąpić przez ich sumę, bez wywołania zmiany wartości sumy (S).

§ 69. **Tw. I.** Odejmowanie elementów klasy (K) jest, w razie wykonalności, działaniem arytmetycznym jednoznaczem.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, należy przedewszystkiem zważyć, że, dla elementów klasy (K), istnieje jeden tylko rodzaj odejmowania²⁾; albowiem jeżeli

¹⁾ Przyjmujemy, jako rzecz samą przez się rozumiejącą się, że dodawanie elementów klasy (K) zostało określone w myśl zasad rozdziału poprzedzającego.

²⁾ Porównaj § 59, Uwaga przy def. (B₂).

oznaczymy przez a i b dwa dane elementy klasy (K), to, (§ 67, tw. III) bez względu na wartość elementu x rozważanej klasy, mamy

$$b + x = x + b,$$

skąd wynika, że równości

$$b + x = a$$

i

$$x + b = a$$

są pomiędzy sobą równoważne i że zatem rzeczywiście obojętną jest rzeczą z której z tych różności wyznaczmy element x .

Ponieważ (§ 65, tw. I) wiemy już, że odejmowanie jest z pewnością pewnem działaniem arytmetycznem, przeto chodzi tylko o wykazanie jednoznaczności tegoż dla elementów klasy (K). W tym zaś celu wystarczy dowieść, że równości

$$(1) \quad b + x = a \text{ i } b + x' = a$$

pociągają za sobą związek

$$x = x'.$$

Otóż, gdybyśmy mieli

$$x \neq x',$$

to (§ 67, tw. III) mielibyśmy także

$$b + x \neq b + x',$$

co byłoby sprzecznem z istnieniem obu związków (1). Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Uwaga I. Ze względu na istnienie jednego tylko rodzaju odejmowania elementów klasy (K), przyjmujemy za symbol reszty odejmowania elementu b od elementu a symbol

$$a - b,$$

w którym nic nie oznacza, czy element x , przedstawiający resztę, ma być wyznaczony z równości

$$b + x = a, \text{ czy też z równości } x + b = a;$$

na podstawie Tw. I symbol

$$a - b,$$

o ile spełnione są warunki wykonalności odejmowania, przedstawia element klasy (K), którego wartość oznaczona jest w zupełności.

Uwaga II. Z powyższej uwagi i podanej w niej definicyi symbolu

$$a - b,$$

gdzie a i b oznaczają dwa elementy klasy (K), wynika, że równość

$$x = a - b$$

równoważna jest każdej z równości

$$b + x = a \text{ i } x + b = a,$$

równoważnych pomiędzy sobą, a o ile odejmowanie, zaznaczone we wzorze $a - b$, jest wykonalne, mamy

$$(a - b) + b = a.$$

Uwaga III. Przy pisaniu symbolu różnicy, w której odjemna lub odjemnik jest iloczynem, zastrzegamy sobie prawo opuszczania nawiasu, w którym na podstawie ogólnych reguł należałoby zamknąć symbol iloczynu.

Tw. II. Jeżeli oznaczymy przez a , b i c trzy elementy klasy, to w razie wykonalności odejmowania, zaznaczonego we wzorze

$$(1) \quad b - c,$$

mamy

$$(2) \quad a + (b - c) = (a + b) - c;$$

jeżeli zaś, prócz wykonalności odejmowania we wzorze (1), wykonalne jest i odejmowanie zaznaczone we wzorze

$$a - (b - c),$$

to w takim razie zachodzi równość

$$(3) \quad a - (b - c) = (a + c) - b;$$

jeżeli nareszcie, przy wykonalności odejmowania, zaznaczonego we wzorze (1), wykonalne jest odejmowanie, zaznaczone we wzorze następującym

$$(b - c) - a,$$

to w takim razie mamy

$$(4) \quad (b - c) - a = b - (a + c).$$

Istotnie, przyjmijmy

$$(5) \quad x = a + (b - c).$$

Mamy tedy

$$x + c = \{a + (b - c)\} + c = a + \{(b - c) + c\} = a + b.$$

Mamy więc

$$x + c = a + b,$$

skąd

$$x = (a + b) - c,$$

a z tej równości i równości (5) wynika właśnie równość (2).

Przyjmijmy teraz

$$(6) \quad x = a - (b - c).$$

Mamy tedy

$$\begin{aligned} x + b &= \{a - (b - c)\} + b = \{a - (b - c)\} + \{(b - c) + c\} \\ &= [\{a - (b - c)\} + (b - c)] + c \\ &= a + c. \end{aligned}$$

Zatem

$$x + b = a + c,$$

skąd

$$x = (a + c) - b,$$

a z tej równości i równości (6) wynika właśnie równość (3).

Przyjmijmy nareszcie

$$(7) \quad x = (b - c) - a.$$

Mamy tedy

$$\begin{aligned} x + (a + c) &= \{(b - c) - a\} + (a + c) \\ &= [\{(b - c) - a\} + a] + c \\ &= (b - c) + c = b; \end{aligned}$$

mamy więc

$$x + (a + c) = b,$$

skąd

$$x = b - (a + c),$$

a z równości tej i równości (7) wynika równość (4), która pozostawała jeszcze do uzasadnienia.

Znaczenie powyższego twierdzenia polega na tem, iż na jego podstawie możemy każdej kombinacyi n ($n \geq 3$) elementów klasy (K) przez działania, z których każde jest dodawaniem lub odejmowaniem, nadać, w razie wykonalności działań zaznaczonych, albo postać sumy rozważanych n elementów, albo postać różnicy, w której odjemna jest sumą pewnych z tych elementów (lub jest jednym z rzeczonych elementów) a odjemnik — sumą reszty elementów (albo — elementem pozostałym, gdyby wszystkie rozważane elementy prócz jednego były składnikami odjemnej). O słuszności tej uwagi łatwo przekonywamy się kiedy chodzi o trzy elementy, albowiem w takim razie może tylko chodzić o kombinację jednego z tych elementów, powiedzmy a , z sumą lub różnicą dwóch pozostałych drogą dodawania lub odejmowania. Ale każda

z kombinacji elementu a z sumą elementów pozostałych jest już bezpośrednio żądanej postaci. Mamy więc tylko do rozważania przypadki, kiedy kombinujemy element a z różnicą

$$b - c$$

dwóch elementów pozostałych. Takich przypadków mamy oczywiście trzy, a mianowicie te, które odpowiadają wzorom

$$a + (b - c), \quad a - (b - c) \text{ i } (b - c) - a,$$

a na podstawie udowodnionego twierdzenia, możemy, o ile spełnione są warunki wykonalności zaznaczonych działań, każdemu z tych wyrażeń nadać kształt, o który chodzi.

Do przypadku, kiedy ilość kombinowanych elementów jest większa od n , można łatwo przejść drogą indukcji matematycznej; ale pewne wyniki, do których dojdziemy później¹⁾, czynią uskutecznienie tego przejścia na tem miejscu rzeczą zbędną.

Tw. III. Jeżeli oznaczymy przez a, b, a' i b' cztery elementy klasy (K), to w takim razie zachodzą okoliczności następujące:

1° Jeżeli odejmowania zaznaczone we wzorach

$$(1) \quad a - b \text{ i } a' - b'$$

są wykonalne, to równość

$$(2) \quad a - b = a' - b'$$

pociąga za sobą równość

$$(3) \quad a + b' = a' + b.$$

2° Jeżeli równość (3) zachodzi, a odejmowanie, zaznaczone w jednym ze wzorów (1), jest wykonalne, to odejmowanie, zaznaczone w drugim z tych wzorów, jest także wykonalne, a nadto różnice (1) spełniają równość (2).

Istotnie, załóżmy najpierw, że odejmowania, zaznaczone we wzorach (1), są wykonalne, i przypuśćmy, że równość (2) jest spełniona. Mamy tedy

$$(a - b) + b = (a' - b') + b,$$

a ponieważ (Tw. I, Uwaga II)

$$(a - b) + b = a,$$

przeto

$$a = (a' - b') + b.$$

Ale (Tw. II)

$$(a' - b') + b = (a' + b) - b',$$

¹⁾ Mamy tu na myśli teorię sum algebraicznych, która będzie podana w rozdziale poświęconym ogólnej teorii liczb rzeczywistych.

zatem

$$a = (a' + b) - b',$$

skąd wynika (Tw. I Uwaga II) równość (3). Zatem, pierwsza część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Żeby uzasadnić i drugą część twierdzenia, przyjmijmy, że elementy

$$a, b, a' \text{ i } b'$$

spełniają równość (3), i zważmy, że możemy poprzestać na rozważaniu przypadku, kiedy odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$(4) \quad a - b$$

jest wykonalne, albowiem przypadek, w którymby wykonalne było odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$a' - b',$$

sprowadzić możemy do pierwszego przez zmianę oznaczeń, polegającą na tem, żeby skutecznie zamianę znaczeń symbolów

$$a \text{ i } a'$$

z jednej strony, a symbolów

$$b \text{ i } b'$$

z drugiej.

Zakładając tedy wykonalność odejmowania, zaznaczonego we wzorze (4), mamy (Tw. II):

$$(5) \quad (a - b) + b' = (a + b') - b$$

Z drugiej strony (Tw. I, Uwaga II) z równości (3) mamy

$$(a + b') - b = a'.$$

Z tej równości i równości (5) mamy

$$(a - b) + b' = a',$$

skąd (Tw. I, Uwaga II) wynika właśnie równość (3). Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Def. I. Jeżeli w pewnej klasie wielkości (Z), dla których dodawanie zostało określone, istnieje taki element e , żeby każda wielkość x klasy (Z) spełniającą równość

$$(1) \quad x = e$$

spełniała każdą z równości

$$(2) \quad a + x = a$$

Wstęp do analizy.

i

$$(3) \quad x + a = a$$

jakakolwiek wielkość klasy (Z) oznaczylibyśmy przez a , to okoliczność tę wyrażamy, orzekając, że element e jest *modułem dodawania* wielkości klasy (Z).

Tw. IV. Charakter modułu dodawania, jaki może ewentualnie mieć element zbioru (Z), zależy wyłącznie od wartości tego elementu.

Istotnie, przyjmijmy, że pewien element e zbioru (Z) jest modułem dodawania wielkości klasy (Z), i załóżmy, że jakiś element e' zbioru (Z) spełnia równość

$$e' = e.$$

W takim razie równość

$$x = e',$$

jako równoważna równości (1), pociągającej za sobą każdą z równości (2) i (3), sama pociąga za sobą każdą z tych dwóch równości, a ponieważ stąd wynika, że element e' będzie również modułem dodawania wielkości klasy (Z), przeto każda wielkość klasy (Z), równa modułowi dodawania wielkości tej klasy, jest sama modułem dodawania wielkości rzeczonyj klasy, a na tem właśnie polega twierdzenie, które pragnęliśmy uzasadnić.

Tw. V. Moduł dodawania wielkości klasy (K) istnieje, posiada wartość oznaczoną w zupełności, a warunek konieczny i wystarczający, żeby pewna wielkość μ klasy (K) była modułem dodawania rozważanej klasy wielkości, polega na równości

$$(1) \quad \mu = b - b,$$

gdzie b oznacza dowolnie przyjętą wielkość klasy (K).

Istotnie, stosowując Tw. IV § 67 do przypadku, kiedy wielkości, tamże oznaczone przez a i b , zlewają się ze sobą, stwierdzamy (§ niniejszy, Tw. I, Uw. I), że odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$b - b,$$

jest wykonalne, jakąkolwiek wielkość klasy (K) oznaczylibyśmy przez b . Z tego wynika, że istnieje wielkość μ klasy (K), spełniająca równość (1).

Z drugiej znów strony (Tw. III) mamy

$$(2) \quad b - b = a - a,$$

jakiegokolwiek wielkości klasy (K) oznaczylibyśmy przez a i b . Zatem, ze względu na (1), równość

$$(3) \quad x = \mu$$

pociąga za sobą równość

$$(4) \quad x = a - a,$$

która znów równoważna jest (Tw. I, Uw. II) każdej z równości

$$(5) \quad a + x = a \text{ i } x + a = a.$$

Ponieważ więc równość (3) pociąga za sobą każdą z równości (5), bez względu na wartość elementu a , przeto istnienie równości (1) jest wystarczającym warunkiem, ażeby wielkość μ była modulem dodawania wielkości klasy (K), a ponieważ, jakśmy stwierdzili wyżej, istnieje wielkość μ spełniająca (1), przeto udowodniliśmy już istnienie modułu dodawania wielkości klasy (K). Przejdźmy z kolei do wykazania, że istnienie równości (1) jest koniecznym warunkiem do tego, żeby wielkość μ była modulem dodawania wielkości rozważanej klasy. W tym celu założmy, że pewna wielkość

$$\mu$$

klasy (K) jest modulem dodawania. W takim razie (Def. I.) równość

$$(6) \quad x = \mu$$

pociąga za sobą każdą z równości (5), bez względu na wybór wielkości a . Ponieważ zaś równości (5) pociągają za sobą (Tw. I, Uw. II) równość (4), przeto, ze względu na (2), stwierdzamy, że (6) pociąga za sobą

$$x = b - b,$$

a z równości tej i równości (6) wynika, że wielkość μ spełnia równość (1). Udowodniliśmy więc, że istnienie tej równości jest koniecznym warunkiem, ażeby wielkość μ była modulem dodawania. Ponieważ zaś z tego wynika, że wartość modułu dodawania wielkości klasy (K) jest oznaczona jednoznacznie przeto twierdzenie nasze uzasadnione jest w zupełności.

Uwaga I. Dostrzegamy z łatwością, że liczba zero jest modulem dodawania liczb wymiernych bezwzględnych.

Uwaga II. Dla skrócenia wystawiamy się zwykle tak, jak gdyby jedna tylko wielkość klasy (K) była modulem dodawania, gdyż zwykle chodzi tylko o wartość tego modułu, a z powyższego twierdzenia wynika, że ta wartość jest jedyna, czyli, że wielkości, będące modułami dodawania wielkości klasy (K), są pomiędzy sobą równe.

Tw. VI. Jeżeli oznaczymy przez e jakikolwiek element klasy (K), a przez μ moduł dodawania elementów rzeczzonej klasy, to równość

$$(1) \quad e = e + e$$

jest równoważna równości

$$(2) \quad e = \mu,$$

a nierówność

$$(3) \quad e \neq e + e$$

— nierówności

$$(4) \quad e \neq \mu.$$

Istotnie, równość (1) jest równoważna (Tw. I, Uwaga II) równości

$$e = e - e,$$

która znów (Tw. V) równoważna jest równości (2); zatem równość (1) jest rzeczywiście równoważna równości (2). Ponieważ zaś z równoważności równości (1) i (2) wynika już równoważność nierówności (3) i (4), przeto twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Uwaga I. Z Tw. VI niniejszego paragrafu wynika, że założenie, iż zachodzi układ twierdzeń, wyszczególnionych w § 67-ym, równoważne jest założeniu, że zachodzi układ twierdzeń, w jaki przemieniłby się rzeczony układ, gdybyśmy zastąpili twierdzenia VII i VIII tego układu odpowiednio przez następujące:

(A) Jeżeli pewien element a klasy (K) spełnia nierówność

$$a \neq \mu,$$

gdzie μ oznacza moduł dodawania, a symbole b i b' oznaczają takie dwa elementy tejże klasy, które spełniają nierówność

$$b \neq b',$$

to w takim razie mamy

$$a \cdot b \neq a \cdot b'.$$

(B) Jeżeli pewien element b klasy (K) spełnia nierówność

$$b \neq \mu,$$

gdzie μ oznacza, jak wyżej, moduł dodawania, a symbol a oznacza całkiem dowolnie dany element klasy (K), to zawsze istnieje element x tej klasy, spełniający równość

$$b \cdot x = a.$$

§ 70. Tw. I. (Własność łączności mnożenia). Jeżeli w iloczynie n ($n > 2$) elementów klasy (K) zastąpimy k ($1 < k < n$) bezpośrednio następujących po sobie czynników przez ich iloczyn, to nie spowodujemy żadnej zmiany w wartości rozważanego iloczynu.

Mieliśmy już sposobność poznać przykład (§ 63), w którym pewne twierdzenie o dodawaniu i pewne twierdzenie o mnożeniu w takim były wzajemnym stosunku, iż dowód któregośkolwiek z nich zawierał już w sobie dowód drugiego. Otóż stosunek wzajemny Tw. I § 68-go i twierdzenia niniejszego stanowi nowy przykład tego samego rodzaju.

Istotnie, jeżeli w Tw. I § 68-go i Tw. I § 67-go, z którego pierwsze wynika, zastąpimy symbolikę i terminologię dodawania przez symbolikę i terminologię mnożenia, to Tw. I § 68-go przemieni się w twierdzenie, o dowód którego obecnie chodzi, a Tw. I § 67-go w Tw. V tegoż paragrafu. Ponieważ zaś słuszność Tw. V § 67-go należy do założeń rozwijanej teorii, przeto Tw. I § 68-go i twierdzenie niniejsze rzeczywiście znajdują się w zapowiadzianym związku. Ponieważ zaś dowód Tw. I § 68-go został podany, przeto twierdzenie niniejsze należy także uważać za uzasadnione. Jednakowoż zalecamy czytelnikowi, jako bardzo dobre ćwiczenie, wyprowadzenie dowodu niniejszego twierdzenia z dowodu Tw. I § 68-go przez podstawienie w miejsce symbolów sum symbolów iloczynów (§ 64). Przy przerabianiu tego ćwiczenia stwierdzi czytelnik w szczególności, że lematom I i II, podanym w dowodzie Tw. I § 68-go, odpowiadają w dowodzie twierdzenia niniejszego lematy, które, w razie przyjęcia symbolu

$$a_i$$

za ogólny symbol czynnika rzędu i , mogą być wysłowione w sposób następujący.

Lemat I. Jeżeli oznaczymy przez α i β dwie liczby całkowite, spełniające związki

$$1 \leq \alpha < n; \quad 1 \leq \beta \leq n - \alpha,$$

to otrzymamy

$$\prod_{i=\alpha}^{\alpha+\beta} a_i = a_\alpha \times \prod_{i=\alpha+1}^{\alpha+\beta} a_i.$$

Lemat II. Jeżeli oznaczymy przez t jakąkolwiek liczbę całkowitą, spełniającą związki

$$1 \leq t < n$$

to otrzymamy

$$\prod_{i=1}^n a_i = \left(\prod_{i=1}^t a_i \right) \times \prod_{i=t+1}^n a_i$$

Uwaga. Twierdzenie powyższe (Tw. I) zachodzi niezawodnie skoro tylko zachodzi tw. V § 67-go, bez względu na to, czy pozostałe twierdzenia rzeczonego paragrafu zachodzą, albowiem

jedyne z twierdzeń § 67, na które powołujemy się w dowodzie niniejszego twierdzenia, jest tw. V.

Tw. II. (Własność przemienności mnożenia). Wartość iloczynu n ($n > 1$) danych elementów klasy (K) nie zależy od uszeregowania tychże.

Żeby uzyskać dowód niniejszego twierdzenia dostatecznem jest podsta-
wić w dowodzie tw. II § 68-go wyrazy i symbole, odnoszące się do mnożenia,
w miejsce wyrazów i symbolów, odnoszących się do dodawania. Wobec tego
należy uważać dowód niniejszego twierdzenia za zawarty w dowodzie tw. II
§ 68-go.

Tw. III. Żeby iloczyn n ($n > 1$) elementów klasy (K) był
równy modułowi dodawania, koniecznem jest i wystarczajacem,
żeby jeden czynnik przynajmniej równał się rzeczonemu mo-
dułowi.

Dowód. (A). Twierdzenie zachodzi przy

$$n = 2.$$

Istotnie, oznaczmy przez μ moduł dodawania, a przez a całkiem dowolnie
dany element klasy (K). Z definicyi modułu dodawania wynika że, jeżeli ozna-
czymy przez b jakiegokolwiek element klasy (K), to mieć będziemy

$$\begin{aligned} b + \mu &= b, \\ a \cdot (b + \mu) &= a \cdot b \end{aligned}$$

Ale (§ 67 tw. IX) mamy

$$a \cdot (b + \mu) = a \cdot b + a \cdot \mu,$$

mamy więc

$$a \cdot b + a \cdot \mu = a \cdot b,$$

skąd

$$a \cdot \mu = a \cdot b - a \cdot b;$$

a ponieważ (§ 69, Tw. V)

$$a \cdot b - a \cdot b = \mu,$$

przeto

$$(1) \quad a \cdot \mu = \mu,$$

oraz, ze względu (§ 67, tw. VI) na równość

$$\mu \cdot a = a \cdot \mu,$$

2)

$$\mu \cdot a = \mu.$$

Z równości (1) i (2) wynika, że iloczyn dwóch elementów klasy (K) rze-
czywiście równa się modułowi dodawania μ , skoro tylko jeden przynajmniej

z tych elementów jest równy rzeczonemu modułowi. Powiadam teraz, że, jeżeli dwa elementy a i b klasy (K) spełniają nierówności

$$(3) \quad a \neq \mu \text{ oraz } b \neq \mu,$$

to mamy

$$(4) \quad a \cdot b \neq \mu.$$

Istotnie, z pierwszej z nierówności (3) wynika (§ 69, Tw. VI), że mamy

$$a + a \neq a,$$

a z tej nierówności wynika dalej, ze względu na drugą z nierówności (3) (§ 67 tw. VII), że mamy

$$a \cdot b \neq a \cdot \mu$$

skąd, na podstawie równości (1), mamy

$$a \cdot b \neq \mu.$$

Zatem, nierówności (3) pociągają za sobą nierówność (4). Z uzyskanych wyników wnosimy, że równość

$$a \cdot b = \mu$$

zachodzi w takim, i tylko w takim razie, kiedy jeden przynajmniej z elementów a lub b równa się modułowi dodawania; innymi słowy, twierdzenie pomocnicze (A) zachodzi w podanem brzmieniu.

Założmy chwilowo, że twierdzenie, o które nam właściwie chodzi, jest uzasadniona w przypadku, kiedy ilość czynników n spełnia równość:

$$n = k,$$

gdzie k oznacza pewną liczbę całkowitą, nie mniejszą od liczby 2, i zwróćmy się do przypadku, kiedy mamy

$$n = k + 1,$$

oznaczając w takim razie ogólnie przez

$$a_i$$

czynnik i -ty. Mamy tedy

$$(6) \quad \prod_{i=1}^{k+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^k a_i \right) \cdot a_{k+1}$$

Jeżeli zachodzi równość

$$(7) \quad \prod_{i=1}^{k+1} a_i = \mu$$

to, ze względu na (6) i na twierdzenie pomocnicze, podane pod (A), musi zachodzić jedna przynajmniej z równości

$$(8) \quad \prod_{i=1}^k a_i = \mu \text{ albo } a_{k+1} = \mu.$$

Ponieważ zaś, ze względu na chwilowo przyjęte założenie, równość

$$(9) \quad \prod_{i=1}^k a_i = \mu$$

zachodzić może tylko w przypadku, kiedy jeden przynajmniej z czynników

$$(10) \quad a_1, a_2, \dots, a_k$$

równa się μ , przeto równość (7) może zachodzić *tylko* w razie, kiedy jeden przynajmniej z czynników iloczynu

$$\prod_{i=1}^{k+1} a_i$$

równa się modułowi dodawania μ . Odwrotnie, jeżeli jeden z czynników $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ równa się μ , to mamy albo

$$a_{k+1} = \mu,$$

albo też jeden z elementów (10) równa się, modułowi dodawania μ , a w takim razie, ze względu na przyjęte chwilowo założenie, równość (9) będzie zachodzić. Jeżeli więc jeden z elementów

$$a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$$

równy jest μ , to jedna przynajmniej z równości (8) zachodzi niezawodnie. Zatem, na podstawie twierdzenia pomocniczego, podanego pod (A), równość (7) także zachodzi.

Z uzyskanych wyników wnosimy, na podstawie zasady indukcji matematycznej, że nasze twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

§ 71. Tw. I. (Własność rozdzielności mnożenia w stosunku do dodawania). Jeżeli oznaczymy ogólnie przez

$$a_i$$

i -ty wyraz ciągu on ($n > 1$) wyrazach, ułożonego z n elementów klasy (K), a przez b jeszcze jakiś element tejże klasy, to otrzymamy

$$(1) \quad b \cdot \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b \cdot a_i$$

oraz

$$(2) \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b.$$

Przystępując do dowodu twierdzenia zaznaczamy najpierw, że, ze względu na własność *przemienności* mnożenia, równości (1) i (2) są równoważne pomiędzy sobą. Zatem, twierdzenie będzie uzasadnione, jeżeli tylko uzasadnimy równość (1). Przy

$$(3) \quad n = 2$$

równość (1) wyraża tylko tw. IX § 67-go, którego ważność należy do założeń naszych. W tym więc przypadku rozważana równość zachodzi. Załóżmy chwilowo, że równość (1) zachodzi jeszcze przy

$$(4) \quad n = k,$$

gdzie k oznacza pewną liczbę całkowitą, nie mniejszą od liczby 2, i zwróćmy się do przypadku, kiedy mamy

$$(5) \quad n = k + 1.$$

Na podstawie definicji symbolu sumowania, mamy

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1},$$

skąd, ze względu na tw. IX § 67-go i na chwilowo przyjęte założenie:

$$b \cdot \sum_{i=1}^{k+1} a_i = b \cdot \sum_{i=1}^k a_i + b \cdot a_{k+1}; = \sum_{i=1}^k b \cdot a_i + b \cdot a_{k+1}$$

a ponieważ na podstawie definicji symbolu sumowania mamy

$$\sum_{i=1}^k b \cdot a_i + b \cdot a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} b \cdot a_i,$$

przeto

$$b \cdot \sum_{i=1}^{k+1} a_i = \sum_{i=1}^{k+1} b \cdot a_i.$$

Zatem, gdyby równość (1) zachodziła przy wartości (4) na n , to zachodziłaby także i przy wartości (5) na tę liczbę. Ponieważ zaś, jak stwierdziliśmy, rozważana równość zachodzi przy wartości (3) na n , przeto (Zas. ind. mat.) ta równość zachodzi przy każdej, od liczby 1 większej wartości liczby całkowitej n . Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Uwaga. Równości (1) i (2) oczywiście nie przestają zachodzić i przy

$$n = 1,$$

tylko w takim razie one już nie wyrażają własności rozdzielności mnożenia w stosunku do dodawania.

Tw. II. (Własność rozdzielności mnożenia w stosunku do odejmowania). Jeżeli odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$a - b,$$

gdzie a i b są dwa elementy klasy (K), jest wykonalne, to w takim razie mamy

$$(1) \quad c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$$

oraz

$$(2) \quad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$$

Ponieważ ze względu na własność przemienności mnożenia elementów klasy (K) równości (1) i (2) są równoważne pomiędzy sobą, przeto uzasadnimy je obie, uzasadniwszy jedną z nich, powiedzmy równość (1). Przyjawszy

$$(3) \quad x = a - b,$$

mamy

$$b + x = a,$$

skąd

$$c \cdot (b + x) = c \cdot a;$$

a ponieważ (§ 67, tw. IX)

$$c \cdot (b + x) = c \cdot b + c \cdot x,$$

przeto

$$c \cdot b + c \cdot x = c \cdot a,$$

skąd

$$c \cdot x = c \cdot a - c \cdot b,$$

a z równości tej wynika, że ze względu na (3), równość (1), którą chcieliśmy właśnie uzasadnić. Zatem twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

§ 72. Tw. I. Jeżeli przy dzieleniu elementów klasy (K) element, przyjęty za dzielnik, nie równa się modułowi dodawania, to dzielenie jest wykonalne, a wartość ilorazu oznaczona jest bez dwuznaczności. Jeżeli zaś dzielnik równa się modułowi dodawania, to dzielenie jest wykonalne w przypadku, i tylko w przypadku, kiedy dzielna także równa się modułowi dodawania, ale w takim razie iloraz jest całkiem nieoznaczony.

Żeby to twierdzenie uzasadnić, zważmy przedewszystkiem, że istnieje jeden tylko rodzaj dzielenia elementów klasy (K). Istotnie, jeżeli oznaczymy przez a i b jakiegokolwiek dwa dane elementy klasy (K), a przez x jakiegokolwiek

trzeci element tejże klasy, to (§ 67 tw. VI) mieć będziemy w każdym razie

$$b \cdot x = x \cdot b,$$

skąd wynika, że, jeżeli x spełnia jedną z równości

$$b \cdot x = a \text{ lub } x \cdot b = a,$$

to element ten spełnia i drugą z tych równości. Zatem, problem wyznaczenia elementu x z warunku, aby ten element spełniał jedną z powyższych równości, zlewa się z problemem wyznaczenia elementu x z drugiej z nich. Innymi słowy istnieje rzeczywiście tylko jeden rodzaj dzielenia elementów klasy (K).

Zwróćmy się teraz do przypadku kiedy dzielnik b równa się modułowi dodawania μ . Ponieważ w takim razie (§ 70, Tw. III) mamy

$$b \cdot x = \mu,$$

bez względu na wartość elementu x , przeto ta część naszego twierdzenia, która odnosi się do przypadku, kiedy dzielnik b równa się modułowi dodawania, zachodzi w podanem brzmieniu.

Załóżmy teraz, że mamy

$$(1) \quad b \neq \mu.$$

W takim razie istnieje w klasie (K) (§ 69, Uwaga I przy Tw. VI) element x , spełniający równość

$$(2) \quad b \cdot x = a,$$

gdzie a jest dowolnie naprzód oznaczony element klasy (K); innymi słowy, przy warunku, podanym w twierdzeniu, dzielenie jest wykonalne.

Powiadam, że, w rozważanym przypadku, wartość ilorazu oznaczona jest w zupełności. Istotnie, jeżeli tylko dwa elementy x i x' klasy (K) spełniają odpowiednio równości

$$(3) \quad b \cdot x = a \text{ i } b \cdot x' = a,$$

to w takim razie mamy

$$b \cdot x = b \cdot x',$$

a ta równość, ze względu na (1) sprzeczną byłaby (§ 69, Uwaga I, przy Tw. VI) z nierównością

$$x \neq x'.$$

Zatem z równości (3) wynika równość

$$x = x',$$

która właśnie wyraża jednoznaczność dzielenia przy warunkach podanych w twierdzeniu. Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Uwaga I. Ze względu na istnienie jednego tylko rodzaju

dzielenia elementów klasy (K) oznaczamy iloraz podziału dzielnej a przez dzielnik b którymkolwiek z symbolów

$$a : b \text{ lub } \frac{a}{b},$$

z których żaden nie zawiera wskazówki określającej, czy iloraz x ma być wyznaczony z równości

$$b \cdot x = a,$$

czy też z równości

$$x \cdot a = b.$$

Uwaga II. Jeżeli, przy zachowaniu powyższych oznaczeń, zachodzi nierówność

$$b \neq \mu,$$

gdzie μ oznacza, jak wyżej, moduł dodawania, to, ze względu na powyższe twierdzenie, każdy z symbolów

$$a : b \text{ i } \frac{a}{b}$$

oznacza wielkość o oznaczonej wartości i z tego powodu może być kojarzony znakiem równości z innymi symbolami, oznaczającymi wielkości klasy (K) o oznaczonych wartościach; dostrzegamy zarazem, że każda z równości

$$x = a : b \text{ lub } x = \frac{a}{b}$$

jest równoważna każdej z równości

$$b \cdot x = a \text{ i } x \cdot b = a.$$

Jeżeli zaś mamy

$$b = \mu,$$

to stan rzeczy jest całkiem inny: w takim razie, ze względu na dowiedzione twierdzenie, symbole

$$a : b \text{ i } \frac{a}{b}$$

albo wogóle nie mają żadnego znaczenia (co zachodzi w przypadku kiedy $a \neq \mu$), albo nie oznaczają wielkości o oznaczonej wartości. Zatem, w tym przypadku, żaden z powyższych symbolów nie może być kojarzony znakiem równości z symbolem, przedstawiającym oznaczonej wartości element klasy (K).

Uwaga III. Z powyższych dwóch uwag wynika, że, jeżeli oznaczymy przez a i b dwa elementy klasy (K) i założymy, że

$$b \neq \mu,$$

gdzie μ oznacza, jak wyżej, moduł dodawania, to w takim razie każda z równości

$$b \cdot x = a \text{ i } x \cdot b = a$$

równoważna jest każdej z równości

$$x = a : b \text{ i } x = \frac{a}{b}.$$

Uwaga IV. Jeżeli pewien iloraz jest jednym ze składników pewnej sumy albo jednym z wyrazów pewnej różnicy, to, przy pisaniu symbolu rozważanej sumy, albo różnicy, zastrzegamy sobie prawo opuszczania nawiasu, w którym, na podstawie ogólnych reguł, należałoby zamknąć właściwie symbol ilorazu.

Tw. II. Jeżeli oznaczymy przez

$$(1) \quad a, b, a' \text{ i } b'$$

cztery elementy klasy (K) i założymy, że

$$(2) \quad b \neq \mu, b' \neq \mu,$$

gdzie μ oznacza, jak wyżej, moduł dodawania, to w takim razie równość

$$(3) \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

jest równoważna równości

$$(4) \quad a \cdot b' = a' \cdot b.$$

Istotnie, ze względu na (2) każdy z ilorazów

$$\frac{a}{b} \text{ i } \frac{a'}{b'}$$

ma (Tw. I) oznaczoną wartość. Przyjmijmy

$$(5) \quad u = \frac{a}{b}$$

oraz

$$(6) \quad u' = \frac{a'}{b'}$$

Z równości (5) i (6) (Tw. I, Uwaga III) mamy

$$a = u \cdot b, \quad a' = u' \cdot b',$$

skąd

$$(7) \quad a \cdot b' = u \cdot b \cdot b'$$

oraz

$$(8) \quad a' \cdot b = u' \cdot b' \cdot b$$

Na podstawie twierdzeń I i II § 70-go mamy

$$u \cdot b \cdot b' = u \cdot (b \cdot b')$$

$$u' \cdot b' \cdot b = u' \cdot (b' \cdot b),$$

zatem, z równości (7) i (8) wynikają równości

$$(9) \quad \begin{cases} a \cdot b' = u \cdot (b \cdot b') \\ a' \cdot b = u' \cdot (b' \cdot b). \end{cases}$$

Z drugiej strony z nierówności (2) (§ 70, Tw. III) mamy

$$(10) \quad b \cdot b \neq \mu.$$

Jeżeli zachodzi (3), to, ze względu na (5) i (6) mamy

$$u = u',$$

a zatem, ze względu na (9), zachodzi równość (4). Stwierdzamy więc, że (3) pociąga za sobą (4). Powiadam, że (4) pociąga za sobą (3). Istotnie, z równości (4) i drugiej z równości (9) mamy

$$a \cdot b' = u' \cdot (b \cdot b'),$$

a z tej równości i pierwszej z równości (9) wynika, ze względu na (10), (Tw. I) równość

$$u = u',$$

która, na podstawie równości (5) i (6), pociąga za sobą (3). Zatem (4) pociąga za sobą (3), a to tylko pozostawało jeszcze do wykazania.

Def. I. Jeżeli w pewnej klasie wielkości (Z), dla których mnożenie zostało określone, istnieje taka wielkość w , żeby każda wielkość x klasy (Z), spełniająca równość

$$x = w,$$

spełniała każdą z równości

$$a \cdot x = a \quad \text{i} \quad x \cdot a = a,$$

jakąkolwiek wielkość klasy (Z) oznaczylibyśmy przez a , to

okoliczność tę wyrażamy, orzekając, że wielkość w jest *modułem mnożenia* wielkości klasy (Z).

Godną uwagi jest ta okoliczność, że Def. I § 69-go przechodzi w powyższą definicję na skutek prostego podstawienia wyrazu »mnożenie« i odnośnego symbolu odpowiednio w miejsce wyrazu »dodawanie« i symbolu tego działania. Dzięki tej okoliczności też same podstawienia przemienią dowód Tw. IV § 69-go na dowód twierdzenia następującego, którego dowód możemy zatem pominąć:

Tw. III. Charakter modułu mnożenia, jaki ewentualnie mieć może pewna wielkość w pewnej klasy wielkości (Z), zależy wyłącznie od wartości wielkości w .

Tw. IV. Moduł mnożenia wielkości klasy (K) istnieje, posiada wartość oznaczoną w zupełności, a warunek konieczny i wystarczający, aby pewna wielkość m była modułem mnożenia wielkości klasy (K), polega na istnieniu równości

$$(1) \quad m = b : b$$

gdzie b oznacza wielkość klasy (K), której wybór temu tylko ograniczeniu podlega, żebyśmy mieli

$$(2) \quad b \neq \mu,$$

gdzie μ oznacza moduł dodawania (§ 69, def. I) wielkości klasy (K).

Pomiędzy stosunkiem powyższego twierdzenia do Tw. V § 69-go, a stosunkami Def. I i Tw. III paragrafu niniejszego odpowiednio do Def. I § 69-go i Tw. V tegoż paragrafu zachodzi ścisła analogia, ale stosunek ten jest jednak odmienny od dwóch ostatnich, a to ze względu na zastrzeżenie, polegające na nierówności (2), zastrzeżenie, które w Tw. V § 69 nie posiada odpowiednika.

Z tego powodu winniśmy podać osobny dowód niniejszego twierdzenia. W tym celu przyjmijmy, że wielkość b spełnia nierówność (2). W takim razie (Tw. I) istnieje w klasie (K) wielkość m , spełniająca równość (1). Powiadamy, że równość (1) stanowi dostateczny warunek do tego, żeby wielkość m była modułem mnożenia wielkości klasy (K). Istotnie przyjmijmy, że jakaś wielkość x klasy (K) spełnia równość

$$(3) \quad x = m.$$

Jeżeli tedy oznaczmy przez a jakąś wielkość klasy (K), to w przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$a = \mu,$$

niezawodnie (§ 70 Tw. III) mieć będziemy

$$(4) \quad a \cdot x = a \quad \text{ i } \quad x \cdot a = a.$$

Mamy więc tylko do zbadania czy, w razie istnienia nierówności

$$(5) \quad a \neq \mu,$$

równość (3) pociąga za sobą obie równości (4). Otóż ze względu na (5) (Uwaga II przy Tw. I) każda z równości (4) jest równoważna następującej

$$(6) \quad x = a : a,$$

a ponieważ ze względu na (2) i (5) (Tw. II) mamy

$$(7) \quad a : a = b : b,$$

przeło równość (3), jako pociągająca za sobą na podstawie równości (1) i (7) równość (6), równoważną każdej z równości (4), pociąga też za sobą każdą z tych równości. W każdym więc razie równość (3) pociąga za sobą obie równości (4), a z tego wynika, że równość (1) jest rzeczywiście dostatecznym warunkiem do tego, aby wielkość m była modułem mnożenia wielkości klasy (K). Rzeczony warunek jest konieczny. Istotnie, jeżeli (3) pociąga za sobą każdą z równości (4), bez względu na wybór wielkości a klasy (K), to okoliczność ta zachodzi w szczególności natenczas, kiedy spełniona jest nierówność (5). Ale w takim razie z równości (4) wynika (6), która, ze względu na (7), pociąga za sobą

$$x = b : b,$$

a z tej równości i równości (3) wynika właśnie równość (1). Zatem, omawiany warunek jest rzeczywiście konieczny. Żeby przekonać się w zupełności o ważności naszego twierdzenia, wystarczy zważyć, że, jak stwierdziliśmy wyżej, istnieje w klasie (K) wielkość, spełniająca (1), i uwzględnić, że warunek, polegający na tem, aby wielkość m , będąca modułem mnożenia wielkości klasy (K), spełniała równość (1), wyklucza wszelką dwuznaczność w wartości modułu mnożenia.

Uwaga. Czytelnik upewni się z łatwością, że liczba 1 jest modułem mnożenia liczb wymiernych bezwzględnych.

§ 73. Zakładając w dalszym ciągu, że symbol (K) oznacza klasę wielkości, dla której zachodzą wszystkie twierdzenia, wyszczególnione w § 67-ym, zamierzamy wyłożyć w tym paragrafie teorię *potęg* dla elementów klasy (K).

Def. I. Jeżeli oznaczymy przez a jakikolwiek element klasy (K), a przez n jakąkolwiek liczbę całkowitą, to wyrażenie „ n -ta potęga elementu a ” oznacza element klasy (K), który oznaczamy zwykle przez symbol

$$a^n$$

i określamy przez umowy następujące:

1^o Przez symbol a^1 oznaczać będziemy taki element klasy (K), żebyśmy mieli

$$(1) \quad a^1 = a.$$

2° Przez symbol a^0 oznaczać będziemy taki element klasy (K), żebyśmy mieli

$$(2) \quad a^0 = a^1 : a.$$

3° Przez symbol a^n oznaczać będziemy w przypadku, kiedy liczba całkowita n spełnia nierówność

$$n > 1,$$

taki element klasy (K), żebyśmy mieli

$$(3) \quad a^n = a^{n-1} \cdot a.$$

Symbol a^n czytamy: „ a do n -tej”; element a zowiemy *zasadą* potęgi, a liczbę całkowitą n — jej *wykładnikiem*¹⁾.

Opierając się na zasadzie indukcji matematycznej, stwierdzamy z łatwością, że umowy 1° i 3° określają, przy wartości od zera większej wykładnika, potęgę całkiem dowolnie danego elementu a klasy (K) jako element tej klasy, oznaczony tylko co do wartości, ale oznaczony pod tym względem w zupełności. Zatem, przy wartościach wykładnika od zera większych, wyznaczenie potęgi danego elementu, czyli *potęgowanie*, stanowi działanie arytmetyczne jednoznaczne.

W przypadku zaś, kiedy wykładnik równa się zeru, stan rzeczy jest inny: jeżeli element a , przyjęty za zasadę potęgi, równa się modułowi dodawania μ , to umowa 2° traci całkiem wszelkie znaczenie, albowiem symbol

$$a^1 : a$$

przybiera ze względu na (1) postać

$$\mu : \mu,$$

a symbol ten (§ 72, Tw. I), jako nie przedstawiający elementu o oznaczonej wartości, nie może być kojarzony znakiem równości z żadnym symbolem, przedstawiającym element klasy (K) oznaczonej wartości. Zatem, w razie istnienia równości

$$a = \mu,$$

symbol

$$a^0$$

i wyrażenie „potęga zerowa elementu a ” należy uważać jako pozbawione wszelkiego znaczenia. Jeżeli zaś zachodzi nierówność

$$a \neq \mu,$$

¹⁾ Potęgi o wykładniku równym liczbie 2 zowią się kwadratami, a potęgi o wykładniku równym liczbie 3 — sześciانami elementu, przyjętego za zasadę rozważanej potęgi.

to w takim razie, ze względu na definicyę modułu mnożenia (§ 72, Tw. V), z umów 1^o i 2^o wynika, że mamy

$$(4) \quad a^0 = \nu,$$

gdzie ν oznacza moduł mnożenia. Mamy więc twierdzenie następujące:

Tw. I. Jeżeli zasada potęgi nie równa się modułowi dodawania, a wykładnik jest liczbą całkowitą równą zeru, to rozważana potęga równa się modułowi mnożenia.

Czytelnik udowodni sam, drogą indukcyi matematycznej, opierając się na twierdzeniu poprzedzającym i na tw. III § 70 go, twierdzenie następujące:

Tw. II. Jeżeli oznaczymy przez a jakikolwiek, byle modułowi dodawania μ nie równy, element klasy (K), a przez n jakąkolwiek liczbę całkowitą, to w takim razie zachodzi nierówność

$$a^n \neq \mu.$$

Tw. III. Jeżeli oznaczymy przez a i b dwa elementy klasy (K), z których żaden modułowi dodawania nie jest równy, a przez m i p jakiekolwiek dwie liczby całkowite, to w takim razie zachodzą zawsze równości następujące:

$$(I) \quad a^m \cdot a^p = a^{m+p},$$

$$(II) \quad (a^m)^p = a^{m \cdot p}$$

$$(III) \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$(IV) \quad a^m : b^m = (a : b)^m$$

Jeżeli zaś, przy spełnieniu powyższych założeń, mamy jeszcze

$$(5) \quad m \geq p,$$

to, prócz powyższych równości, zachodzi jeszcze równość następująca

$$(V) \quad a^m : a^p = a^{m-p}.$$

Przechodzimy do kolejnego uzasadnienia powyższych pięciu równości.

W razie równości

$$p = 0$$

równość I zachodzi, albowiem, ze względu na (4) i na definicyę modułu mnożenia, mamy:

$$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot \nu = a^m,$$

a z drugiej strony

$$a^{m+0} = a^m,$$

skąd rzeczywiście wynika równość

$$(6) \quad a^m \cdot a^0 = a^{m+0}.$$

Założmy teraz chwilowo, że równość (I) zachodzi przy

$$(7) \quad p = k \quad (k \geq 0),$$

i przyjmijmy

$$(8) \quad p = k + 1.$$

Ponieważ ze względu na (3) mamy

$$(9) \quad a^{k+1} = a^k \cdot a,$$

gdy

$$k \geq 1,$$

ponieważ nadto z równości (6) wynika, że równość (9) zachodzi nawet przy

$$k = 0,$$

przeto, przy wartości (8) na p , mamy

$$a^m \cdot a^p = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a;$$

a ponieważ założyliśmy chwilowo, że

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k},$$

przeto mamy

$$(10) \quad a^m \cdot a^p = a^{m+k} \cdot a.$$

Ponieważ z równości (2) i (3) wynika, że

$$a^{m+k} \cdot a = a^{m+k+1},$$

przeto z równości (10) mamy

$$a^m \cdot a^p = a^{m+k+1},$$

skąd, ze względu na (8), wynika właśnie związek (I). Z uzyskanych wyników wnosimy, na podstawie indukcyi matematycznej, że równość (I) rzeczywiście zachodzi.

Przejdźmy do równości II. Przy

$$(11) \quad p = 0$$

mamy

$$(a^m)^p = (a^m)^0 = v$$

oraz

$$a^m \cdot p = a^0 = v;$$

zatem przy wartości (11) na p równość (II) zachodzi. Gdyby zaś ta równość zachodziła przy

$$p = k \quad (k \geq 0),$$

to mielibyśmy

$$(a^m)^k = a^{m \cdot k},$$

skąd

$$(a^m)^k \cdot a^m = a^{m \cdot k} \cdot a^m;$$

ale

$$(a^m)^k \cdot a^m = (a^m)^{k+1},$$

a na podstawie dowiedzionej już równości I. mamy

$$(a^m)^k \cdot a^m = a^{m \cdot k+m} = a^{m \cdot (k+1)},$$

mielibyśmy więc

$$(a^m)^{k+1} = a^{m \cdot (k+1)}$$

i równość (II) zachodziłaby przy

$$p = k + 1.$$

Ostatecznie więc (Zas. ind. mat.) równość (II) zachodzi rzeczywiście.

Zwracając się do uzasadnienia równości (III), spostrzegamy najpierw, że równość ta zachodzi przy

$$m = 0,$$

albowiem, ze względu na tw. I i na definicję modułu mnożenia v , mamy w tym przypadku:

$$a^m \cdot b^m = a^0 \cdot b^0 = v \cdot v = v$$

oraz

$$(a \cdot b)^m = (a \cdot b)^0 = v,$$

skąd równość (III), przy

$$m = 0,$$

rzeczywiście wynika.

Ale równość (III) zachodziłaby przy

$$m = k + 1,$$

gdyby tylko zachodziła przy

$$m = k,$$

gdyż mielibyśmy

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k,$$

skąd

$$a^k \cdot b^k \cdot a \cdot b = (a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b);$$

a ponieważ

$$a^k \cdot b^k \cdot a \cdot b = (a^k \cdot a) \cdot (b^k \cdot b) = a^{k+1} \cdot b^{k+1}$$

oraz

$$(a \cdot b)^k \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^{k+1},$$

przeto mielibyśmy rzeczywiście

$$a^{k+1} \cdot b^{k+1} = (a \cdot b)^{k+1}$$

Zatem (Zas. indukcji mat.) równość (III) zachodzi rzeczywiście.

Żeby uzasadnić równość IV, przyjmijmy

$$(12) \quad x = (a : b)^m.$$

Mamy tedy

$$x \cdot b^m = (a : b)^m \cdot b^m,$$

a ponieważ, ze względu na dowiedzioną już równość (III), mamy

$$(a : b)^m \cdot b^m = \{ (a : b) \cdot b \}^m = a^m,$$

przeto

$$x \cdot b^m = a^m,$$

skąd

$$(13) \quad x = a^m : b^m,$$

a z równości (12) i (13) wynika właśnie równość IV, którą pragnęliśmy uzasadnić.

Zwracając się do równości (V), zważmy przedewszystkiem, że związek (5) jest koniecznym warunkiem rozważanej równości, gdyż w razie nieistnienia rzeczzonego związku symbol

$$m - p$$

byłby dla nas bez znaczenia. Powiadam, że związek (5) jest dostatecznym warunkiem, aby równość (V) zachodziła. Istotnie, przyjmijmy

$$(14) \quad x = a^{m-p}.$$

Mamy tedy

$$x \cdot a^p = a^{m-p} \cdot a^p,$$

a ponieważ ze względu na twierdzenie, wyrażone przez (I), mamy

$$a^{m-p} \cdot a^p = a^{(m-p)+p} = a^m,$$

przeto

$$x \cdot a^p = a^m,$$

skąd

$$x = a^m : a^p.$$

Z równości tej i z równości (14) wynika właśnie równość V, która pozostawała do uzasadnienia.

Ostatecznie, twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Pozostawiamy czytelnikowi, jako pouczające ćwiczenie, stwierdzenie okoliczności następujących:

1° Jeżeli element a , element b , albo i każdy z tych elementów równa się modułowi dodawania, to równości (I), (II) i III zachodzą, byleby liczby całkowite m i p były od zera większe.

2° Jeżeli liczba całkowita m jest większa od zera, a element b modułowi dodawania równy nie jest, to równość IV zachodzi nawet w tym wypadku, kiedy element a równa się modułowi dodawania.

3° Równość V zachodzi tylko pod warunkiem, żeby element a nie równał się modułowi dodawania.

§ 74. W tym paragrafie także zachowamy założenie, iż symbol (K) oznacza klasę wielkości, dla których zachodzą wszystkie twierdzenia, wyszczególnione w § 67-ym, i wykażemy ścisłą analogię, jaka zachodzi pomiędzy ilorazami elementów klasy (K) a liczbami ułamkowymi.

Def. I. Jeżeli oznaczymy przez b element klasy (K), nierówny modułowi dodawania, a przez a już całkiem dowolnie dany element tejże klasy, to iloraz

$$\frac{a}{b},$$

który w takim razie (§ 72 Tw. I) ma całkiem oznaczoną wartość, zowie się *stosunkiem* elementu a do elementu b . Przy tych warunkach element a zowie się *licznikiem*, a element b — *mianownikiem* powyższego stosunku.

Żeby rzecz uprościć, umawiamy się, że w orzeczeniu iż symbol postaci

$$\frac{a}{b}$$

oznacza stosunek dwóch elementów klasy (K) symbole a i b oznaczają dwa elementy klasy (K), z których b nie jest równy modułowi dodawania.

Tw. I. Żeby stosunek dwóch elementów klasy (K) równał się modułowi dodawania, potrzeba i wystarcza, żeby licznik równał się modułowi dodawania.

Istotnie, oznaczmy przez

$$\frac{a}{b}$$

stosunek dwóch elementów klasy (K) i przyjmijmy

$$x = \frac{a}{b}.$$

Mamy tedy (§ 72 tw. I, uwaga III) równość:

$$(1) \quad b \cdot x = a$$

Jeżeli x równa się modułowi dodawania μ , to z równości tej (§ 70 tw. III) mamy

$$(2) \quad a = \mu.$$

Odwrotnie, jeżeli powyższa równość zachodzi, to, ze względu na nierówność

$$b \neq \mu,$$

zapewnioną przez definicję stosunku, mamy (§ 70, Tw. III)

$$x = \mu.$$

Zatem, twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. II. Żeby dwa stosunki

$$\frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{a'}{b'}$$

elementów klasy (K) były równe pomiędzy sobą, potrzeba i wystarczy, żebyśmy mieli

$$(1) \quad a \cdot b' = a' \cdot b$$

Twierdzenie to zachodzi jako równoważne Tw. II. § 72-go.

Wniosek I. Jeżeli oznaczymy przez a dowolnie dany element klasy (K), a przez b i c dwa takie elementy tejże klasy, żeby żaden z nich nierównał się modułowi dodawania, to w takim razie zachodzi zawsze równość następująca:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Wniosek II. Dowolną ilość danych stosunków elementów klasy (K) można zawsze sprowadzić do wspólnego mianownika równego dowolnie danemu, byle od modułu dodawania odmiennemu elementowi. Innymi słowy, do danych n ($n > 1$) stosunków elementów klasy (K) można zawsze dobrać odpowiednio równe im stosunki w ten sposób, aby mianowniki tych ostatnich były równe pomiędzy sobą, a wspólna ich wartość równała się dowolnie naprzód danemu, byle od modułu dodawania odmiennemu elementowi m klasy (K). Przekonywamy się o tem z łatwością, zważywszy, iż wystarczy pomnożyć w każdym z danych stosunków licznik i mianownik odpowiednio przez iloraz podziału elementu m przez mianownik

rozważonego stosunku, aby uzyskać stosunki o mianowniku m równe (Wniosek I) odpowiednio danym stosunkom.

Tw. III. Jeżeli mianowniki oznaczonych elementów klasy (K) są równe pomiędzy sobą, to suma tych stosunków równa się stosunkowi sumy liczników do wspólnego mianownika.

Istotnie, oznaczmy przez b wspólny mianownik rozważanych stosunków, a przez

$$a_1, a_2 \dots a_n$$

odpowiednio ich liczniki. Przyjmijmy

$$x_i = \frac{a_i}{b} \quad (i = 1, 2 \dots n).$$

Mamy tedy

$$b \cdot x_i = a_i, \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

skąd

$$\sum_{i=1}^n b \cdot x_i = \sum_{i=1}^n a_i;$$

a ponieważ (§ 71, Tw. I.)

$$\sum_{i=1}^n b \cdot x_i = b \cdot \sum_{i=1}^n x_i,$$

przeto

$$b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Zważywszy, że element b , jako mianownik stosunku dwóch elementów klasy (K), nie równa się modułowi dodawania, wnosimy z powyższej równości (§ 72 Tw. I, Uwaga III), że

$$\sum_{i=1}^n x_i = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{b},$$

a równość ta wyraża właśnie twierdzenie, którego dowód pragnęliśmy podać.

Wniosek. Jeżeli oznaczymy przez

$$\frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{a'}{b}$$

dwa stosunki elementów klasy (K) o wspólnym mianowniku b i założymy, że odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$a - a',$$

jest wykonalne, to mieć będziemy:

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b} = \frac{a - a'}{b},$$

albowiem, na podstawie dowiedzonego twierdzenia, mamy:

$$\frac{a'}{b} + \frac{a - a'}{b} = \frac{a' + (a - a')}{b} = \frac{a}{b}.$$

Tw. IV. Iloczyn dowolnie danych stosunków elementów klasy (K) równa się stosunkowi iloczynu liczników do iloczynu mianowników.

Żeby to twierdzenie uzasadnić, zwróćmy się najpierw do przypadku, kiedy chodzi o iloczyn dwóch stosunków

$$\frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{a'}{b'}.$$

Przyjawszy

$$x = \frac{a}{b}, \quad x' = \frac{a'}{b'},$$

mamy

$$b \cdot x = a, \quad b' \cdot x' = a',$$

skąd

$$(b \cdot x) \cdot (b' \cdot x') = a \cdot a'.$$

Opierając się na własnościach łączności i przemienności mnożenia elementów klasy (K), spostrzegamy, że z powyższych równości wynika następująca:

$$(1) \quad (b \cdot b') \cdot (x \cdot x') = a \cdot a';$$

a ponieważ iloczyn

$$b \cdot b'$$

jako iloczyn czynników, w których żaden nie równa się modułowi dodawania, sam (§ 70 tw. III) modułowi dodawania równać się nie może, przeto (§ 72 tw. I uwaga III) z równości (1) mamy:

$$x \cdot x' = \frac{a \cdot a'}{b \cdot b'},$$

a ta równość wyraża nasze twierdzenie dla przypadku, w którym chodzi o iloczyn dwóch stosunków. Opierając się na tym wyniku, czytelnik uzasadni już sam drogą indukcji matematycznej, że twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Tw. V. Przy dzieleniu, w którym za dzielną przyjmujemy

dowolnie dany stosunek elementów klasy (K), a za dzielnik, również dowolnie dany, byle jednak modułowi dodawania nie równy, stosunek, iloraz równa się iloczynowi dzielnej, pomnożonej przez *odwrotność* dzielnika (czyli stosunek, którego licznikiem jest mianownik, a mianownikiem licznik dzielnika).

