

4268

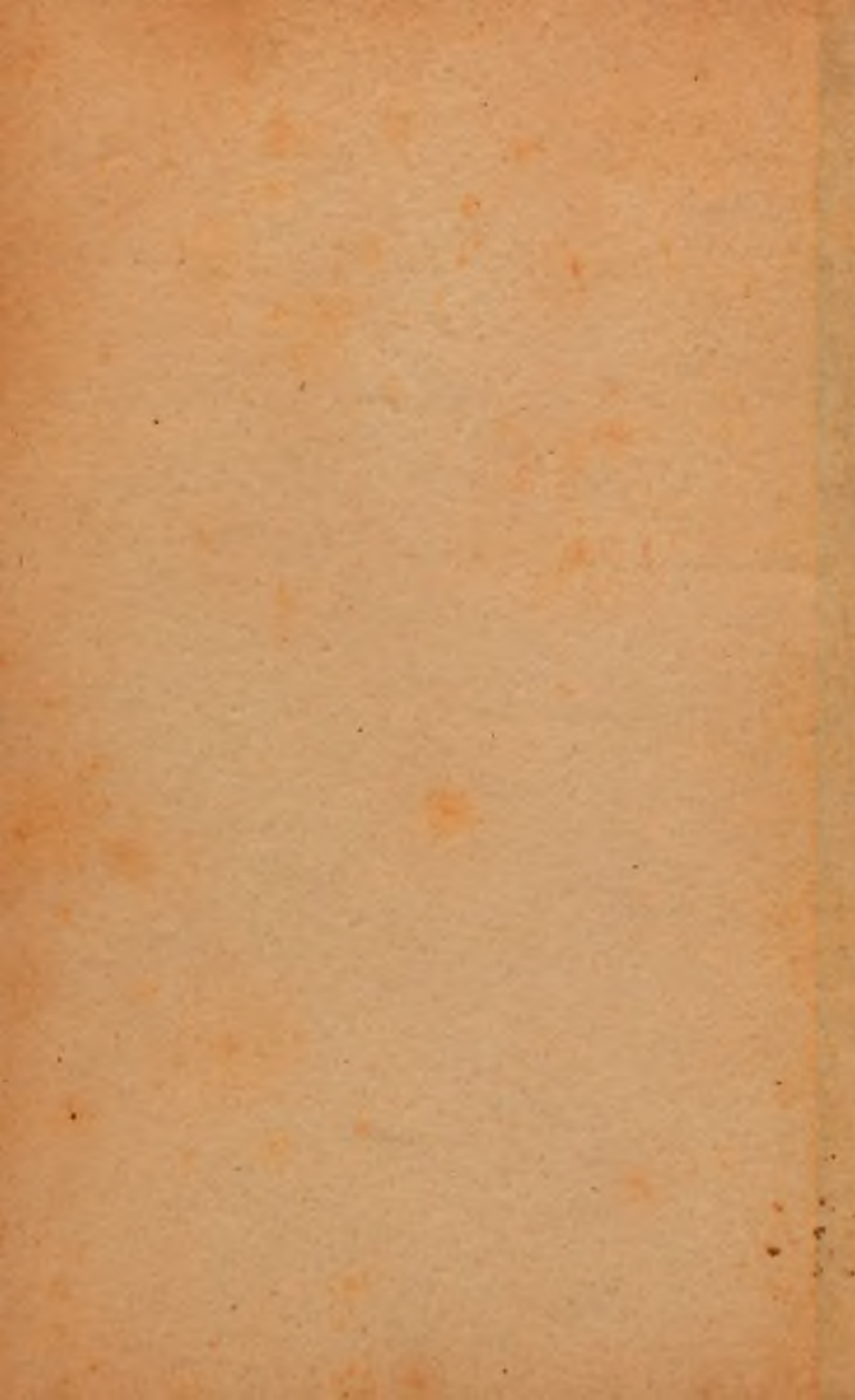
JERZY MIHUŁOWICZ

ARYTMETYKI I ALGEBRY

DLA VI KLASY GIMNAZJALNEJ

KSIAŻNICA-ATLAS

LWÓW-WARSZAWA



JERZY MIHUŁOWICZ

PODREČZNIK ARYTMETYKI I ALGEBRY

DLA VI KLAS Y GIMNAZJALNEJ

WYDANIE PIĄTE



K S I A Ź N I C A - A T L A S

ZJEDNOCZONE ZAKŁADY KARTOGRAFICZNE I WYDAWNICZE

TOW. NAUCZ. SZKÓŁ ŚREDN. I WYŻSZ., SP. AKC.

LWÓW — WARSZAWA

1929



M 54 241/1

UP - Kraków BG



1050307186

~~BIBL. WSP~~
~~1969-K 150-7~~

171

BG. UP
202-11
20 D

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie.

511+512(075)

Spis rzeczy.

	Str.
Rozdział I. Trójmian kwadratowy	1—25
§ 1. Określenie	1
§ 2. Funkcja $y = x^2$	1
§ 3. Funkcja $y = x^2 + px + q$	3
§ 4. Miejsca zerowe funkcji $y = x^2 + px + q$	6
§ 5. Graficzne rozwiązanie równania kwadratowego	7
§ 6. Funkcja $y = ax^2$	9
§ 7. Funkcja $y = ax^2 + bx + c$	11
§ 8. Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$	13
§ 9. Miejsca zerowe trójmianu $y = ax^2 + bx + c$. Rozkładanie na czynniki	15
§ 10. Znak trójmianu kwadratowego. Nierówności stopnia drugiego	17
Ćwiczenia	19
 Rozdział II. Dyskusja równania stopnia drugiego	 26—46
§ 1. Warunek istnienia pierwiastków	26
§ 2. Znaki pierwiastków równania	28
§ 3. Położenie liczby względem pierwiastków równania	31
§ 4. Położenie pierwiastków równania względem danego przedziału	34
§ 5. Zestawienie i geometryczne przedstawienie poprzednich wyników	37
Ćwiczenia	39
 Rozdział III. Równania stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi 47—77	 47—77
§ 1. Równanie stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi	47
§ 2. Graficzne rozwiązanie układu równań	49
§ 3. Algebraiczne rozwiązanie układu równań stopnia drugiego i pierwszego z dwiema niewiadomymi	49
§ 4. Dyskusja układu równań stopnia drugiego i pierwszego z dwiema niewiadomymi	53
§ 5. Przekształcenie układu dwu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi	57
§ 6. Równanie dwukwadratowe	58
§ 7. Przykłady rozwiązania układu dwu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi	59
§ 8. Dyskusja układu dwu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi	62
9. Niektóre funkcje przedstawione równaniem stopnia drugiego z dwiema zmiennymi	63
Ćwiczenia	69

	Str.
Rozdział IV. Równania i funkcje niewymierne	78—87
§ 1. Równania niewymierne	78
§ 2. Funkcja $y = \sqrt{x}$	83
§ 3. Przykłady kilku innych funkcji niewymiernych	84
Ćwiczenia	85
Rozdział V. Postępy	88—104
§ 1. Postęp arytmetyczny	88
§ 2. Postęp geometryczny	91
§ 3. Procent składany	93
Ćwiczenia	96
Dodatek. Liczby rzeczywiste	105—116
§ 1. Odwzorowanie liczb wymiernych na linii liczbowej	105
§ 2. Liczby niewymierne	107
§ 3. Dodawanie i odejmowanie liczb rzeczywistych	109
§ 4. Liczby rzeczywiste jako miary odcinków	111
§ 5. Mnożenie liczb rzeczywistych	113
§ 6. Pole prostokąta	114

Rozdział I.

Trójmian kwadratowy.

§ 1. Określenie.

Zajmiemy się badaniem funkcji: $y = ax^2 + bx + c$. Funkcja ta jest uogólnieniem funkcji linjowej; przechodzi w nią, gdy $a = 0$. Nazwiemy ją *funkcją całkowitą stopnia drugiego* lub krótko *trójmianem kwadratowym*. Związek jej z równaniem kwadratowym $ax^2 + bx + c = 0$ nasuwa się natychmiast: pierwiastki równania są miejscami zerowymi funkcji, t. j. wartościami zmiennej x , dla których funkcja przyjmuje wartość $y = 0$.

Badanie rozpoczniemy, jak przy równaniach, od szczególnego przypadku $y = x^2 + px + q$, który otrzymamy z ogólnego wzoru, przyjmując $a = 1$, $b = p$, $c = q$. Jeżeli $p = q = 0$, funkcja ma postać $y = x^2$.

§ 2. Funkcja $y = x^2$.

Niejednokrotnie przedstawialiśmy już graficznie funkcję $y = x^2$ i otrzymywaliśmy krzywą, zwaną *parabolą*. Badając funkcję $y = x^2$, poznamy też własności tej krzywej.

Funkcja $y = x^2$ ma następujące własności:

1. Każdej wartości x odpowiada jedna wartość y , jak to ze wzoru $y = x^2$ bezpośrednio wynika.

Geometrycznie znaczy to, że każda prosta, równoległa do osi Y , przecina parabolę w jednym punkcie.

2. Gdy $x = 0$, to i $y = 0$. Jedynek miejscem zerowym funkcji jest $x = 0$.

Parabola $y = x^2$ przechodzi przez początek układu współrzędnych, a poza tem nie przecina osi X .

3. Gdy x rośnie, począwszy od zera, przyjmując coraz większe wartości dodatnie, to y jako iloczyn dwóch czynników, z których

każdy wynosi x , rośnie równieź; przytem może y przyjąć każdą wartość dodatnią. Aby bowiem uczynić np. $y = m$, gdzie $m > 0$, wystarczy przyjąć za x wartość dodatnią, spełniającą równanie $x^2 = m$. Wartość taka jedna (i tylko jedna) istnieje zawsze, a jest nią liczba wymierna lub niewymierna $\sqrt{m}$.

Gdy posuwamy się na osi X od początku układu współrzędnych w prawo, parabola wznosi się ciągle.

4. Dla każdej ujemnej wartości x przyjmuje y taką samą wartość, jak dla dodatniej wartości x o takiej samej wartości bezwzględnej, bo $(-x)^2 = (+x)^2$. Gdy więc x maleje, przyjmując coraz większe bezwzględnie wartości ujemne, to y rośnie i przyjmuje każdą wartość dodatnią.

Gdy posuwamy się na osi X od początku układu współrzędnych w lewo, parabola wznosi się ciągle.

5. Stąd wynika, że każdej dodatniej wartości y odpowiadają dwie wartości x , o jednakowych wartościach bezwzględnych, a znakach przeciwnych.

Każda prosta, równoległa do osi X , a przecinająca dodatnią oś Y , przecina parabolę w dwóch punktach, równo oddalonych od osi Y . Parabola jest więc symetryczna względem osi Y . Tę oś symetrii nazywamy *osią parabol*. Oś przecina parabolę w jednym punkcie, który odpowiada symetrycznie sam sobie; punkt ten nazywamy *wierzchołkiem parabol*. Jest nim początek układu współrzędnych.

6. Ujemnych wartości y nie przyjmuje nigdy.

Parabola $y = x^2$ nie ma punktów poniżej osi X .

7. Przebieg funkcji $y = x^2$ przedstawia tabelka:

x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$, to funkcja $y = x^2$ maleje najpierw stale, a później rośnie stale. Najmniejszą wartością, jaką funkcja przyjmuje, jest $y = 0$, odpowiadająca wartości $x = 0$. Mówimy, że funkcja $y = x^2$ ma *minimum* (najmniejszą wartość) $y = 0$ przy $x = 0$.

Temu minimum funkcji odpowiada najniższy punkt parabol; jest nim w naszym przykładzie początek układu współrzędnych, w którym leży wierzchołek parabol.

§ 3. Funkcja $y = x^2 + px + q$.

W celu zbadania ogólniejszej postaci: $y = x^2 + px + q$ przekształćmy trójmian kwadratowy w następujący sposób:

$$y = x^2 + px + q,$$

$$y = \left(x^2 + px + \frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4} + q,$$

$$y = (x + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}(p^2 - 4q),$$

$$y = (x + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}\Delta, \text{ jeżeli } \Delta = p^2 - 4q.$$

Wyrażenie $\Delta = p^2 - 4q$ nazywać będziemy *wyróżnikiem trójmianu kwadratowego* $x^2 + px + q$.

Zajmiemy się najpierw przypadkiem $\Delta = 0$.

I. Jeżeli $\Delta = 0$, to $y = (x + \frac{1}{2}p)^2$.

Funkcja ta różni się od funkcji $y = x^2$, której własności poznaliśmy w poprzednim paragrafie, tylko tem, że te same wartości y , które w ostatniej funkcji odpowiadały pewnej wartości $x = x'$, odpowiadają teraz wartości $x' - \frac{1}{2}p$; podstawiając bowiem w równaniu $y = x^2$ za x wartość x' , otrzymamy dla y taką samą wartość, jak gdy w równaniu $y = (x + \frac{1}{2}p)^2$ za x podstawimy $x = x' - \frac{1}{2}p$. (Wykonaj!).

Z tego wynika łatwy sposób otrzymania wykresu funkcji $y = (x + \frac{1}{2}p)^2$. Rzędna punktu, która w paraboli $y = x^2$ odpowiada pewnej odciętej x' , odpowiada teraz odciętej $x' - \frac{1}{2}p$. Aby zatem otrzymać wykres krzywej $y = (x + \frac{1}{2}p)^2$, należy każdą rzędną punktów paraboli $y = x^2$ (czyli, co na jedno wyjdzie, całą parabolę $y = x^2$) przesunąć o $-\frac{1}{2}p$ równoległe do osi X .

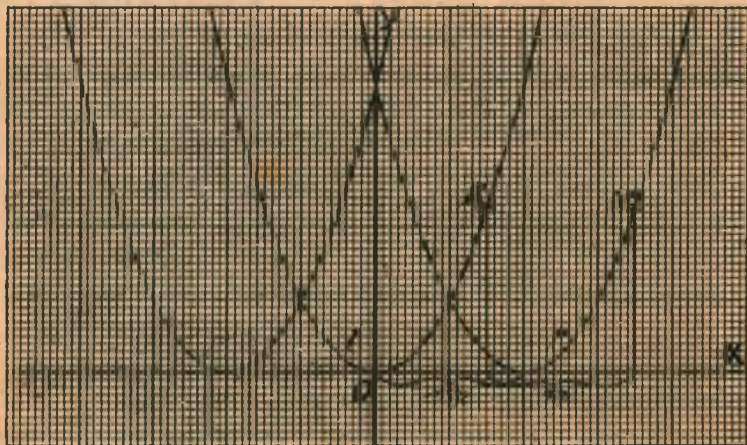


Fig. 1.

W fig. 1 przedstawiają krzywe I, I', I'' kolejno funkcje: $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = (x + 2)^2$.

Wykreśl bardzo dokładnie na kartonie krzywą $y = x^2$, wytnij karton wzdłuż krzywej, a otrzymasz szablon, przy pomocy którego będzie można rysować wykresy i innych funkcji stopnia drugiego podobnie, jak przy pomocy lineálu kreśliliśmy funkcję linjową.

Z zauważonego związku między funkcjami $y = x^2$ i $y = (x + \frac{1}{2}p)^2$ wynikają bezpośrednio następujące własności tej ostatniej*):

1. Każdej wartości x odpowiada jedna wartość y .

Każda prosta równoległa do osi Y przecina parabolę w jednym punkcie.

2. y staje się zerem tylko wtedy, gdy $x = -\frac{1}{2}p$.

Parabola ma z osią X tylko jeden punkt $A(-\frac{1}{2}p, 0)$ wspólny.

3. Gdy x rośnie, począwszy od wartości $-\frac{1}{2}p$, to y rośnie również, począwszy od wartości 0, i przyjmuje wszystkie możliwe wartości dodatnie.

Parabola wznosi się, gdy na osi X posuwamy się od punktu $A(-\frac{1}{2}p, 0)$ w prawo.

4. Gdy x maleje, począwszy od wartości $-\frac{1}{2}p$, to y rośnie, przyjmując coraz większe wartości dodatnie. Jeżeli x jest mniejsze od $-\frac{1}{2}p$ np. o δ , to odpowiednie y ma taką wartość, jak y , odpowiadające wartości $x = -\frac{1}{2}p + \delta$. (Sprawdź, obliczając y dla $x = -\frac{1}{2}p + \delta$ i dla $x = -\frac{1}{2}p - \delta$).

Gdy od punktu $A(-\frac{1}{2}p, 0)$ posuwamy się po osi X w lewo, to parabola wznosi się.

5. Każdej dodatniej wartości y odpowiadają zatem dwie wartości x , których suma wynosi $-p$.

Każda prosta, równoległa do osi X , przecinająca dodatnią oś Y , przecina parabolę w dwóch punktach, leżących symetrycznie względem prostej $x = -\frac{1}{2}p$. Ta prosta jest więc osią paraboli.

6. Ujemnych wartości y nie przyjmuje nigdy.

Prosta, równoległa do osi X , a przecinająca ujemną oś Y , nie przecina paraboli wcale.

7. Przebieg funkcji $y = (x + \frac{1}{2}p)^2$ przedstawia tabelka:

x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}p$	$\searrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Funkcja ma minimum równe 0 przy $x = -\frac{1}{2}p$.

Najniższym położonym punktem paraboli jest jej wierzchołek $A(-\frac{1}{2}p, 0)$.

*) Porównaj kolejno z własnościami paraboli, $y = x^2$, wymienionymi w § 2.

II. Przyjmijmy wreszcie, że Δ ma wartość dowolną; wtedy:
 $y = (x + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}\Delta$.

Dla każdej wartości x przyjmuje teraz funkcja wartość, różniącą się o $\frac{1}{4}\Delta$ od wartości funkcji poprzedniej, odpowiadającej tej samej wartości x .

Wykres tej funkcji otrzymamy, jeżeli rzędną każdego punktu paraboli $y = (x + \frac{1}{2}p)^2$ powiększymy o $-\frac{1}{4}\Delta$, czyli, jeżeli tę parabolę przesuniemy o $-\frac{1}{4}\Delta$ równolegle do osi Y .

W fig. 2 przedstawia krzywa I parabolę $y = (x - 2)^2$, krzywa II parabolę $y = x^2 - 4x + 5.5 = (x - 2)^2 + 1.5$, krzywa III parabolę $y = x^2 - 4x + 2.5 = (x - 2)^2 - 1.5$.

Funkcja $y = x^2 + px + q = (x + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}\Delta$ ma następujące własności*):

1. Każdej wartości x odpowiada jedna wartość y .

Każda prosta, równoległa do osi Y , przecina parabolę w jednym punkcie.

2. Dla $x = -\frac{1}{2}p$ przyjmuje y wartość $-\frac{1}{4}\Delta$.

Parabola przechodzi przez punkt $M(-\frac{1}{2}p, -\frac{1}{4}\Delta)$.

3. Gdy x rośnie, począwszy od $-\frac{1}{2}p$, to y rośnie, począwszy od $-\frac{1}{4}\Delta$, i przyjmuje wszystkie możliwe wartości większe od $-\frac{1}{4}\Delta$.

Gdy na osi X poruszamy się, począwszy od punktu $A(-\frac{1}{2}p, 0)$ w prawo, to parabola wznosi się ciągle.

4. Gdy x maleje, począwszy od $-\frac{1}{2}p$, to y rośnie, począwszy od $-\frac{1}{4}\Delta$, i to tak, że gdy x jest mniejsze od $-\frac{1}{2}p$ np. o δ , to odpowiednio y ma taką wartość, jak dla x większego od $-\frac{1}{2}p$ o δ . (Sprawdź, obliczając wartości funkcji dla $x = -\frac{1}{2}p - \delta$ i dla $x = -\frac{1}{2}p + \delta$!).

Gdy na osi X posuwamy się od $A(-\frac{1}{2}p, 0)$ w lewo, to parabola wznosi się.

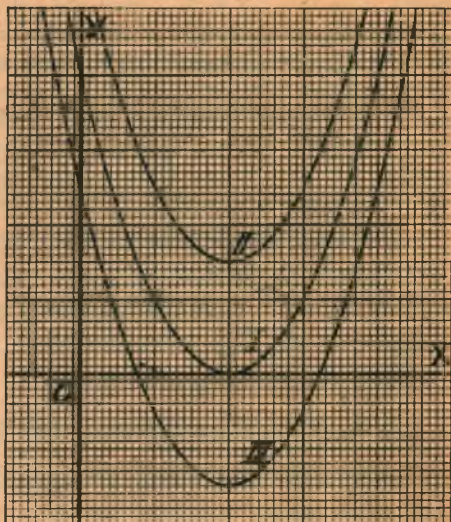


Fig. 2.

*) Porównaj kolejno z własnościami funkcji: $y = (x + \frac{1}{2}p)^2$.

5. Każdej wartości y większej od $-\frac{1}{4}\Delta$ odpowiadają dwie wartości x , których suma wynosi $-p$.

Każda prosta, równoległa do osi X , a przecinająca oś Y powyżej punktu $B(0, -\frac{1}{4}\Delta)$, przecina parabolę w dwóch punktach, leżących symetrycznie względem prostej $x = -\frac{1}{2}p$. Ta ostatnia prosta jest więc osią paraboli.

6. Wartości mniejszych niż $-\frac{1}{4}\Delta$ funkcja nie przyjmuje nigdy.

Prosta, równoległa do osi X , a przecinająca oś Y poniżej punktu $B(0, -\frac{1}{4}\Delta)$, nie przecina paraboli wcale.

7. Przebieg funkcji $y = x^2 + px + q$ przedstawia tabelka:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -\frac{1}{2}p & +\infty \\ \hline y & +\infty & -\frac{1}{4}\Delta & +\infty \end{array}$$

Funkcja posiada przy $x = -\frac{1}{2}p$ minimum, wynoszące $-\frac{1}{4}\Delta$.

Wykresem funkcji $y = x^2 + px + q$ jest parabola, przystająca do paraboli $y = x^2$, zwrócona stroną wypukłą na dół, mająca oś równoległą do osi Y , a wierzchołek w punkcie $M(-\frac{1}{2}p, -\frac{1}{4}\Delta)$.

§ 4. Miejsca zerowe funkcji $y = x^2 + px + q$.

Rzut oka na ostatnią tabelkę poucza, że funkcja $y = x^2 + px + q$ ma tylko wtedy miejsca zerowe, gdy $-\frac{1}{4}\Delta \leq 0$, czyli gdy $\Delta \geq 0$.

Parabola $y = x^2 + px + q$ ma z osią X tylko wtedy jeden lub dwa punkty wspólne, jeżeli wierzchołek jej leży na osi X lub poniżej osi X .

Aby wyznaczyć miejsca zerowe badanej funkcji, przekształcamy ją tak, jak w § 3. Otrzymamy:

$$y = (x + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}\Delta.$$

Jeżeli $\Delta \geq 0$, możemy napisać $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ tak, że:

$$y = (x + \frac{1}{2}p)^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{\Delta})^2.$$

Rozkładając ostatnią różnicę kwadratów na czynniki, otrzymamy:

$$y = (x + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta})(x + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}).$$

Ponieważ iloczyn dwóch czynników jest zerem tylko wtedy, jeżeli jeden z czynników jest zerem, to $y = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

albo $x + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = 0$, albo $x + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = 0$. Zatem:

Miejscami zerowymi badanej funkcji są w przypadku $\Delta > 0$ wartości:

$$x_1 = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \text{ i } x_2 = -\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}.$$

W przypadku $\Delta = 0$ obie wartości x_1 i x_2 są równe, a trójmian badany ma jedno tylko miejsce zerowe: $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}p$.

Jeżeli $\Delta < 0$, to $y = (x + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}\Delta$ jest sumą dwóch wyrażań, z których pierwsze (jako kwadrat) nigdy nie jest ujemne, a drugie (według założenia) jest stale dodatnie. Jest więc zawsze $y > 0$; funkcja badana nie ma w tym przypadku miejsc zerowych.

Wyniki i wzory, otrzymane obecnie, są zgodne z wynikami i wzorami, otrzymanymi przy rozwiązaniu równania $x^2 + px + q = 0$. Odpowiada to w zupełności naszemu pojmowaniu równania warunkowego, jako pytania, czy istnieje taka wartość dla x , dla której funkcja, znajdująca się po lewej stronie znaku równości, ma taką samą wartość, jak funkcja po stronie prawej, a w razie istnienia żądania wyznaczenia tej wartości. Ponieważ po prawej stronie znaku równości znajduje się w tem równaniu funkcja, mająca stale wartość 0, to pytanie, postawione przez równanie, sprowadza się do pytania o miejsca zerowe trójmianu kwadratowego, znajdującego się po stronie lewej.

W przypadku $\Delta > 0$, możemy uzupełnić ostatnią tabelkę w § 3 miejscami zerowymi funkcji. Otrzymamy:

$x -\infty$	$\nearrow \frac{1}{2}(-p - \sqrt{\Delta})$	$\nearrow -\frac{1}{2}p$	$\nearrow \frac{1}{2}(-p + \sqrt{\Delta})$	$\nearrow +\infty$
$y +\infty$	$\searrow 0$	$\searrow -\frac{1}{4}\Delta$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

Tabelka ta pozwala nam nie tylko odczytać, kiedy funkcja rośnie, a kiedy maleje, lecz także kiedy przyjmuje wartości dodatnie, a kiedy ujemne.

W przypadku $\Delta = 0$ pozostaje pierwsza tabelka w § 3 niezmienną; w przypadku $\Delta < 0$ przedstawia ostatnia tabelka w § 3 przebieg funkcji zupełnie, bo funkcja miejsc zerowych nie posiada i przyjmuje tylko wartości dodatnie.

§ 5. Graficzne rozwiązywanie równania kwadratowego.

Wykres trójmianu kwadratowego pozwala nam rozwiązać graficznie równanie kwadratowe.

Aby równanie $x^2 + px + q = 0$ graficznie rozwiązać, przedstawiamy graficznie jego lewą stronę jako funkcję zmiennej x i odczytujemy odcięte punktów przecięcia się otrzymanej paraboli z osią X . Odczytane wartości są pierwiastkami równania.

Przykład 1. Rozwiązać graficznie równanie: $x^2 - 6x + 9 = 0$. Aby otrzymać wykres funkcji $y = x^2 - 6x + 9$, przesuwamy parabolę I (fig. 3), mającą równanie $y = x^2$, równolegle tak, aby jej wierzchołek znalazł się w punkcie (3, 0), (według ostatniego twierdzenia w § 3). Otrzymamy krzywą II, która ma z osią X wspólny punkt (3, 0). Pierwiastkiem danego równania jest $x = 3$.

Przykład 2. Rozwiązać graficznie równanie: $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Lewą stronę przedstawia krzywa III w fig. 3, która przecina oś X w punktach $(1, 0)$ i $(-3, 0)$. Równanie ma więc dwa pierwiastki: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

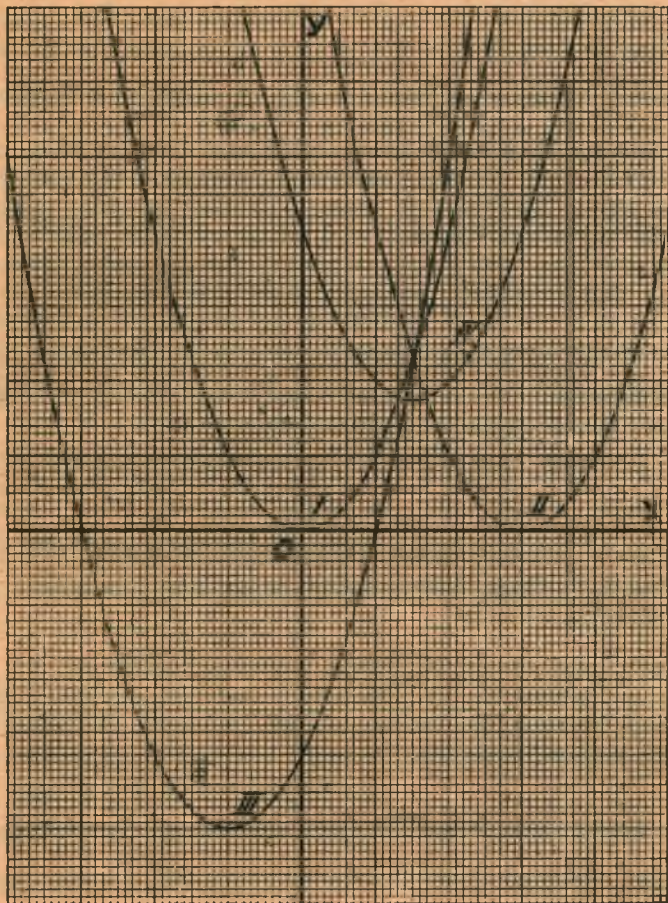


Fig. 3.

Przykład 3. Rozwiązać graficznie równanie: $x^2 - 3x + 4 = 0$.

Lewą stronę przedstawia parabola IV w fig. 3, która osi X nie przecina wcale. Równanie nie ma pierwiastka.

Przykład 4. Rozwiązać graficznie równanie: $x^2 - 6x + q = 0$, dla $q = 6, 7, 8, 9$.

Krzywe I, II, III i IV w fig. 4 przedstawiają kolejno lewą stronę danego równania dla $q = 6, 7, 8$ i 9 . Zauważymy, że ze wzrostem q wzajemna odległość punktów przecięcia się osi X z parabolą coraz bardziej się zmniejsza, a więc i oba pierwiastki równania różnią się od

siebie coraz mniej. Wreszcie dla $q=9$ oba punkty przecięcia się schodzą się razem; oba pierwiastki przyjmują jednakową wartość!

Przykład ten tłumaczy, dlaczego w przypadku $x=0$ mówimy, że równanie ma jeden podwójny pierwiastek, lub dwa równe pierwiastki.

§ 6. Funkcja $y = ax^2$.

Funkcję $y = ax^2$ zbadamy, zestawiając ją z funkcją $z = x^2$.

Otrzymamy równanie: $y = az$, które wyraża, że wartości funkcji y są wprost proporcjonalne do wartości funkcji z , odpowiadających tym samym wartościom x . Stąd wynika bezpośrednio, że obie funkcje mają to samo miejsce zerowe, że ze wzrostem z funkcja y rośnie, jeżeli $a > 0$, a maleje, jeżeli $a < 0$, że równym wartościom z odpowiadają równe między sobą wartości y .

Wymień własności funkcji $y = ax^2$; wynikające kolejno z własności funkcji $z = x^2$, wymienionych w § 2!

Z tabelki na str. 2 znajdziemy:

Przebieg funkcji $y = ax^2$ wskazują tabelki:

Jeżeli $a > 0$:	$\begin{array}{c} x -\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty \\ y +\infty \searrow 0 \searrow +\infty \end{array}$	Jeżeli $a < 0$:	$\begin{array}{c} x -\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty \\ y -\infty \searrow 0 \searrow -\infty \end{array}$
------------------	---	------------------	---

Funkcja $y = ax^2$ osiąga dla $x=0$ minimum lub maximum $y=0$ zależnie od tego, czy $a > 0$, czy $a < 0$.

Przy graficznym przedstawieniu funkcji $y = ax^2$ rozróżnimy przypadki: $a > 0$ i $a < 0$.

1. Zajmiemy się najpierw przypadkiem $a > 0$.

Aby otrzymać wykres funkcji $y = ax^2$, jeżeli $a > 1$, należy rzędną każdego punktu paraboli $y = x^2$ powiększyć a razy.

Fig. 5 przedstawia wykresy funkcji $y = ax^2$ dla $a=1$ (krzywa I), dla $a=2$ (krzywa II) i dla $a=4$ (krzywa III).

Otrzymane krzywe nazywamy także *parabolami*; oś Y jest ich *osią*, początek układu współrzędnych jest ich wspólnym *wierzchołkiem*. Wszystkie punkty paraboli $y = ax^2$ (z wyjątkiem wierzchołka) leżą powyżej odpowiednich punktów paraboli $y = x^2$, jeżeli $a > 1$.

Jeżeli $0 < a < 1$, to w celu otrzymania wykresu funkcji $y = ax^2$

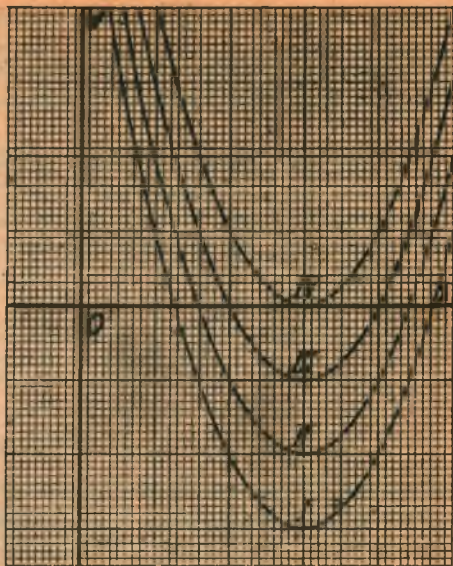


Fig. 4.

należy wszystkie rzędne punktów paraboli $y = x^2$ pomniejszyć $\frac{1}{a}$ razy. Otrzymamy *parabole*, przebiegające poniżej paraboli $y = x^2$, mające z nią wspólną oś i wspólny wierzchołek.

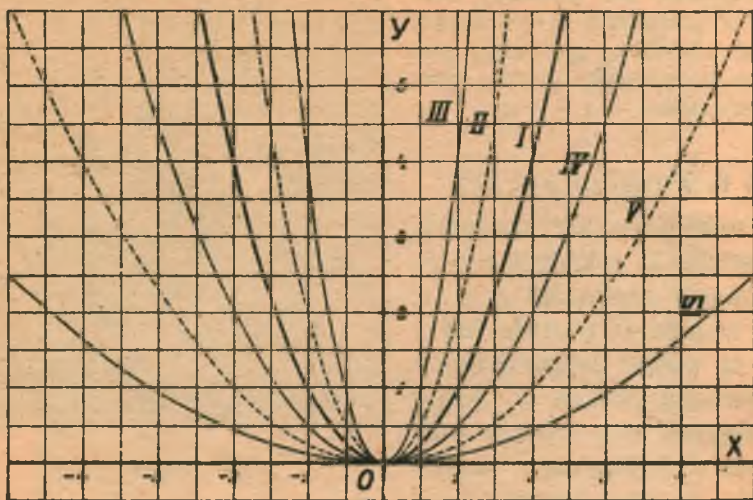


Fig. 5.

Krzywe IV, V i VI przedstawiają w fig. 5 kolejno funkcje: $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{10}x^2$.

2. Jeżeli $a < 0$, to każda wartość funkcji $y = ax^2$ różni się od wartości funkcji $y = |a| \cdot x^2$, odpowiadającej temu samemu x , tylko znakiem.

Wykres funkcji $y = ax^2$ otrzymamy zatem, zastępując w paraboli $y = |a| \cdot x^2$ dodatnie rzędne jej punktów rzędnymi ujemnymi tej samej długości.

Krzywe $y = ax^2$ i $y = -ax^2$ odpowiadają sobie symetrycznie względem osi X .

Fig. 6 przedstawia funkcje: $y = 0.4x^2$ i $y = -0.4x^2$.

Odczytaj z wykresów w figurze 5 i 6 przebieg funkcji $y = ax^2$!

Sporządź z kartonu kilka szablonów parabol $y = ax^2$ dla różnych wartości a !

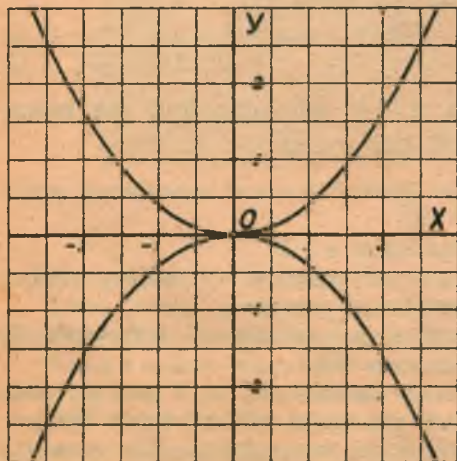


Fig. 6.

Nazwaliśmy wyżej krzywe w fig. 5 również parabolami. Wydać się to może niewłaściwie,

bo jedne z tych krzywych wyglądają węższe, inne szersze, a więc zupełnie różne kształtem. Tak jednak nie jest; wszystkie parabole są podobne tak, jak podobne są koła o różnych promieniach. Nie wchodząc w szczegółowe uzasadnienie tej własności parabol, zadowolimy się następującym spostrzeżeniem:

Wykreśl na papierze milimetrowym bardzo dokładnie parabolę $y = x^2$, przyjmując za jednostkę 1 cm. Przyjmij następnie na tym samym rysunku za jednostkę 2 cm i przekonaj się, że ta sama krzywa przedstawia teraz funkcję $y = 2x^2$. Przyjmij dalej kolejno za jednostkę 1'5 cm, 0'5 cm, 0'1 cm i t. d. i przekonaj się, że ta sama krzywa przedstawia wtedy funkcje: $y = 1'5x^2$, $y = 0'5x^2$, $y = 0'1x^2$ i t. d. Z tego widzimy naodwrot, że każdą z parabol $y = ax^2$, (gdzie $a > 0$) uważać można za parabolę $y = x^2$, narysowaną w stosownej podziałce.

§ 7. Funkcja $y = ax^2 + bx + c$.

Podobnie, jak wysnuliśmy własności funkcji $y = ax^2$ z własności funkcji $z = x^2$, możnaby łatwo wysnuć własności funkcji $y = ax^2 + bx + c$ z własności funkcji $x^2 + px + q$. Zakładając bowiem, że $a \neq 0$ otrzymamy:

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a(x^2 + px + q), \text{ gdzie } \frac{b}{a} = p, \frac{c}{a} = q.$$

Wartości funkcji y są zatem proporcjonalne do wartości funkcji $x^2 + px + q$. Ponieważ własności tej ostatniej funkcji znamy, możemy z nich łatwo wyprowadzić odpowiednie własności funkcji y . — Zbadamy jednak funkcję $y = ax^2 + bx + c$ niezależnie od poprzednich wyników.

Poznanie własności ogólnego trójmianu kwadratowego ułatwiają następujące przekształcenia, przy których zakładamy $a \neq 0$:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

$$y = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right],$$

$$y = a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right],$$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right], \text{ a jeżeli } \Delta = b^2 - 4ac:$$

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right],$$

Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywać będziemy *wyróżnikiem trójmianu kwadratowego*, a ostatnią postać trójmianu kwadratowego jego *postacią kanoniczną*. Z postaci tej wysnujemy kilka własności badanej funkcji:

Wyrażenie w graniastym nawiasie (oznaczymy je literą z) jest sumą kwadratu funkcji linjowej $x + \frac{b}{2a}$ i stałej $-\frac{\Delta}{4a^2}$. Funkcja

linjowa, jej kwadrat i z zmieniają się ze zmianą x w następujący sposób:

x	$-\infty \nearrow -\frac{b}{2a} \nearrow +\infty$
$x + \frac{b}{2a}$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$
z	$+\infty \searrow -\frac{\Delta}{4a^2} \nearrow +\infty$

Zważywszy, że wartości funkcji y są wprost proporcjonalne do wartości funkcji z , bo $y = az$, znajdziemy:

x	$-\infty \nearrow -\frac{b}{2a} \nearrow +\infty$
y	$+\infty \searrow -\frac{\Delta}{4a} \nearrow +\infty$, jeżeli $a > 0$;
y	$-\infty \nearrow -\frac{\Delta}{4a} \searrow -\infty$, jeżeli $a < 0$.

Tak znajdujemy następujące własności trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$:

1. Trójmian kwadratowy jest określony dla wszelkich wartości zmiennej x .

2. Gdy x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$, to trójmian kwadratowy najpierw maleje, osiąga minimum, a potem rośnie, jeżeli $a > 0$. Jeżeli $a < 0$, to trójmian kwadratowy przy wzrastaniu x od $-\infty$ do $+\infty$ najpierw rośnie, osiąga maximum, a potem maleje.

3. Minimum (dla $a > 0$) względnie maximum (dla $a < 0$) osiąga trójmian kwadratowy dla $x = -\frac{b}{2a}$. Wynosi ono $-\frac{\Delta}{4a}$.

Staraj się tę własność trójmianu kwadratowego odczytać wprost z jego postaci kanonicznej. Wszak z jest sumą dwóch składników, z których jeden jest kwadratem funkcji linjowej, a drugi jest liczbą stałą. Ponieważ najmniejszą wartością, jaką może mieć kwadrat jakiejś zmiennej, jest 0, więc kwadrat funkcji linjowej, a wraz z nim i z będą miały najmniejszą wartość, gdy ten kwadrat stanie się zerem. Nastąpi to dla wartości $x = -\frac{b}{2a}$. Funkcja z będzie miała wtedy minimum $-\frac{\Delta}{4a^2}$, a funkcja y minimum lub maximum $-\frac{\Delta}{4a}$ zależnie od tego, czy $a > 0$, czy $a < 0$.

