

BIBLIOTEKA
GŁÓWNA
W
SP
KRAKÓW

11767

41.
cz. II.

Łomnicki
Rachunek.





WYDAWCA
**PW
SP**
KRAKÓW

11.767

KDN., 15. 10. I. 53, 20,000

ONI ŁOMNICKI

R B. POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

DLA POTRZEB PRZYRODNIKÓW I TECHNIKÓW

TOM I

CZ. II

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

WYDANIE TRZECIE



WYDAWNICTWO „UNIVERSUM” KATOWICE



11767

21. XII. 49 — 27. XII. 49 Nr 1298
2000 egz. papier druk sat. V kl. 70x100 gr. 90
Druk ukończono 25 I. 1950
R-018247



CZĘŚĆ II.

Rachunek różniczkowy.

ROZDZIAŁ V.

Pochodna i różniczka funkcji jednej zmiennej.

Ustęp I.

SZYBKOŚĆ WZRASTANIA FUNKCJI. POCHODNA.

§ 60. Badanie wzrastania funkcji zapomocą prób.

Przedmiotem analizy wyższej jest badanie funkcji. Pierwszem nasuwającym się tu zagadnieniem jest badanie, jakim zmianom podlega zmienna zależna, gdy zmienna niezależna wzrasta lub maleje. Chcemy znaleźć *metodę* badania, czy z wzrostem zmiennej niezależnej funkcja rośnie czy też maleje i jaka jest szybkość tych zmian. Używając bowiem rozmaitych wzorów w fizyce, w technice i w innych naukach, poddajemy jedne wielkości zmianom i chcemy wiedzieć, jaki to ma wpływ na inne wielkości, zawarte w tych wzorach.

Zdawałoby się mogło, że to zagadnienie da się zawsze rozwiązać przy pomocy bardzo prostych prób. A mianowicie chcąc wiedzieć, jak się zmienia funkcja $y=f(x)$ w pobliżu wartości $x=x_1$, obliczamy wartość $y_1=f(x_1)$ tej funkcji dla $x=x_1$ a następnie obieramy jakąś wartość $x_2=x_1+h$ o dodatkiem h i obliczamy $y_2=f(x_2)=f(x_1+h)$; jeżeli wypadnie y_2 większe od y_1 , to jesteśmy skłonni twierdzić, że funkcja wzrasta w otoczeniu x_1 . Nie wiemy jednak, jak wielki przyrost h zmiennej x należy obrać, aby ocenić zachowanie się funkcji w *najbliższym otoczeniu* punktu $x=x_1$.

Na jakie trudności natrafiamy przy takich próbach, okaże następujący przykład.

Zbadać, czy funkcja:

$$y = x^2 - 6.001x + 11.003$$

wzrasta w otoczeniu punktu $x=x_1=3$ z wzrastaniem x , czy też maleje. W punkcie $x_1=3$ ma ta funkcja wartość:

$$y_1 = 3^2 - 6.001 \cdot 3 + 11.003 = 2$$

Weźmy nieco większe x , np. $x_2 = 3.1$. Otrzymamy $y_2 = 3.1^2 - 6.001 \cdot 3.1 + 11.003 = 2.0099$, a więc $y_2 > y_1$, co nas skłania do przypuszczenia, że funkcja wzrasta w otoczeniu $x_1 = 3$ z wzrostem x . Wniosek ten jest jednak przedwczesny, albowiem funkcja może się zachowywać np. podobnie jak funkcja, przedstawiona graficznie na fig. 70, t. j. przybierać

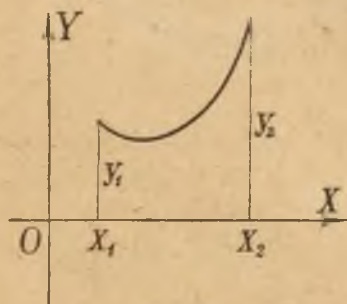


Fig. 70.

dla wielkich przyrostów zmiennej x wartości y_2 większe od y_1 , ale dla dostatecznie małych przyrostów wartości $y_2 < y_1$. Dotychczas zbadaliśmy tylko zmianę funkcji dla przyrostu o 0.1. Spróbujmy, jak się zachowa funkcja dla mniejszych przyrostów, np. dla $h = 0.01, 0.001, 0.0001$, czyli dla $x_2 = 3.01, 3.001, 3.0001$. Po wykonaniu rachunków otrzymamy odpowiednio: $y_2 = 2.00009, 2, 1.99999991$. Otrzymaliśmy więc dla bardzo małych przyrostów wartość $y_2 < y_1$. To znowu skłaniałoby nas do przypuszczenia, że funkcja maleje w otoczeniu punktu $x = x_1$ z wzrostem x (jak na fig. 70). Jednakże i teraz nie jesteśmy pewni, czy, biorąc jeszcze mniejsze przyrosty zmiennej x , nie otrzymamy przypadkiem znowu wartości y_2 większych od y_1 (narysować figurę, odpowiadającą takiemu zachowaniu się funkcji!).

Widzimy zatem, że nawet szereg mozolnych prób nie daje wystarczającej odpowiedzi na postawione zagadnienie.

Niechaj czytelnik dla ćwiczenia przeprowadzi podobne rozumowania:

1) dla funkcji: $y = x^2 - 8x + 20$ w punkcie $x_1 = 3.8$, biorąc przyrosty $1, \frac{1}{2}, 0.4, 0.2, 0.1$;

2) dla funkcji: $y = x^3 - 4.001x^2 + 4.002x + 3$ w punkcie $x_1 = 2$, biorąc przyrosty $0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$.

Wobec tego ujemnego wyniku badania przez wykonywanie prób zachodzi potrzeba obmyślenia jakiejś metody, któraby pozwoliła rozstrzygnąć od razu, czy funkcja wzrasta, czy też maleje w otoczeniu dowolnego punktu. Nie poprzestaniemy jednak na tej dość ogólnikowej wiadomości, że funkcja wzrasta lub maleje, ale zapytamy jeszcze o to, *jak szybko* ona wzrasta lub maleje, t. j. w jakim stosunku rośnie y względem x . Dodatnia szybkość zmienności będzie oznaczała wzrastanie a ujemna malenie.

To pojęcie szybkości wzrastania lub malenia funkcji odgrywa bardzo ważną rolę w rozmaitych naukach. Tak np. nie wystarczy wiedzieć, że tor kolejowy się wznosi, lecz chcemy wiedzieć, *jak szybko* się wznosi czyli jaki jest jego *spadek*. Podobno pytania nasuwają się przy badaniu wzrastania kapitału, umieszczonego na procentie, przy wzrastaniu prężności pary w kotle, przy wzrastaniu i maleniu natężenia prądu elektrycznego, gdy włączamy i wyłączamy motory i lampki i przy wielu innych

zagadnieniach przyrody i techniki. Podobnie wiedza statystyczna byłaby bardzo po-
 bieżna, gdyby nas pouczała jedynie, że liczba ludności w dwóch krajach wzrasta
 z czasem, a nie prowadziła do porównania, która ludność *szybciej* wzrasta.

§ 61. Szybkość wzrastania funkcji liniowej.

Intuicyjne pojęcie „szybkości” wzrastania lub malenia funkcji po-
 staramy się zastąpić ścisłą matematyczną definicją. Sprawa ta przedsta-
 wia się bardzo prosto dla zmian, odbywających się *proporcjonalnie*, to
 znaczy według prawa:

$$y = ax$$

a więc graficznie: według linii prostej, przechodzącej przez początek
 układu współrzędnych (zob. fig. 71) i nachylonej do osi x -ów pod kątem α ,
 którego tangens wynosi a . Szybkość wzrastania tej funkcji w dowolnym
 punkcie $x = x_1$ badamy w następujący sposób. Dla $x = x_1$ otrzymujemy
 $y = y_1 = ax_1$. Następnie posuwamy
 się do dowolnego punktu x_2 i otrzy-
 mujemy wartość $y_2 = ax_2$.

Szybkością wzrastania czyli spad-
 kiem tej funkcji nazywamy *stosunek*
przyrostu rzędnej do przyrostu odcie-
tej, t. j.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

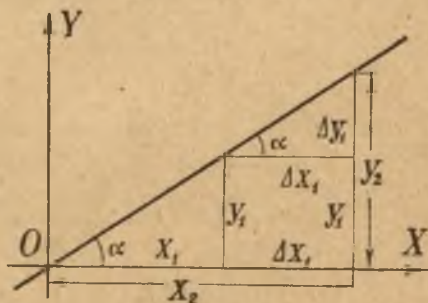


Fig. 71.

Dla skrócenia oznacza się różnicę
 dwóch wartości zmiennej x czyli jej
 przyrost symbolem Δx , dla zmiennej zaś y symbolem Δy , a więc kładziemy:

$$\left. \begin{array}{l} x_2 - x_1 = \Delta x_1 \\ y_2 - y_1 = \Delta y_1 \end{array} \right\} \text{ wobec czego } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

Ten stosunek przyrostów nazywamy *ilorazem różnicowym*.

Uwaga. Symbol Δ (grecka litera „delta” z wielkiego alfabetu) jest tu skróce-
 niem słowa „differentia” czyli „różnica”. Należy pamiętać o tem, że Δ nie jest tu czyn-
 nikiem, lecz symbolem, podobnie jak „sin” lub „log” w wyrażeniach $\sin x$, $\log x$.

Chodzi więc o wartość wyrażenia:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = a = \operatorname{tg} \alpha$$

Widzimy, że ten stosunek ma dla funkcji $y = ax$ wartość stałą: a , nie-
 zależną ani od x_1 ani od przyrostu Δx_1 , t. j. ani od punktu, dla którego
 badamy spadek, ani też od tego, jak wielki przyrost Δx_1 dajemy zmien-
 nej niezależnej; wartość ta jest równa tangensowi kąta nachylenia prostej
 o równaniu $y = ax$ do osi x -ów; nazywamy ją także *spadkiem* lub *spół-*
czynnikiem kierunkowym tej prostej.

Doszliliśmy więc do następującego wniosku:

szybkość wzrastania funkcji $y = ax$ jest liczbą stałą, a wartością jej jest współczynnik a .

Jeżeli ta szybkość a wypadnie dodatnia, to funkcja wzrasta z wzrostem x (prosta wznosi się, kąt α jest ostry), jeżeli zaś szybkość $a < 0$, to funkcja maleje z wzrostem x (prosta opada, kąt α jest rozwarty).

Ten spadek a wyraża się w technice zwykle w procentach, t. j. zapomocą ułamka o mianowniku 100. Tak np. mówiąc, że droga ma $4\frac{1}{2}\%$ spadku, stwierdzamy, że $a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{4\frac{1}{2}}{100} = 0.045$; prosta $y = \frac{2}{5}x$ ma

szybkość wzrastania $\frac{2}{5}$, a więc jej spadek, wyrażony w procentach, ma wartość 40% ; funkcja $y = -\frac{1}{20}x$ jest malejąca a jej szybkość wzrastania czyli spadek wynosi $-\frac{1}{20}$ lub w procentach -5% ; prosta, przedstawiająca tę funkcję, tworzy z osią x -ów kąt α rozwarty, bo $\operatorname{tg} \alpha$ jest ujemny.

Rozważania te stosują się ogólniej do każdej funkcji *linjowej*, t. j. do funkcji:

$$y = ax + b$$

której obrazem jest dowolna prosta nie prostopadła do osi x -ów. Jej rzędne w punktach x_1, x_2 mają wartości:

$$y_1 = ax_1 + b$$

$$y_2 = ax_2 + b$$

A więc:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \quad \text{czyli} \quad \Delta y_1 = a \Delta x_1$$

Stąd otrzymujemy na szybkość wzrastania tej funkcji wartość:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = a$$

a więc liczbę *stałą*, tak samo, jak w poprzednim specjalnym przypadku.

Przykłady. 1) Z wzoru na drogę przy ruchu jednostajnym:

$$s = ct$$

otrzymujemy na szybkość wzrastania drogi wyrażenie:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = c$$

a więc szybkość *stałą*.

2) Z wzoru na długość pręta w temperaturze t :

$$l_t = l_0(1 + \alpha t) = l_0 + l_0 \alpha t$$

otrzymujemy na szybkość wzrastania tej długości (z wzrostem temperatury) wyrażenie:

$$\frac{\Delta l_t}{\Delta t} = l_0 \alpha$$

(α nazywamy współczynnikiem rozszerzalności linjowej).

3) Z wzoru na kapitał końcowy, powstały z kapitału K_0 , umieszczonego na procent prosty $p\%$ na n lat:

$$K_n = K_0 + \frac{K_0 p n}{100}$$

otrzymujemy:

$$\frac{\Delta K_n}{\Delta n} = \frac{K_0 \cdot p}{100}$$

jako szybkość wzrastania tego kapitału.

§ 62. Szybkość wzrastania dowolnej funkcji. Definicja pochodnej.

Powyższa metoda badania szybkości zmienności wystarcza dla funkcji *linjowych*, t. j. funkcji, wyrażonych wzorem: $y = ax + b$ a graficznie linją *prostą*. Jednakże prawa przyrody dość rzadko dają się ująć w tak prosty wzór; bardzo często natomiast mamy do czynienia z rozmaitemi innymi funkcjami, jak np. przy proporcjonalności odwrotnej, przy proporcjonalności do kwadratu, przy proporcjonalności do sinusa kąta i t. p. Obrazami graficznymi tych wszystkich innych funkcji są z reguły linje *krzywe*. Wtedy już sama intuicja wskazuje, że spadek czyli szybkość wzrastania *zmienia się*, ma różne wartości w zależności od położenia punktu. Gdybyśmy usiłowali zachować definicję zapomocą ilorazu różnicowego $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, to spadek ten zależałby nie tylko od tego, który punkt

linji krzywej bierzemy pod uwagę, lecz także od tego, jak wielkie przyrosty dajemy zmiennej niezależnej. Tak np. już dla paraboli o równaniu:

$$y = ax^2$$

zauważymy ten fakt z łatwością. I tak biorąc x_1 i $x_2 = x_1 + \Delta x_1$, mamy:

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1^2 \\ y_2 &= a(x_1 + \Delta x_1)^2 \end{aligned}$$

a więc:

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 2ax_1 \Delta x_1 + a(\Delta x_1)^2$$

skąd:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 2ax_1 + a\Delta x_1$$

Widzimy zatem, że nawet przy stałym obranem x_1 ten iloraz różnicowy ma jeszcze wartość zmienną, zależną od wielkości przyrostu Δx_1 .

Wobec tego staramy się zbudować nową definicję szybkości wzrastania funkcji czyli jej spadku a mianowicie taką, która by dawała wartość tego spadku, niezależną od wielkości przyrostu Δx_1 , a która by dla funkcji linjowej dawała wyniki zgodne z poprzednią metodą. Bieg myśli,

prowadzących do tej nowej definicji, wyjaśnimy na następującym prostym przykładzie liczbowym.

Chcemy określić szybkość wzrastania czyli spadek funkcji:

$$y = 2x^2 - 7$$

w punkcie $x_1 = 3$. Dajemy zmiennej kolejno rozmaite przyrosty coraz mniejsze a mianowicie $\Delta x_1 = 1, 0.1, 0.01, 0.001, \dots$, t. j. bierzemy kolejno $x_2 = 4, 3.1, 3.01, 3.001 \dots$. Obliczamy odpowiednie wartości y_2 , następnie przyrosty zmiennej zależnej $\Delta y_1 = y_2 - y_1$ i tworzymy każdym razem iloraz różnicowy $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$. W załączonej tabelce znajdujemy te wszyst-

x	y	Δx	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
3	11	—	—	—
4	25	1	14	14
3.1	12.22	0.1	1.22	12.2
3.01	11.1202	0.01	0.1202	12.02
3.001	11.012002	0.001	0.012002	12.002
↓	↓	↓	↓	↓
3	11	0	0	12

kie liczby. Widzimy, że wraz z Δx także Δy dąży do zera, a iloraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ zmienia się: dla przyrostu

$\Delta x = 1$ wynosi on 14, dla 0.1 już tylko 12.2, dla 0.01 jeszcze mniej: 12.02, zbliżając się widocznie do stałej wartości 12. Do tego samego wniosku doszlibyśmy, biorąc ujemne przyrosty Δx i budując odpowiednią tabelkę. Łatwo okazać, że ten iloraz dąży do gra-

nicy 12, gdy przyrost Δx dąży do zera. I tak dla $x = x_1 = 3$ i $x = x_2 = 3 + \Delta x_1$ otrzymujemy

$$y_1 = 2 \cdot 3^2 - 7$$

$$y_2 = 2(3 + \Delta x_1)^2 - 7$$

a stąd:

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 12\Delta x_1 + 2(\Delta x_1)^2$$

a więc

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 12 + 2\Delta x_1$$

Graniczną wartością tego stosunku jest (na podstawie § 40, VI):

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 12$$

(Do zrozumienia pojęcia granicy potrzebna jest znajomość wiadomości, zawartych w rozdziale III, a w szczególności w § 39). Otóż tę granicę ilorazu różnicowego obieramy za miarę prawdziwej szybkości wzrastania czyli spadku w punkcie $x_1 = 3$. Otrzymany wynik możnaby wypowiedzieć następującymi słowami: w punkcie $x_1 = 3$ zmienna zależna $y = 2x^2 - 7$ wzrasta 12 razy szybciej aniżeli zmienna niezależna x .

To samo rozumowanie możemy przeprowadzić ogólnie dla każdego punktu a mianowicie:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1^2 - 7 \\ y_2 &= 2(x_1 + \Delta x_1)^2 - 7 \\ \hline \Delta y_1 &= y_2 - y_1 = 4x_1 \Delta x_1 + 2(\Delta x_1)^2 \\ \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} &= 4x_1 + 2 \cdot \Delta x_1 \\ \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} &= 4x_1 \end{aligned}$$

Stąd otrzymamy dla każdego punktu inny spadek. Otrzymaliśmy więc z funkcji $y = 2x^2 - 7$ nową funkcję: $4x$, podającą wielkość jej spadku dla każdej wartości x . Tak np. dla punktu $x_1 = 4$ szybkość wzrastania

wynosi 16. Wartość $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 14$, którą otrzymaliśmy w tabelce, biorąc przyrost $\Delta x = 1$ od punktu 3 do 4, można uważać za *przeciętny* spadek pomiędzy prawdziwym spadkiem 12 punktu początkowego a prawdziwym spadkiem 16 punktu końcowego przedziału (3, 4). Podobnie wartość $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 12.2$, otrzymana przy użyciu przyrostu 0.1 od punktu $x_1 = 3$, jest *przeciętną* pomiędzy 12 a $12.4 = 4 \cdot 3.1$.

Dla funkcji:

$$y = ax^2$$

otrzymaliśmy iloraz różnicowy:

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 2ax_1 + a\Delta x_1$$

a więc jej szybkość wzrastania w punkcie x_1 wynosi:

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = 2ax_1$$

Widzimy, że takie pojmowanie szybkości wzrastania czyli spadku funkcji prowadzi nas do wartości *niezależnej* od wielkości przyrostu a *zależnej* tylko od punktu x_1 , dla którego badamy spadek. Otrzymujemy zatem w ten sposób z funkcji $y = f(x) = ax^2$ nową funkcję: $2ax$ zmiennej x . Tę nową funkcję nazywamy *pochodną* funkcji $y = f(x)$ ze względu na zmienną x i oznaczamy ją krótko symbolem:

$$y' = f'(x)$$

Wartość tej funkcji w każdym punkcie można uważać za miarę szybkości wzrastania lub malenia pierwotnej funkcji: $y = f(x)$ w tym punkcie. Te rozważania prowadzą do następującej ogólnej definicji.

Definicja pochodnej. Granicę, do której dąży stosunek przyrostu zmiennej zależnej do przyrostu zmiennej niezależnej, gdy przyrost zmiennej niezależnej dąży do zera, nazywamy pochodną tej funkcji (t. j. tej zmiennej zależnej) ze względu na tę zmienną niezależną.

Jeżeli zaś ten iloraz nie dąży do żadnej granicy, to funkcja nie posiada pochodnej.

Uwaga. Przy wyznaczaniu pochodnej należy uwzględnić zarówno dodatnie jak i ujemne przyrosty zmiennej niezależnej. Pochodna we właściwym tego słowa znaczeniu istnieje tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica ilorazu $\Delta y : \Delta x$ przy obustronnem dążeniu przyrostu Δx do zera.

Gdy zaś istnieje tylko jednostronna granica skończona (por. § 45), to mówimy o pochodnej prawostronnej lub lewostronnej. Rozważa się też niekiedy niewłaściwe granice $+\infty$ lub $-\infty$ (por. § 47) i mówi się wtedy, że pochodna (niewłaściwa) ma wartość $+\infty$ lub $-\infty$.

Pochodna $f'(x)$ funkcji $f(x)$ jest więc określona następującym wzorem:

$$(1) \quad y = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Wyrażając tu przyrost Δy funkcji gdy zmienna niezależna zmienia się od x do $x + \Delta x$, wzorem $f(x + \Delta x) - f(x)$, możemy użyć także następującego wzoru do określenia pochodnej:

$$(2) \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Jeszcze dogodniejszą formę tego wzoru otrzymamy, oznaczając przyrost Δx zmiennej niezależnej krótko literą h :

$$(3) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Funkcję $f(x)$, której pochodną jest $f'(x)$, nazywamy funkcją *pierwotną* funkcji $f'(x)$. Zastosujmy to pojęcie do funkcji linijowej.

$$y = ax + b$$

Obliczyliśmy już (na str. 212) stosunek przyrostu zmiennej zależnej do przyrostu zmiennej niezależnej i okazało się, że:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

a więc jest liczbą stałą dla każdego przyrostu Δx ; wobec tego także i granica tego wyrażenia dla Δx , dążącego do zera, jest liczbą stałą a

(por. § 40, I'). Widzimy stąd, że szybkość wzrastania (czyli spadek) funkcji linjowej, obliczona nową metodą, ma tę samą wartość, co przy użyciu dawnej metody, a więc słusznie możemy uważać tę nową metodę za *uogólnienie* dawnej.

W ogólnym przypadku iloraz różnicowy jest funkcją zmiennej niezależnej x i przyrostu $h = \Delta x$, jak to np. miało miejsce w przykładach omówionych na str. 215. Jeżeli zaś ustalimy wartość x , to iloraz różnicowy jest funkcją tylko jednej zmiennej h :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(h)$$

Badanie pochodnej dowolnej funkcji $f(x)$, w dowolnym punkcie, polega zatem na badaniu *granicy* funkcji $F(h)$, gdy h dąży do zera. Mamy tu zatem do czynienia z zagadnieniem, które omówiliśmy już obszernie w poprzednich rozdziałach.

Dział matematyki, poświęcony obliczaniu pochodnych rozmaitych funkcji i badaniu własności tych funkcji przy pomocy pochodnych, nazywamy *rachunkiem różniczkowym*.

Pochodzenie tej nazwy wyjaśnimy niebawem.

§ 63. Przykłady obliczania pochodnej wprost z definicji.

1) Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = \frac{5}{x}$$

określonej dla wszystkich x z wyjątkiem $x = 0$.

Tworzymy różnicę:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{5}{x+h} - \frac{5}{x} = \frac{5x - 5x - 5h}{x(x+h)} = -\frac{5h}{x^2 + hx}$$

Stąd:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{5}{x^2 + hx}$$

Stosując do prawej strony twierdzenie o ilorazie granic (por. § 40, VIII'), otrzymujemy:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{5}{x^2}$$

Ta pochodna jest — podobnie jak pierwotna funkcja — określona dla wszystkich x z wyjątkiem $x = 0$.

Uwaga. Gdy x dąży do zera, to pierwotna funkcja posiada niewłaściwą prawostronną granicę $+\infty$ a niewłaściwą lewostronną granicę $-\infty$; natomiast pochodna posiada dla $x \rightarrow 0$ obustronną granicę niewłaściwą $-\infty$.

Iloraz różnicowy dla punktu $x = 0$ ma teraz postać:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \sin \frac{1}{h}$$

Wiemy (por. § 39, przykład 6), że funkcja $F(h) = \sin \frac{1}{h}$ nie dąży do żadnej granicy, gdy $h \rightarrow 0$, a zatem badana funkcja nie posiada pochodnej w punkcie $x = 0$. (Później przekonamy się, że dla wszystkich innych punktów ta funkcja posiada pochodną).

W historycznym rozwoju matematyki do wprowadzenia pojęcia pochodnej doprowadziły rozważania nie arytmetyczne, lecz z jednej strony geometryczne, z drugiej zaś mechaniczne i na nich właśnie polegają najważniejsze zastosowania rachunku różniczkowego. Ponieważ te rozważania ilustrują znakomicie konstrukcję tego pojęcia, przeto zajmiemy się tutaj niemi nieco dokładniej.

§ 64. Geometryczna interpretacja pochodnej.

Weźmy pod uwagę dowolną linię krzywą o równaniu $y = f(x)$ (fig. 72). Chcemy określić spadek linii krzywej w punkcie $A(x_1, y_1)$. Obierzmy na tej linii drugi punkt $B(x_2, y_2)$. Spadek siecznej, łączącej punkt A z B , ma wartość:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

W pobliżu punktu A linia krzywa wznosi się szybciej, aniżeli sieczna AB , a w pobliżu punktu B powolniej. Wobec tego można uważać spadek siecznej za przeciętny spadek linii krzywej wzdłuż łuku $\widehat{AB}$. Weźmy teraz mniejszy przyrost Δx_1 zmiennej niezależnej, to znaczy, obierzmy punkt B' bliżej punktu A aniżeli punkt B . Sieczna AB' zgadza się lepiej pod względem spadku z linią krzywą, aniżeli sieczna AB , a więc:

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

lepiej się nadaje jako przeciętny spadek do ocenienia szybkości wzrastania funkcji

$f(x)$ w punkcie A , aniżeli spadek siecznej AB . Jeżeli punkt B zbliża się z jednej lub z drugiej strony do punktu A i dąży do nakrycia się

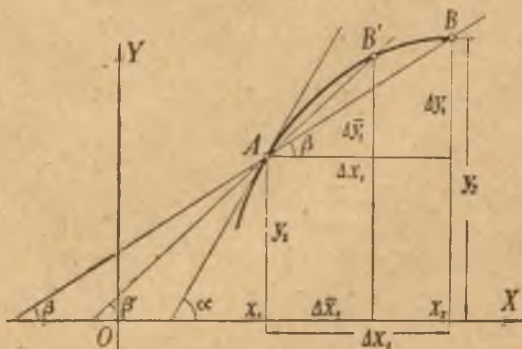


Fig. 72.

z tym punktem, to w najpospolitszych przypadkach sieczna *dąży* do pewnej granicznej prostej i to do tej samej prostej bez względu na to, z której strony punkt B dąży do A . Tę graniczną prostą nazywamy prostą *styczną* do linii krzywej w punkcie A . *Spadek tej stycznej uważamy za spadek linii krzywej* w tym punkcie czyli za miarę szybkości wzrastania funkcji $f(x)$ w punkcie A . Nazwijmy literą α kąt stycznej z osią x -ów, to $\operatorname{tg} \alpha$ jest granicą, do której dąży spadek siecznej:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}$$

Tę właśnie granicę nazwaliśmy pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie $x = x_1$. Więć:

(4)

$$f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha$$

Stąd wynika następujące twierdzenie:

wartość pochodnej funkcji $y = f(x)$ w jakimkolwiek punkcie x_1 równa się spadkowi prostej stycznej w punkcie (x_1, y_1) do linii, przedstawiającej tę funkcję.

Uwaga. Jeżeli spadek siecznej nie dąży do właściwej granicy, lecz posiada *niewłaściwą* granicę $+\infty$ lub $-\infty$, to nie znaczy to jeszcze, że dana linia krzywa nie posiada stycznej w badanym punkcie, może bowiem istnieć styczna prostopadła do osi x -ów: wtedy istotnie spadek siecznej, t. j. $\operatorname{tg} \beta$, dąży do $+\infty$ lub $-\infty$ (por. fig. 73) a kąt β dąży do $\alpha = 90^\circ$. Można by wtedy mówić, że spadek krzywej jest nieskończenie wielki, albo, że szybkość wzrastania funkcji jest w takim punkcie nieskończenie wielka. Równanie takiej stycznej ma postać:

$$x = x_1$$

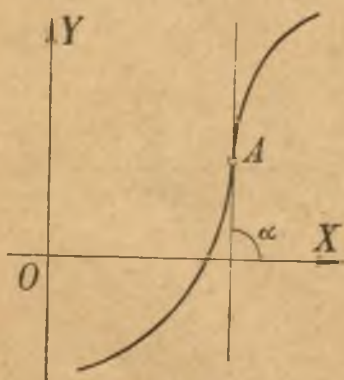


Fig. 73.