Istotnie, oznaczmy przez

$$\frac{a}{b}$$

stosunek, przyjęty za dzielną, a przez

$$\frac{a'}{b'}$$

stosunek, przyjęty za dzielnik. Ponieważ z założenia

$$(1) \quad \frac{a'}{b'} \neq \mu,$$

gdzie μ jest modułem dodawania, przeto (tw. I) mamy

$$(2) \quad a' \neq \mu.$$

Zatem symbol

$$\frac{b'}{a'}$$

przedstawia oznaczony stosunek dwóch elementów klasy (K). Na podstawie twierdzenia poprzedzającego mamy

$$(3) \quad \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'} \right) \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a \cdot b'}{b \cdot a'} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a \cdot b' \cdot a'}{b \cdot a' \cdot b'}.$$

Ale ze względu na tw. II (Wniosek I) i na własność przemienności mnożenia elementów klasy (K) mamy

$$(4) \quad \frac{a \cdot b' \cdot a'}{b \cdot a' \cdot b'} = \frac{a}{b}.$$

Ze związków (3) i (4) wynika równość:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'} \right) \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b},$$

skąd, na podstawie nierówności (1), wynika (§ 72, Tw. I, Uwaga III), że mamy

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'},$$

a ta równość wyraża właśnie twierdzenie, o dowód którego chodziło.

§ 75. Teorya, którą wyłożyliśmy w paragrafie poprzedzającym, oczywiście znajduje się w najściślejszej analogii z teorią liczb ułamkowych i stanowi szerokie uogólnienie tejże.

Żeby uwydatnić znaczenie powyższej teorii, podajemy definicyę pewnych wyrażen, które i we wielu innych przypadkach będą nam bardzo użyteczne. Oznaczywszy przez (U) układ skończonej ilości elementów klasy (K), zowiemy *jednomianem całkowitym* elementów układu (U) symbol, przedstawiający albo jeden z elementów tego układu, albo iloczyn, którego każdy czynnik należy do rozważanego układu, z czego wynika, że iloczyn potęg elementów układu (U) jest zawsze jednomianem całkowitym elementów rzeczonoego układu;

wielomianem całkowitym elementów układu (U) zowiemy symbol, przedstawiający albo jeden jednomian rozważanych elementów, albo kombinacyę pewnej ilości takich jednomianów zapomocą działań, z których każde jest dodawaniem albo odejmowaniem.

Z twierdzeń, podanych w § 74 tym, wynika, że wszelka kombinacya stosunków elementów klasy (K) zapomocą działań podstawowych równa się (o ile zaznaczone działania są wykonalne) stosunkowi dwóch wielomianów całkowitych tego układu elementów, jaki tworzą razem liczniki i mianowniki rozważanych stosunków; tak np. mamy

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$

Z drugiej znów strony, do każdego elementu a klasy (K) można dobrać równy mu stosunek: jeżeli bowiem oznaczmy przez b jakikolwiek, byle modułowi dodawania nie równy, element klasy (K), to mieć będziemy:

$$\frac{a \cdot b}{b} = a.$$

Zatem, wszelką (wykonalną) kombinacyę oznaczonych elementów klasy (K) zapomocą działań podstawowych możemy uważać za taką kombinacyę stosunków elementów rozważanej klasy. Z tego zaś wynika ostatecznie, że do wszelkiej kombinacji oznaczonych elementów klasy (K) zapomocą działań podstawowych możemy dobrać albo równy jej wielomian całkowity tychże elementów albo równy jej iloraz dwóch takich wielomianów całkowitych. Na tem właśnie twierdzeniu polega główne znaczenie teorii, wyłożonej w paragrafie poprzedzającym. Powyższe rozważania oczywiście nie stanowią ścisłego dowodu rzeczonoego twierdzenia. Dowód taki można łatwo uzyskać, posługując się zasadą indukcji matematycznej, ale rzeczonoego dowodu nie rozwijamy, gdyż bezpośrednie zastosowywanie twierdzeń paragrafu poprzedzającego doprowadzi nas we wszystkich przypadkach szczególnych do pożądanego celu.

§ 76. Wszystkie twierdzenia, wyszczególnione w § 67, mogą zachodzić dla takiej klasy wielkości (K), która jest klasą wielkości tylko w znaczeniu szerszym. Gdybyśmy na przykład z teorii liczb wymiernych usunęli umowę, określającą, która z dwóch nierównych pomiędzy sobą liczb wymiernych ma być uważana za mniejszą, nie zmieniając przytem w niczem innych definicji rzeczony teorii, to zbiór liczb wymiernych stałby się przykładem na taką klasę (K) wielkości w znaczeniu szerszem, w odniesieniu do której zachodziłyby wszystkie twierdzenia, podane w § 67. Obecnie założymy, że symbol (K) oznacza taką klasę wielkości w znaczeniu ściślejszem, dla której zachodzą, prócz twierdzeń, wyszczególnionych w § 67, jeszcze dwa twierdzenia następujące:

Tw. I. Jeżeli dwa elementy b i b' klasy (K) spełniają nierówność

$$b < b',$$

a symbol a oznacza jakikolwiek trzeci element rozważanej klasy wielkości, to w takim razie zachodzi nierówność

$$a + b < a + b'.$$

Tw. II. Jeżeli dwa elementy b i b' klasy (K) spełniają nierówność

$$b < b',$$

a pewien element a rozważanej klasy wielkości spełnia nierówność

$$a > \mu,$$

gdzie μ oznacza moduł dodawania elementów klasy (K), to w takim razie zachodzi nierówność

$$a \cdot b < a \cdot b'.$$

Uwaga I. Zważywszy, iż modułem dodawania liczb wymiernych jest liczba

$$0,$$

spostrzegamy natychmiast, że zbiór wszystkich liczb wymiernych stanowi przykład na klasę wielkości, spełniającą wszystkie obecnie przyjęte założenia co do klasy wielkości (K). Przekonamy się później, iż prócz liczb wymiernych, istnieją inne jeszcze klasy wielkości, które rozważane założenia także spełniają. Z tej przyczyny korzystnem jest zbadanie ważniejszych następstw tych założeń. Rzeczony następstwa polegają na twierdzeniach, odnoszących się do ilościowego uszeregowywania sum, różnic, iloczynów i stosunków elementów klasy (K). Przystępujemy obecnie do wykładu tych twierdzeń.

Tw. III. Jeżeli elementy a, b, a' i b' klasy (K) spełniają albo

$$(1) \quad a \leq a', \quad b < b',$$

albo związki

$$(2) \quad a < a', \quad b \leq b',$$

to w takim razie mamy

$$(3) \quad a + b < a' + b'$$

Istotnie, załóżmy najpierw, że spełnione są związki (1). Opierając się na Tw. I i na własności przemienności dodawania, stwierdzamy łatwo, że ze związków (1) wynikają następujące

$$a + b \leq a' + b,$$

$$a' + b < a' + b',$$

które pociągają ze sobą związek (3). Całkiem analogicznie stwierdzimy, że ze związków (2) wynika również związek (3). Zatem, twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. IV. Jeżeli oznaczymy przez a, b, a' i b' cztery elementy klasy (K) i założymy, że odejmowania, zaznaczone we wzorach

$$a - b \quad \text{ i } \quad a' - b',$$

są wykonalne, to w takim razie związki

$$(1) \quad a - b < a' - b',$$

$$(2) \quad a - b = a' - b',$$

$$(3) \quad a - b > a' - b'$$

są odpowiednio równoważne związkom następującym:

$$(4) \quad a + b' < a' + b,$$

$$(5) \quad a + b' = a' + b,$$

$$(6) \quad a + b' > a' + b.$$

Żeby to twierdzenie uzasadnić, zważmy przedewszystkiem, że mieliśmy już poprzednio sposobność do wykazania (§ 69, Tw. III) równoważności związków (2) i (5). Powiadam, że nierówność (1) pociąga za sobą (4). Istotnie, załóżmy, że związek (1) zachodzi. W takim razie na podstawie Tw. I mamy

$$(a - b) + b < (a' - b') + b;$$

ponieważ zaś z jednej strony (§ 69 Tw. I, Uwaga II)

$$(a - b) + b = a,$$

a z drugiej (§ 69, Tw. II)

$$(a' - b') + b = (a' + b) - b',$$

przeto

$$a < (a + b) - b',$$

skąd (Tw. I) wynika właśnie nierówność (4).

Z łatwością przekonujemy się teraz, że (3) pociąga za sobą (6), albowiem (3) pociąga za sobą

$$a' - b' < a - b,$$

a stąd wynika (ze względu na to, iż (1) pociąga za sobą (4)) nierówność

$$a' + b < a + b',$$

która właśnie pociąga za sobą (6).

Z powyższych rozważań wynika, że związki (1), (2) i (3) pociągają za sobą odpowiednio związki (4), (5) i (6). Pozostaje więc tylko do wykazania, że związki (4), (5) i (6) pociągają za sobą odpowiednio związki (1), (2) i (3). Otóż, jeżeli zachodzi związek (4), to jeden ze związków (1), (2), (3) niezawodnie zachodzić musi. Ponieważ zaś nie może zachodzić ani (2) ani (3), gdyż, ze względu na wyniki już uzasadnione, musiałby w takim razie zachodzić albo związek (5) albo (6), a każdy z nich jest wykluczony przez związek (4), którego istnienie zakładamy, przeto związek (4) pociąga za sobą związek (1). Całkiem analogicznie okazalibyśmy, że w razie istnienia związku (6) zachodzić musi związek (3), a ponieważ, ze względu na równoważność związków (2) i (5) zaznaczoną na początku dowodu, związek (5) pociąga za sobą (2), przeto stwierdzamy ostatecznie, że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Uwaga I. Z twierdzeń III i IV czytelnik sam wysnuje wnioski następujące: Przy odejmowaniu elementów klasy (K) powiększenie odjemnej bez zmiany odjemnika powiększa resztę, powiększenie zaś odjemnika bez zmiany odjemnej zmniejsza resztę.

Tw. V. Jeżeli oznaczymy przez a i b dwa elementy klasy (K), z których każdy większy jest od modułu dodawania μ , to w takim razie zachodzi nierówność

$$(1) \quad a \cdot b > \mu.$$

Istotnie, ze względu na nierówności

$$a > \mu \text{ i } b > \mu,$$

mamy (Tw. II)

$$a \cdot b > a \cdot \mu,$$

a ponieważ (§ 70 Tw. III)

$$a \cdot \mu = \mu,$$

przeto nierówność (1) rzeczywiście zachodzi.

Tw. VI. Jeżeli oznaczymy przez a, b, a' i b' cztery elementy klasy (K), z których każdy jest większy od modułu dodawania, i założymy, że mamy albo

$$(1) \quad a \leq a', \quad b < b',$$

albo

$$(2) \quad a < a', \quad b \leq b',$$

to w takim razie mamy

$$(3) \quad a \cdot b < a' \cdot b'.$$

Istotnie, założmy, że zachodzą związki (1). Opierając się na Tw. II i na własności przemienności mnożenia, łatwo stwierdzamy że, ze względu na

$$a' > \mu \text{ i } b > \mu$$

mamy

$$a \cdot b \leq a' \cdot b, \quad a' \cdot b < a' \cdot b';$$

a ponieważ związki te pociągają za sobą nierówność (3), przeto związki (1) rzeczywiście pociągają za sobą nierówność (3). Całkiem analogicznie udowodnilibyśmy, że związki (2) także pociągają za sobą nierówność (3). Ostatecznie więc, twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Tw. VII. Jeżeli oznaczymy przez b i b' dwa elementy klasy (K), z których każdy jest większy od modułu dodawania, a przez a i a' już całkiem dowolnie dane elementy tejże klasy, to w takim razie związki

$$(1) \quad \frac{a}{b} < \frac{a'}{b'},$$

$$(2) \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'},$$

$$(3) \quad \frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}$$

równoważne są odpowiednio związkom następującym:

$$(4) \quad a \cdot b' < a' \cdot b,$$

$$(5) \quad a \cdot b' = a' \cdot b,$$

$$(6) \quad a \cdot b' > a' \cdot b.$$

Równoważność związków (2) i (5) wynika bezpośrednio z Tw. II § 72-go; chodzi więc tylko o udowodnienie, że związki (1) i (3) są odpowiednio równoważne związkom (4) i (6). W tym celu przyjmijmy

$$(7) \quad x = \frac{a}{b}, \quad x' = \frac{a'}{b'},$$

skąd

$$a = x \cdot b, \quad a' = x' \cdot b'.$$

Z równości tych wynikają następujące:

$$(8) \quad a \cdot b' = x \cdot (b \cdot b'), \quad a' \cdot b = x' \cdot (b \cdot b')$$

Ponieważ każdy z elementów b i b' jest większy od modułu dodawania μ , przeto (Tw. V) mamy także

$$b \cdot b' > \mu.$$

Zatem (Tw. II) nierówność

$$(9) \quad x < x'$$

pociąga za sobą

$$(10) \quad x \cdot (b \cdot b') < x' \cdot (b \cdot b'),$$

a nierówność

$$(11) \quad x > x'$$

nierówność

$$(12) \quad x \cdot (b \cdot b') > x' \cdot (b \cdot b')$$

Ponieważ zaś, ze względu na (7), nierówności (1) i (3) pociągają za sobą odpowiednio (9) i (11), przeto rzeczzone nierówności pociągają za sobą odpowiednio nierówności (10) i (12), które znów, na podstawie równości (8), pociągają za sobą odpowiednio (4) i (5). Stwierdzamy zatem, że nierówności (1) i (3) pociągają za sobą odpowiednio nierówności (4) i (6). Pozostaje do udowodnienia, że odwrotnie, w razie istnienia związku (4) zachodzi związek (1), a w razie istnienia związku (6) — związek (3). Otóż, jeżeli związek (4) zachodzi, to nie może zachodzić żaden ze związków (2) lub (3), gdyż istnienie jednego z tych związków pociągałoby za sobą, na podstawie tego, cośmy stwierdzili wyżej, istnienie albo związku (5) albo (6), z których znów żaden nie może zachodzić, skoro zachodzi (4). Ponieważ zaś jeden ze związków (1), (2) lub (3) zachodzi niezawodnie, przeto zachodzi musi związek (1). Całkiem alogicznie wykazalibyśmy, że związek (6) pociąga za sobą związek (3). Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

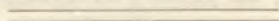
Uwaga. Z twierdzeń V, VI i VII łatwo wyprowadzamy wnioski następujące:

1^o Jeżeli w stosunku dwóch elementów klasy (K) o mianowniku większym od modułu dodawania zwiększymy licznik, nie zmieniając mianownika, to zwiększymy przez to i wartość samego stosunku.

2^o Jeżeli licznik i mianownik w stosunku dwóch od mo-

dużu dodawania większych elementów klasy (K) zwiększonym mianownik, nie zmieniając licznika, to przez to zmniejszył sam stosunek.

Przy zastosowaniach należy pilnie zważać na głęboką różnicę, która zachodzi pomiędzy temi z twierdzeń, podanych w niniejszym paragrafie, które odnoszą się do sum i różnic, a temi, które odnoszą się do iloczynów i stosunków (czyli ilorazów); wobec twierdzeń pierwszej kategorii *żaden* element klasy (K) nie odgrywa wyróżniającej go roli, wobec zaś twierdzeń drugiej — przypada *modułowi dodawania* rola szczególna, wyróżniająca go od innych elementów klasy (K). Ta sama okoliczność występuje nawet w niektórych twierdzeniach, podanych w paragrafach poprzedzających, w których zakładaliśmy tylko, że klasa wielkości (K) sprawdza twierdzenia § 67-go. Omawiany brak symetrii w teorii działań podstawowych na wielkościach klasy (K) wywołany jest okolicznościami, uwypatnionymi w końcowej uwadze § 67-go.



IV. Mierzenie odcinków niewspółmiernych z jednostką. Liczby niewymierne. Ogólne pojęcie liczby bezwzględnej.

§ 77. Już w rozdziale, poświęconym mierzeniu odcinków współmiernych z jednostką zaznaczyliśmy, że istnieją pary odcinków niewspółmiernych pomiędzy sobą. W jednym z następnych paragrafów niniejszego rozdziału wykazemy, że ta okoliczność należy do następstw logicznych postulatów, wyszczególnionych w rozdziale IV-tym pierwszej części tego dzieła, ale sądzimy, że korzystnem będzie udowodnić na tem miejscu istnienie odcinków niewspółmiernych przez uzasadnienie, za pomocą elementarnych twierdzeń planimetrii, twierdzenia następującego:

W każdym trójkącie prostokątnym równoramiennym bok kąta prostego i przeciwprostokątna stanowią parę odcinków niewspółmiernych.

Różne istnieją dowody powyższego twierdzenia. Żeby z tych dowodów wybrać najodpowiedniejszy, kierowaliśmy się tą myślą, żeby, przy zachowaniu należytej ścisłości, dowód był możliwie prosty i nie wymagał powoływania się na żadne inne teorie geometryczne, prócz tylko na teorię równości figur prostoliniowych.

Lemat. Oznaczwszy przez A (fig. 1) wierzchołek kąta prostego trójkąta prostokątnego równoramiennego, a przez B i C dwa

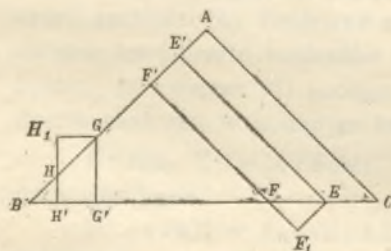


Fig. 1.

wierzchołki pozostałe założmy, że odcinki EF i GH , położone odpowiednio na bokach BC i BA , są równe pomiędzy sobą i oznaczmy: przez E' i F' podnóże prostopadłych, spuszczonego z punktów E i F na bok BA , a przez G' i H' podnóże prostopadłych, spuszczonego z punktów G i H na przeciwprostokątną BC . Po-

(1) $G'H' = E'F'.$

Istotnie, jeżeli oznaczmy przez H_1 podnóże prostopadłej, spuszczonej

z punktu G na prostą HH' , a przez F_1 podnóże prostopadłej, spuszczonej z punktu E na prostą FF' , to figury $GH_1H'G'$ i $EF_1F'E'$ będą prostokątami, skąd wynika, że

$$(2) \quad \overline{GH_1} = \overline{G'H'}, \quad \overline{EF_1} = \overline{E'F'}.$$

Ponieważ zaś, ze względu na równość

$$\overline{GH} = \overline{EF},$$

której istnieniu zakładamy, trójkąty prostokątne równoramienne GH_1H i EF_1F są równe pomiędzy sobą, przeto mamy

$$(3) \quad GH_1 = EF_1.$$

Z równości (2) i (3) wynika równość (1), o uzasadnienie której właśnie chodziło.

Żeby posunąć się dalej, uważajmy jakikolwiek trójkąt prostokątny równoramienny i oznaczmy znowu przez A wierzchołek kątu prostego, a przez B i C dwa wierzchołki pozostałe. Załóżmy, że *wbrew brzmieniu twierdzenia*, odcinki AB i BC są współmierne.

Umówiwszy się, że miarę jakiegokolwiek odcinka PQ w razie przyjęcia za jednostkę pewnego odcinka właściwego RS , z nim współmiernego, oznaczać będziemy przez symbol

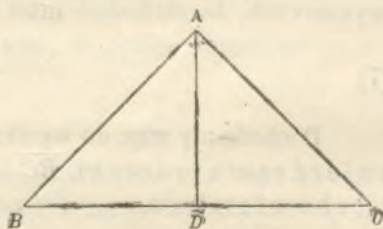


Fig. 2.

$$(\overline{PQ}, \overline{RS}),$$

mieć będziemy, na podstawie przyjętego założenia, równość postaci następującej:

$$(4) \quad (BC, BA) = \frac{m}{p},$$

gdzie symbol

$$\frac{m}{p}$$

oznacza pewną liczbę ułamkową o liczniku m i mianowniku p .

Oznaczmy przez D (fig. 2) podnóże prostopadłej, spuszczonej z punktu A na przeciwprostokątną BC i podzielmy odcinki BC i BA odpowiednio na m i p równych części. Wszystkie te części odcinków BC i BA będą równe pomiędzy sobą, gdyż z tem właśnie polega treść równości (4). Jeżeli teraz przez punkty podziału odcinka BC poprowadzimy prostopadłe do prostej BA , a przez punkty podziału

odcinka BA — prostopadłe do prostej BD , to prostopadłe do odcinka $\overline{BA}$ podzielią go na m części, a prostopadłe do odcinka $\overline{BD}$ podzielią ten odcinek na p części. Ze względu na lemat, uzasadniony wyżej, każda z części, na które podzielony został odcinek $\overline{BA}$ równać się będzie każdej z tych części, na który odcinek $\overline{BD}$ został podzielony. Zatem mieć będziemy:

$$(5) \quad (BA, BD) = \frac{m}{p}$$

Ale z definicji mnożenia liczb ułamkowych wynika, że równości (4) i (5) pociągają za sobą równość:

$$(6) \quad (BC, BD) = \left(\frac{m}{p}\right)^2$$

Z drugiej znów strony, ponieważ punkt D jest środkiem odcinka $\overline{BC}$, przeto mamy:

$$(\overline{BC}, \overline{BD}) = 2.$$

Ale z równości tej i równości (6) wynika, na podstawie definicji równości liczb wymiernych, że zachodzić musi równość następująca:

$$(7) \quad \left(\frac{m}{p}\right)^2 = 2.$$

Dochodzimy więc do wyniku następującego: gdyby wbrew brzmieniu twierdzenia odcinki $\overline{BC}$ i $\overline{BA}$ były współmierne, to istniałaby liczba ułamkowa

$$\frac{m}{p},$$

sprawdzająca równość (7). Ale taka liczba ułamkowa nie istnieje. Gdyby bowiem rzeczona liczba ułamkowa istniała, to w takim razie albo istniałaby pewna liczba całkowita c , spełniająca równość

$$c = \frac{m}{p},$$

albo istniałaby liczba ułamkowa nieprzywiedlna

$$\frac{m_1}{p_1},$$

o mianowniku od jedności większym, spełniająca równość:

$$\frac{m_1}{p_1} = \frac{m}{p}.$$

W pierwszym przypadku mielibyśmy

$$(8) \quad c^2 = 2,$$

a w drugim

$$\left(\frac{m_1}{p_1}\right)^2 = 2$$

czyli

$$(9) \quad \frac{m_1^2}{p_1^2} = 2.$$

Otóż równość (8) nie może zachodzić, gdyż równości tej nie spełnia ani zerowa wartość na c ani wartość

$$c = 1,$$

a przy każdej innej wartości całkowitej na c mielibyśmy

$$c^2 > 2.$$

Ale równość (9) także zachodzić nie może, gdyż ze względu na to, że liczby m_1 i p_1 są względnie pierwsze, liczby

$$m_1^2 \text{ i } p_1^2$$

są również względnie pierwsze, skąd znów wynika, że liczba ułamkowa

$$\frac{m_1^2}{p_1^2},$$

o mianowniku od jednostki większym, jest nieprzywiedlna i z tego powodu żadnej liczbie całkowitej, a więc w szczególności i liczbie 2, równać się nie może. Ostatecznie stwierdzamy, że założenie, iż odcinki $\overline{BC}$ i $\overline{BA}$ są współmierne, doprowadza do błędnego wyniku, iż istnieje liczba ułamkowa

$$\frac{m}{p},$$

spełniająca równość (7). Zatem rzeczone założenie jest błędne. Innymi słowy, twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Upewniwszy się o istnieniu par odcinków niewspółmiernych pomiędzy sobą, przekonywamy się o konieczności badania problemu mierzenia odcinków niewspółmiernych z jednostką.

§ 78. Oznaczmy przez u odcinek właściwy, przyjęty za jednostkę, a przez a jakiegokolwiek odcinek niewspółmierny z odcinkiem u .

Jeżeli tedy oznaczmy przez w jakąkolwiek liczbę wymierną, to odcinek, którego miarą, przy rozważanej jednostce długości, byłaby liczba w , nie będzie w żadnym razie równać się odcinkowi a .

Możemy więc podzielić zbiór wszystkich liczb wymiernych na dwie kategorie (A_1) i (A_2), zaliczając do kategorii (A_1) liczby wymierne, będące miarami odcinków mniejszych od odcinka a , a do kategorii (A_2) te liczby wymierne,

które są miarami odcinków większych od odcinka a . W tym spostrzeżeniu znajduje się całe jądro teorii, którą zamierzamy wyłożyć. Wobec tego koniecznem jest, żebyśmy bliżej zbadali własności powyższego podziału zbioru wszystkich liczb wymiernych na te dwie kategorie, które oznaczyliśmy przed chwilą przez (A_1) i (A_2) . Rzeczona własności możemy wyrazić w postaci twierdzeń następujących.

(A) Żaden ze zbiorów (A_1) i (A_2) nie jest pusty, a zbiór (A_1) obejmuje przynajmniej jedną liczbę od zera większą.

(B) Każda liczba zbioru (A_1) jest mniejsza od każdej liczby zbioru (A_2) .

(C) W zbiorze (A_1) nie istnieje liczba największa.

(D) W zbiorze (A_2) nie istnieje liczba najmniejsza.

Powyższe twierdzenie wyprowadzimy z łatwością z dwóch twierdzeń następujących:

Tw. I. Jeżeli przyjmiemy jakikolwiek odcinek właściwy u za jednostkę i oznaczymy przez a dowolnie dany odcinek, to zawsze znajdzie się liczba, która będzie miarą odcinka większego od odcinka a .

Istotnie, zawsze znajdzie się (§ 43, Tw. II) liczba całkowita n spełniająca nierówność

$$n \cdot u > a.$$

Ponieważ zaś rzeczona liczba całkowita n jest miarą odcinka

$$n \cdot u,$$

przeto ta liczba całkowita jest liczbą wymierną, spełniającą warunki twierdzenia. Zatem twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. II. Jeżeli dwa odcinki b i b' spełniają nierówność

$$(1) \quad b < b',$$

to, po przyjęciu za jednostkę dowolnie danego odcinka właściwego u , zawsze istnieć będzie taka liczba wymierna w , żeby odcinek x , którego miarą byłaby liczba w , spełniał nierówności

$$(2) \quad b < x < b'$$

Istotnie, z nierówności (1) wynika (§ 41 Tw. I), że istnieć będzie odcinek d , spełniający równość

$$d = b' - b,$$

równoważną (§ 41 Tw. I, Uwaga) równości

$$(3) \quad b + d = b'$$

Odcinek d będzie odcinkiem właściwym, gdyż w przeciwnym razie z równości (3) mielibyśmy (§ 40 Tw. VII) wbrew założeniu

$$b = b'.$$

Do odcinka d można będzie (§ 43, Tw. II) dobrać liczbę całkowitą p , spełniającą nierówność

$$(4) \quad p \cdot d > u,$$

a do liczby p (§ 43 Tw. IV) można będzie dobrać taki odcinek właściwy δ , żebyśmy mieli

$$(5) \quad p \cdot \delta = u.$$

Z związków (4) i (5) mamy

$$\text{skąd (§ 42, Tw. IV, Wniosek)} \quad p \cdot \delta < p \cdot d,$$

$$(7) \quad \delta < d.$$

Ponieważ odcinek δ jest właściwym, przeto (§ 43 Tw. II) znajdzie się liczba całkowita k , spełniająca nierówność

$$(8) \quad k \cdot \delta > b,$$

Ponieważ zaś wyrażenie (§ 42 Def. I)

$$0 \cdot \delta$$

przedstawia odcinek niewłaściwy, przeto (§ 39 Def. I) mamy

$$(9) \quad 0 \cdot \delta \leq b$$

Ze związków (8) i (9) wynika, że pośród liczb całkowitych

$$0, 1, 2, \dots, k$$

znajdzie się pewna liczba całkowita m ($m > 0$), spełniająca związki

$$(10) \quad (m - 1) \cdot \delta \leq b.$$

i

$$(11) \quad m \cdot \delta > b$$

Ze związku (10) mamy

$$(m - 1) \cdot \delta + \delta \leq b + \delta,$$

a ze względu na (7) —

$$b + \delta < b + d.$$

Zatem

$$(m - 1) \cdot \delta + \delta < b + d$$

czyli

$$m \cdot \delta < b + d,$$

skąd ze względu na (3) wynika związek

$$(12) \quad m \cdot \delta < b'$$

Z równości (5) wynika, że miarą odcinka

jest liczba ułamkowa

$$\frac{m}{p},$$

a z tego i z nierówności (11) i (12) — że wystarczy określić liczbę wymierną w przez równość

$$w = \frac{m}{p},$$

żeby uzyskać liczbę, której istnienie mieliśmy udowodnić. Zatem twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Przystępujemy teraz do uzasadnienia twierdzeń, podanych pod (A), (B), (C) i (D). Na podstawie Tw. I znajdzie się liczba wymierna w_2 , która będzie miarą odcinka większego od odcinka a , zatem zbiór (A_2) nie jest pusty; z drugiej strony odcinek a , jako niewspółmierny z jednostką, jest odcinkiem właściwym a więc większym od odcinka niewłaściwego μ , zatem (Tw. II) znajdzie się liczba wymierna w_1 , która będzie miarą odcinka a_1 , większego od odcinka μ , ale mniejszego od odcinka a ; liczba w_1 należy do zbioru (A_1) i jest od zera większa, zatem zbiór (A_1) nie jest pusty i zawiera przynajmniej jedną liczbę większą od zera. Widzimy więc, że twierdzenie (A) zachodzi. Jeżeli teraz oznaczmy przez w_1 i w_2 dwie liczby wymierne, należące odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2) , to pierwsza będzie miarą odcinka a_1 mniejszego od a , a druga odcinka a_2 większego od a ; mamy więc

$$a_1 < a_2,$$

skąd wynika nierówność

$$w_1 < w_2.$$

Udowodniliśmy więc, że twierdzenie (B) zachodzi w podanem brzmieniu. Żeby uzasadnić twierdzenia, podane pod (C) i (D), zachowujemy oznaczenia, którymi posługiwaliśmy się przy dowodzie twierdzenia (B). Mamy tedy

$$a_1 < a$$

oraz

$$a < a_2$$

Na podstawie Tw. II znajdzie się liczba wymierna w'_1 , która będzie miarą odcinka większego od a_1 , ale mniejszego od a . Na podstawie tegoż twierdzenia

znajdzie się liczba wymierna w'_2 , która będzie miarą odcinka większego od a , ale mniejszego od a_2 . Liczba w'_1 oczywiście należy do zbioru (A_1) i spełnia nierówność

$$w'_1 > w_1,$$

a liczba w'_2 — do zbioru (A_2) i spełnia nierówność

$$w'_2 < w_2.$$

Zatem, do dowolnie danej liczby w_1 zbioru (A_1) możemy dobrać większą od niej liczbę w'_1 , również należącą do zbioru (A_1) , a do dowolnie danej liczby w_2 zbioru (A_2) możemy dobrać mniejszą od niej liczbę w'_2 , należącą również do zbioru (A_2) . Zatem twierdzenia (C) i (D) zachodzą w podanem brzmieniu.

§ 79. **Def. I. Przekroiem** zbioru liczb wymiernych zowiemy taki podział wszystkich tych liczb na dwie kategorie (A_1) i (A_2) , który spełnia warunki następujące:

1° Żaden ze zbiorów (A_1) i (A_2) nie jest pusty, a zbiór (A_1) obejmuje przynajmniej jedną liczbę od zera większą.

2° Każda liczba zbioru (A_1) jest mniejsza od każdej liczby zbioru (A_2) .

Zbiór (A_1) zowie się zbiorem liczb *pierwszej*, a zbiór (A_2) — *drugiej* kategorii w stosunku do odnośnego przekroju.

Uwaga. Z łatwością dostrzegamy, że każdy ze zbiorów (A_1) i (A_2) obejmuje nieskończenie wiele nierównych pomiędzy sobą liczb.

Z definicji powyższej wynika, że ten podział zbioru liczb wymiernych na dwie kategorie, który rozważaliśmy w paragrafie poprzedzającym, należy do klasy przekrojów. Z tego powodu koniecznem jest, żebyśmy bliżej zbadali pojęcie przekroju w postaci ogólnej.

Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez (A_1) zbiór liczb pierwszej kategorii, a przez (A_2) — zbiór liczb drugiej kategorii w stosunku do oznaczonego przekroju (P) zbioru liczb wymiernych, to w takim razie zawsze zachodzi jeden z trzech, wykluczających się wzajemnie, przypadków następujących:

1° W zbiorze (A_1) istnieje liczba największa, a w zbiorze (A_2) nie istnieje liczba najmniejsza.

2° W zbiorze (A_2) istnieje liczba najmniejsza, a w zbiorze (A_1) nie istnieje liczba największa.

3° W zbiorze (A_1) nie istnieje liczba największa, a w zbiorze (A_2) nie istnieje liczba najmniejsza.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zważmy, że zachodzić musi oczywiście jedna z dwóch okoliczności następujących:

(A) W zbiorze (A_1) istnieje liczba największa.

(B) W zbiorze (A_1) nie istnieje liczba największa.

Założmy, że zachodzi przypadek (A), i oznaczmy przez l największą liczbę zbioru (A_1) . W takim razie konieczny i wystarczający warunek, aby dana liczba wymierna w należała do zbioru (A_1) , polega na istnieniu związku

$$(1) \quad w \leq l,$$

albowiem, gdyby związek (1) nie zachodził, to mielibyśmy

$$(2) \quad w > l$$

i liczba w , jako większa od największej liczby l zbioru (A_1) , nie należałaby do zbioru (A_1) ; jeżeli zaś związek (1) zachodzi, to liczba w , jako nie większa od liczby l zbioru (A_1) , nie należy do zbioru (A_2) i musi zatem należeć do zbioru (A_1) , gdyż każda liczba wymierna należy do jednego ze zbiorów (A_1) lub (A_2) . Skoro zaś związek (1) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby liczba w należała do zbioru (A_1) to, ze względu na to, iż każda liczba wymierna należy albo do zbioru (A_1) albo do (A_2) , nie istnienie związku (1), a więc istnienie związku (2) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, żeby liczba w należała do zbioru (A_2) . Jeżeli więc pewna liczba a_2 należy do zbioru (A_2) , to mamy

$$a_2 > l,$$

ale w takim razie zawsze znajdzie się liczba wymierna a'_2 , spełniająca nierówności

$$(3) \quad a_2 > a'_2 > l^1).$$

Z nierówności tych wynika, że do dowolnie danej liczby a_2 zbioru (A_2) możemy dobrać mniejszą od niej liczbę a'_2 , również należącą do zbioru (A_2) . Innymi słowy w zbiorze (A_2) nie ma liczby najmniejszej. Dochodzimy tedy do wyniku następującego: jeżeli zachodzi okoliczność, wymieniona pod (A), to zachodzi 1-szy z trzech wypadków, wymienionych w twierdzeniu. Założmy teraz, że przypadek (A) nie zachodzi, innymi słowy, założmy, że zachodzi przypadek (B). W takim razie jedno z dwojga: albo istnieje w zbiorze (A_2) pewna liczba najmniejsza, albo taka liczba nie istnieje. W pierwszym przypadku zachodzi oczywiście 2-gi z przypadków, wyszczególnionych w twierdzeniu, a w drugim — 3-ci z nich. Zatem, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, jeden z trzech przypadków, wymienionych w twierdzeniu, zawsze zachodzić musi.

Tw. II. Każdy z trzech przypadków, wyszczególnionych w Tw. I jest możliwy.

¹⁾ Liczba a'_2 spełniać będzie w szczególności rzeczzone nierówności, jeżeli przyjmiemy

$$a'_2 = \frac{1}{2} (a_2 + l).$$

Istotnie, z faktów stwierdzonych w paragrafie poprzedzającym wynika, że 3-ci przypadek jest możliwy. Żeby zaś upewnić się, że i każdy z dwóch pierwszych jest możliwy, oznaczmy przez l dowolnie przyjętą, byle od zera większą liczbę. Jeżeli tedy oznaczmy przez (A_1) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których żadna nie jest większa od liczby l , a przez (A_2) zbiór wszystkich pozostałych, to urzeczywistnimy 1-szy przypadek; jeżeli zaś przeniesiemy liczbę l ze zbioru (A_1) do zbioru (A_2) , nie wprowadzając przy tem żadnych innych zmian w tych zbiorach, to urzeczywistnimy 2-gi. Zatem, twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Def. II. Jeżeli istnieje liczba wymierna l , która jest albo największą liczbą pierwszej kategorii w stosunku do oznaczonego przekroju (P) zbioru liczb wymiernych, albo najmniejszą liczbą drugiej kategorii w stosunku do tegoż przekroju, to w takim razie mówimy, że liczba l *położona jest na przekroju* (P), a przekrój (P) zowiemy *przekrojem pierwszego gatunku*; jeżeli zaś liczba wymierna l nie istnieje, to przekrój (P) zowiemy *przekrojem drugiego gatunku*.

§ 80. Uwzględniając Def. II paragrafu poprzedzającego, możemy słusznie powiedzieć, że z Tw. II tegoż paragrafu wynika zarówno istnienie przekrojów drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych, jako też i przekrojów pierwszego gatunku, ale, jeżeli zwrócimy się do dowodu rzeczzonego twierdzenia, to dostrzeżemy głęboką różnicę pomiędzy tem, co odnosi się do przekrojów pierwszego, a tem, co się odnosi do przekrojów drugiego gatunku. Żeby uzasadnić możliwość dwóch pierwszych przypadków, wyszczególnionych w Tw. I paragrafu poprzedzającego, żeby więc dowieść istnienia przekrojów pierwszego gatunku, opieraliśmy się wyłącznie na własnościach liczb wymiernych, natomiast, przy dowodzie możliwości 3-go z przypadków, wyszczególnionych w rzeczonym twierdzeniu, a więc w części dowodu, z której wynika istnienie przekrojów drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych, opieraliśmy się na spostrzeżeniach, uczynionych na początku § 78-go, które znów oparte są na istnieniu odcinków niewspółmiernych. Wobec tego nasuwa się pytanie następujące: czy można wykazać istnienie przekrojów drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych na podstawie teorii liczb wymiernych, nie opierając się na istnieniu odcinków niewspółmiernych? Okażemy¹⁾, że na to pytanie należy odpowiedzieć twierdząco, a przy rozwijaniu odnośnego dowodu zaznajomimy się z faktem, który, jak się później przekonamy, ma pierwszorzędnę znaczenie.

Def. I. Jeżeli istnieje liczba wymierna, której kwadrat (czyli druga potęga) równa się pewnej danej liczbie wymiernej w , to orzekamy, że liczba w jest *kwadratem zupełnym*.

¹⁾ Zobacz niżej Uwaga I po Tw. III.

Tw. I. Jeżeli pewna liczba całkowita jest kwadratem zupełnym, to ona jest kwadratem drugiej liczby całkowitej.

Istotnie, jeżeli oznaczmy przez w jakąkolwiek liczbę wymierną, nierówną żadnej liczbie całkowitej, to mieć będziemy

$$w = \frac{m}{p},$$

gdzie m i p są dwie liczby względnie pierwsze, z których p jest większa od jedności. Mamy tedy

$$w^2 = \frac{m^2}{p^2}.$$

Liczby

$$m^2 \text{ i } p^2$$

będą dwie liczby względnie pierwsze, a przy tem liczba p będzie większa od jedności. Zatem liczba w^2 nie będzie równa żadnej liczbie całkowitej. Stwierdzamy więc, że kwadrat liczby wymiernej, nierównej żadnej liczbie całkowitej, sam liczbie całkowitej równać się nie może. Z tego zaś wynika, że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. II. Nie każda liczba całkowita, a więc nie każda liczba wymierna jest kwadratem zupełnym.

Istotnie, oznaczmy przez k jakąkolwiek liczbę całkowitą od zera większą, a przez n liczbę całkowitą, spełniającą nierówności

$$(1) \quad k^2 < n < (k+1)^2.$$

Liczba n będzie istnieć, gdyż mamy

$$(k+1)^2 - k^2 > 1.$$

Z drugiej strony każda liczba całkowita p spełniać będzie albo związek

$$p^2 \leq k^2, \text{ albo } p^2 \geq (k+1)^2.$$

Zatem, ze względu na (1), każda liczba całkowita będzie spełniać albo nierówność

$$p^2 < n \text{ albo } p^2 > n,$$

skąd wynika, że kwadrat żadnej liczby całkowitej, a więc (Tw. I) i kwadrat żadnej liczby wymiernej, nie może się równać liczbie całkowitej n . Z tego wynika, że liczba całkowita n nie jest kwadratem zupełnym. Zatem, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, nie każda liczba całkowita, a więc nie każda liczba wymierna jest kwadratem zupełnym.

Tw. III. Jeżeli oznaczmy przez w liczbę wymierną, nie będącą kwadratem zupełnym, i podzielimy zbiór wszystkich

liczb wymiernych na dwie kategorie (A_1) i (A_2), zaliczając do kategorii (A_1) wszystkie liczby wymierne, których kwadraty są mniejsze od liczby w , a do kategorii (A_2) wszystkie inne liczby wymierne, to ten podział zbioru liczb wymiernych stanowić będzie przekrój drugiego gatunku tychże, a przy tem zbiór (A_1) będzie zbiorem pierwszej, a zbiór (A_2) — zbiorem drugiej kategorii liczb wymiernych w stosunku do tego przekroju.

Istotnie:

1° Zbiór (A_1) nie jest pusty i obejmuje przynajmniej jedną liczbę od zera większą; jeżeli bowiem oznaczymy przez a_1 liczbę wymierną, spełniającą nierówność

$$0 < a_1 < 1; a_1 < w,$$

a taka liczba istnieć będzie, to mieć będziemy

$$a_1^2 < a_1,$$

a więc i

$$a_1^2 < w;$$

stąd zaś wynika że od zera większa liczba a_1 należy do zbioru (A_1).

2° Zbiór (A_2) nie jest pusty; jeżeli bowiem oznaczymy przez a_2 liczbę całkowitą, spełniającą nierówność

$$a_2 > w,$$

a taka liczba istnieć będzie, to tem bardziej mieć będziemy

$$a_2^2 > w,$$

skąd wynika, że liczba a_2 należy do zbioru (A_2), który zatem nie jest pusty.

3° Każda liczba a_1 zbioru (A_1) jest mniejsza od każdej liczby a_2 zbioru (A_2), gdyż z jednej strony mamy

$$(1) \quad a_1^2 < w,$$

a z drugiej

$$(2) \quad a_2^2 > w,$$

bo istnienie równości

$$a_2^2 = w,$$

jest wykluczone przez założenie, iż liczba w nie jest kwadratem zupełnym; z nierówności zaś (1) i (2) mamy

$$a_1^2 < a_2^2,$$

skąd

$$a_1 < a_2,$$

o co właśnie chodziło.

Obecnie dowiedliśmy już, że rozważany podział liczb wymiernych na kategorie (A_1) i (A_2) stanowi przekrój zbioru liczb wymiernych. Pozostaje więc tylko do okazania, że ten przekrój jest drugiego gatunku. W tym celu oznaczmy przez a_1 jakąkolwiek liczbę zbioru (A_1) , a przez a'_1 drugą liczbę wymierną, którą bliżej określimy później, ale w każdym razie taką, żebyśmy mieli

$$(3) \quad a_1 < a'_1 < a_1 + 1.$$

Mamy tedy

$$a_1^2 - a_1^2 = (a'_1 - a_1)(a'_1 + a_1),$$

a ponieważ ze względu na (3)

$$a'_1 + a_1 < 2a_1 + 1,$$

przeto

$$(4) \quad a_1^2 - a_1^2 < (a'_1 - a_1)(2a_1 + 1).$$

Ponieważ liczba a_1 , jako liczba, należąca do zbioru (A_1) , spełnia nierówność (1), przeto

$$w - a_1^2 > 0.$$

Zatem będziemy mogli liczbę a'_1 tak dobrać, żeby prócz związków (3), zachodził związek

$$(5) \quad a'_1 - a_1 < \frac{w - a_1^2}{2a_1 + 1}.$$

Wybrawszy liczbę a'_1 tak, żeby te warunki były spełnione, mieć będziemy ze względu na (5) nierówność

$$(a'_1 - a_1)(2a_1 + 1) < w - a_1^2.$$

Z tej zaś nierówności i nierówności (4) mamy

$$a'^2 - a_1^2 < w - a_1^2,$$

skąd

$$a'^2 < w.$$

Zatem, liczba a'_1 , należy do zbioru (A_1) . Stwierdzamy więc, że do każdej liczby a_1 zbioru (A_1) można dobrać większą od niej liczbę a'_1 , należącą również do zbioru (A_1) . Przeto w zbiorze (A_1) nie ma liczby największej.

Pozostaje już tylko do wykazania, że w zbiorze (A_2) nie ma liczby najmniejszej. W tym celu, oznaczmy przez a_2 jakąkolwiek liczbę zbioru (A_2) , a przez a'_2 liczbę wymierną, mającą być bliżej określoną później, ale w każdym razie taką, żebyśmy mieli

$$(6) \quad a'_2 < a_2.$$

Mamy tedy

$$(7) \quad a_2^2 - a_2'^2 = (a_2 - a_2') (a_2 + a_2') < 2 a_2 (a_2 - a_2').$$

Ponieważ liczba a_2 należy do zbioru (A_2) , przeto, jak już wyżej spostrzegliśmy, liczba ta spełnia nierówność (2). Z tego wynika, że liczba a_2 jest od zera większa, a liczba a_2' może być tak wyznaczona, żeby, prócz nierówności (6), zachodziła nierówność

$$(8) \quad a_2 - a_2' < \frac{a_2^2 - w}{2 a_2}.$$

Założmy, że liczba wymierna a_2' spełnia te warunki. Z nierówności (8) mamy

$$2 a_2 (a_2 - a_2') < a_2^2 - w;$$

zatem, ze względu na (7), mamy

$$a_2^2 - a_2'^2 < a_2^2 - w,$$

skąd

$$a_2'^2 > w.$$

Z nierówności tej wynika, że liczba wymierna a_2' , mniejsza od liczby a_2 należy do zbioru (A_2) . Stwierdzamy więc, że do każdej liczby a_2 zbioru (A_2) można dobrać drugą liczbę od niej mniejszą, także do zbioru (A_2) należącą; innemi słowy, w zbiorze (A_2) niema liczby najmniejszej, a to tylko pozostawało do wykazania, żeby twierdzenie uzasadnić w zupełności.

Uwaga I. Ponieważ dowód powyższych twierdzeń opiera się wyłącznie na teorii liczb wymiernych, a z twierdzeń tych wynika istnienie drugiego gatunku przekrojów zbioru liczb wymiernych, przeto wykazaliśmy istnienie takich przekrojów wyłącznie na podstawie teorii liczb wymiernych.

Def. II. Określenie oznaczonego przekroju (P) zbioru liczb wymiernych zowie się *arytmetycznem oznaczeniem* rozważanego przekroju, jeżeli rozstrzygnięcie, czy dana liczba wymierna¹⁾ należy do pierwszej czy do drugiej kategorii w stosunku do rzeczonego przekroju, wymaga wykonania skończonej ilości czynności, z których każda polega albo na wykonaniu jednego z działań podstawowych na znanych liczbach wymiernych, albo na porównaniu ilościowym dwóch takich liczb.

¹⁾ Orzeczenie, że pewna liczba wymierna jest *dana* wyraża, że liczba ta jest napisana w zwykły sposób za pomocą cyfr

Tw. IV. Klasa takich przekrojów drugiego gatunku zbioru liczb wymiernih, z których każdy może być oznaczony arytmetycznie, nie jest pusta.

Istotnie, jeżeli oznaczymy przez w jakakolwiek liczbę wymierną, która kwadratem zupełnym nie jest, i zaliczymy do klasy (A_1) wszystkie te liczby wymierne, których kwadraty są mniejsze od liczby w , a do klasy (A_2) wszystkie pozostałe liczby wymierne, to (Tw. III) ten podział zbioru liczb wymiernih stanowić będzie pewien przekrój drugiego gatunku (P) tychże. Ale przekrój (P), tak określony, jest oznaczony arytmetycznie, albowiem, żeby rozstrzygnąć do której klasy w stosunku do przekroju (P) należy dana liczba wymierna l , dostatecznem jest wykonać dwie czynności następujące:

1° Wyznaczyć iloczyn dwóch liczb wymiernih, równych danej liczbie l .

2° Porównać ilościowo uzyskany iloczyn z daną liczbą w .

Z tego wynika, że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Z łatwością dostrzegamy, że każdy przekrój pierwszego gatunku zbioru liczb wymiernih może być oznaczony arytmetycznie; albowiem, żeby tego dokonać, wystarcza (§ 79, Def. II) oznaczyć liczbę wymierną, położoną na takim przekroju, i nadmienić, do której kategorii w stosunku do rozważanego przekroju ona ma być zaliczona. Natomiast otwartą jest kwestya, czy każdy przekrój drugiego gatunku zbioru liczb wymiernih może być oznaczony arytmetycznie, gdyż z powyższego twierdzenia wynika tylko, że niektóre przekroje drugiego gatunku zbioru liczb wymiernih mogą być arytmetycznie oznaczone.

Nie kusząc się o rozwiązanie powyższej zawilej kwestyi, nadmienimy tylko, że często napotykamy w nauce takie przekroje zbioru liczb wymiernih, które są całkiem precyzyjnie określone, a których jednak oznaczyć arytmetycznie nie umiemy.

§ 81. Def. I. Po przyjęciu pewnego odcinka właściwego u za jednostkę, orzeczenia, iż pewien odcinek a i przekrój (P) zbioru liczb wymiernih *odpowiadają* sobie wzajemnie, wyraża, że

1° odcinek a nie jest mniejszy od żadnego odcinka, którego miarą jest jedna z liczb wymiernih pierwszej kategorii w stosunku do przekroju (P);

2° odcinek a nie jest większy od żadnego odcinka, którego miarą jest jedna z liczb wymiernih drugiej kategorii w stosunku do przekroju (P).

Tw. I. Po przyjęciu oznaczonego odcinka właściwego u za jednostkę, zachodzą okoliczności następujące:

1° Zawsze istnieje odcinek, odpowiadający (Def. I) dowolnie danemu przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernih;

2° każdy odcinek d' , równy odcinkowi d , odpowiadającemu

oznaczonemu przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernych, sam temu przekrojowi odpowiada;

3^o jeżeli każdy z pewnych dwóch odcinków d i d' odpowiada temu samemu przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernych, to te odcinki są równe pomiędzy sobą.

Krócej, ale mniej dokładnie, możemy to twierdzenie wysłowić tak: po oznaczeniu jednostki długości odcinek, odpowiadający danemu przekrojowi zbioru liczb wymiernych, oznaczony jest w zupełności pod względem długości, ale tylko pod tym względem.

Żeby twierdzenie to uzasadnić oznaczmy przez (A_1) pierwszą — a przez (A_2) drugą kategorię liczb wymiernych w stosunku do przekroju (P) i uważajmy początek O dowolnie przyjętego promienia (p) . Punkty promienia (p) możemy podzielić na dwie klasy (K_1) i (K_2) , zaliczając do klasy (K_1) każdy taki punkt A_1 promienia (p) , do którego można w ten sposób dobrać liczbę a_1 , należącą do zbioru (A_1) , żeby odcinek OA_1 nie był większy od odcinka, którego miarą byłaby liczba a_1 , a do kategorii (K_2) wszystkie inne punkty rozważanego promienia. Zbiór (K_1) obejmować będzie prócz punktu O przynajmniej jeszcze jeden punkt, albowiem w zbiorze (A_1) znajdzie się (§ 79 Def. I) liczba a_1 od zera większa, a punkt A_1 promienia (p) , wyznaczony z warunku żeby miarą odcinka OA_1 była liczba a_1 , będzie punktem zbioru (K_1) , od punktu O odmiennym. Zbiór punktów (K_2) nie będzie pusty: jeżeli bowiem oznaczmy przez a_2 jedną z liczb zbioru (A_2) i wyznaczmy punkt A_2 promienia (p) z warunku, żeby miarą odcinka OA_2 była liczba a_2 , to punkt A_2 należeć będzie do zbioru (K_2) , gdyż każda liczba zbioru (A_1) jest mniejsza od a_2 i mierzy zatem odcinek mniejszy od odcinka OA_2 , a stąd wynika, że punkt A_2 do zbioru (K_1) nie należy i należy zatem rzeczywiście do zbioru (K_2) . Nareszcie, każdy punkt A_1 zbioru (K_1) , odmienny od punktu O , oddziela punkt O od każdego punktu A_2 zbioru (K_2) , albowiem łatwo dostrzedz, że mamy

$$\overline{OA_1} < \overline{OA_2},$$

gdyż następstwem związku

$$\overline{OA_1} \geq \overline{OA_2}$$

i tego, że punkt A_1 należy do zbioru (K_1) , byłoby to, iż wbrew założeniu punkt A_2 należy nie do zbioru (K_2) , lecz do zbioru (K_1) . Z trzech powyższych uwag wynika (§ 36, Def. II), że podział punktów promienia (p) na zbiory (K_1) i (K_2) stanowi pewien przekrój ($\mathfrak{K}$) rozważanego promienia. Na przekroju ($\mathfrak{K}$) znajduje się (§ 43, Tw. I) oznaczony punkt A promienia (p) . Powiadam, że odcinek

$$\overline{OA}$$

jest odcinkiem, odpowiadającym, przy rozważanej jednostce długości, przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernych. Istotnie, oznaczmy przez a_1 jakąkolwiek

liczbę zbioru (A_1) i wyznaczmy na promieniu (p) punkt A_1 z warunku, żeby miarą odcinka $\overline{OA_1}$ była liczba a_1 . Z definicji zbioru (K_1) wynika, że punkt A_1 do tego zbioru należeć będzie, ponieważ zaś zbiór punktów (K_1) jest zbiorem punktów pierwszej kategorii w stosunku do przekroju $(\mathfrak{R})$, przeto mieć będziemy

$$(1) \quad \overline{OA} \geq \overline{OA_1}.$$

Z drugiej zaś strony, jeżeli oznaczymy przez a_2 jakąkolwiek liczbę zbioru (A_2) i wyznaczmy na promieniu (p) , jak poprzednio, punkt A_2 z warunku, żeby liczba a_2 była miarą odcinka $\overline{OA_2}$, to punkt A_2 należeć będzie, jak już poprzednio mieliśmy sposobność stwierdzić, do kategorii (K_2) czyli do drugiej kategorii punktów promienia (p) w stosunku do przekroju $(\mathfrak{R})$. Mamy więc

$$(2) \quad \overline{OA} \leq \overline{OA_2}.$$

Ponieważ więc, bez względu na wybór liczby a_1 w zbiorze (A_1) i liczby a_2 w zbiorze (A_2) , związki (1) i (2) będą zawsze spełnione, przeto odcinek $\overline{OA}$ rzeczywiście odpowiada przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernych, przy rozważanej jednostce długości. Zatem, udowodniliśmy pierwszą część twierdzenia.

Dowód drugiej części jest natychmiastowy: ponieważ odcinek d odpowiada przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernych, przeto, przy powyższym znaczeniu symbolów A_1 i A_2 mieć będziemy

$$\overline{OA_1} \leq d \leq \overline{OA_2},$$

ponieważ zaś

$$d' = d,$$

przeto mieć będziemy także

$$\overline{OA_1} \leq d' \leq \overline{OA_2},$$

skoro tylko liczba a_1 należy do zbioru (A_1) , a liczba a_2 — do zbioru (A_2) . Zatem odcinek d' , zgodnie z brzmieniem drugiej części twierdzenia, odpowiada przekrojowi (P) zbioru liczb wymiernych po przyjęciu odcinka u za jednostkę długości.

Żeby uzasadnić trzecią część twierdzenia, załóżmy, że wbrew jej brzmieniu każdy z pewnych nierównych dwóch odcinków d i d' odpowiada przekrojowi (P) liczb wymiernych przy rozważanej jednostce długości. W takim razie mamy albo

$$(3) \quad d < d',$$

albo

$$(4) \quad d > d'$$

W pierwszym przypadku (§ 78, Tw. II) znajdzie się liczba wymierna l , która będzie miarą pewnego odcinka b , spełniającego nierówności

$$(5) \quad d < b$$

i

$$(6) \quad b < d'$$

Z nierówności (5) wynika, że liczba l należy do zbioru (A_2) , a z nierówności (6), że należy do zbioru (A_1) . Ponieważ zaś zbiory (A_1) i (A_2) nie mają żadnego wspólnego elementu, przeto istnienie nierówności (3) jest wykluczone. Ale przypadek, w którymby zachodziła nierówność (4) sprowadzony być może do przypadku, kiedy zachodzi nierówność (3) przez prostą zmianę oznaczeń, polegającą na tem, żeby przez d' oznaczyć odcinek d , a przez d — odcinek d' , przeto istnienie nierówności (4) jest także wykluczone. Zatem zgodnie z brzmieniem twierdzenia zachodzi równość

$$d = d',$$

a to tylko pozostawało jeszcze do wykazania.

Uwaga. Powyższe twierdzenie i jego dowód zachowują swą ważność zarówno dla przekrojów pierwszego, jak i dla przekrojów drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych.