4. Trójmian kwadratowy przyjmuje wszelkie wartości nie mniejsze od $-\frac{\Delta}{4a}$, gdy $a > 0$, a wszelkie wartości nie większe od $-\frac{\Delta}{4a}$,

jeżeli $a < 0$. Wartość $-\frac{\Delta}{4a}$ przyjmuje trójmian raz tylko dla $x = -\frac{b}{2a}$. Dla wartości x , większych od $-\frac{b}{2a}$ i mniejszych od $-\frac{b}{2a}$ o tę samą liczbę, przyjmuje trójmian jednakowe wartości. (Sprawdź, obliczając wartość y dla $x = -\frac{b}{2a} + \delta$ i dla $x = -\frac{b}{2a} - \delta$ z postaci kanonicznej). Każdą wartość większą, względnie mniejszą niż $-\frac{\Delta}{4a}$, zależnie od tego, czy $a > 0$, czy $a < 0$, przyjmuje trójmian kwadratowy dwa i tylko dwa razy, a wartości x , odpowiadające tej samej wartości trójmianu, mają tę własność, że suma ich wynosi $-\frac{b}{a}$.

§ 8. Wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

1. Wykres trójmianu $y = ax^2 + bx + c$ łatwo uzyskać z wykresu trójmianu $y = x^2 + px + q$. Korzystając mianowicie z przekształcenia $y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, kreślimy najpierw parabolę $y = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, a następnie powiększamy rzędną każdego jej punktu $|a|$ razy, jeżeli $|a| > 1$, lub pomniejszamy $\frac{1}{|a|}$ razy, jeżeli $|a| < 1$. Jeżeli $a < 0$ obracamy nadto otrzymaną krzywą o 180° dokoła osi X . W ten sposób otrzymujemy wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$.

Przykład 1. Przedstawić graficznie funkcję:

$$y = 0.5x^2 - x - 1.5.$$

Przekształcamy trójmian w następujący sposób:

$$y = 0.5(x^2 - 2x - 3)$$

i kreślimy parabolę I, mającą równanie:

$$y = x^2 - 2x - 3 \text{ (fig. 7 krzywa I).}$$

Pomniejszamy rzędną każdego punktu paraboli I dwa razy i otrzymujemy wykres (krzywa II) danej funkcji.

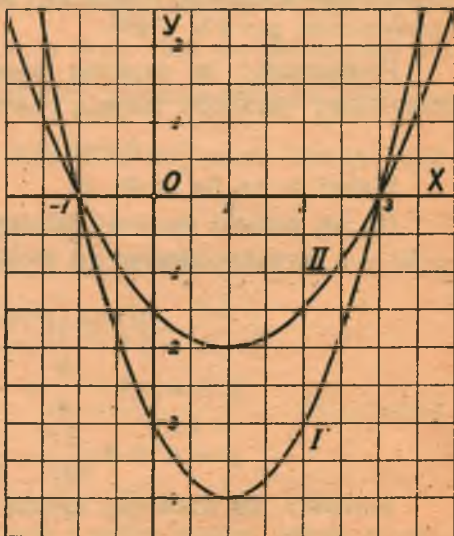


Fig. 7

Przykład 2. Przedstawić graficznie funkcję: $y = -2x^2 + 4x$.

Przekształcamy $y = -2x^2 + 4x$ w następujący sposób:

$$y = -2(x^2 - 2x).$$

Kreślimy parabolę $y = x^2 - 2x$ (krzywa I w fig. 8). Powiększamy rzędną każdego punktu krzywej I dwa razy i otrzymujemy krzywą II, mającą równanie $y = 2(x^2 - 2x)$. Kreślimy krzywą III, odpowiadającą symetrycznie krzywej II względem osi X , i ta krzywa jest wykresem danej funkcji.

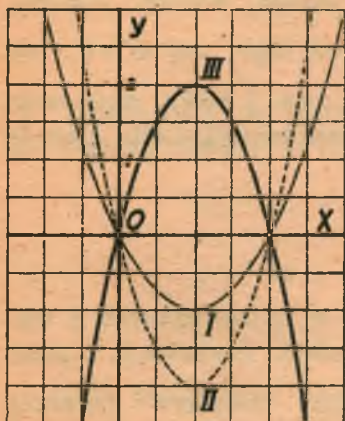


Fig. 8.

wotnej krzywej I punkt A' . Punkt A' ma odcięta $x - m$, a więc rzędną $a(x - m)^2$. Zatem i rzędna punktu A'' : $y = a(x - m)^2$. W ten sposób można obliczyć rzędną każdego punktu krzywej I'. Równaniem paraboli I' jest więc rzeczywiście: $y = a(x - m)^2$.

Przesuwając tę ostatnią parabolę o n równoległe do osi Y , otrzymamy parabolę, mającą równanie:

$$y = a(x - m)^2 + n.$$

Wykaż to na fig. 2 str. 5!

Do tej postaci możemy jednak sprowadzić trójmian $y = ax^2 + bx + c$, przekształcając go w następujący sposób:

$$\begin{aligned} y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c, \\ y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a} - c\right), \\ y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \end{aligned}$$

Widzimy, że wzór ten zgadza się z poprzednim, jeżeli:

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad n = -\frac{\Delta}{4a}. \quad \text{Zatem:}$$

Wykresem trójmianu kwadratowego: $y = ax^2 + bx + c$ jest parabola, przystająca do paraboli $y = ax^2$, mająca oś równoległą do osi Y , a wierzchołek w punkcie $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, zwrócona stroną wypukłą na dół (jeżeli $a > 0$), lub wgórę (jeżeli $a < 0$).

§ 9. Miejsca zerowe trójmianu $y = ax^2 + bx + c$. Rozkładanie na czynniki.

Z postaci kanonicznej trójmianu kwadratowego

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \text{ wynika bezpośrednio:}$$

1. Jeżeli $\Delta < 0$, to trójmian kwadratowy miejsc zerowych nie ma.

Wtedy bowiem wyrażenie w graniastym nawiasie jest sumą dwóch składników. Pierwszy z nich, jako kwadrat dwumianu, jest liczbą nieujemną; drugi $-\frac{\Delta}{4a^2}$ jest według założenia liczbą stałą, dodatnią. Suma ich jest przeto liczbą różną od zera. Ponieważ zakładamy, że $a \neq 0$, to $y \neq 0$ dla wszelkich wartości x .

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to jedynym miejscem zerowym trójmianu jest $x = -\frac{b}{2a}$.

Jeżeli bowiem $\Delta = 0$, to $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ jest iloczynem dwóch czynników, z których pierwszy $a \neq 0$, a drugi staje się zerem tylko dla $x = -\frac{b}{2a}$. Ta wartość x jest więc jedynym miejscem zerowym funkcji y .

3. Jeżeli $\Delta > 0$, to postać kanoniczną trójmianu można dalej przekształcić:

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right],$$

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right),$$

Oznaczając: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, otrzymamy wreszcie:

$$y = a (x - x_1) (x - x_2).$$

Ponieważ $a \neq 0$, to $y = 0$ wtedy i tylko wtedy, jeżeli $x = x_1$, albo $x = x_2$. Zatem:

Jeżeli $\Delta > 0$, to trójmian kwadratowy ma dwa i tylko dwa różne miejsca zerowe, wyrażone wzorami:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ostatnich wzorów można też używać do obliczenia miejsca zerowego w przypadku $\Delta = 0$. Otrzymamy wtedy: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ i mówimy, że trójmian ma dwa równe miejsca zerowe.

Z poprzednich przekształceń zapamiętać należy:

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$ da się przedstawić i to w jeden tylko sposób jako iloczyn dwóch czynników linjowych postaci: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Że rozkład taki istnieje tylko jeden wynika z następującego rozważania: Gdyby oprócz tego rozkładu istniał jeszcze drugi np. $y = a(x - x_3)(x - x_4)$, to dla $x = x_3$ funkcja y byłaby zerem. Byłoby więc według pierwszego rozkładu $a(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$. Lecz iloczyn po lewej stronie znaku równości może być zerem (wobec $a \neq 0$) tylko wtedy, jeżeli albo $x_3 = x_1$, albo $x_3 = x_2$. Podobnie dowodzimy, że albo $x_4 = x_1$, albo $x_4 = x_2$, skąd wynika identyczność obu rozkładów.

W przypadku $\Delta < 0$ rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki linjowe jest niemożliwy. Rozkład taki pociąga bowiem za sobą (jak wyżej widzieliśmy) istnienie miejsc zerowych, a w przypadku $\Delta < 0$ trójmian kwadratowy miejsc zerowych nie ma.

Jeżeli $\Delta > 0$, możemy tabelkę zmienności trójmianu kwadratowego, podaną w § 7, uzupełnić w następujący sposób:

Jeżeli $a > 0$:	x	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\nearrow$	$-\frac{b}{2a}$	$\nearrow$	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\nearrow$	$+\infty$
	y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Jeżeli $a < 0$:	x	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\nearrow$	$-\frac{b}{2a}$	$\nearrow$	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\nearrow$	$+\infty$
	y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Zważywszy, że miejsca zerowe trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$ są zarazem pierwiastkami równania $ax^2 + bx + c = 0$, otrzymujemy znaną regułę:

Aby rozwiązać równanie $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$, obliczamy wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ab$.

Jeżeli wyróżnik jest dodatni ($\Delta > 0$), to równanie ma dwa różne pierwiastki: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Jeżeli wyróżnik jest zerem ($\Delta = 0$), to równanie ma dwa równe pierwiastki: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Jeżeli wyróżnik jest ujemny ($\Delta < 0$), to równanie nie ma pierwiastka.

Jeżeli albo $b = 0$, albo $c = 0$, dochodzimy do rozwiązywania równania prościej, sposobem wyjaśnionym na następujących przykładach:

Przykład 1. Rozwiązać równanie: $4x^2 - 9 = 0$.

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 9, \\ x^2 &= \frac{9}{4}, \\ x &= \pm \sqrt{\frac{9}{4}}, \\ x_1 &= +\frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Przykład 2. Rozwiązać równanie: $3x^2 - 7x = 0$.

Wylączamy x za nawias: $(3x - 7)x = 0$.

Iloczyn po lewej stronie jest zerem, jeżeli albo $3x - 7 = 0$, albo $x = 0$.

Stąd znajdziemy: $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 0$.

§ 10. Znak trójmianu kwadratowego. Nierówności stopnia drugiego.

Jaki znak ma trójmian kwadratowy dla pewnej wartości x , można wywnioskować już z tabelek w § 7 i § 9. Wyprowadzimy jednak odnośne twierdzenia wprost z postaci kanonicznej trójmianu:

$$y = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

Znajdziemy:

1. Jeżeli $\Delta < 0$, to wyrażenie w nawiasie graniastym jest dodatnie, bo $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$, a $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Trójmian ma więc w tym przypadku dla wszelkich wartości x taki znak, jak współczynnik a .

2. Jeżeli $\Delta = 0$, to $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$.

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \text{ tylko wtedy, gdy } x = -\frac{b}{2a}.$$

Jeżeli $x \neq -\frac{b}{2a}$, to $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 > 0$, a trójmian ma taki znak, jak współczynnik a .

3. Jeżeli $\Delta > 0$, to trójmian kwadratowy można napisać w postaci (§ 9):

$$y = a (x - x_1) (x - x_2).$$

Z tej postaci trójmianu wysnuwamy wnioski:

Jeżeli $x > x_1$ i $x > x_2$, albo jeżeli $x < x_1$ i $x < x_2$, to oba czynniki $x - x_1$ i $x - x_2$ mają znaki jednakowe, a więc ich iloczyn jest

dodatni. Trójmian ma wtedy taki znak, jak a . Jeżeli zaś wartość x jest zawarta między liczbami x_1 i x_2 , to $x - x_1$ i $x - x_2$ mają znaki przeciwne, a więc ich iloczyn jest ujemny. Trójmian ma wtedy znak przeciwny znakowi współczynnika a .

Zbierając razem wszystkie wyniki, powiemy:

Trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ ma znak przeciwny znakowi współczynnika a tylko wtedy, jeżeli $\Delta > 0$, a x ma wartość, zawartą między miejscami zerowymi trójmianu; w każdym innym przypadku ma trójmian ten dla wszelkich wartości x (z wyjątkiem miejsc zerowych trójmianu) znak taki, jak współczynnik a .

Wyjaśnij to twierdzenie na wykresach trójmianu kwadratowego, różniając przypadki $\Delta \leq 0$, $a \geq 0$!

Ostatnie twierdzenie pozwala rozwiązać nierówność stopnia drugiego: $ax^2 + bx + c \geq 0$. Sposób rozwiązywania takich nierówności wyjaśnimy na przykładach:

Przykład 1. Rozwiązać nierówność: $-3x^2 + 2x - 5 > 0$.

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego, znajdującego się po lewej stronie. Znajdziemy:

$$\Delta = 4 - 60 = -56.$$

Według twierdzenia 1 trójmian ten ma dla każdej wartości x wartość ujemną. Dana nierówność nie spełnia się zatem dla żadnej wartości x .

Przykład 2. Rozwiązać nierówność: $2x^2 - 4x + 3 > 0$.

$$\text{Obliczamy: } \Delta = 16 - 24 = -8.$$

Według twierdzenia 1 dana nierówność jest spełniona dla każdej wartości x .

Przykład 3. Rozwiązać nierówność: $3x^2 + 6x + 3 > 0$.

$$\text{Ponieważ: } \Delta = 36 - 36 = 0,$$

to dana nierówność spełnia się, jeżeli $x \neq -1$.

Przykład 4. Rozwiązać nierówność: $-5x^2 + 2x + 3 > 0$.

$$\text{Obliczamy: } \Delta = 4 + 60 = 64.$$

Wyznaczamy miejsca zerowe trójmianu $-5x^2 + 2x + 3$. Znajdujemy: $x_1 = -0.6$, $x_2 = 1$.

Nierówność dana spełnia się, jeżeli: $-0.6 < x < 1$.

Przykład 5. Rozwiązać nierówność: $2x^2 - 7x + 5 > 0$.

$$\text{Obliczamy kolejno: } \Delta = 49 - 40 = 9;$$

$$x_1 = 2.5, \quad x_2 = 1.$$

Dana nierówność sprawdza się, jeżeli $x < 1$, lub jeżeli $x > 2.5$.

Przykład 6. Rozwiązać nierówność: $\frac{-2x+3}{x+5} \geq 0$.

Ponieważ iloraz dwu liczb ma zawsze taki sam znak, jak ich iloczyn, to dana nierówność jest równoważna nierówności:

$$\begin{aligned} (-2x+3)(x+5) &> 0, \text{ czyli} \\ -2x^2 - 7x + 15 &> 0. \end{aligned}$$

Rozwiązując ostatnią nierówność (rozwiąż!), znajdziemy:

Dana nierówność sprawdza się, jeżeli $-5 < x < 1\frac{1}{2}$.

Ćwiczenia.

1. Przesunąć parabolę $y = x^2$: a) o 3 równolegle do osi Y ; b) o -2 równolegle do osi Y ; c) o 2 równolegle do osi X ; d) o -3 równolegle do osi X . Znaleźć równanie paraboli w nowym położeniu.

2. Przesunąć równolegle parabolę $y = x^2$ tak, aby jej wierzchołek znalazł się w punkcie: a) $A(3, 1)$; b) $B(2, -3)$; c) $C(-3, 1)$; d) $D(-2, -3)$. Znaleźć równanie paraboli w nowym położeniu.

3. Przedstawić w postaci sumy lub różnicy dwóch kwadratów trójmiany:

a) $x^2 + 10x + 16$;	b) $x^2 + 4x + 8$;	c) $x^2 + 2x$;
d) $x^2 - 6x - 5$;	e) $x^2 - 13x + 42$;	f) $x^2 - 9x + 50\frac{1}{2}$;
g) $x^2 - 2x + \frac{3}{4}$;	h) $x^2 - 0.8x + 2.41$;	i) $x^2 + 3x + 2.25$;
j) $x^2 - 6x + 11$;	k) $x^2 + 2x - 2$;	l) $x^2 - x - \frac{1}{4}$.

4. Wyznaczyć minima i miejsca zerowe (o ile istnieją) następujących funkcji.

a) $y = x^2 - 2x + 1$;	b) $y = x^2 + 4x + 4$;	c) $y = x^2 - 4$;
d) $y = x^2 + 9$;	e) $y = x^2 + 3x + 1$;	f) $y = x^2 - 5x + 6$;
g) $y = x^2 - 4x + 5$;	h) $y = x^2 + 2x$;	i) $y = x^2 - 2x + 5$.

Sporządzić tabelki zmienności i wykresy tych funkcji.

5. Rozwiązać graficznie następujące równania i sprawdzić, otrzymany wynik rachunkiem:

a) $x^2 = 0$;	b) $x^2 - 9 = 0$;	c) $x^2 + 2x + 1 = 0$;
d) $x^2 - 6x + 9 = 0$;	e) $x^2 + 2x - 3 = 0$;	f) $x^2 - 0.5x - 5 = 0$;
g) $x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$;	h) $x^2 - 3x + 2 = 0$;	i) $x^2 + 4x + 3.75 = 0$;
j) $x^2 + 1.5x = 0$;	k) $x^2 - 2x = 0$;	l) $x^2 - 1.5x + 1 = 0$.

6. Jakie równanie będzie miała parabola $y = x^2 - 4x + 3$, gdy ją przesuniemy równolegle a) do osi Y o $+1$, b) do osi Y o -3 , c) do osi X o $+3$, d) do osi X o -2 ?

7. Uważać lewą i prawą stronę każdego z podanych niżej równań za funkcje zmiennej x i przedstawić te funkcje graficznie:

a) $x^2 = 2x + 3$;	b) $x^2 = 3x - 2$;	c) $x^2 = -x + 2$;
d) $x^2 = -2x + 1$;	e) $x^2 = 2x + 1$;	f) $x^2 = 4x$;
g) $x^2 = 4$;	h) $x^2 = 2x - 5$;	i) $x^2 = -\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$.

Jakie znaczenie mają w tych wykresach pierwiastki równań? Odczytać z rysunku ich wartości!

[Zadanie to podaje drugą metodę graficznego rozwiązywania równań].

8. Uważając lewą i prawą stronę podanych niżej równań za funkcje zmiennej x , przedstawić te funkcje graficznie:

- a) $2x^2 = -3x + 2$; b) $\frac{1}{2}x^2 = 2x - 2$; c) $-x^2 = 2x + \frac{1}{2}$;
 d) $-0.4x^2 = 0.8x - 0.5$; e) $\frac{1}{2}x^2 = x + 1.5$; f) $-2x^2 = 2x + 0.5$;
 g) $0.1x^2 = 2.5$; h) $\frac{3}{4}x^2 = 1.5x$; i) $-x^2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

Odczytać z rysunku pierwiastki równań! Sprawdzić!

9. Przedstawić następujące trójmiany kwadratowe w postaci kanonicznej, wywnioskować z tej postaci, dla jakiej wartości x trójmian osiąga maximum lub minimum, i obliczyć je:

- a) $y = x^2 - 4x + 5$; b) $y = x^2 - 3x + 2$;
 c) $y = -x^2 + 6x - 13$; d) $y = 4x^2 + 20x + 25$;
 e) $y = -2x^2 - 4x - 5$; f) $y = -x^2 - x - 2$;
 g) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$; h) $y = -2x^2 + 4$;
 i) $y = 3x^2 + 2x$; j) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$;
 k) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$; l) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 1$.

10. Wyznaczyć trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$, w którym:

- a) $a = 1$, a który dla $x = 3$ ma minimum, wynoszące -4 .
 b) $b = -1$, a który dla $x = \frac{1}{2}$ ma minimum, wynoszące $-21\frac{1}{2}$.
 c) $b = 3$, a który dla $x = 3$ ma maximum, wynoszące $\frac{1}{2}$.

11. Przesunąć równolegle parabolę

- a) $y = \frac{1}{2}x^2$ b) $y = -\frac{1}{2}x^2$

tak, aby wierzchołek jej był kolejno w punktach: $A(-2, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, -4)$, $D(-1, +3)$. Znaleźć równanie paraboli w nowym położeniu!

12. Sporządź wykresy i tabelki zmienności funkcji:.

- a) $y = 1.5x^2 - 4x + 2$; b) $y = -0.5x^2 - 1.3x + 0.6$;
 c) $y = 0.2x^2 + 2.4x + 5$; d) $y = -x^2 + 4x - 5$;
 e) $y = -\frac{2}{3}x^2 + 2x$; f) $y = -0.25x^2 + x - 1$;
 g) $y = 0.5x^2 + x$; h) $y = 4x^2 + 4x + 1$.

13. Znaleźć równanie paraboli, położonej symetrycznie względem osi X do paraboli: $y = 2x^2 - 5x + 2$. Wykres!

14. Zbadać, dla jakich wartości m przecina prosta $y = m$ parabolę: $y = -0.2x^2 + 1.4x + 3.25$.

15. Znaleźć równanie osi symetrii paraboli:

- a) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2$; b) $y = -x^2 \quad x - 5$;

stwierdzić wynik rachunkiem.

16. Wyznaczyć trójmian kwadratowy $f(x) = ax^2 + bx + c$, jeżeli:

a) $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 10$;

b) $f(-2) = 4$, $f(2) = 0$, $f(4) = -8$;

c) $f(1) = -\frac{5}{8}$, $f(2) = \frac{1}{8}$, $f(3) = -\frac{1}{2}$;

d) $f(-1) = 0$, $f(1) = 2$, $f(3) = 0$.

Obliczyć maximum lub minimum i miejsca zerowe każdego trójmianu i podać wykres.

17. a) Wyznaczyć trójmian kwadratowy, który dla $x = 5$ ma wartość 5, a dla $x = 3$ minimum, wynoszące 1. Wykres!

b) Wyznaczyć trójmian kwadratowy, dla którego -2 jest miejscem zerowym, a który dla $x = 1$ osiąga maximum, wynoszące 3. Wykres!

18. Rozłożyć na czynniki linjowe trójmiany:

a) $y = x^2 + 4x - 5$;

b) $y = x^2 - 3x + 2$;

c) $y = -x^2 + 6x - 5$;

d) $y = -x^2 + x + 2$;

e) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$;

f) $y = 4x^2 - 5x - 7$;

g) $y = -2x^2 + 2x + 4$;

h) $y = 9x^2 - 12x + 4$;

i) $y = 2x^2 - 7x + 1\frac{5}{8}$;

j) $y = -4x^2 + 11x + 10\frac{5}{8}$;

k) $y = -2x^2 - \frac{1}{8}x + 1$;

l) $y = -0\cdot1x^2 + 0\cdot4x + 4\cdot5$;

m) $y = 2x^2 - 18$;

n) $y = 12 - 3x^2$;

o) $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$;

p) $y = x^2 + 2x$;

r) $y = -3x^2 + 2x$;

s) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$.

19. Uprościć następujące ułamki, rozłożywszy na czynniki licznik i mianownik:

a) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$;

b) $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}$;

c) $\frac{x^2 - 5x}{x^2 - x - 20}$;

d) $\frac{4x^2 - 1}{6x^2 + x - 1}$;

e) $\frac{8x^2 + 2x - 3}{2x^2 + x - 1}$;

f) $\frac{3x^2 + 4x}{3x^2 + x - 4}$.

20. Rozwiązać i sprawdzić równania:

a) $(x - 4)(x - 2) = 1$;

b) $(x - 2)(x - 3) = 1$;

c) $(x + 5)(x - 7) + 16 = 0$;

d) $x^2 - 2x\sqrt{2} = 1$;

e) $x^2 - 2x\sqrt{2} + 1 = 0$;

f) $2x^2 - 2x\sqrt{6} = 3$;

g) $\frac{1}{x - 3} = 2(x - 2)$;

h) $\frac{2x}{x + 1} - \frac{x - 1}{3x} = 2$;

i) $\frac{x - 2}{x + 2} - \frac{x + 5}{x - 1} = \frac{2}{3}$;

j) $\frac{x + 3}{x + 2} - \frac{x - 3}{x + 5} = 1$.

21. Obliczyć z dokładnością do 0·01 pierwiastki równań:

a) $2x^2 - 30\cdot5x = 250$;

b) $2\cdot5x^2 - x = 32\cdot8$;

c) $x^2 - 4\cdot5x + 4\cdot4 = 0$;

d) $x^2 - 42\cdot7x + 453\cdot2 = 0$.

22. Rozwiązać równania:

a) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + x + 5) - (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 2x - 3) = 1$

b) $(x^2 - x + 1)^2 - (x^2 + x - 1)^2 = (1 - x)^2$;

c) $(x^3 - x + 2)^2 - (x^3 - x + 1)^2 = 15$;

d) $(x - 2)(x^2 + 3x - 5) - (x - 1)(x^2 - 5x + 2) = x^2$;

e) $(x + 2)^3 - (x + 1)^3 = (x + 7)^2$;

f) $\frac{9}{x-2} - 2(x-2) = 3$;

g) $9x - \frac{8}{3(x-1)} = 14$;

h) $\frac{7x^2}{3x+3} - \frac{7x}{2x+2} = x + 3$;

i) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{1}{3}$;

j) $\frac{3x-2}{x-3} + \frac{x+3}{x-1} = 1$;

k) $\frac{x+5}{x+1} - \frac{x-5}{x-1} = 3$;

l) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{2x+5}{x+1} = 2$;

m) $\frac{x+1}{x-3} - \frac{8}{2x-3} = 7$;

n) $\frac{x^2+2}{x-3} - \frac{3x+4}{x} = x + 10$;

o) $\frac{(x-2)^3}{(2x-7)^2} = \frac{x+7}{4}$;

p) $\frac{2x+0.6}{x-0.2} = \frac{3x-0.6}{2.2-x}$;

r) $(3x-7)^2 - 10\frac{1-6x}{3x+7} = (3x-5)^2 + 2$.

23. Rozwiązać równania:

a) $4\frac{x-4}{x-5} + \frac{x+1}{5-x} = 11\frac{x-5}{x+5}$;

b) $\frac{2}{x^2-1} + \frac{x-1}{4x+4} - \frac{x}{6x+6} = \frac{1}{4}$;

c) $\frac{2x-3}{x+1} - \frac{x^2-3}{x^2-x} = \frac{2x-5}{x-1}$;

d) $\frac{2x^2-3x+3}{x^2-1} - \frac{x+2}{x^2+x} = 2 - \frac{2}{x^2-x}$;

e) $x - \frac{x^2-x+1}{x+1} = \frac{14}{(x+1)^2}$;

f) $\frac{15}{(x+1)^3} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{x-2}{x+1} = 1$;

g) $\frac{4}{x} - \frac{4-x}{x+1} = 1 + \frac{2x-1}{x^2+2x+1}$;

h) $\frac{x^3}{x^3-1} - \frac{2x-1}{x^3+2x+1} = 1$;

i) $\frac{x^3-3x+6}{x^3-1} - \frac{2x-1}{x^3+2x+1} = 1$;

$$l) \frac{2}{4x^2-1} + \frac{x-3}{4x^2+4x+1} - \frac{x-5}{4x^2-4x+1} = 0;$$

$$k) \frac{3x-5}{x^2+1} - \frac{2x}{x+1} + 2 = 0;$$

$$l) \frac{x^2(x+1)}{(x-1)^2} - \frac{4x^2+9x-2}{x^2-1} = 1.$$

24. Rozwiązać następujące nierówności, względnie wykazać ich niemożliwość:

$$a) x^2 - 4x + 5 > 0;$$

$$b) x^2 - 7x + 12 < 0;$$

$$c) x^2 - 5x + 6 > 0;$$

$$d) -x^2 + 5x + 104 > 0;$$

$$e) -6x^2 + x + 15 < 0;$$

$$f) \frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 < 0;$$

$$g) -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4 < 0;$$

$$h) x^2 - 9 > 0;$$

$$i) x^2 - 4 < 0;$$

$$j) x^2 + 5 < 0;$$

$$k) x^2 + 1 > 0;$$

$$l) 3x^2 - 1 < 0;$$

$$m) x^2 - 6x > 0;$$

$$n) 4x - x^2 > 0;$$

$$o) -\frac{1}{2}x^2 + x > 0;$$

$$p) 2x^2 + 7x < 0;$$

$$r) x^2 > 2x - 1;$$

$$s) 5x - x^2 < 6;$$

$$t) x^2 < 2x;$$

$$u) 2x^2 + x > x^2 + 30;$$

$$w) 16 - x^2 > 0;$$

$$z) 4 > 9x^2.$$

25. Przedstawić graficznie lewą i prawą stronę każdej z następujących nierówności jako funkcje x i wskazać na podstawie wykresu, dla jakich wartości x nierówność jest spełniona:

$$a) x^2 < x;$$

$$b) x^2 < 4;$$

$$c) x^2 > \frac{1}{2}x + 3;$$

$$d) x^2 - 3 < 3 - x; \quad e) x^2 + x < \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}; \quad f) 2x^2 - 2 < x^2 + 4x - 5.$$

26. Rozwiązać nierówności podwójne:

$$a) x^2 - 15 < 2x < x^2 - 4x;$$

$$b) x^2 > 6x > x^2 - 2x + 15;$$

$$c) 7 < 8x - x^2 < 15;$$

$$d) -5 < x^2 - 6x < 0;$$

$$e) x^2 - 2x > 3 > 2x - \frac{1}{4}x^2;$$

$$f) 7x + 4 > 2x^2 > 4x.$$

27. Rozwiązać nierówności:

$$a) \frac{x-1}{x-7} < 0;$$

$$b) \frac{x+2}{4-x} < 0;$$

$$c) \frac{2x+1}{x-6} > 0;$$

$$d) \frac{x-3}{2x+1} < 0;$$

$$e) \frac{2x+3}{3x-12} < 0;$$

$$f) \frac{x+1}{2x+1} < 0;$$

$$g) \frac{x-9}{5-x} < \frac{2}{3};$$

$$h) \frac{x+1}{2x+5} < \frac{1}{3};$$

$$i) \frac{x-7}{2x-7} < 1;$$

$$j) \frac{3x+10}{x-4} > 2;$$

$$k) \frac{x+1}{x-1} < \frac{1}{2};$$

$$l) \frac{3x}{2x-5} < 2.$$

28. Rozwiązać następujące nierówności, badając oddzielnie znak licznika i mianownika i zaznaczając wyniki na linii liczbowej, na której przedstawione są wartości x .

$$\begin{array}{lll}
 a) \frac{4-x^2}{x^2+2x-3} > 0; & b) \frac{x^2-1}{4x-x^2} < 0; & c) \frac{x^2-4}{1-x^2} < 0; \\
 d) \frac{x^3-x-12}{x^2-2x-3} < 0; & e) \frac{4-x^2}{x^2-4x-5} > 0; & f) \frac{x^2-9}{2x-1} > 0; \\
 g) \frac{x^3+1}{4x-8} < 0; & h) \frac{x-6}{x^2-3x} < 0; & i) \frac{x^2-2}{3x+26} > 0.
 \end{array}$$

29. a) Jak zmienia się pole kwadratu w zależności od boku x ? Przedstawić tę zależność graficznie. Która część wykresu ma znaczenie geometryczne?

b) Liczbę 20 rozłożono na dwa składniki. Zbadać, jak zmienia się iloczyn tych składników ze zmianą jednego z nich. Kiedy iloczyn ten ma wartość największą? Obliczyć tę wartość!

c) Liczbę 10 rozłożono na dwa składniki. Zbadać, jak zmienia się suma a) kwadratów, b) sześciąt tych składników ze zmianą jednego z nich. Kiedy ta suma ma wartość najmniejszą? Oblicz ją!

d) Jak zmienia się pole prostokąta o bokach a ($=5$ cm) i b ($=8$ cm), jeżeli a wzrasta o x , a b o x zmniejsza się. Przedstawić zależność pola od x wykresem i wskazać, która część wykresu ma znaczenie geometryczne. (Rozróżnić przypadki $a > b$, $a = b$ i $a < b$). Kiedy prostokąt ma pole największe? Obliczyć to pole.

e) Odcinek $AB = m$ podzielono punktem C na dwie części. Na każdej z tych części jako na boku zbudowano kwadrat. Zbadać, jak zmienia się suma pól tych kwadratów ze zmianą $AC = x$. Wykres!

f) Cena diamentu jest wprost proporcjonalna do kwadratu jego masy. Jak zmienia się wartość (1000 zł) pewnego diamentu, gdy rozłamiemy go na dwie części, z których jedna wynosi $\frac{m}{n} = x$ części masy całego diamentu, w zależności od x ? Przy jakim podziale będzie miał diament wartość najmniejszą?

g) Ciało, wyrzucone pionowo w górę, porusza się tak, że odległość jego y (w m) od ziemi zależy od czasu x (w sek.) w następujący sposób: $y = -4.9x^2 + 58.8x$. Zbadać tę zależność! Po jakim czasie będzie odległość ciała od ziemi największa? Po ilu sek. spadnie ciało na ziemię?

h) Badamy ruch ciała, opisany w poprzednim zadaniu, względem szczytu wieży wysokiej na 98 m. Jak zmienia się odległość ciała od poziomu szczytu wieży? Kiedy przechodzi ciało przez ten poziom? Jaka jest największa odległość ciała od tego poziomu?

i) Wskutek zetknięcia się z atmosferą pęka meteor, a jeden jego odłamek spada wolno na ziemię w kierunku pionowym. Zbadać, jak zmienia się odległość spadającego odłamka od fali głosowej, wywołanej wybuchem. Kiedy ta odległość jest największa? Kiedy jest zerem? Kiedy odłamek wyprzedzi falę głosową?

[Przy wolnem spadaniu droga y (w metrach) jest następującą funkcją czasu x (w sek.): $y = 4.9 x^2$. Głos rozchodzi się ruchem jednostajnym z prędkością 333 m/sek].

j) Z dna szybu, głębokiego na 300 m, porusza się w górę winda ruchem jednostajnym z prędkością $5 \frac{m}{sek}$. Równocześnie z wyruszeniem windy opuszczono do szybu z góry kamień. Z badać, jak zmienia się odległość kamienia od windy.

Rozdział II.

Dyskusja równania stopnia drugiego.

§ 1. Warunek istnienia pierwiastków.

Jeżeli współczynniki równania kwadratowego zawierają liczby ogólne (*parametry*), to może się zdarzyć, że dla pewnych wartości parametrów równanie nie ma pierwiastków, dla innych wartości ma dwa pierwiastki różne lub równe. Nie wystarczy zatem w tym przypadku rozwiązać równanie według wzorów podanych w § 9 rozdz. I; należy ustalić, dla jakich wartości parametru*) znaleziony wzór daje rozwiązanie równania, a dla jakich jest bez treści.

Podobnie ma się rzecz z zagadnieniami, których rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania równania stopnia drugiego z parametrem. Tylko dla tych wartości parametru może mieć zagadnienie rozwiązanie, dla których równanie ma pierwiastki.

Badanie rozwiązalności równania sprowadza się (§ 9 rozdz. I). do badania znaku wyróżnika, który jest funkcją parametru, a więc do rozwiązania pewnej nierówności.

Następujące przykłady wyjaśniają sposób badania:

Przykład 1. Rozwiązać równanie: $x^2 - (2m - 1)x + m^2 = 0$.

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (2m - 1)^2 - 4m^2 = -4m + 1$.

Równanie ma pierwiastki tylko wtedy, jeżeli $-4m + 1 \geq 0$, czyli jeżeli $m \leq \frac{1}{4}$; a mianowicie:

Jeżeli $m < \frac{1}{4}$, to równanie ma dwa różne pierwiastki:

$$x_1 = \frac{2m - 1 - \sqrt{-4m + 1}}{2} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{2m - 1 + \sqrt{-4m + 1}}{2}.$$

Jeżeli $m = \frac{1}{4}$, to równanie ma dwa równe pierwiastki:

$$x_1 = x_2 = -\frac{1}{4}.$$

Równanie nie ma pierwiastków, jeżeli $m > \frac{1}{4}$.

*) Zajmować się będziemy tylko równaniami z jednym parametrem.

Przykład 2. Rozwiązać równanie: $\frac{1}{2}x^3 + (a-1)x + (a+3) = 0$.
Obliczamy: $\Delta = (a-1)^2 - 2(a+3) = a^2 - 4a - 5$.

Aby równanie miało pierwiastki, musi a spełniać warunek:

$$a^2 - 4a - 5 \geq 0.$$

Rozwiązując ostatnią nierówność, wzgl. równanie, znajdziemy:

Jeżeli $a < -1$, albo $a > 5$, to dane równanie ma dwa różne pierwiastki. Oblicz je!

Jeżeli $a = -1$, albo $a = 5$, to dane równanie ma dwa równe pierwiastki. Oblicz je!

Jeżeli $-1 < a < 5$, to dane równanie nie ma pierwiastków.

Przykład 3. Rozwiązać równanie:

$$(m-1)x^3 - 2(3m-2)x + 5(3m-2) = 0.$$

Wykluczamy narazie przypadek $m-1=0$, przyjmujemy więc $m \neq 1$.
Warunkiem rozwiązalności równania jest:

$$\Delta = 4(3m-2)^2 - 20(m-1)(3m-2) \geq 0.$$

Rozwiązując ostatnią nierówność (wzgl. równanie) dochodzimy do następujących wyników:

Równanie ma dwa różne pierwiastki, jeżeli $\frac{2}{3} < m < 1\frac{1}{2}$, z wykluczeniem wartości $m=1$.

Równanie ma dwa równe pierwiastki, jeżeli $m = \frac{2}{3}$, albo jeżeli $m = 1\frac{1}{2}$.

Zbadajmy wreszcie wykluczony poprzednio przypadek $m=1$. Podstawiając tę wartość w danem równaniu, otrzymamy równanie: $-2x + 5 = 0$, które ma jeden pierwiastek.

We wszystkich innych przypadkach, a więc gdy $m < \frac{2}{3}$, albo gdy $m > 1\frac{1}{2}$, równanie nie ma pierwiastków.

Przykład 4. Dana jest prosta l i koło o promieniu 5 cm , którego środek O jest oddalony od prostej l o $+3\text{ cm}$. W jakiej odległości (x) od prostej l należy wykreślić prostą m równoległą do prostej l , aby ta prosta wyznaczyła w kole cięciwę, równą danemu odcinkowi a .

(Wykreśl w zmniejszonej podziałce figurę, o której mowa w zadaniu!).

Wykreślmy z O prostą prostopadłą do l (a więc i do m), która przecinie prostą m w punkcie M . Odcinek $MO = \pm(x-3)$. Ponieważ odcinek MO , połowa cięciwy wyznaczonej przez prostą m i promień koła poprowadzony do końca tej cięciwy tworzą trójkąt prostokątny, to stosując do tego trójkąta twierdzenie Pitagorasa, otrzymamy równanie:

$$(x-3)^2 + \frac{a^2}{4} = 25, \text{ które po uporządkowaniu ma postać:}$$

$$x^2 - 6x + \left(\frac{a^2}{4} - 16\right) = 0.$$

Równanie to ma pierwiastki tylko wtedy, jeżeli:

$$\Delta = 36 - 4\left(\frac{a^2}{4} - 16\right) = 100 - a^2 \geq 0.$$

Rozwiązując ostatnią nierówność (wzgl. równanie), otrzymamy jako warunek rozwiązalności równania:

$$-10 \leq a \leq +10.$$

Gdy jednak zastanowimy się nad znaczeniem a w zagadnieniu, zauważymy, że a (długość odcinka) musi być liczbą bezwzględnie. Stąd wynika dla a nowe ograniczenie tak, że jako warunek rozwiązalności zagadnienia otrzymamy:

$$0 \leq a \leq 10.$$

Jeżeli $0 \leq a < 10$, to zadanie ma dwa rozwiązania; istnieją dwie proste równoległe do l , które wyznaczają w kole cięciwę, mającą mniej niż 10 cm.

Jeżeli $a = 10$, to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie; istnieje tylko jedna prosta równoległa do l , która wyznacza w kole cięciwę, mającą 10 cm.

Jeżeli $a > 10$, to zadanie nie ma rozwiązania; żadna prosta równoległa do l nie wyznacza w kole cięciwy, mającej więcej niż 10 cm.

§ 2. Znaki pierwiastków równania.

W bardzo wielu zagadnieniach chodzi nam o zbadanie znaków pierwiastków równania. Jest to konieczne zwłaszcza wtedy, gdy z warunków zagadnienia wynika, że niewiadoma może mieć tylko wartości dodatnie, bo wtedy tylko dodatnie pierwiastki równania stanowią rozwiązanie zagadnienia. Ze wzorów na pierwiastki równania trudno często bezpośrednio wywnioskować, czy pierwiastki te są dodatnie, czy ujemne. Wysnujemy tedy z tych wzorów pewne proste związki, które do badania znaków pierwiastków równania lepiej się nadają, niż wzory, służące do obliczania pierwiastków.

Równanie $ax^2 + bx + c = 0$ ma w przypadku, gdy $a \neq 0$ i $\Delta \geq 0$, pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Ze wzorów tych otrzymujemy:

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}. \text{ Zatem:}$$

Jeżeli $a \neq 0$ i $\Delta \geq 0$, to sumę i iloczyn pierwiastków równania kwadratowego można obliczyć zapomocą wzorów:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Na podstawie tych wzorów łatwo poznać, jakie znaki mają pierwiastki równania. Ustaliwszy mianowicie, że $\Delta \geq 0$, obliczamy iloczyn i sumę pierwiastków. Zająć mogą następujące przypadki:

1. Jeżeli okaże się, że iloczyn pierwiastków jest ujemny (t. j. $\frac{c}{a} < 0$), to równanie ma jeden pierwiastek dodatni, a drugi ujemny.