Na podstawie tego można podać następującą definicję linii stycznej nieprostopadłej do osi x -ów: jest to prosta, przechodząca przez punkt A linii, podanej równaniem $y = f(x)$, a mająca spadek równy wartości pochodnej w tym punkcie.

Równanie stycznej do linii $y = f(x)$ w jej punkcie $A(x_1, y_1)$ ma zatem postać:

(5)

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

lub krótko:

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1)$$

Punkt $A(x_1, y_1)$ nazywamy *punktem styczności*.

Prostą, przechodzącą przez punkt styczności, a prostopadłą do stycznej, nazywamy prostą *normalną*. Opierając się na znanym z geometrii analitycznej warunku prostopadłości dwóch linii prostych o spadkach a_1 i a_2 , a mianowicie: $a_1 a_2 + 1 = 0$, otrzymujemy następujące *równanie normalnej*:

(6)

$$y - y_1 = -\frac{1}{y_1'}(x - x_1)$$

o ile styczna nie jest równoległa do osi x -ów; w tym bowiem ostatnim przypadku równanie normalnej ma postać $x = x_1$, jako równanie prostej prostopadłej do osi x -ów.

Z tych równań (5) i (6) możemy łatwo obliczyć odcinki stycznej i normalnej, sięgające od punktu styczności do osi x -ów i ich rzuty na oś x -ów (por. fig. 74). Odcinek $AC = S$ nazywamy odcinkiem stycznej; odcinek $AD = N$ odcinkiem normalnej, a rzuty: $BC = P_s$ nazywamy *podstyczną*, $BD = P_n$ *podnormalną*. Odcinki te występują nieraz przy dyskusji linii krzywych.

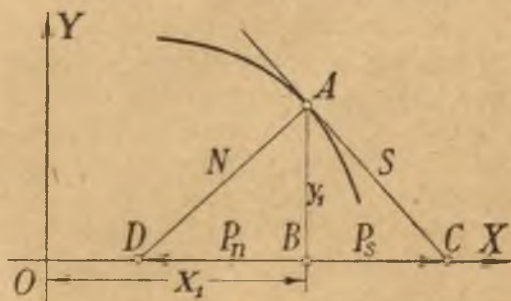


Fig. 74.

Z równania stycznej:

(5) oblicza się odcinek OC

na osi x -ów, kładąc $y = 0$. Dostaniemy:

$$x - x_1 = -\frac{y_1}{y_1'}$$

Podstyczna P_s ma wartość $OC - OB = x - x_1$, a zatem

(7)

$$P_s = -\frac{y_1}{y_1'}$$

Z tego wzoru otrzymuje się nie tylko długość (t. j. wartość bezwzględną) odcinka BC , lecz także jego kierunek (znak).

Podobnie z równania normalnej: (6) otrzymujemy, kładąc $y = 0$:

$$x - x_1 = y_1 y_1'$$

Ale:

$$x - x_1 = OD - OB = -(OB - OD) = -DB = +BD = P_n$$

a więc:

(8)

$$P_n = y_1 y_1'$$

Ten odcinek P_n wynika z tego wzoru dodatni, jeżeli punkt D leży (tak jak na fig. 74) po ujemnej stronie punktu B .

Odcinki stycznej i normalnej uważamy zawsze za dodatnie. Obliczamy je z trójkątów prostokątnych ABC i ABD , a mianowicie:

$$(9) \quad S = \sqrt{y_1'^2 + P_n^2} = \sqrt{y_1'^2 + \frac{y_1'^2}{y_1'^2}} = \left| \frac{y_1'}{y_1'} \right| \cdot \sqrt{1 + y_1'^2}$$

$$(10) \quad N = \sqrt{y_1^2 + P_n^2} = \sqrt{y_1^2 + y_1^2 y_1'^2} = |y_1| \cdot \sqrt{1 + y_1'^2}$$

Znaki: $||$ bezwzględnej wartości są tu potrzebne, albowiem y_1 i $\frac{y_1'}{y_1}$ mogą być liczbami ujemnymi.

Z tych rozważań widzimy, że zarówno *definicja* prostej stycznej do dowolnej linii krzywej jak i wyprowadzenie jej równania wymagają wprowadzenia pojęcia pochodnej. One też doprowadziły Leibniza do odkrycia rachunku różniczkowego (w r. 1684 ogłosił Leibniz wyniki badań w dziele p. t. „*Nova methodus pro maximis, minimis itemque tangentibus*“). W starożytności i w wiekach średnich badano tylko styczne do koła, elipsy, hiperboli, paraboli i spiralnej Archimedesesa; konstrukcje stycznych do tych linii dadzą się bowiem wykonać bez pomocy pojęcia pochodnej.

Przykłady. a) Styczna do krzywej, przedstawionej równaniem:

$$y = 2x^2 - 7$$

w punkcie $x_1 = 3$, $y_1 = 11$ ma równanie:

$$y - 11 = 12(x - 3)$$

albowiem pochodna tej funkcji w punkcie $x_1 = 3$ ma wartość 12, jak to obliczyliśmy na str. 214. Ogólnie, w punkcie $x = x_1$, $y = y_1$ styczna do tej krzywej ma równanie:

$$y - y_1 = 4x_1(x - x_1)$$

albowiem $y' = 4x$, jak to obliczyliśmy na str. 215.

Dla paraboli o równaniu:

$$y = ax^2$$

styczna w punkcie $A(x_1, y_1)$ ma równanie:

$$y - y_1 = 2ax_1(x - x_1)$$

albowiem $y' = 2ax$ (zob. str. 215).

b) Hiperbola o równaniu:

$$y = \frac{5}{x}$$

ma spadek $y' = -\frac{5}{x^2}$ (por. str. 217), a zatem styczna w dowolnym jej punkcie $A(x_1, y_1)$ ma równanie:

$$y - y_1 = -\frac{5}{x_1^2}(x - x_1)$$

Jej podstyczna ma wartość (wzór 7):

$$P_1 = -\frac{y_1}{y_1'} = -\frac{\frac{5}{x_1}}{-\frac{5}{x_1^2}} = +x_1$$

Stąd wynika bardzo prosta konstrukcja stycznej w dowolnym punkcie A tej hiperboli (fig. 75). Wykreśla się rzędną AB tego punktu i od punktu B odcina się w kierunku dodatnim (dla prawej gałęzi hiperboli, ujemnym zaś dla lewej) $BC = x_1$. Ten odcinek przedstawia podstyczną, zatem prosta, łącząca C z A , musi być styczną w punkcie A .

c) Podać konstrukcję stycznej w dowolnym punkcie linii krzywej o równaniu:

$$(c) \quad f(x) = y = ax^n$$

gdzie n jest liczbą naturalną. Jest to parabola n -tego stopnia. Spróbujmy oprzeć konstrukcję na własności podstycznej, podobnie jak w poprzednim przykładzie. Do tego celu potrzebna jest pochodna tej funkcji.

Obliczmy najpierw:

$$f(x+h) = a(x+h)^n$$

Z dwumiennego wzoru Newtona otrzymujemy:

$$f(x+h) = a(x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h^2x^{n-2} + \dots + nh^{n-1}x + h^n)$$

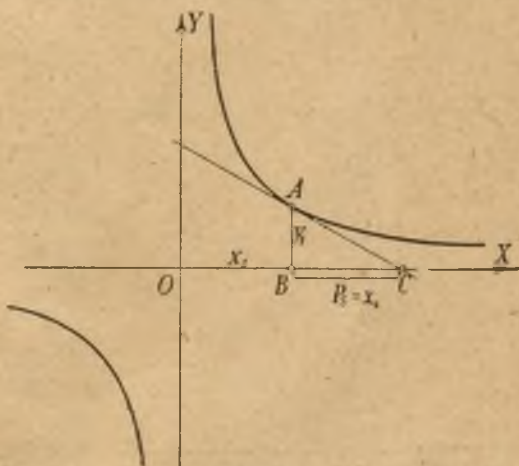


Fig. 75.

Odejmując:

$$f(x) = ax^n$$

otrzymujemy na przyrost tej funkcji następujący wzór:

$$f(x+h) - f(x) = anhx^{n-1} + a \frac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \dots + anh^{n-1}x + ah^n$$

Stąd iloraz różnicowy:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = anx^{n-1} + a \frac{n(n-1)}{2} hx^{n-2} + \dots + anh^{n-2} + ah^{n-1}$$

Gdy h dąży do zera, to wszystkie wyrazy drugiej strony, począwszy od drugiego, dążą do zera, zatem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = anx^{n-1}$$

A zatem *pochodna funkcji* $y = ax^n$ *wyraża się wzorem:*

(11)

$$y' = f'(x) = anx^{n-1}$$

Z wzoru (7) na podstęczną otrzymujemy zatem:

$$P_1 = -\frac{y_1}{y'_1} = -\frac{ax_1^n}{anx_1^{n-1}} = -\frac{x_1}{n}$$

Stąd wynika następująca konstrukcja stycznej do krzywej o równaniu (c)

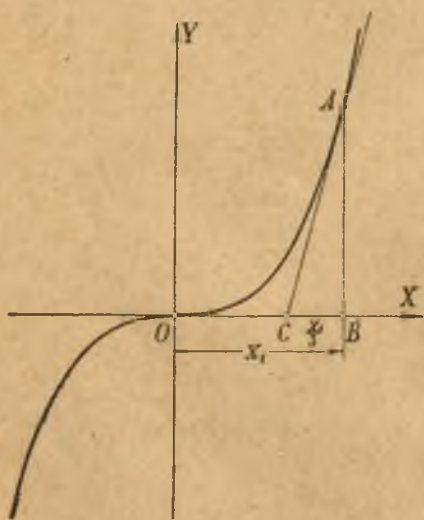


Fig. 76.

w dowolnym jej punkcie A (fig. 76). Wykreślamy rzędną AB punktu A , dzielimy odcinek $OB = x_1$ na n równych części i jedną taką część odcinamy od punktu B w kierunku ujemnym, gdy x_1 jest dodatnie (jak fig. 76) a w kierunku dodatnim, gdy x_1 jest ujemne. Koniec C tego odcinka łączymy z A ; prosta CA jest styczną, przechodzącą przez punkt A . Na fig. 76 uwidoczniłono tę konstrukcję dla krzywej o równaniu $y = x^3$.

Z tych przykładów widzimy, że nawet nie znając kształtu linii krzywej, który może być nawet bardzo zawily, nie znając żadnych jej geometrycznych własności, możemy otrzymać z jej równania drogą czysto

arytmetyczną linię styczną. Jest to najbardziej zasadnicze zastosowanie rachunku różniczkowego do geometrii.

Inne zastosowania geometryczne omówimy w dalszych rozdziałach, w § 66 zaś podamy jeszcze jedną interpretację pochodnej, a mianowicie interpretację mechaniczną.

§ 65. Graficzne różniczkowanie.

Jeżeli funkcja jest podana graficznie w układzie współrzędnych prostokątnych, to możemy znaleźć wykres funkcji pochodnej bez żadnych rachunków, przy pomocy dość prostej konstrukcji geometrycznej. Konstrukcja polega na tem, że wartość pochodnej w każdym punkcie jest równa spadkowi stycznej w tym punkcie:

$$y' = \operatorname{tg} \alpha$$

Chcąc więc znaleźć rzędną $y'(x)$ pochodnej w punkcie A na fig. 77, wykreślamy rzędną AB punktu A i styczną w punkcie A . Następnie odcinamy

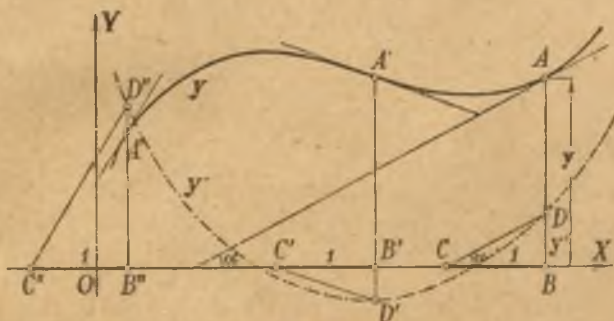


Fig. 77.

namy na lewo od punktu B jednostkę: $CB = 1$. Prosta CD , przechodząca przez C i równoległa do stycznej, wyznacza swoim punktem przecięcia D rzędną BD funkcji pochodnej.

Albowiem:

$$BD = CB \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1 \cdot y'$$

Tę konstrukcję trzeba powtórzyć dla dostatecznie wielu punktów i otrzymać się w ten sposób szereg punktów $D, D', D'', \dots$ krzywej pochodnej, którą oznacza linia kreskowana na figurze.

Jeśli styczna tworzy kąt rozwarty z osią x -ów, jak np. w punkcie A' na fig. 77, to prosta CD' równoległa do stycznej przecina prostopadłą do osi x -ów pod osią, zgodnie z tem, że pochodna ma w tym wypadku wartość ujemną.

Aby uniknąć nadmiaru linii pomocniczych na rysunku, modyfikujemy konstrukcję w sposób następujący. Jednostkę odcinamy stale tylko raz na lewo od początku układu (por. fig. 78) do punktu C i do każdej

stycznej wykreślamy równoległą zawsze z tego samego punktu C . Punkty przecięcia $D_1, D'_1, \dots$ tych równoległych z osią y -ów przenosimy następnie po równoległych do osi x -ów do punktów $D, D', \dots$, leżących na odpowiednich rzędnych $AB, A'B', \dots$

Ponieważ zwykle trudno jest dokładnie narysować styczną w danym punkcie krzywej, przeto pomagamy sobie następującą przybliżoną

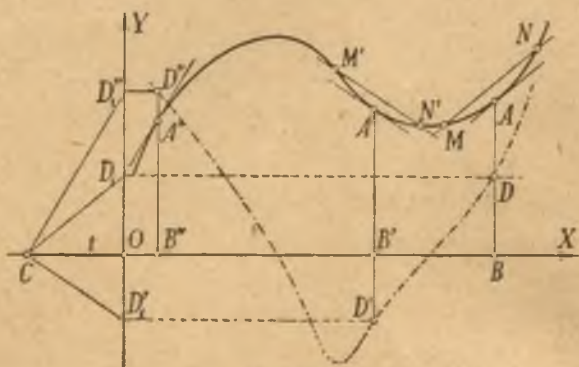


Fig. 78.

konstrukcją. Najpierw rysujemy dowolną prostą CD_1 , a następnie wykreślamy równoległą do niej *sieczną* MN , odcinającą niewielki łuk krzywej. Środek tego łuku ma styczną w przybliżeniu równoległą do MN a więc i do CD_1 . Otóż ten środek obieramy za odpowiedni punkt A krzywej pierwotnej.

§ 66. Mechaniczna interpretacja pochodnej.

Pojęcie pochodnej wprowadziliśmy początkowo na to, aby mierzyć szybkość wzrastania lub malenia funkcji. Pojęcie „szybkości” czyli „prędkości” jest jednym z podstawowych pojęć mechaniki. Jeżeli punkt porusza się po linii prostej ruchem jednostajnym, to prędkością tego ruchu nazywamy stosunek drogi do czasu, albo — co na jedno wyjdzie — stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu. Przy ruchu jednostajnym ten stosunek przyrostów ma stałą wartość c , niezależną od tego, w którym momencie zaczynamy badać drogę i jak wielki jest przyrost czasu. Istotnie z wzoru:

$$s = ct$$

podającego związek drogi s z czasem t w ruchu jednostajnym, otrzymujemy dla $t_1 \dots s_1 = ct_1$, dla $t_2 \dots s_2 = ct_2$, a więc:

$$\Delta s_1 = s_2 - s_1 = c(t_2 - t_1) = c \cdot \Delta t_1$$

a stąd:

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = c$$

bez względu na to, jaką wartość ma t_1 i Δt_1 .

Natomiast przy ruchach niejednostajnych po linii prostej stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu zmienia się ustawicznie, zależy zarówno od czasu t_1 , który upłynął od chwili początkowej $t=0$, jak i od długości czasu $\Delta t_1 = t_2 - t_1$, w ciągu którego ten ruch obserwujemy. Zobaczmy to jasno w następującym szczegółowym przykładzie. Niechaj związek przebieżonej drogi z czasem wyraża się wzorem:

$$s = 40t - 5t^2$$

Cheśmy określić prędkość w tym ruchu w chwili $t_1 = 2$. W tym celu bierzemy pod uwagę przyrost czasu np. o 1 sekundę, t. j. $t_2 = 3$ a $\Delta t_1 = t_2 - t_1 = 1$. Odpowiednie drogi są: $s_1 = 40 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 60$ i $s_2 = 40 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 75$, a zatem przyrost drogi wynosi $\Delta s_1 = s_2 - s_1 = 15$. Stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu wynosi tu $\Delta s_1 : \Delta t_1 = 15 : 1 = 15$. Tę liczbę możemy uważać za *przeciętną* prędkość w czasie od $t_1 = 2$ do $t_2 = 3$, ale nie za prawdziwą prędkość w chwili $t_1 = 2$. Zobaczmy bowiem, że biorąc pod uwagę krótszy przeciąg czasu, a mianowicie $\Delta t_1 = 0.1$, otrzymamy inną prędkość przeciętną, znacznie większą od 15. I tak obliczając $s_2, s_1, \Delta s_1$ dla $t_1 = 2, t_2 = 2.1$, otrzymamy $\Delta s_1 : \Delta t_1 = 19.5$. W załączonej tabelce zestawiono te rozmaite wartości dla przyrostów $\Delta t_1 = 1, 0.1, 0.01, 0.001$. Widzimy, że wraz z Δt_1 także Δs_1 dąży do zera, natomiast iloraz $\Delta s_1 : \Delta t_1$ zmienia się, zbliżając się do stałej wartości 20.

Okażemy, że ten iloraz nietylko zbliża się do 20, ale ściśle dąży do granicy 20, gdy Δt_1 dąży do zera. Utwórzmy mianowicie:

$$s_1 = 40 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2$$

i

$$s_2 = 40(2 + \Delta t_1) - 5(2 + \Delta t_1)^2$$

Stąd

$$\Delta s_1 = s_2 - s_1 = 40\Delta t_1 - 20\Delta t_1 - 5\Delta t_1^2$$

$$\Delta s_1 = 20\Delta t_1 - 5\Delta t_1^2$$

a więc:

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = 20 - 5\Delta t_1$$

t	s	Δs	Δt	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
2	60	—	1	15
3	75	15	0.1	19.5
2.1	61.95	1.95	0.01	19.95
2.001	60.019995	0.019995	0.001	19.995
↓	↓	↓	↓	↓
2	60	0	0	20

Przechodząc do granicy dla $\Delta t_1 \rightarrow 0$, otrzymujemy istotnie:

$$\lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = 20$$

Otóż tę *graniczną* wartość tego ilorazu różnicowego uważamy za prawdziwą *prędkość* (chwilową czyli końcową) tego ruchu w chwili $t_1 = 2$.

Obliczając ogólnie prędkość w dowolnej chwili t_1 , otrzymujemy

$$\Delta s_1 = 40(t_1 + \Delta t_1) - 5(t_1 + \Delta t_1)^2 - 40t_1 + 5t_1^2 = 40\Delta t_1 - 10\Delta t_1 \cdot t_1 - 5\Delta t_1^2$$

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = 40 - 10t_1 - 5\Delta t_1$$

a stąd:

$$\lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = 40 - 10t_1$$

Widzimy, że prędkość jest tu zmienna, dla każdej chwili inna, *jest funkcją* czasu t . Np. w chwili $t_1 = 3$ prędkość wynosi 10. Prędkość *przeciętna* 15, którą otrzymaliśmy, biorąc przyrost czasu 1 sekundę, jest istotnie *średnią* między prawdziwą prędkością 20 w chwili $t_1 = 2$, a prawdziwą prędkością 10 w chwili $t_1 = 3$.

Oznaczmy tę prędkość chwilową (czyli końcową) literą v , to dla ruchu, określonego wzorem $s = 40t - 5t^2$, mamy $v = 40 - 10t$.

Porównując konstrukcję tego pojęcia z pojęciem pochodnej, widzimy, że: *prędkość chwilowa jest pochodną drogi ze względu na czas*. Jest to zarazem jedyna racjonalna *definicja prędkości*. A więc prędkość nie jest wprost stosunkiem drogi do czasu, lecz *granica*, do której dąży stosunek przyrostu drogi do przyrostu czasu, gdy przyrost czasu dąży do zera. Ta *granica* nie zależy już od tego, czy *przyrost* czasu, liczony od chwili t_1 , jest większy czy mniejszy, lecz zależy tylko od czasu t_1 , który upłynął od początku ruchu do chwili, w której obserwujemy prędkość.

Tą drogą wprowadził pojęcie pochodnej Newton w r 1671 niezależnie od Leibniza.

Stosując te same rozważania do funkcji, przedstawiającej prędkość, a więc do

$$v = f(t)$$

np. w naszym przypadku do $v = 40 - 10t$, otrzymujemy nowe, równie ważne w fizyce pojęcie: „*przyśpieszenia*”

A mianowicie badamy przyrost Δv prędkości i przyrost czasu Δt a granicę.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = g$$

nazywamy *przyśpieszeniem* w chwili t . Przyśpieszenie jest to więc *pochodna prędkości* ze względu na czas. W naszym przykładzie łatwo stwierdzić, że:

$$g = -10$$

jest więc liczbą stałą. Tak jednak być nie musi. Dzieje się to tylko w ruchach, które nazywamy *jednostajnie* przyspieszonymi lub opóźnionymi. Gdyby droga s wyrażała się funkcją trzeciego stopnia lub jakąś inną, bardziej skomplikowaną funkcją (np. funkcją trygonometryczną), to przyspieszenie wypadłoby zmienne i mielibyśmy do czynienia z ruchem niejednostajnie przyspieszonym lub opóźnionym.

Te uwagi wystarczają, by zrozumieć, jak doniosłą rolę odgrywać musi rachunek różniczkowy w mechanice.

Uwaga. Rozważaliśmy dotychczas jedynie ruchy, odbywające się po jednej linii prostej. Przy badaniu ruchów krzywoliniowych trzeba uwzględnić oprócz *wartości* prędkości lub przyspieszenia także ich *kierunek*. Aby ująć takie badania w dogodną formę matematyczną, wprowadzono obok zwyczajnych wielkości, bezkierunkowych czyli *skalnych*, także wielkości kierunkowe czyli *wektory*, określono działania arytmetyczne dla takich wektorów i opracowano także dla tych wielkości kierunkowych analizę matematyczną.

Tak np. przy ruchu po kole ze stałą prędkością (kątową) w każdym punkcie koła prędkość ma stałą wartość, a kierunek jej jest styczny do koła. Prędkości w dwóch punktach koła są więc równe, jeżeli je uważamy za wielkości *skalne*, natomiast są różne, jeżeli je uważamy za *wektory*. Analiza wektorjalna wykazuje, że przy takim ruchu jednostajnym po kole istnieje przyspieszenie (jest to pewien wektor, zwrócony ku środkowi tego koła), jakkolwiek wartość (skalarna) prędkości nie ulega zmianie.

Zasadnicze wiadomości z rachunku wektorjalnego podajemy w osobnym rozdziale przy końcu II tomu niniejszego podręcznika.

Na tem jednak nie kończy się rola rachunku różniczkowego w fizyce i w innych naukach, posługujących się matematyką. I tak np. w elektrotechnice zasadniczo ważną wielkością jest *natężenie prądu* elektrycznego: i (liczba Amperów). Jeżeli prąd jest stały, jednostajny, to natężeniem jego nazywamy ilość elektryczności, przepływającą w jednostce czasu, a więc stosunek przyrostu ilości elektryczności ΔQ do przyrostu czasu Δt , t. j.

$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Jeżeli jednak prąd jest zmienny, to definicja ta natężenia nie wystarcza. Trzeba brać przyrost ilości elektryczności ΔQ , podzielić go przez przyrost czasu Δt i zbadać granicę:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = i(t)$$

Tę granicę nazywamy natężeniem prądu w chwili t .

Jest to — jak widzimy — *pochodna* funkcji $Q(t)$ względem czasu t . W nauce o cieple bardzo ważnym pojęciem jest *ciepło właściwe*. W fizyce elementarnej określa się ciepło właściwe jako ilość ciepła, potrzebną do podniesienia temperatury 1 kg jakiegoś ciała o 1° , czyli jako stosunek przyrostu ilości ciepła ΔQ w 1 kg ciała do przyrostu temperatury ΔT . Taka definicja nie uwzględnia jednak tego, że ciało ma w każdej tem-

peraturze inne ciepło właściwe. Ścisłą definicję ciepła właściwego: $C(T)$ otrzymamy, biorąc *granice* tego stosunku, a mianowicie:

$$C(T) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

Widzimy, że znowu trzeba sięgnąć do pochodnej: ciepło właściwe jest to pochodna ilości ciepła (wprowadzonej do 1 kg ciała) względem temperatury.

Podobnie nasuwa się pojęcie pochodnej w sposób zupełnie naturalny przy ścisłych definicjach rozmaitych innych wielkości, występujących w fizyce, w naukach przyrodniczych, ekonomicznych i t. p. Jest ono niezbędne przy ścisłym ujmowaniu wszelkich praw *zmienności*. Dlatego to wszelkie głębsze badania naukowe, posługujące się metodami matematyki, muszą używać wydatnie rachunku różniczkowego.

§ 67. Warunek konieczny istnienia pochodnej.

Nasuwa się pytanie, czy każda funkcja posiada pochodną.

Okazemy, że *tylko* funkcje *ciągłe* (por. § 49 i nast.) mogą (lecz *nie* muszą) posiadać pochodną.

Dowód. Wyjdźmy z definicji pochodnej w punkcie $x = a$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

Zbadajmy granicę iloczynu: $h \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Stosując twierdzenie o ~~le-~~czynie granic, otrzymujemy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[h \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot f'(a) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

czyli:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(a+h) - f(a)] = 0$$

a więc:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

Kładąc $a+h=x$ widzimy, że, gdy $h \rightarrow 0$, to $x \rightarrow a$ i odwrotnie, zatem:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

to zaś dowodzi, że funkcja jest *ciągła* w punkcie $x = a$.

W ten sposób dowiedliśmy prawdziwości następującego twierdzenia, zasadniczo ważnego dla całego rachunku różniczkowego:

jeżeli funkcja posiada pochodną dla jakiejkolwiek wartości zmiennej niezależnej, to jest dla tej wartości ciągła.

Można także wypowiedzieć to twierdzenie w następującej postaci: *koniecznym warunkiem istnienia pochodnej funkcji w jakimś punkcie jest ciągłość tej funkcji w tym punkcie.*

Okazuje się jednak, że ten warunek konieczny *nie jest dostateczny*, to znaczy: nie każda funkcja ciągła posiada pochodną. Najprościej wyeliminuje to z następujących przykładów.

Przykłady. 1) Funkcja, przedstawiona graficznie na fig. 73 (str. 220), jest wszędzie *ciągła*, a mimo to w punkcie A nie posiada pochodnej. Gdyby np. punkt A miał współrzędne: $x = 2$, $y = 1$, to taką funkcją byłaby np. $y = \sqrt[3]{x-2} + 1$. Funkcja ta nie ma pochodnej w punkcie A , jak to później okażemy. Tutaj nieistnienie pochodnej polega na tem, że *styczna* w punkcie A jest *prostopadła* do osi x -ów, a więc jej spadek jest nieskończenie wielki.

2) Funkcja:

$$y = |x|$$

której obraz graficzny przedstawiono na fig. 79 (por. też str. 10), jest wszędzie *ciągła*, nawet w punkcie $x = 0$. Pomimo to funkcja ta nie posiada pochodnej dla $x = 0$, bo iloraz różnicowy dąży tam do innej granicy, gdy Δx dąży do zera z prawej strony a do innej, gdy Δx dąży do zera z lewej strony, a mianowicie:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$$

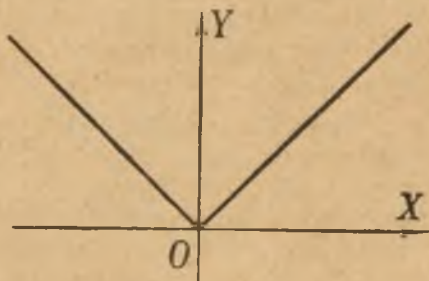


Fig. 79.

A więc $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nie posiada w punkcie

$x = 0$ granicy *obustronnej*, a to znaczy, że pochodna nie istnieje w tym punkcie.