§ 82. **Def. I.** Nazwa liczba *niewymierna (bezwzględna)* oznacza każdy symbol, określający pewien przekrój *drugiego* gatunku zbioru liczb wymiernych (bezwzględnych). Żeby wyrazić, iż pewien przekrój (P) zbioru liczb wymiernych jest właśnie tym, który określony jest przez pewną liczbę niewymierną φ , orzekamy, że liczba φ *położona* jest na przekroju (P).

Def. II. Liczby wymierne bezwzględne i liczby niewymierne bezwzględne obejmujemy wspólną nazwą liczb *bezwzględnych*.

Def. III. Orzeczenie, iż, po przyjęciu oznaczonego odcinka właściwego u za jednostkę, pewna liczba niewymierna φ jest *miarą* oznaczonego odcinka a wyraża, że, po przyjęciu odcinka u za jednostkę, odcinek a (§ 81, Def. I) odpowiada przekrojowi drugiego gatunku zbioru liczb wymiernych, określonego przez symbol φ .

Tw. I. Po oznaczeniu jednostki długości, istnieć będzie odcinek, którego miarą jest dowolnie oznaczona liczba bezwzględna φ ; ten odcinek będzie oznaczony tylko pod względem długości, ale pod tym względem będzie oznaczony w zupełności.

Twierdzenie to w razie, kiedy φ jest liczbą niewymierną, wynika bezpośrednio z Tw. I § 81-go i z Def. I i III niniejszego paragrafu; jeżeli zaś φ jest liczbą wymierną, to ono staje się jednym z twierdzeń teorii liczb wymiernych.

Tw. II. Po oznaczeniu jednostki długości, odpowiada

każdemu odcinkowi jedna przynajmniej liczba bezwzględna, będąca jego miarą.

Istotnie, jeżeli dany odcinek jest współmierny z jednostką, to wiemy z rozdziału I-go, że istnieje liczba wymierna bezwzględna, która jest jego miarą. Jeżeli zaś rozważany odcinek a jest niewspółmierny z jednostką, to zbiór liczb wymiernych możemy podzielić na dwie kategorie (A_1) i (A_2) w sposób określony na początku § 78-go. Z twierdzeń zaś podanych pod (A), (B), (C), (D) w § 78-ym i z Def. I i II § 79-go wynika, że rzeczony podział zbioru liczb wymiernych na kategorie (A_1) i (A_2) stanowi przekrój (P) drugiego gatunku rzeczoności zbioru. Na podstawie zaś Def. I i III paragrafu niniejszego, liczba niewymierna, położona na przekroju (P), będzie właśnie miarą odcinka a przy rozważanej jednostce długości. Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Z powyższych twierdzeń wynika, że liczby bezwzględne dostarczają nam ogólne rozwiązanie problemu mierzenia odcinków prostoliniowych.

§ 83. Z natury rzeczy powstaje myśl o nadaniu zbiorowi liczb bezwzględnych charakteru wielkości w znaczeniu ściślejszym przez proste rozszerzenie do zbioru liczb bezwzględnych reguł, które przyjęte zostały (§ 47, Def. I) na porównywanie ilościowe liczb wymiernych. Stąd definicya następująca.

Def. I. Żeby wykonać porównanie ilościowe dwóch oznaczonych liczb bezwzględnych

$$\varphi \text{ i } \psi,$$

przyjmujemy za jednostkę długości jakikolwiek odcinek właściwy u , oznaczwszy przez

$$a \text{ i } b$$

odcinki, których miarami, przy rozważanej jednostce długości, byłyby odpowiednio liczby φ i ψ , orzekamy, iż mamy

$$\varphi < \psi, \quad \varphi = \psi \text{ albo } \varphi > \psi$$

zależnie od tego, czy odcinki a i b spełniają związek

$$a < b,$$

związek

$$a = b,$$

czy też związek

$$a > b.$$

W odniesieniu do liczb bezwzględnych, będących liczbami wymiernymi, powyższa definicya nie różni się od definicyi przyjętej w § 47. Zatem, istnienie sprzeczności pomiędzy tą definicyą a definicyą, określającą reguły porówny-

wania ilościowego liczb wymiernych, jest wykluczona. Z tego wynika, że, celem wykazania poprawności rozważanej definicji, należy tylko udowodnić, że ona nie uchybia ogólnym zasadom, wyłożonym w rozdziale III-cim części pierwszej tego dzieła. W tym celu należy oczywiście najpierw wykazać, że wynik porównywania ilościowego dwóch oznaczonych liczb bezwzględnych jest niezależny od wyboru odcinka właściwego, przyjętego za jednostkę; do tego właśnie zmierzają cztery pierwsze twierdzenia, podane niżej.

Tw. I. Jeżeli z dwóch liczb bezwzględnych jedna, w , jest liczbą wymierną, a druga, φ , — liczbą niewymierną, to te dwie liczby w żadnym razie nie są równe pomiędzy sobą i spełniają nierówność

$$(1) \quad w < \varphi$$

lub

$$(2) \quad w > \varphi$$

zależnie od tego, czy liczba w jest liczbą wymierną pierwszej czy drugiej kategorii w stosunku do przekroju zbioru liczb wymiernych, na którym położona jest liczba niewymierna φ .

Istotnie, oznaczmy odpowiednio przez (A_1) i (A_2) zbiory liczb wymiernych pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do przekroju (P) zbioru liczb wymiernych, na którym jest położona (§ 82, Def. I) liczba niewymierna φ , i załóżmy najpierw, że liczba w należy do zbioru (A_1) . Ponieważ przekrój (P) jest drugiego gatunku (§ 79, Def. II), ponieważ więc w zbiorze (A_1) nie ma liczby największej, przeto istnieć będzie w zbiorze (A_1) taka liczba wymierna w_1 , która spełniać będzie nierówność

$$(1) \quad w < w_1.$$

Jeżeli tedy przyjmiemy za jednostkę jakiegokolwiek odcinek właściwy u i oznaczmy przez

$$a, a_1 \text{ i } b$$

odcinki, których miarami byłyby w takim razie odpowiednie liczby

$$w, w_1 \text{ i } \varphi,$$

to, ze względu na (1), mieć będziemy

$$(2) \quad a < a_1,$$

a z drugiej strony (§ 82, Def. III) zachodzić będzie związek

$$(3) \quad a_1 \leq b.$$

Ze związków (2) i (3) mamy

$$a < b,$$

skąd (Def. I)

$$(4) \quad w < \varphi.$$

Dowiedliśmy więc, co następuje:

(A) Jeżeli liczba wymierna w należy do zbioru (A_1) , to ona w każdym razie spełnia nierówność (4).

Żałujemy teraz, że liczba w należy do zbioru (A_2) . Ponieważ przekrój (P) jest drugiego gatunku, ponieważ więc (§ 79, Def. II) w zbiorze (A_2) nie ma liczby najmniejszej, przeto w zbiorze tym znajdzie się liczba wymierna w_2 , spełniająca nierówność

$$(5) \quad w_2 < w.$$

Przyjmijmy za jednostkę długości jakikolwiek odcinek właściwy u i oznaczmy przez

$$b, a_2 \text{ i } a$$

odcinki, których miarami są odpowiednie liczby

$$\varphi, w_2 \text{ i } w.$$

Z jednej strony (§ 82, Def. III) mieć będziemy

$$(6) \quad b \leq a_2,$$

a z drugiej, że względu na (5), zachodzić będzie nierówność

$$(7) \quad a_2 < a.$$

Ze związków (6) i (7) mamy:

$$b < a,$$

skąd (Def. I)

$$(8) \quad \varphi < w.$$

Uzasadniliśmy więc, co następuje:

(B) Jeżeli pewna liczba wymierna w należy do zbioru (A_2) , to ona spełnia nierówność (8).

Ponieważ (§ 79, Def. I) każda liczba wymierna należy do któregoś jednego ze zbiorów (A_1) lub (A_2) , przeto z wyników, podanych pod (A) i (B), wnosimy, że twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Tw. II. Żeby dane liczby niewymierne

$$\varphi \text{ i } \psi$$

spełniały nierówność

$$(1) \quad \varphi < \psi,$$

potrzeba i wystarcza, żeby istniała liczba wymierna w , nale-

żąca w stosunku do przekroju zbioru liczb wymiernych (P), na którym położona jest liczba φ , do drugiej kategorii liczb wymiernych, a w stosunku do przekroju (Q), na którym położona jest liczba ψ — do pierwszej kategorii.

Istotnie, załóżmy najpierw, że zachodzi nierówność (1). W takim razie, przynajmniej po stosownym wyborze odcinka właściwego u , przedstawiającego jednostkę długości, odcinki a i b , których miarami byłyby liczby φ i ψ , spełniać (Def. I) będą nierówność

$$(2) \quad a < b.$$

Do odcinków u , a i b zawsze można będzie dobrać (§ 78, Tw. II) taką liczbę wymierną w , żeby odcinek c , którego miarą, przy rozważanej jednostce, byłaby liczba w , spełniał nierówności

$$a < c < b.$$

Zatem (Def. I), przynajmniej przy zachowaniu odcinka u , jako jednostkę długości, mieć będziemy

$$\varphi < w < \psi.$$

Z tego zaś wynika, na podstawie Tw. I, że liczba w jest liczbą wymierną drugiej kategorii w stosunku do przekroju (P), a pierwszej — w stosunku do przekroju (Q). Zatem, warunek, podany w twierdzeniu, jest konieczny. Powiadam, że warunek ten wystarcza. Istotnie, załóżmy, że on jest spełniony i, przyjmąwszy za jednostkę długości jakikolwiek odcinek właściwy u' , uważajmy odcinki

$$a', b' \text{ i } c',$$

których miarami byłyby odpowiednie liczby φ , ψ i liczba wymierna w , należąca do drugiej kategorii w stosunku do przekroju (P), a do pierwszej — w stosunku do przekroju (Q). Ze względu na Tw. I mieć będziemy

$$a' < c' < b',$$

skąd

$$a' < b'.$$

Z tej zaś nierówności wynika, że nierówność (1) niezawodnie będzie spełniona. Zatem, warunek, podany w twierdzeniu, nie tylko jest koniecznym, ale i wystarczającym warunkiem istnienia związku (1), a to tylko pozostawało jeszcze do wykazania.

Tw. III. Jeżeli oznaczymy przez φ dowolnie oznaczoną liczbę niewymierną, to warunek konieczny i wystarczający, aby oznaczona liczba bezwzględna ψ spełniała równość

$$(1) \quad \psi = \varphi,$$

polega na tém, żeby liczba bezwzględna ψ była liczbą niewymierną, położoną na tym samym przekroju zbioru liczb wymiernych, co liczba φ .

Z Def. III § 82-go i Def. II §-fu niniejszego wnosimy z łatwością, że warunek, podany w twierdzeniu jest wystarczający. Zatem mamy tylko do wykazania, że warunek ten jest konieczny. Założmy w tym celu, że liczba ψ spełnia równość (1). Ze względu na Tw. I, wykluczonem jest, żeby liczba ψ była liczbą wymierną. Zatem, liczba ta jest liczbą niewymierną. Oznaczmy teraz przez w jakąkolwiek liczbę wymierną, a przez (P) i (Q) te przekroje zbioru liczb wymiernych, na których położone są odpowiednio liczby φ i ψ . Jeżeli liczba w jest pierwszej kategorii w stosunku do jednego z przekrojów (P) i (Q), to liczba ta jest i w stosunku do drugiego liczbą wymierną pierwszej kategorii gdyż, w przeciwnym razie, ze względu na Tw. II, równość (1) nie mogłaby zachodzić przy żadnym wyborze jednostki długości. Analogicznie stwierdzamy, że gdyby liczba w była liczbą wymierną drugiej kategorii w stosunku do jednego z przekrojów (P) lub (Q), to byłaby także liczbą wymierną drugiej kategorii i w stosunku do drugiego z tych przekrojów. Ostatecznie więc przekroje (P) i (Q) zlewają się ze sobą, a o to tylko chodziło.

Wniosek I. Jeżeli pewna liczba niewymierna φ jest miarą pewnego odcinka a w razie przyjęcia pewnego odcinka właściwego u za jednostkę, to odcinki a i u są niewspółmierne, gdyż w przeciwnym razie, wbrew powyższemu twierdzeniu, istniałaby liczba wymierna, równa liczbie niewymiernej φ , a mianowicie liczba wymierna, będąca miarą odcinka a w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę.

Tw. IV. Wynik porównywania ilościowego dwóch liczb bezwzględnych, w sposób, określony przez Def. I, jest niezależny od wyboru jednostki długości.

Istotnie, jeżeli obie liczby bezwzględne, ulegające porównywaniu ilościowemu, są wymierne, to wybór jednostki długości pozostanie bez wpływu na wynik na podstawie (§ 47, Tw. I, Wniosek) teorii liczb wymiernych. Jeżeli zaś jedna przynajmniej z rozważanych dwóch liczb bezwzględnych φ i ψ jest niewymierna, to i w takim razie wybór jednostki długości będzie obojętny, albowiem twierdzenia I, II i III dostarczają nam na istnienie każdego ze związków

$$\varphi < \psi, \varphi = \psi \text{ albo } \varphi > \psi$$

kryteria niezależne od wyboru jednostki długości,

Tw. V. Definicja I nie uchybia zasadom, wyłożonym w rozdziale III-cim pierwszej części.

Czytelnik z łatwością sam rozwinie dowód powyższego twierdzenia, przyjmując za wzór dowód twierdzenia analogicznego, odnoszącego się do liczb wymiernych, a podanego w już § 47-tym.

Dowód rozważanego twierdzenia możnaby także wysnuć z twierdzeń I, II i III niniejszego paragrafu i Tw. I § 47-go, nie odwołując się już w niczem do związku pomiędzy odcinkami a liczbami bezwzględными, będącymi ich miarami. Gorąco polecamy czytelnikowi, jako bardzo pouczające ćwiczenie, detailed wypracowanie takiego dowodu omawianego twierdzenia.

§ 84. Ze względu na dalsze zastosowania podajemy tu twierdzenia, w których zestawione są, z pewnemi uzupełnieniami, niektóre z wyników uzyskanych już poprzednio.

Tw. I. Po oznaczeniu jednostki długości, liczba bezwzględna i odcinek, którego ona jest miarą, są dwie wielkości tak ze sobą związane, iż wartość którejkolwiek z nich określa w zupełności wartość, ale tylko wartość drugiej; innemi słowy, po oznaczeniu jednostki długości, zachodzą okoliczności następujące:

1° Zawsze istnieje odcinek, którego miarą jest dowolnie naprzód oznaczona liczba bezwzględna;

2° zawsze istnieje liczba bezwzględna, będąca miarą dowolnie danego odcinka;

3° jeżeli dwa odcinki są równe pomiędzy sobą, to liczby bezwzględne, będące ich miarami, są także równe pomiędzy sobą;

4° jeżeli dwie dane liczby bezwzględne są równe pomiędzy sobą, to odcinki, których miarami one są, są także równe pomiędzy sobą;

5° jeżeli pewna liczba bezwzględna φ jest miarą oznaczonego odcinka a , to ona jest miarą każdego odcinka równego odcinkowi a ;

6° jeżeli pewna liczba bezwzględna φ jest miarą oznaczonego odcinka a , to każda liczba bezwzględna ψ , równa liczbie φ , jest także miarą odcinka a .

Istotnie, dwie pierwsze części tego twierdzenia stanowią powtórzenie twierdzeń I i II § 82-go. Część trzecia twierdzenia wynika bezpośrednio z Def. I § 83-go. Żeby uzasadnić część czwartą, oznaczmy przez φ i ψ jakiekolwiek dwie liczby bezwzględne i załóżmy, że zachodzi równość

$$(1) \quad \varphi = \psi.$$

Na podstawie Def. I, § 83-go z równości (1) wynika, że, przynajmniej przy stosownym wyborze jednostki długości odcinki, których miarami będą odpowiednio liczby φ i ψ , będą równe pomiędzy sobą. Ponieważ zaś istnienie równości (1) jest (§ 83, Tw. IV) nie zależne od wyboru jednostki długości, przeto, jakkolwiek odcinek właściwy przyjęlibyśmy za jednostkę, równość (1)

zgodnie z brzmieniem czwartej części niniejszego twierdzenia, rzeczywiście pociągać będzie za sobą równość tych odcinków, których miarami będą odpowiednio rozważane dwie liczby bezwzględne. Część piąta twierdzenia wynika bezpośrednio z Def. III, § 82-go i definicji analogicznej w teorii liczb wymiernych.

Żeby uzasadnić część szóstą, zważmy, że (część 1-sza) w każdym razie istnieć będzie pewien odcinek b , którego miarą będzie liczba ψ . Zatem (część 4-ta) mieć będziemy

$$a = b,$$

a z tego wynika (część 5-ta), że liczba ψ , jako będąca miarą odcinka b , równego odcinkowi a , jest, zgodnie z brzmieniem szóstej części twierdzenia, rzeczywiście miarą odcinka a .

Ostatecznie uzasadniliśmy nasze twierdzenia w zupełności.

Tw. II. Jakikolwiek odcinek właściwy u przyjęlibyśmy za jednostkę, liczba bezwzględna, będąca miarą odcinka niewłaściwego μ , jest równa zero, a każdy odcinek, którego miarą jest liczba bezwzględna, równa zero, jest odcinkiem niewłaściwym.

Istotnie, oznaczmy przez a odcinek, którego miarą, przy rozważanej jednostce u , jest pewna liczba bezwzględna φ . Z teorii liczb wymiernych wiemy, że liczba 0 będzie miarą odcinka μ . Z drugiej strony, z Def. I, Tw. IV, § 83 wynika, że równości

$$(1) \quad a = \mu$$

$$(2) \quad \varphi = 0$$

są równoważne pomiędzy sobą bez względu na wybór jednostki długości u . Ponieważ zaś nadto równość (1) równoważna jest orzeczeniu, że odcinek a jest odcinkiem niewłaściwym, przeto to orzeczenie równoważne jest równości (2), a na tem właśnie polega treść naszego twierdzenia.

Tw. III. Każda liczba bezwzględna φ spełnia związek

$$(1) \quad \varphi \geq 0.$$

Istotnie, jakikolwiek odcinek właściwy u przyjęlibyśmy za jednostkę, zawsze istnieć będzie odcinek a , którego miarą będzie liczba φ . Z drugiej strony, odcinek, którego miarą jest liczba 0 , jest odcinkiem niewłaściwym

$$\mu.$$

Ponieważ zaś mamy w każdym razie

$$a \geq \mu,$$

przeto (§ 83, Def. I) związek (1) będzie w każdym razie rzeczywiście spełniony

§ 85. Przerywając chwilowo wykład ogólnej teorii liczb bezwzględnych, zamierzamy wykazać, że, jak zaznaczyliśmy w § 77-mym, istnienie odcinków niewspółmiernych pomiędzy sobą może być udowodnione, nie odwołując się do żadnych innych postulatów geometrii, prócz tych, któreśmy przyjęli w rozdziale IV-tym pierwszej części za podstawę teorii odcinków. Otóż, Tw. IV § 80-go zostało uzasadnione niezależnie od twierdzenia o istnieniu odcinków niewspółmiernych. Z tego zaś wynika (§ 82, Def. I) fakt istnienia liczb niewymiernych, bez względu na to, czy odcinki niewspółmierne istnieją. Uważajmy tedy jakkolwiek liczbę niewymierną φ , np. liczbę, którą, ze względu na to, że liczba 2 nie jest kwadratem zupełnym, możemy określić (§ 80, Tw. III) jako położoną na przekroju zbioru liczb wymiernych, w stosunku do którego pierwsza kategoria liczb wymiernych utworzona jest z tych pośród nich, których kwadraty są mniejsze od liczby 2, a druga — ze wszystkich pozostałych. Dowolnie danemu odcinkowi właściwemu u odpowiadać będzie (§ 82, Tw. I) pewien odcinek a , którego miarą będzie liczba φ . Otóż (§ 83, Tw. III, Wniosek I) odcinki u i a będą niewspółmierne pomiędzy sobą.

Wykazaliśmy zatem istnienie odcinków niewspółmiernych bez pomocy żadnego postulatu geometrii, prócz tych, któreśmy przyjęli w rozdziale IV-tym 1-szej części.

§ 86. Żeby módz dalej rozwijać teorię liczb bezwzględnych, koniecznem jest żebyśmy należycie sprecyzowali znaczenie orzeczenia, iż »pewna liczba bezwzględna jest *znana*«. Skoro treść tego orzeczenia zostanie dokładnie określona, to określone już będzie znaczenie każdego z wyrażeń następujących: *liczba bezwzględna dana i wyznaczyć pewną liczbę bezwzględną*, gdyż pierwsze z tych wyreżeń oznacza liczbę, o której wiemy, co potrzeba, żeby nam była *znana*, a drugie — czynność, polegającą na zdobyciu o pewnej liczbie dostatecznych wiadomości, aby się ona stała nam *znana*.

Żeby podać definicyę wyrażenia »liczba bezwzględna *znana*«, uzasadnimy najpierw niektóre twierdzenia.

Tw. I. Jeżeli pewne dane liczby bezwzględne φ i ψ spełniają nierówność

$$(1) \quad \varphi < \psi,$$

to zawsze istnieje pewna liczba wymierna w , spełniająca nierówność

$$(2) \quad \varphi < w < \psi.$$

Istotnie, dowolnie przyjętemu odcinkowi właściwemu u odpowiadać będą (§ 84, Tw. I) dwa odcinki a i b , których miarami, po przyjęciu odcinka u za

jednostkę, będą odpowiednio liczby φ i ψ . Ze względu na (1) (§ 83, Def. I) mieć będziemy

$$a < b.$$

Zatem istnieć będzie (§ 78, Tw. II) liczba wymierna w , która będzie miarą pewnego odcinka c , spełniającego nierówności

$$a < c < b.$$

Z tego wynika (§ 83, Def. I), że liczba wymierna w spełniać będzie nierówności (2). Zatem twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. II. Jeżeli oznaczymy przez φ jakąkolwiek liczbę bezwzględną, a przez ε jakąkolwiek, byle od zera większą, liczbę wymierną, to zawsze znajdą się dwie liczby wymierne w_1 i w_2 , ($w_1 < w_2$) spełniające związek

$$(1) \quad w_2 - w_1 < \varepsilon$$

oraz każdy ze związków

$$(2) \quad w_1 \leq \varphi$$

i

$$(3) \quad w_2 > \varphi,$$

a w przypadku, kiedy zachodzi nierówność

$$(4) \quad \varphi > 0,$$

istnieć będzie taki układ wartości na liczby wymierne w_1 , w_2 , żeby prócz związków (1) i (3) zachodził jeszcze związek

$$(5) \quad w_1 < \varphi.$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zwróćmy się najpierw do przypadku kiedy liczba φ jest liczbą wymierną. Jeżeli tedy zachodzi równość

$$\varphi = 0,$$

to, aby spełnić warunki (1), (2) i (3), wystarczy przyjąć

$$w_1 = 0,$$

i, co ze względu na twierdzenie I jest zawsze możliwe, wyznaczyć liczbę wymierną w_2 tak, żebyśmy mieli

$$0 < w_2 < \varepsilon.$$

Jeżeli zaś liczba φ jest liczbą wymierną większą od zera, to uczynimy zadość warunkom (1), (3) i (5) (a więc i warunkowi (2)), jeżeli np. wyznaczmy liczby wymierne w_2 i w_2 ze wzorów następujących:

$$w_1 = \varphi - \frac{1}{8} \cdot \eta,$$

$$w_2 = \varphi + \frac{1}{8} \cdot \eta,$$

gdzie oznaczyliśmy przez η liczbę wymierną, która równa się liczbie ε lub samej liczbie φ zależnie od tego, czy mamy

$$\varepsilon < \varphi,$$

czy też

$$\varepsilon \geq \varphi.$$

Pozostaje więc do rozważenia przypadek, kiedy liczba φ jest liczbą niewymierną. W takim razie zachodzi niezawodnie związek (4) i, żeby uzasadnić słuszność twierdzenia w tym przypadku, dość będzie udowodnić, że istnieje taki układ wartości na liczby wymierne w_1 i w_2 , przy którym one sprawdzają każdy ze związków (1), (3) i (5). Oznaczmy przez η jakąkolwiek liczbę wymierną, spełniającą nierówności

$$0 < \eta < \varepsilon.$$

Ze względu na tw. I liczba η będzie niezawodnie istnieć. Jeżeli tedy oznaczmy przez a_2 jakąkolwiek liczbę wymierną drugiej kategorii w stosunku do przekroju, na którym położona jest liczba φ , to mieć będziemy

$$(6) \quad a_2 > \varphi;$$

ponieważ zaś zawsze znajdzie się taka liczba całkowita n , żebyśmy mieli

$$n \cdot \eta \geq a_2,$$

a więc, ze względu na (6), taka, żeby zachodziła nierówność

$$n \cdot \eta > \varphi,$$

ponieważ z drugiej strony mamy

$$0 \cdot \eta < \varphi,$$

przeto znajdzie się pewna liczba całkowita p ($0 \leq p < n$) taka, żebyśmy mieli

$$p \cdot \eta < \varphi$$

oraz

$$(p + 1) \cdot \eta > \varphi.$$

Zatem, dość będzie przyjąć

$$w_1 = p \cdot \eta \quad \text{oraz} \quad w_2 = (p + 1) \cdot \eta,$$

żeby liczby w_1 i w_2 były liczbami wymiernymi, spełniającymi związki (1), (3) i (5). Ostatecznie więc, twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Tw. III. Jeżeli żaden z jakichś dwóch (skończonych lub nieskończonych) zbiorów liczb wymiernych (A_1) i A_2 nie jest pusty, a żadna liczba zbioru (A_1) nie jest większa od którejkolwiek liczby zbioru (A_2), to w takim razie istnieje jedna przynajmniej liczba bezwzględna x , która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby zbioru (A_1), ani większa od żadnej liczby zbioru (A_2).

Istotnie, jeżeli zbiór (A_1) obejmuje tylko liczby równe zeru (albo jedną tylko liczbę, ale równą zeru), to wystarczy przyjąć

$$x = 0,$$

żeby liczba x spełniała warunki twierdzenia. Zatem, w tym przypadku (bardzo szczególnym) twierdzenie zachodzi. Pozostaje więc do zbadania przypadek, kiedy zbiór (A_1) obejmuje jedną przynajmniej liczbę od zera większą. Podzielmy tedy zbiór wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy (K_1) i (K_2), zaliczając do klasy (K_1) każdą liczbę wymierną, która nie jest większa od jednej przynajmniej z liczb zbioru (A_1), a do klasy (K_2) — wszystkie inne liczby wymierne. Klasa liczb (K_1) nie jest pusta, gdyż obejmuje każdą liczbę nie pustego zbioru (A_1). Klasa (K_2) także nie jest pusta; istotnie, ponieważ zbiór (A_2), według założeń twierdzenia, nie jest pusty, przeto znajdzie się w nim jedna przynajmniej liczba l ; ta liczba do klasy (K_2) może nie należeć¹⁾, ale każda liczba wymierna a_2 , większa od l , (a takich liczb jest nieskończenie wiele) należeć będzie do klasy (K_2), gdyby bowiem liczba a_2 należała do klasy (K_1), to w zbiorze (A_1) istniałaby pewna liczba a_1 , taka, że mielibyśmy

$$a_2 \leq a_1,$$

a ponieważ

$$l < a_2,$$

przeto byłoby

$$l < a_1$$

i, wbrew założeniom twierdzenia, istniałaby w zbiorze (A_2) pewna liczba l , mniejsza od pewnej liczby a_1 zbioru (A_1). Powiadam teraz, że każda liczba a_1 klasy (K_1) jest mniejsza od każdej liczby a klasy (K_2). Istotnie, z definicji klasy (K_1) wynika, że każda liczba, równa pewnej liczbie tej klasy, albo mniejsza od niej, sama należy do klasy (K_1). Ponieważ zaś klasę (K_2) określiliśmy jako zbiór liczb, nie należących do klasy (K_1), przeto związek

$$a_1 \geq a_2$$

¹⁾ Istotnie, nie wykluczaliśmy przypadku, w którymby pewna liczba zbioru (A_2) równała się pewnej liczbie zbioru (A_1), a gdyby liczba l ten właśnie warunek spełniała, to nie należałaby do zbioru (K_2).

jest wykluczony. Zatem mamy rzeczywiście

$$a_1 < a_2.$$

Z tego, cośmy o klasach liczb (K_1) i (K_2) stwierdzili, wynika, że one stanowią odpowiednio pierwszą i drugą kategorię liczb wymiernych w stosunku do pewnego przekroju (P) tychże. W każdym razie istnieć będzie pewna liczba a , położona (§ 79, Def. II i § 82, Def. I) na przekroju (P) ; liczba a będzie wymierna zależnie od tego, czy przekrój (P) będzie pierwszego czy drugiego gatunku, ale w każdym razie (§ 79, Def. II, § 83, Tw. I) liczba a nie będzie ani mniejsza od żadnej liczby zbioru (K_1) ani większa od żadnej liczby zbioru (K_2) . Ponieważ zaś, na podstawie definicji klasy (K_1) , każda liczba zbioru (A_1) należy do klasy (K_1) , przeto liczba a nie jest mniejsza od żadnej liczby zbioru (A_1) . Powiadam, że liczba a nie jest większa od żadnej liczby l zbioru (A_2) . Żeby się o tem przekonać, założmy, że, wbrew temu zdaniu, mamy

$$(1) \quad l < a$$

W każdym razie (Tw. I) znajdzie się pewna liczba wymierna l' , spełniająca nierówność

$$(2) \quad l' < a$$

oraz

$$(3) \quad l < l'.$$

Z nierówności (2) wynika, że liczba l' należy do klasy (K_1) , a z tego znów wynika, że w zbiorze (A_1) istnieje pewna liczba a_1 , spełniająca związek

$$l' \leq a_1.$$

Z tego zaś związku i nierówności (3) mamy

$$l < a_1;$$

zatem, wbrew założeniom twierdzenia, pewna liczba l zbioru (A_2) byłaby mniejsza od pewnej liczby a_1 zbioru (A_1) . Zatem, w rzeczywistości liczba l nie może spełniać związku (1), a z tego wynika, że mamy

$$l \geq a.$$

Zatem, liczba a nie tylko, jak stwierdziliśmy wyżej, nie jest mniejsza od żadnej liczby zbioru (A_1) , ale i nie jest większa od żadnej liczby zbioru (A_2) . Przeto, wystarczy przyjąć

$$x = a,$$

żeby liczba x spełniała warunki twierdzenia. Zatem, twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Uwaga. Nie jest rzeczą wykluczoną, że może istnieć więcej niż jedna wartość na x , przy której ta liczba spełniałaby warunki twierdzenia: gdybyśmy np. oznaczyli przez (A_1) zbiór liczb wymiernych mniejszych od liczby 1, a przez (A_2) zbiór liczb wymiernych większych od 2, to każda liczba x , spełniająca związki

$$1 \leq x \leq 2,$$

nie byłaby ani mniejszą od żadnej liczby zbioru (A_1) , ani większą od żadnej liczby zbioru (A_2) .

Tw. IV. Jeżeli dwa zbiory liczb wymiernych (A_1) i (A_2) nie tylko spełniają założenia Tw. III, ale jeszcze i ten warunek, żeby każdej, byle od zera większej, liczbie wymiernej ε odpowiadała przynajmniej jedna para liczb wymiernych a_1 i a_2 , należących odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2) i takich, żebyśmy mieli

$$(1) \quad a_2 - a_1 < \varepsilon,$$

to w takim razie istnieje dokładnie jednej wartości liczba bezwzględna a , która nie jest ani mniejsza od żadnej liczby zbioru (A_1) , ani większa od żadnej liczby zbioru (A_2) .

Ponieważ, ze względu na Tw. III, pewne jest istnienie liczby a , nie mniejszej od żadnej liczby zbioru (A_1) , a nie większej od żadnej liczby zbioru (A_2) , ponieważ nadto każda liczba, równa liczbie a , spełniającej te warunki, sama rzeczone warunki spełnia, przeto chodzi tylko o wykazanie, że dwie nierówne pomiędzy sobą liczby l_1 i l_2 ($l_1 < l_2$) nie mogą obie rozważanych warunków spełniać. Załóżmy jednak, że obie liczby l_1 i l_2 spełniają rzeczone warunki.

Na podstawie Tw. I znajdzie się liczba wymierna w_1 , spełniająca nierówności

$$(3) \quad l_1 < w_1 < l_2,$$

a następnie liczba w_2 , spełniająca nierówności

$$(4) \quad w_1 < w_2 < l_2.$$

Oznaczmy przez a_1 którąkolwiek z liczb zbioru (A_1) , a przez a_2 którąkolwiek z liczb zbioru (A_2) . Na podstawie założeń, przyjętych co do liczb l_1 i l_2 , mamy

$$a_1 \leq l_1 \quad \text{oraz} \quad l_2 \leq a_2.$$

Z tych zaś nierówności i nierówności (3) i (4) mamy

$$a_1 < w_1 \quad \text{oraz} \quad w_2 < a_2;$$

ponieważ zaś na podstawie jednej z nierówności (4) mamy

$$(5) \quad w_1 < w_2,$$

przeto

$$(6) \quad a_2 - a_2 > w_2 - w_1.$$

Uzyskaliśmy więc wynik następujący: jeżeli liczby l_1 i l_2 czynią żadość wyżej przyjętemu założeniu, to każda para liczb a_1 i a_2 , należących odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2) , spełnia nierówność (6). Zatem żadna para liczb a_1 i a_2 , należących odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2) , nie może spełniać nierówności (1) przy wartości

$$\varepsilon = w_2 - w_1$$

na ε . Ale ze względu na nierówność (5), wynik ten jest niezgodny z założeniami twierdzenia. Zatem, dwie nierówne pomiędzy sobą liczby l_1 i l_2 , a przytem takie, żeby żadna z nich nie była, ani mniejsza od jednej z liczb zbioru (A_1) , ani większa od jednej z liczb zbioru (A_2) , istnieć nie mogą, a to tylko pozostawało do udowodnienia.

Def. I. Jeżeli dwa zbiory liczb wymiernych (A_1) i (A_2) czynią żadość założeniom tw. IV, to zespół tych zbiorów zowiemy *określnikiem*; przytem, zbiór (A_1) zowiemy *pierwszą*, a zbiór (A_2) *drugą częścią* określnika; żeby wyrazić, iż pewna liczba bezwzględna a nie jest ani mniejsza od żadnej liczby zbioru (A_1) , ani większa od żadnej liczby zbioru (A_2) , mówimy, że określnik, utworzony przez zespół zbiorów (A_1) i (A_2) , jest określnikiem liczby a albo, że ta liczba *posiada* rozważany określnik.

Tw. V. Każda liczba bezwzględna φ posiada przynajmniej jeden określnik.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, wystarczy zauważyć, że, ze względu na Def. I i na Tw. II zbiór wszystkich liczb wymiernych, nie większych od liczby φ , i zbiór, wszystkich liczb wymiernych, nie mniejszych od tej liczby, stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika liczby φ .

Uwaga I. Jeżeli pewna liczba bezwzględna φ jest liczbą wymierną, to wystarczy oznaczyć przez (A_1) i (A_2) dwa zbiory liczb, z których każdy obejmowałby jedną tylko liczbę, ale liczbę równą liczbie φ , żeby zbiór (A_1) stanowił pierwszą, a zbiór (A_2) — drugą część pewnego określnika liczby φ .

Tw. VI. Każdemu określnikowi odpowiada liczba bezwzględna, której określnikiem jest właśnie ten określnik; jeżeli dwie liczby bezwzględne posiadają wspólny określnik, to

te liczby są równe pomiędzy sobą, a określnik jakiegokolwiek liczby jest określnikiem każdej liczby, równej rozważonej liczbie.

Swierdzenie to wynika bezpośrednio z Def. I i Tw. IV.

Tw. VII. Żeby pewien określnik (Ω) był określnikiem liczby zero, potrzeba i wystarcza, żeby do pierwszej jego części należały tylko liczby równe zeru.

Istotnie, jeżeli określnik (Ω) jest określnikiem liczby zera, to żadna liczba pierwszej jego części nie może być większa od zera i z tego powodu (§ 84, Tw. III) każda liczba pierwszej części rozważanego określnika jest równa zeru. Zatem, podany warunek jest konieczny. Warunek ten jest wystarczający. Istotnie, jeżeli pierwsza część określnika (Ω) obejmuje tylko liczby równe zeru, to liczba zero nie jest mniejsza od żadnej liczby pierwszej części rozważanego określnika. Ponieważ zaś (§ 84, Tw. III) liczba zero nie jest większą od żadnej liczby bezwzględnej, przeto, w szczególności, liczba zero nie jest większą od żadnej liczby, należącej do drugiej części określnika (Ω). Z tego wynika, że, jeżeli pierwsza część określnika (Ω) obejmuje tylko liczby równe zeru, to ten określnik jest rzeczywiście określnikiem liczby zero. Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Precyzujemy teraz znaczenie wyrażeń, przytoczonych na początku niniejszego paragrafu zapomocą definicyi następujących.

Def. II. Symbolem *specyficznym* liczby całkowitej zwiemy symbol, przedstawiający ją według zwykłych reguł zapomocą znaczków

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Def. III. Symbolem *specyficznym* liczby ułamkowej zwiemy symbol, wynikający z symbolu

$$\frac{m}{p}$$

przez podstawienie w miejsce liter m i p odpowiednio symbolów specyficznych licznika i mianownika.

Def. IV. Orzeczenie, że pewna liczba wymierna jest *znana* albo *dana*, wyraża, iż posiadamy na piśmie albo w pamięci jej symbol specyficzny; wobec tego, *wyznaczeniem* liczby wymiernej jest napisanie jej symbolu specyficznego.

Uwaga. Każdy ze środków, które wrzeczywistości posłużyć mogą do wyznaczenia nieznaney liczby wymiernej, sprowadzić możemy do wykonania skończonej ilości czynności, polegających albo na porównaniu ilościowym dwóch liczb wymiernych,

których symbole specyficzne posiadamy już na piśmie, albo na wykonaniu jednego z działań podstawowych na takich dwóch liczbach.

Def. V. Orzeczenie, że pewien określnik (Ω) jest *arytmetycznie oznaczony* (albo *dany* lub *znany*) wyraża, że potrafimy wyznaczyć dwie liczby wymierne w_1 i w_2 , należące odpowiednio do pierwszej i drugiej części określnika (Ω), a przytem takie, żebyśmy mieli

$$w_2 - w_1 < \varepsilon,$$

gdzie ε oznacza dowolnie naprzód daną, byle od zera większą liczbę wymierną.

Def. VI. Orzeczenie, iż pewna liczba bezwzględna jest *dana* albo *znana* wyraża, że jeden z jej określników jest (Def. V) arytmetycznie oznaczony.

Def. VII. *Wyznaczeniem* liczby bezwzględnej zowiemy uzyskanie arytmetycznego oznaczenia jednego z jej określników.

Tw. VIII. Jeżeli oznaczymy przez (A_1) zbiór liczb wymiernych pierwszej, a przez (A_2) zbiór liczb wymiernych drugiej kategorii w stosunku do pewnego przekroju (P) zbioru liczb wymiernych, to w takim razie zachodzą okoliczności następujące:

1° Zbiory (A_1) i (A_2) stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω), a mianowicie określnika liczby bezwzględnej φ , położonej na przekroju (P).

2° Jeżeli przekrój (P) jest oznaczony arytmetycznie (§ 80 Def. II), to określnik (Ω) jest w znaczeniu, określonym przez Def. V, także oznaczony arytmetycznie, skąd wynika (Def. VI), że w takim razie liczba φ jest znana.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zważmy, że ponieważ dwie liczby w_1 i w_2 , należące odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2) , zawsze spełniają związki

$$w_1 < w_2$$

$$w_1 \leq \varphi$$

$$\varphi \leq w_2,$$

przeto, żeby uzasadnić pierwszą część twierdzenia należy tylko wykazać, że, jeżeli oznaczymy przez ε jakąkolwiek, byle od zera większą liczbę wymierną, to zawsze odpowiadać jej będą takie dwie liczby a_1 i a_2 , należące odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2) , żebyśmy mieli:

$$(1) \quad a_2 - a_1 < \varepsilon.$$

Otóż (§ 79, Def. I) w zbiorze (A_1), istnieć będzie liczba od zera większa, a ponieważ liczba φ , położona na przekroju (P) nie jest mniejsza od żadnej liczby zbioru (A_1), przeto

$$\varphi > 0.$$

Zatem (Tw. II) istnieć będą dwie liczby wymierne

$$w_1 \text{ i } w_2,$$

spełniające nierówności

$$(2) \quad w_1 < \varphi < w_2$$

oraz

$$(3) \quad w_2 - w_1 < \varepsilon.$$

Ponieważ zaś z nierówności (2) wynika, że liczba w_1 należeć będzie do zbioru (A_1), a liczba w_2 — do zbioru (A_2), przeto dość przyjmując

$$a_1 = w_1, \quad a_2 = w_2,$$

żeby liczby a_1 i a_2 należały odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2) i spełniały (1). Wnosimy stąd, że pierwsza część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu. Żeby dostrzedz, że druga część twierdzenia także zachodzi, należy tylko zważyć, że dowód istnienia liczb w_1 i w_2 , podany przy uzasadnianiu Tw. II, stanowi w przypadku, kiedy przekrój (P) jest oznaczony arytmetycznie (§ 80, Def. II), metodę do wyznaczenia symbolów specyficznych (Def. II) liczb w_1 i w_2 . Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Teraz możemy już dobrze zrozumieć znaczenie naukowe Tw. IV, § 80-go: na podstawie tego twierdzenia i twierdzenia tylko co uzasadnionego mamy twierdzenia następujące:

Tw. IX. Zbiór liczb niewymiernych znanych nie jest pusty.

Żeby zapobiedz wszelkiemu nieporozumieniu, nadmieniamy, że, jakkolwiek liczba bezwzględna, położona na przekroju zbioru liczb wymiernych, oznaczonym arytmetycznie, jest znana, to przecież błędem byłoby mniemanie, iż odwrotnie, do arytmetycznego oznaczenia przekroju zbioru liczb wymiernych wystarczy, żeby liczba bezwzględna φ , położona na tym przekroju, była znana w znaczeniu Def. VI, żeby więc znany był jeden z jej określników. Wogóle, jeżeli pewna liczba bezwzględna φ jest nam znana tylko w znaczeniu, określonym przez Def. VI, to (zob. § 93) nasunąć się mogą różne pytania, odnoszące się do tej liczby, na które może nie będziemy umieć odpowiedzieć. Jednakowoż przy zastosowywaniu liczb do badania przyrody, poznanie liczby w znaczeniu, określonym przez Def. VI, jest zwykle wystarczające i to jest jeden z najważniejszych powodów, że Def. VI nam dogadza.

§ 87. Żeby w myśl zasad, wyłożonych w rozdziale II-gim, ugruntować teorię działań podstawowych na liczbach bezwzględnych, należy określić sumę

i iloczyn dwóch takich liczb. W tym celu rozszerzamy tylko na wszystkie liczby bezwzględne definicje dodawania i mnożenia, przyjęte w teorii liczb wymiernych. Przyjmujemy tedy definicje następujące:

Def. I. Wynikiem dodania do oznaczonej liczby bezwzględnej φ drugiej oznaczonej liczby bezwzględnej ψ zwiemy każdą liczbę bezwzględną θ , która, po przyjęciu pewnego odcinka właściwego u za jednostkę, jest miarą sumy tych odcinków a i b , których miarami są odpowiednio liczby φ i ψ .

Def. II. Iloczynem mnożenia oznaczonej liczby bezwzględnej φ , od zera większej, przyjętej za mnożną, przez drugą liczbę bezwzględną ψ , przyjętą za mnożnik, zwiemy każdą liczbę bezwzględną θ , która, w razie przyjęcia za jednostkę pewnego odcinka właściwego u , jest miarą odcinka a , przez to określonego, iż miarą jego byłaby liczba ψ , gdyby za jednostkę przyjęty został taki odcinek u' , którego miarą, w przypadku, kiedy za jednostkę długości uważamy odcinek u , jest liczba φ .

Ponieważ Def. II odnosi się tylko do przypadku, kiedy liczba, przyjęta za mnożną, liczbie zera nie jest równą, przeto podobnie, jak w teorii liczb wymiernych, uzupełniamy definicję iloczynu dwóch liczb bezwzględnych przez definicję następującą:

Def. III. Iloczynem mnożenia liczby bezwzględnej, równej liczbie zero, przyjętej za mnożną, przez jakąkolwiek drugą liczbę bezwzględną, zwiemy każdą liczbę bezwzględną, równą zera.

Ponieważ, jak to zapowiedzieliśmy przed podaniem powyższych definicji, te definicje stanowią tylko rozszerzenie na wszystkie liczby bezwzględne tych definicji, na których oparliśmy teorię działań podstawowych na liczbach wymiernych, przeto rzeczone definicje nie mogą doprowadzić do żadnej sprzeczności z teorią liczb wymiernych. Natomiast winniśmy udowodnić, że one nie uchybiają ogólnym zasadom, wyłożonym w rozdziale drugim.

Gdybyśmy to twierdzenie zechcieli uzasadnić bezpośrednio, na samym początku całej teorii, to nie moglibyśmy uniknąć całego szeregu powtórzeń. Wobec tego, wyłożymy następstwa omawianych definicji w porządku najdogodniejszym, a w stosownym miejscu dopiero udowodnimy zgodność ich z zasadami rozdziału drugiego.

Żeby ułatwić czytelnikowi zorientowanie się w dalszych rozważaniach, zaznaczamy, że, prócz wykazania zgodności powyższych definicji z zasadami rozdziału drugiego, będziemy mieli na celu wykazanie tego podstawowego faktu, że, w odniesieniu do liczb bezwzględnych, wszystkie postulaty teorii, wyłożonej w rozdziale trzecim, są spełnione i że, z tego powodu, cała ta teoria jest dla liczb bezwzględnych ważna; nadto będziemy mieli na względzie wyprowadzenie

reguł do wyznaczania wyników działań podstawowych na liczbach bezwzględnych danych.

§ 88. Tw. I. Oznaczmy przez (A_1) pierwszą, a przez (A_2) drugą część pewnego określnika dowolnie oznaczonej liczby bezwzględnej φ ; oznaczmy nadto przez (B_1) pierwszą, a przez (B_2) drugą część pewnego określnika drugiej dowolnie oznaczonej liczby bezwzględnej ψ i uważajmy z jednej strony zbiór (C_1) wszystkich tych liczb wymiernych, z których każda jest sumą jednej liczby zbioru (A_1) i jednej liczby zbioru (B_1) , a z drugiej — zbiór (C_2) wszystkich tych liczb, z których każda jest sumą jednej liczby zbioru (A_2) i jednej liczby zbioru (B_2) . Powiadam, że zachodzą okoliczności następujące:

1° Zbiory (C_1) i (C_2) stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω) , który będzie arytmetycznie oznaczony, jeżeli rozważane określniki liczb φ i ψ są dane.

2° Bez względu na wybór jednostki długości, każda liczba bezwzględna, której określnikiem jest określnik (Ω) , i tylko liczba bezwzględna, spełniająca ten warunek, jest sumą liczb φ i ψ .

Istotnie, jeżeli oznaczymy ogólnie przez φ_1 , φ_2 i ψ_1 i ψ_2 liczby wymierne, należące odpowiednio do zbiorów (A_1) , (A_2) , (B_1) i (B_2) , to, ze względu na związki

$$\varphi_1 \leq \varphi_2$$

i

$$\psi_1 \leq \psi_2,$$

mieć będziemy

$$\varphi_1 + \psi_1 \leq \varphi_2 + \psi_2;$$

zatem, żadna liczba zbioru (C_1) nie jest większa od którejkolwiek z liczb zbioru (C_2) . Z drugiej strony, jeżeli oznaczymy przez ε dowolnie daną liczbę wymierną, to można będzie tak dobrać liczby wymierne φ_1 , φ_2 , ψ_1 i ψ_2 , żebyśmy mieli

$$\varphi_2 - \varphi_1 < \frac{1}{2} \varepsilon; \quad \psi_2 - \psi_1 < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Ale w takim razie mieć będziemy

$$(\varphi_2 + \psi_2) - (\varphi_1 + \psi_1) < \varepsilon.$$

Zatem, do liczby ε można zawsze dobrać dwie liczby

$$(1) \quad \theta_1 = \varphi_1 + \psi_1$$

i

$$(2) \quad \theta_2 = \varphi_2 + \psi_2,$$

należące odpowiednio do zbiorów (C_1) i (C_2) , a przytem takie, żebyśmy mieli

$$\theta_2 - \theta_1 < \varepsilon.$$

Z tego wynika już, że zbiory (C_1) i (C_2) stanowiąc będą odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika. Ponieważ zaś w razie, kiedy rozważane określniki liczb φ i ψ są dane w znaczeniu Def. V, § 86-go, liczby wymierne θ_1 i θ_2 będą mogły być rzeczywiście wyznaczone w znaczeniu Def. IV § 86, przeto pierwsza część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Żeby uzasadnić część drugą, przyjmijmy za jednostkę jakikolwiek odcinek właściwy u i oznaczmy przez

$$a_1, a, a_2, b_1, b, b_2$$

odcinki, których miarami są odpowiednie liczby

$$\varphi_1, \varphi, \varphi_2, \psi_1, \psi, \psi_2.$$

Oznaczmy nadto przez c_1, c_2 i c trzy odcinki, spełniające równości:

$$(3) \quad \begin{cases} c_1 = a_1 + b_1 \\ c_2 = a_2 + b_2 \\ c = a + b. \end{cases}$$

Ponieważ mamy

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2, \end{cases}$$

przeto mieć będziemy

$$(5) \quad \begin{cases} a_1 \leq a \leq a_2 \\ b_1 \leq b \leq b_2. \end{cases}$$

Ze związków (3) i (5) mamy

$$(6) \quad c_1 \leq c \leq c_2.$$

Założmy teraz, że pewna liczba bezwzględna θ jest sumą liczb φ i ψ . W takim razie (§ 87, Def. I), przynajmniej przy stosownym wyborze odcinka u , liczba θ będzie miarą odcinka c . Ale wówczas, ze związków (6) wynika, że jeżeli oznaczmy przez θ_1 i θ_2 miary odcinków c_1 i c_2 , to mieć będziemy

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2.$$

Ponieważ zaś ze związków (3) wynika, że na liczby θ_1 i θ_2 mamy odpowiednio wzory (1) i (2), przeto określnik (Ω) , utworzony przez zespół zbiorów (C_1) i (C_2) jest określnikiem liczby θ . Zatem, tylko liczba bezwzględna, której określnikiem jest określnik (Ω) , może być sumą liczb φ i ψ . Z drugiej znów strony, jeżeli tylko określnikiem pewnej liczby bezwzględnej θ jest określnik (Ω) , to ta liczba jest sumą liczb φ i ψ bez względu na wybór jednostki dłu-

gości u , albowiem, jakkolwiek odcinek właściwy oznaczylibyśmy przez u , to miarą odcinka c , określonego przez trzecią z równości (3), byłaby liczba θ' , której określnikiem byłby określnik (Ω) . Ponieważ zaś z tego wynika (§ 86, Tw. VI), że mielibyśmy

$$\theta' = \theta,$$

ponieważ więc liczba θ byłaby także miarą odcinka c , przeto druga część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. II. Dodawanie liczb bezwzględnych jest działaniem arytmetycznem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

Istotnie, oznaczmy przez φ i ψ jakiekolwiek dwie liczby bezwzględne i założmy, że pewna liczba θ przedstawia wynik dodawania liczby ψ do liczby φ . Jeżeli tedy pewne liczby bezwzględne φ' i ψ' spełniają równości

$$\varphi' = \varphi \text{ i } \psi' = \psi,$$

to (§ 86, Tw. VI) określniki liczb φ i ψ będą odpowiednio także określnikami liczb φ' i ψ' . Zatem (Tw. I, część 2^o) określnik (Ω) sumy

$$\varphi + \psi$$

będzie także określnikiem sumy

$$\varphi' + \psi',$$

a z tego wynika (Tw. I, część 2^o), że liczba θ jako taka, której określnikiem jest określnik (Ω) , jest wynikiem dodania liczby ψ' do liczby φ' . Z drugiej strony, ponieważ określnik (Ω) jest (§ 86, Tw. VI) określnikiem każdej liczby bezwzględnej, równej liczbie θ , przeto każda taka liczba (Tw. I, część 2^o) przedstawia sumę

$$\varphi + \psi.$$

Ostatecznie więc suma dwóch liczb bezwzględnych, uszeregowanych w oznaczonym porządku, zależy tylko od wartości tychże i sama oznaczona jest tylko pod względem wartości. Zatem (§ 57 Def. I), dodawanie dwóch liczb bezwzględnych jest rzeczywiście działaniem arytmetycznem. Żeby przekonać się, że to działanie jest jednoznaczne, należy tylko zważyć, że, jeżeli z dwóch liczb bezwzględnych θ i θ' każda przedstawia sumę

$$\varphi + \psi,$$

to (Tw. I, część 2^o) te liczby posiadają wspólny określnik i są zatem (§ 86, Tw. VI) równe pomiędzy sobą. Nareszcie bezwzględna wykonalność dodawania liczb bezwzględnych może być uzasadniona w sposób następujący: jakiekolwiek byłyby liczby bezwzględne φ i ψ , to zbiory, które oznaczyliśmy w Tw. I przez (C_1) i (C_2) , zawsze stanowią (Tw. I, część 1^o) odpowiednio pierwszą i drugą część

określnika pewnej liczby bezwzględnej. Ponieważ zaś ta liczba (Tw. I, część 2^o) przedstawia sumę

$$\varphi + \psi,$$

przeto dodawanie dwóch liczb bezwzględnych jest rzeczywiście wykonalne bez zastrzeżeń. Z uzyskanych wyników wnosimy (§ 60, Tw. I) że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Wniosek. Warunek konieczny i wystarczający, aby pewna liczba bezwzględna θ była sumą liczb bezwzględnych φ i ψ (§ 59), wyrazić można przez równość

$$\theta = \varphi + \psi.$$

Tw. III. Jeżeli oznaczymy przez φ , ψ i θ dowolnie dane trzy liczby bezwzględne, to w takim razie mamy

$$(1) \quad (\varphi + \psi) + \theta = \varphi + (\psi + \theta).$$

Istotnie, jeżeli, opierając się na drugiej części tw. I, określimy z jednej strony określnik (Ω) sumy

$$(\varphi + \psi) + \theta,$$

a z drugiej określnik (Ω') sumy

$$\varphi + (\psi + \theta),$$

jeżeli nadto zważywszy, że w przypadku szczególnym, kiedy liczby φ , ψ i θ są liczbami wymiernymi, równość (1) zachodzi na podstawie teorii liczb wymiernych, to stwierdzimy z łatwością, że w rzeczywistości określniki (Ω) i (Ω') zlewają się ze sobą. Z tego zaś wynika (§ 86, Tw. VI) że, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, równość (1) zachodzi w każdym razie.

Tw. IV. Jeżeli oznaczymy przez φ i θ dowolnie dane liczby bezwzględne, to mieć będziemy w każdym razie

$$(1) \quad \varphi + \psi = \psi + \varphi.$$

Istotnie, zważywszy, że w przypadku szczególnym, kiedy liczby φ i ψ są liczbami wymiernymi, równość (1) zachodzi na podstawie teorii liczb wymiernych, wywnioskujemy z łatwością z drugiej części Tw. I, że określniki sum

$$\varphi + \psi \text{ i } \psi + \varphi$$

zlewają się ze sobą, a z tego wynika (§ 86, Tw. VI) równość (1), o dowód której właśnie chodziło.

Tw. V. Jeżeli oznaczymy przez φ dowolnie daną liczbę bezwzględną, a przez ψ i ψ' dwie liczby bezwzględne, spełniające nierówność

$$(1) \quad \psi < \psi',$$

to mieć będziemy

$$(2) \quad \varphi + \psi < \varphi + \psi'.$$

Powyższe twierdzenie można wyprowadzić z Tw. I, bynajmniej nie powołując się na teorię odcinków, i polecamy czytelnikowi, jako pouczające ćwiczenie, uzasadnienie niniejszego twierdzenia na tej podstawie. Tu zaś podamy dowód prostszy, następujący. Przyjmijmy za jednostkę jakikolwiek odcinek właściwy u i uważajmy odcinki a , b i b' , których miarami byłyby w takim razie odpowiednio liczby φ , ψ i ψ' . Ze względu na (1), mamy tedy

$$b < b',$$

a zatem

$$(3) \quad a + b < a + b'$$

Ponieważ zaś liczby

$$\varphi + \psi \text{ i } \varphi + \psi'$$

są odpowiednio miarami odcinków

$$a + b \text{ i } a + b',$$

przeto, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, nierówność (2) rzeczywiście zachodzić będzie.

Tw. VI. Jeżeli oznaczmy przez φ całkiem dowolnie daną liczbę bezwzględną, to mieć będziemy

$$(1) \quad \varphi + 0 = \varphi.$$

Istotnie, jeżeli oznaczmy przez (B_1) i (B_2) dwa zbiory liczb wymiernych, z których każdy obejmuje tylko liczby równe zeru, to te zbiory oczywiście stanowić będą odpowiednio pierwszą i drugą część określnika liczby zero.