W tym przypadku zbędne jest nawet badanie znaku wyróżnika. Jeżeli bowiem $\frac{c}{a} < 0$, to także $ac < 0$, a więc $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

2. Jeżeli iloczyn pierwiastków jest dodatni (t. j. $\frac{c}{a} > 0$), to albo oba pierwiastki równania są dodatnie, albo oba ujemne. Który z tych przypadków zachodzi, na to daje nam odpowiedź znak sumy pierwiastków. Jeżeli ta suma jest dodatnia (t. j. $-\frac{b}{a} > 0$), to oba pierwiastki równania są dodatnie; jeżeli ta suma jest ujemna (t. j. $-\frac{b}{a} < 0$), to oba pierwiastki są ujemne.

Wyjaśnij, że w tym przypadku suma nie może być zerem.

3. Jeżeli iloczyn pierwiastków jest zerem (t. j. $\frac{c}{a} = 0$, czyli $c = 0$), to przynajmniej jeden pierwiastek równania jest zerem. Znak drugiego pierwiastka wskaże nam suma pierwiastków (t. j. $-\frac{b}{a}$). Gdyby i suma była zerem, to oba pierwiastki równania byłyby zerami.

Zwracamy uwagę, że gdy chodzi o badanie znaków pierwiastków równania, to zbędne jest obliczanie bezwzględnych wartości sumy i iloczynu pierwiastków; wystarczy ustalić ich znaki: Iloczyn jest dodatni, jeżeli a i c mają jednakowe znaki; w przeciwnym razie jest on ujemny. Suma jest dodatnia, jeżeli a i b mają przeciwne znaki; jeżeli a i b mają znaki jednakowe, to suma pierwiastków jest ujemna.

Nadto przypominamy, że nierówności: $\frac{m}{n} > 0$ i $mn > 0$ są równoważne.

Zastosowanie powyższych twierdzeń wyjaśnimy na przykładach.

Przykład 1. Zbadać znaki pierwiastków równania:

$$x^2 - (a - 6)x + (a + 2) = 0$$

w zależności od parametru a .

Najpierw ustalamy warunek istnienia pierwiastków. Rozwiązując nierówność:

$$\Delta = (a - 6)^2 - 4(a + 2) = a^2 - 16a + 28 \geq 0,$$

znajdziemy, że pierwiastki istnieją tylko wtedy, jeżeli:

$$a \leq 2, \text{ albo } a \geq 14.$$

Aby oba pierwiastki były dodatnie, musi być $a + 2 > 0$ i $a - 6 > 0$. Nierówności te są spełnione, jeżeli $a > 6$; uwzględniając jednak warunek istnienia różnych pierwiastków, powiemy:

Równanie ma dwa różne pierwiastki dodatnie, jeżeli $a > 14$.

Aby równanie miało dwa różne pierwiastki ujemne, muszą (obok warunku istnienia dwóch różnych pierwiastków) być spełnione nierówności: $a + 2 > 0$; $a - 6 < 0$. Z nierówności tych wynika: $-2 < a < +6$. Po uwzględnieniu warunku istnienia dwóch różnych pierwiastków znajdziemy:

Równanie ma dwa różne pierwiastki ujemne, jeżeli $-2 < a < 2$.

Aby równanie miało jeden pierwiastek dodatni, a drugi ujemny, musi być spełniona nierówność: $a + 2 < 0$, skąd wynika: $a < -2$.

Równanie ma jeden pierwiastek dodatni, a drugi ujemny, jeżeli $a < -2$.

Aby dyskusja była zupełna, należy jeszcze uwzględnić dla a wartości: -2 , $+2$, $+14$. Znajdziemy łatwo: jeżeli $a = -2$, to równanie ma jeden pierwiastek ujemny, a drugi równy 0; jeżeli $a = +2$, to równanie ma dwa równe pierwiastki ujemne; jeżeli $a = +14$, to równanie ma dwa równe pierwiastki dodatnie.

Zestawiając wyniki dyskusji, otrzymamy:

Jeżeli:	$a < -2$,	to	$x_1 < 0 < x_2$;
"	$a = -2$,	"	$x_1 < 0 = x_2$;
"	$-2 < a < +2$,	"	$x_1 < x_2 < 0$;
"	$a = 2$,	"	$x_1 = x_2 < 0$;
"	$2 < a < 14$,	"	x_1 i x_2 nie istnieją;
"	$a = 14$,	"	$0 < x_1 = x_2$;
"	$a > 14$,	"	$0 < x_1 < x_2$.

Przykład 2. Jak wysoki musi być prostokąt o podstawie a , aby powiększony o kwadrat, zbudowany na wysokości, miał pole tak wielkie, jak kwadrat o boku 3 cm?

Oznaczając literą x szukaną wysokość prostokąta, znajdziemy równanie: $ax + x^2 = 9$, które po uporządkowaniu ma postać:

$$x^2 + ax - 9 = 0.$$

Ponieważ $\Delta = a^2 + 36 > 0$, to równanie ma zawsze dwa różne pierwiastki. Błędem byłoby jednak sądzić, że i zadanie ma dwa rozwiązania. Ze znaczenia x wynika, że może ono mieć tylko wartości dodatnie; tylko dodatnie pierwiastki równania dają rozwiązanie zadania. Należy zatem zbadać, czy otrzymane równanie ma (zależnie od wartości a) pierwiastki dodatnie i w jakiej ilości. Ponieważ współczynnik przy x^2 i wyraz wolny od niewiadomej mają znaki przeciwne, to równanie ma niezależnie od wartości a jeden pierwiastek ujemny, a drugi dodatni. Chcąc otrzymać rozwiązanie danego zagadnienia, należy odrzucić pierwiastek ujemny,

a zatrzymać pierwiastek dodatni. Tak dochodzimy do wyniku, że zadanie ma dla każdej wartości a jedno rozwiązanie.

Przykład 3. Wróćmy do zadania przerobionego jako przykład 4 w § 1. Doszliśmy tam do wyniku, że w kole można wykreślić dwie cięciwy równoległe do prostej l , równe odcinkowi a , jeżeli $0 \leq a < 10$. Zbadamy teraz, jakie położenie mają te cięciwy względem prostej l w zależności od wartości a , t. j. czy leżą po tej samej stronie prostej l co środek koła, czy po przeciwnej; czy też jedna po jednej, a druga po drugiej stronie prostej l . Łatwo widzieć, że chodzi tu o zbadanie w zależności od a znaków pierwiastków równania:

$$x^2 - 6x + \left(\frac{a^2}{4} - 16\right) = 0.$$

Jeżeli $\frac{a^2}{4} - 16 < 0$, czyli $a < 8$, to pierwiastki mają znaki przeciwne.

Jeżeli $\frac{a^2}{4} - 16 = 0$, czyli $a = 8$, to jeden pierwiastek jest zerem, a drugi jest dodatni (bo $x_1 + x_2 = 6$).

Jeżeli $\frac{a^2}{4} - 16 > 0$, czyli $a > 8$, to oba pierwiastki mają znaki jednakowe. Ponieważ nadto $x_1 + x_2 = 6$, to oba pierwiastki muszą być dodatnie.

Uwzględniając warunek istnienia pierwiastków, dochodzimy do następujących wyników:

Jeżeli $0 \leq a < 8$, to istnieją dwie cięciwy, spełniające warunki zadania; cięciwy te leżą po przeciwnych stronach prostej l .

Jeżeli $a = 8$, to istnieją dwie cięciwy, spełniające warunki zadania; jedna z nich leży na prostej l , a druga po tej stronie prostej l , co środek koła.

Jeżeli $8 < a < 10$, to istnieją dwie cięciwy, spełniające warunki zadania; obie leżą po tej stronie prostej l , co środek koła.

Jeżeli $a = 10$, to istnieje tylko jedna cięciwa, spełniająca warunki zadania; leży ona po tej stronie prostej l , co środek koła.

(Wyjaśnij wynik na stosownym rysunku!).

§ 3. Położenie liczby względem pierwiastków równania.

Obecnie uogólnimy wyniki ostatniego paragrafu. Tam zbadaliśmy znaki pierwiastków równania czyli zbadaliśmy, jakie położenie ma zero względem pierwiastków równania. Teraz rozwiążemy zadanie ogólniejsze:

Z badać, jakie położenie ma dana liczba a względem pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$.

Przyjmujemy, że $\Delta > 0$, $a \neq 0$, a $x_1 < x_2$. Oznaczamy przez $f(x)$ trójmian kwadratowy, znajdujący się po lewej stronie danego równania, i myślimy sobie obliczoną wartość tego trójmianu dla $x = a$, czyli $f(a)$. Ze znaku $f(a)$ w porównaniu ze znakiem współczynnika a

i twierdzeń w § 10 rozdz. I będziemy się starali dojść, jakie położenie zajmuje a względem x_1 i x_2 .

Jeżeli $a \cdot f(a) < 0^*$, to jeden pierwiastek równania jest mniejszy, a drugi większy niż a .

Jeżeli $a \cdot f(a) > 0^{**}$, to a jest albo mniejsze od obu pierwiastków, albo większe od obu pierwiastków. Aby rozstrzygnąć, który z tych przypadków zachodzi, porównujemy a ze średnią arytmetyczną obu pierwiastków: $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{b}{2a}$, która z pewnością jest większa od mniejszego, a mniejsza od większego pierwiastka.

Jeżeli $a > -\frac{b}{2a}$, to a jest większe od obu pierwiastków; jeżeli $a < -\frac{b}{2a}$, to a jest mniejsze od obu pierwiastków.

Zestawiając wyniki i oznaczając przez x_1 mniejszy, a przez x_2 większy pierwiastek równania, otrzymamy:

Jeżeli $a \cdot f(a) < 0$, to $x_1 < a < x_2$;

„ $a \cdot f(a) > 0$ i $a > -\frac{b}{2a}$, to $x_1 < x_2 < a$;

„ $a \cdot f(a) > 0$ i $a < -\frac{b}{2a}$, to $a < x_1 < x_2$.

Gdyby było $af(a) = 0$, czyli $f(a) = 0$ (bo $a \neq 0$), to a byłoby pierwiastkiem równania. Porównanie liczby a z $-\frac{b}{2a}$ wskazałoby, czy $a = x_1$, czy $a = x_2$.

Jeżeli $\Delta = 0$, to porównujemy a bezpośrednio z $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Przykład 1. Zbadać, jakie położenie ma liczba -2 względem pierwiastków równania:

$$mx^2 - (m - 11)x + (3m + 22) = 0,$$

w zależności od różnych wartości m .

Przyjmujemy narazie, że $m \neq 0$.

Równanie ma pierwiastki tylko wtedy, jeżeli:

$$\Delta = (m - 11)^2 - 4m(3m + 22) \geq 0.$$

Rozwiązując ostatnią nierówność, znajdziemy:

$$-11 \leq m \leq +1,$$

jako warunek istnienia pierwiastków.

Aby zbadać położenie liczby -2 względem pierwiastków równania, obliczamy:

$$m \cdot f(-2) = m(4m + 2m - 22 + 3m + 22) = 9m^2 > 0.$$

*) Czytaj: a i $f(a)$ mają przeciwne znaki.

**) Czytaj: a i $f(a)$ mają jednakowe znaki.

Wobec tego liczba -2 jest dla wszelkich wartości m albo większa, albo mniejsza od obu pierwiastków (przypadek $m=0$ wykluczamy). Aby rozstrzygnąć, czy $-2 < x_1 \leq x_2$, czy $x_1 \leq x_2 < -2$, obliczamy średnią arytmetyczną pierwiastków; znajdziemy $\frac{m-11}{2m}$. Badamy dla jakich wartości m jest $\frac{m-11}{2m} > -2$, a dla jakich $\frac{m-11}{2m} < -2$. Rozwiązując ostatnie dwie nierówności, znajdziemy kolejno:

$$\frac{m-11}{2m} + 2 > 0,$$

$$\frac{m-11}{2m} + 2 < 0,$$

$$\frac{m-11+4m}{2m} > 0,$$

$$\frac{m-11+4m}{2m} < 0,$$

$$2m(5m-11) > 0,$$

$$2m(5m-11) < 0,$$

$$m < 0, \text{ albo } m > \frac{11}{5}.$$

$$0 < m < \frac{11}{5}.$$

Zestawiając te nierówności z nierównością, stanowiącą warunek istnienia pierwiastków, otrzymamy:

-2 jest mniejsze od pierwiastków równania, jeżeli $-11 \leq m < 0$;
 -2 jest większe od pierwiastków równania, jeżeli $0 < m \leq \frac{11}{5}$.

Zbadajmy wreszcie wykluczony poprzednio przypadek $m=0$. Dla tej wartości m ma równanie postać: $11x + 22 = 0$. Pierwiastkiem jego jest $x = -2$.

Przykład 2. Zbiornik można napełnić, doprowadzając wodę dwiema rurami. Do napełnienia zbiornika tylko drugą rurą potrzeba o a godzin mniej czasu, niż do napełnienia go tylko pierwszą rurą. Jeżeli obie rury są otwarte, to zbiornik napełnia się w 2 godzinach. W ilu godzinach napełni się zbiornik, gdy otwarta jest tylko pierwsza rura?

Do napełnienia zbiornika tylko pierwszą rurą potrzeba x godzin; w jednej godzinie wypełni wodą, dopływającą pierwszą rurą, $\frac{1}{x}$ część zbiornika, w 2 godzinach $\frac{2}{x}$ części. — Napełnienie zbiornika tylko drugą rurą trwa $x-a$ godzin; w jednej godzinie wypełni wodą, dopływającą drugą rurą, $\frac{1}{x-a}$ część zbiornika, w 2 godzinach $\frac{2}{x-a}$ części. — Stosownie do warunków zadania:

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{x-a} = 1.$$

Zakładając $x \neq 0$ i $x \neq a$ i uwalniając równanie od ułamka, otrzymamy:

$$x^2 - (a+4)x + 2a = 0.$$

Wyróżnik tego równania $\Delta = (a+4)^2 - 8a = a^2 + 16$ jest zawsze dodatni. Równanie ma więc zawsze dwa różne pierwiastki. Oba pier-

wiastki są zawsze dodatnie, bo ich iloczyn $2a$ i suma $a + 4$ są dodatnie (a wskutek swego znaczenia jest liczbą dodatnią).

Aby pierwiastek x równania można uważać za rozwiązanie zadania, musi on spełniać nierówność $x > a$, bo ilość wody $x - a$, dopływającą w godzinie drugą rurą, nie może być ujemną. Należy zatem zbadać, jakie położenie ma a względem pierwiastków równania i odrzucić pierwiastki mniejsze niż a . W tym celu obliczamy $f(a)$ i badamy jego znak; otrzymamy:

$$f(a) = a^3 - (a + 4)a + 2a = -2a < 0.$$

Z ostatniej nierówności wnioskujemy, że jeden pierwiastek równania jest zawsze mniejszy, a drugi większy niż a . Zatem:

Zadanie ma dla każdej dodatniej wartości a jedno rozwiązanie (większy pierwiastek równania).

§ 4. Położenie pierwiastków równania względem danego przedziału.

Na podstawie poprzednich rozważań rozwiążemy następujące zadanie:

Mając dane równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, oraz dwie liczby α i β , przyczem $\alpha < \beta$, zbadać, czy oba pierwiastki równania leżą między α i β^2 , czy tylko jeden pierwiastek równania leży w tym przedziale, czy też oba pierwiastki równania leżą poza przedziałem $\alpha \dots \beta$.

Oznaczmy, jak w poprzednim §-ie, $f(x) = ax^2 + bx + c$ i obliczmy $f(\alpha)$ i $f(\beta)$.

Jeżeli w przedziale $\alpha \dots \beta$ znajduje się tylko jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$, a drugi pierwiastek leży poza tym przedziałem, to jedna z liczb $f(\alpha)$ i $f(\beta)$ musi mieć taki znak jak a , a druga musi mieć znak przeciwny; a więc $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$. I naodwrot; jeżeli $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, to jedna z liczb $f(\alpha)$ i $f(\beta)$ musi mieć taki znak jak a , a druga ma znak przeciwny; jedna z liczb α i β leży zatem między pierwiastkami równania, a druga poza przedziałem $x_1 \dots x_2$.

Wystarczającym i koniecznym warunkiem na to, aby równanie kwadratowe $f(x) = 0$ miało jeden i tylko jeden pierwiastek między α i β , jest $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

Jeżeli oba pierwiastki równania leżą w przedziale $\alpha \dots \beta$, to $af(\alpha) > 0$ i $af(\beta) > 0$, a nadto $\alpha < -\frac{b}{2a} < \beta$ (§ 3). Naodwrot wnioskujemy na podstawie twierdzeń w § 3 z warunków:

$af(\alpha) > 0$ i $a < -\frac{b}{2a}$, że $a < x_1 < x_2$, a z warunków $af(\beta) > 0$ i $\beta > -\frac{b}{2a}$, że $x_1 < x_2 < \beta$, jeżeli x_1 oznacza mniejszy, a x_2 większy pierwiastek równania.

Wystarczającym i koniecznym warunkiem na to, aby równanie kwadratowe $f(x) = 0$ miało dwa pierwiastki w przedziale $a \dots \beta$, jest: $af(\alpha) > 0$, $af(\beta) > 0$ i $a < -\frac{b}{2a} < \beta$.

Z tych twierdzeń wynika, że oba pierwiastki równania leżą poza przedziałem $a \dots \beta$, jeżeli: 1. $af(\alpha) < 0$, $af(\beta) < 0$; 2. $af(\alpha) > 0$, $af(\beta) > 0$, $a < \beta < -\frac{b}{2a}$; 3. $af(\alpha) > 0$, $af(\beta) > 0$, $-\frac{b}{2a} < a < \beta$. Wykaż, że wtedy: 1. $x_1 < a < \beta < x_2$; 2. $a < \beta < x_1 < x_2$; 3. $x_1 < x_2 < a < \beta$.

Przykład 1. Na odcinku mającym 10 cm zbudowano jako na przeciwprostokątnej trójkąt prostokątny, w którym rzut x większej przyprostokątnej na przeciwprostokątną różni się o m od wysokości wykreślonej z wierzchołka kąta prostego. Obliczyć x !

Rzuty przyprostokątnych na przeciwprostokątną wynoszą x i $10 - x$, a wysokość $x - m$. Stosując znane z geometrii twierdzenie, otrzymamy: $(x - m)^2 = (10 - x)x$, a po uporządkowaniu:

$$2x^2 - 2(m + 5)x + m^2 = 0.$$

Równanie ma pierwiastki tylko wtedy, jeżeli:

$$\Delta = 4(m + 5)^2 - 8m^2 = -4m^2 + 40m + 100 \geq 0, \text{ czyli gdy:} \\ -5(\sqrt{2} - 1) \leq m \leq 5(\sqrt{2} + 1).$$

Aby jednak pierwiastki równania dawały zarazem rozwiązanie zadania, musi być spełniony cały szereg warunków dodatkowych. I tak: 1. Ponieważ x oznacza rzut większej przyprostokątnej, to x musi spełniać nierówność: $5 < x < 10$. 2. Ponieważ $x - m$ oznacza wysokość trójkąta, musi być $x - m > 0$ czyli $x > m$.

Chodzi więc o znalezienie, dla jakich wartości x oba powyższe warunki są spełnione.

1. Aby zbadać kiedy $5 < x < 10$, obliczamy:

$$f(5) = 50 - 10(m + 5) + m^2 = m^2 - 10m;$$

$$f(10) = 200 - 20(m + 5) + m^2 = m^2 - 20m + 100 = (m - 10)^2.$$

Ponieważ $f(10) > 0$ dla każdej wartości m , badamy, jaki znak ma $f(5) = m^2 - 10m$. Rozwiązując nierówności: $m^2 - 10m < 0$ i $m^2 - 10m > 0$, znajdziemy:

$$f(5) < 0, \text{ jeżeli } 0 < m < 10;$$

$$f(5) > 0, \text{ jeżeli } m < 0, \text{ albo } m > 10.$$

Równanie ma jeden tylko pierwiastek w przedziale $5 \dots 10$, jeżeli $f(5)f(10) < 0$, czyli gdy $0 < m < 10$. Ponieważ wtedy $f(5) < 0$,

a $f(10) > 0$, wnioskujemy, że większy pierwiastek równania leży w tym przedziale.

Aby równanie miało w przedziale $5 \dots 10$ dwa pierwiastki, musi być według ostatniego twierdzenia równocześnie:

$$\begin{aligned} f(5)f(10) > 0 & \quad \text{i} \quad 5 < \frac{m+5}{2} < 10, \text{ czyli:} \\ m < 0 \text{ albo } m > 10 & \quad \text{i} \quad 5 < m < 15. \end{aligned}$$

Jeżeli dołączymy do tego warunek istnienia pierwiastków równania, poznamy, że wszystkie warunki są spełnione, jeżeli:

$$10 < m \leq 5(\sqrt{2} + 1).$$

Wtedy równanie ma w przedziale $5 \dots 10$ dwa pierwiastki.

2. Zbadajmy wreszcie, kiedy $x > m$. Obliczamy:

$$f(m) = 2m^2 - 2(m+5)m + m^3 = m^3 - 10m.$$

Aby istniał jeden tylko pierwiastek równania większy niż m , musi być (§ 3):

$$f(m) = m^3 - 10m < 0, \text{ czyli } 0 < m < 10.$$

Zaznaczamy, że wtedy większy pierwiastek równania odpowiada warunkowi $x > m$.

Aby istniały dwa pierwiastki większe niż m , muszą być spełnione równocześnie nierówności:

$$\begin{aligned} f(m) > 0 & \quad \text{i} \quad m < \frac{m+5}{2}, \text{ czyli:} \\ m < 0, \text{ albo } m > 10 & \quad \text{i} \quad m < 5. \end{aligned}$$

Warunki te są spełnione, jeżeli $m < 0$.

Zestawiając warunki, które musi spełniać m , aby było równocześnie $5 < x < 10$ i $x > m$, otrzymamy:

Dane zadanie ma jedno rozwiązanie, jeżeli $0 < m < 10$; znajdziemy je, obliczając większy pierwiastek równania: $2x^2 - 2(m+5)x + m^3 = 0$. Jeżeli nierówność $0 < m < 10$ nie jest spełniona, to zadanie jest nierozwiązalne.

Ten prosty przykład wskazuje, że zagadnienie geometryczne nie jest jeszcze bynajmniej rozwiązane, jeżeli ułożymy i rozwiążemy równanie, które szukana wielkość ma spełniać. Równanie stanowi tylko warunek konieczny, który szukana wielkość musi spełniać; warunek ten często nie jest jednak wystarczający. Szukana wielkość musi spełniać jeszcze warunki dodatkowe, nie uwzględnione przy układaniu równania, które zwykle dają się ująć w postać pewnych nierówności. Warunki te w każdym zadaniu są inne; trudno więc tu podać ogólnie obowiązujące przepisy. W zadaniach geometrycznych zwrócić należy przede wszystkim uwagę na to, że wszelkie odcinki, o których mowa jest w temacie, a nadto odcinki, które wprowadzamy przy układaniu równania, muszą

być dodatnie. (Stąd np. w ostatnim zadaniu warunek: $x - m > 0$). Często sam temat narzuca pewne ograniczenia. Tak np. w ostatnim zadaniu żąda się, aby x oznaczało rzut większej przyprostokątnej; jeżeli szukany odcinek ma być bokiem trójkąta, to musi być spełniony warunek, że suma dwóch boków jest większa, a różnica mniejsza od trzeciego boku i t. p. Często warunek taki jest już spełniony, gdy spełnione jest równanie; a wtedy warunek taki można pominąć. Tak np. przyjąwszy w ostatnim zadaniu warunek $x > 5$, a więc i $x > 0$, można pominąć warunek: $x < 10$; równanie bowiem $(x - m)^2 = x(10 - x)$ wskazuje, że skoro $x > 0$, to wobec tego, że lewa strona jest dodatnia, musi być też $10 - x > 0$, a więc $x < 10$. Pamiętać jednak należy, że dodanie warunku, który jest już spełniony, gdy spełnione jest równanie, nie prowadzi do fałszywego wyniku; pominięcie natomiast istotnego warunku daje rozwiązanie przynajmniej niezupełne, jeżeli nie błędne.

§ 5. Zestawienie i geometryczne przedstawienie poprzednich wyników.

Podajemy jeszcze geometryczną interpretację twierdzeń, podanych w §§ 3 i 4; ułatwia ona nadzwyczaj zapamiętanie wyników badań tam przeprowadzonych.

Fig. 9 a) i b) przedstawiają wykresy trójkmianu kwadratowego $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $a > 0$ (fig. 9 a) i dla $a < 0$ (fig. 9 b) przy założeniu $\Delta > 0$. Punkty na osi X oznaczono liczbami, które im odpowiadają; oś Y w rysunku opuszczono. Miejsca zerowe trójkmianu $y = f(x)$, a więc pierwiastki równania $f(x) = 0$, oznaczono x_1 i x_2 i przyjęto $x_1 < x_2$. Zaznaczono również w figurze średnią arytmetyczną pierwiastków $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{b}{2a}$.

1. Liczba jakaś a może zająć względem pierwiastków następujące położenia: 1) $a < x_1 < x_2$ (punkt r w fig. 9), 2) $a = x_1 < x_2$ (punkt x_1), 3) $x_1 < a < x_2$ (punkt s), 4) $x_1 < x_2 = a$, (punkt x_2), 5) $x_1 < x_2 < a$ (punkt t).

Każdej wartości a odpowiada pewna wartość funkcji $f(a)$, przedstawiona w fig. 9 rzędną, wykreśloną z odpowiedniego punktu. Ze znaku

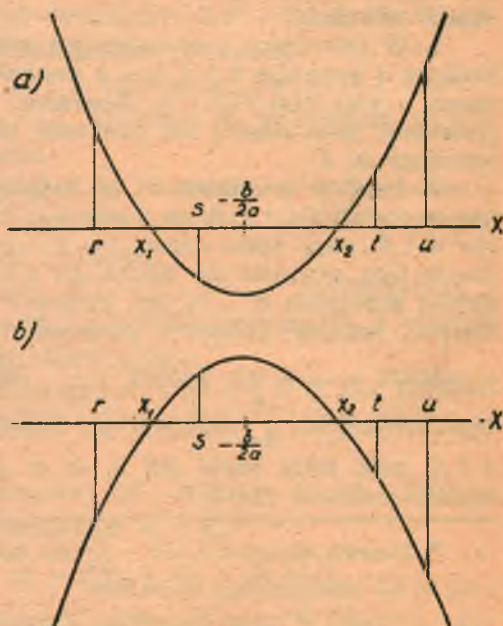


Fig. 9.

rzędnej i położenia a względem pierwiastków równania i ich średniej arytmetycznej $-\frac{b}{2a}$ znajdujemy:

Jeżeli $a < x_1 < x_2$, to $af(a) > 0$ i $a < -\frac{b}{2a}$;

„ $a = x_1 < x_2$, „ $af(a) = 0$ i $a < -\frac{b}{2a}$;

„ $x_1 < a < x_2$, „ $af(a) < 0$ i $a \geq -\frac{b}{2a}$;

„ $x_1 < x_2 = a$, „ $af(a) = 0$ i $a > -\frac{b}{2a}$;

„ $x_1 < x_2 < a$, „ $af(a) > 0$ i $a > -\frac{b}{2a}$.

Założenia powyższych twierdzeń zawierają wszystkie możliwe, wykluczające się wzajemnie związki między a a $x_1 < x_2$. Również i wnioski zawierają wszystkie możliwe, wykluczające się wzajemnie połączenia związków $af(a) \geq 0$ i $a \geq -\frac{b}{2a}$ *). Powyższe twierdzenia można zatem od-

wrócić. Uczynić to pisemnie i wyraż słowami, po należytem uporządkowaniu!

II. Pomijając szczegółowe badanie wszelkich możliwych przypadków położenia przedziału $a \dots \beta$ (gdzie a i β oznaczają takie dwie dowolne liczby, że $a < \beta$) względem przedziału $x_1 \dots x_2$, omówimy szczegółowo tylko dwa przypadki: 1. W przedziale $a \dots \beta$ znajduje się jeden tylko pierwiastek równania. 2. W przedziale $a \dots \beta$ znajdują się oba pierwiastki równania.

1. W pierwszym przypadku (jak widać w fig. 9) mają rzędne, wykreślone z punktów a i β (np. z punktów r i s , albo s i t), znaki przeciwnie, a więc $f(a)f(\beta) < 0$. Naodwrot; jeżeli dwie rzędne mają znaki przeciwnie, musi między ich punktami przecięcia się z osią X parabola przecinać oś X .

2. Jeżeli w przedziale $a \dots \beta$ znajdują się oba pierwiastki równania (np. w przedziale $r \dots t$), to (patrz fig. 9!) rzędne wykreślone z punktów a i β mają takie znaki, jak a czyli $af(a) > 0$ i $af(\beta) > 0$. Twierdzenia tego odwrócić nie można, bo a i β mogłyby także leżeć po jednej stronie przedziału $x_1 \dots x_2$ (np. punkty t i u). Aby mieć pewność, że tak nie jest, badamy położenie punktów a i β względem jakiegoś punktu przedziału $x_1 \dots x_2$ np. punktu $-\frac{b}{2a}$. Jeżeli $-\frac{b}{2a}$ leży między a i β , czyli jeżeli $a < -\frac{b}{2a} < \beta$, a $f(a)$ i $f(\beta)$ (rzędne wykreślone z punktów a i β) mają takie znaki jak a , to w przedziale $a \dots \beta$ leżą oba pierwiastki równania $f(x) = 0$.

*) Związki $af(a) \geq 0$ i $a = -\frac{b}{2a}$ nie mogą istnieć równocześnie, jak wynika z fig. 9, lub następującego obliczenia:

$$af\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) = -\frac{1}{4}(b^2 - 4ac) = -\frac{1}{4}\Delta < 0.$$

Ćwiczenia.

1. Jaki warunek musi spełniać parametr m następującego równania, aby to równanie miało jeden pierwiastek lub dwa pierwiastki:

a) $mx^2 - (m-2)x + \frac{1}{4}(m+2) = 0$;

b) $x^2 + (2m-3)x + (m-2)^2 = 0$;

c) $x^2 - 3mx + 4 = 0$;

d) $x^2 - 6x + m^2 = 0$;

e) $(m-1)x^2 + (2m-1)x - 1 = 0$;

f) $x^2 - 2(m-2)x + 4 = 0$;

g) $x^2 - (3m-1)x - m^2 = 0$;

h) $x^2 - mx + (m + \frac{3}{4}) = 0$;

i) $x^2 - 2(m-1)x + (2m^2 - 7) = 0$;

j) $8mx^2 - 4(m-1)x + (2m+1) = 0$;

k) $(8m+1)x^2 + 8(2m+1)x + 16m = 0$;

l) $mx^2 + (3m-2)x + (2m-1\frac{1}{2}) = 0$.

2. Wyznaczyć współczynniki a , b i c w równaniu $ax^2 + bx + c = 0$ tak, aby spełnione były następujące warunki:

a) $a=2$, $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 1$;

b) $a=1$, $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$;

c) $b=2$, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$;

d) $b=1$, $x_1 = 0$, $x_2 = -5$;

e) $c=8$, $x_1 = 4$, $x_2 = -6$;

f) $c=1$, $x_1 = 10$, $x_2 = 0.1$.

[x_1 i x_2 oznaczają tu pierwiastki równania].

3. a) Różnica pierwiastków równania: $2x^2 - 5x + c = 0$ wynosi 2. Obliczyć c . Rozwiązać otrzymane równanie.

b) Między pierwiastkami x_1 i x_2 równania: $6x^2 + 11x + c = 0$ zachodzi związek: $3x_1 - 2x_2 = 7$. Obliczyć c ! Sprawdzić wynik, rozwiązując znalezione równanie.

c) Jaką wartość musi mieć b w równaniu $x^2 + bx + 8 = 0$, aby jeden pierwiastek tego równania wynosił -4 ? Sprawdzić przez rozwiązanie otrzymanego równania.

d) Wyznaczyć w równaniu: $x^2 + bx + 2 = 0$ współczynnik b tak, aby równanie to miało dwa dodatnie pierwiastki, z których jeden byłby dwa razy większy od drugiego.

e) Jeden pierwiastek równania $2x^2 + bx + c = 0$ jest odwrotnością drugiego, oba pierwiastki są dodatnie, a różnica ich wynosi $1\frac{1}{2}$. Obliczyć b i c !

4. a) Nie rozwiązując równania: $x^2 - 2.35x - 5 = 0$, obliczyć następujące funkcje jego pierwiastków x_1 i x_2 :

$$x_1 x_2, \quad x_1^2 + x_2^2, \quad x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \quad x_1^3 + x_2^3.$$

[Wypisać każdą z tych funkcji zapomocą sumy i iloczynu pierwiastków; np. $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2$].

b) Nie rozwiązując równania: $x^2 - 6x + 7 = 0$ obliczyć następujące funkcje jego pierwiastków x_1 i x_2 :

$$2x_1 - x_1x_2 + 2x_2, \quad x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2, \quad x_1^2x_2 + x_1x_2^2, \quad (x_1 - x_2)^2.$$

c) Wyrazić za pomocą współczynników a , b i c równania, $ax^2 + bx + c = 0$, przy czym $b^2 - 4ac \geq 0$, następujące funkcje jego pierwiastków x_1 i x_2 :

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2, \quad x_1^3 + x_2^3, \quad x_1^2x_2 + x_1x_2^2, \quad (x_1 - x_2)^2, \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2; \\ & \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}, \quad \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2. \end{aligned}$$

5. Wyróżniki podanych niżej równań są dodatnie. Rozstrzygnąć, nie rozwiązując równań, jakie znaki mają ich pierwiastki:

- a) $7x^2 - 12.3x + 4 = 0$; b) $2x^2 + 3.4x + 0.3 = 0$;
 c) $-3x^2 + 1.2x + 15.3 = 0$; d) $-3x^2 - 2.3x + 4 = 0$;
 e) $-x^2 + 6.8x - 1 = 0$; f) $3.2x^2 - 6.2x - 8.3 = 0$;
 g) $x^2 - 2.7x = 0$; h) $4.5x - 2x^2 = 0$.

6. Ustalić warunki istnienia pierwiastków podanych niżej równań i zbadać znaki pierwiastków zależnie od wartości parametru (m , a). Zaznaczyć następnie na linii liczbowej, przedstawiającej wartości parametru, obszary, w których znajdują się wartości parametru, dla których równanie ma: dwa pierwiastki dodatnie, dwa pierwiastki ujemne, dwa pierwiastki o różnych znakach. Jakim wartościom pierwiastków odpowiadają punkty odgraniczające owe obszary?

- a) $x^2 + 3x - a(a - 3) = 0$; b) $x^2 - (a - 1)x - 2a(3a - 1) = 0$;
 c) $x^2 - 4ax + 1 = 0$; d) $x^2 + 2(3a - 1)x + (3a + 11) = 0$;
 e) $x^2 - 2(a - 2)x - 4a = 0$; f) $\frac{1}{2}x^2 - (2a + 3)x + (6a + 5) = 0$;
 g) $(a + 1)x^2 - 4ax + (a + 1) = 0$;
 h) $5ax^2 - 2(3a + 5)x + (5a + 6) = 0$;
 i) $(m + 10)x^2 - 34x + (31 - 2m) = 0$;
 j) $x^2 + (3m - 1)x + (m - 1)^2 = 0$;
 k) $mx^2 - 2(m - 1)x + (2m + 1) = 0$;
 l) $(m - 1)x^2 - (m + 1)x + (m + 1) = 0$.

7. Nie rozwiązując podanych niżej równań, zbadać, jakie położenie mają liczby, wymienione obok każdego równania, względem pierwiastków równania (t. j. zbadać, czy liczby te są większe, czy mniejsze od pierwiastków, czy leżą między nimi):

- a) $x^2 - 7x + 10 = 0$; 1, 3, 8; b) $2x^2 - 5x - 3 = 0$; 0, 1, 2, 4;
 c) $x^2 - 4x - 4 = 0$; -1, 0, 4, 5; d) $9x^2 - 54x + 65 = 0$; 1, 2, 4, 5;
 e) $10x^2 - 17.1x - 12.15 = 0$; -1, 0, 2, 3;
 f) $x^2 + 8.3x + 17.1 = 0$; 0, -3, -4, -5.

8. Jaki warunek spełniać musi parametr (m, a), aby podane niżej równanie miało dwa pierwiastki, z których jeden byłby większy, a drugi mniejszy niż podana obok równania liczba:

- a) $x^2 - 5x + a = 0$; 4; b) $x^2 - 6x + (a + 5) = 0$; 5;
 c) $x^2 - ax + (3a - 5) = 0$; 4; d) $x^2 - 4x - m^2 = 0$; 5;
 e) $x^2 - (m + 2)x + (m^2 - 4) = 0$; 2;
 f) $x^2 - (m + 5)x + (m + 1)^2 = 0$; 2;
 g) $4x^2 - 5x - 3 = 0$; $m + 1$; h) $x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0$; m .

9. Jaki warunek musi spełniać parametr (m, a), aby dane niżej równanie miało oba pierwiastki mniejsze od podanej obok niego liczby:

- a) $x^2 - 6x - a = 0$; 5; b) $x^2 + mx - (m - 3) = 0$; 2;
 c) $x^2 - (a + 1)x + (a - 1) = 0$; 3;
 d) $\frac{1}{2}x^2 + (m + 1)x + (m^2 - 7) = 0$; -2;
 e) $x^2 - 3x + 1 = 0$; $a - 1$; f) $x^2 - 2(a - 1)x + 4a^2 = 0$; $2a$.

10. Jaki warunek musi spełniać parametr (m, a), aby dane niżej równanie miało oba pierwiastki większe od liczby wymienionej obok równania:

- a) $x^2 - 4x + a = 0$; 1; b) $x^2 - (a + 1)x - 9 = 0$; -3;
 c) $x^2 - (a - 2)x + a^2 = 0$; -2; d) $\frac{1}{2}x^2 - mx + (m^2 - 9) = 0$; 4;
 e) $x^2 - 6x + 3 = 0$; $2 - m$; f) $x^2 - mx + \frac{1}{4} = 0$; $m - 2$.

11. Z równań w zadaniach 8a, 8b, 9a, 10a wyrazić a jako funkcję x , przedstawić tę funkcję graficznie (a rzędna, x odcięta) i podać interpretację geometryczną wyników tych zadań.

12. a) Ile pierwiastków większych niż $\frac{1}{2}$ ma równanie: $x^2 - 3x + a = 0$ zależnie od wartości a ? Przedstawić a jako funkcję x , sporządzić wykres (x odcięta, a rzędna) i wyjaśnić na nim otrzymane wyniki.

b) Ile pierwiastków mniejszych niż 2 ma równanie: $x^2 - 2ax + a = 0$ zależnie od wartości a ?

c) Ile pierwiastków mniejszych niż 1 ma równanie: $x^2 - (a + 1)x + a^2 = 0$ zależnie od wartości a ?

d) Ile pierwiastków większych niż -1 ma równanie: $x^2 - 2(a - 2)x + (a - 2) = 0$ zależnie od wartości a ?

e) Ile pierwiastków większych niż 2 ma równanie: $ax^2 - 4x + a = 0$ zależnie od wartości a ?

13. Ustalić warunki istnienia pierwiastków podanych niżej równań i zbadać, jak zależy od wartości parametru (m) położenie pierwiastków równania względem każdej z liczb, wymienionych obok równania. Przedstawić następnie wartości parametru na linii liczb.

bowej i zaznaczyć przedziały, zawierające wartości parametru, dla których: α) oba pierwiastki równania są większe niż dana liczba, β) mniejsze niż dana liczba, γ) jeden pierwiastek jest mniejszy, a drugi większy niż dana liczba. Zbadać, jakie pierwiastki równania odpowiadają wartościom parametru, odgraniczającym owe przedziały:

- a) $x^2 - 4x - m = 0$; 1; 5; b) $x^2 - 6x - (m - 8) = 0$; 1; $3\frac{1}{2}$;
 c) $\frac{1}{2}x^2 + (m + 1)x + m^2 = 0$; -2 ; $+2$;
 d) $mx^2 - 6x - (m - 8) = 0$; 8;
 e) $x^2 - 2(m - 1)x + (2m + 1)^2 = 0$; -2 ;
 f) $m^2x^2 - (m + 2)x + 1 = 0$; 1; g) $x^2 - mx + 1 = 0$; 2; m ;
 h) $x^2 + mx - (m + 3)^2 = 0$; 4; m ;
 i) $x^2 - (5m - 2)x + (2m + 1)^2 = 0$; m .

14. Interpretować geometrycznie wyniki zadań 13a i 13b, przedstawiając graficznie m jako funkcję x .

15. Nie rozwiązując podanych niżej równań, zbadać, czy w przedziałach wymienionych obok każdego równania są zawarte oba pierwiastki tego równania, czy jeden tylko, czy żaden:

- a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; $(-1 \dots +1)$; $(-1 \dots -2)$;
 b) $2x^2 - 7.9x + 7.7 = 0$; $(2 \dots 3)$; $(-1 \dots +4)$;
 c) $x^2 - 4.9x + 4.9 = 0$; $(2 \dots 3)$; $(-1 \dots +1)$;
 d) $x^2 - 4x - 1 = 0$; $(1 \dots 2)$; $(-2 \dots 5)$;
 e) $3x^2 - 19.9x + 30.1 = 0$; $(3 \dots 4)$; $(0 \dots 3)$;
 f) $2x^2 - 18.8x + 22.09 = 0$; $(0 \dots 4)$; $(4 \dots 5)$.