Takie punkty załamania funkcji ciągłej, zwane *punktami kątowymi*, spotykamy niejednokrotnie. Podobne punkty *spotykamy* np. w cykloidzie (por. str. 78, fig. 48) dla $x = 2a\pi$, $4a\pi, \dots$

Oprócz pojęcia zwyczajnej pochodnej okazuje się pożytecznem wprowadzenie także pochodnej *jednostronnej*, podobnie jak przy pojęciu granicy funkcji. I tak pochodną *prawostronną* w punkcie $x = a$ nazywamy granicę *prawostronną*:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_+(a)$$

a pochodną *lewostronną* nazywamy granicę *lewostronną*:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_-(a)$$

Tworzenie takich jednostronnych pochodnych jest potrzebne zwłaszcza wtedy, gdy zakres istnienia funkcji kończy się w jakimś punkcie $x = a$, lub gdy ciągłość funkcji ustaje w jakimś punkcie, ale tak, że funkcja jest w nim albo prawostronnie ciągła albo lewostronnie ciągła (jak np. w funkcji $y = C(x)$, por. str. 11, fig. 4 i § 52, 4, § 35, 1). W naszym przykładzie $y = |x|$ mamy w punkcie $x = 0$ prawostronną pochodną $+1$ różną od lewostronnej pochodnej -1 i to powoduje nieistnienie pochodnej w zwykłym tego słowa znaczeniu. Zwyczajna pochodna istnieje bowiem tylko wtedy, gdy prawostronna pochodna jest równa lewostronnej.

3) Zupełnie odmiennej natury przykład funkcji ciągłej, nie posiadającej pochodnej w jednym punkcie, spotykamy w funkcji ciągłej, określonej wzorami:

$$y = x \sin \frac{1}{x} \quad \text{dla } x \neq 0$$

$$y = 0 \quad \quad \quad \text{„} \quad x = 0$$

(por. przykład 3b na str. 218). Tutaj nieistnienie pochodnej dla $x = 0$ polega na tem, że przy punkcie $x = 0$ zagęszcza się nieskończenie wiele falowań, których amplitudy zanikają wprawdzie, ale kierunki wahają się ustawicznie pomiędzy -45° a $+45^\circ$ (spadki zatem wahają się pomiędzy -1 a 1).

Uwaga. Dla tej funkcji istnieje tylko jeden punkt, w którym funkcja nie posiada pochodnej, pomimo że jest ciągła. Można jednak zbudować także podobne funkcje, gdzie te wyjątkowe punkty zagęszczają się dowolnie. Zbudowano nawet takie funkcje, które są w każdym punkcie ciągłe a w żadnym punkcie nie posiadają pochodnej. Pierwszy przykład takiej funkcji podał matematyk niemiecki Weierstrass.

Ustęp II.

RÓŻNICZKA I JEJ ZASTOSOWANIE.

§ 68. Definicja różniczki.

Pochodna oddaje bardzo cenne usługi przy badaniu przyrostu funkcji. Już w elementarnej matematyce przywykliśmy uważać przyrost funkcji, odpowiadający małemu przyrostowi zmiennej niezależnej, za *proporcjonalny w przybliżeniu* do przyrostu zmiennej niezależnej. Tak np. przy używaniu tablic logarytmicznych obliczamy poprawkę, t. j. przyrost logarytmu, mnożąc przyrost zmiennej niezależnej, liczony od jakiejś liczby a do $a + h$, przez różnicę tablicową $\log(a + 1) - \log a$, stałą dla całego przedziału $(a, a + 1)$, t. j. dla wszystkich przyrostów $0 < h < 1$; popełniamy przytem niewielki błąd. Podobnie postępujemy przy interpolacji innych

tablic, np. tablic funkcji trygonometrycznych, ich logarytmów, tablic kwadratów, pierwiastków i t. p.

Oznaczmy resztę dodatnią lub ujemną, opuszczoną przy takiej przybliżonej interpolacji, czyli błąd popełniony przytem, znakiem $r(h)$.

Przyrost dowolnej funkcji przedstawiamy zatem przy użyciu takiej *proporcjonalnej* interpolacji w postaci:

$$(A) \quad \Delta y = f(a+h) - f(a) = C \cdot h + r(h)$$

przyczem C jest liczbą stałą, t. j. niezależną od h .

Jeżeli badana funkcja jest ciągła w punkcie a , to przy h , dążącym do zera, także Δy dąży do zera, a więc i $\Delta y - C \cdot h$, czyli błąd $r(h)$, dąży do zera wraz z h .

Taką interpolację można geometrycznie wyjaśnić w następujący sposób.

Niechaj linja l (fig. 80) będzie obrazem funkcji $f(x)$. Gdy x zmienia się od a do $a+h$, to prawdziwy przyrost funkcji wynosi $EB = \Delta y$. Zamiast tego zmieniamy y proporcjonalnie do h , a więc posuwamy się, zamiast po krzywej l , po prostej p .

Gdy x zmienia się od a do $a+h$, to punkt, posuwający się po prostej p , wznosi się o odcinek $ED = C \cdot h$, a więc popełniamy błąd $DB = r(h)$. Stała C oznacza spadek prostej p , to znaczy $C = \operatorname{tg} \beta$.

Stałą C możemy obierać w tym wzorze (A) zupełnie dowolnie, a więc niekoniecznie tak, aby C było równe różnicy tablicowej. Otóż obierzmy tę stałą tak, aby błąd $r(h)$ dążył do zera w wyższym stopniu, aniżeli h (o stopniach zdążania funkcji do zera mówiliśmy w § 42). Żądamy zatem, aby nie tylko $r(h)$ dążyło do zera, lecz także, aby iloraz: $\frac{r(h)}{h}$ dążył do zera, gdy h dąży do zera.

Zobaczymy, że to żądanie da się zawsze spełnić, gdy funkcja $f(x)$ posiada *pochodną* w badanym punkcie $x = a$. Przedstawmy mianowicie wzór (A) w postaci:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - C = \frac{r(h)}{h}$$

Załóżmy, że istnieje pochodna $f'(a)$. Przechodząc po obu stronach tej równości do granicy, otrzymamy:

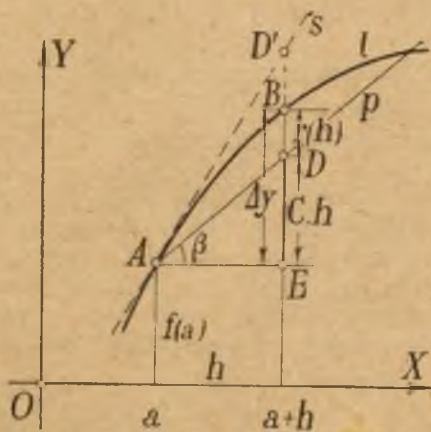


Fig. 80.

$$f'(a) - C = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h}$$

Chcąc więc uzyskać

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

naależy obrać:

$$C = f'(a)$$

Wtedy ta część przyrostu funkcji, która jest proporcjonalna do przyrostu h zmiennej niezależnej, przedstawi się w postaci:

$$f'(a) \cdot h$$

a pozostała reszta $r(h)$ dążyć będzie do zera w wyższym stopniu aniżeli pierwszy. Wzór (A) przyjmie wówczas postać:

$$(B) \quad f(a + h) - f(a) = f'(a)h + r(h)$$

Obranie w ten sposób stałej C oznacza, jak to zobaczymy w następnych §§, posuwanie się po linii stycznej, przechodzącej przez A (linja kreskowana na fig. 80), zamiast po dowolnej prostej p .

Uwaga. Wartość $C = f'(a)$ jest odmienna od różnicy tablicowej. Gdybyśmy za C wzięli różnicę tablicową, jak to czynimy zwykle przy interpolacji tablic, to błąd $r(h)$ dążyłby wtedy do zera *tylko w pierwszym stopniu*. Dla małych przyrostów h użycie stałej $C = f'(a)$ jest korzystniejsze, natomiast dla wielkich przyrostów h , t. j. np. dla przyrostów bliskich 1 w tablicach, w których odstępów sąsiednich wartości zmiennej niezależnej wynoszą 1, korzystniejszym jest zwykle użycie różnicy tablicowej.

Ponieważ iloczyn $f'(a) \cdot h$ jest przybliżoną wartością różnicy $f(a + h) - f(a)$, przeto nazwano go *różniczką funkcji w punkcie $x = a$ dla przyrostu h* .

Po tych objaśnieniach zrozumiałą będzie użyteczność następującej definicji.

Definicja różniczki. *Różniczką funkcji nazywamy iloczyn z pochodnej tej funkcji i z dowolnego przyrostu tej zmiennej niezależnej, względem której obliczono pochodną.*

Różniczkę funkcji $y = f(x)$ oznaczamy symbolem dy lub $df(x)$, a więc różniczka jest zdefiniowana następującym wzorem ogólnym:

(12)

$$dy = y' \cdot \Delta x$$

czyli:

(13)

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x = f'(x) \cdot h$$

Przyrost h uważamy tu za zmienny, lecz *niezależny* od x .

Istnienie różniczki jest zatem nierozłącznie związane z istnieniem pochodnej: jeżeli funkcja posiada pochodną, to posiada także różniczkę i odwrotnie, jeżeli funkcja posiada różniczkę, to posiada także pochodną. Wobec tego zamiast mówić: „funkcja posiada pochodną” mówi się także: „funkcja jest różniczkowalna”; zamiast mówić: „obliczyć pochodną funkcji” mówimy także „różniczkować funkcję”. Z tego też powodu nazywamy ten dział matematyki, którego przedmiotem jest nauka o pochodnych, *rachunkiem różniczkowym*.

Wzór (12) przedstawia się zwykle w innej postaci, bardziej jednolitej pod względem oznaczeń. Opieramy się na tem, że pochodną funkcji $y = x$ jest $y' = 1$. Wobec tego różniczka tej specjalnej funkcji (przedstawiającej się graficznie jako prosta, nachylona pod kątem 45° do osi x -ów) ma wartość $dy = dx = 1 \cdot \Delta x$. A więc:

$$\Delta x = dx$$

wobec czego możemy napisać wzór (12) w postaci:

$$(14) \quad dy = y' dx$$

i w tej postaci wzór ten bywa najczęściej używany.

Z tego wzoru otrzymujemy następujące, nowe przedstawienie pochodnej:

$$(15) \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

Prawą stronę tego wzoru czytamy zwykle: „ dy względem dx ”. Pochodna jest więc ilorazem z różniczki zmiennej zależnej i różniczki zmiennej niezależnej. Stąd pochodzi często używana nazwa pochodnej, a mianowicie nazywamy ją niekiedy: *ilorazem różniczkowym*. Należy ją jednak dokładnie odróżniać od ilorazu różnicowego: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Jakkolwiek przedstawienie pochodnej w postaci $\frac{dy}{dx}$ jest często bardzo dogodnie, to jednak nie może ono służyć do definicji pochodnej: aby bowiem zdefiniować dy , musieliśmy się już oprzeć na gotowej definicji pochodnej.

Uwaga. Dawniej sądzono, że różniczki są jakimiś wielkościami odmiennymi od zwykłych liczb, a mianowicie t. zw. wielkościami „nieskończenie małymi”, co miało oznaczać wielkości mniejsze co do bezwzględnej wartości od każdej liczby a przecież nie równe zeru. W dzisiejszej zarytmetyzowanej matematyce uważa się za niewłaściwe takie pojmowanie różniczki. Różniczka danej funkcji $f(x)$ jest bowiem dla każdej danej wartości x i h ściśle określoną skończoną liczbą, którą można zupełnie dokładnie uwiarygodnić na graficznym przedstawieniu funkcji, jak to zaraz zobaczymy.

§ 69. Geometryczne przedstawienie różniczki.

Niechaj linia l (fig. 81) będzie obrazem graficznym funkcji różniczkowalnej $y = f(x)$. Chcemy uwidocznic na rysunku różniczkę tej funkcji

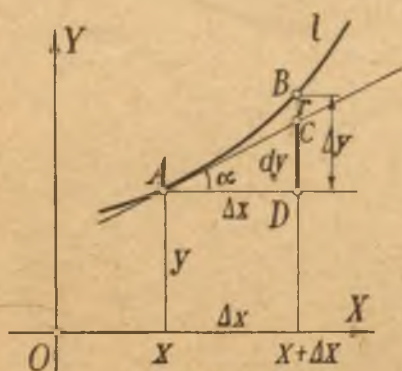


Fig. 81.

dla wartości x zmiennej niezależnej i dla przyrostu Δx . W tym celu wykreślamy rzędne, należące do odciętych x i $x + \Delta x$. Przez punkt A o odciętej x wykreślamy styczną do linii l i prostą AD równoległą do osi x -ów aż do przecięcia się z rzędną, należącą do odciętej $x + \Delta x$, lub z przedłużeniem tej rzędnej. Długość odcinka DC , zawartego między tą prostą AD a styczną, przedstawia różniczkę funkcji $f(x)$ dla wartości x i dla przyrostu Δx .

Albowiem z trójkąta ADC otrzymujemy:

$$DC = \operatorname{tg} \alpha \cdot AD = y' \cdot \Delta x$$

a więc według definicji różniczki (por. wzór 12) jest:

$$DC = dy$$

Różniczka jest więc różnicą między rzędną *stycznej* w punkcie o odciętej $x + \Delta x$ a rzędną stycznej (a zarazem linii l) w punkcie początkowym, o odciętej x . Jest to więc istotnie skończona, ściśle oznaczona wielkość.

Prawdziwy przyrost: Δy funkcji, czyli różnica między rzędną linii l w punkcie B a rzędną tej linii w punkcie początkowym A , jest równa odcinkowi DB . Błąd (reszta) r , wynikający z zastąpienia prawdziwego przyrostu różniczką, jest przedstawiony odcinkiem CB .

Wykazaliśmy, że błąd r dąży do zera, gdy przyrost Δx zmiennej niezależnej dąży do zera i to w takim stopniu, że nawet stosunek $r : \Delta x$ dąży do zera. Jest to *bezwzględny błąd* przyrostu Δy . W zastosowaniach, a szczególnie w rachunkach przybliżonych, o wiele ważniejszy jest *błąd względny*, to znaczy stosunek błędu bezwzględnego do prawdziwej wartości. W naszym przypadku błąd względny wyraża się wzorem $r : \Delta y$ (na fig. 81 jest to stosunek $CB : DB$). Okażemy, że naogół nietylko błąd bezwzględny, lecz także błąd względny dąży do zera, gdy zastępujemy prawdziwy przyrost różniczką. Dzieje się to mianowicie zawsze wtedy, gdy pochodna w punkcie A jest różna od zera, a przyrost Δy nie staje się zerem nigdzie w otoczeniu punktu A .

Mamy bowiem:

$$\frac{r}{\Delta y} = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = 1 - \frac{dy}{\Delta y} = 1 - \frac{y' \cdot \Delta x}{\Delta y} = 1 - \frac{y'}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Stąd

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{r}{\Delta y} = 1 - \frac{y'}{y'} = 0 \quad \text{c. b. d. o.}$$

Jeżeli zaś pochodna w badanym punkcie jest zerem, to błąd względny nie tylko nie dąży do zera, lecz ma możliwie największą wartość, a mianowicie 1. Istotnie wtedy $dy = y' \cdot \Delta x = 0 \cdot \Delta x = 0$ a więc $r = \Delta y - dy = \Delta y$ a stąd $r : \Delta y = 1$.

Jest to jasne, jak widać z przedstawienia geometrycznego. Jeżeli bowiem pochodna w punkcie A jest zerem, to styczna jest równoległa do osi x -ów i punkt C nakrywa się z punktem D a zatem $CB = DB$ i stosunek $CB : DB = 1$. Wtedy różniczka nie nadaje się dobrze do przybliżonego przedstawienia przyrostu funkcji, błąd bowiem zawiera w sobie całkowity przyrost funkcji, jest poprostu równy temu przyrostowi.

W jednym z dalszych rozdziałów zajmiemy się dokładniej badaniem błędu (reszty) $r(h)$ i podamy jeszcze bardziej pożyteczne wzory na przyrost $\Delta y = f(a + h) - f(a)$ funkcji różniczkowalnych

§ 70. Zastosowanie różniczki w rachunkach przybliżonych.

Własności różniczki znajdują zastosowanie w rozmaitych rachunkach przybliżonych, jak zobaczymy z następujących przykładów

1) Znając wartość funkcji dla $x = a$, znaleźć przybliżoną wartość tej funkcji dla $x = a + h$. Np. funkcja $y = x^2$ ma dla $x = 45$ wartość 2025 (wziętą np. z tablic kwadratów), obliczyć jej wartość przybliżoną dla $x = 45.3$. Wystarczy obliczyć przyrost tej funkcji dla przyrostu $h = 0.3$ zmiennej niezależnej. Przybliżoną wartością tego przyrostu jest różniczka: $y' \cdot h$. Pochodną y' funkcji x^2 jest $2x$ (por. np. wzór 11, str. 224), a więc dla $x = 45$ otrzymamy: $y' = 2 \cdot 45 = 90$, zatem różniczka $dy = y' \cdot h = 90 \cdot 0.3 = 27$. Wobec tego z wzoru $f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h)$ otrzymujemy:

$$(45.3)^2 = 45^2 + 27 + r(0.3) = 2025 + 27 + r(0.3)$$

czyli w przybliżeniu: $(45.3)^2 \approx 2052$

Dokładną wartością $(45.3)^2$ jest 2052.09, a więc błąd $r(0.3)$ wynosi w tym wypadku tylko 0.09. Używając zaś zwyczajnej interpolacji, przy pomocy różnicy tablicowej, otrzymalibyśmy 2052.3, a więc znacznie większy błąd: 0.21.

2) Jeżeli wartości zmiennej niezależnej w tablicach jakiejś funkcji mają odstęp 1, to różnica tablicowa wynosi

$$\Delta = f(a+1) - f(a) = 1 \cdot f'(a) + r(1)$$

czyli w przybliżeniu:

$$\Delta = f(a+1) - f(a) \approx f'(a)$$

A zatem różnica tablicowa równa się w *przybliżeniu* pochodnej dla wartości mniejszej: $x = a$,

Jeżeliby odstęp zmiennej niezależnej były odmienne od jednostki i wynosiły np. k , to mielibyśmy:

$$\frac{\Delta}{k} = \frac{f(a+k) - f(a)}{k} \approx f'(a)$$

Przy pomocy tych wzorów można znaleźć *przybliżone* wartości pochodnej funkcji, która jest przedstawiona tabelarycznie. Jest to najprostszy sposób przybliżonego różniczkowania liczbowego czyli *numerycznego* różniczkowania.

Tak np. używając tablicy funkcji $y = x^2$, omówionej w poprzednim przykładzie, otrzymalibyśmy na pochodną tej funkcji w punkcie $x = 45$ przybliżoną wartość:

$$y' \approx \Delta = (45+1)^2 - 45^2 = 2116 - 2025 = 91$$

zamiast dokładnej wartości $y' = 2 \cdot 45 = 90$.

3) Jeżeli obliczamy wartość jakiejś funkcji przy pomocy wartości zmiennej niezależnej, obarczonej jakimś błędem, to oczywiście wartość funkcji będzie też obarczona błędem:

$$f(a+h) - f(a)$$

Otóż wielkość tego błędu można ocenić w przybliżeniu zapomocą różniczki:

$$f'(a) \cdot h$$

Tak np. chcemy obliczyć $\sqrt{\pi}$, używając do tego celu wartości $\pi \approx 3.14$ zamiast dokładnej wartości $\pi = 3.1415926535 \dots$; popełniamy zatem w zmiennej niezależnej błąd:

$$h = 3.14 - 3.14159265 \dots = -0.0015926 \dots$$

Chodzi nam tutaj o wartość funkcji:

$$y = \sqrt{x}$$

Obliczyliśmy już pochodną tej funkcji (por. str. 218, przykład 2) i otrzymaliśmy:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Wobec tego:

$$\sqrt{a+h} - \sqrt{a} = h \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} + r(h)$$

Biorąc $a = \pi$, $h = -0.00159\dots$, otrzymujemy:

$$\sqrt{3.14} - \sqrt{\pi} = \frac{-0.00159\dots}{2\sqrt{\pi}} = -\frac{0.00159\dots}{2 \cdot 1.77\dots} = -0.00045\dots$$

Stąd widzimy, że błąd wystąpił tu dopiero na *czwartym* miejscu po kropce dziesiętnej. O ile więc nam chodzi np. o 3 cyfry po kropce dokładne, to wystarczy obliczać $\sqrt{3.14}$ zamiast dokładnie $\sqrt{\pi}$.

Wartości obu tych pierwiastków, obliczone dokładnie do 6 miejsc dziesiętnych, wynoszą:

$$\sqrt{3.14} = 1.772004 \quad \sqrt{\pi} = 1.772454$$

a więc istotnie błąd wynosi $0.00045\dots$

ROZDZIAŁ VI.

Ogólne reguły różniczkowania funkcyj jednej zmiennej.

§ 71. Pochodna stałej.

Rozpocznijmy systematyczny rachunek różniczkowy od obliczenia pochodnych najprostszych funkcyj.

Przedewszystkiem obliczymy pochodną funkcji:

$$y = c$$

t. j. funkcji, mającej stałą wartość dla wszystkich wartości zmiennej niezależnej x .

Ponieważ tutaj $f(x) = c$ i $f(x + h) = c$, przeto iloraz różnicowy

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

ma stale wartość zero, a więc i granicą tego ilorazu jest zero, t. j.

$$y' = 0$$

Stąd otrzymujemy następujące twierdzenie.

I. *Pochodna funkcji $y = c$ jest zerem.*

Jest to oczywiście, jak widać z graficznego przedstawienia tej funkcji zapomocą prostej równoległej do osi x -ów w odstępnie c . Spadek tej prostej czyli $\operatorname{tg} \alpha$ jest bowiem wszędzie równy zeru.

§ 72. Pochodna funkcji $y = x$.

II. *Pochodną funkcji:*

$$y = x$$

jest:

$$y' = 1$$

Wynika to odrazu z graficznego przedstawienia tej funkcji zapomocą linii prostej, tworzącej z osią x -ów kąt 45° . Spadek jej, równy pochodnej, wynosi bowiem $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Do tego samego wniosku dochodzimy, używając arytmetycznej definicji pochodnej, a mianowicie dla $y = f(x) = x$ jest:

$$f(x + h) = x + h, \quad f(x) = x$$

a więc

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{x + h - x}{h} = 1$$

Przechodząc do granicy, otrzymujemy:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 1$$

Z tych dwóch funkcji możemy przez dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie utworzyć każdą funkcję wymierną (np. dowolny wielomian, dowolną funkcję ułamkową wymierną). Jeżeli zatem poznamy ogólne reguły na obliczanie pochodnej sumy dwóch funkcji, różnicy, iloczynu i ilorazu, to będziemy mogli obliczyć pochodną każdej funkcji wymiernej od razu zapomocą tych reguł, nie uciekając się już do definicji pochodnej. Zajmiemy się więc obecnie wyprowadzeniem tych ogólnych reguł, które będą przydatne wogóle dla wszystkich funkcji różniczkowalnych, nie tylko wymiernych.

§ 73. Pochodna sumy i różnicy.

Niechaj dwie funkcje $f(x)$ i $g(x)$ posiadają pochodne. Chcemy obliczyć pochodną funkcji:

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

Aby utworzyć tę pochodną, tworzymy najpierw iloraz różnicowy:

$$\begin{aligned} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} &= \frac{f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x)}{h} = \\ &= \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Stosując do prawej strony twierdzenie o sumie granic funkcji (por. § 40, Tw. VI'), otrzymujemy:

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Ten wzór można także zanotować w postaci:

(16)

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Stąd wynika twierdzenie:

III *Pochodna sumy dwóch funkcji różniczkowalnych równa się sumie pochodnych tych funkcji.*

Tak samo dowodzi się, że pochodna różnicy dwóch funkcji różniczkowalnych równa się różnicy pochodnych tych funkcji, t. j. że z

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

wynika

$$F'(x) = f'(x) - g'(x)$$

czyli:

$$(17) \quad (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

Mnożąc obie strony wzoru (16) przez różniczkę dx zmiennej niezależnej, otrzymujemy różniczki funkcji: $F(x)$, $f(x)$ i $g(x)$ a stąd następujący wzór różniczkowy:

$$(f(x) + g(x))' dx = f'(x) dx + g'(x) dx$$

czyli:

$$d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)$$

Podobnie z wzoru (17) otrzymujemy.

$$d(f(x) - g(x)) = df(x) - dg(x)$$

Różniczka sumy (różnicy) dwóch funkcji różniczkowalnych równa się zatem sumie (różnicy) różniczek tych funkcji.

Zastosujmy twierdzenie o pochodnej sumy do specjalnego przypadku, gdy jeden z dodajników jest liczbą stałą, np. $g(x) = c$.

Jeżeli:

$$y = f(x) + c$$

to:

$$y' = f'(x) + 0 \quad \text{czyli} \quad y' = f'(x)$$

Stąd widzimy, że przy tworzeniu pochodnej stałe *dodajniki* odpadają. Dwie funkcje, różniące się tylko o stałą liczbę, mają zatem równe pochodne.

Stąd wynika, że jakkolwiek różniczkowanie, o ile jest wogóle wykonalne, jest działaniem jednoznaczem, t. j. prowadzącem do jednego ściśle określonego wyniku, to zadanie odwrotne: wyznaczanie dla danej funkcji pochodnej jej funkcji *pierwotnej* nie jest jednoznacznie określone. Jeżeli bowiem $f(x)$ jest funkcją pierwotną względem $f'(x)$, to także $f(x) + c$, przy dowolnem c , jest funkcją pierwotną tej samej funkcji $f'(x)$.

Przykłady. Funkcje x , $x + 5$, $x - 3$, $x + \sqrt{2}$, $x - \pi$ mają wszystkie wspólną pochodną równą 1.

Wzór (16) uogólnia się z łatwością (np. przy pomocy indukcji zupełnej) na dowolną, skończoną liczbę dodajników. To znaczy, że pochodną funkcji:

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x)$$

jest:

$$F'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + \dots + f_n'(x)$$

§ 74. Pochodna iloczynu.

Obliczmy skośną pochodną iloczynu dwóch funkcji różniczkowalnych, t. j. pochodną funkcji:

$$F(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Utwórzmy najpierw iloraz różnicowy:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

Przekształćmy prawą stronę tak, aby występowały wyraźnie ilorazy różnicowe każdej z funkcji $f(x)$ i $g(x)$ z osobna. W tym celu dodajemy do licznika i odejmujemy od niego wyrażenie $f(x) \cdot g(x+h)$.

Otrzymujemy zatem:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \\ &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \end{aligned}$$

czyli:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Przechodząc po obu stronach do granicy dla h dążącego do zera, otrzymujemy po zastosowaniu twierdzeń o granicy sumy i granicy iloczynu (por. § 40) wzór:

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

który można zanotować w postaci:

(18)

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Stąd następujące twierdzenie:

IV. *Pochodną iloczynu dwóch funkcji różniczkowalnych tworzy się, mnożąc pochodną pierwszego czynnika przez drugi czynnik (niezmieniony) i dodając do tego pierwszy czynnik pomnożony przez pochodną drugiego.*

Wzór (18) możemy przedstawić w postaci różniczkowej. Mnożąc mianowicie obie strony wzoru (18) przez przyrost dx , otrzymujemy:

$$(f(x) \cdot g(x))' dx = f'(x) dx \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) dx$$

czyli:

$$d(f(x) \cdot g(x)) = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$$

Opuszczając wszędzie zmienną x , piszemy to krótko w postaci:

(19)

$$d(fg) = f dg + g df$$

Używając indukcji zupełnej, można uogólnić wzór (18) na dowolną, skończoną liczbę czynników. W ten sposób otrzymuje się wzór:

$$(20) \quad (f_1 f_2 f_3 \dots f_n)' = f_1' f_2 f_3 \dots f_n + f_1 f_2' f_3 \dots f_n + \dots + f_1 f_2 f_3 \dots f_n'$$

Dla tych wartości x , dla których żaden z czynników $f_1, f_2, \dots, f_n$ nie jest równy zeru, możemy przedstawić ten wzór w dogodniejszej postaci, a mianowicie, dzieląc obie strony przez iloczyn $f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$, otrzymujemy:

$$(21) \quad \frac{(f_1 f_2 f_3 \dots f_n)'}{f_1 f_2 f_3 \dots f_n} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + \frac{f_3'}{f_3} + \dots + \frac{f_n'}{f_n}$$

§ 75. Zachowanie się stałych czynników przy różniczkowaniu.