Z tego wynika (Tw. I, część 2^o), że istnieje określnik sumy

$$\varphi + 0,$$

zlewający się z określnikiem liczby φ . Zatem, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, równość (1) rzeczywiście będzie zachodzić.

Tw. VII. Jeżeli oznaczmy przez φ jakąkolwiek liczbę bezwzględną, a przez ψ liczbę bezwzględną, spełniającą nierówność

$$(1) \quad \psi > 0,$$

to mieć będziemy

$$(2) \quad \varphi + \psi > \varphi.$$

Istotnie, ze względu na nierówność (1) i na Tw. V mamy

$$\varphi + \psi > \varphi + 0,$$

a ponieważ (Tw. VI)

$$\varphi + 0 = \varphi,$$

przeto, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, równość (2) rzeczywiście zachodzi.

§ 89. Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez φ i ψ oznaczone dwie liczby bezwzględne, to w takim razie zachodzą okoliczności następujące:

1° Żeby odejmowanie zaznaczonp we wzorze

$$\psi - \varphi$$

było wykonalne, żeby, innemi słowy, istniała liczba bezwzględna x , spełniająca związek

$$(1) \quad \varphi + x = \psi,$$

koniecznem jest, żeby zachodził albo związek

$$(2) \quad \varphi = \psi,$$

albo związek

$$(3) \quad \varphi < \psi.$$

2° Jeżeli zachodzi związek (2), to dość przyjąć

$$x = 0,$$

żeby liczba x spełniała związek (1).

3° Jeżeli oznaczymy przez (A_1) pierwszą, a przez (A_2) drugą część pewnego określnika (Ω) liczby φ , oraz przez (B_1) i (B_2) odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω') liczby ψ , jeżeli nadto założymy, że zachodzi jeden ze związków (2) lub (3) i oznaczymy przez (C_1) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda jest albo równa zero, albo równa reszcie odęjmowania jednej liczby zbioru (A_2) od jednej liczby zbioru (B_1) , a przez (C_2) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda jest różnicą jednej liczby zbioru (B_2) i jednej liczby zbioru (A_1) , to w takim razie zbiory (C_1) i (C_2) stanowiąc będą odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω'') , który będzie arytmetycznie oznaczony, jeżeli określniki (Ω) i (Ω') będą oznaczone arytmetycznie.

4° Wystarczy, żeby określnik (Ω'') był określnikiem liczby x , aby ta liczba spełniała równość (1).

5° Jeżeli zachodzi jeden ze związków (2) lub (3), to istnieje liczba bezwzględna x , spełniająca równość (1).

6° Zawsze istnieje liczba bezwzględna x , spełniająca jedną przynajmniej z równości;

$$(4) \quad \varphi + x = \psi$$

albo

$$(5) \quad \psi + x = \varphi.$$

Dowód co do 1°. Założmy, że pewna liczba bezwzględna x spełnia związek (1). Ponieważ (§ 84, Tw. III) mamy w każdym razie

$$x \geq 0,$$

przeło (§ 88, Tw. VI i VII) mamy

$$\varphi + x \geq \varphi;$$

zatem, ze względu na (1), zachodzi rzeczywiście jeden ze związków (2) lub (3), a oto właśnie chodziło.

Dowód co do 2°. Słuszność tej części naszego twierdzenia wynika bezpośrednio z Tw. VI § 88-go.

Dowód co do 3°. Zbiór (C_1) nie jest pusty, gdyż liczba zero do tego zbioru należy. Zbiór (C_2) także nie jest pusty, gdyż, ze względu na istnienie jednego ze związków (2) lub (3), jako też ze względu na to, że dwie liczby wymierne φ_1 i ψ_2 , należące odpowiednio do zbiorów (A_1) i (B_2) , spełniają w każdym razie związki

$$\varphi_1 \leq \varphi \text{ oraz } \psi \leq \psi_2,$$

odejmowanie, zaznaczone we wzorze

$$\psi_2 - \varphi_1$$

będzie w każdym razie wykonalne. Zważmy teraz, że żadna liczba x , zbioru (C_1) nie może być większa od jakiejś liczby x_2 zbioru (C_2) , jeżeli bowiem mamy

$$(6) \quad x_1 = 0,$$

to związek

$$(7) \quad x_1 \leq x_2$$

zachodzi niezawodnie (§ 84, Tw. III); jeżeli zaś równość (6) nie zachodzi, to istnieć będą takie dwie liczby φ_2 i ψ_1 , należące odpowiednio do zbiorów (A_2) i (B_1) , że mieć będziemy

$$(8) \quad x_1 = \psi_1 - \varphi_2;$$

ponieważ zaś w każdym razie mamy

$$(9) \quad x_2 = \psi_2 - \varphi_1,$$

gdzie ψ_2 i φ_1 są jakieś dwie liczby należące odpowiednio do zbiorów (B_2) i (A_1) , ponieważ nadto mamy

$$\varphi_1 \leq \varphi_2, \quad \psi_1 \leq \psi_2,$$

ponieważ więc

$$(10) \quad \psi_1 + \varphi_1 \leq \varphi_2 + \psi_2;$$

przeło ze wzorów (8) i (9) wynika związek (7)¹⁾. Stwierdzamy więc, że związek (7) zachodzi w każdym razie. Powiadam, że do dowolnie danej byle od zera większej liczby wymiernej ε można dobrać takie dwie liczby x_1 i x_2 , należące odpowiednio do zbiorów (C_1) i (C_2) , żebyśmy mieli

$$(11) \quad x_2 - x_1 < \varepsilon.$$

Otóż w każdym razie można tak wyznaczyć liczby

$$\varphi_1, \varphi_2, \psi_1 \text{ i } \psi_2,$$

należące odpowiednio do zbiorów (A_1) , (A_2) , (B_1) i (B_2) żebyśmy mieli

$$(12) \quad \begin{cases} \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{1}{2} \varepsilon \\ \psi_2 - \psi_1 < \frac{1}{2} \varepsilon \end{cases}$$

Gdyby pokazało się, że mamy

$$(13) \quad \psi_1 < \varphi_2,$$

to, zważywszy, iż z nierówności (12) mamy

$$(\psi_2 - \varphi_1) + ((\varphi_2 - \psi_1) < \varepsilon,$$

dostrzegamy, że mielibyśmy

$$\psi_2 - \varphi_1 < \varepsilon.$$

Zatem, wystarczyłoby wyznaczyć x_2 ze wzoru (9) i przyjąć

$$x_1 = 0,$$

żeby urzeczywistnić nierówność (11). Gdyby zaś nierówność (13) nie zachodziła, to wystarczyłoby wyznaczyć x_1 , ze wzoru (8) (co byłoby możliwe, gdyż mielibyśmy $\psi_1 \geq \varphi_2$) i przyjąć na x_2 , jak poprzednio, wartość (9), aby w rozważanym przypadku uczynić zadość nierówności (11), albowiem ze wzorów (9) i (8) mamy

$$x_2 - x_1 = (\psi_2 - \varphi_1) - (\psi_1 - \varphi_2),$$

skąd

$$x_2 - x_1 = (\psi_2 - \psi_1) + (\varphi_2 - \varphi_1),$$

skąd znów, ze względu na (12), rzeczywiście wynika nierówność (11). Stwierdzamy więc, że w każdym razie istnieją takie dwie liczby x_1 i x_2 , należące odpowiednio do zbiorów (C_1) i (C_2) , że spełniają nierówność (11). Ponieważ zaś stwierdziliśmy już wyżej, że żadna liczba wzoru (C_1) nie jest większa od

¹⁾ Zaznaczyliśmy (§ 67 i § 76), że w odniesieniu, do liczb wymiernych cała teoria rozdziału III-go jest ważna. Zatem, na podstawie Tw. IV § 76-go, związek (10) i wzory (8) i (9) rzeczywiście pociągają za sobą związek (7).

którejkolwiek liczby zbioru (C_2) , przeto zespół zbiorów (C_1) i (C_2) stanowi pewien określnik; ponieważ nadto z powyższych rozważań wynika, że potrafimy rzeczywiście wyznaczyć (§ 86, Def. VI) liczby x_1 i x_2 , jeżeli określniki (Ω) i (Ω') będą oznaczone arytmetycznie, przeto 3^o część twierdzenia zachodzi w podanym brzmieniu.

Dowód co do 4^o. Załóżmy, że pewna liczba bezwzględna x jest liczbą, której określnikiem jest określnik (Ω'') . Chodzi o wykazanie, że w takim razie liczba x spełnia równość (1). W tym celu oznaczmy przez (D_1) zbiór wszystkich liczb, z których każda jest sumą pewnej liczby φ'_1 zbioru (A_1) i pewnej liczby x_1 , zbioru (C_1) , a przez (D_2) zbiór wszystkich liczb, z których każda jest sumą pewnej liczby φ'_2 zbioru (A_2) i pewnej liczby x_2 zbioru (C_2) . W takim razie (Tw. I § 88) zbiór (D_1) , stanowić będzie pierwszą, a zbiór (D_2) — drugą część określnika (Ω^{IV}) sumy

$$(14) \quad \varphi + x.$$

Zatem, żeby uzasadnić rozważaną część twierdzenia, należy tylko wykazać (§ 86, Tw. VI), że określnik (Ω^{IV}) jest określnikiem liczby ψ . W tym zaś celu winniśmy tylko dowieść, że każda liczba z_1 zbioru (D_1) spełnia związek

$$(15) \quad z_1 \leq \psi,$$

a każda liczba z_2 zbioru (D_2) — związek

$$(16) \quad z_2 \geq \psi.$$

Mamy

$$(17) \quad z_1 = \varphi'_1 + x_1,$$

oznaczając przez φ'_1 i x_1 dwie liczby, stosownie wybrane odpowiednio w zbiorze (A_1) i zbiorze (D_1) . Jeżeli

$$x_1 = 0,$$

to ze związku

$$\varphi'_1 \leq \varphi,$$

jakoteż z okoliczności, że zachodzi jeden ze związków (2) lub (3), wynika, że związek (15), będzie spełniony. Jeżeli zaś

$$x_1 > 0,$$

to na x_1 zachodzi wzór (8), a z tego wzoru i ze wzoru (17) wynika wzór

$$z_1 = (\psi_1 - \varphi_2) + \varphi'_1 = \psi_1 - (\varphi_2 - \varphi'_1)$$

Ponieważ zaś mamy

$$\varphi_2 \geq \varphi'_1,$$

przeto

$$z_1 \leq \psi_1,$$

co, ze względu na

$$\psi_1 \leq \psi,$$

pociąga za sobą (15). W każdym więc razie związek (15) będzie spełniony. Żeby uzasadnić istnienie związku (16), zważmy, że mamy

$$(18) \quad z_2 = \varphi'_2 + x_2,$$

oznaczając przez φ'_2 i x_2 pewne stosownie dobrane, do zbiorów (A_2) i (D_2) odpowiednio należące, liczby. Na liczbę x_2 , jako należącą do zbioru (D_2), mamy wzór (9). Ze wzorów (18) i (9) mamy

$$z_2 = \varphi'_2 + (\psi_2 - \varphi_1) = \psi_2 + (\varphi'_2 - \varphi_1)$$

skąd

$$(19) \quad z_2 \geq \psi_2$$

ze względu na

$$\varphi_1 \leq \varphi'_2.$$

Ponieważ mamy w każdym razie

$$\psi_2 \geq \psi,$$

przeto związek (19) pociąga za sobą (16). Zatem, związek (16) zachodzi w każdym razie, a to tylko pozostawało do wykazania, żeby uzasadnić 4-tą część twierdzenia.

Dowód co do 5°. Jeżeli liczby φ i ψ spełniają jeden ze związków (2) lub (3), to (3-cia część twierdzenia) określnik (Ω'') będzie istnieć, a więc istnieć będzie liczba x , określona przez ten określnik. Ponieważ zaś (4-ta część twierdzenia) liczba x spełnia równość (1), przeto rozważana część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Dowód co do 6°. Liczby bezwzględne φ i ψ spełniają w każdym razie albo związek

$$\varphi < \psi,$$

albo związek

$$\varphi = \psi,$$

albo nareszcie związek

$$\varphi > \psi.$$

Z 5 tej części twierdzenia wynika, że w pierwszym przypadku istnieje liczba x , spełniająca równość (4), w drugim liczba x , spełniająca każdy ze związków (4) i (5), a w trzecim — liczba x , spełniająca równość (5). Ostatecznie, twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. II. Moduł dodawania liczb bezwzględnych istnieje i równa się zero.

Istotnie, w odniesieniu do liczb bezwzględnych twierdzenia I, II i IV § 67-go oraz Tw. I § 76-go są ważne, jako odpowiednio zawarte w twierdzeniach III i IV § 88-go, tw. I paragrafu niniejszego i tw. V § 88-go. Ponieważ zaś

tw. I § 76-go pociąga za sobą tw. III § 67-go, przeto, twierdzenia I, II, III i IV § 67-go są ważne w odniesieniu do liczb bezwzględnych. Ponieważ zaś rzeczony twierdzenia § 67-go pociągają za sobą Tw. V § 69-go, przeto moduł dodawania liczb bezwzględnych istnieje. Pozostaje więc tylko do wykazania, że ten moduł dodawania równa się zeru. Otóż, okoliczność ta wynika bezpośrednio z tw. VI § 88-go. Zatem, twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

§ 90. Tw. I. Jeżeli jedna przynajmniej z dwóch danych liczb bezwzględnych φ i ψ równa się zeru, to iloczynem

$$(1) \quad \varphi \cdot \psi$$

jest każda liczba, równa zeru i tylko liczba, spełniająca ten warunek.

Istotnie, jeżeli tylko mamy

$$\varphi = 0,$$

to twierdzenie zachodzi bezpośrednio na podstawie Def. III § 87-go; jeżeli zaś

$$(2) \quad \varphi > 0,$$

a

$$(3) \quad \psi = 0,$$

to z Def. II § 87-go wynika, że warunek konieczny i wystarczający, aby pewna liczba θ przedstawiała iloczyn (1), polega na tem, żeby, przy oznaczeniach, w których podaliśmy wspomnianą definicyę, liczba θ przedstawiała miarę odcinka a w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę. Ale w rzeczonyj definicyi odcinek a jest określony jako odcinek, którego miarą, w razie przyjęcia za jednostkę odcinka, tamże oznaczonego u' , jest liczba ψ ; otóż, ze względu na (2) odcinek u' (§ 84, Tw. II) jest odcinkiem właściwym, zatem (§ 84, Tw. I) odcinek a istnieje, a ze względu na (3) odcinek ten jest odcinkiem niewłaściwym. Ponieważ odcinek a istnieje i jest odcinkiem niewłaściwym, przeto równość

$$\theta = 0$$

jest (§ 84, Tw. II) warunkiem koniecznym i wystarczającym, żeby liczba θ była miarą odcinka a , jakkolwiek odcinek właściwy byłby przyjęty za jednostkę, a więc i w razie przyjęcia za jednostkę odcinka u . Wnosimy stąd, że twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Tw. II. Jeżeli oznaczymy przez φ i ψ dwie jakiekolwiek liczby bezwzględne, przez (A_1) pierwszą, a przez (A_2) drugą część pewnego określnika (Ω) liczby φ , przez (B_1) pierwszą, a przez (B_2) drugą część pewnego określnika liczby ψ ; jeżeli nadto oznaczymy przez (C_1) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda jest iloczynem mnożenia jednej liczby zbioru

(A_1), przyjętej za mnożną, przez jedną liczbę zbioru (B_1), przyjętą za mnożnik, a przez (C_2) zbiór wszystkich liczb wymiernych z których każda jest iloczynem mnożenia jednej liczby zbioru (A_2) przyjętej za mnożną, przez jedną liczbę zbioru (B_2), przyjętą za mnożnik, to w takim razie zachodzą okoliczności następujące:

1° Zbiory (C_1) i (C_2) stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω'').

2° Określnik (Ω'') będzie arytmetycznie oznaczony w przypadku, w którymby każdy z określników (Ω) i (Ω') był oznaczony arytmetycznie.

3° Każda liczba, której określnikiem jest określnik (Ω'') i tylko liczba, spełniająca ten warunek, jest iloczynem mnożenia, liczby φ , przyjętej za mnożną przez liczbę ψ , przyjętą za mnożnik.

Dowód 1-szej części. Oznaczmy przez

$$(1) \quad \varphi_1, \varphi_2, \psi_1 \text{ i } \psi_2$$

liczby wymierne należące odpowiednio do zbiorów

$$(2) \quad (A_1), (A_2), (B_1) \text{ i } (B_2),$$

a przez

$$(3) \quad \theta_1 \text{ i } \theta_2$$

liczby, należące odpowiednio do zbiorów

$$(4) \quad (C_1) \text{ i } (C_2).$$

Zbiory (C_1) i (C_2) nie są puste, gdyż dostatecznym jest przyjąć

$$(5) \quad \theta_1 = \varphi_1 \cdot \psi_1$$

oraz

$$(6) \quad \theta_2 = \varphi_2 \cdot \psi_2,$$

żeby liczby θ_1 i θ_2 rzeczywiście należały odpowiednio do rzeczonych zbiorów. Z drugiej znów strony, jeżeli liczby (3) należą odpowiednio do zbiorów (4) to, ze względu na definicyę tych zbiorów, możliwem jest tak wybrać liczby (1) odpowiednio w zbiorach (2), aby zachodziły równości (5) i (6). Ponieważ zaś mamy

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi_2 \\ \psi_1 \leq \psi_2, \end{cases}$$

przeto mamy w każdym razie

$$\theta_1 \leq \theta_2,$$

a związek ten wyraża, że żadna liczba zbioru (C_1) nie jest większa od jakiegś

liczby zbioru (C_2) . Pozostaje więc tylko do okazania, że, do dowolnie danej, byle od zera większej liczby ε można tak dobrać liczby (1) odpowiednio w zbiorach (2), żeby, po wyznaczeniu liczb θ_1 i θ_2 ze wzorów (5) i (6), wypadły na te liczby wartości, spełniające nierówność

$$(8) \quad \theta_2 - \theta_1 < \varepsilon.$$

Ze wzorów (5) i (6) mamy:

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 &= \varphi_2 \cdot \psi_2 - \varphi_1 \cdot \psi_1, \\ (9) \quad \theta_2 - \theta_1 &= \varphi_2 \cdot (\psi_2 - \psi_1) + \psi_1 (\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Oznaczmy przez μ dowolnie przyjętą, byle od zera większą liczbę wymierną. Do liczby μ można będzie tak dobrać liczby (1), żebyśmy mieli

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi_2 - \varphi_1 < \mu \\ \psi_2 - \psi_1 < \mu \end{cases}$$

a to bezpośrednio na podstawie definicji określnika. Ze związków (9) i (10) mamy

$$(11) \quad \theta_2 - \theta_1 < \{\varphi_2 + \psi_1\} \mu.$$

Przyjmijmy chwilowo, że pewna liczba wymierna w , nam znana, jest większa od każdej z liczb φ i ψ i założmy nadto, że przy wyborze liczb φ_1 i φ_2 odpowiednio w zbiorach (A_1) i (A_2) można zadość uczynić nie tylko pierwszemu ze związków (10), ale jeszcze nierówności

$$(12) \quad \varphi_2 < w.$$

Ponieważ mamy

$$\psi < w$$

oraz

$$\psi_1 \leq \psi,$$

przeto mieć będziemy w każdym razie

$$(13) \quad \psi_1 < w.$$

Na podstawie nierówności (12) i (13) wynika z nierówności (11) nierówność

$$(14) \quad \theta_2 - \theta_1 < 2 \cdot w \cdot \mu.$$

Zatem, dostatecznym byłoby, wyznaczywszy liczbę μ z warunku

$$2 \cdot w \cdot \mu = \varepsilon,$$

liczby (1) tak powyznaczać, żeby one spełniały prócz nierówności (10) jeszcze

nierówność (12), aby nierówność (14), która w takim razie zachodziłaby, pociągnęła za sobą nierówność (8), o urzeczywistnienie której właśnie chodzi. Zatem, żeby uzasadnić w zupełności 1-szą część twierdzenia, dostatecznem jest wykazać istnienie takiej liczby wymiernej w , która spełniałaby warunki następujące:

(α) Liczba w jest większa od każdej z liczb φ i ψ .

(β) Do dowolnie danej, byle od zera większej liczby wymiernej μ , można dobrać odpowiednio w zbiorach (A_1) i (A_2), liczby φ_1 i φ_2 tak, żeby te liczby spełniały pierwszy ze związków (10), oraz nierówność (12).

Żeby tego dopiąć, oznaczmy przez w_2 i w'_2 dwie liczby wymierne dowolnie wybrane odpowiednio w zbiorach (A_2) i (B_2). Oczywiście istnieć będzie liczba wymierna w , spełniająca obie nierówności następujące:

$$(15) \quad w_2 < w$$

$$(16) \quad w'_2 < w.$$

Ponieważ liczby w_2 i w'_2 należą odpowiednio do zbiorów (A_2) i (B_2), przeto mamy:

$$\varphi \leq w_2, \quad \psi \leq w'_2,$$

a z nierówności tych oraz nierówności (15) i (16) wynika, że mamy

$$\varphi < w \text{ oraz } \psi < w.$$

Zatem liczba wymierna w spełnia warunek (α). Powiadam, że ona spełnia i warunek (β). Istotnie, ponieważ zbiory (A_1) i (A_2) stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika, przeto istnieć będą odpowiednio w zbiorze (A_1) i w zbiorze (A_2) takie liczby φ_1 i φ_2 , żebyśmy mieli

$$(17) \quad \varphi_2 - \varphi_1 < \mu;$$

gdyby przytem liczba φ_2 miała wartość większą od liczby w_2 , która, jak czytelnik pamięta należy jak i liczba φ_2 do zbioru (A_2), to nierówność (17) byłaby tem bardziej spełnioną, gdybyśmy znalezionej wartości na φ_2 zastąpili przez wartość

$$\varphi_2 = w_2.$$

W każdym więc razie można nietylko uczynić zadość nierówności (17), ale i związkowi

$$\varphi_2 \leq w_2,$$

a ponieważ, ze względu na (15), ten związek pociąga za sobą związek (12), przeto stwierdzamy, że liczba wymierna w , wyznaczona tak, żeby spełniała obie nierówności (15) i 16), nietylko sprawdza warunek (α), ale i warunek (β). Z tego wynika, że 1-sza część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Dowód 2-giej części. Jeżeli każdy z określników (Ω) i (Ω') jest oznaczony arytmetycznie, to rozważania, na których oparliśmy dowód 1^o części, dostarczają nam środek do rzeczywistego wyznaczenia takich dwóch liczb θ_1 i θ_2 , należących odpowiednio do zbiorów (C_1) , (C_2) , żeby liczby te spełniały nierówność (8), a to jest dowodem słuszności rozważanej części naszego twierdzenia.

Dowód 3-ciej części.

Lemat. Jeżeli oznaczymy przez u i u' dwa odcinki właściwe spełniające nierówność

$$(18) \quad u < u'$$

i przedstawimy przez a odcinek, którego miarą byłaby dowolnie dana, byle od zera większa liczba wymierna w , w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę, jeżeli nadto oznaczmy przez a' odcinek, którego miarą byłaby także liczba w , ale w przypadku, kiedy za jednostkę przyjmujemy odcinek u' , to mieć będziemy

$$(19) \quad a < a'.$$

Istotnie w każdym razie mamy

$$w = \frac{m}{p},$$

oznaczając przez m i p dwie liczby całkowite od zera większe. Jeżeli tedy oznaczmy przez d i d' odcinki, spełniające równości

$$(20) \quad \begin{cases} p \cdot d = u \\ p \cdot d' = u' \end{cases}$$

to mieć będziemy

$$(21) \quad \begin{cases} a = m \cdot d \\ a' = m \cdot d'. \end{cases}$$

Z nierówności (18) i równości (20) mamy

$$d < d',$$

zatem, na podstawie równości (21) zachodzi nierówność (19), o uzasadnienie której właśnie chodziło.

Powracając do twierdzenia, o które nam właściwie chodzi, przypuśćmy, że pewna liczba θ przedstawia iloczyn

$$(22) \quad \varphi \cdot \psi.$$

Jeżeli tedy jedna przynajmniej z liczb φ lub ψ równa się zeru, to (Tw. I) wa-

runek konieczny i wystarczający, aby liczba bezwzględna θ przedstawiała iloczyn (22) polega na równości

$$\theta = 0.$$

Z drugiej strony, jeżeli jedna z liczb φ lub ψ jest równa zero, to pierwsza część jej określnika może tylko obejmować liczby równe zero. Z tego wynika, że, w rozważanym przypadku, pierwsza część (C_1) określnika (Ω'') obejmuje także tylko liczby równe zero. Zatem (§ 86, Tw. VII) określnik (Ω'') jest określnikiem liczby zero. Z tego wynika, że w przypadku szczególnym, kiedy jedna przynajmniej z liczb φ lub ψ jest równą zero, 3^o część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu. Założmy więc, że żadna z liczb φ lub ψ nie jest równa zero i, zwracając się do Def. II, § 87-go, uważajmy odcinki, któreśmy tam oznaczyli przez

$$u, u' \text{ i } a.$$

Jeżeli tedy dwie liczby wymierne φ_1 i ψ_1 , należące odpowiednio do zbiorów (A_1) i (B_1) są od zera większe, (a takie liczby istnieć będą, gdyż w przeciwnym razie (§ 86 Tw. VII) pierwsza część określnika jednej przynajmniej z liczb φ i ψ obejmowałaby tylko liczby równe zero, i, wbrew założeniu, jedna przynajmniej z liczb φ i ψ równałaby się zero), to wzór (5) określi nam od zera większą liczbę θ_1 zbioru (C_1), a na podstawie definicyi mnożenia liczb wymiernych, liczba θ_1 będzie, w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę, miarą odcinka a_1 , którego miarą byłaby liczba ψ_1 gdybyśmy przyjęli za jednostkę ten odcinek u'_1 , którego miarą jest liczba φ_1 , kiedy za jednostkę przyjmujemy odcinek u . Ponieważ mamy

$$\varphi_1 \leq \varphi,$$

przeto mamy

$$u'_1 \leq u'$$

Jeżeli więc oznaczymy przez a'_1 odcinek, którego miarą byłaby liczba ψ_1 w razie przyjęcia za jednostkę odcinka u' , to (powyższy Lemat) mielibyśmy

$$a_1 \leq a'_1.$$

Ponieważ zaś ze względu na nierówność

$$\psi_1 \leq \psi$$

mamy

$$a'_1 \leq a,$$

przeto tem bardziej mamy

(23)

$$a_1 \leq a.$$

Ponieważ dalej miarą odcinka a_1 , w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę,

jest liczba θ_1 , przeto, jeżeli oznaczymy przez θ miarę odcinka a w razie przyjęcia za jednostkę tegoż odcinka u , jeżeli więc oznaczymy przez θ jedną z liczb przedstawiających iloczyn

$$\varphi \cdot \psi,$$

to mieć będziemy

$$\theta_1 \leq \theta.$$

Z tego wynika, że każda liczba θ , przedstawiająca iloczyn

$$\varphi \cdot \psi$$

tę ma własność, że nie jest mniejsza od żadnej od zera większej liczby θ_1 , należącej do zbioru (C_1) . Ponieważ zaś żadna liczba bezwzględna nie jest (§ 84, Tw. III) od zera mniejsza, przeto liczba θ nie jest mniejsza od żadnej (choćby i zera równej) liczby zbioru (C_1) .

Powiadam, że wniosek ten możemy uzupełnić, dodając, że liczba θ nie jest większa od żadnej liczby θ_2 zbioru (C_2) . Istotnie, z definicyi zbioru (C_2) wynika, że do każdej liczby θ_2 tego zbioru można dobrać liczby φ_2 i ψ_2 odpowiednio w zbiorach (A_2) i (B_2) w taki sposób, żeby zachodził wzór (6). Jeżeli tedy oznaczymy przez u'_2 odcinek, którego miarą, w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę byłaby liczba φ_2 , a przez a_2 odcinek, którego miarą, w razie przyjęcia za jednostkę odcinka u'_2 byłaby liczba ψ_2 , to liczba θ_2 będzie miarą odcinka a_2 w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę. Ponieważ mamy

$$\varphi_2 \geq \varphi,$$

przeto

$$u'_2 \geq u'$$

Jeżeli więc oznaczymy przez a'_2 odcinek, którego miarą, w razie przyjęcia odcinka u' za jednostkę, byłaby liczba ψ_2 , to (powyższy lemat) mieć będziemy

$$a_2 \geq a'_2$$

a ponieważ ze związku

$$\psi_2 \geq \psi$$

wynika, że mamy

$$a'_2 \geq a,$$

przeto mamy

$$(24) \quad a_2 \geq a.$$

Zważywszy, że po przyjęciu odcinka u za jednostkę, liczby θ_2 i θ są odpowiednio miarami odcinków a_2 i a , wnosimy ze związku (24), że mamy

$$\theta_2 \geq \theta.$$

Zatem, zgodnie z zapowiedzią, zachodzi okoliczność następująca: jeżeli pewna liczba θ przedstawia iloczyn

$$\varphi \cdot \psi,$$

to ona jest nie tylko nie mniejsza od żadnej liczby zbioru (C_1) , ale i nie większa od żadnej liczby zbioru (C_2) ; innemi słowy, określnik (Ω'') jest określnikiem każdej liczby przedstawiającej iloczyn

$$\varphi \cdot \psi.$$

Pozostaje do wykazania, że skoro określnik (Ω'') jest określnikiem pewnej liczby θ' , to ta liczba przedstawia rozważany iloczyn. Otóż, jeżeli, przy zachowaniu powyższych oznaczeń, uważać będziemy liczbę θ za miarę odcinka a kiedy przyjmujemy za jednostkę odcinek u , to na podstawie uzyskanego przed chwilą wyniku, określnik (Ω'') będzie określnikiem liczby θ . Jeżeli więc określnik (Ω'') jest także określnikiem liczby θ' , to (§ 86, Tw. VI)

$$\theta' = \theta,$$

a z tego wynika (§ 84, Tw. I) że liczba θ' jest miarą odcinka a w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę i przedstawia z tego powodu iloczyn $\varphi \cdot \psi$. Stwierdzamy więc, że każda liczba θ' , której określnikiem jest określnik (Ω'') przedstawia iloczyn

$$\varphi \cdot \psi,$$

a o to tylko jeszcze chodziło.

Tw. III. Mnożenie liczb bezwzględnych jest działaniem arytmetycznem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

Ze względu na Tw. I, § 62 go, wystarczy poprzestać na przypanku, kiedy chodzi o iloczyn dwóch liczb tylko. Otóż, jeżeli pewna liczba bezwzględna θ przedstawia iloczyn mnożenia

$$(1) \quad \varphi \cdot \psi$$

liczby bezwzględnej φ , przyjętej za mnożną przez liczbę bezwzględną ψ , przyjętą za mnożnik, a pewne liczby bezwzględne φ' i ψ' spełniają równości

$$\varphi' = \varphi \quad \text{i} \quad \psi' = \psi$$

to liczba θ przedstawia i iloczyn

$$(2) \quad \varphi' \cdot \psi',$$

gdyż określniki liczb φ i ψ są (§ 86, Tw. VI) w takim razie odpowiednio określnikami liczb φ' i ψ' a zatem określnik iloczynu (1), utworzony za pomocą określników liczb φ i ψ w sposób, określony w twierdzeniu poprzedzającym, jest, na na podstawie wspomnianego twierdzenia, określnikiem iloczynu (2), a stąd wy-

nika, zawsze na podstawie twierdzenia poprzedzającego, że liczba θ przedstawia i iloczyn (2). Z drugiej znów strony, jeżeli pewna liczba θ' równa się liczbie θ , przedstawiającej iloczyn (1), to (§ 86, Tw. VI) określnik liczby θ jest także określnikiem liczby θ' , a z tego wynika (Tw. II), że liczba θ' przedstawia sama iloczyn (1).

Stwierdzamy więc, że mnożenie liczb bezwzględnych jest działaniem arytmetycznym, Działanie to jest jednoznaczne, gdyż (Tw. II), przy oznaczonych mnożnej i mnożniku, można oznaczyć określnik iloczynu, a zatem (§ 86, Tw. VI) tylko równe pomiędzy sobą liczby przedstawiać mogą ten sam iloczyn. Na reszcie, mnożenie dwóch danych liczb bezwzględnych jest zawsze wykonalne. Istotnie określnik, któryśmy oznaczyli w Tw. II przez (Ω'') zawsze (Tw. II, część 1-sza) istnieje, istnieje więc (§ 86, Tw. VI) i liczba θ której określnikiem jest określnik (Ω'') , ta liczba (Tw. II, część 3-cia) jest właśnie rozważanym iloczynem. Ostatecznie, twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Wniosek. Warunek konieczny i wystarczający, aby pewna liczba θ przedstawiała iloczyn

$$\varphi \cdot \psi,$$

liczby bezwzględnej φ , przyjętej za mnożną, przez liczbę bezwzględną ψ , przyjętą za mnożnik, wyrazić można (§ 59) przez równość

$$\theta = \varphi \cdot \psi.$$

Tw. IV. Jeżeli oznaczymy przez φ , ψ i θ jakiekolwiek trzy liczby bezwzględne, to mamy w każdym razie

$$(1) \quad (\varphi \cdot \psi) \cdot \theta = \varphi \cdot (\varphi \cdot \theta).$$

Istotnie, opierając się na Tw. II i na tem, że w odniesieniu do liczb wymiernych niniejsze twierdzenie zostało już uzasadnione w teorii tych liczb, stwierdzamy łatwo, że iloczyny

$$(\varphi \cdot \psi) \cdot \theta \text{ i } \varphi \cdot (\psi \cdot \theta)$$

mają wspólny określnik, a stąd wnosimy (§ 86, Tw. VI) że równość (1) zachodzi w każdym razie.

Tw. V. Jakiegokolwiek liczby bezwzględne oznaczylibyśmy przez φ i ψ , mamy w każdym razie

$$(1) \quad \varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi.$$

Istotnie, jeżeli w sposób wynikający z Tw. II, utworzymy określniki iloczynów

$$(2) \quad \varphi \cdot \psi \text{ i } \psi \cdot \varphi,$$

posługując się temi samemi określnikami liczb φ i ψ w obu przypadkach i zważymy, że w odniesieniu do liczb wymiernych niniejsze twierdzenie już zostało uzasadnione w teoryi tychże, to stwierdzimy, że iloczyny (2) mają wspólny określnik. Zatem (§ 86, Tw. VI) równość (1) rzeczywiście zawsze zachodzi.

Tw. VI. Jeżeli trzy liczby bezwzględne φ , ψ i ψ' spełniają nierówności

$$(1) \quad \varphi > 0$$

oraz

$$(2) \quad \psi < \psi',$$

to w takim razie zachodzi nierówność

$$(3) \quad \varphi \cdot \psi < \varphi \cdot \psi'.$$

Dowód tego twierdzenia można wysnuć z Tw. II nie odwołując się już do definicji mnożenia liczb bezwzględnych i, jako pouczające ćwiczenie, polecamy czytelnikowi, aby w taki właśnie sposób rozważane twierdzenia uzasadnił. Tu zaś, podamy dowód prostszy, a mianowicie następujący. Oznaczmy przez u dowolnie przyjęty odcinek właściwy, a przez u' odcinek, którego miarą byłaby liczba φ w razie przyjęcia odcinka u za jednostkę. Odcinek u' będzie istnieć (§ 84, Tw. I) i będzie ze względu na (1) (§ 84, Tw. II) odcinkiem właściwym. Oznaczmy teraz przez a i a' odcinki, których miarami, po przyjęciu odcinka u' za jednostkę, byłyby odpowiednio liczby ψ i ψ' . Ze względu na nierówność (2) mieć będziemy

$$(4) \quad a < a'$$

z drugiej strony (§ 87, Def. II) liczby θ i θ' , będące odpowiednio miarami odcinków a i a' po przyjęciu odcinka u za jednostkę, przedstawiać będą odpowiednio iloczyny

$$\varphi \cdot \psi \text{ i } \varphi \cdot \psi'.$$

Zatem (Tw. III, Wniosek) mieć będziemy

$$(5) \quad \theta = \varphi \cdot \psi \text{ oraz } \theta' = \varphi \cdot \psi'.$$

Ponieważ zaś, ze względu na (4), mamy

$$\theta < \theta',$$

przeto wnosimy ze związków (5), że, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, nierówność (3) rzeczywiście zachodzić będzie.

Tw. VII. (*Własność rozdzielnosci mnożenia w stosunku do dodawania*). Jeżeli oznaczmy przez φ , ψ i θ dowolnie dane liczby bezwzględne, to mieć będziemy:

$$(1) \quad \varphi \cdot (\psi + \theta) = \varphi \cdot \psi + \varphi \cdot \theta.$$

Istotnie, określники liczb φ , ψ i θ dają możliwość, przy uwzględnieniu Tw. I, § 88-go oraz Tw. II paragrafu niniejszego, oznaczenia pewnego określnika (Ω) iloczynu

$$(2) \quad \varphi \cdot (\psi + \theta),$$

a zważywszy, że w odniesieniu do liczb wymiernych niniejsze twierdzenie już zostało udowodnionem w rozdziale I-szym, łatwo upewnimy się, opierając się ponownie na wymienionych przed chwilą twierdzeniach, że określnik (Ω) jest także określnikiem sumy

$$\varphi \cdot \psi + \varphi \cdot \theta.$$

Z tego zaś wynika (§ 86, Tw. VI) że równość (1) rzeczywiście zachodzi w każdym razie.

§ 91. Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez φ jakąkolwiek liczbę bezwzględną, byle spełniającą nierówność

$$(1) \quad \varphi > 0,$$

a przez ψ już całkiem dowolnie oznaczoną liczbę bezwzględną jeżeli nadto oznaczymy odpowiednio przez (Ω) i (Ω') jakiekolwiek określniki liczb φ i ψ , przez (A_1) i (B_1) odpowiednio pierwsze części tych określników, a przez (A_2) i (B_2) drugie części tychże, to w takim razie zachodzą okoliczności następujące:

1^o Jeżeli oznaczymy przez (C_1) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda jest ilorazem

$$(2) \quad \psi_1 : \varphi_2$$

pewnej liczby ψ_1 zbioru (B_1) przez pewną liczbę φ_2 zbioru (A_2) a przez (C_2) zbiór wszystkich liczb wymiernych, z których każda jest ilorazem

$$(3) \quad \psi_2 : \varphi_1$$

pewnej liczby ψ_2 zbioru (B_2) przez pewną od zera większą liczbę φ_1 zbioru (A_1), to wówczas zbioru (C_1) i (C_2) stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω''), który będzie arytmetycznie oznaczony, jeżeli oznaczone będą arytmetycznie określniki (Ω) i (Ω') i jeżeli prócz tego znana nam będzie pewna liczba wymierna od zera większa a_1 należąca do zbioru (A_1).

2^o Każda liczba bezwzględna θ , której określnikiem jest określnik (Ω''), spełnia równość

$$(4) \quad \varphi \cdot \theta = \psi$$

3^o Nierówność (1) jest dostatecznym warunkiem istnienia takiej liczby θ , która spełniałaby równość (4).

Dowód 1-szej części. Zbiór (C_1) oczywiście nie jest pusty, gdyż ze względu na (1) każda liczba φ_2 zbioru (A_2) jest od zera większa, a zatem dzielenie zaznaczone we wzorze (2) jest niezawodnie zawsze wykonalne. Zbiór (C_2) także nie jest pusty, gdyż byłby pustym tylko w razie gdyby w zbiorze (A_1) nie istniało takiej liczby φ_1 , która spełniałaby nierówność

$$\varphi_1 > 0,$$

a to jest wykluczone; gdyby bowiem zbiór (A_1) obejmował tylko liczby równe zero, to (§ 86, Tw. VII) określnik (Ω) byłby określnikiem liczby zero, a zatem, wbrew zakładanej nierówności (1), mielibyśmy

$$\varphi = 0.$$

Ponieważ mamy

$$\varphi_1 \leq \varphi_2, \quad \psi_1 \leq \psi_2$$

przeło

$$(5) \quad \varphi_1 \cdot \psi_1 \leq \varphi_2 \cdot \psi_2$$

skąd wynika nierówność

$$(6) \quad \psi_1 : \varphi_2 \leq \psi_2 : \varphi_1$$

a to na tej podstawie, iż liczby wymierne stanowią klasę wielkości (K), dla której zachodzą wszystkie twierdzenia rozdziału III-go, a z Tw. VII § 76-go wynika, że w takim razie związek (5) rzeczywiście pociąga za sobą związek (6). Nierówność (6) wyraża, że żadna liczba, należąca do zbioru (C_1) nie jest większa od którejkolwiek z liczb zbioru (C_2) . Powiadam, że, jeżeli oznaczymy przez ε dowolnie daną, byle od zera większą liczbę wymierną, to zawsze istnieć będą dwie liczby wymierne θ_1 i θ_2 , należące odpowiednio do zbiorów, (C_1) i (C_2) , a przy tem takie, żebyśmy mieli

$$(7) \quad \theta_2 - \theta_1 < \varepsilon.$$

Żeby dwie liczby θ_1 i θ_2 należały odpowiednio do zbiorów (C_1) i (C_2) koniecznem jest i wystarczajacem, żebyśmy mieli

$$(8) \quad \theta_1 = \frac{\psi_1}{\varphi_2}, \quad \theta_2 = \frac{\psi_2}{\varphi_1},$$

gdzie

$$(9) \quad \varphi_1, \varphi_2, \psi_1 \text{ i } \psi_2$$

oznaczają pewne liczby należące odpowiednio do zbiorów

$$(10) \quad (A_1), (A_2), (B_1) \text{ i } (B_2).$$

Ponieważ, ze względu na (6) i (8) odejmowanie zaznaczone we wzorze

$$\theta_2 - \theta_1$$

jest wykonalne, przeto, na podstawie wzorów (8), mamy

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{\psi_2 \cdot \varphi_2 - \psi_1 \cdot \varphi_1}{\varphi_2 \cdot \varphi_1}$$

skąd

$$(11) \quad \theta_2 - \theta_1 = \frac{\psi_2 (\varphi_2 - \varphi_1) + \varphi_1 (\psi_2 - \psi_1)}{\varphi_2 \cdot \varphi_1}.$$

Już mieliśmy sposobność zaznaczyć, że w zbiorze (A_1) istnieją liczby od zera większe; oznaczmy przez

$$(12) \quad a_1$$

jedną z nich i, oznaczywszy przez a_2 dowolnie wybraną liczbę w zbiorze (A_2) , a przez b_2 dowolnie wybraną liczbę w zbiorze (B_2) , oznaczmy jeszcze przez w jedną z liczb wymiernych, większych od każdej z dwóch liczb a_2 i b_2 . W takim razie mieć będziemy

$$(13) \quad a_2 < w$$

i

$$(14) \quad b_2 < w.$$

Oznaczmy przez μ dowolnie daną, byle od zera większą, liczbę wymierną; zamierzam okazać, że istnieje taki układ wartości na liczby (9) żebyśmy mieli zarazem

$$(15) \quad \begin{cases} \varphi_2 - \varphi_1 < \mu, \\ \psi_2 - \psi_1 < \mu, \end{cases}$$

$$(16) \quad \varphi_1 \geq a_1,$$

$$(17) \quad \varphi_2 < w,$$

$$(18) \quad \psi_2 < w.$$

Możliwość zadośćuczynienia nierównościom (15) wynika bezpośrednio z definicyi określnika. Założmy więc, żeśmy wyznaczyli taki układ wartości na liczby (9), przy którym nierówności (15) są spełnione. Gdyby przy tem związek (16) nie zachodził, to dostatecznem byłoby zastąpić znaną wartość na φ_1 przez wartość

$$(19) \quad \varphi_1 = a_1,$$

aby uczynić zadość i warunkowi (16), albowiem, w rozważanym przypadku

wartość (19) na φ_1 niezawodnie spełniałaby (15) i (16), a ponieważ a_1 należy do zbioru (A_1) , przeto wartość (19) na φ_1 byłaby, jak być powinno, taką, żeby liczba φ_1 należała do zbioru (A_1) . Załóżmy tedy, żeśmy uczynili zadość nie tylko nierównościom (15), ale i związkowi (16). Gdyby przy tem okazało się, że związek (17) nie zachodzi, to łatwo byłoby tak zmodyfikować znaną wartość na φ_2 , żeby, przy nowej wartości spełniony był i ten związek: dostatecznem byłoby przyjąć

$$\varphi_2 = a_2,$$

albowiem, po takiej zmianie wartości liczby φ_2 związku (15) i (16) nie przestałyby zachodzić, liczba φ_2 nie przestałaby należeć do zbioru (A_2) , a, ze względu na (13), nierówność (17) byłaby spełniona.

Analogicznie, gdyby nierówność (18) zrazu spełniona nie była, to, ze względu (14) i na to, że liczba b_2 należy do zbioru (B_2) , dostatecznem byłoby zastąpić znaną wartość na ψ_2 przez wartość

$$\psi_2 = b_2,$$

żeby uczynić zadość i nierówności (18). Stwierdzamy więc, że, po przyjęciu na liczbę wymierną μ jakiegokolwiek byle od zera większej wartości, zawsze istnieć będzie taki układ wartości na liczby wymierne (9), żeby liczby te należały odpowiednio do zbiorów (10) i spełniały związki (15), (16), (17) i (18). Załóżmy, że liczby (9) spełniają wszystkie te warunki. Ponieważ mamy w każdym razie

$$(20) \quad \varphi_1 \leq \varphi_2,$$

przeto, ze względu na (17), mamy

$$\varphi_1 < w.$$

Uwzględniając tę nierówność oraz nierówności (15), (17) i (18), wyprowadzamy ze wzoru (11) nierówność

$$\theta_2 - \theta_1 < \frac{2 \cdot w \cdot \mu}{\varphi_1 \cdot \varphi_2},$$

z której ze względu na (16) i (20) wynika nierówność

$$(21) \quad \theta_2 - \theta_1 < \frac{2 w}{a_1^2} \cdot \mu.$$

Oznaczmy teraz, jak wyżej, przez ε dowolnie daną, byle od zera większą liczbę wymierną. Na podstawie teorii liczb wymiernych istnieć będzie taka wartość liczby wymiernej μ , żebyśmy mieli

$$(22) \quad \frac{2 w}{\varphi_1^2} \cdot \mu = \varepsilon,$$

a ponieważ, na podstawie uzyskanych wyników istnieć będzie taki układ wartości na liczby (9), należące odpowiednio do zbiorów (10), żeby spełnione były związki (15), (16), (17) i (18), ponieważ w takim razie, po wyznaczeniu liczb θ_1 i θ_2 ze wzorów (8), zachodzić będzie nierówność (21), a więc ze względu na (22), i nierówność (7), przeto stwierdzamy, że rzeczywiście istnieć będą dwie liczby wymierne θ_1 i θ_2 , należące odpowiednio do zbiorów (C_1) i (C_2) , które spełniać będą nierówność (7). Zważywszy, iż stwierdziliśmy już wyżej, że żadna liczba zbioru (C_1) nie jest większa od jakiejkolwiek liczby zbioru (C_2) , wnosimy stąd, że zbiory (C_1) i (C_2) stanowią rzeczywiście odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω'') . Zatem, żeby uzasadnić w zupełności 1-szą część twierdzenia, należy tylko okazać, że określnik (Ω'') będzie arytmetycznie oznaczony, jeżeli liczba a_1 będzie znana, a określniki (Ω) i (Ω') — arytmetycznie oznaczone. Otóż, aby upewnić się, że tak jest, należy tylko zważyć, iż podany wyżej dowód istnienia takich dwóch liczb θ_1 i θ_2 , należących odpowiednio do zbiorów (C_1) i (C_2) żeby te liczby spełniły nierówność (7), stanowi zarazem wykład metody do rzeczywistego wyznaczenia tych liczb w zależności od liczby ε w przypadku, kiedy liczba a_1 jest dana, a określniki (Ω) i (Ω') są arytmetycznie oznaczone.

Dowód 2^o części. Założmy, że pewna liczba θ jest liczbą której określnikiem jest określnik (Ω'') i uważajmy iloczyn

$$(23) \quad \varphi \cdot \theta.$$

Jeżeli oznaczmy przez (D_1) zbiór wszystkich liczb wymiernych z których każda jest iloczynem jednej liczby φ'_1 , należącej do zbioru (A_1) przez jedną liczbę θ_1 zbioru (C_1) a przez (D_2) zbiór wszystkich liczb, z których każda jest iloczynem jednej liczby φ'_2 , należącej do zbioru (A_2) przez jedną liczbę θ_2 , należącą do zbioru (C_2) , to (§ 90, Tw. II) zbiory (D_1) i (D_2) stanowią będą odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω''') iloczynu (23). Powiadam, że określnik (Ω''') będzie także określnikiem liczby ψ . Istotnie, jeżeli pewne liczby wymierne l_1 i l_2 należą odpowiednio do zbiorów (D_1) i (D_2) , to można będzie znaleźć takie liczby

$$(24) \quad \varphi'_1, \varphi'_2, \theta_1 \text{ i } \theta_2$$

należące odpowiednio do zbiorów

$$(25) \quad (A_1), (A_2), (C_1) \text{ i } (C_2),$$

żebyśmy mieli

$$(26) \quad \begin{cases} l_1 = \varphi'_1 \cdot \theta_1 \\ l_2 = \varphi'_2 \cdot \theta_2 \end{cases}$$

Ponieważ liczby θ_1 i θ_2 należą odpowiednio do zbiorów (C_1) i (C_2) przeto liczby

(9) tak można będzie wybrać odpowiednio w zbiorach (10) żeby zachodziły wzory (8). Na podstawie tych wzorów i wzorów (26) mamy

$$(27) \quad \begin{cases} l_1 = \frac{\varphi'_1}{\varphi_2} \cdot \psi_1 \\ l_2 = \frac{\varphi'_2}{\varphi_1} \cdot \psi_2 \end{cases}$$

Ponieważ liczby

$$\varphi'_1 \text{ i } \varphi_1$$

należą do zbioru (A_1) , a liczby φ'_2 i φ_2 do zbioru (A_2) , przeto mamy

$$\varphi'_1 \leq \varphi_2, \quad \varphi_1 \leq \varphi'_2,$$

mamy więc

$$\frac{\varphi'_1}{\varphi_2} \leq 1, \quad \frac{\varphi'_2}{\varphi_1} \geq 1,$$

a z tych związków i ze wzorów (27) mamy

$$(28) \quad l_1 \leq \psi_1, \quad l_2 \geq \psi_2;$$

ponieważ zaś mamy w każdym razie

$$\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2,$$

przeto, ze związków (28) wynika, że mamy

$$l_1 \leq \psi \leq l_2.$$

Zatem, liczba ψ nie jest ani mniejsza od jakiejkolwiek liczby l_1 zbioru (D_1) , ani większa od jakiejkolwiek liczby l_2 zbioru (D_2) . Przeto, zgodnie z zapowiedzią, określnik (Ω''') jest określnikiem liczby ψ . Ponieważ zaś ten sam określnik jest także określnikiem iloczynu (23), przeto (§ 86, Tw. VI), zgodnie z brzmieniem 2-giej części twierdzenia zachodzi równość (4).

Dowód 3-ciej części. Jeżeli nierówność (1) jest spełniona, to (ze względu na dowiedzioną już 1-szą część twierdzenia) zbiory, któreśmy wyżej oznaczył przez (C_1) i (C_2) stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω'') . Skoro zaś określnik (Ω'') istnieje, to (§ 86, Tw. I) istnieje i liczba θ , której określnikiem jest określnik (Ω'') . Ponieważ zaś na podstawie 2-giej części twierdzenia taka liczba θ spełnia równość (4), przeto 3-cia część twierdzenia jest uzasadniona.

Ostatecznie twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

§ 92. Tw. I. Definicje dodawania i mnożenia liczb bezwzględnych, podane w § 87-ym, czynią zadość ogólnym zasadom rozdziału II-go.

Istotnie, rzeczzone zasady, podane pod (C) (str. 52) w § 59-ym polegają na tem, żeby dodawanie i mnożenie dwóch wielkości stanowiły dwa działania arytmetyczne, jednoznaczne, wykonalne bez zastrzeżeń. Otóż Tw. II § 88-go i Tw. III § 90 go wyrażają właśnie, że te warunki są spełnione.

Tw. II. Wszystkie twierdzenia, a więc i definicje podane w rozdziale III-cim, są ważne dla tej klasy wielkości (K), jaką stanowi zbiór wszystkich liczb bezwzględnych.

Wszystkie twierdzenia wyłożone w rozdziale III-cim stanowią następstwa logiczne tamże podanych definicji i założeń następujących:

1° Podstawowe definicje dodawania i mnożenia elementów klasy (K) czynią zadość zasadom, podanym w rozdziale II gim.

2° W odniesieniu do wielkości klasy (K) każde z dziewięciu twierdzeń, podanych w § 67-ym oraz twierdzenia I i II § 76-go są słuszne.

Na podstawie Tw. I zbiór liczb bezwzględnych stanowi klasę wielkości spełniającą założenie 1-sze. Zatem, pozostaje tylko do okazania, że rzeczony zbiór spełnia i założenie 2-gie.

Otóż, na podstawie Uwagi I, przy Tw. VI § 69-go, udowodnimy, że okoliczność ta zachodzi, jeżeli wykazemy, że, w odniesieniu do liczb bezwzględnych, ważne są twierdzenia następujące:

(A) Twierdzenia I, II, III, IV, V, VI, IX § 67-go.

(B) Twierdzenia I i II § 76-go.

(C) Twierdzenia, wysłowione pod (A) i (B) w Uwadze I przy Tw. VI § 69 go.

Ale z twierdzeń III i IV § 88-go, tw. V § 88-go, tw. I § 89, tw. IV, V i VII § 90-go wynika właśnie, że twierdzenia, wymienione pod (A) są ważne w odniesieniu do liczb bezwzględnych. z drugiej strony, ze względu na tw. II § 89-go, tw. V § 88 go i tw. VI § 90-go wyrażają, że, w odniesieniu do liczb bezwzględnych, twierdzenia wymienione pod (B) są ważne.

Mamy więc do wykazania, że, w odniesieniu do liczb bezwzględnych, twierdzenia, zaznaczone pod (C), a więc twierdzenia, podane w Uwadze I przy Tw. VI § 69-go pod (A) i (B) są ważne. Otóż zważywszy, że (§ 84. Tw. III) każda liczba bezwzględna a spełnia związek

$$a \geq 0,$$

stwierdzamy, że, jeżeli oznaczymy przez a liczbę bezwzględną, to nierówności

$$a > 0 \text{ i } a \neq 0$$

są równoważne pomiędzy sobą. Z tego wnosimy, przyjąwszy pod uwagę, że liczba zero (§ 89, Tw. II) jest modułem dodawania liczb bezwzględnych, iż, na podstawie Tw. VI § 90-go i Tw. I § 91-go twierdzenia podane pod (A) i (B) w Uwadze I, przy Tw. VI § 69 go są ważne w odniesieniu do liczb bezwzględ-

nych, a to tylko pozostawało do okazania, żeby udowodnić w zupełności twierdzenie, o które chodziło.

Uwaga I. Aby należycie zastosowywać do liczb bezwzględnych ogólną teorię, rozwiniętą w rozdziale III-cim, należy tylko mieć na względzie Tw. II, § 89-go.

§ 93. Na zakończenie zbadamy, w jakim stopniu jesteśmy w stanie rzeczywiście rozwiązywać zagadnienia następujące:

(A) Rozstrzygnąć, w którym z trzech związków

$$\varphi < \psi, \varphi = \psi \text{ lub } \varphi > \psi$$

znajdują się dwie dane (§ 86, Def. VI) liczby bezwzględne φ i ψ .

(B) Wyznaczyć (§ 86, Def. VII) wynik wykonania jednego z działań podstawowych na dwóch danych (§ 86, Def. VI) liczbach bezwzględnych φ i ψ .

Wprawdzie posiadamy kryteria do rozstrzygnięcia, w którym z trzech związków

$$\varphi < \psi, \varphi = \psi \text{ lub } \varphi > \psi$$

znajdują się dwie liczby bezwzględne φ i ψ , a, jeżeli chodzi o wykonanie jednego z działań podstawowych na liczbach bezwzględnych φ i ψ , to wiemy, jakie są warunki wykonalności rozważanego działania i stwierdziliśmy, że, gdy warunki te są spełnione, to pewne dwa zbiory liczb wymiernych, określone w pewien sposób w zależności od tych, które stanowią pierwsze i drugie części określników rozważanych liczb, stanowiąc będą odpowiednio pierwszą i drugą część określnika wyniku wykonania rozważanego działania na rozważanych liczbach. Z tego wszystkiego jednak nie wynika jeszcze, żebyśmy rzeczywiście zawsze potrafili rozwiązać zagadnienia, wysłowione pod (A) i (B). Zwróćmy się najpierw do zagadnienia (A).