16. Zbadać, ile pierwiastków ma każde z następujących równań w przedziale, podanym obok każdego równania, zależnie od wartości parametru (m , a):

- a) $x^2 + 4x + m^2 = 0$; $(-1 \dots +1)$;
 b) $x^2 - 6x + a = 0$; $(2 \dots 7)$;
 c) $x^2 - 2x - (a + 3) = 0$; $(-2 \dots +2)$;
 d) $x^2 + mx + 9 = 0$; $(-1 \dots +1)$;
 e) $x^2 - ax + (a + 3) = 0$; $(-2 \dots +1)$;
 f) $ax^2 - 2x + (a - 1) = 0$; $(-1 \dots +1)$;
 g) $3x^2 + (a + 3)x + \frac{1}{3}a^2 = 0$; $(-1 \dots +1)$;
 h) $x^2 - 2x + a = 0$; $(a \dots a + 2)$;
 i) $x^2 - ax + a = 0$; $(a - 5 \dots a)$;
 j) $x^2 - (a - 2)x - 1 = 0$; $(a - 6 \dots a)$.

17. Podać interpretację geometryczną wyników zadania 16b, 16c, 16h, przedstawiając a jako funkcję x .

18. a) Znaleźć liczbę, której kwadrat jest o a mniejszy od trzykrotności tej liczby.

b) Dany odcinek a podzielić na takie dwie części, aby prostokąt, mający boki tak wielkie jak te części, miał pole 25 cm^2 .

c) Dany odcinek 6 cm podzielić na takie dwie części, aby prostokąt zbudowany z tych części miał pole $m \text{ cm}^2$.

d) Jaki związek zachodzi między wysokością w trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej 10 cm , a rzutem x przyprostokątnej na przeciwprostokątną. Jaki warunek musi spełniać w , aby x istniało?

e) Jedna przyprostokątna w trójkącie prostokątnym wynosi 6 cm , a druga 2 cm . Prostokąt ma z tym trójkątem wspólny kąt prosty, a wierzchołek prostokąta, przeciwległy wierzchołkowi wspólnego kąta prostego, leży na przeciwprostokątnej trójkąta. a) Zbadać, jak zmienia się pole prostokąta w zależności od jego podstawy. (Wykres!) Kiedy pole to jest największe? β) Jak wielka musi być podstawa prostokąta, aby pole jego wynosiło $m \text{ cm}^2$? Jaki warunek musi spełniać m , aby zadanie było możliwe?

f) W prostokątny trójkąt równoramienny o przeciwprostokątnej 10 cm wpisano prostokąt w taki sposób, że jeden bok leży na przeciwprostokątnej, a końce przeciwległego boku na przyprostokątnych. a) Zbadać, jak zależy pole prostokąta od różnicy x przeciwprostokątnej i boku prostokąta leżącego na niej. (Wykres!). β) Mając dane pole $m \text{ cm}^2$ prostokąta, obliczyć różnicę x przeciwprostokątnej i boku prostokąta leżącego na niej. Dla jakich wartości m jest zadanie możliwe ($0 < x < 10$)? Ile ma rozwiązań?

g) W trójkąt równoramienny o podstawie 6 cm , a wysokości 12 cm wpisano drugi trójkąt równoramienny, którego wierzchołek leży w środku podstawy pierwszego trójkąta, a końce podstawy na ramionach pierwszego trójkąta. a) Zbadać, jak zależy pole drugiego trójkąta, od jego wysokości. (Wykres!). β) Mając dane pole $m \text{ cm}^2$ drugiego trójkąta, obliczyć jego wysokość x . Dla jakich wartości m jest zadanie możliwe ($0 \leq x \leq 12$)? Ile ma rozwiązań?

h) Na kwadracie o boku $a = 1 \text{ cm}$ ma być opisany trójkąt równoramienny w taki sposób, aby podstawa kwadratu leżała na podstawie trójkąta, i aby końce boku kwadratu, przeciwległego podstawie, leżały na ramionach trójkąta. Jak wysoki musi być trójkąt, aby pole jego było k razy większe od pola kwadratu? Jaki warunek musi spełniać k , aby zadanie było możliwe? Jaka wysokość odpowiada najmniejszej wartości k ?

i) W trójkącie prostokątnym ABC (kąt prosty przy A), w którym $AB = 4 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$, obrano na BC punkt M w odległo-

ści x od C (tak, że $CM = x$). Obliczyć x , wiedząc, że prostokąt, którego bokami są odległości punktu M od obu przyprostokątnych, ma pole $m \text{ cm}^2$. Dla jakich wartości m jest zadanie możliwe ($0 \leq x \leq 5$)? Ile ma wtedy rozwiązań? Obliczyć x , odpowiadające największej wartości m .

j) W prostokącie $ABCD$ o podstawie $AB = 4 \text{ cm}$, a wysokości $AD = 3 \text{ cm}$ wykreślono przekątną AC . Na boku AB obrano punkt M w odległości x od A (tak, że $AM = x$); przez punkt M wykreślono równoległą do AD , która przecina bok CD w punkcie N , a przekątną AC w punkcie X . a) Zbadać, jak zmienia się suma pól trójkątów AMX i CNX ze zmianą x . b) Jak wielkie musi być x , aby suma pól trójkątów AMX i CNX wynosiła $m \text{ cm}^2$? Dla jakich wartości m jest zadanie możliwe ($0 \leq x \leq 4$)?

k) W prostokącie, którego podstawa wynosi 3 cm , a wysokość 4 cm , wykreślono przekątną i prostą równoległą do podstawy w odległości x od podstawy. Ta ostatnia prosta dzieli wraz z przekątną prostokąt na dwa trójkąty i dwa trapezy. a) Wyznaczyć x tak, aby różnica pól obu trapezów i pól obu trójkątów wynosiła $m \text{ cm}^2$. b) Wyznaczyć x tak, aby stosunek sumy pól trapezów do sumy pól trójkątów wynosił k . Jakie warunki musi spełniać m , a jakie k , aby zadanie było możliwe ($0 \leq x \leq 4$)?

l) Po przekątnej AC prostokąta $ABCD$, w którym $AB = 4 \text{ cm}$, a $BC = 3 \text{ cm}$, porusza się punkt M od A do C . Oznaczywszy literą x odległość od A rzutu M' punktu M na bok AB (a więc $AM' = x$), obliczyć x , jeżeli: a) suma kwadratów odległości punktu M od boków AB i CD wynosi m ; b) suma kwadratów odległości M od boków AB i AD wynosi n ; c) iloczyn odległości M od AB i CD wynosi k . Zbadać, jakie warunki spełniać muszą liczby m , n , k , aby zadanie było możliwe ($0 \leq x \leq 4$).

m) Na prostej l spoczywa podstawa $2r$ trójkąta równoramiennego o wysokości $2r$ i koło o promieniu r , stykające się z prostą l . Obie figury przecięto prostą m równoległą do l , a oddaloną od niej o x . a) Zbadać, jak zmienia się różnica kwadratów odcinków prostej m , zawartych wewnątrz koła i wewnątrz trójkąta, w zależności od x . b) Mając daną różnicę d kwadratów tych odcinków, obliczyć x . Dla jakich wartości d jest zadanie możliwe i ile ma rozwiązań?

n) Dany jest $\triangle ABC$, w którym $AB = 10 \text{ cm}$, wysokość $CD = 4 \text{ cm}$, a rzut boku AC na AB , a więc odcinek $AD = 3 \text{ cm}$. Do koła wierzchołka C zakreślono promieniem r okrąg koła. W jakiej odległości x od A przetnie okrąg koła bok AB ? Jakie warunki

musi spełniać r , aby zadanie było możliwe ($0 \leq x \leq 10$)? Ile rozwiązań istnieje wtedy?

o) Trójkąt o podstawie 10 cm , a wysokości 6 cm ma być przecięty prostą równoległą do podstawy tak, aby α) różnica pól trójkąta i trapezu; β) stosunek pól trójkąta i trapezu, na które owa równoległa dany trójkąt dzieli, równała (równał się) danej liczbie m . W jakiej odległości x od podstawy należy wykreślić ową równoległą? Jakie warunki musi spełniać m , aby zadanie było możliwe ($0 \leq x \leq 6$)?

p) Dana jest prosta l i odcinek $AB = 4\text{ cm}$ równoległy do l , a oddalony od l o dany odcinek m . Mają być wykreślone dwa równe koła, stykające się ze sobą i z prostą l tak, aby okrąg jednego koła przechodził przez punkt A , a okrąg drugiego przez punkt B . Znaleźć zależność między m , a promieniem x obu kół. Rozwiązać otrzymane równanie ze względu na x . Ile rozwiązań ma zadanie, jeżeli postawimy dodatkowy warunek, aby koła nie przecinały odcinka AB , aby więc było $x \geq \frac{1}{2} AB$?

r) Na prostokącie o bokach 3 cm i 4 cm opisano koło i poprowadzono prostą równoległą do boku 3 cm , a oddaloną od niego o x . Jak wielkie musi być x , aby odcinek owej prostej, zawarty między okręgiem koła a boki prostokąta, wynosił m ? Dla jakich wartości m jest zadanie możliwe ($0 \leq x \leq 4$)?

19. a) Przebyto 40 km samochodem i 80 km pociągiem w 200 min. Prędkość (x) pociągu różniła się o c od prędkości ($x - c$) samochodu. Obliczyć prędkość pociągu. Ile rozwiązań ma zadanie ($0 < x$, $c \leq x$)?

b) Ktoś złożył na procent prosty 100 zł , a po roku pobrał z tej sumy (dodał do tej sumy) $k\text{ zł}$. Pozostała kwota procentowała się jeszcze jeden rok i wynosiła po tym czasie wraz z odsetkami 104 zł . Jaki procent liczono? Ile dodatnich pierwiastków ma równanie?

c) Po osi X układu współrzędnych porusza się punkt I ruchem jednostajnym z prędkością $+3\frac{\text{cm}}{\text{sek.}}$; po osi Y porusza się punkt II ruchem jednostajnym z prędkością $1\frac{\text{cm}}{\text{sek.}}$. W czasie $t=0$ punkt I ma współrzędne $(-10, 0)$, a punkt II $(0, -5)$. Zbadać kwadrat wzajemnej odległości punktów I i II jako funkcję czasu t . Kiedy kwadrat odległości obu punktów ma najmniejszą wartość? Ile wynosi ona? Jak należy zmienić prędkość punktu II (o ile powiększyć lub pomniejszyć), aby najmniejsza odległość obu punktów w czasie ruchu wynosiła $\frac{5}{2}\sqrt{2}$?

d) Po tej samej prostej poruszają się dwa punkty. Odległości ich s od stałego punktu O na prostej są następującymi funkcjami

czasu $t : s = t^2$ i a) $s = ct + 9$; β) $s = ct - 9$. Zbadać, kiedy spotykają się te ciała zależnie od wartości c .

e) Ciało, wyrzucone pionowo w górę z prędkością początkową c porusza się tak, że odległość jego x od ziemi jest następującą funkcją czasu: $x = ct - \frac{1}{2}gt^2$, gdzie g oznacza liczbę stałą. Po jakim czasie osiągnie ciało wysokość 100 m? Dla jakich wartości c jest zadanie możliwe i ile ma rozwiązań?

f) Wahadło matematyczne o długości 24·85 cm wykonywa dwa wachnięcia na sekundę. O ile (x) zmieni się ilość wachnięć na sekundę, jeżeli długość wahadła zmieni się o m cm. Zbadać, dla jakich wartości m jest zadanie rozwiązalne i ile ma wtedy rozwiązań.

[Między ilością n wachnięć na sekundę, a długością l wahadła zachodzi przybliżony związek: $n^2 l = 99\cdot4$].

Rozdział III.

Równania stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi.

§ 1. Równanie stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi.

Ogólną postacią równania stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi jest:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Równanie takie może bowiem zawierać: kwadraty obu niewiadomych z jakimiś współczynnikami, iloczyn obu niewiadomych z jakimś współczynnikiem, niewiadome w stopniu pierwszym z jakimiś współczynnikami i wyraz wolny od niewiadomych.

Znaczenie takiego równania wyjaśnimy na przykładzie:

$$x^2 - y^2 - 8x + 2y + 6 = 0.$$

Uważajmy w tem równaniu x za zmienną niezależną i nadawajmy jej rozmaite wartości. Otrzymamy każdym razem równanie stopnia drugiego z niewiadomą y ; rozwiązując te równania, znajdziemy wartości y , które wraz z przyjętymi wartościami x sprawdzają dane równanie. Odpowiadające sobie wartości x i y zestawiamy w tabelce:

x		- 2	-1	0	1	2....6	7	8	9	10	11	...
y_1		6·19..	5	3·64..	1	nie istnieje	1	3·64..	5	6·19..	7·31..	...
y_2		- 4·19..	-3	- 1·64..	1	nie istnieje	1	- 1·64..	-3	- 4·19..	- 5·31..	...

Tabelka ta podporządkowuje różnym wartościom x ściśle określone wartości y , przedstawia więc y jako funkcję x . Krzywa w fig. 10 przedstawia wykres tej funkcji. Ponieważ odpowiadające sobie wartości w tabelce (współrzędne punktów krzywej) sprawdzają dane równanie, możemy, że równanie to przedstawia y jako funkcję x . Funkcja ta jest przedstawiona w równaniu w postaci nieco innej, niż zwykliśmy dotąd przedstawiać funkcje, pisząc po lewej stronie znaku równości y , a po prawej wyrażenie, zawierające x . Funkcję, przedstawioną w po-

staci równania między dwiema zmiennymi, nazywamy: *funkcją uwikłaną*. Nietrudno zresztą w naszym przykładzie przedstawić y jako funkcję x w postaci: $y = f(x)$. Wystarczy w tym celu rozwiązać tylko dane równanie ze względu na y .

Otrzymamy:

$$-y^2 + 2y + (x^2 - 8x + 6) = 0.$$

Obliczamy: $\Delta = 4 + 4(x^2 - 8x + 6) = 4(x^2 - 8x + 7)$.

Jeżeli $x^2 - 8x + 7 \geq 0$, czyli gdy $x \leq 1$ albo $x \geq 7$, to:

$$y = 1 \pm \sqrt{x^2 - 8x + 7}.$$

Funkcja ta ma własności odmienne od własności funkcji poznanych dotąd. W szczególności zauważymy:

1. Wartościom x , dla których $x^2 - 8x + 7 < 0$, nie odpowiadają żadne wartości y . W wykresie nie odpowiadają tym wartościom x żadne punkty krzywej tak, że krzywa doznaje przerwy w całej części płaszczyzny, w której leżą punkty, dla których $1 < x < 7$.

2. Każdej wartości x , dla której $x^2 - 8x + 7 > 0$, odpowiadają dwie wartości y . Mówimy zatem, że y jest funkcją dwuwartościową x .

Z przykładu tego wysnuwamy:

Równanie stopnia drugiego z dwiema zmiennymi przedstawia w ogólności jedną zmienną jako funkcję drugiej. Równanie takie ma niezliczoną ilość par rozwiązań, nie wyznacza więc niewiadomych.

Użyliśmy powyżej wyrazu „w ogólności“, aby wykluczyć pewne szczególne przypadki. Tak np. nie ma równanie: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ wcale rozwiązań, bo $x^2 \geq 0$, $y^2 \geq 0$, $1 > 0$, nie może zatem suma tych liczb być zerem. Ostatnie równanie jest sprzeczne.

Dołączmy teraz do równania stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi drugie równanie z dwiema niewiadomymi i postawmy żądanie: rozwiązać dany układ równań, t. j. znaleźć wartości, które, postawione za x i y , sprawdzają oba równania. Zależnie od tego, czy drugie równanie jest równaniem stopnia pierwszego, czy drugiego, będziemy mieli dwa zadania, którymi kolejno zajmujemy się.

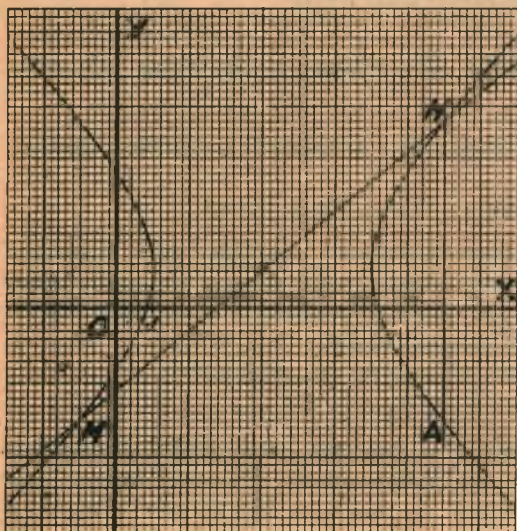


Fig. 10.

§ 2. Graficzne rozwiązanie układu równań.

Zajmiemy się najpierw graficznym rozwiązaniem zadań, postawionych przy końcu ostatniego paragrafu. Zadanie rozwiążemy zupełnie ogólnie, nawiązując do graficznego rozwiązania układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Aby rozwiązać graficznie układ równań $f(x, y) = 0$ i $g(x, y) = 0^*$, sporządzamy (np. przy pomocy tabelki) wykresy funkcji, wyrażonych temi równaniami. Otrzymamy dwie krzywe I i II, które są miejscami geometrycznymi równań $f(x, y) = 0$ i $g(x, y) = 0$. (Pamiętaj, jaki związek zachodzi między równaniem, a jego miejscem geometrycznym!). Jeżeli pewna para wartości x i y sprawdza oba równania, to punkt, mający współrzędne x i y , musi leżeć i na krzywej I i na krzywej II. Naodwrot; współrzędne każdego wspólnego punktu obu krzywych muszą sprawdzać oba równania. Zatem:

Układ równań $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ rozwiązujemy graficznie, kreśląc miejsca geometryczne obu równań i odczytując z rysunku współrzędne wspólnych punktów obu krzywych. Odczytane pary współrzędnych są parami pierwiastków układu równań.

Przykład. Rozwiązać graficznie układ równań:

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 - 8x + 2y + 6 &= 0, \\4x - 5y &= 11.\end{aligned}$$

Sporządziwszy tabelkę (str. 47), kreślimy krzywą, będącą miejscem geometrycznym pierwszego równania (fig. 10). Następnie kreślimy znany sposób prostą MN (fig. 10), mającą równanie $4x - 5y = 11$. Z rysunku odczytujemy, że prosta i krzywa przecinają się w punktach $M(9, 5)$ i $N(-1, -3)$. Pary wartości: $x_1 = 9$, $y_1 = 5$ i $x_2 = -1$, $y_2 = -3$ są parami pierwiastków danego układu równań.

Czy układ równań nie ma jeszcze więcej par pierwiastków, tego na podstawie samego wykresu rozstrzygnąć niepodobna, bo nie wiemy, czy prosta nie przecina krzywej jeszcze w dalszym przebiegu. Graficzne rozwiązanie nie daje zatem zupełnego rozwiązania postawionego zadania. Ma ono wartość tylko wtedy, gdy znamy własności krzywych, będących miejscami geometrycznymi równań. Używać go będziemy jednak często do poglądowego przedstawienia wyników badań analitycznych.

§ 3. Algebraiczne rozwiązanie układu równań stopnia drugiego i pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Zajmiemy się obecnie algebraicznym rozwiązaniem układu równań:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

$$y = ax + b. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

* Symbole $f(x, y)$ i $g(x, y)$ oznaczają dowolne wyrażenia, zawierające x i y .

Nasuwa się myśl, aby użyć tu jednej z metod, które służyły do rozwiązania układu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi. Zbadajmy metodę podstawienia.

Wyrażamy z równania stopnia pierwszego niewiadomą y przez x , podstawiamy znalezione wyrażenie za y w równaniu I i łączymy otrzymane równanie z równaniem II. Chodzi o zbadanie, czy uzyskany tak układ równań jest równoważny danemu.

Czynność podstawiania możemy rozłożyć na trzy następujące:

1. Mnożymy obie strony równania II przez E , sprowadzamy do postaci: $Ey - E(ax + b) = 0$ i odejmujemy to równanie od równania I. Równanie I zmieni się o tyle, że zamiast Ey otrzymamy w niem $E(ax + b)$. To nowe równanie oznaczmy I'.

2. Mnożymy obie strony równania II przez Cx , sprowadzamy do postaci: $Cxy - Cx(ax + b) = 0$ i odejmujemy to równanie od I'. Równanie I' zmieni się o tyle, że zamiast Cxy otrzymamy w niem $Cx(ax + b)$. To nowe równanie oznaczmy I''.

3. Podnosimy obie strony równania II do kwadratu, mnożymy przez B , sprowadzamy do postaci $By^2 - B(ax + b)^2 = 0$ i odejmujemy od I''. Równanie I'' zmieni się o tyle, że zamiast By^2 otrzymamy w niem $B(ax + b)^2$. To nowe równanie oznaczmy I'''.

Skutek wszystkich trzech czynności będzie taki sam, jak gdybyśmy w równaniu I podstawili $y = ax + b$ równocześnie we wszystkich wyrazach, zawierających y .

Chodzi teraz o zbadanie, czy czynności powyższe są dozwolone, t. j. czy układy równań I II, I' II, I'' II i I''' II są kolejno równoważne.

Że 1 i 2 czynność jest dozwolona wynika z twierdzenia:

I. Układy równań:

$$(A) \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0; \end{cases} \quad \text{ i } \quad (B) \begin{cases} f(x, y) \pm Mg(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0; \end{cases}$$

są równoważne. We wzorach tych oznaczają $f(x, y)$ i $g(x, y)$ dowolne wielomiany, zawierające x i y , a M oznacza dowolną liczbę, lub też wyrażenie, zawierające x i y .

Dowód: Jeżeli układ (A) sprawdza się dla jakichś wartości x i y , to i układ (B) musi się sprawdzać dla tych wartości. Drugie równania obu układów są bowiem identyczne. Pierwsze równanie układu (B) zawiera po lewej stronie sumę dwóch składników, które dla wartości x i y , sprawdzających pierwszy układ, stają się zerami; pierwsze równanie układu (B) sprawdza się również. — Ale i naodwrot: Jeżeli układ (B) sprawdza się dla pewnych wartości x i y , to układ (A) musi się spraw-

dział dla tych samych wartości. Z drugiego równania układu (B) wynika bowiem $g(x, y) = 0$, wskutek czego pierwsze równanie układu (B) przyjmuje postać $f(x, y) = 0$. Znaczy to, że pierwsze równanie układu mające właśnie tę postać, sprawdza się dla wartości x i y , sprawdzających układ (B). A że drugie równania obu układów są identyczne, to nasze twierdzenie jest udowodnione.

Czynność 3 jest również dozwolona. Wynika to z twierdzenia:

II. Układy równań:

$$(C) \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ y = g(x); \end{cases} \quad (D) \begin{cases} f(x, y) + M\{y^2 - [g(x)]^2\} = 0, \\ y = g(x); \end{cases}$$

są równoważne. We wzorach tych oznacza $f(x, y)$ dowolny wielomian, zawierający x i y ; $g(x)$ oznacza dowolne wyrażenie, zawierające x , a M jest dowolną liczbą, lub wyrażeniem, zawierającym niewiadome.

Dowód: Jeżeli układ (C) sprawdza się dla pewnych wartości x i y , to także i układ (D) sprawdza się dla tych wartości. Ponieważ drugie równania obu układów są jednakowe, chodzi tylko o wykazanie, że pierwsze równanie układu (D) sprawdza się dla wszelkich wartości x i y , sprawdzających układ (C). I rzeczywiście: Z drugiego równania układu (C) wynika kolejno: $y^2 = [g(x)]^2$, $y^2 - [g(x)]^2 = 0$; drugi składnik sumy, znajdującej się po lewej stronie pierwszego równania układu (D) jest zatem zerem. A że pierwszy składnik tej sumy $f(x, y) = 0$ wskutek pierwszego równania układu, to i pierwsze równanie układu (D) sprawdza się. — Naodwrot: Jeżeli układ (D) sprawdza się dla jakichś wartości x i y , to także i układ (C) sprawdza się dla tych wartości. Ponieważ drugie równania obu układów są jednakowe, należy tylko wykazać, że z prawdziwości układu (D) wynika $f(x, y) = 0$. Otóż z drugiego równania układu (D) wynika kolejno $y^2 = [g(x)]^2$, $y^2 - [g(x)]^2 = 0$. Wskutek tego wyrażenie w nawiasie wygiętym w pierwszym równaniu układu (D) jest zerem, skąd wynika, że $f(x, y) = 0$. Twierdzenie powyższe jest zatem udowodnione.

Tak więc podstawiając w równaniu I $y = ax + b$ i łącząc otrzymane równanie z równaniem II, otrzymamy układ równań równoważny danemu. Zatem:

Układ dwu równań stopnia pierwszego i drugiego z dwiema niewiadomymi rozwiązujemy w następujący sposób: Wyrażamy z równania stopnia pierwszego jedną niewiadomą przez drugą i podstawiamy znalezione wyrażenie w równaniu stopnia drugiego. Z otrzymanego w ten sposób równania z jedną niewiadomą wyznaczamy tę niewiadomą. Podstawiając kolejno znalezione wartości w równaniu stopnia pierwszego, znajdujemy odpowiednie wartości drugiej niewiadomej.

Przykład: Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 8x + 2y + 6 &= 0, \\ 4x - 5y &= 11. \end{aligned}$$

Z drugiego równania wyrażamy y przez x :

$$y = \frac{4x - 11}{5}.$$

Podstawiamy znalezione wyrażenie za y w pierwszym równaniu:

$$x^2 - \left(\frac{4x - 11}{5}\right)^2 - 8x + 2 \cdot \frac{4x - 11}{5} + 6 = 0.$$

Otrzymujemy w ten sposób równanie z jedną niewiadomą. Porządkując je i rozwiązując, znajdziemy:

$$x_1 = 9, \quad x_2 = -1.$$

Znalezione wartości podstawiamy kolejno w równaniu pierwszego stopnia i obliczamy z uzyskanych równań y_1 i y_2 :

$$\begin{aligned} 36 - 5y_1 &= 11, & -4 - 5y_2 &= 11, \\ y_1 &= 5; & y_2 &= -3. \end{aligned}$$

(Sprawdzić równania!)

Poprzedni rachunek wymaga jeszcze wyjaśnienia. Nasuwa się bowiem pytanie, czy nie można znalezionych wartości: $x_1 = 9$, $x_2 = -1$ podstawić w równaniu stopnia drugiego i wyznaczyć w ten sposób odpowiednie wartości dla y . Wykonując ten rachunek (wykonaj!), znajdziemy, że wartości $x_1 = 9$ odpowiada $y_1 = -3$ i $y'_1 = 5$. Tylko ostatnia wartość sprawdza także i równanie stopnia pierwszego, wskutek czego wartości $x_1 = 9$, $y_1 = -3$ nie można uważać za rozwiązanie danego układu równań. Podobnie znajdujemy z równania stopnia drugiego, że wartości $x_2 = -1$ odpowiada albo $y_2 = -3$, albo $y'_2 = +5$. I znowu tylko pierwsza wartość sprawdza i równanie stopnia pierwszego. Z tego wnioskujemy, że, chcąc otrzymać wartości, sprawdzające oba równania, należy zawsze podstawiać znalezione pierwiastki x_1 i x_2 w równaniu stopnia pierwszego.

Stosunki te wyjaśnimy również przy pomocy graficznego przedstawienia. Krzywa w fig. 10 (str. 48) przedstawia równanie stopnia drugiego, a prosta MN jest miejscem geometrycznym równania: $4x - 5y = 11$. Rozwiązaniu układu równań odpowiada wyznaczenie współrzędnych punktów przecięcia się prostej z krzywą. Podstawiając w pierwszym równaniu za y wyrażenie, otrzymane z drugiego równania, dochodzimy, dla jakiej wartości x rzędna punktu krzywej ma taką samą wartość, jak rzędna punktu prostej. Znalezione wartości $x_1 = 9$ i $x_2 = -1$ są zatem odciętami dwóch punktów przecięcia się. Rzut oka na figurę poucza, że na krzywej istnieją dwa punkty, mające odciętą $x_1 = 9$ [a mianowicie punkty $N(9, 5)$ i $A(9, -3)$], ale tylko jeden z nich (punkt N) jest szukanym punktem przecięcia. Wyznaczając więc rzędna punktu krzywej, którego odcięta wynosi 9, otrzymamy dwie wartości, z których tylko jedna będzie rzędna punktu przecięcia się. Na prostej natomiast jest

tylko jeden punkt, mający odciętą 9, t. j. szukany punkt przecięcia się, i dlatego tylko z równania prostej można jego rzędną ($y_1 = 5$) wyznaczyć. — Podobnie ma się rzecz i z wartością $x_2 = -1$.

Wyjaśnimy tę rzecz ogólnie:

III. Układy równań:

$$(E) \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ y = g(x), \end{cases} \quad (F) \begin{cases} f(x, y) + M \{ y^2 - [g(x)]^2 \} = 0, \\ f(x, y) = 0; \end{cases}$$

niezawsze są równoważne.

Z prawdziwości bowiem układu (F) dla pewnych wartości x i y nie wynika, że układ (E) sprawdza się dla tych samych wartości x i y . Wskutek drugiego równania układu (F) przyjmuje pierwsze równanie układu (F) postać $M \{ y^2 - [g(x)]^2 \} = 0$. Przypuśćmy, że $M \neq 0$; wtedy wynika z ostatniego równania: $y^2 - [g(x)]^2 = 0$ czyli $y^2 = [g(x)]^2$. Nie można stąd wnioskować, że drugie równanie układu (E) sprawdza się; mogłoby bowiem być równie dobrze $y = -g(x)$. Zatem może układ (F) sprawdzać się dla pewnych wartości x i y , a drugie równanie układu (E) nie być dla tych wartości prawdziwym.

§ 4. Dyskusja układu równań stopnia drugiego i pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 &= 25, \\ 6x + 8y &= 25. \end{aligned}$$

Stosując metodę, wyjaśnioną w poprzednim §-ie, otrzymamy:

$$x_1 = x_2 = 1\frac{1}{2}; \quad y_1 = y_2 = 2.$$

Układ równań ma jedną parę (dwie pary równych) pierwiastków. Przedstawiając graficznie oba równania (koło i prosta AB w fig. 11), zauważymy, że w tym przypadku prosta styka się z krzywą.

Przykład 2. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 4x^2 + y^2 &= 25, \\ -4x + 4y &= 15. \end{aligned}$$

Rugując metodą podstawiania y z obu równań, otrzymamy równanie:

$$32x^2 + 120x + 125 = 0.$$

Wyróżnik tego równania $\Delta = -1600 < 0$, równanie to nie ma zatem pierwiastków. Nie ma też pierwiastków i dany układ równań. Przedstawiając graficznie oba równania (koło i prosta MN w fig. 11), zauważymy, że w tym przypadku krzywa i prosta nie mają żadnego punktu wspólnego.

Przykład 3. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 9, \\ x - y &= 1. \end{aligned}$$

Podstawiając w pierwszym równaniu $y = x - 1$, obliczone z drugiego równania, otrzymamy:

$$x^2 - x^2 + 2x - 1 = 9.$$

W równaniu tem po zredukowaniu staje się współczynnik przy x^2 zerem, równanie staje się równaniem stopnia pierwszego, mającem jeden

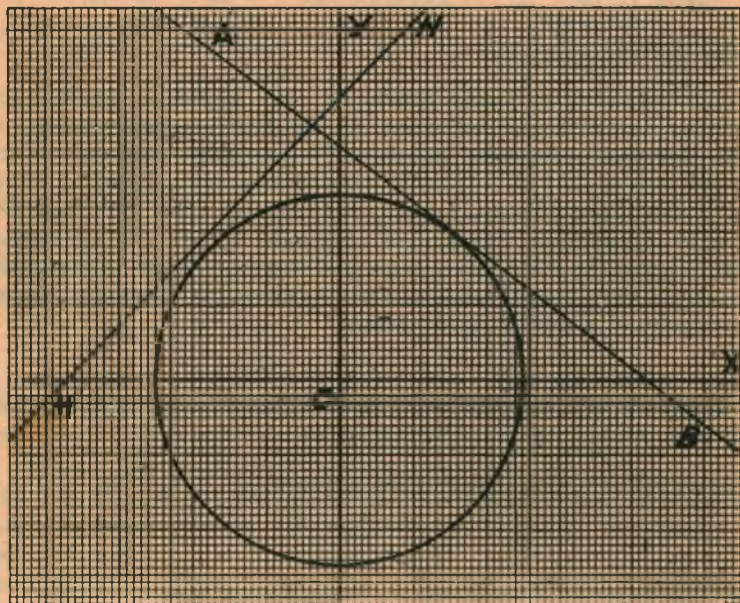


Fig. 11.

tylko pierwiastek $x = 5$. Z drugiego z danych równań obliczymy $y = 4$. Układ równań ma jedną parę pierwiastków (pojedynczych).

Rozwiąż graficznie powyższy układ równań! Zauważysz, że prosta $x - y = 1$ przecina krzywą $x^2 - y^2 = 9$ w jednym tylko punkcie. W przypadku pierwiastka podwójnego (porównaj przykład 1) prosta styka się z krzywą; w przypadku pierwiastka pojedynczego prosta krzywą przecina.

Przykład 4. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 6y - 9 &= 0, \\ y &= x + 3. \end{aligned}$$

Rugując y metodą podstawienia, otrzymamy:

$$x^2 - (x + 3)^2 + 6(x + 3) - 9 = 0,$$

a po wykonaniu działań i zredukowaniu:

$$0x^2 + 0x + 0 = 0.$$

Równanie to sprawdza się dla każdej wartości x . Odpowiednie y obliczymy z równania: $y = x + 3$. Układ równań jest nieoznaczony.

Przedstaw graficznie oba równania. Przekonasz się, że prosta $y = x + 3$ nakrywa część linii $x^2 - y^2 + 6x - 9 = 0$. Współrzędne każdego punktu wspólnej części sprawdzają układ równań.

Uwzględniając te przykłady, oraz przykład przerobiony w § 3, znajdujemy:

Układ dwu równań, z których jedno jest stopnia drugiego, a drugie stopnia pierwszego, może mieć albo dwie pary różnych pierwiastków, albo jedną parę pierwiastków podwójnych, albo jedną parę pierwiastków pojedynczych; albo też może taki układ nie mieć wcale pierwiastków, albo może być nieoznaczonym. Zależy to od równania, które otrzymamy przez wyrugowanie jednej niewiadomej z obu równań.

Jeżeli zatem taki układ równań zawiera jakiś parametr, to dyskusja jego sprowadza się do dyskusji równania z jedną niewiadomą. Pamiętać jednak przytem należy, że w zagadnieniach, prowadzących do takiego układu równań, trzeba uwzględnić warunki dodatkowe dla obu niewiadomych. Wyjaśnimy to na przykładzie:

Przykład 5. Na średnicy półkola o promieniu r ma być zbudowany taki trapez wpisany w półkole, aby suma pozostałych trzech boków wynosiła s . Obliczyć boki trapezu, zbadać, dla jakich wartości s jest zadanie rozwiązalne i ile ma rozwiązań.

Fig. 12 przedstawia dane półkole o promieniu $OA = r$ i szukany trapez $ABCD$. Oznaczamy boki trapezu: $AB = CD = x$, $BC = y$.

Bezpośrednio z warunków zadania znajdujemy:

$$2x + y = s.$$

Aby uzyskać drugie równanie, obliczamy zapomocą twierdzenia Pitagorasa OM^2 z trójkąta OBM i BN^2 z trójkąta ANB i porównujemy $OM^2 = BN^2$. Znajdziemy:

$$AB^2 - AN^2 = OB^2 - BM^2.$$

Ponieważ: $AB = x$, $AN = r - \frac{1}{2}y$, $OB = r$, $BM = \frac{1}{2}y$, otrzymujemy drugie równanie:

$$x^2 - (r - \frac{1}{2}y)^2 = r^2 - (\frac{1}{2}y)^2.$$

Po uporządkowaniu ostatniego równania, otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned} 2x + y &= s, \\ x^2 + ry &= 2r^2. \end{aligned}$$

Podstawiając w drugim równaniu $y = s - 2x$ (obliczone z pierwszego równania) i porządkując otrzymane równanie, znajdziemy:

$$x^2 - 2rx + r(s - 2r) = 0.$$

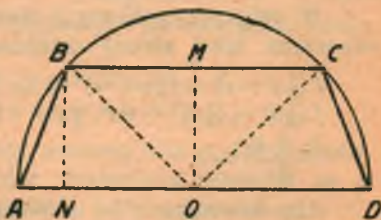


Fig. 12.

Układ równań ma tylko wtedy pierwiastki, jeżeli ostatnie równanie ma pierwiastki; warunkiem tego zaś jest:

$$\Delta = 4r^2 - 4r(s - 2r) = 12r^2 - 4rs \geq 0, \text{ skąd wynika:} \\ s \leq 3r.$$

Aby pierwiastek równania można uważać za rozwiązanie zagadnienia geometrycznego, muszą być spełnione jeszcze pewne warunki dodatkowe, z których należy zdać sobie sprawę. Przedewszystkiem muszą wszystkie długości odcinków, wprowadzonych do rachunku, być liczbami dodatnimi; jest więc nie tylko $r > 0$ i $s > 0$, lecz musi być też $x > 0$, $y > 0$, $AN > 0$ i $OM > 0$. Z warunków tych wynikają dla x pewne ograniczenia, a mianowicie:

- 1) $x > 0$.
- 2) $y > 0$, czyli $s - 2x > 0$, a stąd $x < \frac{1}{2}s$.
- 3) $AN > 0$, czyli $r - \frac{1}{2}y > 0$, a stąd $r - \frac{1}{2}s + x > 0$, czyli $x > \frac{1}{2}s - r$.
- 4) $OM > 0$, czyli $x > r - \frac{1}{2}y$, a stąd $x > r - \frac{1}{2}s + x$, czyli $r < \frac{1}{2}s$.

Ostatnia nierówność ogranicza już wartości parametru s do $s > 2r$. Pierwsza nierówność jest już zawarta w 3) i 4), bo gdy te są spełnione, to jest tem samem $x > 0$.

Pozostaje tedy dla x ograniczenie: $\frac{1}{2}s - r < x < \frac{1}{2}s$.

Tylko pierwiastki równania, spełniające ten ostatni warunek, dają rozwiązanie zagadnienia geometrycznego. Należy tedy zbadać, ile pierwiastków ma równanie $x^2 - 2rx + r(s - 2r) = 0$ między $\frac{1}{2}s - r$ a $\frac{1}{2}s$ zależnie od wartości s .

W celu przygotowania badania (według twierdzeń w § 4 rozdz. II) oznaczmy lewą stronę ostatniego równania symbolem $f(x)$ i obliczmy:

$$f\left(\frac{1}{2}s - r\right) = \left(\frac{1}{2}s - r\right)^2 - 2r\left(\frac{1}{2}s - r\right) + r(s - 2r) = \left(\frac{1}{2}s - r\right)^2;$$

$$f\left(\frac{1}{2}s\right) = \left(\frac{1}{2}s\right)^2 - 2r \cdot \frac{1}{2}s + r(s - 2r) = \frac{1}{4}s^2 - 2r^2;$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = r.$$

Aby równanie $f(x) = 0$ miało jeden tylko pierwiastek między $\frac{1}{2}s - r$ a $\frac{1}{2}s$, musi być [wobec tego, że dla wszelkich wartości s jest $f(\frac{1}{2}s - r) > 0$] spełniony warunek: $f(\frac{1}{2}s) < 0$, czyli $\frac{1}{4}s^2 - 2r^2 < 0$. Rozwiązując tę nierówność, otrzymamy: $s^2 < 8r^2$, a ponieważ s i r są liczbami dodatnimi: $s < 2r\sqrt{2}$. Uwzględniając nadto wyprowadzone poprzednio ograniczenie: $s > 2r$, dochodzimy do wyniku:

Tylko jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$ spełnia warunki zadania, jeżeli $2r < s < 2r\sqrt{2}$. Ponieważ wtedy $f(\frac{1}{2}s - r) > 0$, a $f(\frac{1}{2}s) < 0$, to mniejszy pierwiastek równania daje rozwiązanie zadania.

Aby równanie $f(x) = 0$ miało dwa pierwiastki między $\frac{1}{2}s - r$ a $\frac{1}{2}s$, muszą być spełnione równocześnie nierówności:

$$\Delta > 0, f\left(\frac{1}{2}s - r\right) > 0, f\left(\frac{1}{2}s\right) > 0, \frac{1}{2}s - r < r < \frac{1}{2}s.$$

Pierwsza nierówność jest spełniona, jeżeli $s < 3r$.

Druga " " " " zawsze.

Trzecia " " " " jeżeli $s > 2r\sqrt{2}$.