Zastosujmy twierdzenie o pochodnej iloczynu do specjalnego przypadku, mianowicie gdy jeden z czynników np. $g(x)$ jest liczbą stałą. Chodzi nam więc o obliczenie pochodnej funkcji:

$$y = C \cdot f(x)$$

Stosując wzór (18), otrzymujemy:

$$y' = 0 \cdot f(x) + C \cdot f'(x)$$

czyli:

$$y' = C f'(x)$$

Widzimy stąd, że przy tworzeniu pochodnej *czynnik stały pozostaje niezmienny*: wystarczy utworzyć pochodną czynnika zmiennego i pomnożyć ją przez ten stały czynnik.

Tak np. pochodnymi funkcyj: $7x$, $\sqrt{3}x$, ax są 7 , $\sqrt{3}$, a , ponieważ pochodna funkcji: $f(x) = x$ ma wartość 1.

§ 76. Zastosowania wzoru na pochodną iloczynu do potęg i wielomianów.

Przy pomocy reguły na obliczanie pochodnej iloczynu możemy wprowadzić wzór na pochodną potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim, t. j. pochodną funkcji:

$$y = x^n$$

nie odwołując się ani do definicji pochodnej i do złączonego z tem przejścia do granicy, ani do wzoru Newtona (jak to czyniliśmy w przykładzie (c) na str. 223—224). Natomiast użyjemy indukcji zupełnej. I tak dla $n = 2$ otrzymujemy

$$y = x^2 = x \cdot x$$

a stąd według wzoru (18):

$$y' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

Dla $n = 3$, t. j. dla

$$y = x^3 = x^2 \cdot x$$

otrzymujemy:

$$y' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

To nasuwa przypuszczenie, że ogólny wzór na pochodną funkcji:

$$y = x^n$$

będzie miał postać:

(22)

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}$$

Aby udowodnić prawdziwość tego przypuszczenia, założmy, że ten wzór jest prawdziwy dla jakiegoś $n = r$ i zbadajmy, czy wzór ten będzie prawdziwy także dla $n = r + 1$. A zatem zakładamy, że

$$(a) \quad (x^r)' = rx^{r-1}$$

a chcemy okazać, że

$$(x^{r+1})' = (r + 1)x^r$$

Przedstawmy x^{r+1} w postaci iloczynu: $x^r \cdot x$. Stosując tu twierdzenie o pochodnej iloczynu i założenie (a), otrzymujemy:

$$(x^{r+1})' = (x^r \cdot x)' = rx^{r-1} \cdot x + x^r \cdot 1 = rx^r + x^r = (r + 1)x^r$$

a więc wzór (a) utrzymuje się istotnie dla $r + 1$, gdy jest prawdziwy dla r . Ponieważ zaś okazaliśmy poprzednio, że wzór ten jest prawdziwy dla $n = 2$ i $n = 3$, a zatem będzie także prawdziwy dla $3 + 1 = 4$, dla $4 + 1 = 5$ i t. d., wogóle dla każdej całkowitej dodatniej liczby n .

W ten sposób udowodniona jest ogólnie prawdziwość wzoru (22) dla wszystkich naturalnych n .

Możnaby także udowodnić odrazu prawdziwość tego wzoru, przedstawiając x^n w postaci iloczynu $x \cdot x \cdot x \cdots x$ i stosując wzór (20) lub (21). Niechaj czytelnik przeprowadzi rozumowanie także w ten sposób!

Wzór (22) mieści w sobie, jako przypadki szczególne, reguły obliczania pochodnych funkcji $y = c$ i $y = x$, omówione w §§ 71—72.

I tak dla $y = x$ otrzymujemy przez zastosowanie wzoru (22) $y' = 1 \cdot x^0 = 1$. Dla $y = C$ czyli $y = C \cdot x^0$ otrzymujemy przez zastosowa-

nie wzoru (22) i reguły z § 75: $y' = C \cdot 0 \cdot x^{-1}$ dla $x \neq 0$, czyli $y' = 0$. Dla $x = 0$ zastosowanie wzoru (22) jest niedozwolone: tam trzeba się oprzeć na rozumowaniu z § 71.

Używając poznanych dotychczas reguł różniczkowania, możemy obliczyć pochodną każdej funkcji całkowitej wymiernej czyli każdego wielomianu odrazu bez żadnych przejść do granicy. I tak pochodną funkcji:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

jest:

$$y' = 0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 2x + a_3 \cdot 3x^2 + \dots + a_n \cdot nx^{n-1}$$

czyli:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1}$$

Przykład. Wyznaczyć te punkty linii o równaniu:

$$y = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$$

w których styczna jest równoległa do osi x -ów.

W tych punktach jest $\operatorname{tg} \alpha = 0$ czyli $y' = 0$. Tworzymy zatem pochodną.

$$y' = 3x^2 - 8x + 5$$

i obliczamy pierwiastki równania.

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

Otrzymujemy:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{5}{3}$$

Odpowiednie rzędne y wynoszą: $y_1 = -1$, $y_2 = -1\frac{4}{27}$.

W punktach $A(1, -1)$ i $B(\frac{5}{3}, -1\frac{4}{27})$ styczne są równoległe do osi x -ów. Omawialiśmy już linię, która jest obrazem graficznym tego równania i przedstawiliśmy ją na fig. 9, na str. 29.

Te punkty o stycznych równoległych do osi odciętych są nadzwyczaj ważne przy dyskusji i przy konstrukcji linii krzywych. W jednym z dalszych rozdziałów zajmiemy się szczegółowo temi badaniami.

§ 77. Pochodna ilorazu.

Założmy, że funkcje $f(x)$ i $g(x)$ posiadają pochodne a ponadto, że funkcja $g(x)$ nie jest w badanym punkcie równa zeru.

Utwórzmy iloraz różnicowy funkcji

$$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

t. j.

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}$$

Uwaga. Obieramy tu h tak małe, aby wartość $g(x+h)$ była różna od zera. To się da uczynić, ponieważ funkcja $g(x)$ jest ciągła i jest różna od zera w badanym punkcie x . Jeżeli więc wartość $g(x)$ jest np. dodatnia, to zdąża do granicy dodatniej, a więc według twierdzenia, udowodnionego w § 43 w przykładzie 4 (str. 170) i w § 49 d, istnieje taki przedział, otaczający x , w którym funkcja jest stałe dodatnia, a więc różna od zera. Podobnie ma się rzecz, gdy $g(x) < 0$

W liczniku dodajemy i odejmujemy $f(x) \cdot g(x)$; możemy teraz przedstawić ten iloraz w postaci:

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x) g(x+h)}$$

Przechodząc do granicy dla $h \rightarrow 0$, otrzymamy — stosując odpowiednie twierdzenia z § 40 — następujący wzór na *pochodną ilorazu*:

$$(23) \quad y'(x) = \frac{g(x) f'(x) - f(x) g'(x)}{g(x)^2}$$

Stąd otrzymujemy następującą regułę.

V. *Pochodną ilorazu oblicza się, mnożąc mianownik przez pochodną licznika, odejmując od tego licznik, pomnożony przez pochodną mianownika i dzieląc to całe wyrażenie przez kwadrat mianownika.*

Ten wzór można przedstawić także w postaci:

$$(23a) \quad \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Mnożąc obie strony wzoru (23) przez różniczkę dx , otrzymujemy następujący wzór różniczkowy:

$$(24) \quad dy = d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$$

Wzór (23), wraz z wzorami poznanymi poprzednio, pozwala obliczyć pochodną każdej funkcji wymiernej.

Przy pomocy wzoru na pochodną ilorazu można wyprowadzić wzór na pochodną potęgi o wykładniku całkowitym *ujemnym*:

$$y = x^{-m} \quad \text{czyli} \quad y = \frac{1}{x^m}$$

Stosując do tego ilorazu wzór (23), otrzymujemy:

$$y' = \frac{x^m \cdot 0 - 1 \cdot m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-m-1}$$

Oznaczmy — m literą n . Funkcja pierwotna przyjmuje wtedy postać:

$$y = x^n$$

a jej pochodna:

(22 a)

$$y' = nx^{n-1}$$

Otrzymaliśmy zatem taki sam wzór jak dla wykładników n całkowitych dodatnich (por. wzór 22 z § 76).

Przykłady. 1) Wykazać, że linia, która jest obrazem graficznym funkcji:

$$y = \frac{2x - 7}{3x + 5}$$

ma spadek dodatni dla wszystkich punktów, dla których jest określona, t. j. dla wszystkich x z wyjątkiem $x = -\frac{5}{3}$.

Spadek jest równy pochodnej. Obliczając pochodną tej funkcji przy pomocy wzoru (23), otrzymujemy:

$$y' = \frac{(3x + 5) \cdot 2 - (2x - 7) \cdot 3}{(3x + 5)^2} = \frac{31}{(3x + 5)^2}$$

Ta funkcja jest dodatnia dla wszystkich x , dla których y jest określone. Niechaj czytelnik zbada ogólnie, od czego zależy znak pochodnej funkcji:

$$y = \frac{ax + b}{bx + d}$$

2) Wyznaczyć punkty, w których styczna do linii o równaniu:

$$y = \frac{1}{1 + x^2}$$

jest równoległa do osi x -ów.

Tworzymy pochodną:

$$y' = \frac{(1 + x^2) \cdot 0 - 1 \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = -\frac{2x}{(1 + x^2)^2}$$

Styczna jest równoległa do osi x -ów tylko w punkcie o odejętej $x = 0$, albowiem tylko dla tej wartości jest pochodna równa zeru. Punkt ten ma współrzędne $x = 0$, $y = 1$; wykres tej funkcji jest przedstawiony na fig. 52 a, str. 91.

3) Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = 2x^3 - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^5}$$

Przedstawiamy tę funkcję w postaci:

$$y = 2x^3 - 3x^{-2} + 4x^{-5}$$

i stosujemy wzór (22 a). Wobec tego:

$$y' = 6x^2 + 6x^{-3} - 20x^{-6}$$

§ 78. Pochodna funkcji złożonej.

Definicję, wykres i ciągłość funkcji złożonej omówiliśmy już w §§ 2, 9, 51. Zajmiemy się teraz pochodną takiej funkcji.

Niechaj $y = f(u)$ a $u = g(x)$. Załóżmy, że w punkcie x funkcja $g(x)$ posiada pochodną i przyjmuje wartość u , dla której funkcja $f(u)$ posiada pochodną według zmiennej u .

Gdy x wzrośnie o Δx , to u wzrośnie o $g(x + \Delta x) - g(x) = \Delta u$.

Przyrost Δy funkcji $f(u)$, wynikający z przyrostu x o Δx , możemy przedstawić w postaci:

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Rozpatrując teraz ten przyrost, jako wywołany przyrostem Δu zmiennej u , możemy go przedstawić jako sumę różniczki i reszty $r(\Delta u)$ według wzoru (B) na str. 234, a mianowicie:

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u) = f'(u) \Delta u + r(\Delta u)$$

Jeżeli przyrost Δu nie jest równy zeru, to możemy ten wzór przedstawić w postaci:

$$\Delta y = \left(f'(u) + \frac{r(\Delta u)}{\Delta u} \right) \Delta u$$

Może się jednak zdarzyć, że przyrost Δu funkcji $u = g(x)$ jest zerem. Wtedy zamiast powyższego wzoru możemy napisać:

$$f(u + \Delta u) - f(u) = f'(u) \cdot \Delta u$$

czyli:

$$\Delta y = f'(u) \Delta u$$

istotnie bowiem dla $\Delta u = 0$ obie strony tego wzoru są sobie równe, a mianowicie obie są równe zeru.

Celem obliczenia pochodnej funkcji y według zmiennej x , dzielimy obie strony tych wzorów przez Δx i otrzymujemy w pierwszym przypadku:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(f'(u) + \frac{r(\Delta u)}{\Delta u} \right) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

a w drugim:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Jeżeli Δx dąży do zera, to także Δu dąży do zera, bo funkcja $u = g(x)$ jest funkcją ciągłą jako funkcja różniczkowalna. Jeżeli zaś Δu dąży do zera, to $\frac{r(\Delta u)}{\Delta u}$ w pierwszym z tych wzorów dąży również do zera, jak to wykazaliśmy w § 68. Przechodząc zatem w obu wzorach do granicy dla Δx , dążącego do zera, otrzymujemy wspólny wynik:

$$y'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$$

co można także napisać w postaci:

(25)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Oznaczając znaczkami u dołu, według której zmiennej tworzy się pochodną, możemy ten wzór napisać także w postaci:

(25a)

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Właściwie także we wzorze (25) należałoby zanotować przy każdej różniczce, którą zmienną uważa się w niej za niezależną i pisać ten wzór w postaci:

$$\frac{d_x y}{d_x x} = \frac{d_u y}{d_u u} \cdot \frac{d_x u}{d_x x}$$

z której widać, że dy ma inne znaczenie po lewej stronie wzoru (25) a inne po prawej; jednakże pospolicie używa się skróconego, niezupełnego sposobu pisania, zawartego we wzorze (25)¹⁾.

Tę regułę możemy wypowiedzieć w następującej postaci

VI. Jeżeli y jest funkcją u a u funkcją x , to pochodna y według zmiennej x jest równa iloczynowi z pochodnej y według zmiennej u i z pochodnej u według zmiennej x — oczywiście, o ile obie te składowe pochodne istnieją.

To twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej nazywają także *łańcuchową regułą rachunku różniczkowego*.

Opanowanie tej reguły, nadzwyczaj ważnej i pożytecznej w rachunku różniczkowym, sprawia zwykle początkującym znaczne trudności, dlatego też zaleca się gorąco czytelnikom przerobienie wielu przykładów na jej stosowanie.

Regułę tę uogólnia się z łatwością na łańcuch trzech i więcej funkcyj. Np. dla trzech funkcyj:

$$y = f(u), \quad u = g(t), \quad t = h(x)$$

reguła łańcuchowa ma następującą postać:

(26)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

czyli:

(26a)

$$y'_x(x) = f'_u(u) \cdot g'_t(t) \cdot h'_x(x)$$

¹⁾ Takiego ścisłego odróżniania różniczek, zapomocą znaczków u dołu, używa prof. S. Banach w podręczniku p. t. „Rachunek różniczkowy i całkowy”. Tom I, Lwów 1929.

Wzór (25) lub (25a) możemy przedstawić w postaci różniczkowej. Mnożymy w tym celu obie strony przez dx i otrzymujemy:

$$(27) \quad dy = y'_u du$$

lub wyraźniej:

$$d_x y = y'_u d_x u$$

Porównując ten wzór z wzorem

$$dy = y'_x dx$$

widzimy, że *różniczka funkcji równa się zawsze pochodnej tej funkcji pomnożonej przez różniczkę tej zmiennej, według której jest utworzona ta pochodna* i to bez względu na to, czy ta zmienna, według której tworzyliśmy tę pochodną, jest zmienną niezależną (t. j. x), czy też zmienną zależną (np. $u = g(x)$). Jeżeli więc zamiast x wyprowadzamy nową zmienną: $u = g(x)$, to *pochodna funkcji y , obliczona względem zmiennej x , nie jest równa pochodnej tej funkcji według zmiennej u :*

$$y'_x \neq y'_u$$

jak to wynika z wzoru (25a). Natomiast *różniczka* tej funkcji, obliczona według zmiennej u , jest równa różniczce tej funkcji, obliczonej według zmiennej x :

$$y'_u du = y'_x dx$$

Przykłady.

1) Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = (5x)^{1000}$$

Gdybyśmy popełnili tę nieostrożność i traktowali tę funkcję tak jak potęgę zmiennej niezależnej, to otrzymalibyśmy $1000 \cdot (5x)^{999}$. Wynik ten jednak jest błędny, jak łatwo stwierdzić przy pomocy reguły różniczkowania funkcji złożonej. Mamy bowiem:

$$y = u^{1000}, \quad u = 5x$$

Ponieważ:

$$y'_u = 1000 u^{999}, \quad u'_x = 5$$

przeto według wzoru (25a) otrzymujemy:

$$y'_x = 1000 u^{999} \cdot 5 = 5000 (5x)^{999}$$

A więc prawdziwy wynik jest 5 razy większy od błędnego wyniku, otrzymanego poprzednio.

2) Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = (x^2 - 3x + 5)^{60}$$

Możnaby wprowadzić rozwinąć tę potęgę według wzoru Newtona i obliczyć pochodną otrzymanego wielomianu, jednakże o wiele krótszą drogą jest zastosowanie wzoru (25a).

Uważamy więc wyrażenie, zawarte w nawiasie, za nową zmienną u i stosujemy regułę (25 a). Zwykle nie wypisuje się nawet tej nowej zmiennej, tylko od razu tworzy się pochodną potęgi, ale trzeba ją następnie pomnożyć przez *pochodną wyrażenia, zawartego w nawiasie*. W ten sposób otrzymuje się od razu

$$y' = 50(x^2 - 3x + 5)^{49} \cdot (2x - 3)$$

Pomijanie czynnika $2x - 3$ w takim zadaniu jest notorycznym błędem niewprawnych!

3) Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = \frac{1}{(ax^{2n} + bx^n + c)^p} = (ax^{2n} + bx^n + c)^{-p}$$

Tę funkcję możemy uważać za złożoną z trzech funkcji:

$$y = u^{-p}, \quad u = at^2 + bt + c, \quad t = x^n$$

Stosując regułę łańcuchową, zawartą we wzorze (26), otrzymujemy:

$$y' = -pu^{-p-1} \cdot (2at + b) \cdot nx^{n-1} = \frac{-np(2ax^n + b)x^{n-1}}{(ax^{2n} + bx^n + c)^{p+1}}$$

§ 79. Pochodna funkcji odwrotnej.

Własności funkcji odwrotnych omówiliśmy w §§ 18 i 57. Obecnie zajmujemy się pochodną takiej funkcji.

Założmy, że funkcja

$$y = f(x)$$

jest w jakimś przedziale *monotoniczna* w ściślejszym znaczeniu (por. § 20 c) i że posiada w tym przedziale pochodną różną od zera. Wykażemy, że przy tych założeniach funkcja odwrotna:

$$x = \varphi(y)$$

posiada pochodną w odpowiednim przedziale i że ta pochodna wyraża się wzorem:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

czyli:

(28)

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

lub:

(28a)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

W ostatnim wzorze należałoby właściwie uzupełnić znakowanie w następujący sposób:

$$\frac{d_y x}{d_y y} = \frac{1}{\frac{d_x y}{d_x x}}$$

używamy jednak zwykle prostszej postaci, zawartej we wzorze (28 a), gdzie symbole różniczek nie są wyraźnie odróżniane.

Dowód wzoru (28).

Aby obliczyć x'_y , czyli $\varphi'(y)$, tworzymy najpierw iloraz różnicowy $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Dzieląc licznik i mianownik przez Δx , otrzymujemy:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Dzielenie przez $\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)$ jest dozwolone, albowiem funkcja φ jest, jak wiemy z § 57, ściśle monotoniczna, więc Δx nigdy nie jest równe zeru.

Aby stąd otrzymać pochodną x'_y , trzeba przejść do granicy dla Δy dążącego do zera. Wraz z Δy także Δx dąży do zera, albowiem zarówno $y = f(x)$ jest ciągłą funkcją zmiennej x , jak i $\varphi(y)$ jest funkcją ciągłą zmiennej y . Wobec tego:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Stąd, opierając się na definicji pochodnej, otrzymujemy:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad \text{c. b. d. o.}$$

Wzór ten można wypowiedzieć w następujący sposób.

VII. *Pochodna funkcji odwrotnej równa się odwrotności pochodnej funkcji danej pierwotnie*, istnieje zaś tylko w tych punktach, w których pochodna tej funkcji danej pierwotnie istnieje i jest różna od zera.

Reguła ta ma prostą interpretację geometryczną. Pochodna $f'(x)$ oznacza mianowicie spadek $\operatorname{tg} \alpha$ stycznej, gdzie α jest kątem, zawartym między styczną a dodatnim kierunkiem osi x -ów; pochodna $\varphi'(y)$ oznacza spadek tej samej stycznej do tej samej linii, tylko liczony względem dodatniego kierunku osi y -ów. A więc $\varphi'(y) = \operatorname{tg} \beta$, gdzie β oznacza kąt tej stycznej z osią y -ów (por. fig. 82). Ponieważ $\alpha + \beta = 90^\circ$, przeto

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

czyli:

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

zgodnie z wzorem (28).

Jeżeli pochodna $f'(x)$ jest dla jakiejś wartości x zerem, to styczna w odpowiednim punkcie jest równoległa do osi x -ów, jak np. w punkcie A na fig. 83. Ponieważ ta styczna jest $\varphi(y)$ prostopadła do osi y -ów, przeto dla

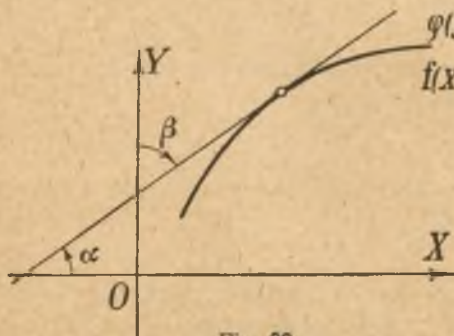


Fig. 82.

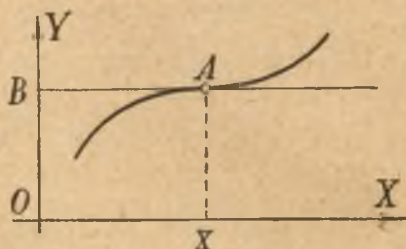


Fig. 83.

funkcji odwrotnej spadek w tem miejscu jest nieokreślony (dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$, gdy y dąży do B z jednej lub z drugiej strony).

W takich zatem punktach pochodna $\varphi'(y)$ funkcji odwrotnej nie istnieje, jakkolwiek sama funkcja odwrotna istnieje.

Przykłady. 1) Funkcja:

$$y = x^3 - 3$$

jest monotoniczna i posiada pochodną:

$$y' = 3x^2$$

która jest różna od zera dla wszystkich x z wyjątkiem $x=0$ (której to wartości odpowiada $y=-3$). Stąd możemy obliczyć pochodną funkcji odwrotnej:

$$x = +\sqrt[3]{y+3}$$

nie uciekając się do definicji pochodnej, ani do obliczania granicy.

I tak według reguły (28) otrzymujemy:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{3x^2}$$

Podstawiając tu za x wyrażenie $\sqrt[3]{y+3}$, otrzymujemy ostatecznie:

$$x'_y = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y+3)^2}}$$

Ta pochodna istnieje dla wszystkich y z wyjątkiem $y=-3$.

Oznaczając tu zmienną niezależną jak zwykle literą x a zmienną zależną literą y , otrzymujemy na pochodną funkcji:

$$y = \sqrt[3]{x+3}$$

wzór:

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

2) Wyprowadzić wzór na pochodną funkcji:

$$y = \sqrt[m]{x}$$

przy m całkowitem dla dodatnich x . Wtedy jest stale $y > 0$ Funkcja ta jest funkcją odwrotną funkcji.

$$x = y^m$$

której pochodną znamy już z poprzednich rozważań (wzór (22)), a mianowicie $\frac{dx}{dy} = my^{m-1}$. Jest ona stale różna od zera (bo założyliśmy, że $y > 0$).

Wobec tego otrzymujemy z wzoru (28a):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{my^{m-1}}$$

Podstawiając zaś tu $y = \sqrt[m]{x}$, otrzymujemy:

$$y_x' = \frac{1}{m(\sqrt[m]{x})^{m-1}} = \frac{1}{m x^{\frac{1}{m}(m-1)}} = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}(1-m)}$$

czyli:

$$y_x' = \frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}$$

Oznaczając $\frac{1}{m}$ literą n , otrzymujemy:

$$y_x' = nx^{n-1}$$

a więc znowu wzór taki sam jak dla n całkowitych.

W ten sposób rozszerzyliśmy regułę obliczania pochodnej potęgi (wzór (22) z § 76) także na wykładniki ułamkowe o liczniku 1.

3) Wyprowadzić wzór na pochodną potęgi o dowolnym wykładniku ułamkowym wymiernym:

$$y = x^{\frac{p}{q}}$$

dla dodatnich x .

Tę funkcję możemy uważać za funkcję złożoną, kładąc:

$$y = u^p \quad \text{a} \quad u = x^{\frac{1}{q}}$$

Stąd:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = pu^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1}$$

Czyli:

$$y'_x = p(x^{\frac{1}{q}})^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-\frac{1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}-1}$$

a więc:

$$y'_x = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}$$

Kładąc $\frac{p}{q} = n$, otrzymujemy:

$$y'_x = nx^{n-1}$$

a więc znowu taki sam wzór, jak dla n całkowitych.

Brak nam jeszcze pochodnej potęgi o wykładniku *niewymiernym*, np. $y = x^{\sqrt{3}}$. Obliczymy ją dopiero w jednym z dalszych ustępów, albowiem reguły, któreśmy poznali dotychczas, nie wystarczają do obliczenia tej pochodnej.

§ 80. Pochodna funkcji, przedstawionej w formie parametrowej.

Widzieliśmy w § 19, że często dogodnie jest przedstawić funkcję w formie parametrowej:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \psi(t)$$

Jeżeli $\varphi(t)$ jest funkcją monotoniczną w ściślejszem znaczeniu i ciągłą to istnieje funkcja odwrotna:

$$t = f(x)$$

Wtedy y jest funkcją złożoną zmiennej x a mianowicie:

$$y = \psi(f(x))$$

Stąd jasnem jest, że będzie można wyprowadzić wzór na pochodną funkcji, przedstawionej w formie parametrowej, używając poznanych poprzednio reguł różniczkowania funkcji złożonej i funkcji odwrotnej.

Żałujemy, że funkcje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ posiadają pochodne, a ponadto, że pochodna $\varphi'(t)$ jest różna od zera. To założenie pociąga za sobą monotoniczność w otoczeniu punktu t , jak to później zobaczymy (por. § 101, twierdzenie 3 i 4).

Istnieje więc funkcja odwrotna $t = f(x)$.

Stosując do funkcji y wzór na pochodną z funkcji złożonej, otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \psi'(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

Według wzoru na pochodną funkcji odwrotnej jest:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

Wobec tego:

$$(29) \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}}$$

VII. Pochodną funkcji, przedstawionej w formie parametrowej, otrzymuje się, dzieląc pochodną zmiennej zależnej względem parametru przez pochodną zmiennej niezależnej względem parametru.

Z tego wzoru jest widoczne, że zastrzeżenie: $\varphi'(t) \neq 0$ jest nie zbędne do stosowalności tej reguły.

Utwórzmy różniczkę funkcji x i y według zmiennej t , t. j. $d_x x = \varphi'(t) dt$ i $d_t y = \psi'(t) dt$.

Ich iloraz ma postać:

$$\frac{d_t y}{d_x x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

a więc równa się ilorazowi różniczkowemu $\frac{dy}{dx}$ z poprzedniego wzoru, czyli wyrażnie:

$$(29a) \quad \frac{d_t y}{d_x x} = \frac{d_x y}{d_x x} = y_x$$

Przykład. Obliczyć pochodną funkcji, przedstawionej parametrowo zapomocą wzorów:

$$x = \frac{a}{1+t^2}$$

$$y = \frac{a}{t(1+t^2)}$$

dla $t > 0$.

Dla dodatnich t funkcja $x = \frac{a}{1+t^2}$ jest ściśle monotoniczna i posiada pochodną:

$$x'(t) = \frac{-2at}{(1+t^2)^2}$$

która jest zerem tylko dla $t=0$, a więc dla badanych przez nas wartości: $t > 0$ nie jest zerem.

Pochodną funkcji $y(t)$ według parametru t jest:

$$y'(t) = \frac{-a[1(1+t^2) + t \cdot 2t]}{t^3(1+t^2)^2} = -a \frac{3t^2+1}{t^3(1+t^2)^2}$$

Wobec tego pochodną funkcji y według zmiennej x jest:

$$y_x = -a \frac{3t^2+1}{t^3(1+t^2)^2} : \frac{-2at}{(1+t^2)^2} = \frac{3t^2+1}{2t^3}$$

Obrazem danej funkcji jest dodatnia gałąź linii krzywej, zwanej *cisoidą*, przedstawionej na fig. 84. Dla dodatnich $t \rightarrow 0$, otrzymuje się $x \rightarrow a$ ale

$y \rightarrow +\infty$. Rozważając drugą funkcję, określoną temi samymi wzorami, lecz dla *ujemnych* t , otrzymuje się drugą gałąź cisoidy, leżącą pod osią x -ów. Dla tej drugiej gałęzi wzór na pochodną pozostaje ten sam. Gdy

$$0 > t \rightarrow 0, \text{ to } x \rightarrow a \text{ a } y \rightarrow -\infty$$

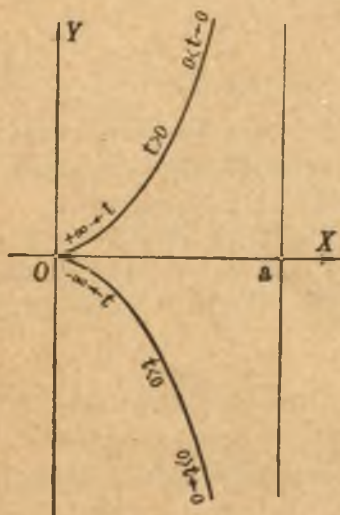


Fig. 84.