Jeżeli liczby φ i ψ są znane tylko w znaczeniu określonym przez Def. VI § 86-go, jeżeli więc dany jest tylko jeden określnik liczby φ i jeden określnik liczby ψ , to do rozwiązania zagadnienia (A) nie posiadamy żadnego innego środka prócz następującego: Przyjawszy dowolnie pewną liczbę wymierną ε_1 od zera większą, wyznaczamy z jednej strony liczby wymierne a_1 i a_2 , należące odpowiednio do pierwszej części (A_1) i drugiej (A_2) danego określnika liczby φ w ten sposób, żebyśmy mieli

$$(1) \quad a_2 - a_1 < \varepsilon_1,$$

a z drugiej, liczby wymierne b_1 i b_2 , należące odpowiednio do pierwszej części (B_1) i drugiej części (B_2) danego określnika liczby ψ w ten sposób, żeby spełniona była nierówność

$$(2) \quad b_2 - b_1 < \varepsilon.$$

Otóż jeżeli okaże się, że mamy

$$(3) \quad a_2 < b_1$$

to stąd oczywiście wyciągniemy wniosek, że

$$(4) \quad \varphi < \psi;$$

jeżeli zaś okaże się że

$$(5) \quad b_2 < a_1,$$

to okoliczność ta będzie oznaką istnienia nierówności

$$(6) \quad \varphi > \psi.$$

Natomiast jeżeli stwierdzimy, że nie zachodzi ani (3), ani (5), to nie pozostaje, jak tylko powtórzyć powyższy rachunek z tą odmianą, iż w miejsce liczby ε_1 przyjmiemy drugą liczbę wymierną ε_2 mniejszą od ε_1 , ale naturalnie od zera większą. Wogóle wypaść może konieczność kolejnego zastępowania liczby ε_1 w rachunku, naszkicowanym wyżej, przez

$$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \dots$$

Jeżeli przy n -tej próbie okaże się, że liczby

$$a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, b_1^{(n)} \text{ i } b_2^{(n)},$$

należące odpowiednio do zbiorów (A_1) , (A_2) , (B_1) i (B_2) , spełniają albo nierówność

$$(7) \quad a_2^{(n)} < b_1^{(n)},$$

albo

$$(8) \quad a_1^{(n)} > b_2^{(n)},$$

to zagadnienie (A) będzie rozwiązane, gdyż zachodzić będzie nierówność (4) lub (6) zależnie od tego, czy spełniona będzie nierówność (7), czy też nierówność (8). Jeżeli w rzeczywistości liczby φ i ψ są pomiędzy sobą nierówne, to omawiana metoda przy stosownym dobieraniu liczb

$$(9) \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots$$

zawsze doprowadzi do rozwiązania zagadnienia; wystarczyłoby np. wyznaczać liczby (9) ze wzoru

$$\varepsilon_n < \frac{1}{n},$$

aby, przy dostatecznie wielkiej wartości na n (a mianowicie na tyle wielkiej, żeby $\frac{1}{n}$ było mniejsze od połowy różnicy bezwzględnej liczb φ i ψ) jeden ze

związków (7) lub (8) był spełniony, a tem samem zagadnienie rozwiązane. Natomiast, gdyby w rzeczywistości liczby φ i ψ były równe pomiędzy sobą, a okoliczność ta nie była nam wiadoma, to oczywiście przy żadnych wartościach na n i ε , nie mogłaby zachodzić ani nierówność (7), ani nierówność (8). Zatem powyższa metoda nie doprowadziłaby nas do rozwiązania omawianego zagadnienia. Ostatecznie nie posiadamy ogólnej metody, nadającej się do rozwiązania zagadnienia (A) w każdym razie. Może się nawet wydarzyć, że nie potrafimy rozwiązać zagadnienia (A) w tym szczególnym przypadku, kiedy jedna z liczb φ lub ψ , powiedzmy φ , jest liczbą wymierną, daną przez swój symbol specyficzny w , albowiem w tym przypadku szczególnym zachodziłoby to tylko uproszczenie, że moglibyśmy przy każdej próbie przyjąć

$$a_1^{(n)} = b_1^{(n)} = w,$$

ale ta okoliczność nie usunęłaby trudności, którą uwidoczniliśmy wyżej.

Przechodzimy teraz do zagadnienia (B). Jeżeli chodzi o sumę

$$\varphi + \psi$$

albo o iloczyn

$$\varphi \cdot \psi$$

to za zawsze będziemy mogli rozważane zagadnienie rozwiązać, jak to wynika z Tw. I § 88-go i Tw. I i II § 90-go. Natomiast inny jest stan rzeczy, kiedy chodzi o różnicę

$$(10) \quad \psi - \varphi,$$

albo o iloraz

$$(11) \quad \psi : \varphi.$$

Ponieważ nie zawsze potrafimy rozstrzygnąć, czy związek

$$(12) \quad \psi \geq \varphi$$

jest spełniony, przeto nie zawsze potrafimy rozstrzygnąć czy odejmowanie, zaznaczone we wzorze (10), jest wykonalne; póki ta kwestya nie jest rozstrzygnięta, nie może być oczywiście mowy o rozwiązaniu zagadnienia (B) w stosunku do różnicy (10). Jeżeli jednak wiemy, że związek (12) zachodzi, to (§ 89 Tw. I) w takim razie będziemy mogli wyznaczyć różnicę (10) w znaczeniu określonym w § 86 przez Def. VII.

Jeżeli nareszcie chodzi o iloraz (11), to stan rzeczy jest analogiczny: ponieważ nie zawsze potrafimy stwierdzić, czy mamy

$$(13) \quad \varphi > 0,$$

przeto nie zawsze nawet zdołamy upewnić się, czy dzielenie, zaznaczone we wzorze (11), jest wykonalne. Jeśli jednak, posługując się metodą, podaną wyżej do badania zagadnienia (A), zdołamy stwierdzić, że zachodzi nierówność (13),

to tem samem wyznaczmy liczbę wymierną w , należącą do pierwszej części określnika liczby φ i spełniającą nierówność

$$w > 0,$$

a w takim razie, na podstawie Tw. I § 91-go, określnik ilorazu

$$\psi : \varphi$$

będzie arytmetycznie oznaczony, a więc (§ 86, Def. VII) ten iloraz wyznaczony.

V. Liczby względne. Ogólne pojęcie liczby rzeczywistej.

§ 94. Podstawowe definicje teorii, którą zamierzamy w niniejszym rozdziale wyłożyć, nastroczają się nam same, po uczynieniu pewnych uwag, odnoszących się do twierdzenia następującego.

Tw. I. Jeżeli cztery liczby bezwzględne

$$a, b, a' \text{ i } b'$$

spełniają związki

$$(1) \quad a \geq b, \quad a' \geq b'$$

to w takim razie:

1° związki

$$(2) \quad \begin{cases} a - b < a' - b' \\ a - b = a' - b' \\ a - b > a' - b' \end{cases}$$

są równoważne odpowiednio związkom

$$(3) \quad \begin{cases} a + b' < a' + b \\ a + b' = a' + b \\ a + b' > a' + b; \end{cases}$$

2° mamy

$$(4) \quad (a - b) + (a' - b') = (a + a') - (b + b')$$

3° oraz

$$(5) \quad (a - b) \cdot (a' - b') = (a \cdot a' + b \cdot b') - (a \cdot b' + b \cdot a').$$

Dowód ad 1°. Ponieważ (§ 89, Tw. I część 1°) związki (1) stanowią dostateczne (i konieczne) warunki wykonalności odejmowań, zaznaczonych we wzorach

$$a - b \text{ i } a' - b',$$

przeto (§ 92, Tw. II, § 76, Tw. IV) związki (2) i (3) są rzeczywiście równoważne pomiędzy sobą.

Dowód ad 2°. Opierając się znowu na Tw. II § 92-go, oraz na Tw. II § 69-go, mamy

$$(a - b) + (a' - b') = \{ (a - b) + a' \} - b'.$$

Na tychże podstawach mamy

$$(a - b) + a' = (a + a') - b,$$

zatem

$$(6) \quad (a - b) + (a' - b') = \{ (a + a') - b \} - b'.$$

Zwracając się znowu do twierdzeń, wymienionych przed chwilą, mamy

$$(7) \quad \{ (a + a') - b \} - b' = (a + a') - (b + b'),$$

a z równości (6) i (7) wynika równość (4), o którą nam właśnie chodziło.

Dowód ad 3°. Mamy (§ 92 Tw. II, § 71 Tw. II):

$$(8) \quad (a - b) \cdot (a' - b') = a \cdot (a' - b') - b \cdot (a' - b')$$

oraz

$$a \cdot (a' - b') = a \cdot a' - a \cdot b',$$

$$b \cdot (a' - b') = b \cdot a' - b \cdot b'.$$

Z tych równości oraz z równości (8) mamy:

$$(9) \quad (a - b) \cdot (a' - b') = (a \cdot a' - a \cdot b') - (b \cdot a' - b \cdot b')$$

Z drugiej znów strony (§ 92 Tw. II, § 69 Tw. II) mamy

$$\begin{aligned} (a \cdot a' - a \cdot b') - (b \cdot a' - b \cdot b') &= \\ &= \{ (a \cdot a' - a \cdot b') + b \cdot b' \} - b \cdot a', \end{aligned}$$

$$(a \cdot a' - a \cdot b') + b \cdot b' = (a \cdot a' + b \cdot b') - a \cdot b',$$

mamy więc

$$\begin{aligned} (a \cdot a' - a \cdot b') - (b \cdot a' - b \cdot b') &= \\ &= \{ (a \cdot a' + b \cdot b') - a \cdot b' \} - b \cdot a'; \end{aligned}$$

a ponieważ (§ 92 Tw. II, § 69 Tw. II) mamy

$$\{ (a \cdot a' + b \cdot b') - a \cdot b' \} - b \cdot a' = (a \cdot a' + b \cdot b') - (a \cdot b' + b \cdot a'),$$

przeto

$$(a \cdot a' - a \cdot b') - (b \cdot a' - b \cdot b') = (a \cdot a' + b \cdot b') - (a \cdot b' + b \cdot a'),$$

a z tej równości oraz z równości (9) wynika rzeczywiście równość (5).

Ostatecznie twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Powyższe twierdzenie straciłoby treść, gdyby nie każdy ze związków (1) był spełniony, gdyż w takim razie odejmowanie, zaznaczone w jednym przynajmniej ze wzorów

$$a - b \text{ lub } a' - b',$$

byłoby niewykonalne, jeden więc przynajmniej z tych wzorów pozbawiony byłby znaczenia, a zatem jeden przynajmniej z symbolów, w których wyrażone jest rozważane twierdzenie, nie miałyby znaczenia i z tego powodu samo to twierdzenie byłoby bez treści.

Jednakowoż, bez względu na istnienie lub nieistnienie związków (1), zachodzą okoliczności następujące:

1° Sumy

$$(10) \quad a + b' \text{ i } a' + b$$

spełniałyby w każdym razie któryś ze związków (3).

2° Każda z sum

$$(11) \quad a + a' \text{ i } b + b'$$

posiadałaby oznaczoną wartość.

3° Każda z sum iloczynów

$$(12) \quad a \cdot a' + b \cdot b' \text{ i } a \cdot b' + b \cdot a'$$

posiadałaby oznaczoną wartość.

Powyższe fakta stanowią dostateczną podstawę po wytworzenia pewnej nowej klasy wielkości i do ugruntowania teorii działań podstawowych na wielkościach tej klasy. Istotnie, oznaczmy przez (Z) zbiór wszystkich przedmiotów, z których każdy jest zespołem dwóch liczb bezwzględnych, ułożonych w oznaczonym porządku, i przyjmijmy za symbol tego elementu zbioru (Z), do którego jakaś liczba bezwzględna u wchodzi z numerem pierwszym, a jakaś druga liczba bezwzględna v — z numerem drugim, symbol

$$(u, v).$$

Ponieważ sumy (10) spełniają któryś jeden ze związków (3) przy każdym układzie wartości na liczby bezwzględne

$$a, b, a' \text{ i } b',$$

przeto możemy powziąć myśl o definicji następującej:

Def. (A) Jeżeli oznaczymy przez

$$(13) \quad a, b, a' \text{ i } b'$$

jakikolwiek cztery liczby bezwzględne i weźmiemy pod uwagę elementy

zbioru (Z), to związki

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a, b) < (a', b'), \\ (a, b) = (a', b'), \\ (a, b) > (a', b') \end{array} \right.$$

uwagać będziemy za równoważne odpowiednio pierwszemu drugiemu i trzeciemu ze związków (3).

Ta okoliczność, że każdy ze wzorów (11) i (12) przedstawiać będzie liczbę, bezwzględną o oznaczonej wartości, jakiegokolwiek wartości miałyby liczby (13), nastrocza nam następujące dwie definicje:

Def. (B) Sumą

elementu

i elementu

zbioru (Z) zowiemy element

$$(a + a', b + b')$$

zbioru (Z) i każdy element temu elementowi równy.

Def. (C) Iloczynem mnożenia, za mnożną przyjętego elementu

zbioru (Z) przez element

przyjęty za mnożnik, zowiemy element

$$(a \cdot a' + b \cdot b', a \cdot b + a' \cdot b')$$

zbioru (Z) oraz każdy element temu elementowi równy.

Stosunek trzech powyższych definicji do Tw. I możemy wyrazić w sposób następujący: Gdybyśmy umówili się, że w przypadku, kiedy dwie liczby bezwzględne u i v spełniają związek

$$u \geq v,$$

symbol

$$(u, v)$$

uważać będziemy za symbol różnicy

$$(u - v),$$

to w razie istnienia związków (1), definicje (A), (B) i (C) przybrałyby charakter twierdzeń, odpowiednio równoważnych 1-szej, 2-giej i 3-ciej części Tw. I.

Definicje (A), (B) i (C) określają w zupełności podstawowe pojęcia teorii, którą pragniemy ugruntować, a nadmieniwszy, iż elementy zbioru (Z) przybierają nazwę *liczb względnych* w przypadku, kiedy porównywanie ilościowe tychże określamy definicją (A), a działania podstawowe na nich — definicjami (B) i (C), określilibyśmy i podstawowe wyrażenie techniczne rzeczzonej teorii.

Powyższe uwagi doprowadzają do ostatecznego sformułowania podstawowych definicji teorii liczb względnych w sposób następujący:

Umawiamy się, że pojęcie *liczby względnej* uważać będziemy za określone przez zespół definicji następujących:

Def. I. *Liczba względna* jest układem dwóch liczb bezwzględnych, z których jedna a uważana jest jako mająca numer pierwszy, a druga b — jako mająca numer drugi; przy tem znaczeniu symbolów a i b uważać będziemy za symbol (tymczasowy) liczby względnej, którą tworzą razem liczby a i b przy powyższem ich uszeregowaniu, symbol

$$(a, b),$$

a jednocześnie nadawać będziemy liczbom a i b odpowiednio nazwę *pierwszego* i *drugiego wyrazu* odnośnej liczby względnej.

Def. II. Jeżeli oznaczmy przez

$$\bar{a}, b, a' \text{ i } b'$$

cztery dowolnie przyjęte liczby bezwzględne i przyjmiemy pod uwagę liczby względne

$$(a, b) \text{ i } (a', b'),$$

to związki

$$(a, b) < (a', b'),$$

$$(a, b) = (a', b'),$$

$$(a, b) > (a', b'),$$

uważać będziemy za odpowiednio równoważne związkom następującym:

$$a + b' < a' + b,$$

$$a + b' = a' + b,$$

$$a + b' > a' + b.$$

Def. III. Zachowując powyższe oznaczenia, uważać będziemy za *sumę* liczby względnej (a, b) i liczby względnej (a', b') każdą liczbę względną równą liczbie względnej

$$(a + a', b + b').$$

Def. IV. Jeżeli w dalszym ciągu zachowamy powyższe oznaczenia, to uważać będziemy za *iloczyn* mnożenia liczby względnej

$$(a, b),$$

przyjętej za mnożną, przez liczbę względną,

$$(a' b'),$$

przyjętą za mnożnik, każdą liczbę względną równą liczbie względnej:

$$(a \cdot a' + b \cdot b', a \cdot b' + b \cdot a').$$

Ze względu na ogólną teorię, wyłożoną w rozdziale II-gim, powyższe definicje, o ile tylko nie uchybiają ogólnym zasadom, do których postanowiliśmy się zawsze zastosowywać przy nadawaniu charakteru wielkości elementom oznaczonego zbioru i przy podawaniu definicji dodawania i mnożenia dla dwóch wielkości oznaczonej klasy, wystarczają w zupełności do ugruntowania całej teorii działań podstawowych na liczbach względnych. Przedewszystkiem więc winniśmy udowodnić, że omawiane definicje rzeczywiście nie uchybiają wspomnianym zasadom.

§ 95. Żeby udowodnić zgodność z zasadami rozdziału III-go pierwszej części tego dzieła definicji, nadającej zbiorowi liczb względnych charakter klasy wielkości w znaczeniu ściślejszym, należy tylko uzasadnić twierdzenie następujące:

Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez

$$a, a', a'', b, b' \text{ i } b''$$

sześć liczb bezwzględnych i weźmiemy pod uwagę liczby względne

$$(a, b), (a', b') \text{ i } (a'', b'')$$

to w takim razie zachodzą okoliczności następujące:

1° Mamy

$$(1) \quad (a, b) = (a, b).$$

2° Równości

$$(2) \quad (a, b) = (a' b')$$

i

$$(3) \quad (a', b') = (a, b)$$

są równoważne pomiędzy sobą.

3° Równości

$$(4) \quad (a, b) = (a', b') \text{ i } (a', b') = (a'', b'')$$

pociągają za sobą równość

$$(5) \quad (a, b) = (a'', b'').$$

4° Z trzech związków

$$(6) \quad (a, b) < (a', b'), (a, b) = (a', b') \text{ i } (a, b) > (a', b')$$

zawsze zachodzi jakiś jeden, ale tylko jeden.

5° Związki

$$(7) \quad (a, b) < (a' b')$$

i

$$(8) \quad (a', b') > (a, b)$$

są równoważne pomiędzy sobą.

6° Związki

$$(9) \quad (a, b) < (a', b') \text{ i } (a', b') < (a'', b'')$$

pociągają za sobą związek

$$(10) \quad (a, b) < (a'', b'').$$

Dowód ad 1°. Kryterium (§ 94, Def. II) na istnienie równości

$$(a, b) = (a', b')$$

polega na istnieniu równości

$$a + b' = a' + b,$$

a ponieważ² po podstawieniu w miejsce liczb a' i b' odpowiednio liczb a i b do wyrażen

$$a + b' \text{ i } a' + b$$

każda z tych sum przemienia się w sumę

$$a + b,$$

ponieważ nadto mamy

$$a + b = a + b,$$

przeto 1-sza część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Dowód ad 2°. Równość (2) (§ 94, Def. II) jest równoważna równości

$$a + b' = a' + b,$$

która znów równoważna jest równości

$$a' + b = a + b',$$

równoważnej (§ 94, Def. II) równości (3). Zatem równości (2) i (3) są rzeczywiście równoważne pomiędzy sobą.

Dowód ad 3°. Z równości (4) (§ 94, Def. II) mamy

$$a + b' = a' + b$$

oraz

$$a' + b'' = a'' + b',$$

skąd

$$a + b' + a' + b'' = a' + b + a'' + b',$$

zatem

$$(a + b'') + (a' + b') = (a'' + b) + (a' + b'),$$

skąd

$$a + b'' = a'' + b,$$

a z tej równości wynika rzeczywiście (§ 94, Def. II) równość (5).

Dowód ad 4°. Ponieważ (§ 94, Def. II) związki (6) są odpowiednio równoważne związkom

$$a + b' < a' + b, \quad a + b' = a' + b \quad \text{i} \quad a + b' > a' + b,$$

a z tych ostatnich zawsze zachodzi jakiś jeden, ale tylko jeden, przeto 4-ta część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Dowód ad 5°. Ponieważ (§ 94, Def. II) związki (7) i (8) są odpowiednio równoważne związkom

$$a + b' < a' + b$$

i

$$a' + b > a + b'$$

a te znów związki są pomiędzy sobą równoważne, przeto związki (7) i (8) są rzeczywiście równoważne pomiędzy sobą.

Dowód ad 6°. Związki (9) pociągają za sobą (§ 94, Def. II) związki następujące.

$$a + b' < a' + b,$$

$$a' + b'' < a'' + b',$$

skąd

$$a + b' + a' + b'' < a' + b + a'' + b',$$

czyli

$$(a + b'') + (a' + b') < (a'' + b) + (a' + b'),$$

skąd

$$a + b'' < a'' + b,$$

a ten związek pociąga za sobą związek (10).

Zatem związki (9) rzeczywiście pociągają za sobą związek (10).

Ostatecznie twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu, a tem samem udowodniona jest zgodność Def. II § 94-go z ogólnymi zasadami rozdziału III-go 1-szej części tego dzieła.

§ 96. Zgodność definicji III i IV § 94-go z ogólnymi zasadami rozdziału II-go, czyli *poprawność* rzeczonych definicji wynika z dwóch twierdzeń, które uzasadnimy niżej.

Tw. I. Dodawanie dwóch liczb względnych jest działaniem arytmetycznem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń. Istotnie.

1° Dodawanie liczb względnych jest działaniem arytmetycznem. Żeby udowodnić, że ta okoliczność zachodzi, należy udowodnić dwa lematy następujące:

(A) Jeżeli pewna liczba względna x przedstawia sumę

$$(1) \quad (a, b) + (a', b')$$

liczb względnych (a, b) i (a', b') , to każda liczba x' , równa liczbie x , przedstawia także rzeczoną sumę.

(B) Jeżeli pomiędzy czterema liczbami względnymi zachodzą równości

$$(2) \quad (a, b) = (c, d), \quad (a', b') = (c', d'),$$

a pewna liczba względna x przedstawia sumę

$$(3) \quad (a, b) + (a', b'),$$

to liczba względna x przedstawia także sumę

$$(4) \quad (c, d) + (c', d').$$

Żeby uzasadnić lemat (A), zważmy, że, jeżeli liczba x przedstawia sumę (1), to (§ 94, Def. III) mamy

$$x = (a' + a', b + b').$$

Jeżeli więc mamy

$$x' = x,$$

to mamy

$$x' = (a + a', b + b');$$

zatem (§ 94, Def. III) liczba względna x' przedstawia rzeczywiście także sumę (1).

Zwracając się do lematu (B), stwierdzamy, że (§ 94, Def. II) równości (2) pociągają za sobą równości

$$(5) \quad \begin{cases} a + d = c + b, \\ a' + d' = c' + b'. \end{cases}$$

Z drugiej znów strony (§ 94, Def. III), jeżeli pewna liczba względna x przedstawia sumę (3), to mamy

$$(6) \quad x = (a + a', b + b'),$$

a, żeby pewna liczba względna przedstawiała sumę (4), wystarczy żeby ta liczba równała się liczbie

$$(c + c', d + d').$$

Ale z równości (5) mamy

$$a + d + a' + d' = c + b + c' + b'$$

czyli

$$(a + a') + (d + d') = (c + c') + (b + b'),$$

skąd (§ 94, Def. II) wynika równość

$$(a + a', b + b') = (c + c', d + d'),$$

która ze względu na (6) pociąga za sobą

$$x = (c + c', d + d')$$

Zatem, zgodnie z brzmieniem lematu (B), jeżeli pewna liczba względna x przedstawia sumę (3), to w razie istnienia równości (2) ta liczba przedstawia także sumę (4).

Ponieważ tedy uzasadniliśmy lematy (A) i (B), przeto uzasadniliśmy część 1-szą naszego twierdzenia.

2^o Dodawanie liczb względnych jest jednoznaczne, innymi słowy, jeżeli z dwóch liczb względnych x i x' każda przedstawia sumę

$$(a, b) + (a', b')$$

dwóch liczb względnych, to te liczby są równe pomiędzy sobą. Istotnie (§ 94, Def. III) z założeń tego twierdzenia mamy

$$x = (a + a', b + b')$$

oraz

$$x' = (a + a', b + b'),$$

skąd rzeczywiście wynika równość

$$x = x'.$$

3° Dodawanie liczb względnych jest wykonalne bez zastrzeżeń. Istotnie, jakiegokolwiek liczby bezwzględne oznaczylibyśmy przez

$$a, b, a' \text{ i } b',$$

jakiegokolwiek więc liczby względne przedstawiałyby symbole

$$(a, b) \text{ i } (a', b'),$$

zawsze wykonalne będą dodawania, zaznaczone we wzorach

$$a + a', \text{ i } b + b',$$

a zatem symbol

$$(a + a', b + b')$$

zawsze będzie przedstawiać pewną liczbę względną. Ponieważ zaś ta liczba względna (§ 94, Def. III) przedstawia sumę

$$(a, b) + (a', b'),$$

przeto dodawanie liczb względnych jest rzeczywiście wykonalne bez zastrzeżeń.

Z faktów, uzasadnionych pod 1°, 2° i 3°, wynika, że twierdzenie, o które nam właściwie chodziło zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. II. Mnożenie liczb względnych jest działaniem arytmetycznym jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

Istotnie:

1° Mnożenie liczb względnych jest działaniem arytmetycznym. Innemi słowy:

(A) Jeżeli dwie liczby względne x' i x spełniają równość

$$(1) \quad x' = x,$$

a liczba x przedstawia iloczyn

$$(2) \quad (a, b) \cdot (a', b')$$

dwóch liczb względnych (a, b) i (a', b') , to liczba x' przedstawia także ten iloczyn.

(B) Jeżeli liczby względne

$$(a, b), (a' b'), (c, d) \text{ i } (c' d')$$

spełniają równości

$$(3) \quad (a, b) = (c, d), (a', b') = (c', d'),$$

a pewna liczba względna x przedstawia iloczyn (2), to liczba x przedstawia także iloczyn

$$(4) \quad (c, d) \cdot (c' d').$$

Z założeń lematu (A) (§ 94, Def. IV) mamy

$$(5) \quad x = (a \cdot a' + b \cdot b', a \cdot b' + b \cdot a'),$$

zatem ze względu na (1) mamy

$$x' = (a \cdot a' + b \cdot b', a \cdot b' + b \cdot a'),$$

a stąd wynika (§ 94, Def. IV), że liczba x' przedstawia rzeczywiście iloczyn (2)

Przechodząc do lematu (B), zaznaczamy najpierw, że z założeń tegoż (§ 94, Def. IV) wynika, że liczba x spełnia równość (5). Z drugiej znów strony (§ 94, Def. IV) lemat byłby uzasadniony, gdyby tylko dowiedzioną była równość

$$(6) \quad x = (c \cdot c' + d \cdot d', c \cdot d' + d \cdot c').$$

Ze względu na równość (5) istnienie równości (6) byłoby dowiedzione, gdybyśmy okazali, że mamy

$$(7) \quad (a \cdot a' + b \cdot b', a \cdot b' + b \cdot a') = (c \cdot c' + d \cdot d', c \cdot d' + d \cdot c')$$

Żeby zaś tę równość uzasadnić, należy tylko wykazać (§ 94, Def. II) istnienie równości

$$(8) \quad P = Q,$$

gdzie przyjęliśmy

$$\begin{cases} P = a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot d' + d \cdot c', \\ Q = c \cdot c' + d \cdot d' + a \cdot b' + b \cdot a'. \end{cases}$$

Otóż z równości (3) (§ 94, Def. II) mamy

$$a + d = c + b,$$

$$a' + d' = c' + b',$$

skąd

$$d = (c + b) - a$$

$$d' = (c' + b') - a'.$$

Podstawiawszy te wartości na d i d' do wzorów (9) na P i Q , znajdziemy, po łatwych przeróbkach:

$$P = a \cdot a' + b \cdot b' + 2 \cdot c \cdot c' + c \cdot b' + c' \cdot b - c \cdot a' - a \cdot c'$$

$$Q = a \cdot a' + b \cdot b' + 2 \cdot c \cdot c' + c \cdot b' + c' \cdot b - c \cdot a' - a \cdot c'$$

Z tego wynika, że równość (8) rzeczywiście zachodzi.

Ponieważ zaś (§ 94, Def. II) równość (8) pociąga za sobą równość (7), która znów, ze względu na (5), pociąga za sobą równość (6), o uzasadnienie której właśnie chodziło, przeto lemat (B) jest udowodniony.

Ponieważ uzasadniliśmy lematy (A) i (B), przeto uzasadniliśmy i część naszego twierdzenia, wysłowioną pod 1°.

2° Mnożenie liczb względnych jest jednoznaczne, innemi słowy, jeżeli każda z dwóch liczb bezwzględnych x i x' przedstawia iloczyn (2), to te liczby są równe pomiędzy sobą. Otóż z założeń tego twierdzenia (§ 94, Def. IV) wynika, że zachodzi równość (5) oraz równość

$$x' = (a \cdot a' + b \cdot b', a \cdot b' + b \cdot a'),$$

a z równości tej i równości (5) wynika równość

$$x = x',$$

o którą właśnie chodziło.

3° Mnożenie liczb względnych jest wykonalne bez zastrzeżeń. Istotnie, jakiegokolwiek byłyby liczby rzeczywiste

$$a, b, a' i b',$$

jakiegokolwiek więc byłyby liczby względne

$$(a, b) i (a', b'),$$

zawsze wykonalne będą działania zaznaczone we wzorach

$$a \cdot a' + b \cdot b' i a \cdot b' + b \cdot a'.$$

Zatem liczba względna

$$(a \cdot a' + b \cdot b', a \cdot b' + b \cdot a')$$

zawsze istnieć będzie. Ponieważ zaś, jeżeli pewna liczba względna istnieje, to istnieje i równa jej liczba względna, gdyż w każdym razie rozważana liczba jest samej sobie równa, przeto znajdzie się liczba względna x , spełniająca (5) i przedstawiająca zatem (§ 94, Def. IV) iloczyn (1).

Ostatecznie uzasadniliśmy każde z twierdzeń, wysłowionych pod 1°, 2° i 3°, a tym samym uzasadniliśmy i samo twierdzenie, o które nam właściwie chodziło.

§ 97. Rozważania, wyłożone w § 94-tym, najnaturalniej doprowadzają do myśli o przyjęciu umowy, polegającej na tem, żeby w przypadku, kiedy dwie liczby bezwzględne a i b spełniają związek

$$a \geq b,$$

uważać liczbę względną (a, b) za równą różnicy

$$a - b.$$

Po przyjęciu takiej umowy zbiór liczb bezwzględnych stałby się podzbiorem obszerniejszego zbioru, obejmującego liczby względne i bezwzględne. Właśnie zamierzamy obecnie skutecznie takie zespolenie liczb bezwzględnych i liczb względnych. Żeby jednak tego dokonać poprawnie, należy wyraźnie wystawić odpowiednie definicje i stwierdzić, że ich przyjęcie nie doprowadza do żadnej sprzeczności z zasadami i definicjami, poprzednio przyjętymi. Przyjmiemy definicje następujące:

Def. I. Zbiór, uzyskany przez połączenie ze sobą zbioru liczb bezwzględnych ze zbiorem liczb względnych, zowiemy zbiorem liczb *rzeczywistych*, umawiając się tem samem, że wyrażenie »liczba rzeczywista« uważać będziemy za nazwę każdego przedmiotu, który jest albo liczbą bezwzględną, albo — liczbą względną.

Def. II. Orzeczenie, że pewna liczba bezwzględna l jest *homologiczna* pewnej liczbie względnej x , i orzeczenie, że liczba względna x jest *homologiczna* liczbie bezwzględnej l , wyrażają to samo, a mianowicie, że symbol x jest symbolem liczby względnej

$$(l, 0),$$

a więc liczby względnej, której pierwszym wyrazem jest liczba bezwzględna l , a drugim — liczba bezwzględna zero.

Def. III. Orzeczenie, iż pewna liczba względna x jest *homologiczna* pewnej liczbie względnej y , wyraża, że symbole x i y są symbolami tej samej liczby względnej.

Z definicji III wynika, że orzeczenie »liczba względna x jest homologiczna liczbie względnej y « i orzeczenie »liczba względna y jest homologiczna liczbie względnej x « są równoważne pomiędzy sobą. Uwzględniwszy tę okoliczność i wzięwszy pod uwagę Def. I i II, stwierdzamy, że w każdym razie orzeczenie »liczba rzeczywista a jest homologiczna liczbie względnej b « równoważne jest orzeczeniu »liczba względna b jest homologiczna liczbie rzeczywistej a «. Wobec tego zastępować będziemy często każde z tych orzeczeń przez orzeczenie następujące: liczba rzeczywista a i liczba względna b są homologiczne pomiędzy sobą. Żeby nie rozszerzać bez konieczności wykładu, nie będziemy, w dalszym ciągu, wyraźnie powoływać się na powyższe uwagi w tej myśli, że czytelnik sam zawsze dostrzeże przypadki, w których należałoby właściwie na rzeczne uwagi powołać się.

Def. IV. Jeżeli oznaczymy przez a i b dwie liczby rzeczywiste, a przez a' i b' odpowiednio liczby względne im homologiczne, to związki

$$a < b, a = b \text{ i } a > b$$

uważać będziemy za związki odpowiednio równoważne związkom

$$a' < b', a' = b' \text{ i } a' > b.$$

Def. V. Sumą jakiejkolwiek liczby rzeczywistej a i jakiejkolwiek drugiej liczby rzeczywistej b zowiemy każdą liczbę rzeczywistą, równą liczbie względnej, przedstawiającej sumę

$$a' + b'$$

liczb względnych a' i b' odpowiednio homologicznych liczbom rzeczywistym a i b .

Def. VI. Iloczynem mnożenia jakiejkolwiek liczby rzeczywistej a , przyjętej za mnożną, przez jakąkolwiek drugą liczbę rzeczywistą b , przyjętą za mnożnik, zowiemy każdą liczbę rzeczywistą, równą liczbie względnej, przedstawiającej iloczyn

$$a' \cdot b'$$

liczb względnych a' i b' , odpowiednio homologicznych liczbom rzeczywistym a i b .

Poprawność trzech pierwszych definicji oczywiście nie daje powodu do żadnych wątpliwości, gdyż każda z nich wyraża umowę, na podstawie której pewne nowe wyrażenie ma oznaczać rzecz niezawodnie istniejącą. Natomiast inny jest stan rzeczy, kiedy chodzi o definicje IV, V i VI: winniśmy udowodnić, że te definicje nie uchybiają zasadom rozdziału III-go części I-szej tego działu, ani zasadom rozdziału II, temu niniejszego i okazać, że one nie doprowadzają do żadnej sprzeczności ani z analogicznymi definicjami, przyjętymi w teorii liczb bezwzględnych, ani z analogicznymi definicjami, przyjętymi w teorii liczb względnych. Wszystkie te wątpliwości usuniemy w najbliższych ustępach.

§ 98. Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez a , b i c trzy liczby rzeczywiste, to w takim razie zachodzić będą okoliczności następujące:

1^o Mamy w każdym razie

$$(1) \quad a = a.$$

2^o Równości

$$(2) \quad a = b \text{ i } b = a,$$

są pomiędzy sobą równoważne.

3^o Równości

$$(3) \quad a = b \text{ i } b = c$$

pociągają za sobą równość

$$(4) \quad a = c$$

4° Jakiegokolwiek byłyby liczby rzeczywiste a i b , w każdym razie zachodzi któryś jeden, ale tylko jeden ze związków:

$$(5) \quad a < b, a = b \text{ i } a > b.$$

5° Związki

$$(6) \quad a < b \text{ i } b > a$$

są w każdym razie równoważne pomiędzy sobą.

6° Związki

$$(7) \quad a < b \text{ i } b < c$$

zawsze pociągają za sobą związek

$$(8) \quad a < c.$$

Istotnie:

1° Jeżeli oznaczymy przez a' liczbę względną, homologiczną liczbie rzeczywistej a , to (§ 95, Tw. I) mieć będziemy

$$a' = a';$$

zatem (§ 97, Def. IV) równość (1) rzeczywiście zachodzi.

2° Jeżeli oznaczymy przez a' i b' liczby względne, odpowiednio homologiczne liczbom a i b , to (§ 97, Def. IV) równości (2) będą odpowiednio równoważne równościom

$$a' = b' \text{ i } b' = a',$$

a ponieważ te równości (§ 95, Tw. I) są równoważne pomiędzy sobą, przeto równości (2) są także równoważne pomiędzy sobą.

3° Jeżeli oznaczymy przez a' , b' i c' liczby względne, odpowiednio homologiczne liczbom rzeczywistym a , b i c , to (§ 97, Def. IV), na podstawie równości (3) mieć będziemy

$$a' = b'; b' = c',$$

skąd (§ 95, Tw. I)

$$a' = c'.$$

Ponieważ zaś (§ 97, Def. IV) ta równość pociąga za sobą równość (4), przeto 3-cia część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

4° Jeżeli zachowamy powyższe znaczenie dla symbolów a' , b' i c' , to (§ 95, Tw. I) zachodzić będzie jeden ze związków

$$(9) \quad a' < b', a' = b' \text{ i } a' > b'.$$

Zatem (§ 97, Def. IV) jeden przynajmniej ze związków (5) niezawodnie zachodzić będzie. Ponieważ zaś dwa ze związków (5) zachodzić nie mogą, gdyż

w takim razie, wbrew brzmieniu Tw. I § 95-go, zachodziłyby (§ 97, Def. IV) dwa ze związków (9), przeto 4-ta część twierdzenia jest uzasadniona.

5° Jeżeli oznaczmy, jak wyżej, przez a' i b' liczby względne, odpowiednio homologiczne liczbom rzeczywistym a i b , to związki (6) będą (§ 97, Def. IV) odpowiednio równoważne związkom

$$a' < b' \text{ i } b' > a'.$$

Ponieważ zaś te związki (§ 95, Tw. I) są równoważne pomiędzy sobą przeto i związki (6) są rzeczywiście równoważne pomiędzy sobą.

6° Uważajmy znowu liczby względne a' , b' i c' , odpowiednio homologiczne liczbom rzeczywistym a , b i c . Związki (7) pociągają za sobą (§ 97, Def. IV) następujące:

$$a' < b' \text{ i } b' < c',$$

z których (§ 95, Tw. I) wynika nierówność

$$a' < b',$$

pociągająca za sobą (§ 97, Def. IV) nierówność (8). Zatem nierówności (7) rzeczywiście pociągają za sobą nierówność (8).

Ostatecznie uzasadniliśmy nasze twierdzenie w zupełności.

Uwaga. Każda liczba bezwzględna l równa się liczbie względnej ($l, 0$), która jest liczbą względną jej homologiczną, albowiem, ponieważ liczba względna ($l, 0$) jest sama sobie (§ 97, Def. III) homologiczna, ponieważ z drugiej strony mamy

$$(l, 0) = (l, 0),$$

przeto liczby względne, odpowiednio homologiczne liczbom l i ($l, 0$), są równe pomiędzy sobą, a zatem (§ 97, Def. IV) same liczby l i ($l, 0$) są także równe pomiędzy sobą.

Tw. II. Definicja IV § 97-go nie doprowadza do sprzeczności, ani z regułami porównywania ilościowego liczb względnych, ani z regułami porównywania ilościowego liczb bezwzględnych.

Istotnie, o tem, że Def. IV nie doprowadza do sprzeczności z regułami porównywania ilościowego liczb względnych, przekonujemy się z łatwością, zważywszy, że ze względu na Def. III § 97-go, Def. IV tegoż paragrafu jest, o ile chodzi o liczby względne, równoważna Def. II § 94-go. Aby wykazać, że Def. IV nie jest sprzeczna i z regułami porównywania ilościowego liczb bezwzględnych, uważajmy dwie liczby bezwzględne l i l' . Według Def. IV § 97-go, związki

$$(1) \quad l < l', l = l' \text{ i } l > l'$$

są równoważne odpowiednio związkom

$$(2) \quad (l, 0) < (l', 0), (l, 0) = (l', 0) \text{ i } (l, 0) > (l', 0);$$

ale (§ 94, Def. II) związki (2) są równoważne odpowiednio związkom (1) rozumianym w sposób określony w teorii liczb bezwzględnych. Zatem, związki (1), rozumiane w sposób określony przez Def. IV § 97-go, są równoważne odpowiednio tymże związkom, rozumianym w sposób, określony w teorii liczb bezwzględnych. Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

§ 99. Tw. I. Dodawanie liczb rzeczywistych jest działaniem arytmetycznym jednoznaczem, wykonalnym bez zastrzeżeń. Istotnie:

1^o Dodawanie liczb rzeczywistych jest działaniem arytmetycznym. Innymi słowy:

(A) Jeżeli pewna liczba rzeczywista x przedstawia sumę

$$(1) \quad r + r'$$

liczb rzeczywistych r i r' , a pewna liczba x' spełnia równość

$$(2) \quad x' = x,$$

to liczba x' przedstawia także sumę (1).

(B) Jeżeli pewna liczba rzeczywista x przedstawia sumę (1), a liczby rzeczywiste r_1 i r'_1 spełniają równości

$$(3) \quad r_1 = r, r'_1 = r',$$

to liczba x przedstawia także sumę

$$(4) \quad r_1 + r'_1.$$

Otóż zwróćmy się do liczb względnych, odpowiednio homologicznych liczbom r i r' i oznaczmy je odpowiednio przez

$$(5) \quad (a, b) \text{ i } (a', b').$$

Ponieważ liczba x przedstawia sumę (1), przeto (§ 97, Def. V)

$$(6) \quad x = (a, b) + (a', b'),$$

zatem, ze względu na (2),

$$(7) \quad x' = (a, b) + (a', b'),$$

a z tego wynika (§ 97, Def. V), że liczba x' rzeczywiście także przedstawia sumę (1). Żeby uzasadnić i lemat (B), zachowajmy powyższe oznaczenia i uważajmy liczby względne

$$(8) \quad (a_1, b_1) \text{ i } (a'_1, b'_1),$$

odpowiednio homologiczne liczbom rzeczywistym r_1 i r'_1 . Z równości (3) i określenia liczb (5) i (8) (§ 97, Def. IV) wynika, że mamy

$$(a, b) = (a_1, b_1)$$

$$(a', b') = (a'_1, b'_1)$$

Z tych zaś równości (§ 96, Tw. I) wynika równość

$$(a, b) + (a', b') = (a_1, b_1) + (a'_1, b'_1),$$

a na podstawie tej równości i równości (6), która (§ 97, Def. IV) wyraża, że liczba x przedstawia sumę (1), mamy

$$x = (a_1, b_1) + (a'_1, b'_1),$$

z której znów wynika (§ 97, Def. IV), że liczba x przedstawia sumę (4). Zatem i lemat (B) zachodzi w podanem brzmieniu. Ponieważ więc każdy z lematów (A) i (B) zachodzi, przeto zachodzi i twierdzenie, podane pod 1^o.

2^o Dodawanie liczb rzeczywistych jest działaniem jednoznaczem, albowiem, jeżeli z pewnych dwóch liczb x i x' każda przedstawia sumę (1) liczb rzeczywistych r i r' , to, jeżeli oznaczymy, jak wyżej, przez symbole (5) liczby względne, odpowiednio homologiczne liczbom r i r' , zachodzić będzie (§ 97, Def. IV) każda z równości (6) i (7), a więc rzeczywiście mieć będziemy

$$x = x'.$$

3^o Dodawanie liczb rzeczywistych jest wykonalne bez zastrzeżeń. Istotnie każdej parze liczb rzeczywistych odpowiada para im odpowiednio homologicznych (§ 97, Def. II i III) liczb względnych u i v ; ponieważ zaś dodawanie liczb względnych jest (§ 96, Tw. I) wykonalne bez zastrzeżeń, przeto (§ 97, Def. IV) dodawanie liczb rzeczywistych jest także wykonalne bez zastrzeżeń.

Tw. II. Mnożenie liczb rzeczywistych jest działaniem arytmetycznem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

Istotnie:

1^o Mnożenie liczb rzeczywistych jest działaniem arytmetycznem, innemi słowy:

(A) Jeżeli pewna liczba rzeczywista x przedstawia iloczyn

$$(1) \quad r \cdot r'$$

liczb rzeczywistych r i r' , to każda liczba rzeczywista x , spełniająca równość

$$(2) \quad x' = x,$$

przedstawia także iloczyn (1).

(B) Jeżeli liczby rzeczywiste

$$\begin{aligned} & \text{spełniają równości} \\ (3) \quad & r, r', r_1 \text{ i } r'_1 \\ & r = r_1, \quad r' = r'_1, \end{aligned}$$

a pewna liczba x przedstawia iloczyn (1), to liczba x przedstawia także iloczyn

$$(4) \quad r_1 \cdot r'_1.$$

Otóż uważajmy liczby względne

$$(5) \quad (a, b) \text{ i } (a', b'),$$

odpowiednio homologiczne liczbom r i r' . Ponieważ liczba x przedstawia iloczyn (1), przeto (§ 97, Def. VI) mamy

$$(6) \quad x = (a, b) \cdot (a', b'),$$

zatem, ze względu na (2), mamy

$$(7) \quad x' = (a, b) \cdot (a', b'),$$

skąd wynika (§ 97, Def. VI), że liczba x' przedstawia rzeczywiście także iloczyn (1). Żeby uzasadnić lemat (B), zachowajmy powyższe oznaczenia i uważajmy jeszcze liczby względne

$$(8) \quad (a_1, b_1) \text{ i } (a'_1, b'_1),$$

odpowiednio homologiczne liczbom rzeczywistym r_1 i r'_1 .

Z równości (3) i określenia liczb (5) i (8) wynika (§ 97, Def. IV), że mamy

$$(a_1, b_1) = (a, b), \quad (a'_1, b'_1) = (a', b'),$$

a z tych znów równości (§ 96, Tw. II) wynika

$$(9) \quad (a_1, b_1) \cdot (a'_1, b'_1) = (a, b) \cdot (a', b').$$

Ponieważ zaś liczba x przedstawia iloczyn (1), przeto (§ 97, Def. VI) zachodzi równość (6). Z równości zaś (6) i (9) mamy

$$x = (a_1, b_1) \cdot (a'_1, b'_1),$$

z której znów wynika (§ 97, Def. VI), że liczba x przedstawia i iloczyn (4), a o to właśnie chodziło.

2^o Mnożenie liczb rzeczywistych jest działaniem jednoznaczem, albowiem jeżeli każda z dwóch liczb rzeczywistych x i x' przedstawia iloczyn (1), to (§ 97, Def. VI) zachodzą obie równości (6) i (7), z których wynika równość

$$x = x',$$

wyrażająca właśnie jednoznaczność mnożenia liczb rzeczywistych.

3^o Mnożenie liczb rzeczywistych jest wykonalne bez zastrzeżeń; jakiegolwiek bowiem byłyby liczby rzeczywiste r i r' , zawsze znajdują się (§ 97, Def. II i III) liczby względne (a, b) i (a', b') , odpowiednio homologiczne liczbom r i r' ; mnożenie zaznaczone we wzorze

$$(a, b) \cdot (a', b')$$

zawsze (§ 96, Tw. II) będzie wykonalne, a więc będzie istnieć liczba rzeczywista, spełniająca równość (6), a na istnieniu tej liczby polega właśnie wykonalność mnożenia, zaznaczonego we wzorze (1).

Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. III. Definicje V i VI § 97-go nie doprowadzają do sprzeczności, ani z definicjami dodawania i mnożenia liczb względnych, ani z definicjami dodawania i mnożenia liczb bezwzględnych.

O tem, że Def. V i VI § 97-go nie doprowadzają do sprzeczności z definicjami dodawania i mnożenia liczb względnych, przekonywamy się natychmiast, zważywszy, że (§ 97, Def. III) liczba względna, homologiczna takiej liczbie rzeczywistej, która jest sama liczbą względną, zlewa się z tą ostatnią.

Żeby udowodnić, że niema też sprzeczności pomiędzy definicjami V i VI § 97-go, a definicjami dodawania i mnożenia liczb bezwzględnych, należy tylko uzasadnić dwa lematy następujące:

(A) Jeżeli dwie liczby bezwzględne s i p przedstawiają odpowiednio sumę

$$(1) \quad l + l'$$

i iloczyn

$$(2) \quad l, l'$$

dwóch liczb bezwzględnych w znaczeniu, przyjętym w teorii liczb bezwzględnych, to liczby s i p przedstawiają także odpowiednio sumę (1) i iloczyn (2) w znaczeniu, określonym przez Def. V i VI § 97-go.

(B) Jeżeli dwie liczby bezwzględne s' i p' przedstawiają odpowiednio sumę (1) i iloczyn (2) w znaczeniu, określonym przez Def. V i VI § 97-go, to te liczby przedstawiają także odpowiednio sumę (1) i iloczyn (2) w znaczeniu, przyjętym w teorii liczb bezwzględnych.

Żałóży tedy, że liczby bezwzględne s i p przedstawiają odpowiednio sumę (1) i iloczyn (2) w znaczeniu, przyjętym w teorii liczb bezwzględnych. Na podstawie Def. II § 97-go liczby względne

$$(l, 0) \text{ i } (l', 0)$$

są liczbami względnymi, odpowiednio homologicznymi liczbom bezwzględnym

$$l \text{ i } l'.$$

Zatem, żeby dwie liczby rzeczywiste x i y przedstawiały odpowiednio sumę (1) i iloczyn (2) w myśl definicji V i VI § 97-go, potrzeba i wystarcza, żebyśmy mieli

$$(3) \quad \begin{cases} x = (l, 0) + (l', 0), \\ y = (l, 0) \cdot (l', 0). \end{cases}$$

Uwzględniwszy wyżej przyjęte założenie co do liczb rzeczywistych s i p i zwróciwszy się do Def. III i IV § 94-go, stwierdzamy, że mamy

$$\begin{aligned} (l, 0) + (l', 0) &= (s, 0) \\ (l, 0) \cdot (l', 0) &= (p, 0), \end{aligned}$$

zatem równości (3) są równoważne następującym

$$(4) \quad x = (s, 0)$$

$$(5) \quad y = (p, 0),$$

które zatem stanowią warunki konieczne i wystarczające, aby liczby rzeczywiste x i y przedstawiały odpowiednio w myśl Def. V i VI § 97-go sumę (1) i iloczyn (2). Ze względu na uwagę po Tw. I § 98-go, mamy

$$(6) \quad s = (s, 0).$$

oraz

$$(7) \quad p = (p, 0)$$

Z równości (6) i (7) wynika, że równości (4) i (5) są odpowiednio równoważne równościom

$$(8) \quad x = s,$$

$$(9) \quad y = p,$$

które zatem wyrażają warunki konieczne i wystarczające, aby liczby rzeczywiste x i y przedstawiały w myśl Def. V i VI § 97-go odpowiednio sumę (1) i iloczyn (2). Ponieważ rzeczone równości będą spełnione, jeżeli uważać będziemy x i y za symbole, oznaczające odpowiednio liczbę s i p , przeto zgodnie z brzmieniem lematu (A) liczby s i p przedstawiają odpowiednio sumę (1) i iloczyn (2) nie tylko w myśl teorii liczb bezwzględnych, ale i w myśl Def. V i VI § 97-go. Z drugiej znów strony, jeżeli liczby bezwzględne s' i p' przedstawiają odpowiednio sumę (1) i iloczyn (2) w myśl Def. V i VI § 97, to równości

(8) i (9) będą musiały być spełnione, skoro tylko uważać będziemy symbole x i y za symbole oznaczające odpowiednio s' i p' . Mamy więc

$$s' = s$$

$$p' = p,$$

skąd wynika, że liczby bezwzględne s' i p' , zgodnie z brzmieniem lematu (B) przedstawiają odpowiednio sumę (1) i iloczyn (2) w myśl teorii liczb bezwzględnych.

Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Twierdzenia, uzasadnione w tym paragrafie i paragrafie poprzedzającym, usuwają w zupełności wszystkie wątpliwości, wyrażone przy końcu § 97-go.

§ 100. Rozważania, do których przechodzimy obecnie, będą głównie miały na celu stwierdzenie tej okoliczności, iż zbiór wszystkich liczb rzeczywistych stanowi jedną z tych klas wielkości (K), dla których zachodzą wszystkie twierdzenia, podane w rozdziale III *cim.* Jednakowoż, żeby nadać całej teorii liczb rzeczywistych najprostszą i najodpowiedniejszą do zastosowań postać, nie dość będzie uzasadniać jedno po drugim te tylko twierdzenia, które rzeczywiście są niezbędne do osiągnięcia zaznaczonego przed chwilą celu. W rzeczywistości wypadnie nam podawać obok rzeczonych twierdzeń niektóre inne jeszcze twierdzenia.

§. 101. Tw. I. Jakiegokolwiek liczby rzeczywiste oznaczylibyśmy przez

$$(1) \quad r, r', r'',$$

mamy w każdym razie

$$(2) \quad (r + r') + r'' = r + (r' + r'').$$

Istotnie, oznaczmy przez

$$(3) \quad (a, b), (a', b') \text{ i } (a'', b'')$$

liczby względne, odpowiednio homologiczne (§ 97, Def. II i III) liczbom (1).

Mamy (§ 97, Def. V) tedy

$$(r + r') + r'' = \{ (a, b) + (a', b') \} + (a'', b''),$$

a ponieważ (§ 94, Def. III)

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'),$$

przeto

$$(4) \quad (r + r') + r'' = ([a + a'] + a'', [b + b'] + b'')$$

Analogicznie mamy

$$(5) \quad r + (r' + r'') = (a + [a' + a''], b + [b' + b'']).$$

Ponieważ zaś

$$[a + a'] + a'' = a + [a' + a''],$$

$$[b + b'] + b'' = b + [b' + b''],$$

przeto ze związków (4) i (5) wynika równość (2), o której udowodnienie właśnie chodziło.

Tw. II. Jakiegokolwiek liczby rzeczywiste oznaczylibyśmy przez r i r' , mamy w każdym razie

$$(1) \quad r + r' = r' + r.$$

Istotnie, uważajmy liczby względne

$$(a, b) \text{ i } (a', b'),$$

odpowiednio homologiczne liczbom rzeczywistym r i r' . Mamy (§ 97, Def. V) tedy:

$$(2) \quad \begin{cases} r + r' = (a + a', b + b') \\ r' + r = (a' + a, b' + b), \end{cases}$$

a ponieważ

$$a + a' = a' + a, \quad b + b' = b' + b,$$

przeto z równości (2) wynika równość (1), którą właśnie pragnęliśmy uzasadnić

Tw. III. Jeżeli oznaczymy przez r jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, a przez r' i r'' dwie liczby rzeczywiste, spełniające nierówność

$$(1) \quad r' < r'',$$

to w takim razie mamy

$$(2) \quad r + r' < r + r''.$$

Istotnie, oznaczmy znowu przez

$$(a, b), (a' b') \text{ i } (a'', b'')$$

liczby względne, odpowiednio homologiczne liczbom

$$r, r' \text{ i } r''.$$

Mamy tedy

$$(3) \quad \begin{cases} r + r' = (a + a', b + b') \\ r + r'' = (a + a'', b + b'') \end{cases}$$

Nierówność (1) (§ 97, Def. IV) pociąga za sobą

$$(a', b'), < (a'', b'');$$

zatem (§ 94, Def. II)

$$a' + b'' < a'' + b',$$

skąd

$$(a + b) + (a' + b'') < (a + b) + (a'' + b')$$

czyli

$$(a + a') + (b + b'') < (a + a'') + (b + b'),$$

a z tej nierówność wynika (§ 94, Def. II)

$$(a + a', b + b'') < (a + a'', b + b'),$$

która ze względu na (3) pociąga za sobą nierówność (1), o udowodnienie której właśnie chodziło.

Tw. IV. Jeżeli oznaczymy przez p i r jakiekolwiek dwie liczby rzeczywiste, to w takim razie zachodzić będą okoliczności następujące:

1° Jeżeli oznaczymy przez

$$(1) \quad (a, b) \text{ i } (c, d)$$

liczby względne, odpowiednio homologiczne liczbom rzeczywistym p i r i, wzięwszy pod uwagę liczbę względną

$$(b, a),$$

której pierwszy wyraz równa się drugiemu, a drugi — pierwszemu wyrazowi liczby

$$(a, b),$$

założymy, że pewna liczba rzeczywista x spełnia równość

$$(2) \quad x = (c, d) + (b, a),$$

to liczba x spełniać będzie każdą z dwóch równości

$$(3) \quad \begin{cases} x + p = r, \\ p + x = r. \end{cases}$$

2° Zawsze istnieje liczba rzeczywista x , spełniająca równości (3).