Czwarta " " " " $2r < s < 4r$, a więc za-

wsze, ilekroć spełniona jest nierówność pierwsza i trzecia. Zatem:

Oba pierwiastki równania spełniają warunki zadania, jeżeli:

$$2r\sqrt{2} < s < 3r.$$

W przypadku $s = 2r\sqrt{2}$ jest $f(\frac{1}{2}s) = 0$, $f(\frac{1}{2}s - r) > 0$. A że dla tej wartości s średnia arytmetyczna r obu pierwiastków spełnia nierówność: $\frac{1}{2}s - r < r < \frac{1}{2}s$, to równanie ma między $\frac{1}{2}s - r$ a $\frac{1}{2}s$ jeden pierwiastek.

W przypadku $s = 3r$ istnieje jedno rozwiązanie podwójne.

Zestaw otrzymane wyniki w tabelce i oblicz wartości x i y . Do każdego przypadku sporządź stosowny rysunek.

§ 5. Przekształcenie układu dwu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi.

Przykład. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3y^2 + xy &= 5, \\ 4x^2 - 5y^2 + 3xy - x &= 9. \end{aligned}$$

Mnożąc pierwsze równanie przez 2 i odejmując od drugiego, otrzymamy: $y^2 + xy - x = -1$. Łącząc to równanie z którymkolwiek z danych, otrzymamy równoważny układ:

$$\begin{aligned} y^2 + xy - x &= -1, \\ 2x^2 - 3y^2 + xy &= 5. \end{aligned}$$

Z pierwszego równania znajdujemy: $x = \frac{y^2 + 1}{1 - y}$; podstawiając znalezione wyrażenie w drugim równaniu, otrzymamy po uporządkowaniu równoważny układ:

$$\begin{aligned} -2y^4 + 7y^3 - 5y^2 + 11y - 3 &= 0, \\ y^2 + xy - x &= 1. \end{aligned}$$

Pierwiastki pierwszego równania dają wartości dla y . Odpowiadające im wartości x znajdziemy, podstawiając znalezione wartości za y w drugim równaniu i rozwiązując to równanie ze względu na x .

Przedstawmy rzecz ogólnie:

Mając dany układ dwu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi:

$$f_1(x, y) = 0, f_2(x, y) = 0;$$

można metodą równych współczynników wyrugować z obu równań kwadrat jednej niewiadomej. Zestawiając uzyskane równanie z którymkolwiek z danych równań, np. z pierwszym, otrzymamy równoważny (§ 3, twierdz. I) układ równań, z których jedno zawiera jedną niewiadomą, np. y , tylko w potęgze pierwszej. Jeżeli współczynnik przy y w tem równaniu jest różny od zera*), można z tego równania wyrazić y przez x tak, że $y = g(x)$. Układ równań równoważny danemu ma postać:

$$f_1(x, y) = 0, y = g(x).$$

*) W przeciwnym razie równanie zawierałoby już tylko jedną niewiadomą x .

Podstawiając $y = g(x)$ w pierwszym równaniu, otrzymamy (na podstawie rozumowań w § 3) równoważny układ równań:

$$f_1[x, g(x)] = 0, y = g(x).$$

Pamiętać należy, że układ $f_1[x, g(x)] = 0, f_1(x, y) = 0$ nie byłby równoważny danemu (porównaj przykład 1 w § 7!).

Rozwiązanie ostatniego układu równań wymaga przedewszystkiem rozwiązania równania $f_1[x, g(x)] = 0$, które jest w ogólności stopnia czwartego (porównaj ostatni przykład!). Gdybyśmy potrafili to równanie rozwiązać, to obliczenie y nie sprawiałoby już żadnej trudności,

§ 6. Równanie dwukwadratowe.

W nauce o równaniu stopnia czwartego ograniczymy się tylko do tego jednego przypadku, że równanie zawiera tylko potęgi parzyste niewiadomej, a więc ma postać:

$$rx^4 + sx^2 + t = 0, \text{ gdzie } r \neq 0.$$

Równanie takie nazywamy *dwukwadratowem*.

Aby je rozwiązać, uważajmy w niem za niewiadomą x^2 i oznaczmy ją literą z tak, że $z = x^2$. Wtedy:

$$rz^2 + sz + t = 0.$$

1. Jeżeli $\Delta = s^2 - 4rt < 0$, to ostatnie równanie (a więc i dane) nie ma pierwiastków.

2. Jeżeli $\Delta = s^2 - 4rt = 0$, to ostatnie równanie ma tylko jeden (podwójny) pierwiastek $z = -\frac{s}{2r}$. Z tego pierwiastka otrzymamy pierwiastek danego równania tylko wtedy, jeżeli $-\frac{s}{2r} > 0$. Przy tem założeniu:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{s}{2r}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{s}{2r}}.$$

3. Jeżeli $\Delta = s^2 - 4rt > 0$, to ostatnie równanie ma pierwiastki:

$$z_1 = \frac{-s - \sqrt{\Delta}}{2r}, z_2 = \frac{-s + \sqrt{\Delta}}{2r}.$$

Obliczenie pierwiastków równania dwukwadratowego wymaga jeszcze rozwiązania równań:

$$x^2 = z_1 \text{ i } x^2 = z_2.$$

Rozróżnij przypadki: $z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$ i rozstrzygnij, ile pierwiastków ma dane równanie!

Przykład. Rozwiązać równanie: $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Oznaczamy: $x^2 = z$ i rozwiązujemy równanie:

$$z^2 - 3z - 4 = 0.$$

Znajdziemy: $z_1 = -1$, $z_2 = 4$.

Wartość $z_1 = -1$ nie daje żadnego pierwiastka równania dwukwadratowego, bo równanie $x^2 = -1$ nie ma pierwiastków.

Aby otrzymać pierwiastki równania dwukwadratowego, odpowiadające wartości $z_2 = 4$, rozwiązujemy równanie: $x^2 = 4$ i znajdujemy: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Tylko te dwa pierwiastki ma dane równanie dwukwadratowe.

§ 7. Przykłady rozwiązywania układu dwu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 7x^2 - y^2 &= 3, \\ x^2 + y^2 - 8y &= -11. \end{aligned}$$

Rugując metodą, równych współczynników y^2 z obu równań, otrzymamy: $8x^2 - 8y = -8$, a stąd: $y = x^2 + 1$. Znalezione wyrażenie podstawiamy za y w pierwszym równaniu i otrzymujemy równanie:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

które wraz z równaniem:

$$y = x^2 + 1$$

daje układ równań równoważny danemu.

Z pierwszego równania (rozwiąż!) znajdziemy:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2.$$

Podstawiając znalezione dla x wartości w drugim równaniu, znajdziemy:

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 5, \quad y_4 = 5.$$

Nie byłyby natomiast równoważnymi danemu układowi układy równań:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= 0, & \left| \quad x^4 - 5y^2 + 4 &= 0, \\ 7x^2 - y^2 &= 3; & \left| \quad x^2 + y^2 - 8y &= -11. \end{aligned}$$

Łatwo to stwierdzić. Np.: Wartości $x_1 = 1$, obliczonej z pierwszego równania, odpowiadałyby dla y wartości $+2$ i -2 , obliczone z drugiego równania pierwszego układu. Natomiast nietrudno stwierdzić, że wartości $x = 1$, $y = -2$ nie sprawdzają drugiego równania danego układu.

Fig. 13 przedstawia graficzne rozwiązanie danego układu równań.

Krzywa wyciągnięta przedstawia pierwsze równanie, krzywa kreskowana drugie. Współrzędne punktów przecięcia się krzywych (odczytaj!) są pierwiastkami układu równań.

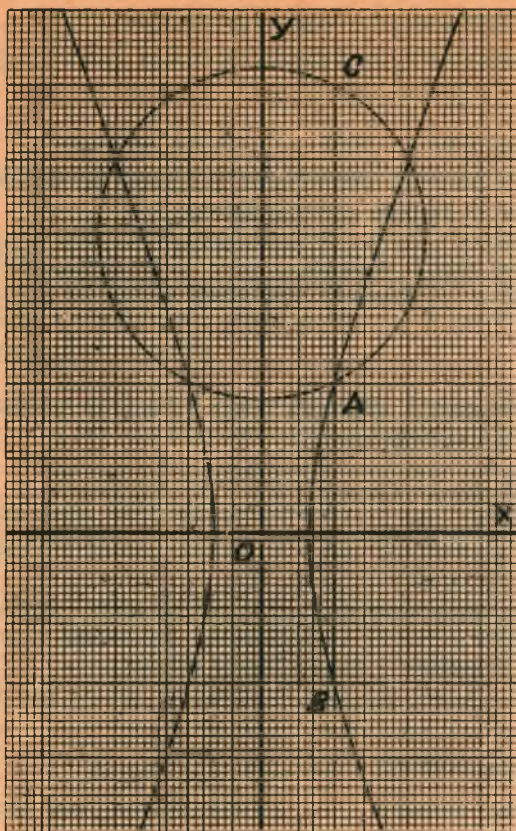


Fig. 13.

Na rysunku tym możemy też łatwo stwierdzić, że ostatnie dwa układy równań nie są równoważne danemu.

Pierwiastki pierwszego równania: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$ są rzeczywiste odciętami punktów przecięcia się krzywych. Ale odciętej $x_1 = 1$ odpowiadają w pierwszej krzywej rzędne: $+2$ (punkt A) i -2 (punkt B), a w drugiej krzywej rzędne: $+2$ (punkt A) i $+6$ (punkt C). Jedna tylko para tych wartości odpowiada punktowi A przecięcia się obu krzywych. Podobnie ma się rzecz z innymi wartościami x . (Wjaśnij!).

Przykład 2. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned}x^2 + 2y^2 &= 27, \\x^2 - 3y^2 &= 22.\end{aligned}$$

Uważamy za niewiadome x^2 i y^2 i rozwiązujemy, jak układ równań stopnia pierwszego. Otrzymujemy:

$$x^2 = 25, \quad y^2 = 1, \quad \text{a stąd: } x = \pm 5, \quad y = \pm 1.$$

Kombinując te wartości, otrzymujemy następujące pary pierwiastków:

$$\begin{aligned}x_1 &= +5, \quad x_2 = +5, \quad x_3 = -5, \quad x_4 = -5, \\y_1 &= +1; \quad y_2 = -1; \quad y_3 = +1; \quad y_4 = -1.\end{aligned}$$

Przykład 3. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned}x^2 - 3xy + y^2 &= 121, \\xy &= -21.\end{aligned}$$

Zauważymy, że lewa strona pierwszego równania byłaby kwadratem dwumianu $(x-y)$, gdyby zamiast $-3xy$ było $-2xy$. Można to uzyskać, dodając do siebie oba równania. Otrzymamy:

$$\begin{aligned}x^2 - 2xy + y^2 &= 100, \quad \text{czyli:} \\(x - y)^2 &= 100.\end{aligned}$$

$$\text{Stąd: } x - y = \pm 10.$$

W ten sposób możemy dany układ równań zastąpić następującymi:

$$\begin{array}{ll} x - y = 10, & x - y = -10, \\ xy = -21; & xy = -21. \end{array}$$

Pierwszy układ równań daje pierwiastki: $x_1 = 3, \quad x_2 = 7;$
 $y_1 = -7, \quad y_2 = -3;$
 drugi: $x_3 = -3, \quad x_4 = -7;$
 $y_3 = +7, \quad y_4 = +3.$

Przykład 4. Rozwiązać układ równań:

$$\frac{x}{y-1} - \frac{y-1}{x} = 1\frac{1}{2},$$

$$x^2 - 2y = 10.$$

Przekształcamy najpierw pierwsze równanie, wprowadzając nową niewiadomą $z = \frac{x}{y-1}$. Otrzymamy:

$$z - \frac{1}{z} = 1\frac{1}{2}, \text{ a po uporządkowaniu:}$$

$$2z^2 - 3z - 2 = 0.$$

Rozwiązując to równanie, znajdziemy: $z_1 = 2, \quad z_2 = -\frac{1}{2}.$

Pierwsze równanie danego układu sprawdza się zatem wtedy i tylko wtedy, jeżeli $\frac{x}{y-1} = 2$, albo $\frac{x}{y-1} = -\frac{1}{2}$, czyli gdy albo $x - 2y = -2$, albo $2x + y = 1.$

Dany układ równań można więc zastąpić następującymi dwoma:

$$\begin{array}{ll} x - 2y = -2, & 2x + y = 1, \\ x^2 - 2y = 10; & x^2 - 2y = 10. \end{array}$$

Z rozwiązania tych układów równań otrzymamy następujące pary pierwiastków:

Z pierwszego: $x_1 = 4, \quad y_1 = 3; \quad x_2 = -3, \quad y_2 = -\frac{1}{2};$
 z drugiego: $x_3 = -6, \quad y_3 = 13; \quad x_4 = 2, \quad y_4 = -3.$

Pierwiastki te sprawdzają oczywiście i dany układ równań.

Przykład 5. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{array}{l} x^2 - 2xy + 2y^2 = 8, \\ x^2 + 2xy - 5y^2 = 12. \end{array}$$

Stwierdziwszy, że $y \neq 0$, dzielimy oba równania przez y^2 :

$$\begin{array}{l} \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} + 2 = \frac{8}{y^2}, \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} - 5 = \frac{12}{y^2}. \end{array}$$

Wprowadzamy nowe niewiadome: $t = \frac{x}{y}, \quad u = \frac{1}{y^2}.$ Równania przyjmują postać:

$$\begin{array}{l} t^2 - 2t + 2 = 8u, \\ t^2 + 2t - 5 = 12u. \end{array}$$

Rozwiązując je, znajdziemy:

$$t_1 = 2, u_1 = \frac{1}{4}; t_2 = 8, u_2 = 6\frac{1}{4}.$$

Do wyznaczenia x i y mamy zatem układy równań:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= 2, & \frac{x}{y} &= 8, \\ \frac{1}{y^2} &= \frac{1}{4}, & \frac{1}{y^2} &= 6\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Rozwiązując je, znajdziemy:

$$\begin{aligned} x_1 = 4, y_1 = 2; & x_2 = -4, y_2 = -2; x_3 = 3\frac{1}{2}, y_3 = \frac{2}{3}; \\ x_4 = -3\frac{1}{2}, & y_4 = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Sposób rozwiązywania równań, wyjaśniony na tym przykładzie, prowadzi zawsze do celu, jeżeli oba równania układu zawierają oprócz wyrazów wiadomych tylko wyrazy stopnia drugiego.

§ 8. Dyskusja układu dwu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi.

Dyskusja układu dwu równań stopnia drugiego z dwiema niewiadomymi sprowadza się do dyskusji równania stopnia czwartego. Jeżeli chodzi o dyskusję zagadnienia, należy uwzględnić dodatkowe warunki, które spełniać mają obie niewiadome.

Przykład. W koło o danym promieniu r wpisano prostokąt, którego pole wynosi p . Obliczyć boki tego prostokąta.

Oznaczając większy bok prostokąta x , mniejszy (względnie równy) y , otrzymamy z łatwością układ równań:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4r^2, \\ xy &= p, \end{aligned}$$

przyczem: $p \geq 0$, $r > 0$, a niewiadome spełniają nierówności:

$$2r \geq x \geq y \geq 0.$$

Podstawiając w pierwszym równaniu $y = \frac{p}{x}$, otrzymamy do wyznaczenia x równanie:

$$x^4 - 4r^2 x^2 + p^2 = 0.$$

Podstawiając $x^2 = z$, znajdziemy:

$$z^2 - 4r^2 z + p^2 = 0.$$

Równanie to ma tylko wtedy pierwiastki, jeżeli:

$$\Delta = 16r^4 - 4p^2 \geq 0,$$

skąd wynika dla p ograniczenie:

$$p \leq 2r^2.$$

Gdy ten warunek jest spełniony, to równanie ma zawsze pierwiastki dodatnie (dlaczego?). Każdemu dodatniemu pierwiastkowi z odpowia-

jedna dodatnia wartość x (wskutek związku $z = x^2$) i jedna dodatnia wartość y (wskutek równania $xy = p$). Dany układ równań ma więc tyle par pierwiastków, ile pierwiastków ma ostatnie równanie. Aby pierwiastki układu równań dały rozwiązanie zadania, muszą być spełnione warunki: $2r \geq x \geq y \geq 0$. Z tych warunków wyprowadzamy w następujący sposób warunki dla z , równoważne tamtym ze względu na to, że x, y, z i r oznaczają liczby dodatnie:

Z $2r \geq x$ wynika: $4r^2 \geq x^2$ czyli $4r^2 \geq z$ i naodwrót.

Z $x \geq y$ wynika $x^2 \geq y^2$, a wskutek pierwszego równania danego układu $x^2 \geq 4r^2 - x^2$, skąd: $2x^2 \geq 4r^2$, $x^2 \geq 2r^2$, $z \geq 2r^2$. I naodwrót.

Wobec ostatniej nierówności nie potrzebujemy wcale uwzględniać nierówności $z \geq 0$.

Chodzi teraz tylko o zbadanie, ile pierwiastków równania $z^2 - 4r^2z + p^2 = 0$ spełnia warunek $2r^2 \leq z \leq 4r^2$.

Oznaczmy lewą stronę tego równania symbolem $f(z)$ i obliczmy:

$$\begin{aligned} f(2r^2) &= 4r^4 - 8r^4 + p^2 = -4r^4 + p^2; \\ f(4r^2) &= 16r^4 - 16r^4 + p^2 = p^4. \end{aligned}$$

Ponieważ $p \leq 2r^2$ (wskutek warunku istnienia pierwiastków), to $p^2 \leq 4r^4$, a więc $f(2r^2) \leq 0$. A że $f(4r^2) \geq 0$, to równanie ma zawsze jeden tylko pierwiastek (i to większy) między $2r^2$ i $4r^2$, jeżeli $0 < p < 2r^2$. Jeżeli $p = 2r^2$, to równanie ma także tylko jeden (podwójny) pierwiastek $z = 2r^2$; jeżeli $p = 0$, to $f(2r^2) < 0$, a więc równanie ma jeden tylko pierwiastek $z = 4r^2$. Zatem:

Zadanie ma zawsze jedno i tylko jedno rozwiązanie, jeżeli $0 \leq p \leq 2r^2$; dla innych wartości p zadanie nie ma rozwiązania. (Oblicz wartości x i y , spełniające warunki zadania!).

§ 9. Niektóre funkcje przedstawione równaniem stopnia drugiego z dwiema zmiennymi.

Widzieliśmy w § 1, że równanie stopnia drugiego z dwiema zmiennymi x i y wyraża zwykle, że y jest pewną funkcją x . Wykresy i własności niektórych z tych funkcji poznaliśmy w ciągu nauki. Obecnie zbierzemy i uzupełnimy te wiadomości. Mówimy, że znamy przebieg (zmiennosc) funkcji y , jeżeli wiemy, dla jakich wartości x funkcja jest określona i jeżeli obszar wartości x potrafimy podzielić na takie przedziały, w których funkcja ze wzrostem x tylko rośnie, albo tylko maleje. Funkcje, wyrażone równaniem stopnia drugiego z dwiema zmiennymi są często dwuwartościowe; wtedy badamy oddzielnie dwa zbiory wartości funkcji, rozbijając ją na dwie funkcje jednowartościowe.

Omówimy następujące funkcje:

I. Funkcja całkowita stopnia drugiego.

Jeżeli równanie stopnia drugiego z dwiema zmiennymi zawiera kwadrat tylko jednej zmiennej, a nadto nie zawiera wyrazów stopnia drugiego, to wtedy zmienna, której kwadratu brak

w równaniu, jest *funkcją całkowitą stopnia drugiego* drugiej zmiennej. Własności tej funkcji znamy z rozdz. I; wykresem jej jest *parabola*.

Np. 1. Z równania $4x^2 + 12x - 4y - 7 = 0$ wynika, że:

$$y = x^2 - 3x - 1\frac{3}{4}.$$

Podaj wykres i ułóż tabelkę zmienności tej funkcji.

2. Z równania $y^2 - x - 2y - 3 = 0$ wynika:

$$x = y^2 - 2y - 3.$$

Przedstaw graficznie x jako funkcję y . Na podstawie wykresu ułóż tabelkę zmienności dla y jako funkcji x .

II. Funkcja wyrażona równaniem $xy = k$.

Przyjmijmy najpierw, że $k > 0$. Z równania $xy = k$ otrzymamy $y = \frac{k}{x}$, a z tej postaci wysnuwamy następujące własności funkcji:

1. Każdej wartości x , z wyjątkiem $x = 0$, odpowiada jedna wartość y , jak to wynika bezpośrednio ze wzoru; przytem ma y zawsze taki znak jak x . Dla wartości $x = 0$ funkcja nie jest określona.

Każda prosta równoległa do osi Y (z wykluczeniem osi Y) przecina krzywą $y = \frac{k}{x}$ w jednym punkcie. Krzywa przebiega w ćwiartkach I i III.

2. Funkcja przyjmuje wszelkie wartości (z wyjątkiem zera), każdą raz tylko. Przyjmując bowiem $y = m$ (gdzie m oznacza dowolną liczbę różną od zera), znajdziemy $x = \frac{k}{m}$.

Każda prosta, równoległa do osi X , przecina krzywą w jednym punkcie. Oś X nie przecina krzywej.

3. Jeżeli wartości $x = x_1$ odpowiada $y = y_1$, to wartości $x = -x_1$ odpowiada $y = -y_1$.

Części krzywej, leżącej w ćwiartce I, odpowiada symetrycznie względem początku układu współrzędnych część krzywej w ćwiartce trzeciej. Z tego powodu nazywamy początek układu współrzędnych *środkiem* krzywej.

Z tego powodu uwzględniamy w dalszem badaniu funkcji tylko dodatnie wartości x .

4. Aby zbadać, czy funkcja rośnie, czy maleje ze wzrostem x , bierzemy pod uwagę dwie wartości x_1 i x_2 zmiennej x , zakładając $x_2 > x_1 > 0$.

Odpowiadającymi im wartościami funkcji będą: $y_1 = \frac{k}{x_1}$, $y_2 = \frac{k}{x_2}$. Aby te wartości porównać, tworzymy różnicę:

$$y_2 - y_1 = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$$

Ponieważ $k > 0$, $x_1 x_2 > 0$, $x_1 - x_2 < 0$, to $y_2 - y_1 < 0$, czyli $y_2 < y_1$.

Funkcja maleje, gdy x rosnąc przyjmuje coraz większe wartości dodatnie.

Ubytek funkcji, gdy x wzrasta stale o tę samą wielkość, jest dla małych wartości x znaczny, dla większych coraz mniejszy. Licznik bowiem ułamka, wyrażającego ubytek y , ma zawsze tę samą wartość, mianownik zaś $x_1 x_2$ rośnie ze wzrostem x_1 i x_2 .

Gdy na osi X poruszamy się od początku układu współrzędnych w kierunku dodatnim, to krzywa opada początkowo bardzo stromo, później powoli, zbliża się do osi X dowolnie blisko (wskutek własności 2), nie przecina jej jednak nigdy. Wskutek tej własności nazywamy oś X *asymptotą* krzywej.

Ponieważ y przyjmuje wszelkie wartości dodatnie (od bardzo małych do bardzo wielkich), a maleje ze wzrostem x , to przebieg funkcji musi być następujący:

x	0	$\nearrow + \infty$	*
y	*	$+\infty$	$\searrow 0$

Tabelkę tę należy rozumieć w ten sposób, że dodatnim wartościom x , bliskim zera, odpowiadają bardzo wielkie wartości y . Wartości $x = 0$ nie odpowiada żadna wartość y (zaznaczono to gwiazdką); podobnie nie staje się y zerem dla żadnej wartości x .

5. Uwzględnijmy teraz także wartości ujemne zmiennej x . Korzystając z własności funkcji, wyrażonej pod 3., otrzymamy tabelkę:

x	$* - \infty$	$\nearrow 0$	$\nearrow + \infty$	*
y	0	$\searrow - \infty$	$* + \infty$	$\searrow 0$

Funkcja nie posiada ani maximum ani minimum.

6. Zwróćmy wreszcie uwagę jeszcze na jedną własność badanej funkcji. Równanie $xy = k$ jest *symetryczne* ze względu na x i y ; to znaczy, że jeżeli równanie sprawdza się dla pewności wartości x i y , to sprawdza się także, jeżeli wartości x i y przestawimy.

Funkcje $y = \frac{k}{x}$ i $x = \frac{k}{y}$ są identyczne.

Krzywa $xy = k$ nie zmienia się, jeżeli osie X i Y przestawimy, t. j. jeżeli układ współrzędnych wraz z krzywą obrócimy o 180° około dwu-

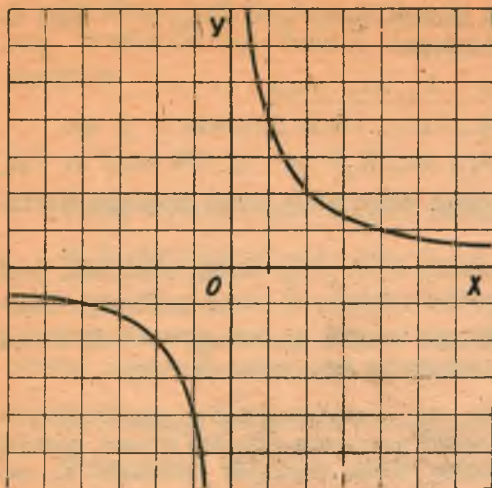


Fig. 14.

siecznej kąta, zawartego między osiami $+X$ i $+Y$. Innymi słowami: Krzywa $xy = k$ jest symetryczna względem prostej $y = x$. Wykaż podobnie, że krzywa $xy = k$ jest również symetryczna względem prostej $y = -x$!

Krzywą $xy = k$ nazywamy *hiperbolą*; początek układu współrzędnych jest jej *środkiem* (środek symetrii); proste $y = x$ i $y = -x$ są jej *osiąmi* (osie symetrii); osie X i Y są *asymptotami* hiperboli. Fig. 14 przedstawia hiperbolę $xy = 4$. (Wykreśl kilka hiperbol $xy = k$ dla różnych wartości dodatnich k !).

Jeżeli $k < 0$, to wartości funkcji $y = \frac{k}{x}$ różnią się od wartości funkcji $y = \frac{|k|}{x}$, odpowiadających tym samym wartościom x , tylko znakiem. Zważywszy to, otrzymamy w tym przypadku tabelkę zmienności funkcji:

x	$*$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$*$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$	$*$	$-\infty$	$\nearrow$	0

Jeżeli $k < 0$, to hiperbola $xy = k$ jest położona symetrycznie względem osi X do hiperboli $xy = |k|$. (Wykreśl kilka hiperbol $xy = k$ dla różnych wartości ujemnych k !).

III. Funkcje wyrażone równaniem $Ax^2 + By^2 = C$.

Jeżeli równanie stopnia drugiego zawiera tylko kwadraty obu zmiennych, a nie zawiera ani x ani y ani xy , to badanie funkcji, wyrażonej tem równaniem, upraszcza się bardzo. Zauważymy mianowicie, że gdy wartości $x = x' > 0$ i $y = y' > 0$ sprawdzają to równanie, to także i wartości $-x'$ i y' , x' i $-y'$, $-x'$ i $-y'$ sprawdzają je. Wystarczy zatem taką funkcję zbadać dla dodatnich wartości x i uwzględnić tylko dodatnie wartości y .

Geometrycznie znaczy to, że każdemu punktowi wykresu odpowiadają punkty wykresu położone symetrycznie względem osi X , względem osi Y i względem początku układu współrzędnych. Krótko: krzywa, mająca równanie $Ax^2 + By^2 = C$, jest symetryczna względem osi X , względem osi Y , a więc i względem początku układu współrzędnych. Wsku-

tek tego wystarczy zbadać przebieg krzywej w ćwiartce pierwszej, bo dalszy jej przebieg wynika już ze symetrii.

Rozpatrzmy dokładnie dwa szczególne przypadki:

A) $x^2 + y^2 = r^2$.

Funkcję, wyrażoną tem równaniem, zbadamy najpierw dla dodatnich wartości x i uwzględnimy tylko dodatnie wartości y . Przyjmujemy nadto $r > 0$.

Z danego równania obliczamy: $y^2 = r^2 - x^2$.

Ze wzoru tego czytamy, że funkcja jest określona tylko dla wartości x , niewiększych niż r . Jeżeli $x > r$, to takiej wartości x nie odpowiada żadna wartość y . Jeżeli $x = 0$, to $y^2 = r^2$, a $y = r$. Gdy x rośnie od 0 do r , to x^2 rośnie od 0 do r^2 , a y^2 (różnica, której odjemnik rośnie) maleje od r^2 do 0; zatem y maleje od r do 0.

Ponieważ ujemnym wartościom x odpowiadają takie same wartości y , jak wartościom dodatnim x o takiej samej wartości bezwzględnej, to dodatnie wartości funkcji zmieniają się ze wzrostem x w następujący sposób:

$$\begin{array}{c|cccc} x & -r & \nearrow & 0 & \nearrow & +r \\ \hline y & 0 & \nearrow & r & \searrow & 0 \end{array}$$

Lecz każdej wartości x , której odpowiada dodatnia wartość y , odpowiada też ujemna wartość y o takiej samej wartości bezwzględnej. Ujemne wartości y zmieniają się przeto w sposób następujący:

$$\begin{array}{c|cccc} x & -r & \nearrow & 0 & \nearrow & +r \\ \hline y & 0 & \searrow & -r & \nearrow & 0 \end{array}$$

Wykresem funkcji wyrażonej równaniem $x^2 + y^2 = r^2$ jest koło zakreślone dokoła początku układu współrzędnych promieniem r . Obrawszy bowiem na okręgu takiego koła punkt $M(x, y)$, zauważymy (stosując twierdzenie Pitagorasa), że rzeczywiście współrzędne punktu okręgu spełniają równanie $x^2 + y^2 = r^2$. Dla punktów zewnętrznych lub wewnętrznych koła jest natomiast $x^2 + y^2 \geq r^2$.

B) $x^2 - y^2 = a^2$.

Stosownie do poprzednich rozważań uwzględnimy przy badaniu funkcji, wyrażonej tem równaniem, najpierw tylko dodatnie wartości x i y ; przyjmujemy nadto $a > 0$.

Ze wzoru $y^2 = x^2 - a^2$, wynikającego z danego równania, zauważymy, że funkcja y nie jest określona dla $x < a$. Gdy $x = a$, wtedy $y = 0$. Gdy x rośnie dalej, wtedy y^2 , a więc i y , rośnie również i osiąga każdą dowolnie wielką wartość. Aby bowiem

było $y = M$, wystarczy obrać na x taką dodatnią wartość, aby otrzymać $x^2 = a^2 + M^2$.

Zważywszy, że ujemnym wartościom x odpowiadają takie same wartości, jak wartościom dodatnim x o takiej samej wartości bezwzględnej otrzymamy następującą tabelkę, przedstawiającą zmienność dodatnich wartości funkcji:

x	$-\infty$	$\nearrow$	$-a$	$\nearrow$	$+a$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$*$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Wartościom x między $-a$ i $+a$ nie odpowiadają żadne wartości funkcji; zaznaczono to w tabelce gwiazdką.

Uwzględniając tylko ujemne wartości funkcji, otrzymamy tabelkę:

x	$-\infty$	$\nearrow$	$-a$	$\nearrow$	$+a$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$*$	0	$\searrow$	$-\infty$

Fig. 15 przedstawia wykres funkcji, wyrażonej równaniem $x^2 - y^2 = a^2$ dla $a = 2$. Krzywa jest hiperbolą. Przekonaj się o tem, kreśląc hiperbolę, mającą równanie $xy = 2$, i porównując ją z krzywą w fig. 15.

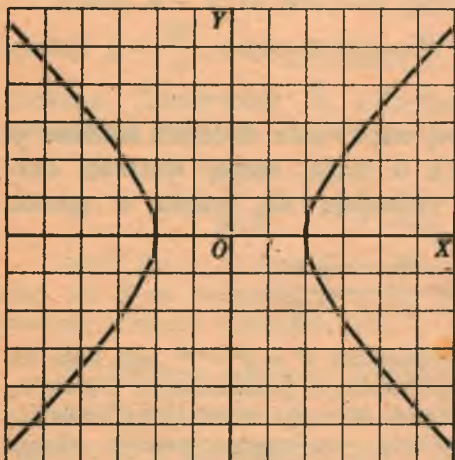


Fig. 15.

będzie funkcję, która przyjmuje dla tych samych wartości x wartości o $|n|$ większe lub mniejsze, niż funkcja określona równaniem pierwotnym, zależnie od tego, czy $n > 0$, czy $n < 0$.

Geometrycznie oznacza to, że gdy jakieś równanie z dwiema zmiennymi przedstawimy graficznie, a następnie utworzymy nowe równanie przez napisanie w pierwotnym równaniu zamiast x i y odpowiednio $x - m$ i $y - n$, to miejscem geometrycznym nowego równania będzie taka sama krzywa, lecz przesunięta o m równolegle do osi X , a następnie o n równolegle do osi Y .

IV. Funkcje, omówione w tym paragrafie, możemy uogólnić w podobny sposób jak w § 3 i § 8 rozdz. I uogólniliśmy funkcje $y = x^2$ i $y = ax^2$. Jeżeli mianowicie w równaniu jakimś z dwiema zmiennymi x i y zamiast x napiszemy $x - m$, to równanie nowe przedstawiać będzie funkcję, która przyjmuje te same wartości co funkcja pierwotna, lecz dla wartości x większych o $|m|$ lub mniejszych o $|m|$ zależnie od tego, czy $m > 0$, czy $m < 0$. Jeżeli zaś w równaniu z dwiema zmiennymi zamiast y napiszemy $y - n$, to równanie takie przedstawiać

Tak np. przedstawia równanie: $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ koło o promieniu r , którego środek leży w punkcie $C(m, n)$.

Równanie $(x-m)(y-n) = k$ przedstawia hiperbolę, powstałą z równoległego przesunięcia hiperboli $xy = k$ o m równoległe do osi X , a następnie o n równoległe do osi Y .

W postaci $(x-m)(y-n) = k$ można przedstawić t. zw. *funkcję homograficzną*, t. j. funkcję, będącą ilorazem dwu funkcji linjowych.

Wyjaśnimy to na przykładzie: $y = \frac{x-5}{2x-4}$.

Przekształcając ten wzór, otrzymamy: $2xy - 4y = x - 5$, a stąd:

$$xy - \frac{1}{2}x - 2y + \frac{5}{2} = 0.$$

Przekształcając zaś równanie: $(x-m)(y-n) = k$, znajdziemy:

$$xy - nx - my + (mn - k) = 0.$$

Oba równania są zgodne, jeżeli: $n = \frac{1}{2}$, $m = 2$, $mn - k = \frac{5}{2}$, czyli $k = -\frac{3}{2}$.

Wykresem funkcji $y = \frac{x-5}{2x-4}$ jest tedy hiperbola, która powstaje z równoległego przesunięcia hiperboli $xy = -\frac{3}{2}$ tak, że środek jej znajduje się w punkcie $C(2, \frac{1}{2})$. Wykreśl tę hiperbolę, wskaż asymptoty i ułóż na podstawie wykresu tabelkę zmienności danej funkcji.

Ćwiczenia.

1. Przedstawić graficznie funkcje, wyrażone równaniami:

- a) $x^2 + y^2 = 25$; b) $4x^2 + 9y^2 = 36$; c) $x^2 - y^2 = 9$;
d) $y^2 - x^2 = 9$; e) $xy = 6$; f) $x - 4y^2 = 0$.

2. Rozwiązać rysunkiem i rachunkiem układy równań:

- a) $x^2 + y^2 = 676$, b) $xy = 6$, c) $4x - 3y^2 = 0$,
 $y + 24x = 0$; $3x + 2y + 12 = 0$; $y + 2x = 4$;
d) $9x^2 + y^2 = 25$, e) $x^2 + y^2 - 2y = 3$, f) $x^2 - 4y^2 = 4$,
 $x + y = 1$; $x - y = 1$; $y = x + 1$.

3. Rozwiązać układy równań:

- a) $xy = 48$, b) $x + y = 7.5$, c) $x - y = 1$,
 $x : y = 3$; $xy = 14$; $4xy = 35$;
d) $x^2 + y^2 = 10$, e) $(x+2)(y-3) = 4$, f) $(x+y) : (x-y) = 7$,
 $x + y = 2$; $(y-3) : (x+2) = 4 : 1$; $(x+y)(x-y) = 7$;
g) $(x+2)(3-y) = 2$, h) $x^2 + y^2 + xy = 7$,
 $x + y = 2$; $x + 2y = 1$;
i) $\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 4$, j) $\frac{1}{x-2} + \frac{4}{y+3} = 1$,
 $x + y + 1 = 0$; $3x - 2y = 2$;

$$k) \frac{2x+1}{4y+1} - \frac{y+1}{x-5} = 2, \\ x-5y=2;$$

$$m) \frac{x}{x^2-1} + \frac{y}{x+1} = 1, \\ 3x-2y=4;$$

$$o) \frac{3x-1}{x^2-y^2} - \frac{3y+1}{x+y} = 2, \\ (x+y+1)^2 - (x+y-1)^2 = 8;$$

$$p) \frac{5}{x+1} - \frac{4}{y-1} = 1, \\ \frac{x+y+1}{4y-8x} + \frac{5x-4y}{6y-12x} = 1;$$

$$s) \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} = 30, \\ 4x+3y=11;$$

$$u) \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2.5, \\ x+y=4.5;$$

$$y) \frac{y+3}{x-1} - \frac{x-1}{y+3} = 1.5, \\ x-2y=1;$$

$$l) \frac{x+3}{y+3} + \frac{x-y}{x+1} = 1, \\ y=3x-2;$$

$$n) \frac{(x-1)^2}{(x+y)^2} - \frac{(y+3)^2}{(x+y)^2} = 3, \\ x-y=7;$$

$$r) \left(\frac{3x+1}{x-y} \right)^2 - \frac{6x+1}{x-y} = 144,$$

$$\frac{x+y}{2x-y} - \frac{x}{4x-2y} = 1;$$

$$t) \left(\frac{2x-y}{x+y} \right)^2 - 4 \frac{2x-y}{x+y} + 3 = 0, \\ x-4(2y-3)=0;$$

$$w) \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{15}{4}, \\ 2x-3y=1;$$

$$z) \frac{x}{x-y} - \frac{x-y}{x} = 4.8, \\ 2x-y=3.$$

4. Zbadać, ile rozwiązań ma następujący układ równań:

$$a) x^2 = y+1, \\ y = 4x-5;$$

$$b) xy = 2, \\ x+2y = 4;$$

$$c) x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0, \\ x+y+2=0;$$

$$d) x^2 - 6x - y^2 + 5 = 0, \\ x-y-1=0;$$

$$e) y^2 + xy + x - 1 = 0, \\ x+y-1=0;$$

$$f) x^2 - y^2 + x + y = 0, \\ y = x+1;$$

$$g) x^2 + 2x - y^2 = 0, \\ y = x+1;$$

$$h) xy - 2x^2 = 2, \\ y = 2x,$$

Wyjaśnić wyniki, rozwiązując układ równań także graficznie.

5. Niżej dane jest równanie prostej i równanie krzywej. Zbadać, jaką wartość musi mieć parametr m w równaniu prostej, aby ta prosta stykała się z krzywą. (Wykres!):

$$a) x^2 - y = 4, \\ y = 2x + m;$$

$$b) xy = 6, \\ 3x + 2y = 4m;$$

$$c) x^2 + y^2 = 25, \\ y = -\frac{4}{3}x + m;$$

$$d) x^2 - y^2 = 16, \\ x + 0.6y = m;$$

$$e) x^2 + y = 4x, \\ y = mx + 1;$$

$$f) xy + 4x + 2y = 0, \\ y = mx.$$

6. a) Wykazać, że prosta $y = mx - (m - 1)$ przecina parabolę $y = -x^2 + 2x + 3$ dla wszelkich wartości m .

b) Zbadać, jakie położenie ma prosta $y = mx + 2$ względem krzywej $x^2 + y^2 = 4$ zależnie od wartości m .

c) Jakie warunki musi spełniać m w równaniu prostej $y = x + m$, aby ta prosta przecinała parabolę $y = x^2 - 6x + 5$ w pierwszej ćwiartce? Ile punktów przecięcia się znajdzie się w ćwiartce pierwszej zależnie od wartości m ?