Prosta prostopadła do osi x -ów w odstępnie a jest asymptotą tej linii. Przy pomocy pochodnej możemy badać rozmaite własności stycznej do tej linii, jakkolwiek nie mamy podanej funkcji w formie wyrażonej. (Niechaj czytelnik obliczy w podobny sposób spadek stycznej dla liścia Descartes'a, którego przedstawienie parametrowe omówiono w § 19, w przykładzie a).

Przy pomocy twierdzeń dotąd poznanych potrafimy obliczyć pochodną każdej funkcji wymiernej i niektórych funkcji niewymiernych. W dalszych ustępach zajmiemy się pochodnymi najważniejszych funkcji *przestępnych*.

ROZDZIAŁ VII.

Pochodne elementarnych funkcji przestępnych.

§ 81. Pochodne funkcji trygonometrycznych.

Obliczmy pochodną funkcji:

$$y = \sin x$$

używając dla kątów łukowej miary x .

W tym celu tworzymy iloraz różnicowy:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

Gdy Δx dąży do zera, to licznik i mianownik dążą do zera, a zatem nie można tu zastosować twierdzenia o ilorazie granic. Wobec tego przekształcamy licznik przy użyciu wzoru znanego z trygonometrii:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Otrzymujemy w ten sposób:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

Gdy Δx dąży do zera, to pierwszy czynnik drugiej strony dąży do 1 (jak to udowodniono w § 40, str. 161, wzór (h)), o ile $\frac{\Delta x}{2}$ wyraża łukową miarę kąta. Drugi czynnik dąży do $\cos x$ wskutek ciągłości funkcji cosinus. Wobec tego:

$$y' = \cos x$$

czyli:

(30)

$(\sin x)' = \cos x$

Tak prosty wzór otrzymuje się, gdy x wyraża łukową miarę kąta. Gdybyśmy zaś użyli stopniowej miary: $\bar{x}$ tego samego kąta, to trzeba by ją najpierw zamienić na łukową, używając proporcji:

$$\bar{x} : 360 = x : 2\pi$$

a więc:

$$x = \frac{\pi}{180} \bar{x}$$

Jeżeli więc kąt jest podany w mierze stopniowej $\bar{x}$ i chodzi nam o pochodną funkcji:

$$y = \sin \bar{x}$$

to wyrażamy przedewszystkiem kąt w mierze łukowej i otrzymujemy:

$$y = \sin \left(\frac{\pi}{180} x \right)$$

Teraz mamy do czynienia z funkcją złożoną:

$$y = \sin u, \quad u = \frac{\pi}{180} x$$

a zatem pochodną tej funkcji złożonej jest:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \cos u \cdot \frac{\pi}{180}$$

czyli:

$$y' = \frac{\pi}{180} \cos \left(\frac{\pi}{180} x \right)$$

lub wracając do miary stopniowej:

$$(\sin \bar{x})' = \frac{\pi}{180} (\cos \bar{x})$$

Uwaga. Wynik ten można otrzymać wprost, używając definicji pochodnej. Wtedy rozumowanie trzeba zmienić tylko o tyle, że zamiast

$$\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \rightarrow 1$$

mamy, teraz:

$$\frac{\sin \frac{\Delta \bar{x}}{2}}{\frac{\pi}{180} \cdot \frac{\Delta \bar{x}}{2}} \rightarrow 1 \quad \text{czyli} \quad \frac{\sin \frac{\Delta \bar{x}}{2}}{\frac{\Delta \bar{x}}{2}} \rightarrow \frac{\pi}{180}$$

Zatem stosunek funkcji sinus do łuku w kole jednostkowym dąży do 1, a stosunek funkcji sinus do kąta, wyrażonego w mierze stopniowej, nie dąży już do 1.

Stąd widzimy, że miara łukowa nasuwa się w naturalny sposób w rachunku różniczkowym, prowadzi bowiem do prostszych wzorów aniżeli wszelkie inne miary kąta, np. stopniowa.

Aby wprowadzić wzór na pochodną funkcji:

$$y = \cos x$$

nie trzeba już sięgać do definicji pochodnej i do przechodzenia do granicy, lecz wystarczy się oprzeć na znanym z trygonometrii związku funkcji cosinus z funkcją sinus, a mianowicie:

$$y = \cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

Mamy teraz funkcję złożoną: $y = \sin u$, $u = \frac{\pi}{2} - x$, zatem pochodną:

$$y' = \cos u \cdot (-1) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$$

a więc:

$$y' = -\sin x$$

lub wyraźnie:

(31)

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Używając zaś miary stopniowej, musielibyśmy dołączyć czynnik $\frac{\pi}{180}$ podobnie jak dla funkcji sinus.

Pochodną funkcji:

$$y = \operatorname{tg} x$$

obliczymy przez zastosowanie wzoru na pochodną ilorazu, albowiem

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Wobec tego:

$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

a zatem

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Więc:

(32)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tangens ma więc dodatnią pochodną dla tych wszystkich x , dla których istnieje, t. j. dla wszystkich x z wyjątkiem $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Pochodną funkcji:

$$y = \operatorname{ctg} x$$

oblicza się albo na podstawie związku $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ albo też przedstawiając ją jako iloraz: $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Otrzymuje się po wykonaniu łatwych rachunków:

(33)

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Cotangens ma więc *ujemną* pochodną dla tych wszystkich x , dla których cotangens istnieje, t. j. dla wszystkich x , z wyjątkiem $x = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Pochodną funkcji:

$$y = \sec x$$

obliczamy opierając się na tem, że $\sec x = \frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1}$. Jest to zatem funkcja złożona:

$$y = u^{-1}, \quad u = \cos x$$

A więc:

$$y' = -1 \cdot u^{-2} \cdot (-\sin x)$$

czyli:

$$(34) \quad y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Podobnie dla funkcji:

$$y = \operatorname{cosec} x$$

otrzymuje się.

$$(35) \quad (\operatorname{cosec} x)' = (\sin^{-1} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

Na różniczkę funkcyj trygonometrycznych otrzymujemy stąd następujące wzory:

$$\begin{array}{l|l} d(\sin x) = \cos x dx & d(\cos x) = -\sin x dx \\ d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x} & d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x} \\ d(\sec x) = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} & d(\operatorname{cosec} x) = -\frac{\cos x dx}{\sin^2 x} \end{array}$$

We wszystkich tych wzorach x oznacza łukową miarę kąta.

Niechaj czytelnik spróbuje dla ćwiczenia wyprowadzić pochodne funkcyj $\cos x$ i $\operatorname{tg} x$ wprost z definicji.

Przykłady.

Znajac: $\sin 38^{\circ}20' = 0.62024$ i $\cos 38^{\circ}20' = 0.78442$, obliczyć $\sin 38^{\circ}23'$ bez używania tablic.

Oprzemy się na tem, że przybliżoną wartością przyrostu funkcji jest jej różniczka. Chodzi tu o obliczenie przyrostu funkcji sinus, gdy kąt wzrośnie o $3'$ od wartości $38^{\circ}20'$.

Różniczką funkcji sinus jest:

$$d(\sin x) = \cos x dx$$

Przyrost dx ma tu być wyrażony w mierze łukowej. Otóż wiemy, że $\text{arc } 1^{\circ} = 0.017453 \dots$ a więc $dx = \text{arc } 3' = 0.0008726 \dots$ Wobec tego:

$$\Delta y \approx d(\sin 38^{\circ}20') = 0.78442 \cdot 0.0008726 \dots = 0.000683 \dots$$

Taka jest przybliżona wartość przyrostu, zatem:

$$\sin 38^{\circ}23' \approx 0.62024 + 0.00068 = 0.62092$$

2) Pod jakim kątem przecina sinusoida oś x -ów w początku układu?

Jeżeli $y = \sin x$, to $y' = \cos x$. Dla $x = 0$ otrzymujemy $y' = \cos 0 = 1$, a więc $\text{tg } \alpha = 1$ a to znaczy, że $\alpha = 45^{\circ}$.

3) Obliczyć energję kinetyczną punktu materialnego o masie m i siłę, działającą na ten punkt, jeżeli się ten punkt porusza ruchem drgającym, określonym wzorem:

$$s = a \sin \omega t$$

Liczba stała ω jest tu prędkością kątową ruchu jednostajnego po kole o promieniu a ; ruch drgający jest rzutem tego ruchu na średnicę koła. Oznaczając literą T okres jednego drgania, czyli czas obiegu całego koła, możemy przedstawić stałą w postaci $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Do obliczenia energii kinetycznej: $E = \frac{1}{2}mv^2$ i siły $P = mg$ potrzebne są: prędkość i przyspieszenie tego ruchu.

Wiemy z § 66, że prędkość v jest pochodną drogi ze względu na czas, a przyspieszenie g jest pochodną prędkości ze względu na czas.

A więc:

$$v = s' = a \cos \omega t \cdot \omega = a \omega \cos \omega t$$

$$g = v' = -a \omega^2 \sin \omega t$$

Wobec tego otrzymujemy na energję kinetyczną wzór:

$$E = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$$

Największą wartość ma ta energja, gdy $\cos \omega t = 1$, t. j. dla $\omega t = 0$ czyli w chwili $t = 0$, a prócz tego dla $\omega t = n \cdot 2\pi$.

Tą największą wartością jest:

$$E_{\max} = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2$$

jest ona zatem proporcjonalna do kwadratu *amplitudy* a i do kwadratu prędkości kątowej.

Siła

$$P = mg = -ma\omega^2 \sin \omega t = -m\omega^2 s$$

jest zatem proporcjonalna do wychylenia s i skierowana zawsze w kierunku przeciwnym do kierunku tego wychylenia.

4) Wykazać, że normalna do cykloidy przechodzi zawsze przez punkt styczności koła toczącego się z prostą, po której się to koło toczy (ten punkt nazywamy *chwilowym* środkiem obrotu). Wyprowadziliśmy w § 19, w przykładzie c), równanie cykloidy w formie parametrowej:

$$x = a(t - \sin t) = \varphi(t)$$

$$y = a(1 - \cos t) = \psi(t)$$

Równanie normalnej ma według wzoru (6) z § 64 postać:

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'_1} (x - x_1)$$

Potrzebna jest zatem pochodna funkcji y według zmiennej x . Stosując wzór (29) z § 80 na pochodną funkcji, podanej w formie parametrowej, otrzymujemy:

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{a(0 + \sin t)}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}$$

czyli:

$$y' = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

Równanie normalnej przyjmuje zatem postać:

$$y - a(1 - \cos t_1) = -\operatorname{tg} \frac{t_1}{2} (x - a(t_1 - \sin t_1))$$

Obliczmy współrzędne punktu, w którym ta normalna przecina oś x -ów. Kładziemy w tym celu $y = 0$ w równaniu normalnej i obliczamy x . Po wykonaniu dość prostych rachunków otrzymamy:

$$x = at_1$$

Punkt, w którym normalna trafia oś x -ów, ma więc współrzędne: $(at_1, 0)$.

Te same zaś współrzędne ma punkt A' na fig. 48 (str. 78), w którym toczące się koło, po wykonaniu obrotu o kąt t_1 , styka się z osią x -ów. Na fig. 48 wykreślono styczną $O'T$ i normalną $O'N$ w punkcie O' cykloidy.

5) Tworząc pochodne obu stron w znanych wzorach trygonometrycznych:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \sin(x+a) &= \sin x \cos a + \cos x \sin a\end{aligned}$$

otrzymuje się wzory na $\cos 2x$ i $\cos(x+a)$. Pozostawiamy czytelnikowi przeprowadzenie tych prostych rachunków dla ćwiczenia.

6) Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = \frac{1}{2 \sin^2 x} - \frac{1}{4 \sin^4 x}$$

Piszemy tę funkcję w postaci:

$$y = \frac{1}{2} (\sin x)^{-2} - \frac{1}{4} (\sin x)^{-4}$$

Stosując do wyrazów prawej strony regułę na pochodną funkcji złożonej, otrzymujemy:

$$y' = -2 \cdot \frac{1}{2} (\sin x)^{-3} \cos x + 4 \cdot \frac{1}{4} (\sin x)^{-5} \cos x$$

$$y' = \cos x \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^5 x} = \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}$$

7) W podobny sposób obliczy się pochodną funkcji

$$y = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^4 x}.$$

§ 82. Pochodne funkcji cyklometrycznych.

Omówiliśmy już w części I definicję (§ 18 d, e, f), wykresy (§ 18 fig. 42 i 43) i ciągłość (§ 57) funkcji *cyklometrycznych*, t. j. funkcji odwrotnych do funkcji trygonometrycznych. Obecnie zajmujemy się wprowadzeniem wzorów na pochodne tych funkcji.

I tak funkcją *odwrotną* do funkcji sinus jest funkcja:

$$y = \arcsin x$$

Jest ona określona dla wszystkich x z przedziału $\langle -1, +1 \rangle$ i przybiera tam wartości y z przedziału $\langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \rangle$

Znamy pochodną funkcji:

$$x = \sin y$$

a mianowicie:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

Wobec tego pochodną funkcji odwrotnej: $y = \arcsin x$ wyrażamy wzorem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

Drugą stronę należy wyrazić zapomocą zmiennej x . Otóż

$$\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y} = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

Znak przed pierwiastkiem należy obrać $+$, ponieważ dla y z przedziału

$\left\langle -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right\rangle$ cosinus jest nieujemne.

Otrzymujemy zatem ostatecznie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$$

czyli:

(36)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Stąd widzimy, że pochodna istnieje dla wszystkich x , zawartych *wewnątrz* przedziału $\langle -1, +1 \rangle$. Dla końców przedziału, t. j. dla $x = -1$ i $x = +1$, otrzymujemy w mianowniku zero, a więc pochodna nie istnieje dla tych punktów. Poza tym przedziałem funkcja arcus sinus nie jest wogóle określona a więc i pochodna tam nie istnieje. Jak widać z fig. 42, (str. 72), styczne na końcach przedziału $\langle -1, +1 \rangle$ są prostopadłe do osi x -ów.

Interesującym jest, że pochodna funkcji *przestępnej* arcus sinus jest dość prostą funkcją algebraiczną. Będzie to miało ważne znaczenie przy zadaniu odwrotnem do wyznaczania pochodnej, a mianowicie przy wyznaczaniu funkcji pierwotnych do danych funkcji pochodnych.

Pochodną funkcji:

$$y = \arccos x$$

wyprowadza się bez żadnej trudności, opierając się na związku:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

udowodnionym w § 18 a. Mamy więc:

$$y = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

a stąd:

$$y' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

a więc:

(37)

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pochodną funkcji:

$$y = \arctg x$$

wyprowadza się przy pomocy podobnego rozumowania, jak dla funkcji arcus sinus. Mianowicie:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{tg} y \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y \end{aligned}$$

Stąd:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Aby powrócić do zmiennej x , opieramy się na wzorze znanym z trygonometrii:

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y$$

a więc

$$\sec^2 y = 1 + x^2$$

i otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

czyli wyrażnie:

(38)

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Pochodna funkcji *przestępnej* arcus tangens jest więc bardzo prostą funkcją ułamkową *wymierną*. Pochodna ta istnieje dla wszystkich x , podobnie jak i sama funkcja pierwotna arcus tangens i ma wszędzie wartość dodatnią.

Pochodną funkcji:

$$y = \operatorname{arccotg} x$$

oblicza się podobnie jak arcus cosinus ze związku (por. § 18 f):

$$\arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

a mianowicie:

$$y = \frac{\pi}{2} - \arctg x$$

a stąd:

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Więc:

(39)

$$(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Wyprowadzenie pochodnych funkcji: $\operatorname{arc} \sec x$ i $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$, jako mniej ważne, pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Przykłady. 1) Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right)$$

Jest to funkcja złożona. Pochodną jej jest:

$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right)^2} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{ab}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

2) Wykazać, że funkcje

$$y_1 = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{i} \quad y_2 = \operatorname{arc} \cos x$$

mają równe pochodne. Stosując regułę łańcuchową, otrzymujemy:

$$y_1' = 2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1+x) \cdot (-1) - (1-x)}{(1+x)^2}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$y_1' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = y_2'$$

Niechaj czytelnik wykaże dla ćwiczenia, że:

$$\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin 2x \sqrt{1-x^2} \right)' = (\operatorname{arc} \sin x)'$$

$$\left(\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{1-x^2} \right)' = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)'$$

3) W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna ma stałą wielkość a , druga zaś zmienną: x . Jeżeli x jest zmierzone z błędem, jaki to ma wpływ w przybliżeniu na przeciwległy kąt y ?

Ponieważ:

$$\frac{x}{a} = \operatorname{tg} y$$

przeto:

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a}$$

Gdy kąt wzrośnie o dx , to przyrost y wynosi dokładnie Δy , a w przybliżeniu:

$$dy = y'dx = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} dx$$

czyli:

$$dy = \frac{a dx}{a^2 + x^2}$$

Tego wzoru używa się przy pomiarach kątów zapomocą skali, lunety i zwierciadła, obracającego się około osi pionowej.

§ 83. Pochodna funkcji wykładniczej.

Funkcja wykładnicza:

$$y = a^x$$

o zasadzie *dodatniej* jest określona dla wszystkich x (por. str. 125 i § 50c) i jest funkcją ciągłą i monotoniczną: rosnącą, gdy zasada $a > 1$, a malejącą, gdy zasada $a < 1$.

Uwaga. Gdybyśmy obrali zasadę ujemną, to funkcja nie byłaby określona dla wszystkich x . Tak np. dla wartości x ułamkowych (uproszczonych) o mianowniku parzystym wypadłoby a^x urojone. Np. $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ jest liczbą urojoną. Podobnie dla niewymiernych wykładników x nie określiliśmy zupełnie wartości potęgi $(-2)^x$. Dlatego w dalszych rozumowaniach ograniczymy się do rozważania funkcji wykładniczych o *dodatnich* zasadach.

Aby obliczyć pochodną funkcji wykładniczej, tworzymy iloraz różnicowy:

$$(a) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}$$

Cała trudność polega na obliczeniu granicy wyrażenia:

$$\frac{a^h - 1}{h}$$

dla $h \rightarrow 0$. Wiemy, że $\lim_{h \rightarrow 0} a^h = 1$ (por. § 39, przykład 3).

Przedstawmy a^h w postaci:

$$a^h = 1 + \delta$$

to $\delta \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow 0$ i odwrotnie. Wystarczy zatem brać pod uwagę δ z jakiegoś przedziału, otaczającego punkt $\delta = 0$. Weźmy $-1 < \delta < +$

to $1 + \delta$ jest liczbą dodatnią, zatem istnieje logarytm liczby $1 + \delta$ a mianowicie na podstawie definicji logarytmu jest:

$$h = \log_a(1 + \delta)$$

Wobec tego:

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{1 + \delta - 1}{\log_a(1 + \delta)} = \frac{\delta}{\log_a(1 + \delta)} = \frac{1}{\log_a(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}}$$

Przedstawmy δ w postaci: $\delta = \frac{1}{s}$. Gdy $\delta \rightarrow 0$, to s dąży do niewłaściwej granicy $+\infty$ dla δ dodatnich, a do $-\infty$ dla δ ujemnych. Wyrażenie, znajdujące się pod znakiem logarytmu, ma postać:

$$(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^s$$

To wyrażenie dąży, jak wiemy, do liczby e zarówno dla $s \rightarrow +\infty$ jak i dla $s \rightarrow -\infty$, jak to wykazaliśmy w § 46 (definicję liczby e podaliśmy w § 32, w przykładzie 3).

Ponieważ więc:

$$(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} \rightarrow e$$

to

$$\log_a(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} \rightarrow \log_a e$$

jak to wynika z *ciągłości* logarytmu. Nazwijmy bowiem $(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} = z$; gdy z dąży po jakimkolwiek ciągu do granicy e , to ciągła funkcja zmiennej z dąży do granicy, która jest równa wartości funkcji w miejscu granicznym e .

Zatem:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}} = \frac{1}{\log_a e}$$

Teraz już możemy obliczyć pochodną funkcji wykładniczej, przechodząc we wzorze (a) do granicy dla $h \rightarrow 0$. Otrzymujemy:

$$y' = a^x \cdot \frac{1}{\log_a e}$$

Wiadomo jednak, że:

$$(b) \quad \log_b n = \frac{1}{\log_a b}$$

a więc:

$$y' = a^x \cdot \log_a a$$

czyli

(40)

$$(a^x)' = a^x \log_a a$$

Widzimy, że w pochodną funkcji wykładniczej o dowolnej zasadzie (dodatkowej) wchodzi liczba e i nie możemy jej żadną miarą ominąć.

Wzór na pochodną funkcji wykładniczej przyjmie szczególnie prostą postać, gdy zasadą tej funkcji wykładniczej będzie właśnie liczba e . Wtedy bowiem:

$$(e^x)' = e^x \log_e e$$

czyli:

(41)

$$(e^x)' = e^x$$

Widzimy zatem, że funkcja wykładnicza e^x nie zmienia się przy różniczkowaniu: pochodna tej funkcji jest równa funkcji pierwotnej. Na tej własności polegają bardzo rozległe zastosowania tej funkcji w rachunku różniczkowym. W badaniach, należących do zakresu analizy wyższej, trzeba uznać za najprostszą funkcję wykładniczą funkcję:

$$y = e^x$$

a nie np. $y = 2^x$ lub $y = 10^x$.

Uwaga. Wykażemy później (w § 87), że najogólniejszą funkcją, która jest równa swej pochodnej, jest $y = C \cdot e^x$, gdzie C oznacza dowolną liczbę stałą.

§ 84. Pochodna logarytmu.

Znając wzór na pochodną funkcji wykładniczej, znajdziemy już łatwo wzór na pochodną logarytmu, stosując regułę na pochodną funkcji odwrotnej.

I tak, chcąc wyznaczyć pochodną funkcji:

$$y = \log_a x$$

odwracamy ją i otrzymujemy:

$$x = a^y$$

Stąd według wzoru (40) otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dy} = a^y \log_a a$$

a więc

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \log_a a} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_a a}$$

czyli na podstawie wzoru (b) z poprzedniego paragrafu:

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

a więc:

$$(42) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

Widzimy, że w ten wzór wchodzi liczba e .

Najprostszy wzór otrzymamy, gdy za zasadę logarytmów obierzemy liczbę e , a mianowicie wtedy $\log_e e = 1$ i zostaje:

$$(43) \quad (\log_e x)' = \frac{1}{x}$$

Otrzymaliśmy jako pochodną funkcji *przestępnej* bardzo prostą funkcję *wymierną*. Interesującym jest ponadto, że ta pochodna istnieje dla wszystkich x dodatnich i ujemnych z wyjątkiem $x = 0$, podczas gdy funkcja pierwotna: $\log x$ jest określona *tylko* dla dodatnich x .

Zauważmy, że pochodna funkcji:

$$y = \log_e(-x)$$

ma taką samą wartość

$$y' = \frac{1}{x}$$

jak pochodna funkcji $y = \log_e x$, jak to wynika z zastosowania reguły na różniczkowanie funkcji z funkcji: $y = \log_e u$, $u = -x$.

Widzimy, że dla badań, wchodzących w zakres rachunku różniczkowego, najprostsze są te logarytmy, których zasadą jest liczba e a nie liczba 10. lub jakakolwiek inna. Z tego powodu nazywamy logarytmy o zasadzie e logarytmami *naturalnymi* logarytmy zaś o zasadzie 10, dla odróżnienia, *zwykłymi*.

Przy logarytmach naturalnych będziemy w dalszych rozważaniach opuszczali zasadę e przy symbolu: $\log$. A więc:

$$y = \log x$$

oznaczać będzie logarytm naturalny. Natomiast przy logarytmach *zwykłych* będziemy zawsze pisali wyraźnie zasadę:

$$y = \log_{10} x$$

Uwagi. 1) Logarytmy naturalne wprowadzono do matematyki przed logarytmami zwykłymi. Wyłoniły się one z porównania postępu arytmetycznego:

$$0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

z postępem geometrycznym:

$$1, (1+d)^{\frac{1}{2}}, (1+d)^{\frac{2}{4}}, (1+d)^{\frac{3}{8}}, \dots, (1+d)^{\frac{n}{2}}, \dots$$

Liczby pierwszego ciągu są logarytmami liczb drugiego ciągu przy zasadzie:

$$E = (1+d)^{\frac{1}{d}}$$

Gdy d dąży do zera, to ta zasada dąży do liczby e . Najstarsze logarytmy (J. Neper w r. 1614) były obliczone dla zasady E przy $d = 10^{-7} = 0.0000001$. Różnią się one bardzo nieznacznie od ścisłych logarytmów naturalnych, ponieważ zasada E różni się nieznacznie od zasady e .

Tak np.

$$\log_{10} E = 0.4342944\ 554 \dots$$

podczas gdy:

$$\log_{10} e = 0.4342944\ 819 \dots$$

2) Przypomniemy tu znane z szkoły średniej, a bardzo często używane w analizie wyższej, wzory do zamiany logarytmów naturalnych na zwyczajne i odwrotnie.

Nazwijmy:

$$\log_{10} x = z \quad \text{a} \quad \log_e x = n$$

To znaczy:

$$10^z = x \quad \text{i} \quad e^n = x$$

czyli:

$$10^z = e^n$$

Logarytmując obie strony przy zasadzie 10, otrzymujemy:

$$z = n \log_{10} e = 0.434\ 294\ 4819 \dots \cdot n$$

Logarytmując zaś przy zasadzie e , otrzymujemy:

$$z \log_e 10 = n = 2.302\ 585\ 0930 \dots \cdot z$$

3) Pochodną logarytmu można wyprowadzić także wprost z definicji pochodnej, a mianowicie dla $y = \log_a x$ otrzymujemy:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}}$$

Mnożąc i dzieląc logarytm przez x , otrzymujemy:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}}$$

Kładąc $\frac{h}{x} = \delta$, otrzymujemy $\log_a(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} \rightarrow \log_a e$, a więc:

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

4) Wartością liczby e z dokładnością 12 miejsc po kropce dziesiętnej jest:

$$e \approx 2.71828\ 18284\ 59$$

Poznamy później bardzo dogodny sposób obliczania tej liczby z dowolną dokładnością. Okazano, że liczba ta jest nie tylko niewymierna, lecz nawet *przestępna*, to znaczy nie jest pierwiastkiem żadnego równania *algebraicznego*. Z liczbą tą spotykamy się nie tylko przy obliczaniu pochodnych funkcji wykładniczych i logarytmicznych, lecz także w rozmaitych zagadnieniach praktycznych, przyrodniczych, technicznych i fizycznych, jak to jeszcze wyjaśnimy w dalszym ciągu.

Rachunek różniczkowy i całkowy.

§ 85. Pochodna logarytmiczna.

Wiadomo, jakich uproszczeń doznają działania arytmetyczne przez wprowadzenie logarytmów. Podobne uproszczenia występują także w rachunku różniczkowym dla funkcyj, przybierających wartości *dodatnie*.

A mianowicie trudno jest czasem obliczyć pochodną jakiejś funkcji a łatwo jest obliczyć pochodną logarytmu naturalnego tej funkcji.

W tym celu dla:

$$y = f(x)$$

tworzymy

$$\log y = \log f(x) = F(x)$$

Obliczamy pochodne obu stron, pamiętając o tem, że y jest funkcją x , a nie zmienną niezależną. Trzeba więc do lewej strony zastosować twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej. W ten sposób otrzymujemy:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = F'(x)$$

a stąd:

$$y' = y \cdot F'(x) = f(x) \cdot F'(x)$$

Wyrażenie $F'(x)$ czyli:

(44)

$$\frac{d \log f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

nazywamy *logarytmiczną pochodną* funkcji $f(x)$. Metodę tę stosujemy zwykle do funkcji postaci:

$$y = u(x)^{v(x)}$$

dla $u(x) > 0$.

Chcąc obliczyć y' , tworzymy najpierw logarytm (naturalny):

$$\log y = v(x) \log u(x)$$

Stąd otrzymujemy pochodną logarytmiczną:

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \log u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}$$

a więc:

$$(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \log u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right)$$

Możemy teraz uzupełnić pewną lukę w różniczkowaniu potęg:

$$y = x^n$$

Dorychczas omówiliśmy tylko potęgi o wykładnikach wymiernych (por. § 79, przykład 3). Potęgę o wykładniku *niewymiernym* n określiliśmy

tylko dla dodatnich zasad x . Pochodną tej funkcji obliczamy przy pomocy pochodnej logarytmicznej. Tworzymy zatem $\log y = n \log x$ i $\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$.