Istotnie, ponieważ mamy

$$(c, d) + (b, a) = (c + b, d + a),$$

przeto z równości (2) wynika następująca:

$$(4) \quad x = (c + b, d + a).$$

Ze względu na tę równość mamy

$$(5) \quad x + p = (c + b, d + a) + p,$$

ponieważ zaś liczba względna

$$(c + b, d + a)$$

jest (§ 97, Def. III) sama sobie homologiczna, ponieważ z drugiej strony na podstawie założeń twierdzenia liczba względna

$$(a, b)$$

jest liczbą względną, homologiczną liczbie rzeczywistej p , przeto (§ 97, Def. V) mamy

$$(c + b, d + a) + p = (c + b, d + a) + (a, b)$$

czyli

$$(c + b, d + a) + p = (c + b + a, d + a + b);$$

ponieważ zaś (§ 94, Def. II) mamy

$$(c + b + a, d + a + b) = (c, d),$$

przeto

$$(c + b, d + a) + p = (c, d),$$

a z tej równości i równości (5) wynika równość

$$(6) \quad x + p = (c, d).$$

Ponieważ mamy (§ 98, Uwaga po Tw. I i § 97, Def. III) w każdym razie

$$(c, d) = r,$$

przeto ze względu na (6) zachodzi pierwsza z równości (3). Ponieważ zaś (Tw. II) mamy w każdym razie

$$x + p = p + x,$$

przeto stwierdzamy, że równość (2) pociąga za sobą i drugą z równości (3). Udowodniliśmy więc część 1-szą twierdzenia. Część 2-ga twierdzenia wynika z 1-szej: dodawanie zaznaczone we wzorze (2) jest (§ 99, Tw. I) niezawodnie wykonalne, zatem istnieje liczba x , spełniająca równość (2), ponieważ zaś (część 1-sza) równość ta pociąga za sobą równości (3), przeto istnieje rzeczywiście liczba rzeczywista x spełniająca równości (3).

Ostatecznie uzasadniliśmy nasze twierdzenie w zupełności.

§ 102. Z twierdzeń I, II, III i IV § 101 wynika, że zbiór wszystkich liczb rzeczywistych stanowi taką klasę wielkości (K), w odniesieniu do której twier-

dzenie I, II, III i IV § 67-go, oraz tw. I § 76-go są uzasadnione. Z drugiej znów strony, przy dowodach twierdzeń, podanych w paragrafach 68 i 69, powoływa-
liśmy się tylko na twierdzenie I, II, III i IV § 67-go i na to, że działania pod-
stawowe na wielkościach klasy (K) zostały określone w sposób zgodny z zasa-
dami rozdziału VI-go. Mamy więc twierdzenie następujące.

Tw. I. W odniesieniu do zbioru liczb rzeczywistych twier-
dzenia I, II, III i IV § 67-go, tw. I § 76-go, oraz wszystkie twier-
dzenia, podane w §§ 68 i 69, są uzasadnione.

Podamy obecnie niektóre twierdzenia, które przy uwzględnieniu powyż-
szego twierdzenia łatwo uzasadnić możemy.

Tw. II. Odejmowanie liczb rzeczywistych jest działaniem
arytmetycznem jednoznaczem, wykonalnem bez zastrzeżeń.

Istotnie, na podstawie Tw. IV paragrafu poprzedzającego, zawsze odpo-
wiada dwom jakimkolwiek liczbom rzeczywistym p i r taka liczba rzeczywista
 x , która spełnia którąkolwiek z równości

$$x + p = r$$

i

$$p + x = r.$$

Innemi słowy, odejmowanie liczb rzeczywistych jest wykonalne bez zastrzeżeń.
Uwzględniwszy tę okoliczność, wystarczy zwrócić się do Tw. I paragrafu niniej-
szego i do Tw. I § 69-go, aby się upewnić, że niniejsze twierdzenie zachodzi
w podanem brzmieniu.

Uwaga. Ze względu na jednoznaczność odejmowania (§ 69)
zachodzi okoliczność następująca: jeżeli oznaczymy przez p ,
 r i x trzy liczby rzeczywiste, to każde dwie z trzech równości

$$x = r - p, \quad x + p = r \quad \text{i} \quad p + x = r$$

są równoważne pomiędzy sobą.

Tw. III. Moduł dodawania liczb rzeczywistych istnieje
i równy jest zeru.

Ze względu na Tw. I niniejszego paragrafu oraz na Tw. V, § 69 go istnienie
modułu dodawania liczb rzeczywistych jest pewne. Pozostaje więc tylko do udo-
wodnienia, że rzeczony moduł równa się zeru.

W tym celu zważmy, że, oznaczywszy przez r jakąkolwiek liczbę rze-
czywiłą, a przez u moduł dodawania liczb rzeczywistych, mieć (§ 69, Def. I)
będziemy

$$r + u = r,$$

skąd (Tw. II, Uwaga)

$$u = r - r.$$

Ponieważ zaś wiemy, że w przypadku szczególnym, kiedy liczba r jest liczbą bezwzględną, mamy

$$r - r = 0,$$

przeto (§ 69, Def. I) zgodnie z brzmieniem twierdzenia mamy

$$\mu = 0.$$

Uwaga I. Jeżeli oznaczymy przez r i r' dwie liczby rzeczywiste, to równość

$$(1) \quad r = r'$$

równoważna jest równości

$$(2) \quad r - r' = 0,$$

albowiem ze względu na powyższe twierdzenie mamy

$$r' + 0 = r',$$

skąd wynika, że równość (1) równoważna jest równości

$$r' + 0 = r,$$

równoważnej (Tw. II, Uwaga) równości (2).

Uwaga II. W myśl Def. I § 69-go możemy dać nazwę modułu dodawania liczb rzeczywistych jakiegokolwiek, byle zeru równej, liczbie rzeczywistej. Jednakowoż dogodnym będzie umówić się raz na zawsze że nazwę *moduł dodawania liczb rzeczywistych* zachowujemy dla samej liczby zero.

Uwaga III. Żeby liczba względna (a, b) równała się zeru, koniecznym jest i dostatecznym, żeby zachodziła równość

$$(1) \quad a = b,$$

albowiem, ponieważ liczba zero jest homologiczna liczbie względnej (§ 97, Def. II)

$$(0, 0)$$

a (§ 97, Def. III) liczba względna (a, b) — sobie samej, przeto (§ 97, Def. IV) równość

$$(a, b) = 0$$

jest równoważna równości

$$(a, b) = (0, 0),$$

rozważanej (§ 94, Def. II) równości

$$a + 0 = 0 + b,$$

która znów równoważna jest równości (1).

Def. I. Orzeczenie, iż pewna liczba rzeczywista r' jest *symetryczna* pewnej liczbie rzeczywistej r , wyraża, że zachodzi równość

$$r + r' = 0.$$

Tw. IV. Związek symetryi pomiędzy dwiema liczbami rzeczywistymi posiada własności następujące:

1° Każdej liczbie rzeczywistej r odpowiada symetryczna jej liczba rzeczywista r' .

2° Jeżeli pewna liczba rzeczywista r' jest symetryczna pewnej liczbie rzeczywistej r , to liczba r jest symetryczna liczbie r' .

3° Jeżeli pewna liczba rzeczywista r jest symetryczna pewnej liczbie rzeczywistej r' , symetrycznej pewnej trzeciej liczbie rzeczywistej r'' , to w takim razie zachodzi równość

$$r = r''$$

4° Jeżeli pewna liczba rzeczywista p równa się liczbie r' , symetrycznej pewnej liczbie r , to liczba p jest sama symetryczna liczbie r .

5° Jeżeli z dwóch liczb rzeczywistych r i r' , symetrycznych pomiędzy sobą, jedna równa się zeru, to druga równa się także zeru.

6° Jeżeli z dwóch liczb rzeczywistych r i r' , symetrycznych pomiędzy sobą, jedna r' jest nierówna zeru, to druga jest także nierówna zeru, a przy tem jedna z liczb r i r' jest mniejsza, a druga — większa od zera.

Istotnie:

1° Jeżeli przyjmujemy

$$(1) \quad r' = 0 - r$$

to (Uwaga przy Tw. II) r' spełniać będzie równość

$$r + r' = 0$$

i będzie z tego powodu symetryczną liczbie r ; ponieważ zaś odejmowanie, zaznaczone we wzorze (1), jest (Tw. II) zawsze wykonalne, przeto istnienie liczby r' jest zapewnione w każdym razie.

2° Ponieważ (§ 101, Tw. II) mamy w każdym razie

$$r + r' = r'' + r,$$

przeto równość

$$r + r' = 0$$

pociąga za sobą równość

$$r' + r = 0,$$

a stąd wynika (Def. I), że 2-ga część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

3° Ponieważ z równości

$$r' + r = 0$$

i

$$r'' + r' = 0,$$

wynikają (Uwaga przy Tw. II, § 101) równości

$$r = 0 - r' \text{ i } r'' = 0 - r',$$

które pociągają za sobą równość

$$r = r'',$$

przeto 3-cia część twierdzenia jest uzasadniona.

4° Jeżeli mamy

$$p = r'$$

oraz

$$r + r' = 0,$$

to mamy także

$$r + p = 0,$$

a stąd wynika (Def. I), że 4-ta część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

5° Z założeń 5-tej części twierdzenia mamy

$$r + r' = 0;$$

ponieważ zaś (Tw. III) równość

$$r = 0$$

pociąga za sobą

$$r + r' = r',$$

a równość

$$r' = 0$$

— równość

$$r + r' = r,$$

przeto rzeczywiście w pierwszym przypadku mieć będziemy

$$r' = 0,$$

a w drugim —

$$r = 0.$$

6° Z dowiedzionej już 5-tej części naszego twierdzenia wynika, że jeżeli z dwóch symetrycznych pomiędzy sobą liczb r i r' jedna nierówna jest zeru, to i druga zeru równą być nie może. Pozostaje więc do wykazania, że nierówność

$$(2) \quad r < 0$$

pociąga za sobą

$$(3) \quad r' > 0,$$

a nierówność

$$(4) \quad r > 0$$

— nierówność

$$(5) \quad r' < 0.$$

Otóż ze względu na dowiedzioną już 2-gą część twierdzenia możemy wyrazić, że liczby r i r' są symetryczne pomiędzy sobą, przez związek

$$(6) \quad r + r' = 0;$$

z drugiej strony nierówność (2) pociąga za sobą (§ 101, Tw. III)

$$(7) \quad r + r' < 0 + r',$$

a nierówność (4) — nierówność

$$(8) \quad r + r' > 0 + r'.$$

Zatem ze względu na (6) nierówność (2) pociąga za sobą

$$(9) \quad 0 < 0 + r',$$

a nierówność (4) — nierówność

$$(10) \quad 0 > 0 + r'.$$

Ponieważ zaś (Tw. III) mamy

$$0 + r' = r',$$

przeto nierówności (9) i (10) są odpowiednio równoważne nierównościom (3) i (5), a stąd wynika, że rozważana część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Ostatecznie uzasadniliśmy w zupełności nasze twierdzenie.

Uwaga. Jeżeli oznaczymy przez a i b jakiekolwiek dwie liczby bezwzględne, to liczby względne

$$(1) \quad (a, b) \text{ i } (b, a),$$

które wynikają jedna z drugiej przez zamianę pierwszego wyrazu na drugi, a drugiego na pierwszy, są symetryczne pomiędzy sobą, albowiem mamy

$$(a, b) + (b, a) = (a + b, b + a)$$

oraz (Tw. III, Uwaga III)

$$(a + b, b + a) = 0,$$

a z tych równości wynika równość

$$(a, b) + (b, a) = 0,$$

wyrażająca właśnie, że liczby względne (1) są symetryczne (Def. I) pomiędzy sobą.

Tw. V. Reszta odejmowania jakiegokolwiek liczby rzeczywistej p , przyjętej za odjemnik, od jakiegokolwiek liczby rzeczywistej r , przyjętej za odjemną, równa się sumie odjemnej r i liczby p' , symetrycznej liczbie p .

Powyższe twierdzenie moglibyśmy łatwo wyprowadzić bezpośrednio z Tw. IV paragrafu poprzedzającego, ale jeszcze prościej możemy je uzasadnić w sposób następujący. Przyjmijmy

$$(1) \quad x = r + p'$$

Mamy tedy

$$(2) \quad x + p = (r + p') + p;$$

ale (§ 101, Tw. I)

$$(r + p') + p = r + (p' + p),$$

a z drugiej strony (Def. I) mamy

$$p' + p = 0,$$

zatem

$$(r + p') + p = r + 0,$$

skąd (Tw. III)

$$(r + p') + p = r.$$

Z tej zaś równości i równości (2) mamy

$$x + p = r,$$

z której wynika, że zgodnie z brzmieniem twierdzenia równość (1) pociąga za sobą równość

$$x = r - p.$$

§ 103. Z ostatniego twierdzenia paragrafu poprzedzającego wynika, że odjęcie jakiegokolwiek liczby rzeczywistej p od jakiegokolwiek drugiej liczby rzeczywistej r zastąpione być może przez dodanie do liczby r liczby syme-

trycznej liczbie p . Okoliczność ta nastrocza myśl o przyjęciu takich definicji, żeby na ich podstawie, symbol

$$r - p,$$

reszty odejmowania liczby p od liczby r , mógł sam być uważany za sumę liczby r i liczby symetrycznej liczbie p . W tym celu przyjmujemy definicje następujące:

Def. I. Jeżeli oznaczymy przez p jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, to symbol

$$-p$$

uważać będziemy za symbol liczby symetrycznej liczbie p .

Def. II. Jeżeli oznaczymy przez r i p jakiekolwiek dwie liczby rzeczywiste, to symbol

$$r - p$$

uważać będziemy za symbol sumy liczby r i liczby

$$-p.$$

Żeby symbolikę matematyczną uczynić bardziej wyrazistą, dołączamy jeszcze do dwóch powyższych definicji jeszcze następującą:

Def. III. Jeżeli oznaczymy przez r jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, to symbol

$$+r$$

uważać będziemy za symbol tej liczby, której symbolem jest liczba r .

W rozważaniach, które nas doprowadziły do przyjęcia definicji I i II, zawiera się już oczywiście dowód twierdzenia następującego:

Tw. I. Definicja II nie jest sprzeczna z tą, która określa symbol reszty odejmowania oznaczonej liczby rzeczywistej od drugiej oznaczonej liczby rzeczywistej. Innymi słowy, jeżeli oznaczymy przez r i p dwie liczby rzeczywiste i weźmiemy pod uwagę symbol

$$(1) \quad r - p,$$

to przy rozstrzyganiu pytania, czy symbol (1) przedstawia liczbę równą danej liczbie rzeczywistej s , obojętnem jest, czy rozważany symbol będzie rozumiany w myśl Def. II, czy też w myśl definicji, podanej w uwadze I-szej, po Tw. I § 69-go.

Ponieważ na podstawie definicji I i III każdy ze znaków

$$- \text{ i } +$$

występować może we wzorach matematycznych nie tylko jako znak pewnego działania, ale i w innym jeszcze znaczeniu, przeto zachodzi niekiedy konieczność wyraźnego zaznaczenia, jak taki znak ma być w oznaczonym wzorze rozumiany. Żeby tej konieczności uczynić zadość, wprowadzamy definicję następującą:

Def. IV. Żeby wyrazić, że pewien znak, będący jednym ze znaków

$$- \text{ albo } +$$

ma być rozumiany w myśl jednej z definicji I lub III, mówimy że rozważany znak ma być uważany za znak *gatunkowy*; jednocześnie nadajemy znakowi

$$-$$

uważanemu za znak gatunkowy, nazwę znaku *ujemnego*, a znakowi

$$+$$

— nazwę znaku *dodatniego*; każdy ze znaków $-$ i $+$, uważanych za znaki gatunkowe, zowiemy znakiem *przeciwnym* drugiemu.

Podajemy teraz definicję, która ma na celu uproszczenie symboliki przez to, że upoważni nas do opuszczania nawiasów w pewnych przypadkach.

Def. V. Jeżeli oznaczymy przez p i r dwie liczby rzeczywiste i założymy, że liczba r równa się tej, którą przedstawia pewien symbol złożony, to symbole, wynikające odpowiednio z symbolów

$$(1) \quad r + p \text{ i } r - p$$

wskutek prostego podstawienia w miejsce symbolu r wyżej wspomnianego symbolu złożonego, będziemy uważać za odpowiednio równoznaczne symbolom (1) nawet w przypadku, kiedy rzeczony symbol złożony nie będzie zamknięty w nawiasie¹⁾.

Na podstawie powyższej definicji jesteśmy upoważnieni na przykład do zastąpienia symbolów

$$(+r) + p, (+r) - p, (-r) + p \text{ i } (-r) - p,$$

gdzie r i p oznaczają dwie liczby rzeczywiste, odpowiednio przez symbole prostsze następujące:

$$+r + p, +r - p, -r + p \text{ i } -r - p.$$

¹⁾ Definicja ta upoważnia nas, o ile chodzi o liczby rzeczywiste, do dalej idących uproszczeń w symbolice, aniżeli dopuszcza ogólna umowa, podana na początku § 61-go.

Tw. II. Jeżeli oznaczymy przez r jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, to mieć będziemy równości następujące:

$$(1) \quad +(+r) = +r$$

$$(2) \quad +(-r) = -r$$

$$(3) \quad -(+r) = -r$$

$$(4) \quad -(-r) = +r$$

Istotnie, równości (1) i (2) stanowią bezpośrednie następstwa Def. III. Żeby uzasadnić równość (3), należy tylko zważyć, że (Def. III) symbol

$$+r$$

oznacza to samo, co symbol

$$r$$

Co się zaś tyczy równości (4), to możemy ją uzasadnić w sposób następujący: Na podstawie Def. I symbol

$$-(-r)$$

przedstawia liczbę symetryczną liczbie

$$-r,$$

która znów sama jest (Def. I) symetryczna liczbie r . Zatem (§ 102, Tw. IV) mamy

$$-(-r) = r,$$

a ponieważ (Def. III)

$$r = +r,$$

przeto, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, zachodzi i równość (4), a to tylko pozostawało do udowodnienia.

§ 104. Def. I. Jeżeli oznaczymy ogólnie przez

$$a_i$$

wyraz i -ty pewnego ciągu skończonego liczb rzeczywistych o n ($n > 1$) wyrazach, i wyznaczyszy liczbę rzeczywistą s_1 z któregoś jednego ze wzorów

$$(1) \quad s_1 = +a_1$$

albo

$$(2) \quad s_1 = -a_1,$$

a przy każdej, od jedności większej, ale od liczby n nie więk-

szej wartości wskaźnika i , wyznaczymy liczbę s_i z któregoś jednego ze wzorów

$$(3) \quad s_i = s_{i-1} + a_i$$

albo

$$(4) \quad s_i = s_{i-1} - a_i,$$

to w takim razie liczba s_n zowie się *sumą algebraiczną* liczb

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Tw. I. Jeżeli zachowamy oznaczenia powyższej definicji to w takim razie:

1^o Suma algebraiczna s_n uważana być może za zwykłą sumę, w której pierwszym składnikiem jest liczba

$$+ a_1 \text{ lub } - a_1,$$

zależnie od tego, czy wyznaczamy s_1 ze wzoru (1), czy ze wzoru (2), a i -tym ($1 < i \leq n$) liczba

$$+ a_i \text{ lub } - a_i,$$

zależnie od tego, czy liczba s_i wyznaczona ma być ze wzoru (3) czy też ze wzoru (4).

2^o Wartość sumy s_n jest niezależna od tego, czy Def. I będzie rozumiana w powyższy sposób czy też tak, jak ją należałoby rozumieć, gdyby we wzorze (4) symbol

$$s_{i-1} - a_i$$

uważany był za symbol reszty odejmowania liczby a_i od liczby s_{i-1} .

Istotnie, jeżeli mamy

$$n = 2$$

to pierwsza część twierdzenia zachodzi na podstawie Def. II § 103, a druga — na podstawie Tw. I tegoż paragrafu. Gdyby zaś obie części naszego twierdzenia zachodziły przy

$$1 < n \leq p, \quad (p \geq 2),$$

to one zachodziłyby i przy

$$n = p + 1$$

na podstawie wspomnianych definicji i twierdzenia.

Zatem (zasada indukcji matematycznej) twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Uwaga. Jeżeli przy zachowaniu oznaczeń Def. I rozumieć ją będziemy w sposób, określony w 1-szej części powyższego twierdzenia, to znaki

$$+ \text{ i } -$$

należy uważać za znaki gatunkowe nie tylko we wzorach (1) i (2), ale i we wzorach (3) i (4); jednocześnie należy przyjąć, że we wzorach (3) i (4) znaki dodawania zostały opuszczone. Przy tych warunkach, każdemu wyrazowi a_i ciągu

$$a_1, a_2 \dots a_n$$

odpowiada w sumie s_n pewien składnik, który jest

$$\text{albo } + a_i, \text{ albo } - a_i;$$

w pierwszym przypadku mówimy zgodnie z zasadami naszej terminologii, że liczba a_i wchodzi do sumy s_n ze znakiem *dodatnim*, a w drugim — że ona wchodzi do rozważanej sumy ze znakiem *ujemnym*.

Tw. II. Jeżeli w dwóch sumach¹⁾ s i s' o równych ilościach składników składniki równorzędne są symetrycznymi pomiędzy sobą liczbami rzeczywistymi, to rozważane sumy są także liczbami rzeczywistymi, symetrycznymi pomiędzy sobą.

Istotnie, oznaczymy ogólnie przez

$$a_i \text{ i } a'_i$$

odpowiednio składniki rzędu i w sumach s i s' , a przez n ilość składników w każdej z tych sum.

1° Jeżeli mamy

$$(1) \quad n = 2,$$

to mamy

$$s = a_1 + a_2$$

oraz

$$s' = a'_1 + a'_2,$$

zatem

$$s + s' = (a_1 + a_2) + (a'_1 + a'_2)$$

$$= (a_1 + a_2) + (a'_2 + a'_1)$$

$$= \{(a_1 + a_2) + a'_2\} + a'_1$$

¹⁾ Zwracamy uwagę czytelnika na to, że nie należy uważać wyrażenia »suma pewnych liczb rzeczywistych« za równoważne wyrażeniu »suma algebraiczna tychże liczb«, gdyż pierwsze z tych wyrażen jest nazwą liczby, która ma oznaczoną wartość, a drugie tego warunku nie spełnia; suma algebraiczna oznaczonych liczb nie równych zeru przybiera oznaczoną wartość tylko w przypadku, kiedy oznaczony jest jeszcze znak, z którym każdą z tych liczb do sumy algebraicznej wchodzi.

$$\begin{aligned}
 &= \{ a_1 + (a_2 + a'_2) \} + a'_1 \\
 &= \{ a_1 + 0 \} + a'_1 \\
 &= a_1 + a'_1 = 0,
 \end{aligned}$$

mamy więc

$$s + s' = 0$$

Zatem, jeżeli równość (1) jest spełniona, to twierdzenie zachodzi.

2° Załóżmy chwilowo, że symetria sum s i s' zachodzi, gdy ilość n składników każdej z nich spełnia związek

$$(3) \quad 2 \leq n \leq p,$$

gdzie p oznacza pewną liczbę całkowitą, nie mniejszą od liczby 2, i zwróćmy się do przypadku, kiedy mamy

$$(4) \quad n = p + 1.$$

Mamy tedy

$$(5) \quad \begin{cases} s = s_1 + a_{p+1} \\ s' = s'_1 + a'_{p+1} \end{cases}$$

gdzie s_1 i s'_1 oznaczają dwie sumy o p składnikach, w których składniki równorzędne są symetryczne pomiędzy sobą. Na podstawie chwilowo przyjętego założenia mamy

$$s_1 + s'_1 = 0,$$

a ponieważ z założeń twierdzenia wynika, że mamy

$$a_{p+1} + a'_{p+1} = 0,$$

przeto na podstawie wzorów (5) i udowodnionego już pod 1° faktu mamy

$$s_{p+1} + s'_{p+1} = 0.$$

Gdyby więc symetria rozważanych sum zachodziła przy wartościach (3) na n , to zachodziłaby ona i przy wartości (4). Z uzyskanych wyników wnosimy (Zas. ind. mat.), że twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Powyższe twierdzenie w połączeniu z twierdzeniem I i II paragrafu poprzedzającego nastęrcza nam dogodny środek, do przekształcenia jakichkolwiek kombinacji liczb rzeczywistych przez dodawanie i odejmowanie w sumy algebraiczne tychże liczb.

§ 105. Cel rozważań, do których zwracamy się obecnie, głównie zmierza do tego, żeby wykazać, iż, na podstawie definicji, podanych w § 103, symbol, który tymczasowo przyjęliśmy na liczbę względną, jest zbędny i może być z korzyścią zastąpiony przez inny, który już będzie symbolem klasycznym liczby rzeczywistej, powszechnie przyjętym.

Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez

$$a \text{ i } b$$

odpowiednio pierwszy i drugi wyraz oznaczonej liczby względnej

$$(a, b),$$

to w takim razie mamy

$$(1) \quad (a, b) = a - b.$$

Istotnie, liczba względna, homologiczna (§ 97, Def. II) liczbie b , jest liczba

$$(b, 0),$$

a liczba względna, homologiczna liczbie względnej

$$(a, b),$$

jest (§ 97, Def. III) sama ta liczba. Zatem (§ 97, Def. V) mamy

$$(a, b) + b = (a, b) + (b, 0),$$

a ponieważ

$$(a, b) + (b, 0) = (a + b, b),$$

przeto mamy

$$(2) \quad (a, b) + b = (a + b, b).$$

Ale (§ 94, Def. II) mamy

$$(3) \quad (a + b, b) = (a, 0),$$

a ponieważ liczba

$$(a, 0)$$

jest liczbą względną, homologiczną liczbie bezwzględnej

$$a,$$

ponieważ nadto liczba względna

$$(a + b, b)$$

jest sama sobie homologiczna, przeto (§ 97, Def. IV) ze względu na (3) mamy

$$(a + b, b) = a,$$

a z tej równości i równości (2) mamy

$$(a, b) + b = a,$$

skąd wynika równość (1), którą pragnęliśmy uzasadnić.

Z powyższego twierdzenia wynika, że w teorii liczb rzeczywistych symbol

$$(a, b)$$

na liczbę względną, której pierwszy i drugi wyraz równają się odpowiednio liczbom bezwzględny

$$a \text{ i } b,$$

jest zbędny, gdyż może być zastąpiony przez symbol

$$a - b.$$

Ponieważ zaś, na podstawie teorii liczb bezwzględnych, symbol tej postaci może oczywiście także służyć do przedstawienia wartości każdej liczby bezwzględnej, przeto możnaby rzeczony symbol przyjąć za właściwy symbol czyli symbol *specyficzny* liczby rzeczywistej; ale nie uczynimy tego, gdyż przekonamy się, że przyjęte już definicje doprowadzą nas do dogodniejszego symbolu liczby rzeczywistej.

Def. I. *Różnicą bezwzględną* dwóch liczb bezwzględnych zowieśmy resztę odejmowania tej z tych liczb od drugiej, która od niej nie jest większa.

Def. II. *Wartością bezwzględną* liczby rzeczywistej zowieśmy różnicę bezwzględną tych dwóch liczb bezwzględnych, które stanowią odpowiednio pierwszy i drugi wyraz liczby względnej, homologicznej rozważanej liczbie rzeczywistej; za symbol wartości bezwzględnej *oznaczonej* liczby rzeczywistej r przyjmujemy symbol

$$|r|.$$

Tw. II. Jeżeli dwie liczby rzeczywiste r i r' są pomiędzy sobą równe albo symetryczne, to w takim razie mamy

$$(1) \quad |r| = |r'|.$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, udowodnimy najpierw lemat następujący:

(A) Jeżeli cztery liczby bezwzględne

$$(2) \quad \begin{array}{l} p, q, p' \text{ i } q' \\ \text{spełniają równość} \\ p + q' = p' + q, \end{array}$$

to różnica bezwzględna liczb p i q równa się różnicy bezwzględnej liczb p' i q' .

Istotnie, załóżmy najpierw, że mamy

$$(3) \quad p \geq q.$$

W takim razie łatwo wykazać, że równość (2) pociąga za sobą związek

$$p' \geq q'.$$

Jeżeli więc zachodzi (3), to na różnice bezwzględne, wymienione w naszym lemacie, mamy odpowiednie wzory

$$p - q \text{ i } p' - q',$$

a z równości (2) (§ 94, Tw. I) wynika, że mamy w rozważanym przypadku

$$p - q = p' - q'.$$

Zatem w przypadku szczególnym, kiedy zachodzi (3), lemat nasz jest ważny. Z drugiej znów strony, jeżeli związek (3) nie zachodzi, to zachodzi nierówność

$$(4) \quad q > p.$$

Ponieważ równość (2) jest równoważna równości

$$(5) \quad q + p' = q' + p,$$

przeto wystarczy zastąpić w rozumowaniu, które posłużyło nam do wykazania, iż związki (2) i (3) pociągają za sobą równość różnicy bezwzględnej liczb p i q i różnicy bezwzględnej liczb p' i q' , symbole

$$p, q, p' \text{ i } q'$$

odpowiednio przez symbole

$$q, p, q' \text{ i } p',$$

aby stwierdzić, że związki (4) i (5) pociągają za sobą równość różnicy bezwzględnej liczb q i p i różnicy bezwzględnej liczb q' i p' . Ponieważ zaś te dwie różnice bezwzględne oczywiście równają się odpowiednio różnicom bezwzględnym, rozważanym w lemacie, przeto stwierdzamy, że lemat nasz zachodzi w każdym razie.

Przechodząc teraz do twierdzenia, o które nam właściwie chodzi, oznaczymy przez

$$(a, b) \text{ i } (a', b') \quad (1)$$

liczby względne, odpowiednio homologiczne (§ 97, Def. II i III) liczbom rzeczywistym r i r' . Jeżeli mamy

$$(6) \quad r = r',$$

to w takim razie zachodzi (§ 97, Def. IV) równość

$$(a, b) = (a', b'), \quad (2)$$

równoważna równości

$$a + b' = a' + b, \quad (3)$$

z której, na podstawie powyższego lematu, wynika równość, równoważna (Def. II)

równości (1); zatem równość (6) rzeczywiście pociąga za sobą równość (1). Pozostaje do rozważenia, przypadek, kiedy liczby r i r' są symetryczne pomiędzy sobą. Mamy tedy (§ 102, Def. I)

$$(7) \quad r + r' = 0,$$

skąd (§ 97, Def. V)

$$(a, b) + (a', b') = 0,$$

czyli

$$(a + a', b + b') = 0.$$

Z równości tej (§ 102, Uwaga III po Tw. III) wynika równość

$$a + a' = b + b',$$

która znów, na podstawie powyższego lematu, pociąga za sobą równość różnicy bezwzględnej liczb a i b i różnicy bezwzględnej liczb b' i a' . Ponieważ zaś ostatnia różnica bezwzględna równa się różnicy bezwzględnej liczb a' i b' (albowiem różnica bezwzględna z jakiegokolwiek liczby bezwzględnej l i jakiegokolwiek liczby bezwzględnej m równa się różnicy bezwzględnej liczb m i l), przeto różnica bezwzględna liczb a i b równa się różnicy bezwzględnej liczb a' i b' . Innymi słowy, (Def. II) zachodzi równość (1). Ostatecznie więc stwierdzamy, że każda z równości (6) i (7) pociąga za sobą równość (1), a na tem właśnie polega treść twierdzenia, o uzasadnienie którego chodziło.

Tw. III. Jeżeli oznaczmy przez r jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, a przez d jej wartość bezwzględną, a więc (Def. II) liczbę bezwzględną, spełniającą równość

$$d = |r|,$$

to w takim razie zachodzą okoliczności następujące:

1^o Równość

$$(1) \quad r = 0$$

jest równoważna równości

$$(2) \quad d = 0.$$

2^o Jeżeli zachodzi równość (1), to w takim razie zachodzą równości następujące

$$(3) \quad r = (0, 0)$$

$$(4) \quad r = +0$$

$$(5) \quad r = -0$$

3^o Nierówność

$$(6) \quad r \neq 0$$

jest równoważna nierówności

$$(7) \quad d > 0.$$

4° Jeżeli mamy

$$(8) \quad r > 0,$$

to w takim razie zachodzą wzory

$$(9) \quad r = (d, 0),$$

$$(10) \quad r = d$$

$$(11) \quad r = +d$$

oraz nierówność

$$(12) \quad d > 0.$$

5° Jeżeli mamy

$$(13) \quad r < 0,$$

to w takim razie zachodzą wzory

$$(14) \quad r = (0, d)$$

$$(15) \quad r = -d$$

oraz nierówność

$$(16) \quad d > 0.$$

Żeby powyższe twierdzenie uzasadnić, oznaczmy odpowiednio przez a i b pierwszy i drugi wyraz liczby względnej, homologicznej (§ 97, Def. II i III) liczbie r , i uczynimy najpierw ogólne uwagi następujące:

(A) W każdym razie (§ 98, Tw. I, Uwaga oraz § 97 Def. III) mamy

$$(17) \quad r = (a, b).$$

(B) Ponieważ liczba względna $(0, 0)$ jest liczbą względną, homologiczną liczbie bezwzględnej 0 , przeto ze względu na uwagę (A) mamy

$$(18) \quad 0 = (0, 0).$$

Przechodzimy teraz do kolejnego uzasadnienia każdej z pięciu części naszego twierdzenia.

Dowód 1-szej części. Ze względu na równości (17) i (18) równość (1) jest równoważna równości

$$(19) \quad (a, b) = (0, 0),$$

która znów (§ 94, Def. II) równoważna jest równości

$$a + 0 = 0 + b,$$

równoważnej

(20)

$$a = b.$$

Z tego wynika, że równości (1) i (20) są równoważne pomiędzy sobą. Ponieważ zaś (Def. II) równość (20) jest równoważna równości (2), przeto równości (1) i (2) są rzeczywiście równoważne pomiędzy sobą.

Dowód 2-giej części. Ponieważ, jak stwierdziliśmy, równość (1) pociąga za sobą równość (19), przeto, w razie istnienia równości (1) zachodzi, ze względu na (17), rzeczywiście równość (3). Ponieważ dalej (§ 103, Def. III) mamy

$$+ 0 = 0,$$

przeto z równości (1) wynika równość (4). Ponieważ nadto mamy

$$0 + 0 = 0$$

przeto liczba 0 jest (§ 102 Def. I) sama sobie symetryczna, a zatem (§ 103 Def. I) mamy

$$- 0 = 0;$$

a z tej równości i równości (1) wynika, że w rozważanym przypadku zachodzi rzeczywiście i wzór (5).

Dowód 3-ciej części. Ponieważ (1-sza część twierdzenia) równość (2) pociąga za sobą (1), przeto z nierówności (6) wynika nierówność

$$(21) \quad d \neq 0;$$

ponieważ z drugiej strony ze względu na to, że liczba d jest liczbą bezwzględną, zachodzi niezawodnie jeden ze związków

$$d = 0 \text{ albo } d > 0,$$

przeto nierówność (21) pociąga za sobą nierówność (7). Odwrotnie, jeżeli zachodzi (7), to zachodzi i (6), albowiem, gdyby zachodziła równość (1), to wbrew założeniu, (część 1-sza) zachodziłaby równość (2). Zatem związki (6) i (7) są rzeczywiście równoważne pomiędzy sobą.

Dowód 4-tej części. Załóżmy, że zachodzi nierówność (8). Ze względu na (17) i (18) wynika z tej nierówności nierówność

$$(a, b) > (0, 0),$$

skąd (§ 94, Def. II)

$$a + 0 > 0 + b,$$

czyli

$$a > b$$

Ze względu na tę nierówność (Def. II) mamy

$$a = d + b,$$

a ta równość pociąga za sobą (§ 94, Def. II) równość

$$(a, b) = (d, 0).$$

Z równości tej i równości (17) wynika równość (9), która jest właśnie jedną z tych, które mamy obecnie uzasadnić. Ponieważ (Tw. I) mamy

$$(d, 0) = d - 0 = d,$$

przeto ze względu na (9) zachodzi równość (10). Ponieważ zaś (§ 103, Def. III)

$$d = + d,$$

przeto zachodzi i wzór (11). Ponieważ nareszcie nierówność (8) pociąga za sobą nierówność (6), która znów pociąga za sobą (7), przeto nierówność (8) rzeczywiście pociąga za sobą (12).

Dowód 5-tej części. Założmy, że zachodzi nierówność (13). Ze względu na (17) i (18) z nierówności tej wynika nierówność

$$(a, b) < (0, 0),$$

z której znów (§ 94, Def. II) wynika nierówność

$$a + 0 < 0 + b$$

czyli

$$a < b.$$

Zatem (Def. II) mamy

$$a + d = b,$$

z którego to związku (§ 94, Def. II) wynika równość

$$(a, b) = (0, d).$$

Z tej równości i równości (17) wynika (14). Ponieważ zaś (Tw. I) mamy

$$(0, d) = 0 - d,$$

skąd

$$(0, d) + d = 0,$$

przeto liczba

$$(0, d)$$

jest (§ 102, Def. I i Tw. IV) symetryczna liczbie

$$d.$$

Ponieważ zaś (§ 103, Def. I) liczba $-d$

jest także liczbą symetryczną liczbie d , przeto (§ 102, Tw. IV) mamy

$$(0, d) = -d,$$

a z tej równości i dowiedzionej już równości (14) wynika równość (15). Zważywszy nareszcie, że nierówność (13) pociąga za sobą (6), która, jak już stwierdziliśmy, pociąga za sobą (7), stwierdzamy, że nierówność (13) rzeczywiście pociąga za sobą (16).

Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. IV. Jeżeli oznaczmy przez d dowolnie daną liczbę bezwzględną, to w takim razie zachodzą okoliczności następujące:

1° Każdy z symbolów

$$+d \text{ i } -d$$

przedstawia pewną liczbę rzeczywistą, a wartości bezwzględne obu tych liczb równają się liczbie d .

2° Jeżeli mamy

$$(1) \quad d = 0,$$

to w takim razie mamy także

$$(2) \quad +d = 0$$

$$(3) \quad -d = 0.$$

3° Jeżeli zachodzi nierówność

$$(4) \quad d > 0,$$

to w takim razie mamy

$$(5) \quad +d > 0$$

$$(6) \quad -d < 0.$$

Dowód 1-szej części. Ponieważ (§ 103, Def. III) symbol

$$+d$$

przedstawia liczbę bezwzględną

$$d,$$

przeto ten symbol przedstawia (§ 97, Def. I) w każdym razie pewną liczbę

rzeczywistą. Ponieważ nadto liczba $(d, 0)$ jest liczbą względną, homologiczną liczbie d , a więc i liczbie $+d$, przeto liczba d jest wartością bezwzględną liczby $+d$. Ponieważ dalej symbol

$$-d$$

oznacza liczbę symetryczną liczbie

$$d,$$

a liczba symetryczna danej liczbie rzeczywistej (§ 102, Tw. IV) zawsze istnieje i (Tw. II) ma wartość bezwzględną, równą tej liczbie, przeto symbol

$$-d$$

przedstawia także pewną liczbę rzeczywistą, a wartość bezwzględna tej liczby równa się liczbie d .

Dowód 2-giej części. Ponieważ mamy w każdym razie

$$+d = d$$

przeto związek (1) rzeczywiście pociąga za sobą równość (2). Ponieważ zaś z równości

$$0 + 0 = 0$$

wynika, że liczba zero równa się liczbie, która jej jest symetryczna, przeto równość (1) pociąga za sobą i równość (3).

Dowód 3-ciej części. Ponieważ mamy w każdym razie

$$+d = d,$$

przeto nierówność (4) pociąga za sobą (5).

Z drugiej zaś strony, ponieważ liczba

$$-d$$

jest symetryczna liczbie d , przeto (§ 102, Tw. IV) ze względu na (4) mamy

$$-d < 0.$$

Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Def. III. Jeżeli pewna liczba rzeczywista r spełnia równość postaci

$$r = +d$$

gdzie d oznacza liczbę bezwzględną, to mówimy, że liczba r ma *znak gatunkowy* (albo krótko, *znak*)

$$+,$$

czyli znak *dodatni*; jeżeli zaś liczba rzeczywista r spełnia równość postaci

$$r = -d,$$

to mówimy, że liczba r ma *znak gatunkowy* (albo krótko, *znak*)

czyli znak *ujemny*.

Czytelnik sam z łatwością udowodni, że z powyższej definicji wynika na podstawie twierdzeń II i III twierdzenie następujące.

Tw. V. Każda liczba rzeczywista, nierówna zeru, ma pewien oznaczony znak gatunkowy, który jest znakiem dodatnim lub ujemnym, zależnie od tego, czy rozważana liczba jest większa czy mniejsza od zera; jeżeli zaś pewna liczba rzeczywista równa się zeru, to każdy ze znaków

$$+ \text{ i } -$$

jest znakiem tejże liczby.

Def. IV. Liczby rzeczywiste, od zera większe, zowią się liczbami *dodatnimi*, a liczby rzeczywiste od zera mniejsze — liczbami *ujemnymi*.

Dostrzegamy z łatwością, że zachodzi twierdzenie następujące.

Tw. VI. Istnieją trzy rodzaje liczb rzeczywistych, a mianowicie: liczby dodatnie, ujemne i równe zeru; liczby dodatnie mają znak dodatni, ujemne — znak ujemny, a te, które równe są zeru, mają jednocześnie i znak ujemny i dodatni.

Uwaga. Liczby bezwzględne, od zera większe, są oczywiście liczbami rzeczywistymi dodatnimi.

Ponieważ przy rozważaniu liczb rzeczywistych chodzi zwykle tylko o wartości tychże, ponieważ drugiej strony z Tw. III i Def. IV wynika, że, oznaczwszy przez d wartość bezwzględną danej liczby rzeczywistej r , zeru nie równej, mamy

$$d > 0$$

oraz

$$r = +d,$$

jeżeli liczba r jest dodatnia, a

$$r = -d,$$

jeżeli r jest liczbą ujemną, ponieważ nadto na podstawie Tw. IV symbole

$$+d \text{ i } -d,$$

gdzie d oznacza liczbę bezwzględną, od zera większą, przedstawiają odpowiednio liczbę dodatnią i liczbę ujemną, przeto przyjmujemy definicję następującą:

Def. V. Symbol *specyficzny* liczby rzeczywistej, równej zeru, jest symbol

$$0;$$

jeżeli zaś pewna liczba rzeczywista nie równa się zeru, a symbol d oznacza jej wartość bezwzględną, to symbolem *specyficznym* tej liczby rzeczywistej jest symbol

$$+d \text{ lub } -d,$$

zależnie od tego, czy ta liczba jest dodatnia, czy ujemna.

Przy dalszem rozwijaniu teorii liczb rzeczywistych, winniśmy mieć na uwadze, że przyjęcie powyższej definicji zniewala nas do wyprowadzania prawideł na porównywanie ilościowe i na wykonywanie działań na liczbach rzeczywistych, których symbole specyficzne są dane.

Liczby rzeczywiste mają własności następujące:

§ 106. Tw. I. 1° Każda liczba ujemna jest mniejsza od każdej liczby dodatniej.

2° Jeżeli żadna z dwóch liczb rzeczywistych r i r' nie jest ujemna, to związki

$$(1) \quad |r| < |r'|$$

i

$$(2) \quad r < r'$$

są równoważne pomiędzy sobą.

3° Jeżeli żadna z dwóch liczb rzeczywistych r i r' nie jest dodatnia, to związki

$$(3) \quad |r| > |r'|$$

i

$$(4) \quad r < r'$$

są równoważne pomiędzy sobą.

4° Jeżeli oznaczymy przez r i r' dwie liczby rzeczywiste, to istnienie równości

$$(5) \quad |r|_* = |r'|$$

i tożsamość znaków liczb r i r' stanowią razem wystarczające warunki do istnienia równości

$$(6) \quad r = r';$$

równość (5) jest zawsze koniecznym warunkiem równości (6), zaś tożsamość znaków liczb r i r' jest konieczne w razie, ale

tylko w razie, kiedy przy istnieniu równości (6) wartości bezwzględne liczb r i r' nie są równe zeru.

Istotnie, 1-sza część twierdzenia wynika już stąd, iż (Def. IV, § 105) każda liczba ujemna jest mniejsza, a każda liczba dodatnia jest większa od zera. Żeby uzasadnić 2-gą i 3-cią część przyjmijmy

$$d = |r|, \quad d' = |r'|.$$

Jeżeli żadna z liczb r i r' nie jest ujemna, to (§ 105, Tw. III i Def. IV) mamy

$$r = (d, 0), \quad r' = (d', 0),$$

zatem (§ 94, Def. II) w tym przypadku związki (1) i (2) są rzeczywiście równoważne pomiędzy sobą. Jeżeli zaś żadna z liczb r i r' nie jest dodatnia, to (§ 105, Tw. III) mamy

$$r = (0, d), \quad r' = (0, d'),$$

a z tego wynika (§ 94, Def. II), że w tym przypadku związki (3) i (4) są równoważne pomiędzy sobą. Pozostaje 4-ta część twierdzenia do uzasadnienia. W tym celu załóżmy najpierw, że równość (5) i tożsamość znaków liczb r i r' zachodzą. Jeżeli tedy przyjmujemy

$$d = |r|,$$

to ze względu na (5) mieć będziemy

$$d = |r'|.$$

Z tych równości (§ 105, Def. IV i Tw. III) wynika, że, ze względu na tożsamość znaków liczb r i r' , mamy albo

$$r = +d, \quad r' = +d$$

albo

$$r = -d, \quad r' = -d.$$

W każdym więc razie równość (6) zachodzi. Załóżmy teraz, że zachodzi równość (6). Ze względu na Tw. II § 105 go równość (6) w każdym razie pociąga za sobą równość (5), która jest zatem w każdym razie koniecznym warunkiem istnienia równości (6). W przypadku szczególnym, kiedy równość (5) jest spełniona, a wartości bezwzględne liczb r i r' są równe zeru, równość (5) jest dostatecznym warunkiem istnienia równości (6), gdyż w tym razie ze względu na równość

$$|r| = 0 \quad \text{i} \quad |r'| = 0$$

mamy (§ 105, Tw. III)

$$r = 0 \quad \text{i} \quad r' = 0,$$

skąd wynika (6). Gdyby zaś, przy spełnieniu równości (5), wartości bezwzględne

liczb r i r' nie były równe zeru, a same liczby r i r' miały znaki przeciwne, to żadna z rozważanych liczb (§ 105, Tw. III) nie równałaby się zeru i jedna z nich (§ 105, Tw. V) byłaby mniejsza, a druga większa od zera; wobec tego istnienie równości (6) byłoby wykluczone. Jeżeli więc równość (5) zachodzi, a wartości bezwzględne liczb r i r' nie są równe zeru, to tożsamość znaków liczb r i r' jest konieczna do istnienia równości (6), a to tylko pozostawało jeszcze do wykazania.

Tw. II. Jeżeli oznaczymy przez r i r' jakiekolwiek dwie liczby liczby rzeczywiste i weźmiemy pod uwagę ich sumę

$$(1) \quad r + r'$$

to w takim razie zachodzić będą okoliczności następujące:

1^o Jeżeli liczby r i r' mają ten sam znak gatunkowy, to suma (1) równa się liczbie, której wartość bezwzględna jest sumą wartości bezwzględnych liczb r i r' , a znak jest wspólnym znakiem obu składników.

2^o Jeżeli liczby r i r' mają znaki przeciwne, a ich wartości bezwzględne nie są równe pomiędzy sobą, to suma (1) równa się liczbie, której wartością bezwzględną jest różnica bezwzględna wartości bezwzględnych składników, a znakiem znak tego ze składników, którego wartość bezwzględna jest większa.

3^o Jeżeli liczby r i r' mają znaki przeciwne, a ich wartości bezwzględne są pomiędzy sobą równe, to suma (1) równa się zeru, a zatem znakiem sumy (1) jest każdy ze znaków, dodatni i ujemny.

Żeby powyższe twierdzenie uzasadnić, przyjmijmy

$$(1) \quad d = |r|, \quad d' = |r'|$$

i załóżmy najpierw, że liczby r i r' mają ten sam znak. Mamy tedy (§ 105, Def. III) albo

$$(2) \quad r = +d, \quad r' = +d',$$

albo

$$(3) \quad r = -d, \quad r' = -d'.$$

Jeżeli zachodzą równości (2), to (§ 105, Tw. V) żadna z liczb r i r' nie jest mniejsza od zera i (§ 105, Tw. III) mamy w takim razie

$$r = (d, 0), \quad r' = (d', 0),$$

skąd

$$(4) \quad r + r' = (d + d', 0);$$

jeżeli zaś zachodzą równości (3), to (§ 105, Tw. V i III) mamy

$$\begin{aligned} r &= (0, d), \quad r' = (0, d'), \\ \text{skąd} \\ (5) \quad r + r' &= (0, d + d'). \end{aligned}$$

Ponieważ zaś (§ 105, Def. II) mamy

$$\begin{aligned} |(d + d', 0)| &= d + d' \\ |(0, d + d')| &= d + d', \end{aligned}$$

przeto ze wzorów (4) i (5) wynika, że w każdym razie mamy

$$(6) \quad |r + r'| = d + d'.$$

$$\text{Ale} \quad (d + d', 0) \geq (0, 0) = 0,$$

$$\text{a} \quad (0, d + d') \leq (0, 0) = 0.$$

Jeżeli więc zachodzi (4), co istotnie następuje, kiedy zachodzą związki (2), to mamy

$$r + r' \geq 0,$$

a zatem ze względu na (6) mamy

$$(7) \quad r + r' = +(d + d').$$

Jeżeli zaś zachodzi wzór (5), co istotnie następuje, kiedy zachodzą wzory (3), to mamy

$$r + r' \leq 0,$$

zatem na podstawie równości (6) mamy

$$(8) \quad r + r' = -(d + d').$$

Stwierdziliśmy więc, co następuje: jeżeli liczby r i r' mają te same znaki, to równość (6) zachodzi niezawodnie, a nadto zachodzi wzór (7) lub wzór (8) zależnie od tego, czy zachodzą wzory (2), czy też wzory (3). Ale na tem właśnie polega 1-sza część twierdzenia.

Założmy teraz, że liczby r i r' mają znaki przeciwne, a wartości bezwzględne nierówne pomiędzy sobą. Ponieważ mamy

$$r + r' = r' + r,$$

przeto przypadek, w którymby liczba r miała znak ujemny a liczba r' — do-

datni, tylko przez oznaczenia różni się od przypadku, kiedy liczba r ma znak dodatni, a liczba r' — ujemny.

Zatem, żeby uzasadnić w zupełności 2-gą część twierdzenia, wystarczy przeprowadzić dowód w przypadku szczególnym, kiedy liczba r ma znak dodatni, a liczba r' znak ujemny.

Uważając w dalszym ciągu liczby bezwzględne d i d' jako określone przez wzory (1), mamy

$$r = +d', \quad r' = -d',$$

$$r = (d, 0), \quad r' = (0, d'),$$

skąd

$$r + r' = (d + 0, 0 + d'),$$

czyli

$$(9) \quad r + r' = (d, d').$$

Jeżeli oznaczymy przez δ różnicę bezwzględną liczb d i d' , to (§ 105, Def. II) mieć będziemy

$$|(d, d')| = \delta.$$

Zatem (§ 105, Tw. II) na podstawie równości (9) mamy

$$(10) \quad |r + r'| = \delta.$$

Z drugiej strony nierówność

$$(11) \quad d > d'$$

pociąga za sobą

$$(d, d') > (0, 0) = 0,$$

a nierówność

$$(12) \quad d < d'$$

pociąga za sobą nierówność

$$(d, d') < (0, 0) = 0.$$

Zatem ze względu na (9) nierówność (11) pociąga za sobą

$$r + r' > 0,$$

a nierówność (12) — nierówność

$$r + r' < 0.$$

Ale ze względu na (10) mamy (§ 105, Tw. III) w pierwszym przypadku

$$(13) \quad r + r' = +\delta,$$

a w drugim

$$(14) \quad r + r' = -\delta.$$

Udowodniliśmy więc, że w każdym razie zachodzi wzór (10), gdzie ze względu na nierówność

mamy
(15) $d \neq d'$
 $\delta > 0,$

a nadto okazaliśmy, że zachodzi wzór (13) lub (14) zależnie od tego, czy zachodzi (11) czy też (12).

Ponieważ ze względu na (15) równość

$$r + r' = 0$$

jest wykluczona, przeto, z uzyskanych wyników wypływa, że 2-ga część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Przechodząc do 3-ciej części twierdzenia, zaznaczamy najpierw, że z tychże powodów, co przy dowodzie pierwszej części, możemy poprzestać na rozwinięciu dowodu tylko w przypadku, kiedy liczba r ma znak $+$, a zatem liczba r' znak

Ponieważ mamy teraz

$$|r| = |r'|,$$

przeto, przyjąwszy

$$d = |r|,$$

mieć będziemy

$$r = +d, \quad r' = -d,$$

skąd

$$r = (d, 0), \quad r' = (0, d).$$

Z tego wynika, że

$$r + r' = (d, d) = (0, 0) = 0.$$

Stwierdzamy więc, że i trzecia część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Uwaga. Ponieważ na podstawie powyższego twierdzenia zawsze zdołamy sprowadzić wyznaczenie symbolu specyficznego sumy dwóch liczb rzeczywistych, których symbole specyficzne są dane do wyznaczenia sumy albo różnicy dwóch liczb bezwzględnych, ponieważ nadto z 3-ciej części twierdzenia tego wynika, że przez prostą zmianę znaku liczby rzeczywistej, której symbol specyficzny jest dany, uzyskamy symbol specyficzny liczby rzeczywistej symetrycznej rozwiązanej liczbie, ponieważ więc, ze względu na Tw. V § 102-go, zawsze zdołamy sprowadzić wyznaczenie symbolu specyficznego różnicy dwóch liczb rzeczywistych, których symbole specyficzne są dane, do wyznaczenia przy tychże warunkach symbolu specyficznego sumy dwóch liczb rzeczywistych, przeto będziemy zawsze mogli sprowadzić wyznaczenie symbolu specyficznego sumy albo różnicy dwóch liczb rzeczywistych, których symbole specyficzne są dane, do wyznaczenia sumy albo różnicy dwóch danych liczb bezwzględnych.

Tw. III. Jeżeli oznaczymy przez s sumę jakiejkolwiek skończonej ilości liczb rzeczywistych, to zachodzą okoliczności następujące:

1° Jeżeli wszystkie składniki sumy s mają ten sam znak, to liczba, której wartość bezwzględna równa się sumie wartości bezwzględnych składników sumy s , a znak jest wspólnym znakiem tych składników, równa się sumie s .

2° Jeżeli nie wszystkie składniki sumy s mają ten sam znak, jeżeli przy tem liczba bezwzględna a tak jest dobrana żeby przedstawiała sumę wartości bezwzględnych składników dodatnich, a w razie, gdyby istniał jeden tylko składnik dodatni, wartość bezwzględną, tego jedyne go składnika, jeżeli nadto liczba bezwzględna b równa się sumie wartości bezwzględnych składników ujemnych lub w razie, gdyby jeden tylko składnik ujemny istniał — wartości bezwzględnej tego jedyne go składnika ujemnego, to w takim razie wartość bezwzględna sumy s równa się zawsze różnicy bezwzględnej liczb a i b ; w przypadku szczególnym, kiedy zachodzi równość

$$(1) \quad a = b,$$

mamy

$$(2) \quad s = 0,$$

a za znak sumy można uważać którykolwiek ze znaków

$$+ \text{ albo } -;$$

jeżeli zaś równość (1) nie zachodzi, to suma s jest liczbą dodatnią lub ujemną, zależnie od tego, czy mamy

$$(3) \quad a > b,$$

czy też

$$(4) \quad a < b.$$

Pierwszą część twierdzenia czytelnik wyprowadzi sam z łatwością drogą indukcji matematycznej z 1-szej części twierdzenia II-go. Żeby zaś uzasadnić część 2-gą, zważmy przedewszystkiem, że (§ 102, Tw. I i § 68 Tw. II) możemy, bez spowodowania zmiany wartości sumy s , uszeregować jej składniki w jakimkolwiek porządku. Z tego wynika, że w szczególności możemy składniki sumy s tak uszeregować, żeby liczba porządkowa każdego składnika dodatniego była mniejsza od liczby porządkowej każdego składnika ujemnego. Założmy, żeśmy składniki sumy s tak właśnie uporządkowali, oznaczmy ogólnie przez

$$a_i$$

składnik rzędu i , przez p rząd składnika dodatniego najwyższego rzędu, a przez n ilość wszystkich składników. W takim razie (§ 102, Tw. I i § 68, Tw. I) mamy

$$s = s' + s'',$$

przyjawszy

$$s' = \sum_{i=1}^p a_i, \quad s'' = \sum_{i=p+1}^n a_i.$$

Opierając się na tych wzorach i na 1-szej części niniejszego twierdzenia, stwierdzamy na podstawie Tw. II, że i druga część naszego twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Wniosek. Wartość bezwzględna sumy liczb rzeczywistych nigdy nie jest większa od sumy wartości bezwzględnych składników.

§ 107. Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez r i r' dwie liczby rzeczywiste i weźmiemy pod uwagę iloczyn

$$(1) \quad r \cdot r',$$

to w takim razie zachodzą okoliczności następujące:

1° Mamy w każdym razie

$$(2) \quad |r \cdot r'| = |r| \cdot |r'|,$$

gdzie symbole $|r \cdot r'|$, $|r|$ i $|r'|$ mają znaczenie, określone przez Def. II, § 105-go.