7. a) Jaki warunek musi spełniać m w równaniu prostej $y = m$, aby ta prosta przecinała krzywą: $x^3 + 9y^3 - 4x - 36y + 31 = 0$. Kiedy ta prosta styka się z krzywą? Wyznaczyć współrzędne punktów styczności. Zbadać w podobny sposób położenie prostej $x = n$ względem krzywej i wskazać prostokąt, wewnątrz którego zawarte są wszystkie punkty krzywej.

b) Zbadać w podobny sposób położenie prostych $y = m$ i $x = n$ względem krzywych:

$$\alpha) x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0;$$

$$\beta) x^3 - y^3 + 2x = 0;$$

$$\gamma) x^3 - xy + 2x + 4 = 0.$$

8. Rozwiązać następujące zadania i przedyskutować:

a) Ze stacyj oddalonych od siebie o 14 km wyjeżdżają na przeciw siebie równocześnie dwa pociągi i, poruszając się ruchem jednostajnym, spotykają się po 12 minutach. Pierwszy pociąg potrzebuje do przebycia 1 km o m sekund więcej czasu niż drugi. Obliczyć prędkości obu pociągów.

b) Pole prostokąta wynosi 36 cm^2 , a obwód 2s. Obliczyć boki prostokąta.

c) Obwód prostokąta wynosi 12 cm , a pole p cm^2 . Obliczyć boki prostokąta.

d) Pole prostokąta wynosi 6 cm^2 , a boki różnią się o d cm . Obliczyć boki prostokąta.

e) W koło o danym promieniu r wpisano prostokąt, którego obwód wynosi 2s. Obliczyć boki prostokąta, uważając r za liczbę stałą.

f) Pobocznicą prostopadłościanu o podstawie kwadratowej ma pole 4 dm^2 ; różnica krawędzi bocznej i przypodstawnej wynosi m . Obliczyć krawędzie prostopadłościanu.

g) Dokoła wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 2 cm i 4 cm zakreślono promieniem r okrąg koła. Obliczyć odległości punktu przecięcia się koła z przeciwprostokątną od obu przyprostokątnych.

h) Obliczyć przyprostokątne trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej 4 cm , mając dany promień r koła wpisanego w trójkąt.

i) Na kole o danym promieniu 1 cm opisano trapez równoramienny, mający pole m . Obliczyć boki równoległe trapezu.

j) W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, $AD = BC$, wynosi wysokość 1 cm, a suma boków równoległych $AB + CD = 3$ cm. Przekątne AC i BD trapezu przecinają się w punkcie M , a suma pól trójkątów AMB i CMD wynosi m . Obliczyć boki równoległe trapezu.

k) O ile należy powiększyć podstawę prostokąta, wynoszącą 6 cm, a o ile pomniejszyć wysokość, wynoszącą 4 cm, aby pole jego nie zmieniło się, a obwód wynosił 2 s?

l) W półkole o średnicy $2r$ wpisano prostokąt. Mając dany obwód $2s$ prostokąta, obliczyć jego boki.

9. Rozwiązać równania:

$$\begin{aligned} a) x^4 - 5x^3 + 4 &= 0; & b) x^4 + x^2 &= 2; & c) x^4 - 9x^3 &= 0; \\ d) 4(x^4 + 1) &= 17x^2; & e) (x^3 - 6) : 30 &= 5 : (x^3 - 1); \\ f) (x + 1)^3 : (\sqrt{3} + x) &= (\sqrt{3} - x) : (x - 1)^3; \\ g) \frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3 + 2} &= \frac{8x^3 - 1}{x^2 - 4}; & h) \frac{x^2 - 4}{2} + \frac{17}{2x^2 - 8} &= \frac{x - 2}{x + 2} + \frac{4}{x - 2}. \end{aligned}$$

10. Zbadać ilość, oraz znaki pierwiastków następujących równań w zależności od parametru m :

$$\begin{aligned} a) x^4 - 6x^3 - m^2 &= 0; & b) x^4 - mx^3 + 16 &= 0; \\ c) (m + 2)x^4 - 2mx^3 + (m - 1) &= 0; \\ d) x^4 - (m - 2)x^3 + (m^2 - 7) &= 0. \end{aligned}$$

11. Rozwiązać graficznie układy równań:

$$\begin{aligned} a) x^2 - 2x - y &= 3, & b) x^2 + y^2 &= 25, & c) x^3 + y^3 &= 25, \\ x^2 - 2x - 3y + 7 &= 0; & x^2 - y^2 &= 7; & y - x^3 + 6x &= 5; \\ d) 2x^2 + 3x &= 2y + 8, & e) x^2 + y^2 &= 25, & f) x^3 + y^3 &= 25, \\ xy &= 6; & xy &= 12; & x^2 - y &= 5, \end{aligned}$$

12. Rozwiązać układy równań:

$$\begin{aligned} a) 2x^2 + 3y &= 12, & b) 4x^2 - y^2 + 2y &= 2, & c) 5x^2 - 6y^2 &= 80, \\ x^2 - y &= 11; & 6x^3 + 5y &= 6\frac{1}{2}; & 7x^2 - 6y^3 &= 102; \\ d) x^2 + y^2 + xy &= 3, & e) x^2 + y^2 &= 29, & f) x^3 + y^3 &= \frac{5}{2}xy, \\ x^2 + y^2 &= 5; & xy &= 10; & xy &= 8; \\ g) (x^2 + y^2) : (x^2 - y^2) &= 5 : 4, & h) 4(2x - 1)^2 - 15(y - 3)^2 &= 21, \\ xy + 3 &= 0; & 6(2x - 1)^3 + 25(y - 3)^3 &= 79; \\ i) x^3 + xy &= 5, & j) x^2 + xy + y^2 &= 39, & k) x^2 + y^2 - x - y &= 4, \\ xy + y^2 &= -1; & xy &= 10; & xy + 2 &= 0; \\ l) x^2 + xy + x + y &= 8, & m) x^3 - 3xy + 5y^3 &= 11, \\ xy + y^2 + 2 &= 0; & xy + y^3 &= 10; \end{aligned}$$

$$n) \frac{6}{x} - \frac{1}{y} = -1,$$

$$\frac{1}{xy} = 2;$$

$$p) (x+y)^2 - 2(x+y) + 1 = 0,$$

$$2x^2 - y^2 + xy + 10 = 0;$$

$$r) \frac{x^2}{y^2} - 7 \cdot \frac{x}{y} + 12 = 0,$$

$$x^2 + 11y^2 + 12y + 1 = 0;$$

$$t) \frac{x^2 + 2y}{3x} - \frac{3x}{x^2 + 2y} = \frac{8}{3},$$

$$x^2 + y = 5;$$

$$v) \frac{x(x-y)}{3x-2} + \frac{3x-2}{x(x-y)} = 2,$$

$$2x^2 - y^2 - 6y - 2 = 0;$$

$$x) 2x^2 + xy = 2,$$

$$xy + y^2 = 3;$$

$$z) x^2 + xy + y^2 = 3,$$

$$3x^2 - y^2 = 11;$$

$$o) \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3},$$

$$x^2 + y^2 = 5;$$

$$q) x^2 - y^2 + x + y = 20,$$

$$x^2 - y^2 - (x-y) = 12;$$

$$s) x^2 - 2xy + 2y^2 = 13,$$

$$y(x-y) = 6;$$

$$u) \frac{x^2 - 3y}{2y} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3} = \frac{7}{2},$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3} - \frac{x^2 - 3y}{2y} = \frac{5}{2};$$

$$w) \frac{3x^2 + 3y^2}{5xy} + \frac{20xy}{3x^2 + 3y^2} + 4 = 0,$$

$$y(x+y) = 6;$$

$$y) x^2 + xy = 4,$$

$$y^2 - xy = 21;$$

$$z) 2x^2 - 4xy + y^2 = 7,$$

$$3x^2 - 6xy + y^2 = 10.$$

13. a) Pociąg przebył 72 km w pewnym czasie. Gdyby prędkość pociągu była większa o $12 \frac{\text{km}}{\text{godz.}}$, to drogę tę przebyłby w czasie o $\frac{1}{2}$ godz. krótszym. Jaka była prędkość pociągu i w jakim czasie przebył całą drogę?

b) W sali szkolnej jest w ławkach miejsce dla 32 uczniów. Gdyby dodano 2 ławki, a w każdej ławce umieszczono o jednego ucznia więcej, to zmieściłoby się w sali 50 uczniów. Ile ławek jest w sali, a ilu uczniów w każdej ławce?

c) Kupiec sprowadził sztukę sukna za 648 zł. Z sztuki tej odciął dla siebie 3 m, a pozostałą część sprzedał za 735 zł, biorąc za każdy metr o 3 zł drożej, niż zapłacił. Ile m sukna było w sztuce i ile płacił kupiec za 1 m?

d) Kupiec sprowadził za 351 zł pewną ilość cukru. Gdy cukier potaniał o 6 gr na kg, to otrzymał za tę samą sumę o 9 kg więcej. Ile kg cukru sprowadził pierwszym razem i po ile zł płacił za kg.

e) W pewnej fabryce wypłacano robotnikom 98 zł dziennie. Po rozszerzeniu fabryki donajęto 6 robotników i podwyższono każdemu płacę o 20 gr dziennie. Wypłacano wtedy robotnikom

123 zł dziennie. Ilu robotników było zajętych pierwotnie w fabryce i ile zł pobierał każdy dziennie?

[Ile jest możliwych rozwiązań?].

f) Kapitał 750 zł oddany na procent prosty przyniósł po pewnym czasie 150 zł dochodu. Taki sam dochód przyniósłby ten kapitał w czasie krótszym o rok, gdyby go oddano na procent wyższy o 1. Obliczyć, jak długo procentował się kapitał i na jaki procent był złożony?

g) Pewien kapitał, złożony na procent prosty, przyniósł w pierwszym roku pewien dochód. Gdy w drugim roku powiększono kapitał o 600 zł, a stopę procentową zniżono o 1, to dochód był większy o 3 zł. Gdy w trzecim roku zwiększono kapitał jeszcze o 300 zł, a stopa procentowa była większa o $\frac{1}{2}$, niż w pierwszym roku, to dochód był $1\frac{1}{2}$ razy większy, niż w pierwszym roku. Jaki kapitał oddano na procent w pierwszym roku i jaka była w tym roku stopa procentowa?

[Oddano kapitał x na $y\%$. Dochód w pierwszym roku wynosił: $\frac{xy}{100}$ i t. d.].

h) Aby wybudować dom w 72 dniach, zgodzono pewną ilość robotników i umówiono się z nimi o ilość godzin dziennej pracy. Gdyby zdołano pozyskać o 10 robotników więcej, a wszyscy zgodzili się pracować o 1 godz. dziennie dłużej, to dom byłby gotów za 48 dni. Ze zgodzonych robotników nie stanęło do pracy trzech, pozostali pracowali jednak o 2 godz. dziennie dłużej i skończyli budowę w 64 dniach. Ilu robotników zgodzono pierwotnie i ile godzin dziennie mieli pracować?

[Zgodzono x robotników, którzy mieli pracować po y godzin dziennie. Przy budowie było w ogólności $72 \cdot x \cdot y$ godz. pracy i t. d.].

i) Komendant twierdzy ma dla załogi zapas żywności na 30 dni przy normalnej porcji dziennej. W razie przewidzianego 50-ciodniowego oblężenia, ma albo odesłać 640 żołnierzy i zmniejszyć porcję dzienną każdego żołnierza o $\frac{1}{2}$ kg, albo odesłać 400 ludzi, a porcję zmniejszyć o $\frac{1}{2}$ kg. Ilu żołnierzy liczy załoga i ile kg wynosi normalna porcja?

j) Przebyłem 72 km koleją, a 16 km rowerem w 4 godz. Zpowrotem przebyłem tę samą drogę w $3\frac{1}{2}$ godz., bo rowerem jechałem wprawdzie z prędkością o $2 \frac{\text{km}}{\text{godz.}}$ mniejszą, ale pociąg (tym razem pośpieszny) jechał z prędkością większą o $18 \frac{\text{km}}{\text{godz.}}$. Z jaką prędkością jechałem rowerem, a z jaką poruszał się pociąg?

k) Prostokątny kawałek płótna zbiega się po wypraniu o 12-tą część na długość, a o 20-tą część na szerokość. Jakie były pierwotne wymiary tego kawałka płótna, jeżeli po wypraniu powierzchnia jego zmniejszyła się o 1860 cm^2 , a obwód o 38 cm ?

l) Powierzchnia prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wynosi 16 cm^2 , a przekątna jego 3 cm . Obliczyć krawędzie!

14. Rozwiązać i sprawdzić układy równań:

- a) $xy + xz + yz = 31$, b) $x^2 + y^2 + z^2 = 38$, c) $x^2 + xy + z^2 = 9$,
 $x + y + z = 10$, $x + y = 3$, $2x + 3y + z = 4$,
 $2x + y - z = 11$; $y + z = 8$; $2x + 2y + z = 0$;
d) $x^2 + y^2 = 5$, e) $xy = 8$, f) $x + y + z = 10$,
 $y^2 + z^2 = 50$, $xz = 12$, $x(y + z) = 16$,
 $x + z = 9$; $yz = 24$; $yz = 15$;
g) $xy - xz = 21$, h) $2x^2 + xy + z^2 = 3$,
 $yz + x^2 = -1$, $xz = 2$,
 $x + y + z = 0$; $x - 2z - y = 0$.

15. a) Obwód trójkąta prostokątnego wynosi 30 cm , a przyprostokątne jego różnią się o 7 cm . Obliczyć boki trójkąta.

b) Pola trzech ścian prostopadłościanu wynoszą: 9 cm^2 , 12 cm^2 i 27 cm^2 . Obliczyć krawędzie.

c) Pole pobocznicy prostopadłościanu wynosi 128 cm^2 , przekątna prostopadłościanu 98 cm , a suma trzech różnych krawędzi 16 cm . Oblicz krawędzie.

d) Obwód rombu jest od sumy przekątnych o 6 cm większy. Pole rombu wynosi 24 cm^2 . Obliczyć bok rombu i przekątne.

e) Między pierwiastkami x_1 i x_2 równania: $x^2 - 2mx + (m + 1) = 0$ zachodzi związek: $x_1^2 + x_2^2 = 10$. Obliczyć x_1 , x_2 i m .

f) Między pierwiastkami x_1 i x_2 równania:

$$x^2 - (2m + 1)x + (m^2 + 1) = 0$$

zachodzi związek: $3x_1 - x_2 = 1$. Obliczyć x_1 , x_2 i m .

16. a) Przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratowej pozostaje do przekątnej podstawy w stosunku $k:1$, a przekątna ściany bocznej wynosi 5 cm . Obliczyć krawędzie prostopadłościanu.

b) Pole pobocznicy prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wynosi 4 dm^2 , a przekątna prostopadłościanu m . Obliczyć krawędzie prostopadłościanu.

c) Przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratowej wynosi 6 cm , a pole pobocznicy $m \text{ cm}^2$. Obliczyć krawędzie.

d) Pole trójkąta równoramiennego o ramieniu 4 cm wynosi p . Obliczyć podstawę i wysokość.

e) Wykreślono romb o boku 2 cm, mający pole p . Obliczyć przekątne.

f) Obliczyć podstawę i ramię trójkąta równoramiennego, mając dane jego pole m i wiedząc, że koło zakreślone promieniem 2 cm dokoła środka podstawy styka się z ramionami trójkąta.

g) Wykreślono trapez równoramienny, którego podstawa wynosi 6 cm; mniejszy bok równoległy do niej wynosi x , a bok nierównoległy $\frac{1}{2}x$. Obliczyć x i wysokość y trapezu, jeżeli prostokąt, zbudowany z boku x i wysokości y , ma przekątną, równą m .

h) Na kole o danym promieniu r opisano trapez równoramienny, którego przekątna wynosi d . Obliczyć boki równoległe trapezu.

i) Przednie koło u wozu robi na drodze, wynoszącej 3000 m, o 150 obrotów więcej niż tylne. Gdybyśmy powiększyli obwód każdego koła o m , to przednie koło robiłoby na tej drodze o 100 obrotów więcej niż tylne. Obliczyć obwody obu kół.

j) Jaki warunek musi spełniać r , aby koło $x^2 + y^2 = r^2$ przecinało hiperbolę $xy = 6$?

k) Jakie położenie względem koła $x^2 + y^2 = 4$ ma parabola $y = x^2 + m$ zależnie od wartości m ?

l) Ile punktów wspólnych ma parabola $y = mx^2 - 13$ z kołem $x^2 + y^2 = 25$ zależnie od wartości m ?

m) Zbadać, jakie wzajemne położenie mają koła: $x^2 + y^2 = 25$ i $(x - m)^2 + y^2 = 9$ zależnie od wartości m .

17. Przedstawić graficznie funkcje, dane zapomocą następujących równań, i ułożyć dla nich na podstawie wykresu tabelki zmienności:

a) $y^2 - x = 0$;

b) $y^2 + x - 4 = 0$;

c) $y^2 - x - 2y + 3 = 0$;

d) $\frac{1}{2}y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$;

e) $x^2 + y^2 = 9$;

f) $4x^2 + 4y^2 = 25$;

g) $x^2 - y^2 = 9$;

h) $y^2 - x^2 = 9$;

i) $y^2 - x^2 = 4$.

18. Przesunąć koło $x^2 + y^2 = 25$ tak, aby środek jego był w punkcie:

a) $C_1(2, 3)$; b) $C_2(-3, 4)$; c) $C_3(4, -3)$; d) $C_4(-5, -5)$.

Znaleźć równanie koła w nowym położeniu. Sporządzić na podstawie wykresu dla funkcji, wyrażonej tem równaniem, tabelkę zmienności.

19. Przesunąć równolegle hiperbolę a) $xy = 4$, b) $xy = -6$ tak, aby jej środek był w punkcie:

a) $C_1(4, 2)$; b) $C_2(-2, 3)$; c) $C_3(4, -2)$; d) $C_4(-2, -5)$.

Ułożyć równanie hiperboli w nowym położeniu. Sporządzić przy pomocy wykresu tabelkę zmienności funkcji, wyrażonej tem równaniem.

20. Przedstawić graficznie następujące funkcje, sprowadziwszy określające je wzory do postaci $(x - m)(x - n) = k$:

$$\begin{array}{lll} a) y = \frac{x-1}{x+1}; & b) y = \frac{2x}{3-x}; & c) y = \frac{x-3}{x-4}; \\ d) y = \frac{x+1}{2x-6}; & e) y = \frac{x-2}{x}; & f) y = \frac{4}{2-x}. \end{array}$$

Ułożyć na podstawie wykresu tabelki zmienności tych funkcji (uwzględnić miejsce zerowe).

21. a) Ile gramów złota 900-ej próby dodać należy do 200 g złota 800-ej próby, aby otrzymać złoto n -tej próby? Zbadać jak zależy szukana wartość od n .

b) Do wyznaczania ciepła właściwego ciał stałych używamy kalorymetru, zawierającego 300 g wody o 20°C . Po wrzuceniu ciała, ważącego 200 g, o temperaturze 100°C , do wody, odczytujemy końcową temperaturę t . Zbadać, jak zależy ciepło właściwe badanego ciała od t .

c) W kwadracie $ABCD$, którego bok wynosi 2 cm, wykreślono przekątne AC i BD i obrano na boku AB (lub jego przedłużeniu) punkt M w odległości x od A (tak, że $AM = x$). Przez punkt M i środek kwadratu wykreślono prostą, która przecina bok AD , lub jego przedłużenie w punkcie N . Zbadać, jak zmienia się $DN = y$ ze zmianą x .

d) Wykreślono trójkąt równoramienny o podstawie 4 cm, a ramionach x i narysowano dwusieczne kątów przypośtawnych. Zbadać, jak zmienia się odcinek, łączący punkty, w których owe dwusieczne przecinają ramiona, gdy zmienia się ramię x trójkąta.

22. a) Przedstawić graficznie na jednym rysunku funkcje $y = x$ i $y = \frac{1}{x}$, a następnie sporządzić na tym samym rysunku wykresy funkcji: $\alpha) y = x + \frac{1}{x}$ i $\beta) y = x - \frac{1}{x}$, nie uciekając się już do rachunku (tylko na podstawie wykresów poprzednich funkcji) Omówić przebieg tych funkcji.

b) Trójkąt równoramienny o obwodzie $2s$ ma wysokość 1 dm. Wyrazić boki trójkąta jako funkcje s i podać wykres tych funkcji w podobny sposób jak w zadaniu 22 a.

c) Sporządzić wykres funkcji $y = x - \frac{2}{x-1}$ (jak w zadaniu 22 a).

d) Sporządzić wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ (jak w zadaniu 22 a).

Rozdział IV.

Równania i funkcje niewymierne.

§ 1. Równania niewymierne.

Wiele zagadnień, zwłaszcza geometrycznych prowadzi do równań, które zawierają kwadratowe pierwiastki wyrażeń, w których znajduje się niewiadoma. Równania takie nazywamy *równaniami niewymiernymi*. Jak można równania takie rozwiązać, wyjaśnimy na kilku przykładach:

Przykład 1. Rozwiązać równanie: $\sqrt{2x-3} = x-19$. Aby uwolnić równanie od pierwiastka, podnosimy obie jego strony do kwadratu; otrzymamy:

$$2x-3 = x^2 - 38x + 361.$$

Równanie to nie jest jednak równoważne danemu równaniu. Wprawdzie każdy pierwiastek pierwszego równania musi sprawdzać i drugie równanie (dlaczego?), lecz niekażdy pierwiastek drugiego równania sprawdza równanie pierwsze. Jeżeli drugie równanie sprawdza się dla pewnej wartości x , to dla tej wartości x

$$\text{albo } \sqrt{2x-3} = x-19, \text{ albo } \sqrt{2x-3} = -(x-19).$$

Aby zgóry wykluczyć pierwiastki ostatniego równania, stawiamy warunek $x-19 \geq 0$ *). Pierwiastki danego równania otrzymamy zatem, znajdując pierwiastki równania:

$$2x-3 = x^2 - 38x + 361,$$

spełniające warunek $x-19 \geq 0$.

Ostatnie równanie ma pierwiastki $x_1 = 14$ i $x_2 = 26$. Tylko drugi pierwiastek spełnia dodatkowy warunek, tylko $x = 26$ jest pierwiastkiem danego równania.

Mogłoby się здаwać, że powinniśmy jeszcze uczynić zastrzeżenie, że wyrażenie pod pierwiastkiem musi być dodatnie. Jest to jednak

*) Znak $=$ nie wyklucza wprawdzie pierwiastków drugiego równania, należy go jednak zatrzymać, bo w tym przypadku oba równania nie różnią się od siebie, mają więc wspólne pierwiastki.

w tym przykładzie zbędne; równanie bowiem, które otrzymaliśmy, podnosząc dane równanie do kwadratu, wyraża już, że wyrażenie pod pierwiastkiem równa się kwadratowi jakiegoś wyrażenia, a tem samem musi być dodatnie.

Równania $A = B$ i $A^2 = B^2$ (gdzie A i B oznaczają dowolne wyrażenia zawierające x) nie są w ogólności równoważne. Zachodzi między nimi następujący związek: Każdy pierwiastek pierwszego równania jest zarazem pierwiastkiem drugiego równania; każdy pierwiastek drugiego równania sprawdza albo równanie $A = B$, albo równanie $A = -B$). Równanie $A = B$ sprawdza się zatem albo dla wszystkich pierwiastków równania $A^2 = B^2$, albo dla niektórych, albo dla żadnego. W tym ostatnim przypadku równanie $A = B$ nie ma pierwiastków. Poza pierwiastkami równania $A^2 = B^2$ nie ma równanie $A = B$ pierwiastków.

Przykład 2. Rozwiązać równanie: $\sqrt{2x-3} = 5$.

Podnosimy obie strony do kwadratu: $2x-3 = 25$.

Ostatnie równanie jest równoważne danemu, bo równanie $\sqrt{2x-3} = -5$ jest niemożliwe. Zatem pierwiastek ostatniego równania $x = 14$ jest zarazem i pierwiastkiem danego równania.

Przykład 3. Rozwiązać równanie: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = 5$.

Ponieważ liczby pod znakami pierwiastkowania nie mogą być ujemnymi, otrzymujemy jako pierwsze zastrzeżenie $x \geq 1$ i $x \geq -4$, które jest spełnione, jeżeli $x \geq 1$.

Podnosimy obie strony równania do kwadratu:

$$x-1 + 2\sqrt{x^2+3x-4} + x+4 = 25.$$

Równanie to jest równoważne danemu, bo $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4}$, jako suma dwu liczb dodatnich, nie może wynosić -5 .

Przekształcamy ostatnie równanie w następujący sposób:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2+3x-4} &= 22-2x, \\ \sqrt{x^2+3x-4} &= 11-x. \end{aligned}$$

Podnosimy obie strony do kwadratu, czyniąc zastrzeżenie (porównaj, przykład 1): $11-x \geq 0$, czyli $x \leq 11$. Otrzymamy:

$$x^2+3x-4 = 121-22x+x^2.$$

Równanie to jest równoważne danemu, jeżeli $1 \leq x \leq 11$. Rozwiązując je znajdziemy:

$$x = 5.$$

Znaleziony pierwiastek spełnia ostatnią nierówność, jest więc pierwiastkiem danego równania.

*) Tylko w przypadku $B = 0$ sprawdzają się oba równania.

Przykład 4. Rozwiązać równanie:

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1} = \sqrt{10x-1}.$$

Zauważymy przedewszystkiem, że aby takie równanie było możliwe, nie mogą liczby pod pierwiastkami mieć wartości ujemnych. Musi być zatem: $4x+5 \geq 0$, $x-1 \geq 0$, $10x-1 \geq 0$. Z nierówności tych wynika dla x ograniczenie: $x \geq 1$.

Podnosimy obie strony równania do kwadratu:

$$5x+4+2\sqrt{4x^2+x-5}=10x-1.$$

Równanie to jest równoważne danemu pod warunkiem $x \geq 1$ (dla czego?). Porządkujemy je w następujący sposób:

$$2\sqrt{4x^2+x-5}=5x-5$$

i podnosimy obie strony do kwadratu:

$$4(4x^2+x-5)=25x^2-50x+25.$$

Pierwiastki tego równania są zarazem pierwiastkami poprzedniego równania, jeżeli $5x-5 \geq 0$ (porównaj przykład 1), czyli gdy $x \geq 1$. Porządkując i rozwiązując ostatnie równanie, znajdziemy:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 5 &= 0, \\ x_1 &= 1, \quad x_2 = 5. \end{aligned}$$

Ponieważ oba pierwiastki spełniają warunek $x \geq 1$, to oba są zarazem pierwiastkami danego równania.

Przykład 5. Rozwiązać równanie:

$$\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x+2} = 1.$$

Pierwszem zastrzeżeniem jest (jak w poprzednim przykładzie):

$$3x-2 \geq 0 \text{ i } 2x+2 \geq 0, \text{ skąd wynika } x \geq \frac{2}{3}.$$

Podnosząc obie strony danego równania do kwadratu, otrzymamy równanie:

$$3x-2-2\sqrt{6x^2+2x-4}+2x+2=1,$$

które obok pierwiastków danego równania (o ile takie istnieją) zawiera pierwiastki równania:

$$\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x+2} = -1 \text{ (o ile takie istnieją).}$$

Aby wartość x sprawdzała dane równanie, a nie spełniała ostatniego, musi być $\sqrt{3x-2} > \sqrt{2x+2}$. Stąd wynika: $3x-2 > 2x+2$, czyli $x > 4$.

Porządkując i rozwiązując, jak w przykładzie 1, równanie, otrzymane z podniesienia danego równania do kwadratu, znajdziemy kolejno:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{6x^2+2x-4} &= 5x-1, \\ 4(6x^2+2x-4) &= 25x^2-10x+1. \end{aligned}$$

[Zastrzeżenie $5x-1 \geq 0$ możemy pominąć, bo jest ono spełnione wobec warunku $x > 4$].

$$\begin{aligned} x^2 - 18x + 17 &= 0, \\ x_1 &= 1, \quad x_2 = 17. \end{aligned}$$

Tylko drugi pierwiastek spełnia wszystkie poprzednie warunki, które redukują się do $x > 4$.

Jedynym pierwiastkiem danego równania jest $x = 17$.

Mając rozwiązać równanie niewymierne, zawierające pierwiastki kwadratowe, czynimy najpierw zastrzeżenie, że każde wyrażenie pod znakiem pierwiastkowania musi być dodatnie. Przy dalszem przekształcaniu podnosimy obie strony równania do kwadratu, przyczem układamy znów pewne nierówności, które muszą być spełnione, jeżeli nowe równanie ma być równoważne poprzedniemu. Pierwiastki otrzymanego równania sprawdzają tylko wtedy dane równanie, jeżeli spełnione są dla nich wszystkie nierówności, wyprowadzone w ciągu przekształcania. Nierówności te można często ująć w jedną, gdyż często jedna wynika z drugiej.

Przykład 6. W kole o danym promieniu r wykreślono taką cięciwę, że suma tej cięciwy i jej odległości od środka koła wynosi s . Obliczyć cięciwę.

Jeżeli cięciwę oznaczmy literą x , to odległość jej od środka koła wynosi według twierdzenia Pitagorasa $\sqrt{r^2 - (\frac{1}{2}x)^2}$. Wskutek znaczenia s otrzymujemy równanie:

$$x + \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} = s.$$

Ponieważ x , r , s i $\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}$ oznaczają długości pewnych odcinków, to musi być:

$$x \geq 0, r > 0, s > 0, r \geq \frac{1}{2}x.$$

Aby rozwiązać otrzymane równanie, przekształcamy je w następujący sposób, zrozumiały bez objaśnień:

$$\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}} = s - x,$$

$$r^2 - \frac{x^2}{4} = s^2 - 2sx + x^2, \text{ pod warunkiem: } s \geq x.$$

$$4r^2 - x^2 = 4s^2 - 8sx + 4x^2,$$

$$5x^2 - 8sx + 4(s^2 - r^2) = 0.$$

Ostatnie równanie ma tylko wtedy pierwiastki, jeżeli:

$$\Delta = 64s^2 - 80(s^2 - r^2) = -16s^2 + 80r^2 \geq 0.$$

Stąd wynika dla s następujące ograniczenie:

$$s \leq r\sqrt{5}.$$

Pierwiastki ostatniego równania dają rozwiązanie zadania tylko wtedy, jeżeli spełniają warunki: $x \geq 0$, $x \leq 2r$, $x \leq s$.

Drugi z tych warunków jest dla pierwiastków równania spełniony stale. Trzecie od końca równanie: $r^2 - \frac{x^2}{4} = (s-x)^2$ wskazuje bowiem, że $r^2 - \frac{x^2}{4} \geq 0$, wskutek czego (wobec $r > 0$ i $x \geq 0$) jest $r \geq \frac{x}{2}$, a więc $x \leq 2r$.

Aby znaleźć warunki, które musi spełniać s , aby pierwiastki x równania spełniały nierówność $0 \leq x \leq s$, oznaczamy symbolem $f(x)$ trójmian $5x^2 - 8sx + 4(s^2 - r^2)$ i obliczamy:

$$f(0) = 4(s^2 - r^2),$$

$$f(s) = s^2 - 4r^2,$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{4}{5}s.$$

Aby równanie $f(x) = 0$ miało tylko jeden pierwiastek między 0 a s , musi być $f(0)f(s) < 0$, czyli $4(s^2 - r^2)(s^2 - 4r^2) < 0$. Nastąpi to (rozwiąż ostatnią nierówność!), jeżeli $r^2 < s^2 < 4r^2$, czyli $r < s < 2r$. Ponieważ wtedy $f(0) > 0$, $f(s) < 0$, to mniejszy pierwiastek równania spełnia warunki zadania.

Aby równanie $f(x) = 0$ miało dwa pierwiastki między 0 a s , musi być:

$$\Delta > 0, \quad f(0) > 0, \quad f(s) > 0 \quad \text{ i } \quad 0 < \frac{1}{2}(x_1 + x_2) < s.$$

Warunki te dają kolejno:

$$\begin{array}{llll} s < r\sqrt{5}, & 4(s^2 - r^2) > 0, & s^2 - 4r^2 > 0, & 0 < \frac{4}{5}s < s, \\ & s > r, & s > 2r. & \end{array}$$

Wszystkie warunki są spełnione, jeżeli $2r < s < r\sqrt{5}$. Wtedy zadanie ma dwa rozwiązania.

Do zbadania pozostają przypadki: $s = r$, $s = 2r$, $s = r\sqrt{5}$.

Jeżeli $s = r$, to równanie $f(x) = 0$ ma postać: $5x^2 - 8rx = 0$. Pierwiastkami jego są: $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{8}{5}r$. Tylko x_1 spełnia warunki zadania.

Jeżeli $s = 2r$, to $f(s) = 0$. Jednym pierwiastkiem równania jest $x_1 = s = 2r$. A że $x_1 + x_2 = \frac{4}{5}s = \frac{8}{5}r$, to $x_2 = \frac{8}{5}r$. Oba pierwiastki równania spełniają warunki zadania.

Jeżeli $s = r\sqrt{5}$, wtedy $\Delta = 0$, $x_1 = x_2 = \frac{4}{5}s = \frac{4}{5}r\sqrt{5}$. Pierwiastek podwójny spełnia warunki zadania.

Otrzymujemy zatem wynik:

Jeżeli $s < r$, to zadanie nie ma rozwiązania;

Jeżeli $r \leq s < 2r$, to zadanie ma jedno rozwiązanie;

Jeżeli $2r \leq s < r\sqrt{5}$, to zadanie ma dwa rozwiązania;

Jeżeli $s = r\sqrt{5}$, to zadanie ma jedno rozwiązanie;

Jeżeli $s > r\sqrt{5}$, to zadanie nie ma rozwiązania.

Wypisz wzór dla x we wszystkich przypadkach!

Rozwiąż zadanie, przyjmując: $r = 10$, $s = 22$ i $r = 10$, $s = 12$.

§ 2. Funkcja $y = \sqrt{x}$.

Jeżeli w skład wyrażenia jakiegoś wchodzi pierwiastki wyrażań, zawierających zmienną x , to wyrażenie takie nazywamy *funkcją niewymierną* zmiennej x .

Najprostszym przykładem funkcji niewymiernej jest funkcja $y = \sqrt{x}$. Zbadamy własności tej funkcji.

1. Funkcja staje się zerem dla $x = 0$.
2. Każdej dodatniej wartości x odpowiada jedna dodatnia wartość funkcji.

3. Dla ujemnych wartości x funkcja nie jest określona.

4. Funkcja przyjmuje każdą dodatnią wartość.

Aby funkcja miała wartość $y = m > 0$, wystarczy zmiennej x nadać taką wartość, aby było $\sqrt{x} = m$. Ostatnie równanie ma zawsze jeden (i tylko jeden) pierwiastek $x = m^2$ (porównaj § 1, przykład 2!).

5. Funkcja rośnie ze wzrostem x .

Niech x_1 i x_2 oznaczają takie dwie wartości x , że $0 \leq x_1 < x_2$, a y_1 i y_2 odpowiadające im wartości y tak, że $y_1 = \sqrt{x_1}$, $y_2 = \sqrt{x_2}$. Tworzymy różnicę $y_2 - y_1$ i badamy jej znak, przekształcając ją w następujący sposób:

$$y_2 - y_1 = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

Ponieważ $x_2 - x_1 > 0$ i $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$, to $y_2 - y_1 > 0$. Wartość y_2 , odpowiadająca większej wartości x , jest więc rzeczywiście większa od wartości y_1 , odpowiadającej mniejszej wartości x .

6. Ponieważ y rośnie ze wzrostem x i może przyjmować wszelkie dodatnie wartości, otrzymujemy następującą tabelkę zmienności funkcji $y = \sqrt{x}$:

x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y		$*$	$*0$	$\nearrow$	$+\infty$

Wykres funkcji $y = \sqrt{x}$ otrzymamy łatwo, gdy zważymy, że z $y = \sqrt{x}$ wynika $y^2 = x$ i naodwrot z zastrzeżeniem $y \geq 0$. Funkcja $x = y^2$ przedstawia parabolę, mającą wierzchołek w początku układu współrzędnych, której osią jest oś X , a która jest wroconą stroną wypukłą w lewo. Ponieważ uwzględnić mamy tylko nieujemne wartości y , to wykresem funkcji $y = \sqrt{x}$ jest gałąź paraboli, przebiegająca w ćwiartce I (fig. 16).



Fig. 16.

§ 3. Przykłady kilku innych funkcji niewymiernych.

Funkcja $y = \sqrt{ax + b}$ jest określona tylko dla tych wartości x , dla których $ax + b \geq 0$. Ponieważ miejscem zerowym funkcji liniowej $ax + b$ jest $-\frac{b}{a}$, to dla tej wartości x jest też $y = 0$. Aby zbadać dalszy przebieg funkcji $y = \sqrt{ax + b}$, oznaczamy $y' = ax + b$, przedstawiamy przebieg tej funkcji, a następnie układamy na podstawie wyników w § 2 tabelkę zmienności funkcji $y = \sqrt{y'}$. Otrzymamy tabelkę:

	x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{b}{a}$	$\nearrow$	$+\infty$	
$y' = ax + b$		$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	jeżeli $a > 0$.
		$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	jeżeli $a < 0$.
$y = \sqrt{ax + b}$		*	*	0	$\nearrow$	$+\infty$	jeżeli $a > 0$.
		$+\infty$	$\searrow$	0	*	*	jeżeli $a < 0$.

Wykres funkcji $y = \sqrt{ax + b}$ można uzyskać w następujący sposób: Równanie $y = \sqrt{ax + b}$ przedstawia tę samą funkcję, co równanie $y^2 = ax + b$ dla dodatnich wartości y . Z ostatniego równania wynika: $x = \frac{1}{a}y^2 - \frac{b}{a}$. Jest to równanie paraboli, której osią jest oś X , której wierzchołek leży w punkcie $(-\frac{b}{a}, 0)$, a która zwraca się stroną wypukłą w lewo, jeżeli $a > 0$, a w prawo, jeżeli $a < 0$. Część tej paraboli, leżąca nad osią X , przedstawia funkcję $y = \sqrt{ax + b}$.

W podobny sposób można zawsze uzyskać tabelkę zmienności i wykres funkcji $y = \sqrt{f(x)}$, o ile przebieg funkcji $f(x)$ jest znany, lub o ile znamy funkcję wyrażoną równaniem $y^2 = f(x)$, w którym y jest zmienną niezależną, a x zmienną zależną.

Przykład 1. Chcąc otrzymać tabelkę zmienności funkcji $y = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$, układamy najpierw tabelkę zmienności funkcji $y' = x^2 + 2x - 8$, a następnie funkcji $y = \sqrt{y'}$, uwzględniając własności tej funkcji wymienione w § 2. Otrzymamy:

x	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$+2$	$\nearrow$	$+\infty$
y'	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-9	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	*	*	*	0	$\nearrow$	$+\infty$

Na podstawie tej tabelki znamy już w głównych zarysach wykres badanej funkcji (wykreśl!). By uzyskać dokładniejszy rysunek, obliczamy wartości funkcji dla rozmaitych szczegółowych wartości $x < -4$ i $x > +2$ i poprawiamy rysunek (wykonaj to!).

Przykład 2. Aby otrzymać wykres funkcji $y = 5 - \sqrt{9 - x^2}$, badamy najpierw funkcję $y' = \sqrt{9 - x^2}$. Ponieważ wiemy (Rozdz. III, § 9), że wykresem funkcji wyrażonej równaniem $y'^2 = 9 - x^2$ jest koło zakreślone promieniem 3 około początku układu współrzędnych, to wykresem funkcji $y' = \sqrt{9 - x^2}$ będzie część tego koła, leżąca nad osią X (ACB w fig. 17). Wykres funkcji $y = 5 - \sqrt{9 - x^2} = 5 - y'$ otrzymamy, zmniejszając każdą rzędną 5 (np. MM') o odcinek y' odpowiadający każdej wartości x (np. odcinek MM' zmniejszamy o $MN = M'N'$ i otrzymujemy punkt N krzywej). Jako wykres badanej funkcji otrzymamy łuk $A'C'B'$ koła w fig. 17.

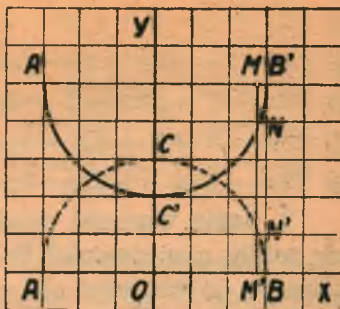


Fig. 17.

Przykład 3. Aby otrzymać wykres funkcji $y = \sqrt{2x + 4} - \sqrt{10 - x}$, zauważymy przedewszystkiem, że funkcja ta jest określona tylko w przedziale $-2 \dots +10$. Następnie kreślimy krzyw

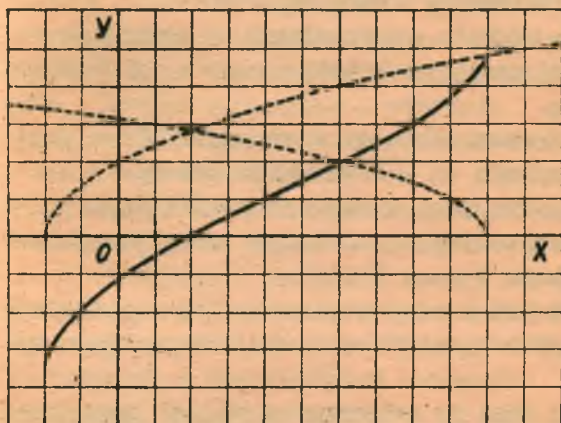


Fig. 18.

$$y' = \sqrt{2x + 4}$$

$$\text{ i } y'' = \sqrt{10 - x}$$

(krzywe kreskowane w fig. 18). Ponieważ $y = y' - y''$, to zmniejszając każdą rzędną pierwszej krzywej o rzędną drugiej krzywej odpowiadającą tej samej odciętej, otrzymamy żądany wykres (krzywa wyciągnięta w fig. 18).