Stąd:

$$y' = \frac{n}{x} \cdot x^n = nx^{n-1}$$

Otrzymaliśmy zatem taki sam wzór, jak dla wykładników wymiernych, a mianowicie:

(22)

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

§ 86. Przykłady na pochodne funkcji wykładniczych i logarytmicznych.

1) Podać konstrukcję stycznej dla linii wykładniczej o równaniu:

$$y = e^x$$

Obliczmy w tym celu podstyczną według wzoru (7) z § 64, t. j.:

$$P_s = -\frac{y}{y'} = -\frac{e^x}{e^x} = -1$$

Cheąc więc wykreślić styczną w dowolnym punkcie A tej krzywej (fig. 85), rysujemy rzędną BA i od punktu B odcinamy na osi x -ów w kierunku ujemnym jednostkę $BC = 1$. Prosta, łącząca punkt C z punktem A , jest żądaną styczną.

2) Obrazem graficznym funkcji:

$$y = be^{-ax} \sin(cx + d)$$

jest linia falowa o drganiach zanikających, gdy $a > 0$. Natomiast długości wszystkich fal są równe.

Wyznaczyć odcięte tych punktów,

w których styczne są równoległe do osi x -ów. Obliczamy spadek stycznej:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = y' &= -abe^{-ax} \sin(cx + d) + bce^{-ax} \cos(cx + d) = \\ &= be^{-ax}(c \cos(cx + d) - a \sin(cx + d)) \end{aligned}$$

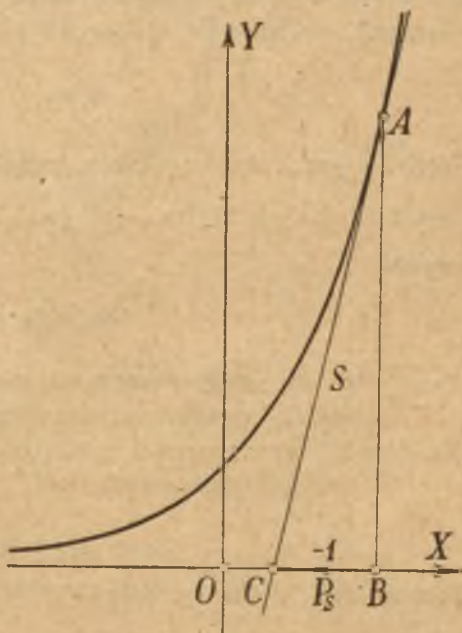


Fig. 85.

Styczne są równoległe do osi x -ów dla $y' = 0$, czyli dla x , spełniających równanie:

$$be^{-ax}(c \cos(cx + d) - a \sin(cx + d)) = 0$$

Pierwszy czynnik nie jest zerem dla żadnej wartości x , z drugiego zaś otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}(cx + d) = \frac{c}{a}$$

czyli:

$$cx + d = \operatorname{arctg} \frac{c}{a} + n\pi$$

a więc

$$x = \frac{\operatorname{arctg} \frac{c}{a} - d}{c} + \frac{n\pi}{c}$$

Oznaczając pierwszy dodatek literą x_0 , otrzymujemy cały ciąg tych odciętych, dla których styczna jest równoległa od osi x -ów, w postaci:

$$x_n = x_0 + \frac{n\pi}{c}$$

Liczba c jest w bardzo bliskim związku z okresem drgania T , albowiem periodem funkcji $\sin(cx + d)$ jest $T = \frac{2\pi}{c}$. Stąd $\frac{\pi}{c} = \frac{1}{2}T$ i możemy napisać:

$$x_n = x_0 + n \cdot \frac{T}{2}$$

Punkty te leżą zatem w odstępach równych połowie długości fali.

Poleca się czytelnikowi sporządzenie dokładnego wykresu tej funkcji dla szczegółowych wartości a , b , c , d .

3) Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

Jest to funkcja złożona. Zatem:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{1}{2} (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right) = \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

Niechaj czytelnik wyprowadzi w podobny sposób wzór na pochodną funkcji:

$$y = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \left(\text{Wynik: } y' = \frac{1}{1-x^2} \right)$$

4) Obliczyć różniczki logarytmów funkcyj trygonometrycznych.

$$d(\log \sin x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x dx = \operatorname{ctg} x dx$$

$$d(\log \cos x) = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) dx = -\operatorname{tg} x dx$$

$$d(\log \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{2}{\sin 2x} dx$$

$$d(\log \operatorname{ctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} dx = -\frac{2}{\sin 2x} dx$$

Wzory te odnoszą się do logarytmów naturalnych i do miary łukowej kątów. Mnożąc prawe strony przez odpowiednie zamienniki, można przystosować te wzory do logarytmów zwyczajnych i do miary stopniowej. Znajdują one zastosowanie przy rachunkach liczbowych.

5) Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

Używając reguły łańcuchowej, otrzymujemy:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)} \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)}$$

$$y' = \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)} = \frac{1}{\cos x}$$

6) Obliczyć pochodną funkcji:

$$y = x^x$$

Funkcja ta nie jest ani potęgą o stałym wykładniku, ani funkcją wykładniczą o stałej zasadzie. Wobec tego nie można tu zastosować ani reguły (22) z § 76 lub 85, ani wzoru (40) z § 83. Natomiast łatwo dojdziemy do wyniku, tworząc pochodną logarytmiczną. Logarytmując daną funkcję, otrzymujemy:

$$\log y = x \log x$$

a stąd:

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

a więc:

$$y' = x^x(1 + \log x)$$

7) Podobnie obliczamy pochodną funkcji:

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$$

$$\log y = \sin x \log \operatorname{tg} x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x \log \operatorname{tg} x + \sin x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \cos x \log \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$$

$$y' = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} (\cos x \log \operatorname{tg} x + \sec x)$$

8) Pochodną funkcji.

$$y = \log_x a$$

wyznamy, zmieniając logarytm o zasadzie x na logarytm o zasadzie e .
Otrzymujemy w ten sposób:

$$y = \log_e a \cdot \log_x e = \log_e a : \log_e x$$

Stąd:

$$y' = \log_e a \cdot \frac{-1}{(\log_e x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

czyli:

$$y' = -\frac{\log a}{x (\log_e x)^2}$$

§ 87. Równanie różniczkowe funkcji wykładniczej.

Funkcja wykładnicza $y = e^x$ spełnia warunek:

(45)

$$y' = y$$

Takie równanie nazywamy *równaniem różniczkowym zwyczajnem*.

Ogólnie równaniem różniczkowym zwyczajnem (pierwszego rzędu) nazywamy równanie, zachodzące między pochodną jakiejś funkcji, między tą funkcją i zmienną niezależną, t. j.:

$$F(x, y, y') = 0$$

przyczem może brakować w tem równaniu zmiennej x lub zmiennej y , ale musi występować pochodna y' . Te równania są nadzwyczaj ważne, ponieważ prawa fizyki i wogóle prawa przyrody wyraża się najczęściej właśnie w postaci równań różniczkowych. Wyznaczanie funkcji, spełniającej takie równanie, nazywamy rozwiązywaniem równania różniczkowego. Ogólnym metodom rozwiązywania takich zagadnień poświęcimy kilka rozdziałów w II tomie. Tutaj mamy do czynienia tylko z jednym specjalnym przypadkiem.

Rozwiązaniem równania (45) jest nie tylko funkcja e^x , lecz ogólniej, gromada funkcji postaci:

$$y = ae^x$$

albowiem $y' = ae^x$ (a jest dowolną stałą liczbą).

Okażemy później, że jest to najogólniejsze rozwiązanie równania różniczkowego (45).

Bardzo podobne, lecz nieco ogólniejsze równanie różniczkowe spełniają funkcje:

$$(a) \quad y = ae^{bx}$$

gdzie a i b oznaczają dwie dowolne stałe liczby.

Pochodna każdej takiej funkcji wyraża się wzorem:

$$y' = abe^{bx}$$

więc:

(46)

$$y' = by$$

Okażemy później, że funkcja, określona wzorem (a), jest najogólniejszym rozwiązaniem tego równania różniczkowego. Wzór (46) możemy wypowiedzieć w następujący sposób: *szybkość wzrastania tej funkcji jest proporcjonalna do każdorazowej wartości funkcji.*

Równanie różniczkowe (45) jest specjalnym przypadkiem równania (46), a mianowicie dla specjalnej wartości: $b = 1$. Zobaczymy, że taki związek (46) charakteryzuje przebieg bardzo wielu zjawisk przyrody i ma zastosowanie także w praktycznej matematyce.

Gdybyśmy nawet zgóry nie znali rozwiązań równania różniczkowego (46), to moglibyśmy je wykryć następującym rozumowaniem.

Napiszmy to równanie w postaci:

$$\frac{y'}{y} = b$$

Szukamy najpierw *dodatnich* rozwiązań tego równania, t. j. $y > 0$. Wtedy $\log y$ istniałby. Po lewej stronie mamy pochodną logarytmiczną, t. j.

$$\frac{d(\log y)}{dx} = b$$

Jeżeli pochodną jakiejś funkcji jest stała liczba b , to łatwo odgadujemy, że funkcją pierwotną jest bx lub ogólniej $bx + c$, gdzie c jest dowolną liczbą stałą, albowiem istotnie:

$$(bx + c)' = b$$

Nie wiemy tylko, czy jest to najogólniejsza funkcja, której pochodną jest stała b . Później (w § 101) zobaczymy, że tak jest istotnie.

Wobec tego:

$$\log y = bx + c$$

a zatem:

$$y = e^{bx+c} = e^c \cdot e^{bx}$$

Ponieważ c jest dowolną liczbą stałą, to e^c jest dowolną dodatnią stałą: oznaczmy ją literą a . Otrzymujemy więc:

$$y = ae^{bx} \quad (\text{przyczem } a > 0)$$

zgodnie z wzorem (a).

Okazemy, że stała a może przybierać także ujemne wartości. Wtedy i y miałoby ujemne wartości, a więc $\log y$ nie istniałby, a istniałby tylko $\log(-y)$. Aby w rachunku wystąpiła taka funkcja, piszemy równanie (46) w postaci:

$$\frac{-y'}{-y} = b$$

Stąd widocznie:

$$\log(-y) = bx + c$$

a więc:

$$-y = e^{bx+c} = e^c \cdot e^{bx}$$

czyli:

$$y = -e^c \cdot e^{bx}$$

Oznaczając ujemną stałą: $-e^c$ literą a , otrzymujemy:

$$y = ae^{bx} \quad (\text{przyczem } a < 0)$$

Dla $a = 0$ spełnia się także równanie różniczkowe, bo wtedy $y = 0$, $y' = 0$ a więc $y' = a \cdot y$.

A więc wszystkie funkcje, zawarte we wzorze (a), są rozwiązaniami równania (46).

§ 88. Zastosowania funkcji wykładniczej. Wzrastanie „organiczne“.

Liczba e nasunęła się po raz pierwszy w taki sposób, że nie można jej było ominąć, przy badaniu pochodnej dowolnej funkcji wykładniczej i logarytmu o dowolnej zasadzie. Zobaczymy, że zarówno liczba e jak i funkcja wykładnicza o zasadzie e występują w rozlicznych ważnych zagadnieniach i to nawet już w matematyce elementarnej.

I tak przedewszystkiem natrafimy na tę liczbę przy konsekwentnem uogólnieniu zagadnienia procentu składanego, przy rozmaitych okresach kapitalizacji.

Znany jest z matematyki elementarnej wzór na kapitał końcowy

z kapitału K_0 , umieszczonego na procencie składanym $p\%$ na x lat przy rocznej kapitalizacji, a mianowicie:

$$y = K^{(1)}(x) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x = K_0 q^x$$

Procent dolicza się przytem raz na rok. Przedstawiając ten proces doliczania graficznie, otrzymujemy (fig. 86) linię schodkową, której górne punkty kątowe leżą na krzywej wykładniczej $y = K_0 q^x$. Jeżeli kapitał

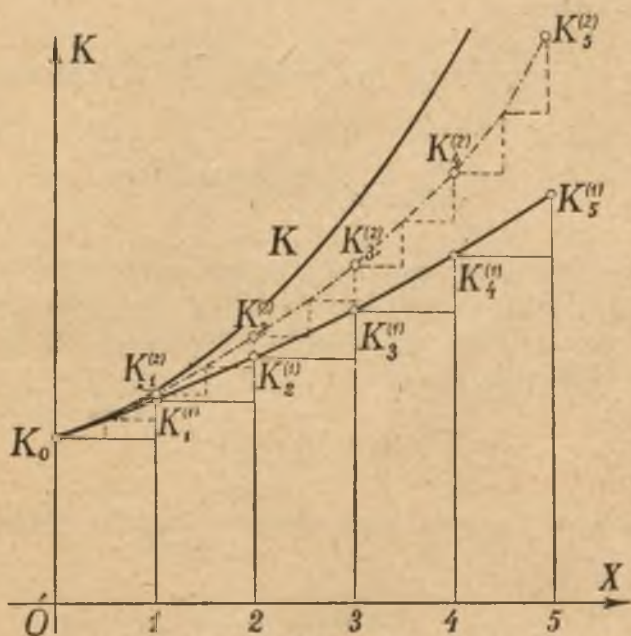


Fig. 86.

wyjmuje się w ciągu roku, to dolicza się za ostatni ułamek roku nie procent składany, lecz procent prosty. To znaczy, że przyjmuje się w ciągu jednego roku wzrastanie kapitału proporcjonalne do czasu, jednostajne, według linii prostej, łączącej dwa sąsiednie górne punkty kątowe. Wtedy zamiast linii schodkowej otrzymuje się linię łamaną, złożoną z cięciw krzywej $y = K_0 q^x$. Tak się przedstawia sprawa przy kapitalizacji *rocznej*. Korzystniejszą dla kapitalisty jest kapitalizacja *półroczna*, przy której odsetki dopisuje się do kapitału co $\frac{1}{2}$ roku. Wzór na kapitał końcowy $K^{(2)}(x)$ po x latach przy takiej kapitalizacji ma postać:

$$K^{(2)}(x) = K_0 \left(1 + \frac{\frac{1}{2} p}{100}\right)^{2x}$$

(połowa procentu a dwa razy więcej okresów kapitalizacji).

Na obrazie graficznym otrzymuje się linję łamaną, wznoszącą się nieco szybciej aniżeli $K^{(n)}(x)$, złożoną z dwa razy większej liczby odcinków. Biorąc pod uwagę kapitalizację kwartalną ($\frac{1}{4}$ roczną), miesięczną (co $\frac{1}{12}$ roku) i t. d. otrzymuje się linję łamaną coraz bardziej strome. Ogólnie, doliczając odsetki co $\frac{1}{m}$ część roku, otrzymujemy następujący wzór na kapitał końcowy:

$$K^{(m)}(x) = K_0 \left(1 + \frac{\frac{1}{m} p}{100} \right)^{mx}$$

Oznaczając krótko.

$$\frac{p}{m \cdot 100} = \frac{1}{n}, \quad \text{otrzymujemy} \quad m = n \cdot \frac{p}{100}.$$

a wzór ma postać

$$K^{(m)}(x) = K_0 \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{px}{100}}$$

Jeżeli liczba m okresów kapitalizacji wzrasta nieograniczenie, to okazuje się, że kapitał końcowy nie dąży bynajmniej do $+\infty$, lecz dąży do pewnej skończonej granicznej wartości, a mianowicie przy danem x , t. j. przy danej liczbie lat, mamy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K^{(m)}(x) = K_0 \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{\frac{px}{100}}$$

Gdy $m \rightarrow \infty$, to i $n \rightarrow \infty$, a jak wiadomo: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$.

Wobec tego:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} K^{(m)}(x) = K_0 e^{\frac{px}{100}}$$

Nazwijmy tę graniczną funkcję $K(x)$, to:

(b)

$$K(x) = K_0 e^{\frac{px}{100}}$$

Widzimy, że chcąc uzyskać możliwie najkorzystniejszą kapitalizację, należy obliczać kapitał końcowy przy pomocy funkcji wykładniczej o zasadzie e .

Wzrastanie kapitału według tego wzoru nazywamy kapitalizacją *organiczną* albo *ciągłą*. Łamana linja, charakteryzująca wzrastanie kapitału (schodkami), przechodzi na linję ciągłą, stale rosnącą, a mianowicie jest to krzywa wykładnicza.

Nazwa: kapitalizacja „organiczna” pochodzi stąd, że taki sposób wzrastania przypisywano dawniej organizmom. Cecha charakterystyczna takiego sposobu wzrastania wystąpi jaśniej, gdy obliczymy szybkość wzrastania czyli pochodną tej funkcji. I tak z wzoru (b) otrzymujemy:

$$\frac{dK}{dx} = K_0 \cdot e^{bx} \cdot \frac{p}{100}.$$

czyli:

$$K' = \frac{p}{100} K$$

Widzimy, że przy kapitalizacji ciągłej szybkość wzrastania kapitału jest proporcjonalna do każdorazowego stanu kapitału, a czynnikiem proporcjonalności: jest $b = \frac{p}{100}$, t. j. roczny dochód z jednostki kapitału. Jest to równanie różniczkowe formy (46), które omówiliśmy szczegółowo w poprzednim paragrafie.

Otóż każde wzrastanie (lub malenie, zależne od tego, czy b jest dodatnie czy ujemne), odbywające się według prawa, wyrażonego tem równaniem różniczkowym, nazywamy wzrastaniem organicznym.

Tak np. w gospodarce leśnej drzewostan powiększa się nie rocznie lub półrocznie, lecz ciągle. Szybkość wzrastania objętości (drzewa) można wyrazić wzorem:

$$\frac{dV}{dt} = aV$$

Napięcie pasa transmisyjnego (fig. 87), ślizgającego się po kole, zmienia się wskutek tarcia według wzoru:

$$\frac{dP}{d\varphi} = \varrho P$$

gdzie φ oznacza kąt zawarty między promieniem koła, należącym do badanego punktu, a promieniem, należącym do końcowego punktu styczności pasa. Stała ϱ oznacza współczynnik tarcia. Rozwiązaniem tego równania jest:

$$P = ce^{\varrho\varphi}$$

Stałą c otrzymamy z warunku, że dla $\varphi = 0$ jest $P = P_0$, a więc:

$$P = P_0 e^{\varrho\varphi}$$

Ubytek ciśnienia barometrycznego y z wysokością x wyraża się wzorem:

$$dy = - \frac{1000s_0}{sb_0} y dx = - \frac{1}{7990} y dx = - ky dx.$$

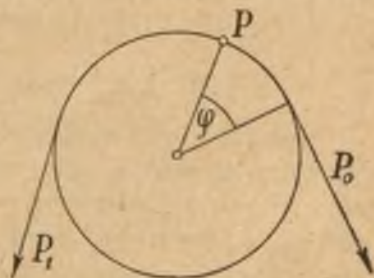


Fig. 87.

gdzie s_0 jest gęstością powietrza, s gęstością rtęci, $b_0 = 760$ mm/rtęci a dx przyrostem wysokości w metrach.

Stąd:

$$y' = -ky$$

a więc:

$$y = Ce^{-kx}$$

Stałą C wyznacza się z warunku, że dla $x = 0$ (t.j. przy poziomie morza) ma być ciśnienie $y = b_0$. Więć:

$$y = b_0 e^{-\frac{x}{7990}}$$

Jest to t. zw. formułka barometryczna na pomiar wysokości, używa się jej bowiem zwykle odwrotnie, uważając x jako funkcję y , t. j.:

$$x = 7990 \log_e \frac{760}{y} = \frac{1}{k} \log_e \frac{b_0}{y}$$

Ten wzór odnosi się do temperatury $t = 0^\circ \text{C}$. Dla dowolnej temperatury t trzeba zastąpić czynnik k wyrażeniem $k \left(1 + \frac{t}{273}\right)$.

W tym przykładzie mamy do czynienia z *maleniem* organicznem. Podobne prawo spotykamy przy absorbcji światła w przezroczystych płytach, przy rozpadaniu się ciał promieniotwórczych i t. d.

Gdy liczba b we wzorze $y' = by$ czyli $y = ae^{bx}$ jest dodatnia, to bezwzględna wartość wielkości y wzrasta *nieograniczenie* z wzrostem x , dążąc do $+\infty$ dla $a > 0$ a do $-\infty$ dla $a < 0$.

§ 89. Wzrastanie według prawa Mitscherlicha.

Sposób wzrastania (malenia), opisany w poprzednim paragrafie, spotykamy w przyrodzie nader rzadko. Najczęściej badana wielkość wzrasta tylko do pewnej skończonej wartości, dążąc do skończonej granicznej wartości g . Przyjmując, że różnica między tą graniczną wartością a badaną wielkością *maleje* według prawa organicznego, otrzymujemy inne prawo wzrastania, a mianowicie:

$$(w) \quad g - y = Ce^{-bx} \quad (\text{przy } b > 0)$$

Gdy $x \rightarrow +\infty$, to $e^{-bx} \rightarrow 0$, a więc $y \rightarrow g$.

Obierzmy początek układu tak, aby dla $x = 0$ było $y = 0$, to znaczy:

$$g - 0 = C \cdot 1$$

czyli.

$$C = g$$

Otrzymujemy:

$$g - y = g e^{-bx}$$

czyli:

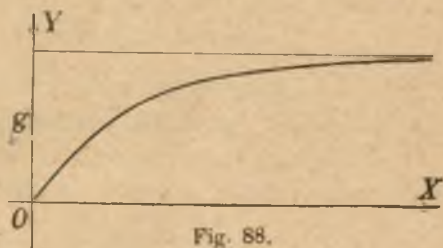
$$y = g(1 - e^{-bx})$$

Wykres tej funkcji przedstawiono na fig. 88. Równanie różniczkowe dla takiego prawa wzrastania otrzymamy, tworząc pochodną obu stron wzoru (w). Otrzymujemy:

$$-y' = C e^{-bx} \cdot (-b)$$

czyli:

$$(z) \quad y' = b(g - y)$$



To znaczy: szybkość wzrastania jest proporcjonalna do różnicy pomiędzy graniczną wartością a każdorazowym stanem badanej wielkości.

W fizyce spotykamy to prawo dość często. Tak np. takiemu prawu czyni zadość szybkość ostygnięcia ciała gorętszego od otoczenia (por. str. 2, przykład d) a także szybkość ogrzewania się ciała zimniejszego od otoczenia. Temperatura otoczenia jest tu ową graniczną wartością g , do której dąży różnica między temperaturą otoczenia a temperaturą badanego ciała.

Według takiego prawa przebiega zmiana natężenia i prądu elektrycznego po włączeniu stałej siły elektromotorycznej v , przy uwzględnieniu hamującego działania indukcji własnej. Otrzymano bowiem z rozważań fizycznych następujące równanie różniczkowe:

$$i \cdot r = v - l \cdot i'$$

(r oznacza opór, l współczynnik indukcji własnej, a $i' = \frac{di}{dt}$).

To równanie sprowadzamy do postaci (z):

$$i' = \frac{r}{l} \left(\frac{v}{r} - i \right)$$

W myśl poprzednich rozważań natężenie prądu przebiega zatem według prawa:

$$i = \frac{v}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{l}t} \right)$$

Graniczną wartością jest tu $i_0 = \frac{v}{r}$.

Prawo to znajduje także liczne zastosowania w chemii, w botanice, w zoologii i w psychologii doświadczalnej. Zowiemy je prawem Mitscherlicha.

§ 90. Wzrastanie według prawa Robertsona.

Inne znów prawo wzrastania otrzymujemy, czyniąc założenie, że szybkość wzrastania jest proporcjonalna do iloczynu z każdorazowego stanu wielkości i z różnicy między wartością graniczną a tym stanem. Prawo to wyraża się następującym równaniem różniczkowym:

$$\frac{dy}{dt} = y' = by(g - y)$$

Prędkość wzrastania jest tu zerem zarówno na początku procesu wzrastania (dla $y = 0$), jak i dla wartości granicznej: $y = g$.

Najłatwiej jest rozwiązać to równanie różniczkowe, uważając y za zmienną niezależną, a czas t za zmienną zależną. Wtedy:

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dt}} = \frac{1}{by(g - y)}$$

Drugą stronę rozkładamy na ułamki częściowe (por. § 23) i otrzymujemy:

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{bg} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{g - y} \right)$$

Wiemy, że $\frac{1}{y}$ jest pochodną funkcji $\log_e y$; wobec tego $\frac{1}{g - y}$ jest pochodną funkcji $-\log(g - y)$, a zatem prawa strona jest pochodną funkcji:

$$\frac{1}{bg} (\log y - \log(g - y)) + C$$

Lewa strona jest pochodną funkcji t , zatem:

$$t = \frac{1}{bg} (\log y - \log(g - y)) + C$$

Stałą C wyznaczmy z warunku, że w pewnej chwili $t = T$ osiągnie y połowę granicznej wartości, t. j. $y = \frac{1}{2}g$. Podstawiając to w równanie otrzymamy:

$$T = \frac{1}{bg} \left(\log \frac{g}{2} - \log \frac{g}{2} \right) + C = C$$

Mamy zatem:

$$t = \frac{1}{bg} \log \frac{y}{g - y} + T$$

czyli:

$$b \cdot g(t - T) = \log \frac{y}{g - y}$$

a stąd:

$$\frac{y}{g-y} = e^{bg(t-T)}$$

$$g-y = ye^{-bg(t-T)}$$

$$y = \frac{g}{1 + e^{-bg(t-T)}}$$

Tu T oznacza czas, potrzebny do osiągnięcia połowy granicznej wartości.

To prawo wzrastania nazywamy prawem Robertsona.

Na fig. 89 jest przedstawiony wykres tej funkcji. Gdy $t \rightarrow -\infty$, to $y \rightarrow 0$, a gdy $t \rightarrow +\infty$, to $y \rightarrow g$. Dla $t = T$ jest $y = \frac{g}{2}$. W punkcie A, wklęsłość przechodzi w wypukłość.

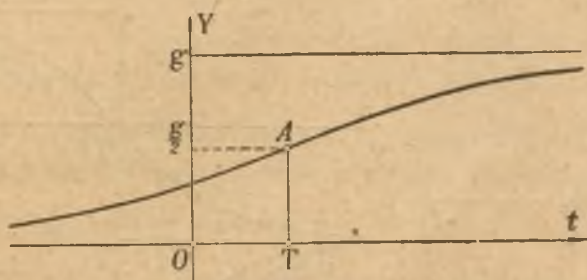


Fig. 89.

Uwaga. Dokładniejsze omówienie tych rozmaitych praw wzrastania i cytaty z literatury, odnoszącej się do tego przedmiotu, znajdują się w podręczniku A. Walthera, p. t. *Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen* (Berlin 1928, str. 184 i nast.).

§ 91. Funkcje hiperboliczne i ich pochodne.

Pewne proste kombinacje funkcji wykładniczych oznaczono specjalnymi symbolami i wprowadzono na nie osobne nazwy. Okazuje się bowiem, że te kombinacje mają bardzo interesujące własności i znajdują częste zastosowania w rozmaitych działach fizyki i techniki.

Są to następujące funkcje:

$$(47) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sin \text{ hyp } x$$

$$(48) \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos \text{ hyp } x$$

$$(49) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \text{tg hyp } x$$

$$(50) \quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \text{ctg hyp } x$$

zwane funkcjami *hiperbolicznymi*. I tak funkcja, określona wzorem (47), jest to *sinus* hiperboliczny, wzorem (48): *cosinus* hiperboliczny, (49): *tangens* hiperboliczny a (50): *cotangens* hiperboliczny.

Wykresy funkcji $\sinh x$ i $\cosh x$ są przedstawione na fig. 90 a funkcji $\tanh x$ i $\coth x$ na fig. 91. Nazwy ich pochodzą stąd, że mają one własności podobne do funkcji trygonometrycznych i są związane z hiperbolą równoboczną o półosi równej 1, podobnie jak funkcje trygonometryczne są związane z kołem o promieniu 1.

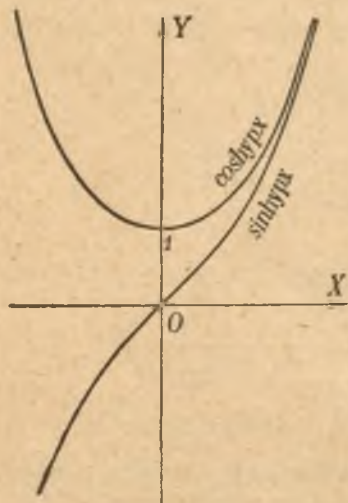


Fig. 90.