2° Jeżeli żaden z czynników

$$(3) \quad r \text{ i } r'$$

iloczynu (1) nie równa się zeru, to sam ten iloczyn nie równa się zeru i ma znak dodatni lub ujemny, zależnie od tego, czy znaki czynników (3) są te same, czy też przeciwne.

3° Żeby iloczyn (1) równał się zeru potrzeba i wystarcza, żeby jeden przynajmniej z czynników (3) równał się zeru.

Żeby powyższe twierdzenie uzasadnić, przyjmijmy

$$(4) \quad d = |r|, \quad d' = |r'|.$$

Z łatwością dostrzegamy, że mamy cztery przypadki do rozróżnienia ze względu na znaki, jakie mieć mogą liczby r i r' . Zbadamy kolejno każdy z tych przypadków.

Przypadek I. Mamy

$$(5) \quad r = d, \quad r' = d'.$$

W takim razie (§ 105, Tw. III) mamy

$$r = (d, 0), \quad r' = (d', 0),$$

a ponieważ (§ 94, Def. IV)

$$(d, 0) \cdot (d', 0) = (d \cdot d', 0),$$

przeto

$$(6) \quad r \cdot r' = (d \cdot d', 0).$$

Przypadek II. Mamy

$$(7) \quad r = +d, \quad r' = -d';$$

w takim razie (§ 105, Tw. III) mamy

$$r = (d, 0), \quad r' = (0, d'),$$

a ponieważ (§ 94, Def. IV)

$$(d, 0) \cdot (0, d') = (0, d \cdot d')$$

przeto

$$(8) \quad r \cdot r' = (0, d \cdot d').$$

Przypadek III. Mamy

$$(9) \quad r = -d, \quad r' = +d'.$$

W takim razie (§ 105, Tw. III) mamy

$$r = (0, d), \quad r' = (d', 0),$$

a ponieważ (§ 94, Def. IV)

$$(0, d) \cdot (d', 0) = (0, d \cdot d'),$$

przeto

$$(10) \quad r \cdot r' = (0, d \cdot d').$$

Przypadek IV. Mamy

$$(11) \quad r = -d, \quad r' = -d'.$$

W takim razie (§ 105, Tw. III) mamy

$$r = (0, d), \quad r' = (0, d'),$$

zatem (§ 94, Def. IV)

$$(12) \quad r \cdot r' = (d \cdot d', 0).$$

Zważmy teraz, że (§ 105, Def. II) mamy

$$(13) \quad \begin{cases} |(d \cdot d', 0)| = d \cdot d' \\ |0, d \cdot d'| = d \cdot d'. \end{cases}$$

Ponieważ w każdym razie zachodzi jeden ze wzorów (6), (8), (10) lub (12), przeto, ze względu na (13) (§ 105, Tw. II), mamy w każdym razie

$$|r \cdot r'| = d \cdot d',$$

skąd ze względu na (4) mamy zgodnie z brzmieniem 1-szej części twierdzenia

$$|r \cdot r'| = |r| \cdot |r'|.$$

Jeżeli żaden z czynników r i r' nie jest równy zeru, to (§ 105, Tw. III), każda z liczb bezwzględnych

$$|r| \cdot |r'|$$

jest od zera odmienna; mamy więc

$$|r| \cdot |r'| > 0,$$

a zatem, ze względu na dowiedzioną już równość (2), mamy

$$|r \cdot r'| > 0.$$

Z tej nierówności wynika (§ 105, Tw. III), że mamy rzeczywiście

$$(14) \quad r \cdot r' \neq 0.$$

Ponieważ dalej, w razie tożsamości znaków czynników iloczynu (1) zachodzi albo przypadek I albo IV-ty, ponieważ ze wzorów (6) i (12) wynika, że w obu przypadkach mamy

$$r \cdot r' = (d \cdot d' \cdot 0),$$

ponieważ nadto w rozważanym przypadku mamy

$$(d \cdot d', 0) > (0, 0) = 0,$$

przeto jeżeli czynniki iloczynu (1) mają te same znaki, a żaden z nich zeru równy nie jest, to iloczyn (1) jest rzeczywiście dodatni. Jeżeli zaś jeden z czynników iloczynu (1) jest dodatni, a drugi ujemny, to zachodzi jeden z przypadków II lub III.

Ponieważ ze wzorów (8) i (10) wynika, że w obu przypadkach mamy

$$r \cdot r' = (0, d \cdot d') < (0, 0) = 0,$$

przeto w obu tych przypadkach iloczyn (1) jest ujemny. Zatem 2-ga część twierdzenia zachodzi w podanem brzmieniu.

Z drugiej części twierdzenia wynika, że, aby mieć

$$(15) \quad r \cdot r' = 0,$$

potrzeba, żeby przynajmniej jeden z czynników

$$(15) \quad r \text{ lub } r'$$

rozważanego iloczynu równał się zeru. Jeżeli ten warunek jest spełniony, to

równość (15) niezawodnie zachodzi, albowiem w takim razie jedna przynajmniej (§ 105, Tw. III) z liczb bezwzględnych

$$|r| \text{ lub } |r'|$$

równa się zero, a zatem z dowiedzionej już równości (2) wynika, że mamy

$$|r \cdot r'| = 0,$$

skąd (§ 105, Tw. III)

$$r \cdot r' = 0.$$

Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. II. Jakiegokolwiek liczby rzeczywiste oznaczylibyśmy przez $r \cdot r'$, w każdym razie mamy

$$(1) \quad r' \cdot r = r' \cdot r.$$

Istotnie, jeżeli jedna przynajmniej z liczb r i r' równa się zero, to (Tw. I) mamy

$$r \cdot r' = 0, \quad r' \cdot r = 0,$$

a zatem w tym przypadku równość (1) zachodzi. Jeżeli zaś żadna z liczb r i r' nie jest równa zero, to (Tw. I) wartości bezwzględne iloczynów (1) są pomiędzy sobą równe, a ich znaki są te same. Zatem (§ 106, Tw. I) i w tym przypadku równość (1) rzeczywiście zachodzi.

Tw. III. Jeżeli tylko pewna liczba rzeczywista r spełnia nierówność

$$(1) \quad r \neq 0,$$

a r' jest całkiem dowolnie oznaczona, to zawsze istnieje liczba rzeczywista x spełniająca równość

$$(2) \quad r \cdot x = r'.$$

Istotnie, w przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$r' = 0,$$

wystarczy (Tw. I) przyjąć

$$x = 0,$$

aby uczynić zadość równości (2). Jeżeli zaś mamy

$$r' \neq 0,$$

to z Tw. I wynika, że, aby uczynić zadość równości (2), wystarczy wyznaczyć wartość bezwzględną liczby x ze wzoru

$$(3) \quad |x| = |r'| : |r|$$

i przyjąć za znak liczby x znak

+ lub —,

zależnie od tego, czy liczby r i r' mają ten sam znak, czy też znaki przeciwne. Ponieważ zaś, ze względu na nierówność (1), mamy

$$|r| \neq 0,$$

ponieważ więc dzielenie, zaznaczone we wzorze (3), będzie wykonalne, przeto liczba x , spełniająca powyższe warunki, a zatem i równość (2), niezawodnie istnieć będzie. Zatem twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. IV. Jeżeli oznaczmy przez r , r' i r'' jakiekolwiek trzy liczby rzeczywiste, to mamy w każdym razie

$$(1) \quad (r \cdot r') \cdot r'' = r \cdot (r' \cdot r'').$$

To twierdzenie moglibyśmy łatwo wyprowadzić z Tw. I, ale w takim razie wypadałoby wyszczególnić wszystkie przypadki, które nadarzyć się mogą co do znaków liczb

$$r, r' \text{ i } r''.$$

Wobec tego prostszy dowód uzyskamy w sposób następujący. Oznaczmy przez

$$(a, b), (a', b') \text{ i } (a'', b'')$$

liczby względne, odpowiednio homologiczne (§ 97, Def. II i III) liczbom (2). Mamy tedy

$$\begin{aligned} r \cdot r' &= (a, b) \cdot (a', b') = (aa' + bb', ab' + ba') \\ (2) \quad (r \cdot r') \cdot r'' &= (aa' + bb', ab' + ba') \cdot (a'', b'') = \\ &= ((aa' + bb')a'' + (ab' + ba')b'', (aa' + bb')b'' + (ab' + ba')a'') \end{aligned}$$

Całkiem analogicznie wyznaczmy kolejno iloczyny

$$r' \cdot r'' \text{ i } r \cdot (r' \cdot r''),$$

a następnie stwierdzimy, że w taki sposób uzyskuje się na wartość iloczynu

$$r \cdot (r' \cdot r'')$$

liczba względna, której 1-szy i 2-gi wyraz są odpowiednio równe 1-mu i 2-mu wyrazowi tej liczby względnej, która, na podstawie równości (2), przedstawia iloczyn

$$(r \cdot r') \cdot r''.$$

Wnosimy stąd, że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu

Tw. V. Jeżeli oznaczymy przez p liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność

$$(1) \quad p \neq 0,$$

a przez r i r' dwie liczby rzeczywiste, czyniące zadość nierówności

$$(2) \quad r < r',$$

to w takim razie mamy

$$(3) \quad p \cdot r \neq p \cdot r',$$

a nadto nierówność

$$(4) \quad p > 0$$

pociąga za sobą nierówność

$$(5) \quad p \cdot r < p \cdot r',$$

a nierówność

$$(6) \quad p < 0,$$

— nierówność

$$(7) \quad p \cdot r > p \cdot r'.$$

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zważmy, że skoro zachodzi nierówność (1) to zachodzić musi jedna z nierówności (4) lub (6).

Uważajmy kolejno każdy z tych dwóch przypadków.

Przypadek I-szy. Liczba p spełnia nierówność (4). Jeżeli tedy przyjmemy

$$(8) \quad d = |p|,$$

to mieć będziemy

$$(9) \quad p = (d, 0)$$

oraz

$$(10) \quad d > 0.$$

Oznaczmy teraz przez

$$(a, b) \text{ i } (a', b')$$

liczby względne, odpowiednio homologiczne (§ 97, Def. II i III) liczbom r i r' . Mamy tedy (§ 98, Tw. I, Uwaga)

$$(11) \quad r = (a, b), \quad r' = (a', b')$$

Ze względu na (2) i (11) mamy

$$(12) \quad a + b' < a' + b.$$

Z drugiej strony, na podstawie równości (9) i (11) mamy

Wstęp do analizy.

$$(13) \quad \begin{cases} p \cdot r = (d \cdot a, d \cdot b) \\ p \cdot r' = (d \cdot a', d \cdot b'), \end{cases}$$

a ponieważ z nierówności (10) i (12) mamy

$$(14) \quad d \cdot a + d \cdot b' < d \cdot a' + d \cdot b,$$

przeto, ze wzorów (13) wynika rzeczywiście nierówność (5).

Przypadek II. Liczba p spełnia nierówność (6). Przy zachowaniu powyższych oznaczeń, nierówność (10) zachodzić będzie i teraz, ale na p mieć będziemy, zamiast wzoru (9), wzór

$$p = (0, d)$$

Na podstawie wzoru tego i wzorów (11) mamy

$$(15) \quad \begin{cases} p \cdot r = (d \cdot b, da) \\ p \cdot r' = (d \cdot b', da'). \end{cases}$$

Ponieważ i w niniejszym przypadku związki (10), (12), a więc i (14) zachodzić będą, przeto ze wzorów (15) wynika, że zachodzić będzie nierówność (7). Dowiedliśmy więc co następuje: nierówność (4) pociąga za sobą (5), a nierówność (6) — (7). Ponieważ zaś, jak na początku zaznaczyliśmy, jedna z nierówności (4) lub (6) zawsze zachodzić będzie, ponieważ więc jedna z nierówności (5) lub (7) będzie zawsze spełniona, przeto zawsze zachodzić będzie nierówność (3). Ostatecznie twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. VI. Jakiegokolwiek liczby rzeczywiste oznaczylibyśmy przez

$$(1) \quad p, r \text{ i } r',$$

mamy w każdym razie

$$(2) \quad p \cdot (r + r') = p \cdot r + p \cdot r'.$$

Żeby twierdzenie to najprościej uzasadnić, oznaczymy przez

$$(c, d), (a, b) \text{ i } (a', b')$$

liczby względne, odpowiednio równe liczbom rzeczywistym (1).

Mamy tedy

$$r + r' = (a', b) + (a' b'),$$

skąd (§ 94, Def. III)

$$r + r' = (a + a', b + b').$$

Zatem

$$p \cdot (r + r') = (c, d) \cdot (a + a', b + b'),$$

skąd (§ 94, Def. IV)

$$(3) \quad p \cdot (r + r') = (c[a + a'] + d[b + b'], c[b + b'] + d[a + a']).$$

Z drugiej strony (§ 94, Def. IV) mamy

$$p \cdot r = (c, d) \cdot (a, b) = (c \cdot a + d \cdot b, c \cdot b + d \cdot a),$$

$$p \cdot r' = (c, d) \cdot (a', b') = (c \cdot a' + d \cdot b', c \cdot b' + d \cdot a'),$$

skąd

$$(4) \quad p \cdot r + p \cdot r' = (c \cdot a + d \cdot b + c \cdot a' + d \cdot b', c \cdot b + d \cdot a + c \cdot b' + d \cdot a').$$

Łatwo stwierdzamy, że prawe strony wzorów (3) i (4) są takie liczby względne, iż pierwszy i drugi wyraz jednej z nich równają się odpowiednio pierwszemu i drugiemu wyrazowi drugiej. Ponieważ z tego wynika, że rzeczzone liczby względne są równe pomiędzy sobą, przeto wnosimy z równości (3) i (4), że, zgodnie z brzmieniem twierdzenia, równość (2) rzeczywiście zachodzi w każdym razie.

§ 108. Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez (K) tę klasę wielkości, którą jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, to w takim razie wszystkie twierdzenia, podane w rozdziale III-cim, będą słuszne, a wszystkie definicje, tamże podane, ważne.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, należy przedewszystkiem uwzględnić, iż ważność całej teorii, wyłożonej w rozdziale III-cim, jest koniecznym następstwem założeń następujących:

(A) Reguły porównywania ilościowego elementów klasy (K) nie uchybiają zasadom, podanym w rozdziale III-cim tomu I-go, a teoria działań podstawowych na tych wielkościach została ugruntowana w sposób zgodny z ogólnymi przypisami, podanymi w rozdziale II-gim niniejszego tomu.

(B) Każde z dziewięciu twierdzeń, wyszczególnionych w § 67, i każde z twierdzeń I i II, podanych w § 76, jest słuszne.

Otóż zbiór liczb rzeczywistych czyni zadość warunkowi (A) na podstawie Tw. I § 98-go i twierdzeń I i II § 99-go. Pozostaje więc do wykazania, że, w odniesieniu do liczb rzeczywistych, wszystkie twierdzenia, wymienione pod (B), są słuszne. Otóż na podstawie tw. I § 102-go, twierdzenia I, II, III i IV § 67-go oraz tw. I § 76 zachodzą niezawodnie, a twierdzenia IV, II i VI § 107-go wyrażają odpowiednio, że, w odniesieniu do liczb rzeczywistych, twierdzenia V, VI i IX z § 67-go są słuszne. Z drugiej strony, ze względu na Tw. III § 102-go, i na Uw. I po Tw. VI, § 69-go, z twierdzeń V i III § 107-go wynika, że, w odniesieniu do liczb rzeczywistych, Tw. II § 76-go i Tw. VII i VIII-go § 67-go są słuszne.

Z tego wynika, że w odniesieniu do liczb rzeczywistych wszystkie twierdzenia, wymienione pod (B), są słuszne, a to tylko pozostawało do okazania, żeby nasze twierdzenie uzasadnić w zupełności.

§ 109. Tw. I. Jeżeli przy dzieleniu liczb rzeczywistych dzielnik nie równa się zeru, to dzielenie jest wykonalne, a wartość ilorazu jest oznaczona bez dwuznaczności. Jeżeli zaś dzielnik równa się zeru, to dzielenie jest wykonalne w przypadku i tylko w przypadku, kiedy dzielna także równa się zeru, ale w takim razie iloraz jest całkiem nieoznaczony.

Istotnie, twierdzenie I § 72-go jest (§ 108, Tw. I) ważne dla klasy wielkości, jaką tworzy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, a z tego wynika, na podstawie Tw. III § 102, że nasze twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Uwaga I. Ze względu na Uw. III, po Tw. I § 72. zachodzi okoliczność następująca: Jeżeli oznaczymy przez p , r i x trzy liczby rzeczywiste i założymy, że

$$r \neq 0,$$

to równość

$$x = p : r$$

jest równoważna każdej z równości

$$r \cdot x = p \text{ i } x \cdot r = p.$$

Tw. II. Moduł mnożenia liczb rzeczywistych istnieje i równa się jedności.

Istnienie modułu mnożenia liczb rzeczywistych wynika z Tw. I § 108 i Tw. IV § 72. Z drugiej strony, jeżeli oznaczymy przez m moduł mnożenia liczb rzeczywistych, a przez r jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, to (§ 72, Def. I) mieć będziemy

$$(1) \quad r \cdot m = r.$$

Jeżeli mamy

$$(2) \quad r \neq 0,$$

to równość (1) jest równoważna (Tw. I, Uwaga I) równości

$$(3) \quad m = r : r.$$

Podstawiając w tej równości w miejsce liczby rzeczywistej r jakąkolwiek liczbę bezwzględną nierówną zeru¹⁾ (np. jedność), wnosimy z niej, że mamy

$$m = 1.$$

Zatem twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

¹⁾ Żeby należycie końcowy ustęp dowodu zrozumieć, należy zważyć, że, na podstawie Tw. I § 108-go, Tw. IV § 73-go i Tw. III § 102-go wzór (3) na moduł mnożenia m liczb rzeczywistych jest ważny przy każdej, byle od zera odmiennej, wartości liczby rzeczywistej r .

Tw. III. Jeżeli oznaczymy przez r jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, byle spełniającą nierówność

$$(1) \quad r \neq 0,$$

a przez r' już całkiem dowolnie oznaczoną liczbę rzeczywistą, to w takim razie:

1° Wartość bezwzględna

$$\text{ilorazu} \quad |r' : r| =$$

$$(2) \quad r' : r$$

spełnia równość

$$|r' : r| = |r| : |r|.$$

2° Jeżeli przytem zachodzi równość

$$(3) \quad r' = 0,$$

to w takim razie mamy

$$(4) \quad r' : r = 0$$

i znak ilorazu (2) jest nieoznaczony.

3° Jeżeli zaś mamy

$$(5) \quad r' \neq 0,$$

to znak ilorazu (2) jest dodatni lub ujemny, zależnie od tego czy liczby

$$r' \text{ i } r$$

są tego samego znaku czy też znaków przeciwnych.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, należy tylko zważyć, że z jednej strony (Tw. I, Uwaga I), ze względu na (1), równość

$$x = r' : r$$

jest równoważna równości

$$(6) \quad r \cdot x = r',$$

a z drugiej, że, aby uczynić zadość równości (6), należy (§ 107, Tw. I) przyjąć

$$(7) \quad |x| = |r'| : |r|$$

i nadmienić, że w razie istnienia nierówności (5), a więc w przypadku, kiedy ze względu na (7) mamy

$$x \neq 0$$

i kiedy zatem do zupełnego oznaczenia wartości liczby x należy określić jej znak, przyjmiemy za znak liczby x znak dodatni lub ujemny, zależnie od tego, czy liczby

$$r \text{ i } r'$$

mają ten sam znak, czy też znaki przeciwne.

Def. I. Jeżeli z symbolu jednej z postaci

$$+x \text{ albo } -x,$$

gdzie x oznacza pewną liczbę rzeczywistą, równą liczbie, którą przedstawia pewien symbol złożony S , wyprowadzamy symbol równoznaczny, w którym wartość liczby r przedstawiona jest przez symbol S , to w przypadku szczególnym, kiedy symbol S jest symbolem iloczynu albo ilorazu, nie zaopatrzonym w żaden znak gatunkowy, opuszczamy nawias, w którym na podstawie ogólnych zasad symboliki matematycznej należałoby zamknąć symbol S . W myśl tej definicji piszemy na przykład

$$-r \cdot r' \text{ i } -\frac{r}{r'} \text{ lub } -r:r'$$

odpowiednio zamiast

$$-(r \cdot r') \text{ i } -\left(\frac{r}{r'}\right) \text{ lub } -(r:r')$$

Tw. IV. Jeżeli oznaczymy przez r i r' jakiekolwiek dwie liczby rzeczywiste, to w takim razie zachodzą równości następujące:

$$(1) \quad (+r) \cdot (+r') = +r \cdot r',$$

$$(2) \quad (-r) \cdot (+r') = -r \cdot r',$$

$$(3) \quad (+r) \cdot (-r') = -r \cdot r',$$

$$(4) \quad (-r) \cdot (-r') = +r \cdot r',$$

a jeżeli zachodzi nierówność

$$(5) \quad r' \neq 0,$$

to prócz powyższych czterech równości mamy jeszcze równości następujące:

$$(6) \quad (+r):(+r') = +r:r'$$

$$(7) \quad (-r):(+r') = -r:r'$$

$$(8) \quad (+r):(-r') = -r:r'$$

$$(9) \quad (-r):(-r') = +r:r'.$$

W przypadku szczególnym, kiedy liczby rzeczywiste

$$r \text{ i } r'$$

są liczbami bezwzględniemi, poprawność równości (1), (2), (3) i (4) wynika bezpośrednio w Tw. I § 107-go, a poprawność równości (6), (7), (8) i (9) z Tw. III paragrafu niniejszego. Z tychże twierdzeń możnaby wyprowadzić ogólne twierdzenie, o uzasadnienie którego obecnie nam chodzi, ale w takim razie należałoby rozważyć z osobna każdy z przypadków, jakie, ze względu na znaki liczb r i r' zająć mogą. Z tego powodu podajemy inny dowód.

Lemat I. Jakąkolwiek liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez p , mamy w każdym razie

$$(10) \quad -p = (-1) \cdot p.$$

Istotnie, przyjmijmy

$$(11) \quad p' = (-1) \cdot p$$

i zważmy, że (Tw. II) mamy

$$(12) \quad p = 1 \cdot p = (+1) \cdot p.$$

Z równości (11) i (12) mamy

$$p + p' = (+1) \cdot p + (-1) \cdot p,$$

czyli

$$p + p' = p \cdot (+1) + p \cdot (-1),$$

skąd (§ 107, Tw. VI)

$$p + p' = p \cdot \{ (+1) + (-1) \},$$

a ponieważ

$$(+1) + (-1) = 0,$$

przeto

$$p + p' = p \cdot 0,$$

skąd (§ 108, Tw. I i § 70, Tw. III oraz § 102, Tw. III) wynika równość

$$p + p' = 0.$$

Mamy więc

$$p' = -p$$

a z tej równości i równości (11) wynika właśnie równość (10), którą chcieliśmy uzasadnić.

Przystępujemy obecnie do uzasadnienia twierdzenia, o które nam właśnie chodzi.

Zważywszy, że jakąkolwiek liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez p , mamy w każdym razie

$$(13) \quad +p = p,$$

stwierdzamy najpierw, że równości (1) i (6) rzeczywiście zachodzą w warunkach, podanych w twierdzeniu. Pozostają więc do udowodnienia tylko równości (2), (3), (4), (7), (8) i (9). Ze względu na Lemat I i na równość

$$+r = r'$$

mamy

$$(-r) \cdot (+r') = (-1) \cdot r \cdot r',$$

skąd (§ 107, Tw. IV)

$$(-r) \cdot (+r') = (-1) \cdot (r \cdot r'),$$

a ponieważ (Lemat I)

$$(-1) \cdot (r \cdot r') = -r \cdot r',$$

przeto równość (2) rzeczywiście zawsze zachodzi. Jeżeli w równości (2) zastąpimy r przez r' , a r' — przez r , to uzyskamy równość

$$(14) \quad (-r') \cdot (+r) = -r' \cdot r,$$

a ponieważ (§ 107, Tw. II)

$$(-r') \cdot (+r) = (+r) \cdot (-r'),$$

$$r' \cdot r = r \cdot r',$$

przeto z równości (14) wynika równość (3).

Ponieważ (Lem. I)

$$-r = (-1) \cdot r,$$

przeto

$$(-r) \cdot (-r') = (-1) \cdot r \cdot (-r'),$$

skąd (§ 107, Tw. IV)

$$(-r) \cdot (-r') = (-1) \cdot (r \cdot (-r')) = (-1) \cdot ((+r) \cdot (-r')),$$

zatem, ze względu na (3), mamy

$$(-r) \cdot (-r') = (-1) \cdot (-r \cdot r'),$$

skąd (Lem. I)

$$(-r) \cdot (-r') = -(-r \cdot r'),$$

a z tej równości (§ 103, Tw. II) wynika właśnie równość (4).

Żeby jeszcze uzasadnić równości (7), (8) i (9), przyjmijmy

$$(15) \quad x = r : r'.$$

Równość ta jest równoważna równości

$$(16) \quad x \cdot r' = r.$$

Podstawiając w równości (2), (3) i (4) liczbę x w miejsce r , uzyskujemy równości następujące:

$$(-x) \cdot (+r') = -x \cdot r'$$

$$(+x) \cdot (-r') = -x \cdot r'$$

$$(-x) \cdot (-r') = +x \cdot r',$$

a z tych równości i równości (16) mamy

$$(-x) \cdot (+r') = -r$$

$$(+x) \cdot (-r') = -r$$

$$(-x) \cdot (-r') = +r,$$

które, ze względu na (5) i na nierówność

$$-r' \neq 0,$$

wynikającą z nierówności (5), są odpowiednio równoważne,

$$(17) \quad -x = (-r) : (+r')$$

$$(18) \quad +x = (-r) : (-r').$$

$$(19) \quad -x = (+r) : (-r')$$

Na podstawie równości (15) wynikają z równości (17), (18) i (19) odpowiednio równości (7), (9) i (8). Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Uwaga. Jeżeli zestawimy każdą z równości (2) i (3) z równością (1), a każdą z równości (7) i (8) z równością (6), to z łatwością dostrzeżemy, że z zestawień tych wynika twierdzenie następujące: Jeżeli we wzorze, przedstawiającym iloczyn albo iloraz dwóch liczb rzeczywistych, zastąpimy jedną z tych liczb przez liczbę jej symetryczną, to nowy wzór przedstawiać będzie liczbę symetryczną do tej, którą przedstawiał wzór pierwotny (naturalnie z zastrzeżeniem, że, jeżeli chodzi o iloraz, to dzielnik nie jest równy zeru).

§ 110. W tym paragrafie zamierzamy omówić najelementarniejsze i najważniejsze zarazem własności zbioru wszystkich liczb rzeczywistych.

W § 105 tym podaliśmy podział zbioru liczb rzeczywistych na trzy kategorie, a mianowicie, na liczby *dodatnie*, *ujemne* i *równe zeru*. Ale w praktyce naukowej dogodną jest rzeczą dzielić liczby rzeczywiste na rodzaje i w inny jeszcze sposób. Przedewszystkiem zaznaczamy, że, ponieważ do każdej liczby nieujemnej można dobrać równą jej liczbę bezwzględną, ponieważ nadto w zastosowaniach chodzi zwykle wyłącznie o wartości liczb, przeto często przyjmuje się milcząco, że ze zbioru liczb rzeczywistych liczby względne nieujemne zostały usunięte i w takim razie rozróżnia się dwa rodzaje liczb rzeczywistych, a mianowicie: *liczby bezwzględne* i *liczby ujemne*. Inna znów klasyfikacja liczb rzeczywistych, *wielkie* mająca znaczenie w praktyce, opiera się na własnościach

wartości bezwzględnych rozważanych liczb: zbiór liczb rzeczywistych dzielimy na *zbiór liczb wymiernych* i *zbiór liczb niewymiernych*, zaliczając do zbioru liczb wymiernych wszystkie te liczby rzeczywiste, których wartościami bezwzględnymi są liczby wymierne bezwzględne, a do zbioru liczb niewymiernych, wszystkie inne liczby rzeczywiste; w zbiorze liczb wymiernych odróżniamy liczby *całkowite* czyli takie, których wartości bezwzględne równają się liczbom całkowitym bezwzględnym, od pozostałych liczb rzeczywistych wymiernych, które obejmujemy pod nazwą liczb rzeczywistych *ułamkowych*.

Tw. I. Jakąkolwiek liczbę rzeczywistą oznaczylibyśmy przez r , zawsze istnieć będą dwie liczby wymierne w_1 i w_2 , spełniające nierówności

$$(1) \quad w_1 < r < w_2.$$

Istotnie, przyjmijmy

$$d = |r|.$$

Zawsze znajdzie się liczba wymierna bezwzględna w , większa od liczby d ; jeżeli bowiem liczba d jest liczbą wymierną, to dość będzie przyjąć np.

$$w = d + 1,$$

żeby liczba w była liczbą wymierną, spełniającą nierówność

$$(2) \quad w > d;$$

jeżeli zaś liczba d jest liczbą bezwzględną niewymierną, to wystarczy oznaczyć przez w liczbę wymierną drugiej kategorii w stosunku do przekroju zbioru liczb wymiernych bezwzględnych, na którym liczba d jest położona, aby liczba w była liczbą wymierną bezwzględną, spełniającą nierówność (2). Ale jeżeli przyjmujemy

$$w_1 = -w, \quad w_2 = +w,$$

to liczby w_1 i w_2 będą liczbami wymiernymi i, ze względu na (2), będą spełniać nierówność (1). Zatem twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Wniosek. W zbiorze liczb rzeczywistych tudzież w zbiorze, obejmującym tylko liczby rzeczywiste wymierne albo nawet tylko liczby rzeczywiste całkowite, niema ani liczby najmniejszej ani liczby największej.

Tw. II. Jeżeli dane liczby rzeczywiste r i r' spełniają nierówność

$$(1) \quad r < r',$$

to zawsze istnieje liczba wymierna w , pośrednia pomiędzy liczbami r i r' , czyli spełniająca nierówność

$$(2) \quad r < w < r'.$$

Istotnie, jeżeli liczba r jest ujemna, a liczba r' dodatnia, to liczba w spełniać będzie warunki twierdzenia, jeżeli przyjmijemy

$$(3) \quad w = 0.$$

Pozostają więc do rozważania przypadki, w których wartość (3) na w nie spełniałaby nierówności (2). Przyjmijmy

$$(4) \quad d = |r| \text{ i } d' = |r'|.$$

Ponieważ mamy do zbadania przypadki, w których, obok nierówności (1), mamy albo

$$(5) \quad 0 \leq r,$$

albo

$$(6) \quad r' \leq 0,$$

przełożenie istnienia równości

$$d = d'$$

jest wykluczone. Zatem (§ 86, Tw. I) istnieć będzie pewna liczba wymierna w_0 , pośrednia pomiędzy liczbami d i d' . Jeżeli tedy przyjmijemy

$$\text{albo} \quad w = +w_0,$$

$$w = -w_0,$$

zależnie od tego, czy zachodzi (5) czy (6), to liczba rzeczywista w będzie liczbą wymierną, spełniającą nierówności (2). Zatem twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Def. I. Jeżeli w pewnym zbiorze (Z) wielkości w znaczeniu ścisłym (§ 28) nie istnieje ani wielkość najmniejsza, ani wielkość największa, to w takim razie zowiemy **przekrojem** zbioru (Z) taki podział jego na dwa niepuste zbiory, żeby każdy element jednego z tych zbiorów, (Z_1), był mniejszy od każdego elementu drugiego zbioru (Z_2); zbiory (Z_1) i (Z_2) zowią się odpowiednio zbiorami elementów *pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do odnośnego przekroju*; jeżeli niema ani największego elementu w zbiorze (Z_1), ani najmniejszego elementu w zbiorze (Z_2), to odnośny przekrój zbioru (Z) zowie się *przekrojem drugiego gatunku*, w przeciwnym zaś razie rozważany przekrój zowie się *przekrojem pierwszego gatunku*.

Def. II. Jeżeli pewien zbiór wielkości (Z), spełniający warunki Def. I jest podzbiorem¹⁾ pewnego zbioru wielkości (W),

¹⁾ Przypominamy czytelnikowi, że orzeczenie, iż pewien zbiór (Z) jest podzbiorem pewnego zbioru (W), wyraża tylko, że każdy element zbioru (Z), należy do zbioru (W), a więc nie wyklucza zlewania się zbioru (Z) ze zbiorem (W).

to orzeczenie, iż pewien element e zbioru (W) *położony* jest na pewnym przekroju (P) zbioru (Z), wyraża, że element e nie jest ani mniejszy od żadnego elementu zbioru (Z), będącego elementem pierwszej kategorii w stosunku do przekroju (P), ani większy od żadnego elementu zbioru (Z), będącego elementem drugiej kategorii w stosunku do rozważanego przekroju.

Tw. III. Każdemu przekrojowi zbioru liczb rzeczywistych wymiennych odpowiada dokładnie jednej wartości liczba rzeczywista, położona na tym przekroju.

Twierdzenie to jest równoważne zespołowi dwóch twierdzeń następujących:

(A) Jeżeli oznaczymy przez (P) jakikolwiek przekrój zbioru liczb wymiennych, to istnieje liczba rzeczywista, położona na tym przekroju.

(B) Jeżeli każda z pewnych dwóch liczb rzeczywistych r i r' położona jest na tym samym przekroju (P) zbioru liczb wymiennych, to w takim razie zachodzi równość

$$(1) \quad r = r'.$$

Zwracamy się najpierw do uzasadnienia lematu (A). Jeżeli oznaczymy odpowiednio przez (A_1) i (A_2) zbiory liczb wymiennych pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do przekroju (P), to w każdym razie zachodzić musi jeden z dwóch przypadków następujących:

(α) W zbiorze (A_1) istnieje liczba od zera większa.

(β) W zbiorze (A_1) nie ma liczby od zera większej.

Biorąc najpierw pod uwagę przypadek (α), oznaczmy przez (A'_1) ten podzbiór zbioru (A_1) , jaki tworzą liczby zbioru (A_1) , nie mniejsze od zera. Liczby bezwzględne, należące do zbioru (A'_1) , i liczby bezwzględne, należące do zbioru (A_2) , stanowią oczywiście odpowiednio zbiory liczb wymiennych bezwzględnych pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do pewnego przekroju zbioru liczb wymiennych bezwzględnych. Na tym przekroju jest położona (§ 79 Def. II i § 82 Def. I) pewna liczba bezwzględna a , a ta liczba jest, jak z łatwością dostrzegamy, liczbę rzeczywistą, położoną na przekroju (P).

Zwracając się do przypadku (β), zaznaczamy, że w tym przypadku zachodzić musi jedna z dwóch okoliczności następujących:

(β') W zbiorze (A_2) nie ma liczby od zera mniejszej.

(β'') W zbiorze (A_2) istnieje liczba mniejsza od zera.

Jeżeli przypadkowi (β) towarzyszy okoliczność (β'), to oczywiście liczba zero jest liczbą położoną na przekroju (P). Zatem, żeby uzasadnić w zupełności lemat (A), pozostaje tylko do wykazania, że w razie, kiedy przypadkowi (β) towarzyszy okoliczność (β''), istnieje także pewna liczba rzeczywista, położona na przekroju (P).

Otóż, jeżeli oznaczymy przez (B_1) zbiór wartości bezwzględnych tych liczb zbioru (A_2) , które nie są dodatnie, a przez (B_2) zbiór wartości bezwzględnych liczb zbioru (A_1) , to, jak łatwo dostrzedz, zbiory (B_1) i (B_2) stanowią odpowiednio zbiory liczb wymiernych bezwzględnych pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do pewnego przekroju zbioru liczb wymiernych. Na tym przekroju zbioru liczb wymiernych bezwzględnych położona jest (§ 79 Def. II § 82 Def. I) pewna liczba bezwzględna d . Otóż z łatwością dostrzegamy, że liczba rzeczywista

$$-d$$

jest liczbą rzeczywistą, położoną w rozważanym przypadku na przekroju (P) . Zatem lemat (A) jest uzasadniony. Żeby uzasadnić i lemat (B) , założmy, że wbrew brzmieniu tego lematu dwie nierówne pomiędzy sobą liczby rzeczywiste r i r' ($r < r'$) położone są na tym samym przekroju (P) zbioru liczb wymiernych. Na podstawie Tw. II znajdzie się liczba wymierna w , spełniająca jednocześnie obie nierówności

$$(2) \quad r < w$$

i

$$(3) \quad w < r'.$$

Zachowując wyżej nadane znaczenie symbolom (A_1) i (A_2) , zważmy, że z nierówności (2) wynika (Def. II), iż liczba w należy do zbioru (A_2) , a z nierówności (3) — że liczba w należy do zbioru (A_1) . Zatem, przy wymienionym założeniu, zbiory (A_1) i (A_2) miałyby, wbrew brzmieniu Def. I, jeden przynajmniej wspólny element w . Wnosimy stąd, że lemat (B) zachodzi w podanym brzmieniu, a to tylko pozostawało do wykazania, żeby nasze twierdzenie w zupełności uzasadnić.

Tw. IV. Każdej liczbie rzeczywistej r odpowiada jeden przynajmniej przekrój zbioru liczb wymiernych, na którym ona jest położona; jeżeli liczba r jest niewymierna, to istnieje jeden tylko przekrój zbioru liczb wymiernych, spełniający powyższy warunek, i ten przekrój jest przekrojem drugiego gatunku; jeżeli zaś liczba r jest wymierna, to istnieją dokładnie dwa takie przekroje zbioru liczb wymiernych, że ta liczba r położona jest na każdym z nich, a każdy z tych dwóch przekrojów jest przekrojem drugiego gatunku.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, oznaczmy przez (W_1) zbiór wszystkich liczb wymiernych, mniejszych od liczby r , a przez (W_2) zbiór wszystkich liczb wymiernych, większych od liczby r . Z łatwością dostrzegamy, że zachodzą okoliczności następujące:

(A) Ze względu na Tw. I żaden ze zbiorów (W_1) i (W_2) nie jest pusty.

(B) Każda liczba zbioru (W_1) jest mniejsza od każdej liczby zbioru (W_2).

(C) Jeżeli liczba rzeczywista r położona jest na pewnym przekroju (P) zbioru liczb wymiennych, a symbole (A_1) i (A_2) oznaczają odpowiednio zbiory liczb wymiennych pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do przekroju (P), to każda liczba wymierna, nierówna liczbie r , jest albo wspólnym elementem zbiorów (W_1) i (A_1) albo wspólnym elementem zbiorów (W_2) i (A_2).

Powiadam teraz, co następuje:

(D) Jeżeli liczba rzeczywista r jest niewymierna, to żadna liczba wymierna nie równa się liczbie r .

Istotnie, gdyby liczba r równała się pewnej liczbie wymiernej w , to mielibyśmy

$$|r| = |w|,$$

a zatem, wartość bezwzględna liczby r byłaby wymierna i sama liczba r , wbrew założeniu lematu (D), byłaby liczbą wymierną.

Założmy, że liczba r jest liczbą niewymierną. W takim razie, ze względu na (D), każda liczba wymierna należy do jednego ze zbiorów (W_1) i (W_2). Zatem, na podstawie uwag (A) i (B), zbiory (W_1) i (W_2) są odpowiednio zbiorami liczb wymiennych pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do pewnego przekroju (Q) zbioru liczb wymiennych. Ale z definicji zbiorów (W_1) i (W_2) wynika, że liczba r położona jest na przekroju (Q), a z zestawienia uwag (C) i (D) wynika, że jeżeli liczba r położona jest na pewnym przekroju (P) zbioru liczb wymiennych, to ten przekrój zlewa się z przekrojem (Q). Przekrój (Q) zbioru liczb rzeczywistych wymiennych jest drugiego gatunku, albowiem, jeżeli oznaczymy przez w liczbę, należąca do jednego ze zbiorów (W_1) lub (W_2), to, ze względu na lemat (D), nie będzie ona równą liczbie r , a więc (Tw. II) znajdzie się liczba wymierna pośrednia pomiędzy r i w , skąd znów wynika, że nie ma ani największej liczby w zbiorze (W_1) ani najmniejszej w zbiorze (W_2). Zatem, o ile chodzi o liczby niewymierne, twierdzenie nasze jest uzasadnione.

Założmy teraz, że liczba r jest liczbą wymierną i oznaczmy przez (W'_1) zbiór, uzyskany przez połączenie zbioru (W_1) ze zbiorem liczb równych liczbie r , a przez (W'_2) zbiór, uzyskany przez połączenie tych liczb ze zbiorem (W_2). Z uwag podanych pod (A) i (B) wynika, że zbiory (W'_1) i (W_2) są zbiorami liczb wymiennych, odpowiednio pierwszej i drugiej kategorii, w stosunku do pewnego przekroju (Q_1) zbioru liczb wymiennych, a zbiory (W_1) i (W'_2) — zbiorami liczb wymiennych odpowiednio pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do pewnego drugiego przekroju (Q_2) zbioru liczb wymiennych. Z łatwością dostrzegamy, że każdy z przekrojów (Q_1) i (Q_2) jest pierwszego gatunku, a liczba r jest położona na każdym z nich; z uwagi zaś (C) wnosimy, że, jeżeli liczba r położona jest na pewnym przekroju (P) zbioru liczb wymiennych, to ten przekrój zlewa się z jednym z przekrojów (Q_1) lub (Q_2). Zatem nasze twierdzenie

jest uzasadnione i w przypadku wymierności liczby r , a o to tylko jeszcze chodziło.

Tw. V. Przekroje zbioru wszystkich liczb rzeczywistych posiadają własności następujące:

1° Na każdym przekroju (R) zbioru liczb rzeczywistych położona jest liczba rzeczywista, której wartość oznaczona jest w zupełności.

2° Każdy przekrój (R) zbioru liczb rzeczywistych jest przekrojem pierwszego gatunku, a co do liczby r na nim położonej zachodzi jeden z dwóch, wykluczających się wzajemnie wypadków następujących: liczba r jest albo największą liczbą zbioru liczb rzeczywistych (R_1), pierwszej kategorii w stosunku do przekroju (R), albo — najmniejszą liczbę zbioru liczb rzeczywistych (R_2), drugiej kategorii w stosunku do przekroju (R).

3° Każdej liczbie rzeczywistej odpowiadają dokładnie dwa takie przekroje zbioru liczb wymiernych, że ona jest położona na każdym z nich.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, oznaczmy przez (A_1) i (A_2) zbiory liczb wymiernych, należących odpowiednio do zbiorów (R_1) i (R_2). Zbiory (A_1) i (A_2) stanowią odpowiednio zbiory liczb wymiernych pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do pewnego przekroju (P) zbioru liczb wymiernych. Na przekroju (P) położona jest (T. III) liczba rzeczywista r , której wartość jest oznaczona w zupełności. Liczba r jest położona na przekroju (R). Istotnie, jeżeli pewna liczba rzeczywista r_1 spełnia nierówność

$$(1) \quad r_1 < r,$$

to zawsze istnieje (Tw. II) liczba wymierna a_1 , spełniająca nierówności

$$(2) \quad r_1 < a_1$$

i

$$(3) \quad a_1 < r;$$

ze względu na (3), liczba a_1 należy do zbioru (A_1), a zatem liczba ta należy i do zbioru (R_1), skąd, ze względu na (2), wynika, że r_1 należy także do zbioru (R_1); całkiem analogicznie stwierdzamy, że każda liczba rzeczywista r_2 , spełniająca nierówność

$$r_2 > r,$$

należy do zbioru (R_2), a z tych uwag łatwo już wnosimy, że liczba r jest rzeczywiście położona na przekroju (R). Ponieważ zaś dostrzegamy z łatwością, że

liczba, położona na przekroju (R), zawsze musi równać się liczbie r , przeto stwierdzamy, że 1-sza część twierdzenia jest uzasadniona.

Żeby uzasadnić 2-gą część twierdzenia, należy tylko zważyć, że, jeżeli oznaczmy przez r liczbę, położoną na przekroju (R) (a liczba taka istnieje na podstawie dowiedzionej już pierwszej części twierdzenia), to liczba r należeć będzie do któregoś ze zbiorów (R_1) lub (R_2), skąd z łatwością wyprowadzamy słuszność 2-giej części twierdzenia.

Część trzecia twierdzenia może być uzasadniona w sposób następujący. Jeżeli oznaczmy przez (R'_1) zbiór liczb rzeczywistych, mniejszych od dowolnie oznaczonej liczby rzeczywistej r , a przez (R'_2) zbiór liczb rzeczywistych większych od tejże liczby, to (Tw. I) żaden ze zbiorów (R'_1) i (R'_2) nie będzie pusty, a każda liczba zbioru (R'_1) będzie mniejsza od każdej liczby zbioru (R'_2). Stąd wnosimy, że po rozszerzeniu jednego ze zbiorów (R'_1) lub (R'_2) przez dołączenie do niego liczb, równych liczbie r , zbiory te przedstawiać będą odpowiednio zbiory liczb rzeczywistych pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do pewnego przekroju (R) zbioru liczb rzeczywistych. Liczba r oczywiście położona będzie na przekroju (R), a nadto dostrzegamy bez trudności, że, jeżeli liczba r położona jest na pewnym przekroju zbioru liczb rzeczywistych, to ten przekrój musi zlewać się z jednym z dwóch przekrojów, które uzyskane być mogą, rozszerzając w powyższy sposób jeden ze zbiorów (R'_1) lub (R'_2). Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

§ 111. Istnienie liczb ujemnych nastrocza myśl o takim rozszerzeniu pojęcia potęgi, opracowanego w § 73 cim, żeby pojęcie to ustalić i dla przypadku, w którym wykładnik jest jakąkolwiek liczbą całkowitą ujemną, a zasada — elementem takiej klasy wielkości (K), dla której ważne są wszystkie twierdzenia, wyszczególnione w § 67-ym. Oczywiście jest rzeczą, że, bez naruszenia praw logiki, można różnymi sposobami dokonać rozszerzenia jakiegokolwiek danego pojęcia, ale nie każde rozszerzenie danego pojęcia odpowiadać będzie potrzebom nauki. Żeby przy rozszerzaniu już istniejących pojęć o ile możliwości załość uczynić potrzebom nauki, kierujemy się zwykle zasadą następującą.

(A) Jeżeli pewne pojęcie (P) jest ustalone dla przypadku, w którym spełnione są pewne warunki (W), a chodzi nam o to, żeby to pojęcie ustalić jeszcze dla przypadku, w którym, zamiast warunków (W), zachodzą pewne inne warunki (W'), to to w takim razie usiłujemy tak określić pojęcie (P) przy warunkach (W'), żeby pewne zdanie (mogące być samo układem kilku zdań), wyrażające charakterystyczną własność pojęcia (P), kiedy zachodzą warunki (W), pozostawało jeszcze takim i przy rozszerzonym pojmowaniu rozważanego pojęcia.

Żeby powyższą zasadę zastosować do rozszerzenia pojęcia potęgi, przyjmujemy za podstawę naszych dociekań twierdzenie następujące.

(B) Jeżeli, oznaczwszy przez a element klasy (K), a przez x i y dwie liczby całkowite, założymy, że element a oraz liczby x i y spełniają warunki, które spełnione być muszą, żeby symbole

$$(1) \quad a^x \text{ i } a^y$$

nie były pozbawione znaczenia, to w takim razie zachodzi równość

$$(2) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

a przy tem mamy w każdym razie

$$(3) \quad a^1 = a.$$

(C) Zdanie (B) wyrażać będzie charakterystyczną własność tego pojęcia, które wprowadziliśmy w § 73-cim pod nazwą *potęgi o wykładniku n , za zasadę przyjętego elementu a klasy (K)*, jeżeli jeszcze nadmienimy, że rzeczona nazwa oznacza element klasy (K) określony tylko pod względem wartości, ale pod tym względem określony w zupełności, skoro dane są wartości elementu a i liczby n dodając, że za symbol rzeczzonego elementu przyjmujemy

$$a^n.$$

O słuszności powyższych twierdzeń przekonywamy się z następujących rozważań: Jeżeli do równości (2) podstawimy w miejsce x i y liczby całkowite

$$n \text{ i } 1,$$

to uzyskamy równość

$$a^{n+1} = a^n \cdot a^1,$$

skąd ze względu na (3)

$$(4) \quad a^{n+1} = a^n \cdot a;$$

jeżeli zaś zastąpimy w równości (2) x i y przez liczby

$$0 \text{ i } 1,$$

to, uwzględniwszy (3), otrzymamy

$$a^0 \cdot a = a^1;$$

jeżeli więc

$$a \neq \mu,$$

gdzie μ oznacza moduł dodawania, to (§ 72, Tw. I) mieć będziemy

$$(5) \quad a^0 = a^1 : a.$$

Zestawiając równości (2), (3), (4) i (5) z Tw. III i Def. I § 73-go, przekonywamy się natychmiast o słuszności twierdzeń, które pragnęliśmy uzasadnić.

Ze względu na twierdzenie (C) i na zasadę, podaną pod (A), powstaje myśl, żeby definicyę potęgi elementu a klasy (K), przyjętego za zasadę, tak określić przy wartości ujemnej wykładnika z , iżby, po zachowaniu symbolu

$$a^z$$

na potęgę elementu a o wykładniku z , zdanie, podane pod (B), było słuszne. Przystępując do tej kwestyi, założymy, że

$$(6) \quad a \neq \mu,$$

gdzie μ oznacza moduł dodawania. Wprawdzie i w przypadku, w którym mielibyśmy

$$(7) \quad a = \mu,$$

możnaby symbol

$$a^z$$

tak określić, żeby zdanie (B) było słuszne, ale jak się czytelnik sam łatwo przekona, należałoby w takim razie przyjąć

$$(8) \quad \mu^z = \mu$$

przy każdej wartości całkowitej na z , skąd wynikałaby niedogodna konieczność zaznaczania w teorii potęg różnych wyjątkowych okoliczności, które zachodziłyby w przypadku, kiedy zasada a spełniałaby równość (7); tak np. ze względu na (8) mielibyśmy wyjątkowo

$$\mu^0 = \mu$$

wówczas, gdy (§ 73, Tw. I) nierówność (6) pociąga za sobą równość

$$a^0 = \nu,$$

gdzie ν oznacza moduł mnożenia.

(D) Jeżeli przy powyższem znaczeniu symbolów a i z znaczenie symbolu

$$a^z$$

tak może być określone dla wartości całkowitych i ujemnych liczby z , żeby, przy zachowaniu Def. I § 73-go, zdanie, podane pod (B), było słuszne, przy wszystkich wartościach całkowitych na x i y , skoro tylko spełniona jest nierówność (6), to w takim razie musi zachodzić wzór

$$(9) \quad a^{-n} = \frac{\nu}{a^n},$$

gdzie ν oznacza moduł mnożenia elementów klasy (K), a symbol n liczbą całkowitą i dodatnią.

Istotnie, przyjmijmy, że założenia tego twierdzenia są spełnione i podstawmy w równości (2), w miejsce x i y , liczby

$$-n \text{ i } +n.$$

Ponieważ przy tych wartościach na x i y mamy

$$x + y = 0,$$

przeto z równości (2) mamy

$$a^{-n} \cdot a^n = a^0,$$

skąd (§ 73, Tw. I)

$$(10) \quad a^{-n} \cdot a^n = \nu.$$

Ponieważ zaś (§ 73, Tw. II) mamy

$$a^n \neq \mu,$$

przeto (§ 72, Tw. I, Uw. III) z równości (10) mamy rzeczywiście na a^n wzór (9), a o to tylko chodziło.

Powyższe twierdzenie nastęrcza myśl o przyjęciu definicyi, którą rzeczywiście przyjmiemy i która brzmi jak następuje.

Def. I. Jeżeli pewien element a klasy (K) spełnia nierówność

$$a \neq \mu,$$

gdzie μ jest moduł dodawania, a symbol n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią, to symbol

$$a^{-n}$$

uważać będziemy za element klasy (K), określony przez równość

$$(I) \quad a^{-n} = \frac{\nu}{a^n},$$

gdzie ν oznacza moduł mnożenia, i mówić będziemy, że symbol (I) przedstawia *potęgę o wykładniku ujemnym*

$$-n$$

elementu a , przyjętego za *zasadę*.

Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez z jakąkolwiek liczbę całkowitą, a przez a element klasy (K), nierówny modułowi dodawania μ , to symbol

$$a^z$$

przedstawia element klasy (K), oznaczony tylko co do wartości, ale oznaczony pod tym względem w zupełności, i spełniający nierówność

$$a^* \neq \mu.$$

Istotnie, jeżeli liczba całkowita z nie jest ujemna, to twierdzenie zachodzi na podstawie teorii, wyłożonej w § 73 cim. Jeżeli zaś mamy

$$z < 0,$$

to słuszność naszego twierdzenia wynika ze wzoru (I) po uwzględnieniu Tw. II § 73-go, Tw. I § 72-go i Tw. I § 74-go.

Tw. II. Jeżeli oznaczymy przez x i y dwie dowolnie przyjęte liczby całkowite (z których zatem każda mieć może jakąkolwiek wartość dodatnią, ujemną lub zerową), jeżeli nadto oznaczymy przez a jakikolwiek element klasy (K), byle spełniający nierówność

$$(1) \quad a \neq \mu,$$

gdzie μ oznacza jak wyżej moduł dodawania, to w takim razie mamy

$$(2) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Jeżeli żadna z liczb x i y nie jest ujemna, to (§ 73, Tw. III) równość (2) zachodzi. Mamy więc do zbadania tylko przypadki, w których jeden, albo każdy z wykładników x i y jest ujemny. Ponieważ ze względu na własność przemienności dodawania i własność przemienności mnożenia, przypadek, kiedy mamy

$$x < 0, \quad y \geq 0$$

przez prostą zamianę znaczeń liter x i y sprowadzony być może do przypadku, kiedy mamy

$$(3) \quad x \geq 0, \quad y < 0,$$

przeto mamy do rozważenia tylko przypadek, kiedy zachodzą związki (3), i przypadek, kiedy mamy

$$(4) \quad x < 0, \quad y < 0.$$

Jeżeli oznaczymy przez n i m dwie liczby całkowite bezwzględne, to w razie istnienia związków (3) będziemy mogli przyjąć

$$(5) \quad x = n, \quad y = -m$$

i mieć będziemy

$$(6) \quad n \geq 0, \quad m > 0,$$

w przypadku zaś istnienia związków (4) będziemy mogli przyjąć

$$(7) \quad x = -n, \quad y = -m$$

i mieć będziemy

$$(8) \quad n > 0, \quad m > 0.$$

Założmy najpierw, że zachodzą wzory (5) i nierówności (6). Mamy tedy

$$\alpha^x = a^n,$$

oraz na podstawie wzoru (I)

$$a^y = a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

skąd

$$(9) \quad \alpha^x \cdot a^y = \frac{a^n}{a^m}.$$

Jeżeli mamy

$$n \geq m,$$

to

$$n - m \geq 0.$$

Zatem i na podstawie Tw. III § 73-go mieć będziemy

$$(10) \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$$

ponieważ zaś mamy

$$(11) \quad x + y = n - m,$$

przeto mieć będziemy

$$(12) \quad \alpha^{x+y} = a^{n-m},$$

a z równości (9), (10) i (12) wynika właśnie równość (2). Gdyby zaś zachodziła nierówność

$$n < m,$$

to mielibyśmy

$$(13) \quad m - n > 0$$

i w takim razie zachodziłaby równość

$$(14) \quad \frac{a^n}{a^m} = \frac{1}{a^{m-n}},$$

albowiem z równości

$$a^m \cdot \frac{1}{a^{m-n}} = a^n,$$

wynikającej z definicji modułu mnożenia (§ 72, Def. I), i równości (§ 73, Tw. III)

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^m$$

wynika równość

$$a^n \cdot a^{m-n} = a^m \cdot 1$$

która (§ 74, Tw. II) pociąga za sobą równość (14). Z drugiej strony ze wzoru (11) mamy

$$x + y = -(m - n),$$

skąd, ze względu na (13) i na Def. I, mamy

$$(15) \quad a^{x+y} = \frac{1}{a^{m-n}}.$$

Z równości (9), (14) i (15) wynika znów równość (2).

Pozostaje więc do zbadania przypadek, kiedy zachodzą związki (7) i (8). Mamy tedy

$$a^x = a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

$$a^y = a^{-m} = \frac{1}{a^m},$$

skąd

$$(16) \quad a^x \cdot a^y = \frac{1}{a^n \cdot a^m}.$$

Z drugiej strony mamy

$$x + y = -(m + n),$$

zatem

$$(17) \quad a^{x+y} = a^{-(n+m)} = \frac{1}{a^{n+m}}.$$

Ponieważ zaś (§ 73, Tw. III)

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m},$$

przeło z równości (16) i (17) wynika znowu równość (2). Ostatecznie więc, twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Wniosek I. Zdanie (B) wyrażać będzie charakterystyczną właściwość pojęcia potęgi elementu klasy (K) o wykładniku całkowitym (ujemnym, dodatnim lub zerowym), jeżeli przyjmujemy za symbol potęgi elementu a klasy (K) o wykładniku n symbol

$$a^n$$

nadmienimy, że symbol ten przedstawia element klasy (K) oznaczony tylko co do wartości, ale oznaczony pod tym względem w zupełności, skoro oznaczona jest liczba całkowita z i modułowi dodawania nierówna wartość elementu a .