Cwiczenia.

1. Rozwiązać następujące równania lub wykazać ich sprzeczność:

- a) $3 + \sqrt{2x - 1} = 5$; b) $3 - \sqrt{x - 5} = 1$; c) $\sqrt{3x + 4} = 2 - x$;
d) $\sqrt{2x - 5} = 20 - x$; e) $x + \sqrt{x^2 - x - 2} = 5$;
f) $4 + \sqrt{x^3 - 2x - 2} = x$; g) $\sqrt{x^3 - 5} = 3x - 7$;
h) $\sqrt{2x^3 + 1} = 2x - 7$; i) $3 + \sqrt{4x^3 - 2x + 11} = 2x$;
j) $2x + \sqrt{x^3 - 3x + 3} = 3$; k) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 1} = 3$;
l) $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 4} = 5$; m) $\sqrt{x + 1} = 3 - \sqrt{2x - 5}$;

- n) $\sqrt{6x+1} = 3 - \sqrt{4x-1}$; o) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = \sqrt{4x+13}$;
 p) $\sqrt{x-1} = \sqrt{4x^2+5} - \sqrt{x+4}$; q) $\sqrt{10x-1} - \sqrt{4x+5} = \sqrt{x-1}$;
 r) $\sqrt{6x+5} - \sqrt{3x-1} = 2$; s) $\sqrt{5-x} - \sqrt{2x-1} = 1$;
 t) $\sqrt{3x-5} = 2 + \sqrt{x-1}$; u) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = 4$;
 v) $\sqrt{2x-1} = 1 + \sqrt{x-1}$; w) $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = 1$.

2. Jakie warunki musi spełniać m , aby podane niżej równania miały pierwiastek? Ile pierwiastków ma każde z tych równań zależnie od wartości m ?

- a) $\sqrt{x+2} = x - m$; b) $\sqrt{x+m} = x + 1$;
 c) $\sqrt{x-4} = mx - 2$; d) $\sqrt{mx-1} = x + 1$;
 e) $\sqrt{x+m} + \sqrt{x-m} = 2$; f) $\sqrt{x+m} - \sqrt{x+1} = 1$;
 g) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{m}$; h) $\sqrt{x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{m}$.

3. a) Pole jednego kwadratu jest x , a drugiego $x+2$. Obliczyć x , jeżeli boki obu kwadratów różnią się o m .

b) Stosunek obwodu trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej 1 dm do mniejszej przyprostokątnej wynosi $k:1$. Obliczyć mniejszą przyprostokątną.

c) Obwód trójkąta równoramiennego o wysokości 2 cm pozostaje do podstawy w stosunku $k:1$. Obliczyć podstawę.

d) Suma obu przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym jest k razy większa od przeciwprostokątnej. Obliczyć jedną przyprostokątną, jeżeli obwód trójkąta wynosi 2 dm .

e) Obwód prostokąta jest k razy większy od jego przekątnej. Wiedząc, że podstawa prostokąta wynosi 1 dm , obliczyć jego wysokość.

f) Na odcinku 10 cm jako na przeciwprostokątnej zbudowano trójkąt prostokątny o wysokości w . Obliczyć mniejszą przyprostokątną.

g) W koło o danym (stałym) promieniu r wpisano prostokąt, którego boki różnią się o m . Obliczyć mniejszy bok prostokąta.

h) W koło o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, w którym suma podstawy i wysokości wynosi s . Obliczyć podstawę trójkąta.

4. Ułożyć tabelki zmienności następujących funkcji:

- a) $y = \sqrt{x+3}$; b) $y = \sqrt{4-x}$; c) $y = \sqrt{\frac{1}{2}x+2}$;
 d) $y = \sqrt{\frac{1}{x}}$; e) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; f) $y = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$;
 g) $y = 2 + \sqrt{4-x^2}$; h) $y = 2 - \sqrt{4-x^2}$; i) $y = \sqrt{x^2-6x+5}$;
 j) $y = \sqrt{4x-x^2}$.

5. Przedstawić graficznie funkcje:

a) $y = x + \sqrt{x}$;

b) $y = x - \sqrt{x}$;

c) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}$;

d) $y = x + \sqrt{4x-x^2}$;

e) $y = x - \sqrt{4x-x^2}$;

f) $y = x + \sqrt{25-x^2}$;

g) $y = x - \sqrt{25-x^2}$;

h) $y = x - \sqrt{10x-x^2}$;

i) $y = \sqrt{25-x^2} - \sqrt{x^2-5x}$.

6. a) Zbadać, jak zmienia się pole trójkąta równoramiennego o podstawie 6 cm w zależności od ramienia. (Tabelka zmienności i wykres!).

b) Przedstawić przyprostokątną trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej 9 cm jako funkcję jej rzutu na przeciwprostokątną i zbadać tę funkcję. (Tabelka zmienności i wykres!).

c) Przedstawić podstawę trójkąta równoramiennego, wpisanego w koło o promieniu 3 cm, jako funkcję wysokości i zbadać tę funkcję. (Tabelka zmienności i wykres!).

d) Trapez ma podstawę 2 cm, a wysokość jego równa się drugiemu bokowi równoległemu. Przedstawić wysokość jako funkcję pola. (Tabelka zmienności i wykres!).

e) Jeden bok równoległy (podstawa) trapezu wynosi 4 cm, a drugi bok równoległy równa się różnicy podstawy i wysokości. Przedstawić wysokość trapezu jako funkcję jego pola i zbadać tę funkcję. (Tabelka zmienności i wykres!).

7. Przedstawić graficznie lewe i prawe strony podanych niżej równań jako funkcje x i odczytać współrzędne punktów przecięcia się otrzymanych krzywych. Wyjaśnić związek między odczytanymi wartościami, a pierwiastkami równania:

a) $\sqrt{x-2} = \frac{1}{2}x$;

b) $\sqrt{x-2} = -x+4$;

c) $\sqrt{x-2} = 1-x$;

d) $\sqrt{x-2} = x-2$;

e) $\sqrt{25-x^2} = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$;

f) $\sqrt{25-x^2} = x-7$;

g) $\sqrt{25-x^2} = x+1$.

Rozdział V.

Postępy.

§ 1. Postęp arytmetyczny.

Uogólniając pojęcie ciągu liczb naturalnych określamy:

Ciąg liczb, w którym każda następna liczba różni się od poprzedniej o tę samą liczbę, nazywamy *postępem arytmetycznym*. Liczby, tworzące postęp, nazywamy *wyrazami postępu*. Stałą różnicę każdego następnego i poprzedniego wyrazu postępu arytmetycznego nazywamy *różnicą postępu arytmetycznego*.

Postępami arytmetycznymi są np.:

- 1, 2, 3, 4, 5, (ciąg liczb naturalnych);
- 2, 4, 6, 8, 10, (ciąg liczb parzystych);
- 1, 3, 5, 7, 9, (ciąg liczb nieparzystych);
- 8, 3, — 2, — 7, — 12,
- 5, $3\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{3}$, 1, $-\frac{1}{3}$, $-1\frac{2}{3}$, . . .

Ogólnie będziemy oznaczali kolejno wyrazy postępu arytm.:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots,$$

przyczem $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots = a_n - a_{n-1} = d$, gdzie d oznacza różnicę postępu.

Z określenia postępu arytmetycznego wynika:

Postęp arytmetyczny jest oznaczony, gdy dany jest jego pierwszy wyraz i różnica.

Np.: Postępem, w którym $a_1 = 16$, a $d = 3$, jest:

$$16, 19, 22, 25, 28, 31, \dots$$

Postępem, w którym $a_1 = 16$, a $d = -7$, jest:

$$16, 9, 2, -5, -12, -19, \dots$$

Postępem, w którym $a_1 = 5$, a $d = 0$, jest:

$$5, 5, 5, 5, \dots$$

Postęp, w którym każdy następny wyraz jest większy od poprzedniego, nazywa się *rosnącym*; postęp, w którym każdy następny wyraz jest mniejszy od poprzedniego, nazywa się *malejącym*.

Z powyższych przykładów wnioskujemy:

Postęp arytmetyczny jest rosnący, jeżeli różnica jego jest dodatnia; postęp taki jest malejący, jeżeli różnica jego jest ujemna. Jeżeli różnica postępu wynosi 0, to postęp składa się z równych wyrazów.

Zadanie: Znając pierwszy wyraz a_1 postępu arytmetycznego i różnicę d , obliczyć: A) n -ty wyraz a_n , B) sumę n początkowych wyrazów s_n .

A) Drugi wyraz otrzymamy, dodając do pierwszego wyrazu d ; trzeci wyraz otrzymamy, dodając do drugiego wyrazu d , lub do pierwszego $2d$; czwarty wyraz otrzymamy, dodając do trzeciego wyrazu d , lub do pierwszego $3d$ itd.; n -ty wyraz otrzymamy, dodając do $(n-1)$ -ego wyrazu d , lub do pierwszego $(n-1)d$. Czyli:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

B) Aby obliczyć s_n , piszemy:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Dodając obie równości i łącząc przytem po prawej stronie wyrazy, podpisane pod sobą, w sumy częściowe; otrzymamy:

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Wszystkie sumy, ujęte w nawiasy, mają jednakową wartość. Pierwsza z nich ma bowiem wartość $(a_1 + a_n)$; w drugiej: $(a_2 + a_{n-1})$ ma pierwszy składnik wartość o d większą od a_1 (pierwszego składnika pierwszej sumy), drugi o d mniejszą niż a_n (drugi składnik pierwszej sumy) tak, że $(a_2 + a_{n-1}) = (a_1 + a_n)$. Pierwszy składnik trzeciej sumy: $(a_3 + a_{n-2})$ jest o d większy od pierwszego składnika drugiej sumy; drugi składnik trzeciej sumy jest o d mniejszy od drugiego składnika drugiej sumy. Trzecia suma ma więc taką wartość, jak druga. — Rozumując tak dalej, dochodzimy, że każda ze sum, ujętych w nawias, ma tę samą wartość: $a_1 + a_n$. Zatem:

$$2s_n = n(a_1 + a_n),$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

W poprzednim rozumowaniu przyjęliśmy milcząco, że d jest liczbą dodatnią. Powtórz to rozumowanie, przyjmując $d < 0$ i $d = 0$!

Miedzy pięciu liczbami: a_1 , a_n , d , n i s_n zachodzą następujące dwa związki:

$$a_n = a_1 + (n - 1) d \text{ i } s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

Gdy więc trzy z tych liczb są dane, można dwie pozostałe obliczyć, rozwiązując powyższy układ równań.

Postępy arytmetyczne znajdują zastosowanie przy t. zw. *interpolacji tablic*. Wyjaśnimy to na przykładzie.

Tabelka, umieszczona niżej, jest częścią tablicy kwadratów liczb całkowitych. Chcemy przy pomocy tej tabelki znaleźć przybliżoną wartość kwadratu liczby 425·63.

n	...	425	426	427	428	
n^2	...	180625	181476	182329	183184	

Kwadraty liczb 425, 426, 427, 428 nie tworzą dokładnie postępu arytmetycznego, bo różnice następujących po sobie liczb wynoszą: 851, 853, 855. Gdybyśmy jednak liczby te zaokrąglili do dziesiątek, to takie przybliżone wartości utworzyłyby już postęp arytmetyczny. Pomysłmy sobie ciąg kwadratów liczb 425, 426, uzupełniony kwadratami liczb 425·01, 425·02, 425·03, 425·99. Przypuszczamy, że przybliżone wartości kwadratów tych liczb, a więc:

$$425^2, 425\cdot01^2, 425\cdot02^2, \dots, 425\cdot98^2, 425\cdot99^2, 426^2,$$

tworzą również postęp arytmetyczny. Postęp ten ma 101 wyrazów. Pierwszym wyrazem jest:

$$a_1 = 425^2 = 180625, \text{ a ostatnim:}$$

$$a_{101} = 426^2 = 181470.$$

$$\text{Ponieważ jednak: } a_{101} = a_1 + 100 d,$$

$$\text{to } 181470 = 180625 + 100 d.$$

Stąd obliczymy: $d = 8\cdot51$.

Szukana liczba $425\cdot63^2$ jest 64-tym wyrazem postępu. Obliczmy go:

$$a_{64} = a_1 + 63 d = 180625 + 63 \cdot 8\cdot51 = 181161\cdot13.$$

Zaokrąglając ostatnią liczbę do jednostek, znajdujemy, że w przybliżeniu: $425\cdot63^2 = 181161$.

W rzeczywistości (oblicz!) $425\cdot63^2 = 181160\cdot8969$, która to liczba po zaokrągleniu do jednostek daje rzeczywiście znaną powyżej wartość przybliżoną.

Przykład ten wskazuje, jak można tablice kwadratów *interpolować*, t. znaczy znajdować przybliżone wartości kwadratów liczb zawartych między liczbami, których kwadraty podaje tabelka. Postępowanie to można stosować i do innych tablic.

§ 2. Postęp geometryczny.

W ciągach liczb:

$$3, 6, 12, 24, 48, \dots$$

$$8, 12, 18, 27, 40\cdot5, \dots$$

$$2, -6, +18, -54, +162, \dots$$

$$24, 12, 6, 3, 1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$$

powstaje każdy następny wyraz przez pomnożenie poprzedniego przez tę samą liczbę (w pierwszym ciągu przez 2, w drugim przez $1\cdot5$, w trzecim przez -2 , w czwartym przez $\frac{1}{2}$). Każdy więc następny wyraz, podzielony przez poprzedni, daje taki sam iloraz.

Ciąg liczb, w którym iloraz każdej liczby następnej i poprzedniej ma tę samą wartość, nazywa się *postępem geometrycznym*, a stały iloraz nazywa się jego *ilorazem*.

Ciąg liczb: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$ jest postępem geometrycznym, jeżeli $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$. Ilorazem postępu jest q .

Postęp geometryczny jest oznaczony, jeżeli jest dany pierwszy jego wyraz i iloraz.

Np. Postępem, w którym $a_1 = 2$, a $q = 5$, jest:

$$2, 10, 50, 250, 1250, \dots$$

Postępem, w którym $a_1 = 1$, a $q = \frac{1}{2}$, jest:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

Postępem, w którym $a_1 = 3$, a $q = 1$, jest:

$$3, 3, 3, 3, 3, \dots$$

Postępem w którym $a_1 = 1$, a $q = -3$, jest:

$$1, -3, +9, -27, +81, \dots$$

Z tych przykładów wnioskujemy:

Jeżeli iloraz postępu geometrycznego o dodatnim pierwszym wyrazie jest większy niż 1, to postęp jest rosnący; jeżeli iloraz jest dodatni, mniejszy niż 1, to postęp jest malejący; jeżeli iloraz $q = 1$, to wszystkie wyrazy postępu są równe. Jeżeli iloraz jest liczbą ujemną, to wyrazy postępu mają naprzemian znaki $+$ i $-$, a co do bezwzględnej wartości rosną, maleją, lub są równe zależnie od tego, czy iloraz ma wartość bezwzględną większą, czy mniejszą niż 1, czy też równą 1.

Jak zmienić należy to twierdzenie, jeżeli pierwszy wyraz postępu jest ujemny?

Zadanie: Znając pierwszy wyraz a_1 postępu geometrycznego i iloraz q , obliczyć: A) n -ty wyraz, B) sumę n początkowych wyrazów postępu: s_n .

A) Drugi wyraz postępu otrzymamy, mnożąc pierwszy wyraz przez q ; trzeci wyraz otrzymamy, mnożąc drugi wyraz przez q , albo pierwszy przez q^2 ; czwarty wyraz otrzymamy, mnożąc trzeci przez q , albo pierwszy przez q^3 i t. d., n -ty wyraz otrzymamy, mnożąc pierwszy wyraz przez q^{n-1} . Czyli:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

We wzorze tym dostrzegamy pewną analogię do odpowiedniego wzoru dla postępu arytmetycznego. W postępie arytmetycznym powstawał następny wyraz przez dodanie różnicy do poprzedniego wyrazu; w postępie geometrycznym powstaje następny wyraz przez pomnożenie poprzedniego wyrazu przez iloraz. Ze wzoru na n -ty wyraz postępu arytmetycznego otrzymamy wzór na n -ty wyraz postępu geometrycznego, zastępując w nim dodawanie mnożeniem, a mnożenie (powtarzające się dodawanie) potęgowaniem (powtarzającym się mnożeniem), jak wskazuje schemat:

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

B) Aby otrzymać wzór na s_n , założymy, że $q \neq 1$, i pomnożmy obie strony równości: $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$ przez $q - 1$. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} s_n (q - 1) &= a_1 q + a_2 q + \dots + a_{n-1} q + a_n q - \\ &\quad - a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_n. \end{aligned}$$

Ponieważ podpisane pod sobą wyrazy mają wartości przeciwne (bo $a_2 = a_1 q$, $a_3 = a_2 q$, ..., $a_n = a_{n-1} q$), to po zredukowaniu otrzymamy:

$$s_n (q - 1) = a_n q - a_1, \text{ a ponieważ } a_n = a_1 q^{n-1}, \text{ to:}$$

$$s_n (q - 1) = a_1 q^n - a_1 = a_1 (q^n - 1), \text{ a stąd:}$$

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Jeżeli $q = 1$, nie możemy stosować tego wzoru. Ponieważ jednak wtedy: $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$, to: $s_n = n a_1$.

Przykład 1. Ułamek $\frac{x^n - y^n}{x - y}$, w którym $x \neq y$, uważać możemy za sumę postępu geometrycznego. Aby uzyskać zgodność ze wzorem na s_n , przekształćmy ten ułamek w następujący sposób:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{x^n \left[1 - \left(\frac{y}{x} \right)^n \right]}{x \left[1 - \frac{y}{x} \right]} = x^{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{y}{x} \right)^n - 1}{\frac{y}{x} - 1}.$$

Porównując ostatnie wyrażenie ze wzorem na s_n , zauważymy, że ułamek ten uważać można za sumę postępu geometrycznego, w którym $a_1 = x^{n-1}$, a $q = \frac{y}{x}$. Jest więc:

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}.$$

Wzór ten wskazuje, że różnica n -tych potęg dwu liczb jest przez różnicę tych liczb podzielna.

Przykład 2. Wielomian:

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - x^{n-4}y^3 + \dots \pm xy^{n-2} \mp y^{n-1}$$

jest sumą postępu geometrycznego, w którym $a_1 = x^{n-1}$, a $q = -\frac{y}{x}$. Stosując wzór na sumę takiego postępu, otrzymamy:

$$\begin{aligned} x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots \mp y^{n-1} &= x^{n-1} \cdot \frac{\left(-\frac{y}{x}\right)^n - 1}{-\frac{y}{x} - 1} = x^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{y}{x}\right)^n}{1 + \frac{y}{x}} = \\ &= \frac{x^n - (-y)^n}{x + y}. \end{aligned}$$

Jeżeli n jest liczbą parzystą, wzór przyjmuje postać:

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + xy^{n-2} - y^{n-1} = \frac{x^n - y^n}{x + y}.$$

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, wzór ma postać:

$$x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1} = \frac{x^n + y^n}{x + y}.$$

Czytając ostatnie dwa wzory odwrotnie, znajdujemy, że różnica jednakowych parzystych potęg dwu liczb jest przez sumę tych liczb podzielna i że suma jednakowych nieparzystych potęg dwu liczb jest przez sumę tych liczb podzielna. Twierdzenia te są uogólnieniami twierdzeń o rozkładaniu na czynniki dwumiamów: $x^2 - y^2, x^3 \pm y^3 - y^4$.

§ 3. Procent składany.

Jako przykład postępu geometrycznego rozpatrzmy wartości kapitału, złożonego na procent składany po 1, 2, 3, 4, ... latach.

Jeżeli kapitał jakiś złożymy na procent, a dochodu z niego nie pobieramy, lecz co roku (lub wogóle w równych odstępach czasu) dodajemy go do kapitału, to mówimy, że *kapitał jest złożony na procent składany*. Dodawanie dochodu do kapitału nazywamy *kapitalizacją* dochodu, a stały okres czasu, po którym zawsze dochód kapitalizujemy, *okresem kapitalizacji*.

Dla uproszczenia rachunku przyjmiemy wszędzie jako okres kapitalizacji 1 rok.

Wartość kapitału, złożonego na procent składany, nazywamy *wartością początkową lub pierwotną kapitału*. Wartość kapitału wraz z dochodami za n lat nazywamy *wartością końcową kapitału po n latach*.

Rozwiążemy najpierw zasadnicze zadanie rachunku procentu składanego:

Znaleźć wartość końcową K_n kapitału K_0 po n latach, licząc procent składany $p\%$.

Obliczamy najpierw wartość kapitału K_0 po jednym roku. Wartość ta, którą oznaczmy K_1 , obliczona według zasad rachunku procentu prostego, wynosi:

$$K_1 = K_0 + \frac{K_0 p}{100} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right) = K_0 q.$$

We wzorze tym oznaczono $1 + \frac{p}{100}$ literą q . Liczba ta oznacza wartość jednostki kapitału po roku (o czym łatwo przekonać się, podstawiając $K_0 = 1$) i nosi nazwę *czynnika procentowego*.

Wartość kapitału, złożonego na $p\%$, po roku obliczamy, mnożąc wartość kapitału na początku roku przez czynnik procentowy.

Zważywszy, że na początku drugiego roku jest złożony kapitał $K_1 = K_0 q$, obliczamy na podstawie ostatniej reguły, że przy końcu drugiego roku kapitał ma wartość $K_2 = K_1 q = K_0 q^2$.

Podobnie znajdziemy: $K_3 = K_2 q = K_0 q^3$, $K_4 = K_3 q = K_0 q^4$, i t. d.

Ogólnie: $K_n = K_0 q^n$, czyli:

Wartość końcową kapitału po n latach obliczamy, mnożąc pierwotną wartość kapitału przez n -tą potęgę czynnika procentowego.

Wartości końcowe kapitału po 1, 2, 3, ... latach tworzą tedy postęp geometryczny, którego ilorazem jest czynnik procentowy.

Ostatni wzór zawiera 4 liczby: K_0 , K_n , n i q . Mając dane trzy z nich można próbować pozostałą obliczyć. Obliczenie K_0 , lub K_n nie sprawia żadnych trudności, zwłaszcza gdy posługujemy się tabelką, która podaje potęgi czynnika procentowego*). Obliczenie q wymaga obliczenia n -tego pierwiastka, a więc wykonania działania nadzwyczaj żmudnego, lecz znanego nam już. Natomiast obliczenie n stawia nam nowy problem (jaki?), którym zajmiemy się później.

Wyprowadzając wzór zasadniczy, przyjęliśmy, że kapitał K_0 złożono na procent na początku okresu kapitalizacji i że wartość końcową K_n obliczamy po całkowitej ilości lat. Jak postępujemy, gdy warunki te nie są spełnione, wskazuje następujący przykład:

Ktoś złożył w kasie oszczędności 600 zł w dniu 1. IX. 1925 r., a podjął złożony kapitał 31. V. 1929 r. Jaką sumę otrzymał, jeżeli kasa płaściła 8% , a dochody doliczała do kapitału 31 grudnia?

*) Uczeń powinien zaopatrzyć w przepisane czterocyfrowe tablice matematyczne.

Obliczamy najpierw wartość kapitału 600 zł w dniu 31. XII. 1925 r., a więc po $\frac{1}{2}$ roku, według zasad rachunku procentu prostego. Otrzymamy 616 zł. Kwota ta pozostaje na procencie składanym przez 3 lata (do końca r. 1928) tak, że $K_3 = 616 \cdot 1.08^3 = 775.98$ (z dokładn. do 0.005). Kapitał ten pozostaje na procencie prostym jeszcze 5 mies. tak, że końcowa jego wartość w dniu 31. V. 1929 r. wynosi 801.85 zł.

Dalsze zagadnienia z rachunku procentu składanego omówimy na następujących przykładach:

Przykład 1. Ktoś składa przez n lat na początku każdego roku po r zł na procent składany $p\%$. Jaką sumę mieć będzie bezpośrednio po zapłaceniu ostatniej wkładki?

Przenosimy się myślą do chwili, kiedy ostatnia wkładka została zapłacona. Ostatnia wkładka (wpłacona teraz) ma wartość r ; przedostatnia (złożona przed rokiem) ma wartość rq ; trzecia od końca (zapłacona przed dwoma laty) ma wartość rq^2 i t. d. n -ta od końca (czyli pierwsza, zapłacona przed $n-1$ laty) ma wartość rq^{n-1} . Wszystkie wkładki razem przedstawiają wartość:

$$R = r + rq + rq^2 + \dots + rq^{n-1},$$

czyli po zsumowaniu postępu geometrycznego:

$$R = r \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Wzór ten podaje wartość n rat po r zł, płaconych na początku każdego roku, bezpośrednio po złożeniu ostatniej wkładki.

Przykład 2. Dług 1000 zł ma być umorzony w 6 równych ratach rocznych, płatnych na początku każdego roku. Jak wysokie muszą być raty, jeżeli liczymy procent składany 5%, a pierwsza rata ma być zapłacona za rok po zaciągnięciu długu?

Przenosimy się myślą do czasu, gdy dłużnik zapłacił ostatnią ratę, gdy więc sprawa między dłużnikiem a wierzycielem została załatwiona. Wierzyciel zapłacił przed 6 laty 1000 zł, który to kapitał przedstawia w chwili, o której mowa, wartość $1000 q^6$.

Otrzymał na umorzenie długu 6 rat po r zł, które przedstawiają wartość (porównaj przykład 1): $r \frac{q^6 - 1}{q - 1}$. (Od rat liczymy również procent, ponieważ wierzyciel może z nich korzystać, pożyczając je dalej na taki sam procent).

Jeżeli dług ma być spłacony, to wartość tych rat musi wynosić 1000 q^6 . Otrzymamy zatem równanie:

$$r \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 1000 q^6, \text{ a stąd:}$$

$$r = \frac{1000 q^6 (q - 1)}{q^6 - 1} = \frac{1000 \cdot 1.3401 \cdot 0.05}{0.3401} = 197.02.$$

Przykład 3. Jest do nabycia kopalnia węgla, przynosząca z końcem każdego roku a zł czystego dochodu. Jaką sumę można za nią zapłacić, jeżeli się chce mieć $p\%$ z włożonego kapitału, a zapas węgla wystarczy przypuszczalnie na n lat?

Nabywca kopalni otrzyma:

a zł za rok,	która to suma ma terazniejszą wartość:	$\frac{a}{q}$,
a „ „ 2 lata,	„ „ „ „ „ „	$\frac{a}{q^2}$,
a „ „ 3 „	„ „ „ „ „ „	$\frac{a}{q^3}$,
a „ „ n lat	„ „ „ „ „ „	$\frac{a}{q^n}$.

Wartość terazniejsza wszystkich rat, a więc i kopalni, wynosi:

$$K = \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \frac{a}{q^3} + \dots + \frac{a}{q^n} = \frac{a}{q^n} (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1) = \frac{a(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}.$$

Ćwiczenia.

1. Napisać postęp arytmetyczny, jeżeli:

- a) $a_1 = 15$, $d = 7$; b) $a_1 = \frac{1}{8}$, $d = -\frac{3}{8}$; c) $a_1 = 0.4$, $d = -2$;
d) $a_1 = -45$, $d = -3.5$; e) $a_1 = 3x + 2$, $d = 2x - 3$.

2. Napisać dalsze trzy wyrazy postępów arytmetycznych:

- a) 0 , $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, ...; b) -7 , -3 , $+1$, ...; c) 0.4 , 0.1 , -0.2 , ...;
d) $+1$, $2a + 2$, $a + 3$, ...; e) $m + n$, $2m$, $3m - n$, ...

3. Wypisać liczby: a) parzyste; b) nieparzyste; c) podzielne przez 7; d) takie, które podzielone przez 3 zostawiają resztę 2; e) takie, które podzielone przez 4 zostawiają resztę 1. Obliczyć n -ty wyraz otrzymanego postępu.

4. a) Powierzchnia pierwszego stopnia schodów jest oddalona od powierzchni ziemi o 16 cm, a każdego następnego o 14 cm więcej. Jak wysoko nad ziemią znajduje się powierzchnia n -tego stopnia? Ile stopni mają schody, prowadzące na pierwsze piętro, znajdujące się 3.8 m nad powierzchnią ziemi?

b) Zegar śpieszy na dzień o 14 min., a teraz pokazuje o 20 min. za wiele. Po ilu dniach wskazywać będzie prawdziwy czas?

Czas prawdziwy będzie wskazywać, jeżeli przyspieszy o 12 godz.

c) Do naczynia, mającego objętość $V = 1000 \text{ cm}^3$ i zawierającego powietrze o gęstości $d_0 = 0.00125$, wtłaczam zapomocą pompy zgęszczającej za każdym poruszeniem tłoka $v = 100 \text{ cm}^3$ powietrza

o gęstości d_0 . Jaka będzie gęstość powietrza w naczyniu po 1, 2, 3, ..., n poruszeniach tłoka? Rozwiązać zadanie w liczbach szczególnych i ogólnych.

Pierwotna gęstość powietrza jest d_0 , a masa Vd_0 . Po jednym poruszeniu tłoka wynosi masa powietrza w naczyniu $Vd_0 + vd_0$, a gęstość $\frac{Vd_0 + vd_0}{V} = d_0 + \frac{v}{V}d_0$ i t. d.

5. a) Wykazać, że wartości funkcji linjowej $y = ax + b$ dla $x = 1, 2, 3, \dots, n, n+1$ tworzą postęp arytmetyczny. Kiedy postęp ten jest rosnący, a kiedy malejący?

b) Jaki postęp tworzą drogi przebyte przez ciało ruchem jednostajnym w 1, 2, 3, ... sekundach?

c) Jaki postęp tworzą wartości prędkości końcowej po 1, 2, 3, ..., n sekundach, gdy ciało porusza się ruchem: a) jednostajnie przyspieszonym, β) jednostajnie opóźnionym.

d) Udowodnić, że gdy liczby: $a_1, a_2, a_3, \dots$ tworzą postęp arytmetyczny o różnicy d , to liczby $a_{n+r}, a_{n+2r}, a_{n+3r}, \dots$ tworzą również postęp arytmetyczny. Obliczyć różnicę tego postępu. Podać szczegółowe przykłady.

e) Udowodnić, że gdy liczby: $a_1, a_2, a_3, \dots$ i $b_1, b_2, b_3, \dots$ tworzą postępy arytmetyczne o różnicach d_1 i d_2 , to także liczby: $Aa_1 + Bb_1 + C, Aa_2 + Bb_2 + C, Aa_3 + Bb_3 + C, \dots$ tworzą postęp arytmetyczny. Obliczyć różnicę tego postępu. Podać szczegółowe przykłady.

f) Udowodnić, że każdy wyraz postępu arytmetycznego (z wyjątkiem pierwszego) jest średnią arytmetyczną wyrazu poprzedniego i następnego.

6. Wyznaczyć postęp arytmetyczny, w którym:

- | | |
|---|---|
| a) $a_5 = 19, a_8 = 31$; | b) $a_3 = 5, a_8 = -5$; |
| c) $a_1 + a_7 = 1, a_4 - a_8 = 18$; | d) $a_5 - a_2 = 1\frac{1}{2}, a_3 + a_4 = 6\frac{1}{2}$; |
| e) $a_3 + a_6 = 6\frac{1}{2}, a_4 a_5 = 10$; | f) $a_3 + a_7 = 20, a_2^2 + a_6^2 = 101$. |

7. a) Boki trójkąta prostokątnego o danym obwodzie $2s$ tworzą postęp arytmetyczny. Obliczyć boki.

b) Krawędzie prostopadłościanu i jego przekątna tworzą postęp arytmetyczny o danej różnicy d . Obliczyć całkowitą powierzchnię prostopadłościanu.

8. Obliczyć sumę n początkowych wyrazów postępu

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| a) 5, 13, 21, ...; | b) 12, 8, 4, ...; | c) 2, $\frac{1}{2}, -1, \dots$ |
| d) $3a - 1, 2a, a + 1, \dots$; | e) $-2a + 1, -a, -1, \dots$ | |

9. a) Znaleźć wzór na sumę n początkowych liczb ciągu liczb naturalnych. Stwierdzić wzór na fig. 19.

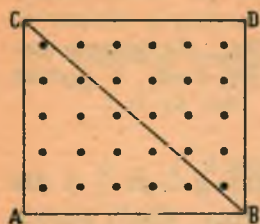


Fig. 19.

$\triangle ABC$ zawiera $1 + 2 + \dots + n$ kropek;
 $\triangle BCD$ również. Ilość kropek w prostokącie $ABCD$ wynosi $\dots$ i t. d.

b) Ile uderzeń zegaru, bijącego tylko godziny, słyszymy w ciągu 12 godzin?

10. a) Udowodnić, że: a) suma n początkowych liczb nieparzystych wynosi n^2 ; b) różnice kwadratów następujących po sobie liczb naturalnych tworzą postęp arytmetyczny.

Jeżeli do jednego kwadratu (A w fig. 20) dodamy trzy kwadraty (B, C, D w fig. 20), do tego pięć kwadratów (E, F, G , w fig. 20) i t. d., to otrzymamy pola, mające $1^2, 2^2, 3^2, \dots$ kwadratów.

b) Jakł postęp tworzą drogi przebyte w poszczególnych sekundach przez ciało: a) spadające wolno ($s = \frac{1}{2}gt^2$); b) poruszające się ruchem jednostajnie przyspieszonym ($s = ct + \frac{1}{2}at^2$); c) poruszające się ruchem jednostajnie opóźnionym ($s = ct - \frac{1}{2}at^2$)?

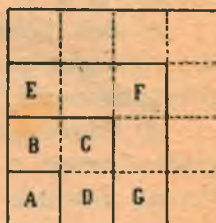


Fig. 20.

c) Wykazać, że różnice wartości funkcji $y = ax^2 + bx + c$ dla $x = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$, tworzą postęp arytmetyczny. Znaleźć sumę n wyrazów tego postępu.

11. W następujących przykładach obliczyć z trzech danych elementów a_1, a_n, d, n, s_n postępu arytmetycznego dwa pozostałe. Rozwiązać każde zadanie w liczbach szczególnych i ogólnych!

- a) $a_1 = 1\frac{1}{2}, n = 11, d = -\frac{3}{4}; a_{11} = ?, s_{11} = ?$;
- b) $a_1 = 3.4, a_6 = -6.6, n = 6; s_6 = ?, d = ?$;
- c) $a_1 = \frac{3}{8}, n = 5, s_5 = 36\frac{3}{8}; d = ?, a_5 = ?$;
- d) $n = 6, s_6 = 21, d = 5; a_1 = ?, a_6 = ?$;
- e) $n = 11, a_{11} = -10, s_{11} = 0; a_1 = ?, d = ?$;
- f) $n = 7, a_7 = 27, d = 4; a_1 = ?, s_7 = ?$;
- g) $a_1 = 10, a_n = -8, s_n = 10; n = ?, d = ?$;
- h) $a_1 = -7, a_n = 2, d = \frac{3}{4}; n = ?, s_n = ?$;
- i) a) $a_1 = 9, d = -2, s_n = 21; n = ?, a_n = ?$;
 b) $a_1 = 9, d = -2, s_n = 25; n = ?, a_n = ?$;
 c) $a_1 = 9, d = -2, s_n = 0; n = ?, a_n = ?$;
 d) $a_1 = 9, d = -2, s_n = -24; n = ?, a_n = ?$;
- j) a) $d = 6, a_n = 33, s_n = 60; n = ?, a_1 = ?$;

$$\beta) d = 6, a_n = 9, s_n = 12; n = ?, a_1 = ?;$$

$$\gamma) d = 6, a_n = 15, s_n = 0; n = ?, a_1 = ?;$$

$$\delta) d = 6, a_n = 3, s_n = -45; n = ?, a_1 = ?.$$

Czy oba pierwiastki równań, do których prowadzą zadania i) i j), odpowiadają warunkom zadania?

12. Wyznaczyć postępowanie arytmetyczne, w którym:

$$a) s_5 = 10, s_8 = 52;$$

$$b) s_8 = 26, a_3 = -1;$$

$$c) s_5 = 15, a_3 a_5 = 6;$$

$$d) s_6 = 18, a_1^2 - a_2^2 = 16.$$

13. Wyznaczyć postępowanie arytmetyczne, w którym dla każdego n :

$$a) s_n = n^2 - n;$$

$$b) s_n = 5n^2;$$

$$c) s_n = an^2 + bn.$$

14. a) Ciało, potrącone na płaszczyźnie pochyłej, przebywa w pierwszej sekundzie 20 cm, a w każdej następnej o 8 cm więcej; w ilu sekundach przebędzie drogę 240 cm?

b) Ciało, wyrzucone pionowo w górę, przebywa w pierwszej sekundzie 95 m, a w każdej następnej o 10 m mniej. Po ilu sekundach znajdować się będzie w odległości 480 m od ziemi?

Czy oba pierwiastki mają znaczenie? Jakie?

c) Ktoś złożył 400 zł na procent prosty 4% i dokłada co roku po 100 zł. Jaką sumę (kapitał wraz z dochodem) mieć będzie po 12 latach?

d) Na linie, długiej na 2 m, są uwiązane w odstępach 10 cm kule, z których każda waży 0.5 kg (razem 21 kul). Cała lina spoczywa na ziemi. Biorę do ręki kulę, przytwierdzoną do końca liny, i podnoszę ją stopniowo na wysokość 1, 2, 3, ... 20 dm; w ten sposób podnoszę całą linę tak, że tylko ostatnia kula dotyka ziemi. Obliczyć wykonaną pracę w kgm, przyjmując, że lina sama nie ma ciężaru!

e) Rozwiązać ostatnie zadanie w liczbach ogólnych, przyjmując: ilość kul $n + 1$, długość liny l , odstęp kul $l : n$, ciężar wszystkich kul razem Q , ciężar jednej kuli $Q : (n + 1)$.

[Otrzymany wzór wskaże, że praca nie zależy od odstępów kul. Można więc ten wzór stosować do obliczania pracy przy podnoszeniu łańcucha, ciężkiej liny i t. p.].

15. a) Między liczby 5 i 15 wstawić takie 4 liczby, aby z danymi utworzyły postępowanie arytmetyczne.

b) Między dwa pierwsze wyrazy postępowania arytmetycznego — 5, 6, 17, 28, ... wstawić takie trzy liczby, aby z danymi — 5 i 6 utworzyły znów postępowanie arytmetyczne. Wypisać dalsze wyrazy otrzyma-

nego postępu! Jaki związek zachodzi między danym postępem a otrzymanym? Czy mają wspólne wyrazy?

c) Wstawić między każde dwa wyrazy postępu arytmetycznego: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$ takich r nowych liczb, aby powstał znów postęp arytmetyczny. Jaki związek zachodzi między różnicą d danego postępu, a różnicą δ postępu otrzymanego?

Wstawianie nowych wyrazów między wyrazy danego postępu arytmetycznego, w celu otrzymania nowego (gęstszego) postępu arytmetycznego, nazywamy *interpolacją* postępu.

d) Korzystając ze wzoru $\delta = \frac{d}{r+1}$, otrzymanego w poprzednim zadaniu, interpolować postępy arytmetyczne: $\alpha)$ 0, 1, 2, 3, ...; $\beta)$ 7, 5, 3, 1, ...; $\gamma)$ $a + b, 2a, 3a - b, \dots$; wstawiając między każde dwa wyrazy $\alpha)$ 4; $\beta)$ 3; $\gamma)$ 5 nowych wyrazów.

16. Tabelka umieszczona niżej, podaje: kwadratowe pierwiastki, sześciennie pierwiastki i odwrotności liczb, wypisanych w pierwszej kolumnie. Obliczyć z tej tabelki zapomocą interpolacji:

- $a) \sqrt{862.7};$ $b) \sqrt{8.645};$ $c) \sqrt{8.6085};$
 $d) \sqrt[3]{861.4};$ $e) \sqrt[3]{0.8634};$ $f) \sqrt[3]{862.25};$
 $g) 1 : 860.5;$ $h) 1000 : 862.75;$ $i) 1 : 8.638;$
 $j) 7 : 0.86437;$ $k) 5 : 86.143;$ $l) 40 : 0.8597.$

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$1 : n$
860	29.3258	9.5097	0.00116279
861	29.3428	9.5134	0.00116144
862	29.3598	9.5171	0.00116009
863	29.3769	9.5207	0.00115875
864	29.3939	9.5244	0.00115741
865	29.4109	9.5281	0.00115607

17. Napisać postęp geometryczny, w którym:

- $a) a_1 = 3, q = 2;$ $b) a_1 = 1, q = -2;$ $c) a_1 = 8, q = \frac{1}{2};$
 $d) a_1 = 1, q = -\frac{1}{2};$ $e) a_1 = -9, q = -\frac{2}{3};$ $f) a_1 = -4, q = \frac{3}{2};$
 $g) a_1 = 1, q = \frac{1}{r};$ $h) a_1 = b^5, q = \frac{a}{b};$ $i) a_1 = \frac{a^3}{b^3}, q = -\sqrt{\frac{b}{a}}.$

18. Napisać dalsze trzy wyrazy postępów geometrycznych:

- $a) 3, 15, 75, \dots;$ $b) 8, -4, 2, \dots;$ $c) 1, -1, 1, \dots;$
 $d) a^3, a^3b, ab^3, \dots;$ $e) 1, -a^2, +a^4, \dots$

19. Wypisać:

- a) parzyste potęgi liczby 2, począwszy od drugiej;
- b) potęgi liczby $\frac{1}{2}$, począwszy od pierwszej;
- c) trzykrotności potęg liczby $\frac{1}{2}$, począwszy od pierwszej.