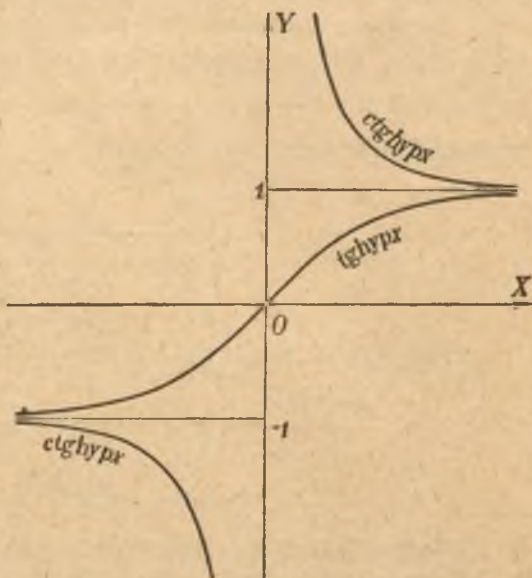


Fig. 91.

I tak przedewszystkiem łatwo możemy się przekonać, że między funkcjami $\sinh t$ i $\cosh t$ zachodzi związek:

(51)

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

różniący się tylko znakiem od znanego z trygonometrii związku:

(a)

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Istotnie:

$$\begin{aligned} \cosh^2 t - \sinh^2 t &= \frac{(e^t + e^{-t})^2}{4} - \frac{(e^t - e^{-t})^2}{4} = \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}}{4} = 1 \end{aligned}$$

Uważając $\cosh t$ i $\sinh t$ za współrzędne (ξ, η) punktu, otrzymujemy z wzoru (a) koło o promieniu 1, wyrażone w formie parametrowej.

Istotnie wtedy:

$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t = \xi^2 + \eta^2$$

a

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

przedstawia równanie koła o promieniu 1. Uważając zaś $\cos \text{hyp } t$ i $\sin \text{hyp } t$ za współrzędne punktu, otrzymujemy na podstawie wzoru (51):

$$\xi^2 - \eta^2 = 1$$

a to jest równanie hiperboli równobocznej o półosi 1.

Łatwo stwierdzić, że do funkcji hipérbolicznych stosują się także ogólne wzory o dodawaniu argumentów, podobne do wzorów dla funkcji trygonometrycznych, a mianowicie:

$$(52) \quad \sin \text{hyp } (a + b) = \sin \text{hyp } a \cos \text{hyp } b + \sin \text{hyp } b \cos \text{hyp } a$$

$$(53) \quad \cos \text{hyp } (a + b) = \cos \text{hyp } a \cos \text{hyp } b + \sin \text{hyp } a \sin \text{hyp } b$$

Stąd łatwo otrzymać wzory dla $a - b$, uwzględniając fakt, że $\sin \text{hyp } t$ jest funkcją nieparzystą (por. § 20 d) a $\cos \text{hyp } t$ funkcją parzystą, a więc

$$\sin \text{hyp } (-b) = -\sin \text{hyp } b, \quad \cos \text{hyp } (-b) = \cos \text{hyp } b$$

Tak np. przy dowodzie wzoru (52) opieramy się na tem, że

$$e^x = \cos \text{hyp } x + \sin \text{hyp } x$$

$$e^{-x} = \cos \text{hyp } x - \sin \text{hyp } x$$

jak to wynika z dodania i odjęcia obu stron wzorów (47) i (48) od siebie.

Według definicji jest:

$$\sin \text{hyp } (a + b) = \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} = \frac{e^a e^b - e^{-a} e^{-b}}{2}$$

Podstawiamy tu za e^a, e^b, e^{-a}, e^{-b} odpowiednie wartości i otrzymujemy po wykonaniu zaznaczonych działań wzór (52).

Także inne wzory trygonometryczne stosują się do tych funkcji. Tak np. z definicji $\text{tg hyp } x$ zapomocą wzoru (49) widzimy, że

$$(54) \quad \text{tg hyp } x = \frac{\sin \text{hyp } x}{\cos \text{hyp } x}$$

Zobaczymy później, że te przypadkowe napozór analogie mają głębszą przyczynę. Aby ją jednak zrozumieć, trzeba rozszerzyć badania także na urojone wartości zmiennej x i wprowadzić e^x . W jednym z dalszych rozdziałów zajmiemy się tą sprawą szczegółowo. Ze względu na dość częste zastosowania tych funkcji sporządzono dla nich tablice.

Tak np. w zbiorze tablic p. t. „Hütte“ znajdzie czytelnik, obok innych często używanych tablic, także tablice funkcji hiperbolicznych. Obszerne tablice podał Hayashi p. t. „Fünfstellige Tafeln für Kreis- und Hyperbelfunktionen“. 1921 r.

Pochodne funkcji hiperbolicznych są jeszcze łatwiejsze do zapamiętania aniżeli pochodne funkcji trygonometrycznych. I tak dla funkcji:

$$\sin \operatorname{hyp} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

pochodna ma wartość:

$$\frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a więc:

(55)

$$(\sin \operatorname{hyp} x)' = \cos \operatorname{hyp} x$$

Dla:

$$\cos \operatorname{hyp} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

pochodną jest:

(56)

$$(\cos \operatorname{hyp} x)' = -\sin \operatorname{hyp} x$$

Pochodną zaś funkcji $\operatorname{tg} \operatorname{hyp} x$ obliczymy z wzoru (54), stosując twierdzenie o pochodnej ilorazu, a mianowicie:

$$(\operatorname{tg} \operatorname{hyp} x)' = \frac{\cos \operatorname{hyp} x \cdot \cos \operatorname{hyp} x - \sin \operatorname{hyp} x \cdot \sin \operatorname{hyp} x}{\cos^2 \operatorname{hyp} x}$$

A więc na podstawie wzoru (51) jest

(57)

$$(\operatorname{tg} \operatorname{hyp} x)' = \frac{1}{\cos^2 \operatorname{hyp} x}$$

Pozostawimy czytelnikowi wyprowadzenie wzoru na pochodną funkcji $\operatorname{ctg} \operatorname{hyp} x$. Wprowadzono także funkcje odwrotne względem funkcji hiperbolicznych; np. funkcję odwrotną do $y = \sin \operatorname{hyp} x$ nazwano „area sinus hyperbolici“ i oznaczono symbolem:

$$x = \operatorname{arsinh} y$$

Obliczając x z wzoru:

$$y = \sin \operatorname{hyp} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

otrzymujemy:

$$x = \log(y + \sqrt{1 + y^2})$$

A zatem $\operatorname{arsinhyp} y$ nie jest nową dla nas funkcją, lecz funkcją złożoną z logarytmu i z algebraicznej funkcji $y + \sqrt{1 + y^2}$. Podobnie odwrócenia innych funkcji hiperbolicznych są logarytmami dość prostych funkcji algebraicznych

Uwaga: nazwa „area” pochodzi stąd, że funkcje te są w związku z polem (po łacinie: area) wycinków hiperboli, jak to później zobaczymy w tomie II.

Przykłady. 1) Na fig. 92 jest przedstawione koło o promieniu 1 i prawa gałąź hiperboli równobocznej o półosi 1

Parametrowe przedstawienie tej gałęzi hiperboli jest:

$$x = \cos \operatorname{hyp} t$$

$$y = \sin \operatorname{hyp} t$$

Z punktu A , leżącego na tej hiperboli, poprowadzono równoległą do osi x -ów aż do przecięcia się w B z wspólną styczną koła i hiperboli, należącą do punktu C . Znaleźć związek między parametrem t i kątem $\vartheta = \angle BOC$. Odcinek $CB = \operatorname{tg} \vartheta$ a odcinek $OB = \sec \vartheta$.

Otóż:

$$y = \sin \operatorname{hyp} t = CB = \operatorname{tg} \vartheta$$

$$x = \cos \operatorname{hyp} t = \sqrt{1 + \sin^2 \operatorname{hyp} t} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \sec \vartheta$$

Ale:

$$\sin \operatorname{hyp} t + \cos \operatorname{hyp} t = e'$$

zatem:

$$\operatorname{tg} \vartheta + \sec \vartheta = e'$$

czyli:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right) = e'$$

Z tego związku możemy do danego t obliczyć odpowiednią wartość kąta ϑ a mianowicie:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(e') \quad \text{a stąd} \quad \vartheta = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(e') - \frac{\pi}{2}$$

a w następstwie sprowadzić obliczenie funkcji hyperbolicznej $y = \sin \operatorname{hyp} t$ do obliczenia funkcji trygonometrycznej $\operatorname{tg} \vartheta$.

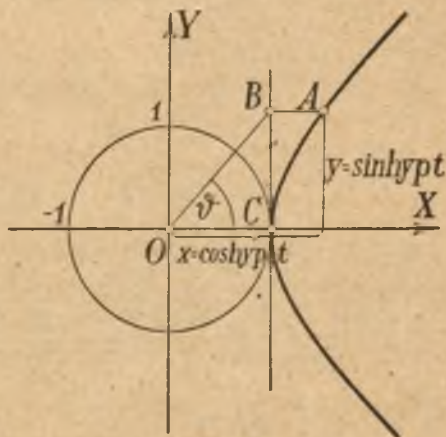


Fig. 92

Odwrotnie, możemy także wyrazić t jako funkcję ϑ , a mianowicie:

$$t = \log_e \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2} \right)$$

Kąt ϑ nazywamy *kątem przestępnym* funkcji hiperbolicznej lub *amplitudą* hiperboliczną

2) W mechanice dowodzi się, że łańcuch, zwisający swobodnie między dwoma punktami A i B (fig. 90), przybiera postać linii o równaniu:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

gdy obierzemy odpowiednio osie współrzędnych. Tę linię nazywamy *linią łańcuchową*. Znaleźć konstrukcję stycznej do tej linii w dowolnym jej punkcie: B . Równanie tej linii możemy napisać w postaci:

$$y = a \cos \operatorname{hyp} \frac{x}{a}$$

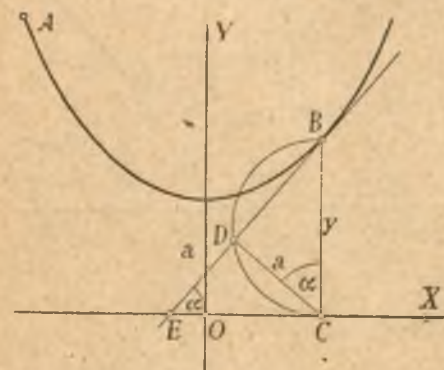


Fig 75

Spadek stycznej równa się.

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = a \sin \operatorname{hyp} \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{a} = \sin \operatorname{hyp} \frac{x}{a}$$

Na podstawie wzoru (51) jest więc:

$$y' = \sqrt{\cos^2 \operatorname{hyp}^2 \frac{x}{a} - 1} = \frac{1}{a} \sqrt{y^2 - a^2}$$

czyli:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{y^2 - a^2} : a$$

Aby ten kąt otrzymać konstrukcyjnie, wykreślamy na rzędnej CB półkole i odcinamy w niem cięciwę $CD = a$. Wtedy $DB = \sqrt{y^2 - a^2}$, więc $\sqrt{y^2 - a^2} : a = \operatorname{tg}(\sphericalangle BCD) = \operatorname{tg} \alpha$. Przedłużając BD do przecięcia się z osią x -ów, otrzymujemy $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BCD = \alpha$. Prosta EB , przechodząca przez punkt B linii łańcuchowej, jest zatem styczną do niej.

§ 92. Obliczanie pochodnej funkcji, określonej dwoma wzorami.

Omówiliśmy już pochodne wszystkich *elementarnych* funkcji (por. str. 96), podanych w formie wyraźnej zapomocą jednego wzoru. Jeżeli funkcja jest podana dla pewnych x zapomocą jednego wzoru, a dla in-

nych x zapomocą innego, to trzeba oczywiście obliczać osobno pochodną dla pierwszej części a osobno dla drugiej.

Tak np. funkcja, podana wzorami:

$$(w) \quad \begin{cases} y = x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y = 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

posiada dla $x \neq 0$ pochodną.

$$y'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

czyli:

$$y'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad (\text{dla } x \neq 0)$$

Ta funkcja pochodna nie istnieje dla $x = 0$, ani nawet nie dąży do żadnej określonej wartości dla $x \rightarrow 0$. Nie należy stąd jednak wnosić, że w punkcie $x = 0$ nie istnieje pochodna funkcji, określonej wzorami (w). Pochodną w punkcie $x = 0$ trzeba bowiem dopiero osobno obliczyć wprost z definicji, opierając się na tem, że $y(0) = 0$, a dla $h \neq 0$ jest $y(h) = h^2 \sin \frac{1}{h}$.

Pochodną tę obliczyliśmy już w § 63, w przykładzie 3a; otrzymaliśmy $y'(0) = 0$. W punkcie $x = 0$ istnieje zatem pochodna i ma wartość 0 (styczna istnieje i jest równoległa do osi x -ów).

Zbadajmy w podobny sposób istnienie pochodnej dla funkcji, określonej dwoma następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{1 + e^x} & \text{dla } x \neq 0 \\ y &= 0 & \text{dla } x = 0 \end{aligned}$$

Dla $x \neq 0$ pochodną tej funkcji jest:

$$y' = \frac{1 + e^x - x \cdot e^x \cdot \frac{1}{e^x}}{(1 + e^x)^2} = \frac{1 + e^x + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}}{(1 + e^x)^2}$$

Dla $x = 0$ trzeba obliczyć osobno pochodną przy pomocy ilorazu różnicowego:

$$\frac{y(h) - y(0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{1 + e^h} = \frac{1}{1 + e^h}$$

Tutaj otrzymamy inną granicę, gdy h dąży do 0 przez wartości dodatnie a inną, gdy h jest ujemne, albowiem $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^h} = \frac{1}{2}$ a $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^h} = 0$.

Wobec tego (por. § 48, przykład 3):

$$\lim_{0 < h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$\lim_{0 > h \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Przekonaliśmy się zatem, że w punkcie $x=0$ nie istnieje pochodna

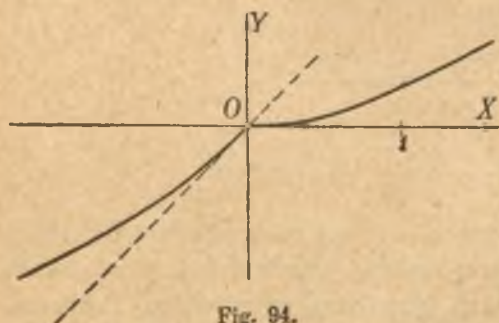


Fig. 94.

w zwykłym tego słowa znaczeniu. Natomiast w tym punkcie istnieje prawostronna pochodna 0 i lewostronna pochodna 1. Linja krzywa, przedstawiająca graficznie daną funkcję, ma w początku układu punkt kątowy: prawa gałąź jest styczna do osi x -ów a lewa do prostej, nachylonej pod kątem 45° do osi x -ów (por. fig. 94).

Funkcja, określona wzorami:

$$y = x \sin \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x \neq 0$$

$$y = 0 \quad \quad \quad \text{„} \quad x = 0$$

posiada dla $x \neq 0$ pochodną:

$$y' = \sin \frac{1}{x} + x \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

Natomiast dla $x=0$ funkcja ta nie posiada pochodnej, jak to widzieliśmy w § 63 w przykładzie 3b, gdzie pochodną dla $x=0$ trzeba było obliczać osobno wprost z definicji.

ROZDZIAŁ VIII.

Pochodne wyższych rzędów funkcji jednej zmiennej.

§ 93. Pochodne i różniczki wyższych rzędów funkcji $y = f(x)$ w przypadku, gdy x jest zmienną niezależną.

Pochodna: $y' = f'(x)$ funkcji $y = f(x)$ jest także funkcją zmiennej x . Jeżeli ta nowa funkcja posiada pochodną, to tę pochodną nazywamy *drugą pochodną* danej funkcji i oznaczamy ją symbolem:

$$y'' = f''(x)$$

Pochodną tej funkcji — o ile ona istnieje — nazywamy *trzecią pochodną* funkcji $y = f(x)$ i oznaczamy ją:

$$y''' = f'''(x)$$

Podobnie określamy *czwartą* pochodną:

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x)$$

i ogólnie n -tą pochodną:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

Te kolejne pochodne można też oznaczać symbolami różniczkowymi, wprowadzając różniczki wyższych rzędów.

I tak drugą różniczką funkcji $y = f(x)$ nazywamy różniczkę z pierwszej różniczki przy zachowaniu tego samego przyrostu i oznaczamy ją symbolem:

$$d^2y = d(dy) = (dy)'dx$$

(czytaj „ d dwa y , a nie „ d kwadrat y !“).

Ponieważ $dy = y' \cdot dx$, przeto:

$$(a) \quad d^2y = d(y'dx) = (y'dx)' \cdot dx$$

Przyrost dx uważamy za niezależny od wartości x , t. j. stały dla wszystkich x . Wobec tego pochodna z dx jest zerem.

Stosując po prawej stronie wzoru (a) wzór na pochodną iloczynu, otrzymujemy:

$$(b) \quad d^2y = (y''dx + y' \cdot 0)dx = y''(dx)^2$$

Wobec tego:

$$y'' = \frac{d^2y}{(dx)^2}$$

Piszemy zwykle zamiast $(dx)^2$ krótko dx^2 ; nie należy jednak tego mieszać z $d(x^2) = 2x dx$. Otrzymujemy zatem następujący, dogodny nieraz sposób oznaczania drugiej pochodnej:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

(czytaj: „d dwa y względem dx do kwadratu¹⁴). Prawą stronę nazywamy ilorzem różniczkowym drugiego rzędu.

Podobnego sposobu oznaczania używamy także dla wyższych pochodnych, a więc piszemy:

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$$

i ogólnie:

(58)

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Zobaczymy jednak w dalszym ciągu, że ten sposób oznaczania jest tylko wtedy dopuszczalny, jeżeli x jest zmienną niezależną a dx nie zależy od x . Należałoby więc pisać wyraźnie:

$$y^{(n)} = \frac{d_x^n y}{(d_x x)^n}$$

Przykłady.

1) Wyprowadzić ogólny wzór na n -tą pochodną potęgi:

$$y = x^s$$

Otrzymujemy kolejno:

$$y' = s x^{s-1}, \quad y'' = s(s-1)x^{s-2}, \quad y''' = s(s-1)(s-2)x^{s-3}$$

a ogólnie:

$$y^{(n)} = s(s-1)(s-2) \dots (s-(n-1))x^{s-n}$$

Jeżeli s jest liczbą całkowitą, to s -ta pochodna jest liczbą stałą:

$$y^{(s)} = s(s-1)(s-2) \dots (s-(s-1))x^0 = s!$$

a wszystkie dalsze pochodne są zerami.

Stąd wynika, że dla wielomianu stopnia s wszystkie pochodne rzędu wyższego od s są zerami.

2) Obliczyć n -tą pochodną funkcji wykładniczej:

$$y = a^x$$

Otrzymujemy kolejno:

$$y' = a^x \log_e a, \quad y'' = a^x (\log_e a)^2$$

a ogólnie:

$$y^{(n)} = a^x (\log_e a)^n$$

Dla $y = e^x$ wszystkie pochodne są równe e^x , co zresztą wynika także z poprzedniego wzoru, ponieważ wtedy $\log_e a = \log_e e = 1$.

3) Dla funkcji logarytmicznej o zasadzie e :

$$y = \log x$$

otrzymujemy następujący ciąg pochodnych:

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}, \quad y'' = -x^{-2}, \quad y''' = (-1)(-2)x^{-3} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2x^{-3},$$

$$y^{(4)} = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-3)x^{-4} = \frac{(-1)^3 \cdot 3!}{x^4}$$

ogólnie:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

Wzór ten należy jeszcze sprawdzić zapomocą indukcji zupełnej, co pozostawiamy do wykończenia czytelnikowi.

4) Dla funkcji:

$$y = \sin x$$

otrzymamy bardzo prosty wzór na n -tą pochodną, zwracając uwagę na to, że:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

A więc pochodną tworzy się, dodając pod znakiem funkcji sinus do zmiennej niezależnej stałą liczbę $\frac{\pi}{2}$. Wobec tego.

$$y'' = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad y''' = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \dots$$

a ogólnie:

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

W podobny sposób otrzymuje się:

$$(\cos x)^{(n)} = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

5) Wykazać, że funkcje $\sin cx$, $\cos cx$, a ogólniej wszystkie funkcje postaci

$$y = a \sin cx + b \cos cx$$

spełniają następujące równanie różniczkowe (drugiego rzędu):

$$y'' = -c^2 y$$

Dowód:

$$y' = ac \cos cx - bc \sin cx$$

$$y'' = -ac^2 \sin cx - bc^2 \cos cx = -c^2(a \sin cx + b \cos cx)$$

czyli:

$$y'' = -c^2 y$$

Dla $a = 1$, $c = 1$, $b = 0$ otrzymujemy $y = \sin x$, a dla $a = 0$, $b = c = 1$ otrzymujemy $y = \cos x$. A więc widocznie także $\sin x$ i $\cos x$ spełniają to samo równanie różniczkowe.

Niechaj czytelnik wykaże, że funkcja $y = \arcsin x$ spełnia następujące równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$(1 - x^2)y'' = xy'$$

§ 94. Wyższe pochodne sumy i iloczynu dwóch funkcji.

Często zachodzi potrzeba obliczenia n -tej pochodnej sumy i iloczynu dwóch funkcji. Otóż co do sumy, to widocznem jest odrazu, że

$$(f(x) + g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$$

Natomiast dla iloczynu otrzymamy znacznie dłuższy, lecz łatwy do zapamiętania wzór. I tak dla:

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

jest:

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Stąd:

$$y'' = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x)$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

Postać tych wzorów przypomina wzór Newtona na potęgę dwumianu $u + v$, a różni się tylko tem, że zamiast wykładników przy u i v wy-

stępują znaczki, oznaczające rzędy pochodnych, a zamiast $u^0 = 1$ i $v^0 = 1$ występują funkcje pierwotne, niezrózniczkowane, co mogliśmy też oznaczać symbolami $u = u^{(0)}$, $v = v^{(0)}$.

Przez indukcję zupełną dowodzi się bez żadnych trudności, że ogólny wzór na n -tą pochodną iloczynu ma postać:

$$(59) \quad (u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} v'' + \dots + \binom{n}{n-1} u' v^{(n-1)} + u v^{(n)}$$

Ten wzór nazywamy wzorem Leibniza.

Przykłady.

1) Wyprowadzić wzór na n -tą pochodną funkcji:

$$y = e^x \sin x$$

Oznaczając: $e^x = u(x)$, $\sin x = v(x)$, otrzymujemy przy zastosowaniu wzoru Leibniza:

$$y^{(n)} = e^x \sin x + \binom{n}{1} e^x \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \binom{n}{2} e^x \sin \left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) + \dots + e^x \sin \left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

czyli:

$$y^{(n)} = e^x \left(\sin x + \binom{n}{1} \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \binom{n}{2} \sin \left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) + \dots + \sin \left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

Niechaj czytelnik wyprowadzi inny wzór na pochodną tej samej funkcji, przedstawiając najpierw pierwszą pochodną w postaci:

$$y' = e^x \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Z porównania dwóch końcowych wzorów wyniknie pewna ciekawa tożsamość trygonometryczna.

2) Przy użyciu wzoru Leibniza wyprowadzić wzór na wartości kolejnych pochodnych funkcji:

$$y = \arctg x$$

dla $x = 0$.

Utwórzmy najpierw:

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Bezpośrednie obliczanie kolejnych dalszych pochodnych doprowadziłoby do bardzo skomplikowanych wyrażeń. By tego uniknąć, używamy następującego sposobu. Mnożymy obie strony przez $1+x^2$ i otrzymujemy:

$$y'(1+x^2) = 1$$

Obliczamy n -tą pochodną obu stron. Do pierwszej strony stosujemy wzór Leibniza; otrzymamy:

$$y^{(n+1)}(x) \cdot (1 + x^2) + n y^{(n)}(x) \cdot 2x + \binom{n}{2} y^{(n-1)}(x) \cdot 2 = 0$$

Wzór zawiera tylko 3 dodajniki, albowiem wszystkie pochodne dwumianu $1 + x^2$, począwszy od trzeciej, są zerami.

Dla $x = 0$ wzór redukuje się do:

$$y^{(n+1)}(0) + n(n-1)y^{(n-1)}(0) = 0$$

Ponieważ $y(0) = \arctg 0 = 0$, a $y'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$, przeto możemy z otrzymanego wzoru *zwrotnego* obliczać kolejno wyższe pochodne dla $x = 0$. I tak:

$$\begin{aligned} y''(0) &= -1(1-1) \cdot y(0) = 0 \\ y'''(0) &= -2 \cdot 1 \cdot y'(0) = -2! \\ y^{(4)}(0) &= -3 \cdot 2 \cdot y''(0) = 0 \\ y^{(5)}(0) &= -4 \cdot 3 \cdot y'''(0) = -4 \cdot 3 \cdot (-2!) = 4! \\ &\dots \end{aligned}$$

Wszystkie pochodne parzystego rzędu są zerami a na pochodne nieparzystego rzędu otrzymujemy wzór:

(60)

$$y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

Nieco zawilszym rachunkiem można otrzymać na pochodną funkcji $y = \arctg x$ wzór:

$$(60a) \quad (\arctg x)^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin n \left(y + \frac{\pi}{2} \right)$$

Trzeba wyjść z wzoru:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 y$$

(por. str. 267) i tworzyć pochodne, uwzględniając, że y jest funkcją x . Z wzoru (60a) otrzyma się dla $x = 0$ a więc dla $y = 0$ wzór:

$$y^{(n)}(0) = (n-1)! \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right)$$

który jest równoważny z wzorem (60), otrzymanym poprzednio.

Niechaj czytelnik zbada w podobny sposób wartości pochodnych funkcji $y = \arctg x$ dla $x = 0$, opierając się na równaniu różniczkowym, o którym mówiliśmy w przykładzie 5) z poprzedniego paragrafu.

§ 95. Wyższe pochodne funkeyj złożonych, odwrotnych i przedstawionych parametrowo.

Wszystkie sposoby obliczania wyższych pochodnych z funkeyj złożonych, z funkeyj odwrotnych i z funkeyj, przedstawionych parametrowo, można wyprowadzić z jednej wspólnej zasady.

Widzieliśmy, że wyższe pochodne można przedstawić w postaci

$$y_x^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{lub wyraźnie} \quad y_x^{(n)} = \frac{d^n y}{d_x^n x^n}$$

jeżeli w funkeyi: $y = f(x)$ zmienna x jest *niezależną*. Wtedy bowiem

$$d_x^n y = y_x^{(n)} \cdot dx^n$$

Inaczej się ma rzecz, jeżeli x jest zmienną zależną zarówno jak i y . Tak się dzieje up., gdy $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, t. j. w przedstawieniu parametrowem; tak się dzieje także, gdy y jest funkeyą złożoną jakiejś innej zmiennej t za pośrednictwem zmiennej x , t. j. gdy $y = f(x(t))$. Wyprowadzimy wzory na różniczki wyższego rzędu w przypadku ogólnym, gdy zarówno x jak i y są zmiennymi *zależnymi* od jakiejś zmiennej *niezależnej* t . Wtedy:

$$(z) \quad \begin{array}{l|l} d_t x = x'_t dt & d_t y = y'_t dt \\ d_t^2 x = x''_t dt^2 & d_t^2 y = y''_t dt^2 \\ \dots & \dots \end{array}$$

Wiemy już, że:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{d_t y}{d_t x}$$

(por. § 80, wzór 29 a). Utwórzmy drugą pochodną względem zmiennej x , pamiętając jednak o tem, że x jest funkeyą zmiennej t . Wobec tego trzeba do funkeyi y'_x zastosować regułę łańcuchową:

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Ale

$$\frac{dy'_x}{dt} = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^2_t} \quad \text{a} \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{x'_t}$$

Wobec tego:

$$(61) \quad y''_x = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}$$

Mnożąc tu licznik i mianownik przez dt^3 , otrzymamy po uwzględnieniu równań (z) następujące wyrażenie:

$$(62) \quad y''_x = \frac{d_t x \cdot d_t^2 y - d_t y \cdot d_t^2 x}{d_t x^3}$$

Wyrażenie to jest *różne* od $\frac{d_x^2 y}{d_x x^2}$, albowiem wzór (62) możemy napisać w postaci:

$$\frac{d_x^2 y}{d_x x^2} = \frac{d_x^2 y}{d_x x^2} - \frac{d_x y}{d_x x} \cdot \frac{d_x^2 x}{d_x x^2}$$

Widzimy stąd, że dla drugiej pochodnej nie mamy już takiego prostego związku między ilorazami różniczkowymi drugiego rzędu, utworzonymi dla rozmaitych zmiennych niezależnych, jak między ilorazami różniczkowymi pierwszego rzędu we wzorze (29a) z § 80.