Żeby przekonać się o słuszności tego wniosku, należy tylko zestawić ostatnio dowiedzione twierdzenia z twierdzeniami, podanymi wyżej pod (C) i (D).

Tw. III. Jeżeli oznaczmy przez a i b dwa jakiekolwiek, byle modułowi dodawania nierówne, elementy klasy (K), a przez x i y dwie jakiegośkolwiek liczby rzeczywiste całkowite, to w takim razie prócz związku

$$(1) \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y},$$

który zachodzi na podstawie Tw. II, mamy jeszcze związki następujące:

$$(2) \quad a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$(3) \quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$(4) \quad a^x : b^x = (a : b)^x$$

$$(5) \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Istotnie, z dowiedzonego już twierdzenia, jakie wyraża (1), wynika, że mamy

$$a^{x-y} \cdot a^y = a^{(x-y)+y} = a^x,$$

przeto z definicji dzielenia i stąd, że (Tw. I) mamy

$$a^y \neq 0,$$

wynika, że równość (2) rzeczywiście zachodzi. Jeżeli mamy

$$x \geq 0,$$

to równość (3) zachodzi na podstawie teorii § 73-go. Załóżmy więc, że mamy

$$(6) \quad x = -n \text{ oraz } n > 0,$$

gdzie n oznacza liczbę całkowitą. Mamy tedy

$$a^x = \frac{v}{a^n}, \quad b^x = \frac{v}{b^n},$$

gdzie v oznacza, jak wyżej, moduł mnożenia, a stąd

$$a^x \cdot b^x = \frac{v}{a^n \cdot b^n},$$

a ponieważ (§ 73 Tw. III)

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n,$$

przeto

$$(7) \quad a^x \cdot b^x = \frac{v}{(a \cdot b)^n}.$$

Z drugiej strony, ze względu na (6), mamy

$$(a \cdot b)^x = \frac{v}{(a \cdot b)^n},$$

a z tej równości i równości (7) wynika właśnie równość (3).

Zważmy teraz, że na podstawie twierdzenia, jakie wyraża równość (3) mamy

$$(a : b)^x \cdot b^x = \{ (a : b) \cdot b \}^x = a^x,$$

ponieważ zaś

$$b^x \neq 0,$$

przeto z powyższej równości wynika równość (4). Równość (5) potrzebuje uzasadnienia (§ 73, Tw. III) tylko w razie, kiedy jedna przynajmniej z liczb x i y jest ujemna. Zatem oznaczwszy przez m i n liczby całkowite, mamy do rozważenia przypadki następujące:

- (A) $x = m, y = -n, m \geq 0, n > 0,$
 (B) $x = -m, y = -n, m > 0, n > 0,$
 (C) $x = -m, y = n, m > 0, n \geq 0.$

Przypadek (A). Mamy

$$(a^x)^y = (a^m)^{-n} = \frac{v}{(a^m)^n},$$

a ponieważ

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n},$$

przeto

$$(a^x)^y = \frac{v}{a^{m \cdot n}}.$$

Zważywszy, że

$$a^{x \cdot y} = a^{-m \cdot n} = \frac{v}{a^{m \cdot n}},$$

wnosimy, że w przypadku (A) równość (5) zachodzi.

Przypadek (B). Mamy

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= (a^{-m})^{-n} = \frac{v}{(a^{-m})^n} \\ &= v : \left(\frac{v}{a^m} \right)^n = v : \left\{ \frac{v^n}{(a^m)^n} \right\} \\ &= \frac{(a^m)^n}{v^n} = \frac{(a^m)^n}{v} = (a^m)^n = a^{m \cdot n}. \end{aligned}$$

1) Uwzględniwszy definicję modułu mnożenia, czytelnik z łatwością stwierdzi, że mamy w każdym razie

$$v^n = v.$$

Z drugiej strony

$$a^{x \cdot y} = a^{(-m)(-n)} = a^{m \cdot n}.$$

Z tej równości i równości uzyskanych przed chwilą wnosimy, że w przypadku (B) równość (5) zachodzi.

Przypadek (C). Mamy

$$(a^x)^y = (a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1^n}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{m \cdot n}},$$

a ponieważ

$$a^{x \cdot y} = a^{-m \cdot n} = \frac{1}{a^{m \cdot n}},$$

przeto równość (5) zachodzi i w przypadku (C). Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Uwaga I. Ponieważ w odniesieniu do liczb rzeczywistych cała teoria, wyłożona w rozdziale III-cim, jest (§ 108, Tw. I) ważna, przeto teoria potęg, wyłożona w niniejszym paragrafie jest w szczególności ważna w przypadku, kiedy przez (K) oznaczamy tę klasę wielkości jaką stanowią razem liczby rzeczywiste; przy zastosowywaniu powyższej teorii do liczb rzeczywistych należy pamiętać, że modułem dodawania liczb rzeczywistych jest (§ 102, Tw. III) liczba

$$0,$$

a modułem mnożenia — (§ 109, Tw. II) liczba

$$1.$$

Z powyższej uwagi wynikają wnioski następujące:

1^o Definicja I przybiera w odniesieniu do liczb rzeczywistych postać następującą: jeżeli pewna liczba rzeczywista a spełnia nierówność

$$a \neq 0,$$

a symbol n oznacza liczbę całkowitą i dodatnią, to

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

2^o Oznaczywszy, jak przed chwilą, przez a liczbę rzeczywistą spełniającą nierówność

$$a \neq 0,$$

mamy (§ 73, Tw. I i § 109 Tw. II)

$$a^0 = 1,$$

oraz (Tw. I)

$$a^x \neq 0,$$

jakąkolwiek liczbę całkowitą rzeczywistą oznaczylibyśmy przez x .

§ 112. W tym paragrafie podajemy pewne twierdzenia o potęgach liczb rzeczywistych, które są bardzo ważne ze względu na różne zastosowania.

Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez a i b dwie dowolnie dane liczby rzeczywiste, a przez n jakąkolwiek, od jedności większą liczbę całkowitą, to mieć będziemy

$$(1) \quad a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1}.$$

Podajemy indukcyjny dowód tego twierdzenia.

1° Stwierdzamy bezpośrednio, że równość (1) zachodzi w przypadku szczególnym, kiedy mamy

$$(2) \quad n = 2.$$

2° Załóżmy chwilowo, że mamy

$$(3) \quad a^p - b^p = (a - b) \sum_{i=1}^p a^{p-i} b^{i-1},$$

gdzie p oznacza pewną liczbę całkowitą, spełniającą związek:

$$p \geq 2.$$

Z równości (3) mamy

$$(4) \quad a^{p+1} - a \cdot b^p = (a - b) \sum_{i=1}^p a^{p-i+1} b^{i-1}.$$

Z drugiej zaś strony

$$(5) \quad a \cdot b^p - b^{p+1} = (a - b) \cdot b^p.$$

Dodając stronami¹⁾ równości (4) i (5), mamy

$$a^{p+1} - b^{p+1} = (a - b) \left\{ \sum_{i=1}^p a^{p-i+1} b^{i-1} + b^p \right\},$$

skąd

$$a^{p+1} - b^{p+1} = (a - b) \sum_{i=1}^{p+1} a^{p-i+1} b^{i-1}.$$

¹⁾ Jeżeli liczby rzeczywiste A , B , A' i B' spełniają równości

$$(\alpha) \quad A = A' \text{ i } B = B',$$

to na podstawie znanego twierdzenia mamy

$$(\beta) \quad A + B = A' + B';$$

otóż utworzenie równości (β) zowie się *dodaniem stronami* równości (α) .

Zatem, gdyby po podstawieniu w równości (1) liczby p w miejsce liczby n równość (1) przemieniła się w równość poprawną, to równość (1) przemieniłaby się w równość poprawną i w skutek podstawienia liczby

$$p + 1$$

w miejsce liczby n .

Z uzyskanych wyników wnosimy, że twierdzenie zachodzi w podanem brzmieniu.

Tw. II. Jeżeli dwie liczby rzeczywiste a i b spełniają związki

$$(1) \quad a \geq 0 \text{ i } b \geq 0,$$

a symbol n oznacza liczbę całkowitą, większą od jedności, to nierówności

$$(2) \quad a > b$$

$$(3) \quad a^n > b^n$$

są pomiędzy sobą równoważne.

Istotnie, ze względu na Tw. I mamy

$$(4) \quad a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1},$$

a ponieważ ze związków (1) i (2) mamy

$$a - b > 0, \quad \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1} > 0,$$

przeto z równości (4) wynika, że związki (1) i (2) pociągają za sobą

$$(5) \quad a^n - b^n > 0,$$

skąd znów wynika nierówność (3).

Założmy teraz, że zachodzą związki (1) i (3). Ze związku (3) wynika (5), który ze względu na (4), pociąga za sobą

$$(6) \quad (a - b) \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1} > 0.$$

Z drugiej strony związki (1) pociągają za sobą związek

$$\sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1} \geq 0.$$

Ale nierówność (6) wyklucza równość

$$\sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1} = 0;$$

mamy więc

$$\sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1} > 0,$$

a ta nierówność i nierówność (6) pociągają za sobą nierówność

$$a - b > 0,$$

z której wynika nierówność (2). Ostatecznie, przy istnieniu związków (1), którekolwiek z nierówności (2) lub (3) pociąga za sobą drugą, a o to właśnie chodziło.

Tw. III. Jeżeli pewna liczba rzeczywista c spełnia nierówność

$$(1) \quad c > 0,$$

a symbol n oznacza liczbę całkowitą, większą od jedności, to w takim razie mamy

$$(2) \quad (1 + c)^n > 1 + n \cdot c.$$

Istotnie, jakiekolwiek liczby rzeczywiste oznaczyliśmy przez a i b , mamy (Tw. I):

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1}.$$

Przyjmijmy w tej równości

$$a = 1 + c, \quad b = 1;$$

w takim razie mieć będziemy:

$$(3) \quad (1 + c)^n - 1 = c \sum_{i=1}^n (1 + c)^{n-i}$$

a ponieważ ze względu na (1) mamy

$$1 + c > 1$$

a zatem (Tw. II)

$$(1 + c)^{n-1} > 1,$$

przeto

$$\sum_{i=1}^n (1 + c)^{n-i} > n.$$

Zatem z równości (3) wynika nierówność

$$(1 + c)^n - 1 > n \cdot c,$$

z której znów wynika nierówność (2), o którą właśnie chodziło.

Tw. IV. Jeżeli oznaczmy przez r liczbę rzeczywistą, spełniającą nierówność

$$(1) \quad r > 0,$$

przez a i b dwie liczby rzeczywiste, spełniające związki

$$(2) \quad |a| \leq r \text{ i } |b| \leq r,$$

a przez n liczbę całkowitą większą od jednośc, to mieć będziemy

$$(3) \quad |a^n - b^n| \leq n \cdot r^{n-1} |a - b|.$$

Istotnie, na podstawie Tw. I mamy

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1},$$

skąd

$$(4) \quad |a^n - b^n| = |a - b| \cdot \left| \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1} \right|.$$

Ale, ze względu na (2) (Tw. II) mamy

$$(5) \quad |a|^{n-i} \leq r^{n-i}$$

przy

$$1 \leq i < n$$

oraz

$$(6) \quad |b|^{i-1} \leq r^{i-1}$$

przy

$$1 < i \leq n;$$

nadto stwierdzamy bezpośrednio, że związek (5) zachodzi i przy

$$i = n,$$

a związek (6) i przy

$$i = 1.$$

Na podstawie tych uwag mamy

$$|a|^{n-i} \cdot |b|^i \leq r^{n-i} \quad (1 \leq i \leq n),$$

a ponieważ

$$|a^{n-i} \cdot b^i| = |a|^{n-i} \cdot |b|^i,$$

przeto

$$|a^{n-i} \cdot b^i| < r^{n-i} \quad (1 \leq i \leq n).$$

Na podstawie tej nierówności mamy

$$\left| \sum_{i=1}^n a^{n-i} \cdot b^{i-1} \right| \leq n \cdot r^{n-1},$$

a z tej nierówności i równości (4) wynika nierówność (3), o której udowodnienie właśnie chodziło.

Tw. V. Jeżeli pewna liczba rzeczywista a spełnia nierówność

$$(1) \quad a > 1,$$

a dwie liczby całkowite p i q , których znaki mogą być jakiegokolwiek, spełniają nierówność

$$(2) \quad p < q,$$

to w takim razie mamy

$$(3) \quad a^p < a^q$$

Istotnie, mamy

$$(4) \quad a^q = a^p \cdot a^{q-p}.$$

Z drugiej strony mamy

$$(5) \quad a^{q-p} > 1,$$

jeżeli bowiem

$$(6) \quad q - p = 1,$$

$$\text{to} \quad a^{q-p} = a$$

i związek (5) bezpośrednio wynika z nierówności (1); jeżeli zaś

$$(7) \quad q - p > 1$$

to (Tw. II) mamy

$$a^{q-p} > 1^{q-p} = 1$$

ze względu na (1). Ponieważ zaś ze względu na (2) mamy w każdym razie albo (6) albo (7), przeto w każdym razie zachodzi (5). Z tej zaś nierówności mamy

$$a^p \cdot a^{q-p} > a^p \cdot 1 = a^p,$$

a zatem, ze względu na (4), związek (3) zachodzi niezawodnie, jeżeli zachodzą związki (1) i (2), a o to właśnie chodziło.

Tw. VI. Jeżeli pewna liczba rzeczywista a spełnia związku

$$(1) \quad 0 < a < 1,$$

a dwie liczby całkowite p i q , których znaki mogą być jakiegokolwiek, spełniają nierówność

$$(2) \quad p < q,$$

to w takim razie mamy

$$(3) \quad a^p > a^q.$$

Istotnie, przyjmijmy

$$(4) \quad a' = \frac{1}{a}.$$

Na podstawie związków (1) mamy

$$a' > 1;$$

zatem (Tw. V), ze względu na (2), mamy

$$a'^p < a'^q,$$

a ponieważ z równości (4) mamy

$$a'^p = \left(\frac{1}{a} \right)^p = \frac{1^p}{a^p} = \frac{1}{a^p},$$

$$a'^q = \left(\frac{1}{a} \right)^q = \frac{1^q}{a^q} = \frac{1}{a^q},$$

przeto mamy

$$\frac{1}{a^p} < \frac{1}{a^q},$$

a stąd wynika nierówność (3), którą mieliśmy właśnie uzasadnić.

§ 113. Pojęcie potęgi doprowadza nas z natury rzeczy do rozważania zagadnienia następującego:

(Z) Oznaczywszy przez p daną liczbę całkowitą, a przez a już całkiem dowolnie daną liczbę rzeczywistą, wyznaczyć taką liczbę rzeczywistą x , żebyśmy mieli

$$(1) \quad x^p = a.$$

Zwróćmy się najpierw do przypadku szczególnego, kiedy mamy

$$(2) \quad a = 0.$$

Jeżeli tedy zachodzi nierówność

$$p > 0,$$

to istnieje dokładnie jedna wartość na x , spełniająca równość (1), a mianowicie

$$x = 0;$$

jeżeli zaś

$$p \leq 0,$$

to zagadnienie (Z) nie posiada rozwiązania, albowiem nierówność

$$(3) \quad x \neq 0$$

pociąga za sobą (§ 111, Tw. I) nierówność

$$x^p \neq 0,$$

a przy wartości

$$x = 0$$

na x symbol x^p jest pozbawiony znaczenia.

Omówiwszy w taki sposób w zupełności przypadek szczególny, kiedy zachodzi równość (2), pozostaje tylko do zbadania przypadek ogólny, w którym mamy

$$(4) \quad a \neq 0.$$

Założmy najpierw, że mamy

$$p = 0.$$

Ponieważ mamy

$$x^0 = 1$$

jakąkolwiek, byle warunek (3) spełniającą wartość, miałaby liczba x , przeto w tym razie zagadnienie (Z) posiada rozwiązanie tylko pod warunkiem, że-
byśmy mieli

$$a = 1,$$

a w takim razie omawiane zagadnienie jest nieoznaczone, gdyż każda, byle zera nierówna, wartość na x stanowi jego rozwiązanie.

Zakładając w dalszym ciągu, że zachodzi nierówność (4), założmy, że mamy

$$(5) \quad p < 0.$$

Mamy tedy

$$p = -n,$$

gdzie n oznacza pewną liczbę całkowitą dodatnią. Ponieważ

$$x^p = x^{-n} = \frac{1}{x^n},$$

przeto równość (1) równoważna jest równości

$$\frac{1}{x^n} = a,$$

równoważnej równości

$$x^n = \frac{1}{a}.$$

Zatem przypadek, kiedy zachodzi (5), sprowadza się do przypadku, kiedy mamy

$$p > 0.$$

Ponieważ przypadek szczególny, kiedy mamy

$$p = 1,$$

oczywiście nie wymaga bliższego zbadania ze względu na to, iż mamy

$$x^1 = x,$$

przeto z powyższych rozważań wynika, że mamy tylko do zbadania zagadnienie (Z) w przypadku, kiedy liczba p jest liczbą całkowitą, od jedności większą, a liczba a liczbą zera nierówną. Żeby rozwiązanie zagadnienia podać w dogodnej formie, przyjmujemy definicję następującą:

Def. I. Jeżeli oznaczymy przez p liczbę całkowitą i dodatnią a przez a dowolnie daną liczbę rzeczywistą, to przez wyrażenie *pierwiastek stopnia p* (albo pierwiastek p -ty) oznaczać będziemy każdą liczbę x , spełniającą równość (1); liczbie a nadajemy przytem nazwę *zasady* pierwiastka.

Za symbol pierwiastka stopnia p liczby a przyjmujemy symbol

$$\sqrt[p]{a}.$$

Rozwiązanie zagadnienia (Z) w przypadku, kiedy mamy $p > 1$, podajemy w postaci twierdzenia następującego.

Tw. I. Jeżeli oznaczymy przez p jakąkolwiek, byle od jedności większą liczbę całkowitą, a przez a dowolnie daną, byle zera nierówną liczbę rzeczywistą, to w takim razie zachodzą okoliczności następujące:

1° Jeżeli liczba całkowita p jest liczbą całkowitą nieparzystą, to pierwiastek p -ty a istnieje, a wartość jego jest oznaczona w zupełności i jest od zera odmienna.

2° Jeżeli liczba całkowita i dodatnia p jest parzysta, to pierwiastek p -ty liczby a , zera nierównej, istnieje tylko w przypadku, kiedy liczba a spełnia nierówność

$$(1) \quad a > 0.$$

Jeżeli warunek ten jest spełniony, to liczbie a odpowiadają dokładnie dwie symetryczne pomiędzy sobą wartości na jej pierwiastek p -ty.

Żeby twierdzenie to uzasadnić, zważmy, że na podstawie założeń twierdzenia naszego

$$(2) \quad a \neq 0,$$

i uważajmy równość

$$(3) \quad x^p = a.$$

Jeżeli przyjmiemy

$$(4) \quad X = |x|, \text{ i } A = |a|,$$

to mieć będziemy

$$(5) \quad A > 0$$

ze względu na (2). Z drugiej strony, ponieważ mamy

$$|x^p| = X^p,$$

przeto, jeżeli istnieje liczba x , spełniająca równość (3), to ze względu na równości

(4) mamy

$$(6) \quad X^p = A.$$

(A) **Lemat.** Istnieje dokładnie jedna wartość na X , przy której zachodzi równość (6), i ta wartość spełnia nierówność

$$(7) \quad X > 0.$$

Dowód. Jeżeli wogóle istnieje liczba nieujemna X , spełniająca (6), to ze względu na (5) ta liczba spełnia z pewnością (7). Z drugiej strony dwie nierówne pomiędzy sobą i od zera nie mniejsze, wartości X' i X'' na X nie mogą spełnić (6), gdyż wbrew Tw. II § 112 mielibyśmy w takim razie jednocześnie $X' \neq X''$, $X' \geq 0$, $X'' \geq 0$ i $X'^p = X''^p$. Chodzi więc tylko o wykazanie, że istnieje liczba nieujemna X , spełniająca (6). W tym celu oznaczmy przez (X_1) zbiór wszystkich tych liczb wymiernych bezwzględnych, z których każda w_1 spełnia związek

$$(8) \quad w_1^p \leq A,$$

a przez (X_2) zbiór wszystkich innych liczb wymiernych bezwzględnych. Jeżeli tedy oznaczmy przez w_1 jakąkolwiek liczbę zbioru X_2 , to mieć będziemy

$$(9) \quad w_2^p > A.$$

Zbiór (X_1) nie jest pusty, gdyż liczba zero należy do tego zbioru. Zbiór (X_2) także nie jest pusty, gdyż istnieje liczba całkowita N spełniająca nierówność

$$N > A,$$

a ponieważ

$$N^p \geq N,$$

przeto

$$(10) \quad N^p > A;$$

Ale liczba N jest liczbą wymierną. Z drugiej strony, ponieważ ona spełnia (10), to nie spełnia związku

$$N^p \leq A$$

i z tego powodu należy do zbioru (X_2) . Każda liczba w_1 zbioru (X_1) jest mniejsza od każdej liczby w_2 zbioru (X_2) , albowiem ze związków (8) i (9) mamy

$$w_1^p < w_2^p,$$

skąd (§ 112, Tw. II)

$$w_1 < w_2.$$

Stąd łatwo możemy wniesć, że zbiory (X_1) i (X_2) stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω) . Jeżeli bowiem zbiór (X_1) obejmuje tylko liczby równe zero, to wszystkie inne liczby wymierne bezwzględne należą do zbioru (X_2) , a w takim razie, jak już wiemy, zbiory (X_1) i (X_2) stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część określnika liczby zero. Jeżeli zaś zbiór (X_1) obejmuje nie tylko liczby równe zero, to zbiory (X_1) i (X_2) stanowią odpowiednio zbiory liczb wymiernych bezwzględnych pierwszej i drugiej kategorii w stosunku do pewnego przekroju (P) zbioru liczb wymiernych bezwzględnych. Otóż, zawsze istnieje liczba bezwzględna, wymierna lub niewymierna, położona na przekroju (P) , a zbiory (X_1) i (X_2) , stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika tej liczby. Ostatecznie więc zbiory (X_1) i (X_2) stanowią rzeczywiście w każdym razie odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika (Ω) . Oznaczmy przez X liczbę, której określnikiem jest określnik (Ω) .

Żeby uzasadnić nasz lemat, należy oczywiście tylko wykazać, że liczba X , w powyższy sposób określona, spełnia równość (6). W tym celu oznaczmy przez (A_1) zbiór p -tych potęg wszystkich liczb, należących do zbioru (X_1) , a przez

(A_2) — zbiór p -tych potęg wszystkich liczb, należących do zbioru (A_2). Jeżeli tedy oznaczymy przez a_1 jakąkolwiek liczbę zbioru (A_1), a przez a_2 jakąkolwiek liczbę zbioru (A_2), to tym liczbom odpowiadać będą takie liczby w_1 i w_2 , należące odpowiednio do zbiorów (X_1) i (X_2), iż mieć będziemy:

$$(11) \quad a_1 = w_1^p, \quad a_2 = w_2^p$$

Z definicji zbiorów (X_1) i (X_2) wynika, że mamy

$$(12) \quad w_1^p \leq A, \quad w_2^p > A,$$

Z drugiej zaś strony, z definicji liczby X wynikają związki

$$w_1 \leq X, \quad w_2 > X,$$

zatem (§ 112, Tw. II) mamy

$$(13) \quad w_1^p \leq X^p, \quad w_2^p > X^p.$$

Ze związków (12) i (13) wynika, na podstawie równości (11), że związki

$$(14) \quad \begin{cases} a_1 \leq A, & a_2 > A \\ a_1 \leq X^p, & a_2 > X^p, \end{cases}$$

będą spełnione, jakiekolwiek liczby, należące odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2), oznaczylibyśmy przez a_1 i a_2 . Zatem, gdyby zbiory (A_1) i (A_2) stanowiły odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika, to określnik ten byłby określnikiem każdej z liczb A i X^p , a zatem zachodziłaby równość (6). Z tego wynika, że uzasadnienie naszego lematu sprowadza się do wykazania, że zbiory (A_1) i (A_2) stanowią odpowiednio pierwszą i drugą część pewnego określnika. Ponieważ zaś żaden z rzeczonych zbiorów nie jest pusty, ponieważ nadto, ze względu na (14), każda liczba a_1 zbioru (A_1) jest mniejsza od każdej liczby a_2 zbioru (A_2), przeto mamy tylko do udowodnienia, że do dowolnie danej, byle od zera większej liczby wymiernej ε , można dobrać takie dwie liczby a_1 i a_2 , należące odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2), żebyśmy mieli:

$$(15) \quad a_2 - a_1 < \varepsilon.$$

W tym celu wybierzmy sobie dowolnie pewną liczbę l , należącą do zbioru (X_2) i, oznaczwszy przez n liczbę całkowitą od jedności większą, którą później określimy bliżej, uważajmy ciąg skończony następujący:

$$(16) \quad \frac{0}{n} \cdot l, \frac{1}{n} \cdot l, \frac{2}{n} \cdot l, \dots, \frac{n-1}{n} \cdot l, \frac{n}{n} \cdot l.$$

Pierwszy wyraz tego ciągu równa się zero i należy dlatego do zbioru (X_1) , a ostatni, jako równający się liczbie l , należy do zbioru (X_2) . Z tego wynika, że w ciągu (16) znajdują się dwa wyrazy sąsiednie

$$(17) \quad \frac{k}{n} \cdot l \quad \text{ i } \quad \frac{k+1}{n} \cdot l,$$

z których pierwszy należeć będzie do zbioru (X_1) a drugi do zbioru (X_2) .

Ponieważ mamy

$$k+1 \leq n,$$

przeto

$$\frac{k+1}{n} l \leq l \quad \text{ oraz } \quad \frac{k}{n} l < l,$$

a ponieważ

$$\left| \frac{k}{n} \cdot l \right| = \frac{k}{n} \cdot l, \quad \left| \frac{k+1}{n} l \right| = \frac{k+1}{n} \cdot l$$

przeto (§ 112, Tw. IV) mamy:

$$\left(\frac{k+1}{n} \cdot l \right)^p - \left(\frac{k}{n} \cdot l \right)^p \leq p \cdot l^{p-1} \left(\frac{k+1}{n} l - \frac{k}{n} \cdot l \right)$$

czyli

$$\left(\frac{k+1}{n} \cdot l \right)^p - \left(\frac{k}{n} \cdot l \right)^p \leq p \cdot l^{p-1} \cdot \frac{l}{n},$$

a więc ostatecznie:

$$(18) \quad \left(\frac{k+1}{n} \cdot l \right)^p - \left(\frac{k}{n} \cdot l \right)^p \leq \frac{p \cdot l^p}{n}.$$

Wyznamy liczbę całkowitą n z warunku, żebyśmy mieli

$$\frac{p \cdot l^p}{n} < \varepsilon.$$

W takim razie ze związku (18) wyniknie nierówność

$$(19) \quad \left(\frac{k+1}{n} \cdot l \right)^p - \left(\frac{k}{n} \cdot l \right)^p < \varepsilon.$$

Ale, ponieważ liczby (17) należą odpowiednio do zbiorów (X_1) i (X_2) , przeto, jeżeli przyjmiemy

$$(20) \quad a_2 = \left(\frac{k+1}{n} \cdot l \right), \quad a_1 = \left(\frac{k}{n} \cdot l \right)^p,$$

to liczby a_1 i a_2 należeć będą odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2) . Ponieważ zaś liczby a_1 i a_2 , po ich wyznaczeniu ze wzorów (20), spełniać będą ze względu na (19), nierówność (15), przeto stwierdzamy, że do danej, byle od zera większej liczby wymiernej ε można zawsze tak dobrać liczby a_1 i a_2 , należące odpowiednio do zbiorów (A_1) i (A_2) , żeby te liczby spełniały związek (15), a to tylko pozostawało do wykazania, żeby uzasadnić w zupełności nasz lemat.

Obecnie uzasadnimy już z łatwością twierdzenie, o które nam właściwie chodzi. Ze względu na uwagi, poczynione na samym początku dowodu naszego twierdzenia, liczba x , spełniająca (3), musi mieć albo wartość

$$(21) \quad x = +X,$$

albo —

$$(22) \quad x = -X,$$

Jeżeli liczba całkowita p jest nieparzysta, to mamy

$$(+X)^p = +X^p$$

oraz

$$(-X)^p = -X^p,$$

skąd z łatwością wnosimy, że równość (3) spełniać będzie jakaś jedna z wartości (21) albo (22) na x , a mianowicie pierwsza albo druga z tych wartości, zależnie od tego, czy mieć będziemy

$$a > 0, \text{ czy też } a < 0.$$

Jeżeli zaś liczba p jest parzysta, to mamy

$$(+X)^p = (-X)^p = +X^p,$$

zatem liczba x , spełniająca (3), będzie istnieć tylko w razie, kiedy

$$a > 0,$$

a gdy warunek ten jest spełniony, to każda z wartości (21) i (22) na x będzie czynić zadość równości (3). Ostatecznie więc twierdzenie zachodzi w podanym brzmieniu.

Uwaga. Nieujemna liczba rzeczywista, mogąca być uważana za jedną z liczb przedstawionych przez symbol postaci

$$(1) \quad \sqrt[p]{a},$$

przy wartości całkowitej i dodatniej liczby p , zowie się często (o ile istnieje) *arytmetyczną* wartością powyższego symbolu; z twierdzenia dopiero co udowodnionego wynika, że wartość arytmetyczna symbolu (1) jest, jeżeli wogóle istnieje, oznaczona bez żadnej dwuznaczności.

Dodatek do § 112, str. 266.

Treść twierdzenia I na str. 266 i dowód tegoż nastroczają pewną trudność którą pragniemy wyjaśnić. Mianowicie, wyrażenie

$$(1) \quad \sum_{t=1}^n a^{n-t} b^{t-1},$$

jest sumą, której pierwszy składnik i ostatni mają odpowiednio postacie następujące:

$$(2) \quad a^{n-1} \cdot b^0 \quad \text{ i } \quad a^0 \cdot b^{n-1}.$$

Otóż nie nadaliśmy żadnego znaczenia potędze liczby zero o wykładniku zerowym¹⁾. Zatem ściśle rzecz biorąc, omawiane twierdzenie i jego dowód są nieważne w razie, kiedy nie każda z liczb a i b jest odmienna od zera. Żeby rzeczzone wypadki nieważności twierdzenia i jego dowodu usunąć, umawiamy się że uważać będziemy wyrażenia (2) jako przedstawiające w sumie (1) odpowiednio

$$a^{n-1} \quad \text{ i } \quad b^{n-1},$$

nawet w przypadku, kiedy jedna albo i każda z liczb a i b równałaby się zeru.

¹⁾ Porównaj początek § 73-go, str. 96 i 97 z uwagami, wypowiedzianymi na str. 258, uwzględniając zarazem tę okoliczność, iż moduł dodawania liczb rzeczywistych równa się zeru.

Błędy drukarskie.

Str.	Wiersz	od	Zamiast	Czytać
4	12	»	dołu	b
6	7	»	góry	a
12	19	»	góry	a'
12	12	»	dołu	$(l' \cdot m', l' \cdot p')$
15	11	»	dołu	(m, p)
22	1	»	dołu	$(l \cdot m + l' \cdot m, w)$
23	6	»	dołu	$w, w' \text{ i } w''$
26	17	»	góry	(m, p')
30	15	»	dołu	(1)
32	4	»	góry	(5)
32	16	»	góry	$w \times w'$
34	2	»	góry	(A)
35	13	»	dołu	(1)
35	11	»	dołu	(2)
39	12	»	góry	$w' \times w$
39	14	»	góry	(A)
39	16	»	góry	p'
39	17	»	góry	$w' = w'$
39	19	»	góry	$w_1 \cdot w'_1$
49	2	»	góry	$w'_1 = w'$
52	4	»	góry	$w'_1 \cdot w_1$
61	12	»	góry	$(m_1 \cdot p_2 + m_2 \cdot p_1)$
68	19	»	góry	$(m_1 \cdot p_2 + m_2 \cdot p_1)$
75	14	»	góry	$(m \cdot [m_1 \cdot p_2 + m_2 \cdot p_1], p \cdot p_1 \cdot p_2)$
77	1	»	góry	$(m \cdot m_1, p \cdot p_1) = (m \cdot m_1 \cdot p_2, p \cdot p_1 \cdot p_2)$
80	11	»	góry	$(m \cdot m_2, p \cdot p_2) = (m \cdot m_2 \cdot p_1, p \cdot p_2 \cdot p_1)$
89	8	»	dołu	$(m \cdot m_1 \cdot p_2 + m \cdot m_2 \cdot p_1)$
95	16	»	dołu	$p \cdot p_1 \cdot p_2$
98	1	»	góry	$m + p'$
105	12	»	dołu	$p + p'$
			działania	$\frac{m + m'}{p + p'}$
			odejmowanie	działanie
			$+ b \neq b$	$\cdot$ mnożenie
			(10)	$b + b \neq b$
			tw. III	(11)
			od n	tw. II
			$\sum_{i=1}^{k-1} b \cdot a_{k+i}$	od 3
			Tw. V	$\sum_{i=1}^{k+1} b \cdot a_i$
			Tw. V	Tw. IV
			$(b \cdot b)'$	Tw. IV
				$(b \cdot b')$

Str.	Wiersz	od	Zamiast	Czytać
112	18	» dołu	(5)	(6)
126	13	» dołu	w_2	w
140	1	» dołu	w_2 i w_2	w_1 i w_2
141	2	» góry	W_2	w_2
144	1	» dołu	$w_2 < a_1$	$w_2 < a_2$
145	4	» góry	$a_2 - a_2$	$a_2 - a_1$
156	16	» dołu	x_2	x_1
157	1	» dołu	wzoru (C_1)	zbioru (C_1)
159	7	» góry	(D_2)	(C_2)
168	19	» góry	φ	ϕ
168	13	» dołu	$\varphi \cdot (\varphi \cdot \theta)$	$\varphi \cdot (\phi \cdot \theta)$
170	10	» góry	$\varphi \cdot \varphi$	$\varphi \cdot \phi$
175	8	» dołu	Tw. I	Tw. VI
177	1	» dołu	ε	ε_1
184	8	» dołu	$a \cdot b_1 + a' \cdot b$	$a \cdot b' + a' \cdot b$
195	3	» góry	$a' > b$	$a' > b'$
197	14	» góry	$a' < b'$	$a' < c'$
199	3	» dołu	x	x'
201	14	» dołu	l, l'	l, l'
207	1	» dołu	u	μ
207	3	» dołu	u	μ
211	11	» góry	r_s	r'
221	4	» dołu	$(a, b') = (a', b)$	$(a, b) = (a', b')$
232	11	» góry	$(d + d' \theta)$	$(d + d', \theta)$
234	11	» góry	pierwszej	drugiej
239	11	» góry	$r' \cdot r = r' \cdot r$	$r \cdot r' = r' \cdot r$
240	13	» dołu	liczbom (2)	liczbom r, r' i r'' .
242	5	» dołu	(a', b)	(a, b)
244	3	» dołu w dopisku	§ 73	str. 95
246	1	» dołu	$(-r) : (-r')$	$(-r) : (-r')$
246	10	» góry	r	x
253	6	» dołu	drugiego	pierwszego.
254	7	» dołu	(W_2)	(W'_2)
259	3	» góry	liczbą	liczbę
262	2	» dołu	z	n
263	16	» góry	$a^y \neq 0$	$a^y \neq \mu$
264	8	» góry	$b^z \neq 0$	$b^z \neq \mu$
270	2	» góry	$< r^{n-1}$	$\leq r^{n-1}$
276	13	» góry	$a_1 > A$	$a_2 > A$

Sprostowanie do I-szej części tego dzieła.

Na str. 67-mej, wiersz 10-ty z dołu, umieścić, po wyrazach »element zbioru (K)« przecinek i dodać wyrazy następujące:

a każdy element tego zbioru odpowiada jakiejś permutacyi zbioru (Z).

Spis ważniejszych wyrazów.

	Str.
Arytmetycznie oznaczony, dany lub	
znany określnik	147
przekrój	127
Czynnik	31, 51, 53
Dodawanie	11, 46, 51, 53, 149
Działanie	
arytmetyczne	48
jednoznaczne	49
podstawowe	48, 51
wieloznaczne	49
Dzielenie	40, 54, 65, 90, 91
Dzielną	40
Dzielnik	40
Element	
drugiej kategorii	251
pierwszej kategorii	251
położony na przekroju	252
Iloczyn	31, 51
Iloraz	40, 54
Jednomian całkowity	107
Jednostka długości	2
Kwadrat 97 (dopisek),	
zupełny	123
Liczba	
bezwzględna	131
całkowita	250
dana lub znana	146
dodatnia	228, 249
mieszana	26
niewymierna	131, 250
położona na przekroju 123, 252, 253, 255	
symetryczna drugiej liczbie	209

	Str.
Liczba	
ujemna	228, 250
ułamkowa	3, 250
ułamkowa nieprzywiedlna	9
właściwie ułamkowa	26
wymierna	16, 250
względna	185
Licznik	
liczby ułamkowej	3
stosunku	102
Mianownik	
liczby ułamkowej	3
stosunku	102
wspólny	10
wspólny najmniejszy	11
Miara	3, 131
Mnożenie	31, 46, 51, 53, 54
Mnożna	31, 51, 149
Mnożnik	31, 51
Moduł	
dodawania	82, 207
mnożenia	95
Odcinki niewspółmierne	114, 139
Odejmowanie	26, 46
Odjemna	26, 53
Odjemnik	26, 53
Odpowiedniość wzajemna przekrojów	
zbioru liczb wymiernych i odcinków 128	
Określnik	145
Potęga	96, 257, 259
Przekrój	121, 123, 251
Reszta	27, 53

	Str.
Różnica	27, 28, 220
Składnik	11, 17, 51, 52
Stosunek	102
Suma	11, 51, 52
Suma algebraiczna	216
Symbol	
iloczynu	61
specyficzny	146
sumowania	60
Wartość bezwzględna	220
Wielomian całkowity	107
Własność	
łączności	22, 36, 70, 84

	Str.
Własność	
przemienności	23, 37, 76, 86
rozdzielności	38, 88, 90, 169
Wykładnik	97, 257, 259
Wyrazy różnicy	27
Wyznaczanie liczby	146, 147
Zasada potęgi	97, 257, 259
Znak	
dodatni	214, 228
gatunkowy	214
przeciwny drugiemu znakowi	214
ujemny	214

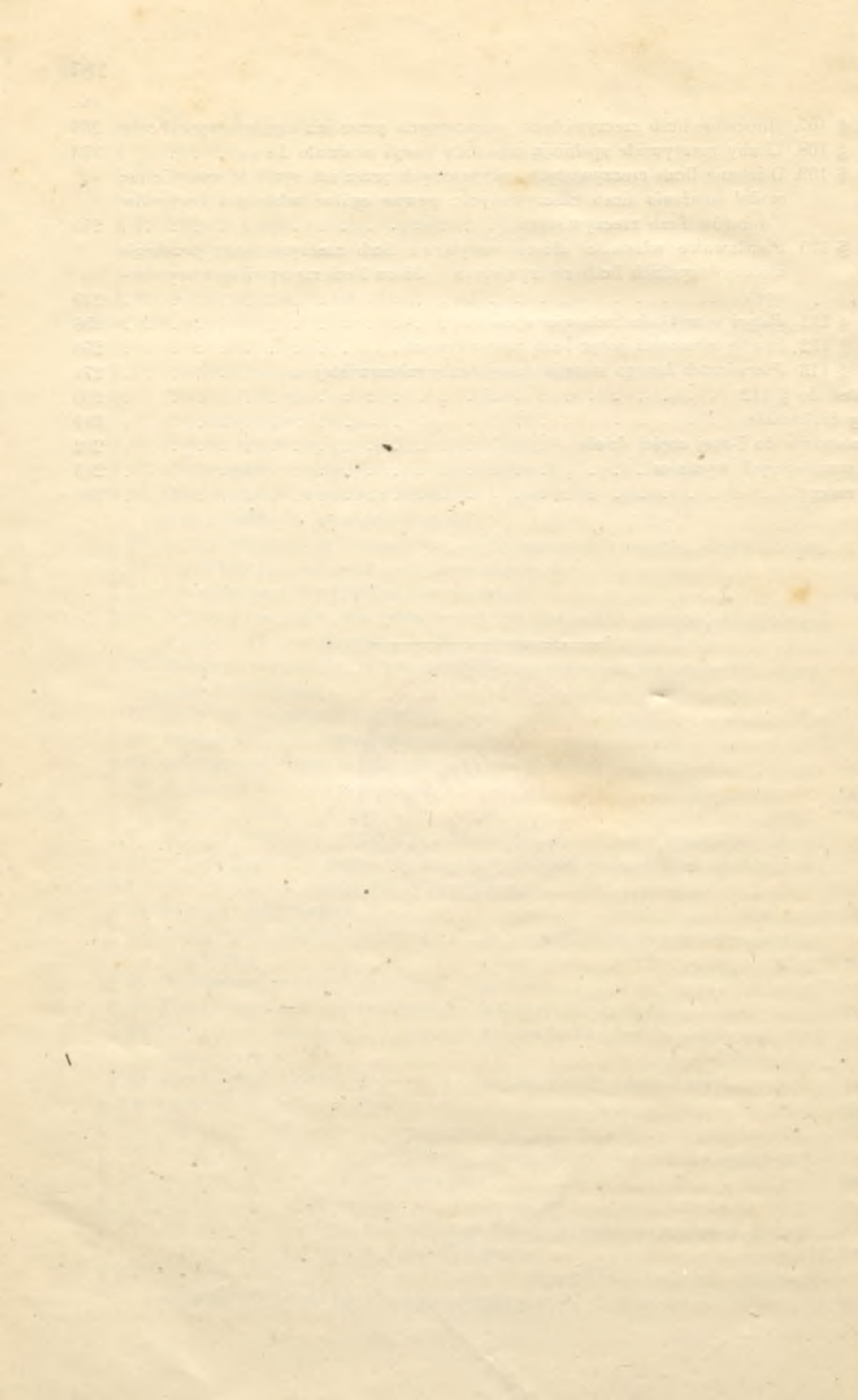
Spis rzeczy.

	Str.
Przedmowa	I
I. Mierzenie odcinków i liczby wymierne	1
§ 44. Ogólnikowe postawienie zagadnienia	1
§ 45. Rozwiązanie problemu <i>mierzenia</i> odcinka <i>współmiernego</i> z jednostką . . .	1
§ 46. Definicja liczb <i>ułamkowych</i>	2
§ 47. Porównywanie <i>ilościowe</i> liczb ułamkowych	4
§ 48. <i>Przekształcanie</i> liczb ułamkowych; liczby ułamkowe <i>nieprzypiedlne</i> ; sprostowanie do <i>wspólnego mianownika</i>	8
§ 49. Dodawanie liczb ułamkowych	11
§ 50. Liczby <i>wymiernie</i> bezwzględne i dodawanie tychże	16
§ 51. Ułamki <i>właściwe</i> ; część całkowita i część <i>właściwie</i> ułamkowa liczby ułamkowej	25
§ 52. Odejmowanie liczb wymiernych	26
§ 53. Mnożenie liczb wymiernych	31
§ 54. Dzielenie liczb wymiernych	40
§ 55. Liczby ułamkowe jako ilorazy	44
II. Ogólne zasady teorii działań podstawowych	46
§ 56. Uwagi wstępne	46
§ 57. Pojęcie <i>działania arytmetycznego</i>	46
§ 58. Wyjaśnienia i przykłady	48
§ 59. Ogólne zasady teorii działań podstawowych na jakiegokolwiek klasie wielkości .	51
§ 60. <i>Suma</i> iluokolwiek składników	55
§ 61. Symbol <i>sumowania</i>	57
§ 62. <i>Iloczyn</i> iluokolwiek czynników	60
§ 63. Wzajemny stosunek pojęcia dodawania i pojęcia mnożenia przy warunkach najogólniejszych	60
§ 64. Symbol <i>iloczynu</i>	61
§ 65. Odejmowanie i dzielenie	64
§ 66. Szczególne uwagi, odnoszące się do dzielenia liczb całkowitych	65
II Działania podstawowe w przypadku, kiedy definicje dodawania i mnożenia spełniają pewne szczególne warunki	67
§ 67. Postulaty teorii	67
§ 68. Dodawanie, własności <i>łączności</i> i <i>przemienności</i>	70

	Str.
§ 69. Odejmowanie. <i>Moduł dodawania</i>	76
§ 70. Mnożenie; własności <i>łączności i przemienności</i>	84
§ 71. Własność <i>rozdzielności</i> mnożenia w stosunku do dodawania i odejmowania	88
§ 72. Dzielenie. <i>Moduł mnożenia</i>	90
§ 73. Pojęcie <i>potęgi</i> ; <i>zasada</i> ; <i>wykładnik</i>	96
§ 74. Teorya <i>stosunków</i>	102
§ 75. Znaczenie teoryi <i>stosunków</i>	107
§ 76. Wprowadzenie dwóch dodatkowych postulatów	108
IV. <i>Mierzenie odcinków niewspółmiernych z jednostką. Liczby niewymierne. Ogólne pojęcie liczby bezwzględnej</i>	114
§ 77. Przykład na parę odcinków niewspółmiernych	114
§ 78. Podział liczb wymiernych na dwie kategorie za pośrednictwem odcinka niewspółmiernego z jednostką	117
§ 79. Pojęcie <i>przekroju</i> zbioru liczb wymiernych	121
§ 80. <i>Arytmetyczne</i> oznaczenie przekroju zbioru liczb wymiernych	123
§ 81. Odpowiedniość wzajemna odcinków i przekrojów zbioru liczb wymiernych przy oznaczonej jednostce długości	128
§ 82. Liczby <i>niewymierne bezwzględne</i> ; liczby <i>bezwzględne wogóle</i> ; <i>miara odcinka</i>	131
§ 83. Porównywanie <i>ilościowe</i> liczb bezwzględnych	132
§ 84. Twierdzenia z teoryi <i>mierzenia odcinków</i>	137
§ 85. Istnienie odcinków <i>niewspółmiernych</i> wynika już z postulatów, podanych w rozdz. IV-tym pierwszej części tego dzieła	139
§ 86. Definicja orzeczenia, iż pewna liczba bezwzględna jest <i>dana</i> lub <i>znana</i> ; pojęcie <i>określnika</i>	139
§ 87. Definicje <i>dodawania i mnożenia</i> liczb bezwzględnych	148
§ 88. <i>Dodawanie</i> liczb bezwzględnych	150
§ 89. <i>Odejmowanie</i> liczb bezwzględnych; <i>moduł dodawania</i>	155
§ 90. <i>Mnożenie</i> liczb bezwzględnych	160
§ 91. <i>Dzielenie</i> liczb bezwzględnych	170
§ 92. Liczby bezwzględne <i>sprawdzają</i> postulaty teoryi, wyłożonej w rozdziale III-cim	175
§ 93. O rozwiązywaniu zagadnień podstawowych na liczbach bezwzględnych	177
V. <i>Liczby względne. Ogólne pojęcie liczby rzeczywistej</i>	181
§ 94. Definicje podstawowe	181
§ 95. <i>Poprawność</i> definicji, odnoszących się do porównywania <i>ilościowego</i> liczb względnych	186
§ 96. <i>Poprawność</i> definicji <i>dodawania i mnożenia</i>	189
§ 97. <i>Ogólne pojęcie</i> liczby <i>rzeczywistej</i> ; definicje podstawowe	193
§ 98. <i>Poprawność</i> definicji, odnoszących się do porównywania <i>ilościowego</i> liczb rzeczywistych	195
§ 99. <i>Poprawność</i> definicji <i>dodawania i mnożenia</i> liczb rzeczywistych	198
§ 100. Główny cel dalszych rozważań	203
§ 101. Własności <i>sum</i> liczb rzeczywistych	203
§ 102. <i>Odejmowanie</i> liczb rzeczywistych; <i>moduł dodawania</i> ; liczby <i>symetryczne</i>	206
§ 103. Znaki $+$ i $-$ jako znaki <i>gatunkowe</i>	212
§ 104. Pojęcie <i>sumy algebraicznej</i>	215
§ 105. <i>Różnica bezwzględna</i> ; <i>wartość bezwzględna</i> ; symbol <i>specyficzny</i> liczby rzeczywistej; liczby <i>ujemne, dodatnie i zerowe</i>	218
§ 106. <i>Porównywanie ilościowe, dodawanie i odejmowanie</i> liczb rzeczywistych, oznaczonych przez ich symbole <i>specyficzne</i>	229

	Str.
§ 107. Mnożenie liczb rzeczywistych, oznaczonych przez ich symbole specyficzne	236
§ 108. Liczby rzeczywiste spełniają postulaty teorii rozdziału III-go	243
§ 109. Dzielenie liczb rzeczywistych, oznaczonych przez ich symbole specyficzne; <i>moduł mnożenia</i> liczb rzeczywistych; pewne ogólne własności iloczynów i ilorazów liczb rzeczywistych	244
§ 110. Podstawowe własności zbioru wszystkich liczb rzeczywistych; <i>przekroje</i> zbioru wszystkich liczb rzeczywistych i zbioru liczb rzeczywistych wymier- nych	249
§ 111. <i>Potęgi</i> o wykładnikach <i>ujemnych</i>	256
§ 112. Pewne własności potęg liczb rzeczywistych	266
§ 113. <i>Pierwiastek</i> danego stopnia danej liczby rzeczywistej	271
Dodatek do § 112	280
Błędy drukarskie	281
Sprostowanie do I-szej części dzieła	282
Spis ważniejszych wyrazów	283
Spis rzeczy	285





DO NABYCIA WE WSZYSTKICH KSIĘGARNIACH

NASTĘPUJĄCE DZIEŁA, WYDANE Z ZAPOMOGI

KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWEM

IMIENIA DRA MED. JÓZEFA MIANOWSKIEGO

LUB OFIAROWANE NA RZECZ KASY.

Matematyka.

Rb. kop.

- Autenrieth Ed.** Mechanika Techniczna. Podręcznik nauki statyki i dynamiki dla mech. inż. budow. Przełożył z upoważ. autora Stanisław Patschke. 1900, XI + 613, rys. 327 2 40
- Baraniecki M. A.** Początkowy wykład syntetyczny własności przecięć stożkowych na podstawie ich pokrewieństwa harmonicznego z kołem. 1885, XVI + 131, rys. 63 — 40
- Danielewicz A. B.** Metoda najmniejszych kwadratów. 1904, X + 185 + X 1 20
- Podstawy matematyczne ubezpieczeń życiowych. 1895, 335, tabl. X 2 —
- Z dziedziny statystyki matematycznej 1884, 30 — 10
- Dedekind Ryszard.** Ciągłość a liczby niewymierne. Z czwartego niezmienionego wydania przełożył St. Straszewicz 1914, VII + 17 — 45
- Dzieje myśli. Tom I, zes. 2.** Rozwój historyczny pojęć chemicznych. Szkic ewolucji pojęć w mineralogii. Zarys rozwoju matematyki: a) rozwój arytmetyki i algebry do końca XVI w.; b) zarys rozwoju geometrii w starożytności, wiekach średnich i w epoce odrodzenia; c) rozwój matematyki od początku w. XVII. W opracowaniu Leona Marchlewskiego, Józefa Siomy, Michała Feldbluma, Władysława Smosarskiego i Stefana Kwietniewskiego. 1911, 279, z 33 ilustracjami 1 50
- Enriques F.** Zagadnienia dotyczące geometrii elementarnej. Tom I. Krytyka podstaw. Z drugiego wydania włoskiego przełożyli: S. Kwietniewski i W. Wojtowicz. 1914, IV + 331 1 50
- Tom II. Konstrukcje geometryczne i teoria izoperymetrów 1917, 415. Z drugiego wydania włoskiego przełożyli St. Kwietniewski i Wł. Wojtowicz 3 —
- Wykłady geometrii rzutowej. Za upoważnieniem autora z trzeciego wydania włoskiego przełożył Fr. Włodarski 1917, 436, rys. 190 3 —
- Feldblum M.** Geometria wykreślna. 1902, XVI + 325 rys. 172 2 —
- Folkierski Wł.** Zasady rachunku różniczkowego i całkowego, wydanie 2, znacznie zmienione. Tom I, 1904, XII + 574 + 55 fig. 2 —
- Tom II, 1909, XI + 630 + 101 fig. 2 40
- Gauss K. F.** Rozważania ogólne o powierzchniach krzywych, z oryginału łacińskiego przełożył Stefan Finkelkraut, objaśnieniami i uwagami opatrzył Juliusz Rudnicki, z przedmową Kazimierza Żorawskiego, wyd. Władysław Wojtowicz 1913, 71 75
- Gosiewski Wł.** Rachunek prawdopodobieństwa. 1906, X + 265 2 —

Goursat Edward. Kurs analizy matematycznej. Wydanie drugie, całkowicie prze- bione. Tom I, część 2. Geometria różniczkowa. Przekład T. J. Łazowski 1917, rys. 45.	3 —
Hardy G. H. M. A. Wykłady elementarne z dziedziny analizy, przełożył Wł. Wojto- wicz 1916, XV + 492.	3 —
Kowalczyk. O sposobach obliczania przeszkód biegu ciał niebieskich 1901, XII, 624 + 3 tabl.	7 50
Majewski W. Geometria praktyczna. Podręcznik dla rzemieślników. 1908, 301 (karton) —	75
Małanowicz J. Kreślenie geometryczne i jego praktyczne zastosowania. 1907, XI + 176 + 45 tabl. i 346 rys. (karton)	— 60
— Kreślenie i zdobienie geometryczne. Kurs pierwszy, wyd. 2, 1912, VIII + 110 + II + 45 tabl. i 215 rys. (karton)	— 60
— Rzuty geometryczne. (Geometria wykreslna, dostosowana do potrzeb przemysłu i rzemiosł). Podręcznik dla szkół techn. i zawod. z 269 rys. 1913.	— 75
Mansion Paweł dr. Zasady teorii wyznaczników z wieloma ćwiczeniami, przełożył Wł. Łopiński. 1917, 96.	— 90
Pieri Mario. Geometria elementarna oparta na pojęciach »Punktu i kuli« z orygi- nału włoskiego przełożył Stefan Kwietniewski. 1915, 152.	1 —
Popławski Artur. Statyka wykreslna. 1917, XIII + 268 + 3 tabl. + 169 rys. w tekście.	2 40
Poradnik dla samouków. Wskazówki metodyczne dla studujących poszczególne nauki. Wydawnictwo A. Hellmga i St. Michalskiego. Wydanie nowe. Tom I-szy w opracowaniu J. Łukasiewicza, Z. Janiszewskiego, St. Kwietniewskiego, St. Mazurkiewicza, Wł. Sierpińskiego i St. Zaremby. 1915, XXXIV + 618, z 314 fig. w tekście i 1 tablicą	2 40
— Tom II, wyd. nowe: Fizyka, Geofizyka, Meteorologia, w opr. M. Smoluchow- skiego, M. P. Rudzkiego i B. Mereckiego. 1917	2 40
Prace matematyczno-fizyczne, wydawane przy współudziale Wład. Natanson, J. Pu- zyny, M. Smoluchowskiego, S. Zaremby, K. Żorawskiego przez S. Dicksteina. Tom XXVII. 1916, 277, rys. 10.	3 —
Rozmarynowicz T. Matematyczne podstawy ubezpieczeń na wypadek niezdolności do pracy w zastosowaniu do urządzenia kas emerytalnych. Wydał Bolesław Daniele- wicz. 1886, IV + 53	— 10
Schur F. Podręcznik geometrii analitycznej. Przełożył T. Łopuszański. 1901, X + 246 + 1 nrb., rys. 76.	1 —
Sierpiński W. dr. Teoria liczb niewymiernych. Wykłady uniwers. 1910, 4 nrb + 149. —	75
— Zarys teorii mnogości. 1912, XIII + 158	— 90
— Teoria liczb (kurs uniwersytecki) 1914, XIV + 412.	1 80
Steiner J. Konstrukcje geometryczne wykonane zapomocą linii prostej i stałego koła. Przełożył Stefan Kwietniewski. 1915, VIII + 60, rys. 25.	— 45
Szczepański Józef. Stopień wyższy matematyki elementarnej i początki rachunku nieskończonościowego. Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich i dla samo- uków. 1906, 450. Rb. 1 50, w kartonie	1 60
Wektor. Czasopismo matem.-fiz. Red. Stefan Mazurkiewicz w Warszawie. 5, — z prze- syłką 6, zeszyt pojedynczy	— 75
Witwiński Romuald. O układach odwracalnych powierzchni potrójnie ortogonalnych. Odbitka z tomu XXVII-go Prac mat.-fiz. 1915, 52, rys. 10.	— 75
Zaremba Stanisław. Wstęp do analizy. Część I-sza. Pojęcie dowodu matematycznego oraz inne wiadomości pomocnicze. 1915, 124.	— 60

M 52780/1

UP - Kraków BG



1050284277