Obliczyć n -ty wyraz otrzymanego postępu.

20. Wykazać, że każdy wyraz postępu geometrycznego (z wyjątkiem pierwszego) jest średnią geom. proporcjonalną wyrazu poprzedniego i następnego.

21. a) Z beczki, zawierającej $a = 100$ kg alkoholu, wyczerpuję 1 kg i dolewam 1 kg wody; następnie wyczerpuję znowu 1 kg mieszaniny i dolewam 1 kg wody i t. d. Ile alkoholu pozostanie w beczce, jeżeli czynność tę powtórzę 2, 3, ... n razy?

b) Z naczynia, mającego objętość $V = 5000$ cm³ i zawierającego powietrze o gęstości $d_0 = 0.001293$, pompujemy powietrze zapomocą wywiewy. Jaka będzie gęstość powietrza po 1, 2, 3, ... n poruszeniach tłoka, jeżeli pojemność rury tłokowej wywiewy wynosi $v = 200$ cm³?

Rozwiązać zadanie w liczbach szczególnych i ogólnych!

[Pierwotna gęstość powietrza w naczyniu jest d_0 , a masa Vd_0 . Po jednym podniesieniu tłoka powietrze o masie Vd_0 przyjmuje objętość $V + v$, ma więc gęstość $\frac{V}{V+v} d_0$. Przy zsunięciu tłoka usuwam v cm³ tego powietrza, a w naczyniu pozostaje powietrze o masie $\frac{V^2}{V+v} d_0$; i t. d.].

22. Wyznaczyć postęp geometryczny, w którym:

- a) $a_3 = 2$, $a_5 = 18$; b) $a_3 = 12$, $a_4 = -24$;
- c) $a_1 + a_2 = 8$, $a_3 + a_4 = 2$; d) $a_1 - a_3 = 6$, $a_3 - a_4 = 2\frac{2}{3}$;
- e) $a_1 - a_3 = 48$, $a_3 + a_5 = 12$; f) $a_2 + a_3 = 60$, $a_1 a_3 = 225$.

23. a) Krawędzie prostopadłościanu tworzą postęp geometryczny, którego suma wynosi s . Całkowita powierzchnia prostopadłościanu wynosi $2p$. Obliczyć krawędzie. Uważając s za liczbę stałą, zbadać, jaki warunek spełniać musi p , aby zadanie było rozwiązalne.

b) Trzy odcinki tworzą postęp geometryczny. Jakie wartości może mieć iloraz q tego postępu, aby z tych odcinków można zbudować trójkąt? Rozróżnić przypadki: $0 < q < 1$, $q = 1$ i $q > 1$.

24. Obliczyć sumy 5, 6 i 7 wyrazów postępu geometrycznego:

- a) 0.3, 0.03, 0.003, ...; b) 8, 12, 18, 27, ...;
- c) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ...; d) 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{8}$, ...;
- e) 1, x , x^2 , x^3 , ...; f) a^{10} , $a^9 b$, $a^8 b^2$, ...;
- g) 1, $-x$, x^2 , $-x^3$, ...; h) a^7 , $-a^6 b$, $a^5 b^2$, $-a^4 b^3$, ...

25. Znaleźć wzór na sumę n wyrazów postępu geometrycznego, którego pierwszy wyraz wynosi 1, a iloraz:

a) x ; b) $-x$; c) $\frac{1}{x}$; d) $-\frac{1}{x}$; e) x^2 ; f) $-\frac{1}{x^2}$.

26. W następujących przykładach obliczyć z trzech danych elementów a_1 , a_n , q , n , s_n postępu geometrycznego dwa pozostałe.

- a) $a_1 = \frac{3}{4}$, $q = -\frac{2}{3}$, $n = 5$; $a_5 = ?$, $s_5 = ?$;
 b) $a_6 = 60\frac{3}{4}$, $q = \frac{3}{2}$, $n = 6$; $a_1 = ?$, $s_6 = ?$;
 c) $a_1 = -5$, $n = 4$, $a_4 = -40$; $s_4 = ?$, $q = ?$;
 d) $q = 0.2$, $n = 5$, $s_5 = 156.2$; $a_1 = ?$, $a_5 = ?$;
 e) $q = -2$, $a_n = -96$, $s_n = -63$; $a_1 = ?$, $n = ?$.

[Za niewiadomą uważać $(-2)^n$, a następnie wyznaczyć n zapomocą próby].

f) $a_1 = 12$, $q = \frac{1}{2}$, $s_n = 23\frac{1}{2}$; $a_n = ?$, $n = ?$;

[Obliczyć najpierw $(\frac{1}{2})^n$, a potem wyznaczyć n zapomocą próby].

g) $a_1 = 3$, $a_n = 192$, $q = 2$; $n = ?$, $s_n = ?$;

[Porównaj wskazówki do zad. e) i f)].

h) $n = 3$, $a_3 = 8$, $s_3 = 10\frac{1}{2}$; $a_1 = ?$, $q = ?$;

[s_3 napisać w postaci: $s_3 = a_1(1 + q + q^2)$].

i) $n = 3$, $a_1 = 1$, $s_3 = 7$; $a_3 = ?$, $q = ?$;

[Porównaj wskazówkę do zad. h)].

j) $a_1 = -2$, $a_n = 486$, $s_n = 364$; $n = ?$, $q = ?$;

[Za niewiadome uważać q^n i q ; obliczyć q , a n znaleźć zapomocą próby].

Czy wszystkie zadania powyższe potrafimy rozwiązać w liczbach ogólnych? Na jakie natrafiamy trudności i jakie stąd wynikają problemy?

27. a) Między liczby 5 i 405 wstawić takie 4 liczby, aby z danymi utworzyły postęp geometryczny.

b) Wstawić między dwa pierwsze wyrazy postępu geometrycznego: 6, 48, 384, 3072, ... takie dwie nowe liczby, aby z danymi 6 i 48 tworzyły postęp geometryczny. Wypisać dalsze wyrazy tego postępu i porównać otrzymany postęp z danym. Czy oba postępy mają wyrazy wspólne? Które?

c) Wstawić między każde dwa wyrazy postępu geometrycznego: a_1 , $a_1 q$, $a_1 q^2$, ..., r nowych wyrazów tak, aby powstał znowu postęp geometryczny. Jaki związek zachodzi między ilorazem q danego postępu, a ilorazem nowego?

Wstawianie nowych wyrazów między wyrazy danego postępu geometrycznego w celu otrzymania nowego (gęstszego) postępu geometrycznego nazywamy *interpolacją* postępu geometrycznego.

d) Wstawić między 4 a 64 takie trzy liczby dodatnie, aby utworzyły z danymi liczbami: α) postęp arytmetyczny, β) postęp geometryczny. Przedstawić wyrazy obu postępów na linii liczbowej i porównać ze sobą punkty podziału przedziału 4 ... 64.

e) Wstawić między 2 i 18 (a i b) jedną liczbę, któraby z 2 i 18 (a i b) utworzyła α) postęp arytmetyczny, β) postęp geometryczny. Otrzymana liczba będzie średnią arytmetyczną względnie średnią geometryczną obu danych liczb (porównaj zadanie 5d i 20). Porównać ich wartości.

28. a) Jaką wartość będzie miał kapitał:

α) 485 zł, złożony na proc. skład. 6% po 7 latach?

β) 4826.5 zł, złożony na proc. skład. 9% po 12 latach?

b) Ludność pewnego miasta wzrastała co roku o $2\frac{1}{4}\%$. Ile mieszkańców liczy to miasto dzisiaj, jeżeli przed 8 laty liczyło 34800 mieszkańców?

c) Na książeczkę kasy oszczędności złożono: 1. V. 1923 r. 500 zł, 1. X. 1925 r. 350 zł i 1. VII. 1926 r. 200 zł. Jaką wartość przedstawia dzisiaj ta książeczka, jeżeli kasa oszczędności płaci 8%, a dochody kapitalizuje 31. XII. każdego roku?

d) Bank przyjął 40000 zł wkładek na 6%, a pożyczył tę sumę na 10%. Ile zarobił w 8 latach?

29. a) Jaki kapitał należy złożyć na 6%, aby po 7 latach otrzymać 10000 zł kapitału wraz z procentami?

b) Kapitał pewien pozostawał 3 lata na procencie składanym 4%, a następnych 5 lat na $4\frac{1}{2}\%$ i wzrósł w tym czasie do wartości 1401.76 zł. Obliczyć pierwotną wartość kapitału!

30. Kupiono plac budowlany na 2000 zł, a po 4 latach sprzedano go za 2680 zł. Jaki procent roczny przyniósł włożony kapitał?

31. a) Przez 10 lat składałem na początku każdego roku 100 zł na procent składany 6%. Pięć lat upłynęły od zapłacenia ostatniej wkładki. Jaką sumę posiadam dzisiaj?

b) Po ile zł należy składać na 6% na początku każdego roku przez 10 lat, aby po upływie dalszych 5 lat mieć sumę 5000 zł?

c) Dług 1616.62 zł ma być umorzony w 15 równych ratach rocznych, z których pierwsza jest płatna za 3 lata po zaciągnięciu długu. Jak wysokie muszą być raty, jeżeli liczy się $5\frac{1}{2}\%$?

d) Czysty dochód z kamienicy, obliczony z końcem roku, wynosi 4000 zł. Na dochód taki można liczyć przez 25 lat. Po tym czasie kamienica (raczej plac budowlany) przedstawiać będzie wartość 18000 zł. Jaką sumę można za kamienicę zapłacić, jeżeli się chce mieć z włożonego kapitału 6%?

32. Wartość mebli zmniejsza się po każdym roku wskutek zużycia o $p\%$ wartości ich przed rokiem. Jaka będzie wartość mebli po 1, 2, 3, n latach, jeżeli ich wartość teraźniejsza wynosi W_0 ?

Dodatek.

Liczby rzeczywiste.

§ 1. Odwzorowanie liczb wymiernych na linii liczbowej.

W ciągu nauki poznaliśmy różne rodzaje liczb. Najpierw poznaliśmy liczby naturalne i określiliśmy dla nich cztery działania zasadnicze: dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Dodawanie i mnożenie były działaniami wykonalnymi bez ograniczenia; odejmowanie i dzielenie niezawsze dawały się wykonać w zakresie liczb naturalnych. By wykonalność i tych działań była nieograniczona, rozszerzyliśmy zakres liczb, wprowadziliśmy ułamki i liczby względne. Wszystkie liczby w ten sposób uzyskane nazwaliśmy *liczbami wymiernymi*.

Zbiór liczb wymiernych, uporządkowanych według wielkości, ma, jak wiemy, następujące własności: 1. Jest nieograniczony (t. j. nie ma ani pierwszej, ani ostatniej liczby). 2. Jest wszędziegęsty (t. j. między dwiema dowolnymi liczbami wymiernymi znajdują się zawsze jeszcze inne liczby wymierne tak, że w zbiorze niema liczb sąsiednich). 3. Cztery zasadnicze działania (z wyjątkiem dzielenia przez 0) są w nim zawsze wykonalne i jednoznaczne.

Ograniczymy się narazie w tym paragrafie dla uproszczenia do liczb bezwzględnych. Rozszerzenie omówionych twierdzeń na liczby względne nie sprawia jednak żadnych trudności.

Wszystkie liczby wymierne możemy przedstawić na linii (osi) liczbowej. Kreślimy dowolną prostą (nieograniczoną), obieramy na niej dowolny punkt i oznaczamy go cyfrą 0. Przyjmujemy następnie dowolny odcinek za jednostkę, odcinamy go począwszy od 0 w pewnym kierunku raz, dwa razy, trzy razy itd. i oznaczamy jego koniec kolejno cyframi 1, 2, 3 Odcinkom 01, 02, 03, podporządkujemy kolejno liczby 1, 2, 3, które stanowią *miary* tych odcinków, t. j. oznaczają, jaką wielokrotnością przyjętej jednostki

jest dany odcinek. Tak więc każdemu z odcinków 01, 02, 03, odpowiada jako miara pewna liczba 1, 2, 3,; naodwrot odpowiada każdej liczbie całkowitej pewien odcinek. Ponieważ wszystkie odcinki, odcięte na linii liczbowej, mają wspólny początek (punkt 0), to każdy z nich jest dokładnie oznaczony, gdy podamy jego koniec (1, 2, 3,); w tem znaczeniu mówimy, że każdej liczbie całkowitej odpowiada ściśle oznaczony punkt na linii liczbowej.

Ułamki przedstawiamy na linii liczbowej w następujący sposób:

Aby przedstawić ułamek $\frac{m}{n}$, dzielimy odcinek przyjęty za jednostkę na n równych części znaną metodą geometryczną i odcinamy n -tą część jednostki na linii liczbowej raz, dwa, trzy, m razy, oznaczając kolejno końce odcinków: $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n}$, $\frac{m}{n}$. Odcinkowi $0\frac{m}{n}$ podporządkujemy ułamek $\frac{m}{n}$, który stanowi jego *miarę*, wyrażającą, że odcinek ten jest m -krotnością n -tej części odcinka, przyjętego za jednostkę. Mówimy też, jak wyżej, że ułamkowi $\frac{m}{n}$ odpowiada ściśle oznaczony punkt na linii liczbowej, oznaczony znakiem $\frac{m}{n}$.

Tym sposobem podporządkowaliśmy każdej liczbie wymiernej punkt na linii liczbowej (względnie odcinek). Własności zbioru liczb wymiernych, którą wyraziliśmy, nazywając ten zbiór wszędziegłym, odpowiada na linii liczbowej ta własność, że między dwoma punktami prostej znajdują się zawsze jeszcze inne punkty prostej, czyli, że na prostej niema punktów sąsiednich. Z faktu tego nie można jednak wnioskować, że każdemu punktowi linii liczbowej odpowiada jakaś liczba wymierna, czyli że każdy odcinek ma za miarę liczbę wymierną.

Dla wyjaśnienia, że taki wniosek byłby nieuzasadniony, przytoczymy przykład. Pomyślmy sobie zbiór wszystkich ułamków dziesiętnych (skończonych), uporządkowany według wielkości. Zbiór taki jest również wszędziegły (wykaż!), a jednak niekażdemu punktowi linii liczbowej można podporządkować ułamek dziesiętny (np. punktowi, któremu odpowiada ułamek $\frac{2}{3}$).

Przeciwnie; nietrudno wykazać, że na linii liczbowej istnieją punkty, którym nie odpowiada żadna liczba wymierna. Wiadomo z nauki geometrii, że istnieją odcinki niewspółmierne (np. bok i przekątna kwadratu, podstawa i ramię trójkąta równoramiennego

o kącie u wierzchołka 36° itp.). Jeżeli odetniemy na linii liczbowej od zera odcinek niewspółmierny z odcinkiem przyjętym za jednostkę, to drugiemu końcowi tego odcinka nie odpowiada żadna liczba wymierna. Gdyby bowiem temu punktowi odpowiadała liczba $\frac{m}{n}$,

to n -ta część jednostki mieściłaby się w tym odcinku m razy, co sprzeciwiałoby się założeniu, że przyjęty odcinek jest niewspółmierny z jednostką.

Jeżeli chcemy zatem, aby każdemu punktowi linii liczbowej odpowiadała liczba (czyli aby każdy odcinek miał miarę), musimy zakres liczb wymiernych rozszerzyć.

§ 2. Liczby niewymierne.

Z potrzebą rozszerzenia zakresu liczb wymiernych spotkaliśmy się już przy pierwiastkowaniu. Pierwiastek n -ty liczby naturalnej, niebędącej n -tą potęgą żadnej liczby naturalnej, nie dawał się obliczyć w zakresie liczb wymiernych. Wtedy zakres liczb wymiernych rozszerzyliśmy, dołączając do nich liczby niewymierne. Nasuwa się myśl, że to samo rozszerzenie zakresu liczb wymiernych umożliwi nam podporządkowanie każdemu odcinkowi liczby wymiernej lub niewymiernej jako miary.

Powtórzmy (§ 2, § 3, § 5), w jaki sposób wprowadziliśmy liczby niewymierne:

Wyszedłszy ze spostrzeżenia, że $\frac{4}{3} = 4 : 3 = 1.333 \dots$, otrzymaliśmy dwa ciągi liczb, dające się dowolnie przedłużać:

Ciąg I: 1, 1.3, 1.33, 1.333,

Ciąg II: 2, 1.4, 1.34, 1.334,

Liczby ciągu I rosną, lecz zostają mniejsze niż $\frac{4}{3}$; liczby drugiego ciągu maleją, lecz zostają większe niż $\frac{4}{3}$. Różnice odpowiednich liczb obu ciągów wynoszą kolejno: 1, 0.1, 0.01, ..., a więc stają się dowolnie małe. Te dwa ciągi wyznaczają liczbę $\frac{4}{3}$, większą od liczb ciągu I, a mniejszą od liczb ciągu II w tym znaczeniu, że nie ma innej liczby, która byłaby większa od wszystkich liczb ciągu I, a mniejsza od wszystkich liczb ciągu II. Gdyby bowiem taka liczba m istniała, to różnica odpowiednich liczb ciągów I i II nie mogłaby stać się mniejszą od $|m - \frac{4}{3}|$ wbrew zauważonej wyżej własności owych ciągów.

Aby zaznaczyć ten fakt, że ciągi I i II wyznaczają liczbę $\frac{4}{3}$, pisać będziemy:

$$\frac{4}{3} = \begin{cases} 1, 1.3, 1.33, 1.333, \dots \\ 2, 1.4, 1.34, 1.334, \dots \end{cases}$$

Oba symbole połączone znakiem równości możemy uważać za różne tylko sposoby pisanja tej samej liczby.

Do każdej liczby wymiernej można zawsze dobrać i to różnymi sposobami takie dwa ciągi, które tę liczbę wyznaczają. Np.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \begin{cases} 0, 0\cdot4, 0\cdot49, 0\cdot499, \dots \\ 1, 0\cdot6, 0\cdot51, 0\cdot501, \dots \end{cases} & 6 &= \begin{cases} 5, 5\cdot9, 5\cdot99, 5\cdot999, \dots \\ 7, 6\cdot1, 6\cdot01, 6\cdot001, \dots \end{cases} \\ -2 &= \begin{cases} -3, -2\cdot1, -2\cdot01, \dots \\ -1, -1\cdot9, -1\cdot99, \dots \end{cases} & c &= \begin{cases} c-1, c-0\cdot1, c-0\cdot01, \dots \\ c+1, c+0\cdot1, c+0\cdot01, \dots \end{cases} \\ & & c &= \begin{cases} c-\frac{1}{2}, c-\frac{1}{4}, c-\frac{1}{8}, c-\frac{1}{16}, \dots \\ c+\frac{1}{2}, c+\frac{1}{4}, c+\frac{1}{8}, c+\frac{1}{16}, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Powiemy tedy:

Jeżeli ciągi liczb:

$$\begin{aligned} a_1, a_2, a_3, a_4, & \dots \dots \dots \text{(Ciąg I)} \\ a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, & \dots \dots \dots \text{(Ciąg II)} \end{aligned}$$

mają następujące własności:

1. Każdy ciąg zawiera nieskończenie wiele liczb;
 2. Liczby ciągu I rosną (niektóre mogą być równe); liczby ciągu II maleją (niektóre mogą być równe);
 3. Każda liczba ciągu I jest mniejsza od każdej liczby ciągu II, a więc każda liczba ciągu II jest większa od każdej liczby ciągu I;
 4. Różnica odpowiadających sobie liczb obu ciągów maleje ciągle i może stać się dowolnie małą, jeżeli obierzemy dostatecznie dalekie liczby obu ciągów;
- to może istnieć najwyżej jedna liczba wymierna w , większa od wszystkich liczb ciągu I, a mniejsza od wszystkich liczb ciągu II. Mówimy wtedy, że ciągi te wyznaczają liczbę w i piszemy:

$$w = \begin{cases} a_1, a_2, a_3, \dots, \text{ lub krócej: } w = \begin{cases} a_n \\ a'_n \end{cases} \end{cases}$$

Znamy jednak takie przykłady, że chociaż dwa ciągi posiadają wszystkie 4 wymienione własności, mimo to niema liczby wymiernej większej od wszystkich liczb ciągu I, a mniejszej od wszystkich liczb ciągu II. Takimi ciągami są np.:

$$\begin{aligned} 1, 1\cdot4, 1\cdot41, 1\cdot414, 1\cdot4142, \dots & \text{(Ciąg I)} \\ 2, 1\cdot5, 1\cdot42, 1\cdot415, 1\cdot4143, \dots & \text{(Ciąg II).} \end{aligned}$$

Kwadraty liczb ciągu I są mniejsze niż 2, a kwadraty liczb ciągu II większe niż 2. Liczby odpowiednie obu ciągów różnią się kolejno od siebie o 1, 0·1, 0·01, ..., a ich kwadraty różnią się od siebie o niewiele więcej niż 3, 0·3, 0·03, ...*). Od liczby 2 różnią się ich kwadraty jeszcze o mniej. Wiadomo, że niema liczby wymiernej, której kwa-

*) Jeżeli a oznacza liczbę ciągu I, a' odpowiednią liczbę ciągu II, a δ ich różnicę, to: $a'^2 - a^2 = (a' + a)(a' - a) = (a' + a)\delta$. Ponieważ $a' + a \leq 3$, to $a'^2 - a^2 \leq 3\delta$.

drat równa się 2; niema też liczby wymiernej większej od wszystkich liczb ciągu I, a mniejszej od wszystkich liczb ciągu II. Gdyby bowiem taka liczba *w* istniała, to kwadraty liczb ciągów II i I nie mogłyby się różnić od siebie o mniej, niż o $|2 - w|$, co sprzeciwia się tej własności obu ciągów, że kwadraty dostatecznie dalekich ich liczb różnią się od siebie dowolnie mało. Niema zatem liczby wymiernej, odgraniczającej liczbę obu ciągów; symbolowi:

$$\begin{cases} 1, 1^4, 1^41, 1^414, 1^4142, \dots \\ 1, 1^5, 1^42, 1^415, 1^4143, \dots \end{cases}$$

nie odpowiada żadna liczba wymierna.

Wprowadzamy tedy nową liczbę, odpowiadającą ostatniemu symbolowi, przypisując jej tę własność, że jest ona większa od wszystkich liczb ciągu I (i każdej liczby wymiernej mniejszej od którejkolwiek liczby tego ciągu), a mniejsza od wszystkich liczb ciągu II (i każdej liczby wymiernej większej od którejkolwiek liczby tego ciągu). Liczba taka nie równa się żadnej liczbie wymiernej, ma jednak wśród liczb wymiernych ściśle oznaczone miejsce w tem znaczeniu, że mając daną dowolną liczbę wymierną, możemy rozstrzygnąć, czy jest ona od tej nowej liczby większa, czy mniejsza. Tę nową liczbę nazwiemy liczbą niewymierną.

Uogólniając powyższe rozważania, powiemy:

Jeżeli dane są dwa ciągi liczb wymiernych: $a_1, a_2, a_3, \dots$ (Ciąg I) i $a'_1, a'_2, a'_3, \dots$ (Ciąg II), posiadające 4 wymienione wyżej własności, i jeżeli niema liczby wymiernej większej od wszystkich liczb ciągu I, a mniejszej od wszystkich liczb ciągu II, wtedy wprowadzamy nową liczbę α , przypisując jej tę własność, że liczba α jest większa od wszystkich liczb ciągu I (i każdej liczby wymiernej mniejszej od którejkolwiek liczby tego ciągu), a mniejsza od wszystkich liczb ciągu II (i każdej liczby wymiernej większej od którejkolwiek liczby tego ciągu). Piszemy:

$$\alpha = \left\{ \begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & \dots \\ a'_1, & a'_2, & a'_3, & \dots \end{matrix} \right., \text{ lub krócej: } \alpha = \left\{ \begin{matrix} a_n \\ a'_n \end{matrix} \right.$$

Liczbę α nazywamy *liczbą niewymierną*. Liczby wymierne i niewymierne razem nazywamy *liczbami rzeczywistymi*.

§ 3. Dodawanie i odejmowanie liczb rzeczywistych.

Dodawanie liczb rzeczywistych określamy w następujący sposób:

$$\text{Jeżeli } \alpha = \left\{ \begin{matrix} a_n \\ a'_n \end{matrix} \right., \beta = \left\{ \begin{matrix} b_n \\ b'_n \end{matrix} \right., \text{ to } \alpha + \beta = \left\{ \begin{matrix} a_n + b_n \\ a'_n + b'_n \end{matrix} \right.$$

Należy jednak wykazać, że ostatni symbol wyznacza liczbę rzeczywistą, t. j. że ciągi $a_n + b_n$ i $a'_n + b'_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) posiadają 4 wymienione w § 2 własności:

1. Ciągi te zawierają nieskończenie wiele liczb, bo ciągi a_n, b_n, a'_n, b'_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) zawierają nieskończenie wiele liczb.

2. Ponieważ $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$ i $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots$, to $a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2 \leq a_3 + b_3 \leq \dots$, a więc liczby $a_n + b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) tworzą ciąg rosnący. Podobnie wykazać można, że $a'_n + b'_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) tworzą ciąg malejący.

3. Ponieważ $a_n < a'_n$ i $b_n < b'_n$, to $a_n + b_n < a'_n + b'_n$.

4. Różnice $(a'_n + b'_n) - (a_n + b_n) = (a'_n - a_n) + (b'_n - b_n)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$ maleją, bo różnice $a'_n - a_n$ i $b'_n - b_n$ maleją. Będą one mniejsze niż jakakolwiek dana, dodatnia, dowolnie mała liczba ε , jeżeli a_n, a'_n, b_n, b'_n tak dobierzemy, żeby było $a'_n - a_n < \frac{1}{2}\varepsilon$ i $b'_n - b_n < \frac{1}{2}\varepsilon$. Jest to zawsze możliwe, bo według założenia można ostatnie dwie różnice uczynić dowolnie małymi.

Ciągi $a_n + b_n$ i $a'_n + b'_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) wyznaczają zatem liczbę rzeczywistą, a liczbę tę nazywamy sumą liczb α i β .

Jeżeli α i β są liczbami wymiernymi, to powyższe określenie sumy $\alpha + \beta$ zgadza się z określeniem sumy liczb wymiernych. Rzeczywiście bowiem suma $\alpha + \beta$ jest wtedy większa (mniejsza) od sumy jakichkolwiek dwu liczb, z których pierwsza jest mniejsza (większa) niż α , a druga mniejsza (większa) niż β .

Niech będą dane liczby rzeczywiste:

$$\alpha = \left\{ \begin{matrix} a_n \\ a'_n \end{matrix} \right., \quad \beta = \left\{ \begin{matrix} b_n \\ b'_n \end{matrix} \right. \quad \text{ i } \quad \gamma = \left\{ \begin{matrix} c_n \\ c'_n \end{matrix} \right.$$

Utwórzmy:

$$\alpha + \beta = \left\{ \begin{matrix} a_n + b_n \\ a'_n + b'_n \end{matrix} \right., \quad \beta + \alpha = \left\{ \begin{matrix} b_n + a_n \\ b'_n + a'_n \end{matrix} \right.;$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \left\{ \begin{matrix} a_n + b_n + c_n \\ a'_n + b'_n + c'_n \end{matrix} \right., \quad \alpha + (\beta + \gamma) = \left\{ \begin{matrix} a_n + (b_n + c_n) \\ a'_n + (b'_n + c'_n) \end{matrix} \right.$$

Ponieważ $a_n + b_n = b_n + a_n$ i $a'_n + b'_n = b'_n + a'_n$, to ciągi, wyznaczające liczby $\alpha + \beta$ i $\beta + \alpha$, są identyczne. Zatem: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Podobnie: $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. Przeto:

Do sumy liczb rzeczywistych stosuje się prawo przemienności i prawo łączności.

Do każdej liczby rzeczywistej utworzyć można liczbę przeciwną. Jeżeli mianowicie $\alpha = \left\{ \begin{matrix} a_n \\ a'_n \end{matrix} \right.$, to liczbą przeciwną do α jest $\alpha' = \left\{ \begin{matrix} -a'_n \\ -a_n \end{matrix} \right.$.

Nietrudno wykazać (wykaż!), że ciągi $-a'_n$ i $-a_n$ posiadają cztery własności, wymienione w § 2, a więc wyznaczają jakąś liczbę α' . Aby wykazać, że α' jest liczbą do α przeciwną, tworzymy:

$$\alpha + \alpha' = \left\{ \begin{matrix} a'_n - a'_n \\ a_n - a_n \end{matrix} \right.$$

Łatwo widzieć, że $a_n - a'_n < 0$, a $a'_n - a_n > 0$. Zero jest więc liczbą (i to jak wiemy jedyną) większą od liczb pierwszego ciągu, wyznaczającego $a + a'$, a mniejszą od liczb drugiego ciągu, wyznaczającego $a + a'$. Jest więc $a + a' = 0$, czyli $a' = -a$.

Przez różnicę $a - \beta$ liczb rzeczywistych a i β rozumiemy sumę $a + (-\beta)$. Różnica powiększoną o odjemnik daje na wynik odjemną, ponieważ: $a - \beta + \beta = a + (-\beta) + \beta = a + [(-\beta) + \beta] = a$.

Przy pomocy odejmowania ustalimy porównywanie liczb rzeczywistych. Umiemy już porównywać liczby wymierne ze sobą i z liczbami niewymiernymi (na podstawie określenia liczby niewymiernej). Nie określiliśmy jeszcze porównywania liczb niewymiernych ze sobą. Zgodnie z twierdzeniami, ważnymi dla liczb wymiernych, ustalamy:

Jeżeli dane są dwie liczby rzeczywiste a i β , to $a > \beta$, $a = \beta$, lub $a < \beta$ stosownie do tego, czy $a - \beta > 0$, czy $a - \beta = 0$, czy $a - \beta < 0$.

Chcąc np. zbadać, czy dwie liczby: $a = \left\{ \frac{a_n}{a'_n} \right\}$ i $\beta = \left\{ \frac{b_n}{b'_n} \right\}$ są równe, tworzymy $a - \beta = \left\{ \frac{a_n - b'_n}{a'_n - b_n} \right\}$. Jeżeli stale $a_n - b'_n < 0$ i $a'_n - b_n > 0$, to $a - \beta < 0$, a więc $a < \beta$. W przeciwnym razie $a \geq \beta$.

§ 4. Liczby rzeczywiste jako miary odcinków.

Wprowadziwszy liczby niewymierne, podporządkujemy każdemu odcinkowi niewspółmiernemu z przyjętą jednostką pewną liczbę niewymierną. Odetnijmy w tym celu taki odcinek na linii liczbowej od punktu zerowego O w kierunku dodatnim; koniec odcinka znajdzie się w punkcie, który oznaczmy literą M . Punktowni M nie odpowiada żadna liczba wymierna, bo odcinek OM jest niewspółmierny z odcinkiem jednostkowym. Zaznaczmy na linii liczbowej (wykonaj rysunek i uzupełniaj według tekstu!) punkty odpowiadające liczbom całkowitym. Punkt M znajdzie się między dwoma takimi punktami; oznaczmy te punkty (od strony lewej ku prawej) literami A_1 i A'_1 . Punktom tym odpowiadają pewne liczby całkowite a_1 i a'_1 . Podzielmy odcinek $A_1 A'_1$ na s (np. 10) równych części. Ponieważ odcinek OM jest niewspółmierny z jednostką, nie może żaden punkt podziału paść na M . Punkt M znajdzie się znowu między dwoma punktami podziału; oznaczmy te punkty (od strony lewej ku prawej) A_2 i A'_2 , a odpowiadające im liczby wymierne a_2 i a'_2 . Podzielmy odcinek $A_2 A'_2$ znów na s równych części; punkt M znajdzie się znów między dwoma

punktami A_3 i A'_3 tego podziału, którym odpowiadają liczby wymierne a_3 i a'_3 . Postępując tak dalej otrzymamy następujące dwa ciągi odcinków:

$$OA_1, OA_2, OA_3, \dots \text{ i } OA'_1, OA'_2, OA'_3, \dots$$

i następujące dwa ciągi liczb wymiernych, będących miarami tych odcinków:

$$a_1, a_2, a_3, \dots \text{ i } a'_1, a'_2, a'_3, \dots$$

Te ciągi liczb mają wszystkie cztery własności, wymienione w § 2 (wykaż szczegółowo!), wyznaczają więc liczbę rzeczywistą α , większą od każdego a_n , a mniejszą od każdego a'_n . Te same cztery własności posiadają oczywiście i powyższe ciągi odcinków. A nadto jest:

$$OA_1 \leq OA_2 \leq OA_3 \leq \dots < OM < \dots \leq OA'_3 \leq OA'_2 \leq OA'_1.$$

Odcinkowi OM przyporządkujemy jako miarę liczbę α .

Łatwo widzieć, że przy takim określeniu miary sumie dwóch odcinków odpowiada suma ich miar, a w następstwie tego większemu odcinkowi odpowiada jako miara liczba większa, a mniejszemu odcinkowi liczba mniejsza.

W ten sposób *każdemu odcinkowi odpowiada jako miara pewna liczba rzeczywista, a tem samem odpowiada pewna liczba rzeczywista każdemu punktowi linii liczbowej*. Nasuwa się pytanie, czy naodwrot każdej liczbie rzeczywistej odpowiada punkt na linii liczbowej. Pytanie to dotyczy oczywiście tylko liczb niewymiernych (porównaj § 1).

Niechaj dana będzie liczba rzeczywista $\alpha = \begin{cases} a_1, a_2, a_3, \dots \\ a'_1, a'_2, a'_3, \dots \end{cases}$

Liczbom ciągów, wyznaczających α , odpowiadają punkty na linii liczbowej. Punkty, odpowiadające liczbom $a_1, a_2, a_3, \dots$, leżą coraz dalej na prawo, punkty, odpowiadające liczbom $a'_1, a'_2, a'_3, \dots$, leżą coraz dalej na lewo; zawsze jednak leży każdy z punktów odpowiadających liczbom $a_1, a_2, a_3, \dots$, na lewo od każdego z punktów, odpowiadających liczbom $a'_1, a'_2, a'_3, \dots$. Różnicom $a'_1 - a_1, a'_2 - a_2, a'_3 - a_3, \dots$, odpowiadają przedziały, które stają się coraz mniejsze, mniejsze nawet od dowolnie małego odcinka; przytem każdy przedział następny jest zawarty w poprzednim. Geometria przyjmuje, że wewnątrz wszystkich takich przedziałów istnieje zawsze jeden punkt. Że dwa różne punkty nie mogą być wewnątrz takich przedziałów zawarte, jest jasne; nie możnaby bowiem wtedy uczynić tych przedziałów mniejszemi od odległości

tych punktów. Ten jedyny punkt, leżący wewnątrz wszystkich przedziałów podporządkujemy liczbie a . Zatem:

Każdej liczbie rzeczywistej odpowiada punkt na linii liczbowej. Każda liczba rzeczywista może być uważana za miarę pewnego odcinka (przy przyjętej jednostce długości).

§ 5. Mnożenie liczb rzeczywistych.

Iloczyn liczb rzeczywistych bezwzględnych określamy w następujący sposób:

$$\text{Jeżeli } a = \left\{ \begin{matrix} a_n \\ a'_n \end{matrix} \right., \beta = \left\{ \begin{matrix} b_n \\ b'_n \end{matrix} \right., \text{ to } a \cdot \beta = \left\{ \begin{matrix} a_n b_n \\ a'_n b'_n \end{matrix} \right..$$

Należy jednak wykazać, że ciągi $a_n b_n$ i $a'_n b'_n$ (dla $n = 1, 2, 3, \dots$) mają owe cztery własności (§ 2), które stanowią warunek, aby takie ciągi wyznaczały liczbę. Otóż:

1. Każdy ciąg zawiera nieskończenie wiele liczb, bo ciągi liczb a_n, b_n, a'_n, b'_n , z których je utworzyliśmy, zawierają nieskończenie wiele liczb.

2. Liczby pierwszego ciągu rosną, liczby drugiego ciągu maleją; co najwyżej niektóre sąsiednie liczby tych ciągów mogą być równe: $a_2 b_2 \geq a_1 b_1$, bo $a_2 \geq a_1$ i $b_2 \geq b_1$ i t. d.

3. Każda liczba pierwszego ciągu jest mniejsza od każdej liczby drugiego ciągu: $a_n b_n < a'_m b'_m$, bo $a_n < a'_m$ i $b_n < b'_m$.

4. Różnice odpowiednich liczb obu ciągów maleją i mogą stać się dowolnie małymi, t. j. mniejszemi niż dowolnie mała dana dodatnia liczba ε . Aby to wykazać, przekształcimy różnicę $a'_n b'_n - a_n b_n$ w następujący sposób:

$$a'_n b'_n - a_n b_n = a'_n b'_n - a_n b'_n + a_n b'_n - a_n b_n = (a'_n - a_n) b'_n + (b'_n - b_n) a_n.$$

Pisząc w ostatniem wyrażeniu zamiast b'_n i a_n liczby większe b'_1 i a_1 , otrzymamy:

$$a'_n b'_n - a_n b_n < (a'_n - a_n) b'_1 + (b'_n - b_n) a_1.$$

Ponieważ różnice $a'_n - a_n$ i $b'_n - b_n$ możemy uczynić dowolnie małymi, dobierzmy je tak, aby było:

$$a'_n - a_n < \frac{\varepsilon}{2b'_1} \text{ i } b'_n - b_n < \frac{\varepsilon}{2a_1}.$$

Wtedy będzie:

$$a'_n b'_n - a_n b_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ czyli:}$$

$$a'_n b'_n - a_n b_n < \varepsilon.$$

Tak więc wyznaczają ciągi:

$$a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots \text{ i } a'_1 b'_1, a'_2 b'_2, a'_3 b'_3, \dots$$

wskutek twierdzenia w § 2 rzeczywiście pewną liczbę (wymierną lub niewymierną), a liczbę tę nazywamy iloczynem liczb a i β .

Jeżeli a i β są liczbami wymiernymi, to określone powyżej pojęcie iloczynu zgadza się z pojęciem iloczynu liczb wymiernych. Rzeczywiście bowiem iloczyn $a\beta$ jest wtedy większy (mniejszy) od iloczynu jakichkolwiek dwu liczb, z których pierwsza jest mniejsza (większa) niż a , a druga mniejsza (większa) niż β .

Określony w ten sposób iloczyn ma własności: przemienności, łączności i rozdzielności względem sumy.

Udowodnij, że: $a\beta = \beta a$, $a\beta\gamma = a(\beta\gamma)$, $(a + \beta)\gamma = a\gamma + \beta\gamma$, wzorując się na dowodzie prawa przemienności dla sumy w § 3.

Iloczyn względnych liczb rzeczywistych określamy zupełnie tak samo, jak iloczyn względnych liczb wymiernych. Wskutek tego stosują się do takiego iloczynu prawa przemienności, łączności i rozdzielności.

Dzielenie liczb rzeczywistych określa się jako działanie odwrotne do mnożenia.

Opierając się li tylko na zasadniczych własnościach sumy i iloczynu (t. j. tych, które w § 3 i w § 5 udowodniliśmy dla liczb rzeczywistych) oraz na własnościach różnicy i ilorazu, wynikających z określenia odejmowania i dzielenia jako działań odwrotnych do dodawania i mnożenia, wyprowadziliśmy (Podręcznik dla kl. IV rozdz. IV) różne przekształcania wyrażeń algebraicznych (jednomianów, wielomianów, wyrażeń ułamkowych), w których litery oznaczały liczby wymierne. Ponieważ sumy, iloczyny, różnice i ilorazy liczb rzeczywistych mają również te własności, to wszystkie przekształcania wyrażeń algebraicznych, wyprowadzone dla liczb wymiernych, pozostają ważne także wtedy, gdy litery oznaczają dowolne liczby rzeczywiste.

§ 6. Pole prostokąta.

Jeżeli podstawa prostokąta ma a *cm* a wysokość b *cm*, gdzie a i b oznaczają liczby naturalne, to prostokąt można podzielić prostymi równoległymi do podstawy i prostymi równoległymi do wysokości na ab kwadratów o bokach, mających po 1 *cm*. Mówimy, że prostokąt ma ab *cm*², a liczbę ab nazywamy polem prostokąta.

większej od którejkolwiek liczby tego ciągu). Liczbę $a\beta$ przyjmujemy za pole prostokąta danego. Pole danego prostokąta jest tedy mniejsze od pól prostokątów o bokach współmiernych z jednostką, a mniejszych od boków danego prostokąta, a większe od pól prostokątów o bokach współmiernych z jednostką, a większych od boków danego prostokąta.

Takim sposobem przyporządkowaliśmy także prostokątowi o bokach niewspółmiernych z jednostką liczbę, zwaną polem prostokąta, równą iloczynowi jego podstawy i wysokości.



M 54241/1

UP - Kraków BG



1050307186