W podobny sposób wyprowadza się dla trzeciej pochodnej funkcji, przedstawionej parametrowo, wzór:

$$(63) \quad y_x''' = \frac{x_i'(x_i' y_i''' - x_i''' y_i') - 3x_i''(x_i' y_i'' - x_i'' y_i')}{x_i'^3}$$

a stąd otrzymuje się wzór różniczkowy:

$$(63a) \quad y_x''' = \frac{d_x x (d_x x d_x^3 y - d_x^3 x d_x y) - 3 d_x^2 x (d_x x d_x^2 y - d_x y d_x^2 x)}{d_x x^6}$$

Wzory na wyższe pochodne są bardzo zawile a rzadko używane, nie będziemy ich zatem wypisywali.

Wzory różniczkowe (62), (63a) i t. p. mają znaczenie ogólne.

1°. I tak, jeżeli x jest zmienną niezależną, to znaczy $x = t$, to $d_x x = d_x x$ jest liczbą niezależną od x (przyrost stały dla wszystkich x), a więc $(d_x x)' = 0$ zatem $d_x^2 x = (d_x x)' d_x x = 0$ i wszystkie dalsze: $d_x^3 x = 0$, $d_x^{(4)} x = 0, \dots$ Wtedy wzory (62) i (63a) przechodzą na:

$$y_x'' = \frac{d_x^2 y}{d_x x^2}, \quad y_x''' = \frac{d_x^3 y}{d_x x^3}, \dots$$

2°. Jeżeli y jest zmienną niezależną, t. j. jeżeli nam chodzi o funkcję $x = g(y)$ odwrotną względem $y = f(x)$, to kładziemy $t = y$. Wtedy $d_x y = d_y y$ jest niezależnie od y , a więc:

$$d_x^2 y = d_x^3 y = \dots = 0$$

i pozostaje:

$$y_x'' = - \frac{d_y y \cdot d_y^2 x}{d_y x^3} = - \frac{d_y y \cdot x_y'' \cdot d_y y^2}{x_y'^3 d_y y^3} = - \frac{x_y''}{x_y'^3}$$

Ponieważ zaś — jak wiemy z § 79 — jest $x_y' = \frac{1}{y_x'}$, przeto

$$(64) \quad x_y'' = - \frac{y_x''}{y_x'^3}$$

Otrzymaliśmy wzór na drugą pochodną funkcji odwrotnej, wyrażoną za pomocą pierwszej i drugiej pochodnej danej funkcji.

W podobny sposób otrzymuje się z wzoru (63a):

$$(64a) \quad x'' = \frac{3y'^2 - y''y'''}{y'^3}$$

3°. Dzieląc we wzorach (62) i (63a) licznik i mianownik przez dt^2 i dt^3 , otrzymujemy wzory (61) i (63) na wyższe pochodne funkcji, przedstawionych parametrowo.

4°. Z wzorów różniczkowych (62) i (63a) możemy także otrzymać wzory na wyższe pochodne funkcji złożonej:

$$y = F(u), \quad u = f(x)$$

W tym celu trzeba przedewszystkiem wprowadzić w te wzory, zamiast x , literę u , a zamiast t napisać x . Otrzymamy więc:

$$y'_u = \frac{d_x y}{d_x u}, \quad y''_u = \frac{d_x u d_x^2 y - d_x y d_x^2 u}{d_x u^3};$$

$$y'''_u = \frac{d_x u (d_x u d_x^3 y - d_x y d_x^3 u) - 3 d_x^2 u (d_x u d_x^2 y - d_x y d_x^2 u)}{d_x u^6}$$

Stąd otrzymujemy:

$$d_x y = y'_u d_x u$$

a więc:

$$y'_x = \frac{d_x y}{d_x x} = y'_u \cdot \frac{d_x u}{d_x x} = y'_u \cdot u'_x$$

Ten wzór wyprowadziliśmy już inną drogą

Z drugiego wzoru, zastępując w nim $d_x y$ przez $y'_u d_x u$, otrzymujemy po uproszczeniu przez $d_x u$ i po uporządkowaniu:

$$d_x^2 y = y''_u d_x u^2 + y'_u d_x^2 u$$

a więc:

$$(65) \quad y''_x = y''_u \cdot u_x'^2 + y'_u \cdot u_x''$$

Podobnie na trzecią pochodną funkcji złożonej otrzymuje się:

$$(65a) \quad y'''_x = y'''_u u_x'^3 + 3 y''_u u'_x u_x'' + y'_u u_x'''$$

Uwaga. Zarówno wzór (64) jak i (65) można oczywiście otrzymać także bezpośrednio przez obliczanie pochodnej z wzorów $x'_y = \frac{1}{y'_x}$, $y_x = y'_u u'_x$, przyczem w pierwszym wypadku należy uważać y'_x za funkcję złożoną zmiennej y za pośrednictwem zmiennej zależnej x , a w drugim y'_u za funkcję złożoną zmiennej x za pośrednictwem zmiennej zależnej u .

Wzory różniczkowe $y'_x = \frac{d_t y}{d_t x}$, wzór (62) i (63a) możemy pisać krótko bez znaczków t u dołu:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}$$

$$y''_x = \frac{dx \, d^2 y - dy \, d^2 x}{dx^2}$$

$$y'''_x = \frac{dx(dx \, d^2 y - dy \, d^2 x) - 3 \, d^2 x(dx \, d^2 y - dy \, d^2 x)}{dx^3}$$

.

W tej postaci łatwiej je zapamiętać.

Przykłady.

1) Dla elipsy danej w formie parametrowej:

$$x = a \cos t$$

$$y = b \sin t$$

obliczyć y'_x i y''_x .

Do zastosowania wzorów ogólnych potrzebne są:

$$\begin{array}{l} x'_t = -a \sin t \quad | \quad y'_t = b \cos t \\ x''_t = -a \cos t \quad | \quad y''_t = -b \sin t \end{array}$$

Otrzymujemy zatem:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{b \cos t}{a \sin t} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$y''_x = \frac{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}{-a^2 \sin^3 t} = \frac{-b}{a^2 \sin^3 t} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$$

2) Jaką postać przyjmie równanie różniczkowe:

$$y'_x \cdot y''_x - 3 y'^2_x = 0$$

gdy za zmienną niezależną będziemy uważali nie x lecz y ?

Trzeba wyrazić pochodne: y'_x , y''_x , y'''_x zapomocą pochodnych funkcji odwrotnej. Podstawiając odpowiednie wartości, otrzymujemy:

$$\frac{1}{x'_y} \cdot \frac{3x_y'^3 - x'_y x_y'''}{x_y'^5} - 3 \frac{x_y''^2}{x_y'^3} = 0$$

czyli:

$$- \frac{x_y'''}{x_y'^5} = 0$$

zatem:

$$x_y''' = 0$$

A zatem przy rozwiązywaniu danego równania będzie bardzo dogodnem wprowadzenie y jako zmiennej niezależnej.

3) Niechaj czytelnik okaże, że wprowadzając w równanie:

$$(1 - x^2)y'' - xy'_x + a^2y = 0$$

zamiast x nową zmienną niezależną t zapomocą wzoru $x = \cos t$, otrzymujemy prostsze równanie:

$$y'' + a^2y = 0$$

4) Mając podane równanie dowolnej linii w spólrzędnych biegunowych: $r = f(\varphi)$, obliczyć:

$$\rho = \frac{(1 + y_x'^2)^{3/2}}{y_x''}$$

Opieramy się na wzorach zamiany spólrzędnych biegunowych na prostokątne:

$$x = r \cos \varphi = f(\varphi) \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi = f(\varphi) \sin \varphi$$

Mamy zatem parametrowe przedstawienie zmiennej zależnej y jako funkcji zmiennej niezależnej x a parametrem jest φ .

Wobec tego tworzymy:

$$\begin{array}{l|l} x'_\varphi = f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi & x''_\varphi = f''(\varphi) \cos \varphi - 2f'(\varphi) \sin \varphi - f(\varphi) \cos \varphi \\ y'_\varphi = f'(\varphi) \sin \varphi + f(\varphi) \cos \varphi & y''_\varphi = f''(\varphi) \sin \varphi + 2f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi \end{array}$$

Stąd:

$$y'_x = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

a

$$y''_x = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3}$$

Wobec tego:

$$\rho = \frac{(r'^2 + r^2)^{3/2}}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3} \cdot \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3}$$

$$\rho = \frac{\left(\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right)^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r \frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

Niechaj czytelnik wyprowadzi wzór na ρ dla przedstawienia parametrowego:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

5) Punkt porusza się po torze l (fig. 95), którego współrzędne biegunowe są dane w formie parametrowej:

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

Obliczyć prędkości i przyspieszenia składowe w kierunku osi x i y .

Nazwijmy prędkości składowe v_x, v_y , a przyspieszenia g_x, g_y . Otóż:

$$v_x = \dot{x} = (r(t) \cos \varphi(t))' = r' \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \varphi'$$

$$v_y = \dot{y} = (r(t) \sin \varphi(t))' = r' \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \varphi'$$

Widzimy, że te prędkości składowe w kierunku osi x i y są rzutami na te osie dwóch innych prędkości, a mianowicie prędkości $v_r = r'(t)$ w kierunku promienia i prędkości

(linowej) $v_\varphi = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ w kierunku

prostopadłym do promienia. Ponieważ $\frac{d\varphi}{dt}$ nazywamy prędkością

kątową: ω , przeto tę drugą prędkość możemy przedstawić w postaci: $r\omega$. Ten rozkład prędkości możemy tak interpretować: najpierw rozłożyliśmy prędkość wzdłuż toru l na

dwie składowe, na prędkość w kierunku promienia i prędkość w kierunku prostopadłym do promienia, a potem każdą z tych prędkości z osobna rozłożyliśmy na składowe w kierunku osi x i y i dodaliśmy do siebie odpowiednie składowe wzdłuż osi x i wzdłuż osi y . Podobne wyniki otrzymamy dla przyspieszeń. Wiemy, że przyspieszenie jest pochodną prędkości, czyli drugą pochodną drogi.

Zatem:

$$g_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = r'' \cos \varphi - r' \sin \varphi \cdot \varphi' - r' \sin \varphi \cdot \varphi' - r \cos \varphi \cdot \varphi'^2 - r \sin \varphi \cdot \varphi''$$

$$g_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = r'' \sin \varphi + r' \cos \varphi \cdot \varphi' + r' \cos \varphi \cdot \varphi' - r \sin \varphi \cdot \varphi'^2 + r \cos \varphi \cdot \varphi''$$

czyli:

$$g_x = (r'' - r\varphi'^2) \cos \varphi - (2r'\varphi' + r\varphi'') \sin \varphi$$

$$g_y = (r'' - r\varphi'^2) \sin \varphi + (2r'\varphi' + r\varphi'') \cos \varphi$$

Stąd widzimy, że te przyspieszenia w kierunku osi x i y są rzutami na te osie dwóch innych przyspieszeń, a mianowicie przyspieszenia $g_r = r'' - r\varphi'^2$ w kierunku promienia i przyspieszenia $g_\varphi = 2r'\varphi' + r\varphi''$ w kierunku prostopadłym do promienia. To drugie przyspieszenie można także przedstawić w postaci:

$$g_\varphi = \frac{1}{r} (r^2 \varphi')'$$

§ 96. Wzór Maclaurina dla wielomianu.

Miedzy współczynnikami wielomianu:

$$(w) \quad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

a wartościami jego kolejnych pochodnych dla $x=0$ istnieje bardzo bliski związek. Aby wykryć ten związek, obliczmy kolejne pochodne:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \dots + n \cdot a_n x^{n-1} \\ f''(x) &= 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + 3 \cdot 4 a_4 x^2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} \\ f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4 x + \dots + (n-2)(n-1) n a_n x^{n-3} \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n a_n \end{aligned}$$

Wszystkie dalsze pochodne są równe zeru.

Dla $x=0$ wielomian i jego kolejne pochodne przyjmują zatem następujące wartości:

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = 1! a_1, \quad f''(0) = 2! a_2, \quad f'''(0) = 3! a_3, \dots, \quad f^{(n)}(0) = n! a_n$$

Stąd otrzymujemy następujące wyrażenia współczynników wielomianu:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

zapomocą wartości, jakie przyjmują wielomian i jego kolejne pochodne dla jednej szczegółowej wartości: $x=0$.

Podstawiając te wyrażenia w wielomian (w), otrzymujemy:

$$(66) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Jest to wzór Maclaurina dla wielomianów; później poznamy podobny wzór ogólniejszy dla wszystkich funkcji różniczkowalnych n -krotnie.

Wzór ten jest bardzo interesujący przez to, że znając wartości wielomianu i jego pochodnych w *jednym* tylko punkcie, możemy zapomocą tego wzoru skonstruować przebieg tej funkcji dla *wszystkich* punktów, możemy bowiem wyznaczyć dokładnie cały wielomian i obliczać następnie jego wartości dla każdego dowolnego punktu.

Cheemy np. znaleźć wielomian 3-go stopnia, któryby dla punktu $x=0$ przyjmował wraz z swemi pochodnymi następujące wartości:

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = -5, \quad f''(0) = 4, \quad f'''(0) = 3$$

Podstawiając te wartości we wzór Maclaurina, otrzymujemy:

$$f(x) = 2 + \frac{-5}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3$$

czyli:

$$f(x) = 2 - 5x + 2x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

a więc wielomian jest już teraz znany dla wszystkich wartości x .

§ 97. Wzór Taylora dla wielomianu.

Zamiast wartości $x = 0$ można także użyć dowolnej innej wartości: $x = a$ i przedstawić wielomian w takiej postaci, że zamiast $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$..., wystąpią: $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$...

W tym celu przekształcamy wzór (66) w następujący sposób.

Zamiast x piszemy $a + x - a$, to:

$$f(x) = f(a + x - a) = g(x - a)$$

gdzie funkcja $g(x - a)$ jest również wielomianem n -tego stopnia w zmiennej $z = x - a$. Stosując do tego wielomianu wzór Maclaurina, otrzymujemy:

$$f(x) = g(x - a) = g(z) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}z + \frac{g''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

Gdy $z = 0$, to $x = a$, zatem z $g(z) = f(x)$ otrzymujemy $g(0) = f(a)$. Ponieważ zaś: $f'_x(x) = g'_{z=a}(x - a) \cdot 1 = g'_z(z)$ i ogólnie: $f^{(n)}_x(x) = g^{(n)}_z(z)$, przeto:

$$g'(0) = f'(a), g''(0) = f''(a), \dots, g^{(n)}(0) = f^{(n)}(a)$$

Podstawiając te wszystkie wartości oraz $z = x - a$ w poprzednim wzorze, otrzymujemy ostatecznie:

$$(67) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Jest to wzór Taylora dla wielomianów; później poznamy podobny ogólniejszy wzór Taylora, odnoszący się do wszystkich funkcji różniczkowalnych n -krotnie.

Przy pomocy wzoru Taylora możemy zbudować wielomian, mając podane wartości tego wielomianu i jego kolejnych pochodnych w *jednym* tylko punkcie: $x = a$. Chcemy np. znaleźć wielomian, który dla $x = 5$ ma wartość 0, a którego pochodne mają w tym punkcie wartości:

$f'(5) = 4$, $f''(5) = -7$, $f'''(5) = 1$, $f^{(4)}(5) = 30$, dalsze zaś pochodne są zerami. Z wzoru Taylora otrzymujemy odrazu:

$$f(x) = 4(x-5) - \frac{7}{2}(x-5)^2 + \frac{1}{6}(x-5)^3 + \frac{30}{24}(x-5)^4$$

Wzoru Taylora można używać do tego, by uporządkować dany wielomian według potęg $x - a$ przy dowolnem a .

Tak np. chcemy uporządkować wielomian:

$$y(x) = 4 + x - 3x^2 + 5x^3 + 7x^4$$

według potęg $x - 2$. W tym celu tworzymy cztery kolejne pochodne i podstawiamy $x = 2$. Po wykonaniu łatwych rachunków otrzymuje się:

$$y(2) = 146, y'(2) = 273, y''(2) = 390, y'''(2) = 366, y^{(4)}(2) = 168$$

Podstawiamy te wartości we wzór Taylora i otrzymujemy.

$$y(x) = 146 + 273(x-2) + 195(x-2)^2 + 61(x-2)^3 + 7(x-2)^4$$

Jest to ten sam wielomian, który był dany, tylko teraz jest on uporządkowany według potęg $x - 2$. Takie przedstawienie jest dogodne wtedy, gdy chcemy badać dany wielomian w otoczeniu punktu $x = 2$.

Wzory Taylora i Maclaurina są ze sobą równoważne, albowiem z wzoru Maclaurina otrzymaliśmy wzór Taylora i odwrotnie z wzoru Taylora otrzymuje się wzór Maclaurina, kładąc $a = 0$.

§ 98. Zastosowanie wyższych pochodnych do algebry.

Widzieliśmy w § 22, że jeżeli $x = a$ jest pierwiastkiem wielomianu: $w(x)$, to ten wielomian można przedstawić w postaci iloczynu:

$$w(x) = (x - a)f(x)$$

przyczem $f(x)$ jest również wielomianem (stopnia o 1 niższego). Odwrotnie, jeżeli wielomian da się przedstawić w takiej postaci, to oczywiście dla $x = a$ staje się $w(x)$ równym zeru, a więc $x = a$ jest wtedy pierwiastkiem równania algebraicznego $w(x) = 0$.

Jeżeli wielomian da się przedstawić w postaci:

$$w(x) = (x - a)^r f(x)$$

gdzie r jest liczbą całkowitą dodatnią a $f(x)$ jest wielomianem, który nie staje się zerem dla $x = a$, to liczbę a nazywamy r -krotnym pierwiastkiem równania $w(x)$.

Jeżeli a jest r -krotnym pierwiastkiem równania algebraicznego $w(x) = 0$, to dla $x = a$ nie tylko $w(x)$, lecz także pochodne $w'(x)$, $w''(x) \dots w^{(r-1)}(x)$, są równe zeru, a $w^{(r)}(x)$ jest różne od zera.

Dowód.

$$w'(x) = r(x-a)^{r-1}f(x) + (x-a)^r f'(x)$$

$$w'(x) = (x-a)^{r-1}(rf(x) + (x-a)f'(x))$$

Stąd widzimy, że dla $x=a$ jest $w'(a)=0$, gdy tylko $r > 1$.

Postępując w podobny sposób dalej, spostrzemy, że także $w''(a)=0$, $w'''(a)=0 \dots w^{(r-1)}(a)=0$. Dla r -tej pochodnej otrzymamy (stosując np. wzór Leibniza):

$$w^{(r)}(x) = r!f(x) + r(r-1)(r-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot f'(x)(x-a) + \\ + r(r-1)(r-2)\dots 4 \cdot 3(x-a)^2 f''(x) + \dots$$

Wszystkie wyrazy prócz pierwszego zawierają czynnik $x-a$, a więc:

$$w^{(r)}(a) = r!f(a)$$

Według założenia a nie jest pierwiastkiem wielomianu $f(x)$, zatem $f(a) \neq 0$, a więc i $w^{(r)}(a) \neq 0$.

Prawdziwem jest także twierdzenie odwrotne, a mianowicie: jeżeli dla $x=a$ jest $w(a)=0$, $w'(a)=0$, $w''(a)=0 \dots w^{(r-1)}(a)=0$ ale $w^{(r)}(a) \neq 0$, to a jest r -krotnym pierwiastkiem wielomianu $w(x)$.

Dowód. Rozwińmy dany wielomian według wzoru Taylora dla $x=a$, to:

$$w(x) = w(a) + \frac{w'(a)}{1!}(x-a) + \frac{w''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \\ + \frac{w^{(r-1)}(a)}{(r-1)!}(x-a)^{r-1} + \frac{w^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r + \dots + \frac{w^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Według założenia początkowe współczynniki, aż do $w^{(r-1)}(a)$ włącznie, są zerami, zatem:

$$w(x) = \frac{w^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r + \dots + \frac{w^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Z wszystkich wyrażeń da się wyłączyć czynnik $(x-a)^r$ przed nawias, zatem:

$$w(x) = (x-a)^r \left[\frac{w^{(r)}(a)}{r!} + \frac{w^{(r+1)}(a)}{(r+1)!}(x-a) + \dots + \frac{w^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-r} \right]$$

Nazwijmy wielomian, zawarty w klamrach, $f(x)$, to:

$$w(x) = (x-a)^r f(x)$$

przyczem $f(a) \neq 0$, albowiem $f(a) = \frac{w^{(r)}(a)}{r!}$ a według założenia jest $w^{(r)}(a) \neq 0$. To zaś dowodzi, że a jest r -krotnym pierwiastkiem równania $w(x)=0$.

Wszystkie pierwiastki wielokrotne równania algebraicznego $w(x)=0$ są zatem także pierwiastkami pierwszej pochodnej: $w'(x)$ i odwrotnie: wspólne pierwiastki funkcji $w(x)$ i $w'(x)$ są pierwiastkami wielokrotnymi równania $w(x)=0$. Jeżeli zatem funkcje $w(x)$ i $w'(x)$ posiadają wspólne czynniki kształtu $x-a$, to liczby $x=a$ są pierwiastkami wielokrotnymi. Opierając się na tem, możemy niejednokrotnie wykryć wielokrotne pierwiastki równania, a czasem nawet rozwiązać zupełnie równanie wyższego stopnia. W tym celu trzeba znaleźć największy wspólny dzielnik wielomianu i jego pochodnej.

Przykład. Zbadać, czy równanie

$$w(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20 = 0$$

posiada wielokrotne pierwiastki.

Tworzymy pochodną

$$w'(x) = 3x^2 + 2x - 16$$

i szukamy największego wspólnego dzielnika wielomianów $w(x)$ i $w'(x)$.

W tym celu wykonujemy następujący łańcuch dzielen (metodą Euklidesa)

$$\begin{array}{r} (x^3 + x^2 - 16x + 20) : (3x^2 + 2x - 16) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ -x^3 \pm \frac{2}{3}x^2 \mp \frac{16}{3}x \\ \hline +\frac{1}{3}x^2 - \frac{22}{3}x + 20 \\ \pm \frac{1}{3}x^2 \pm \frac{2}{3}x \mp \frac{16}{3} \\ \hline -\frac{22}{3}x + \frac{106}{3} = -\frac{22}{3}(x-2) \end{array}$$

Dzielnik dzielimy przez resztę, to znaczy

$$\begin{array}{r} (3x^2 + 2x - 16) : -\frac{22}{3}(x-2) = -\frac{9}{22}[(3x^2 + 2x - 16) : (x-2)] = -\frac{9}{22}[3x+8] \\ -3x^2 \mp 6x \\ \hline +8x - 16 \\ \pm 8x \mp 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ponieważ dzielenie skończyło się bez reszty, przeto wielomiany $w(x)$ i $w'(x)$ posiadają wspólny dzielnik różny od liczby stałej, a mianowicie tym wspólnym dzielnikiem jest ostatni dzielnik: $-\frac{22}{3}(x-2)$.

Przyrównując ten ostatni dzielnik do zera, otrzymujemy: $x=2$.

Zatem jedynym pierwiastkiem wielokrotnym równania $w(x)=0$ jest $x=2$.

Wiedząc o tem, możemy znaleźć zupełne rozwiązanie danego równania trzeciego stopnia. Lewa strona tego równania musi być podzielna conajmniej przez $(x-2)^2$, czyli przez $(x^2 - 4x + 4)$

Wykonujemy dzielenie:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + x^2 - 16x + 20) : (x^2 - 4x + 4) = x + 5 \\
 \underline{-(x^3 + 4x^2 + 4x)} \\
 + 5x^2 - 20x + 20 \\
 \underline{-(5x^2 + 20x + 20)} \\
 0
 \end{array}$$

Możemy więc przedstawić dane równanie w postaci:

$$x^3 + x^2 - 16x + 20 = (x - 2)^2 \cdot (x + 5) = 0$$

a stąd widzimy, że to równanie posiada następujące pierwiastki:

$$x_1 = x_2 = 2, \quad x_3 = -5$$

ROZDZIAŁ IX.

Twierdzenia o wartości średniej.

§ 99. Twierdzenie Rollego o wartości średniej.

W poprzednich rozdziałach poznaliśmy całą rachunkową, czyli algorytmiczną stronę rachunku różniczkowego w zakresie funkcji jednej zmiennej. Obecnie zajmiemy się pewnymi ogólnymi twierdzeniami o pochodnych, stanowiącymi podstawę wszelkich głębszych rozumowań i badań, opartych na rachunku różniczkowym.

Pierwszem takim twierdzeniem jest następujące twierdzenie Rollego o wartości średniej.

Jeżeli funkcja różniczkowalna wewnątrz jakiegoś przedziału, a ciągła (choćby jednostronnie) na jego końcach, ma wartość zero na końcach tego przedziału, to wewnątrz tego przedziału istnieje przynajmniej jeden taki punkt, dla którego pochodna tej funkcji ma wartość zero; krótko mówiąc: między dwoma pierwiastkami takiej funkcji musi leżeć przynajmniej jeden pierwiastek pochodnej.

Jeżeli więc $f(a) = 0$ i $f(b) = 0$, to istnieje przynajmniej jedna taka pośrednia wartość $x = c$, że także $f'(c) = 0$ i stąd pochodzi nazwa: „twierdzenie o wartości średniej”.

Geometrycznie można to twierdzenie wypowiedzieć w następujący sposób: jeśli krzywa o równaniu $y = f(x)$, różniczkowalna w (a, b) , a ciągła na końcach przedziału, przecina oś x -ów w dwóch punktach $x = a$ i $x = b$, to pomiędzy temi punktami musi istnieć przynajmniej jeden punkt $x = c$ taki, w którym styczna jest równoległa do osi x -ów (por. fig. 96).

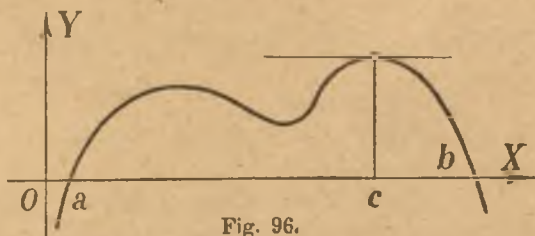


Fig. 96.

Funkcja $f(x)$ jest oczywiście ciągła w całym przedziale zamkniętym $\langle a, b \rangle$. Dowód twierdzenia o wartości średniej polega na tej własności

funkcji ciągłej w przedziale zamkniętym, że taka funkcja posiada w tym przedziale wartość największą M i najmniejszą m (por § 58).

1°. Jeżeli $M = 0$ i $m = 0$, to funkcja ma w całym przedziale stałą wartość: 0, zatem pochodna $f'(x) = 0$ dla *każdej* wartości x , a więc twierdzenie Rollego jest dla takiej funkcji prawdziwe (za c można obrać każdy dowolny punkt między a i b).

2°. Jeżeli M jest różne od zera, to obierzmy za c tę wartość, dla której funkcja przyjmuje tę wartość największą, t. j. dla której $f(c) = M$.

Ponieważ $M \neq 0$, przeto c nie pokrywa się ani z a ani z b , lecz leży między a i b . Jeżeli się posuniemy od tego punktu na prawo lub na lewo o odcinek długości $\delta > 0$, pozostając jednak wewnątrz przedziału $\langle a, b \rangle$, to wartość funkcji nie zwiększy się, a więc

$$f(c + \delta) - f(c) \leq 0$$

$$f(c - \delta) - f(c) \leq 0$$

Utwórzmy ilorazy różnicowe, dzieląc te nierówności przez $+\delta$ i przez $-\delta$; otrzymamy:

$$\frac{f(c + \delta) - f(c)}{\delta} \leq 0$$

$$\frac{f(c - \delta) - f(c)}{-\delta} \geq 0$$

Gdy δ dąży do zera, to pierwsze wyrażenie, jako stale niedodatnie, dąży do granicy ujemnej lub co najwyżej do zera, a więc prawostronna pochodna:

$$f'_+(c) \leq 0$$

Drugie wyrażenie, które jest stale nieujemne, ma granicę

$$f'_-(c) \geq 0$$

Według założenia, w każdym wewnętrznym punkcie przedziału $\langle a, b \rangle$ istnieje jedna ściśle oznaczona wartość (dwustronnej) pochodnej, a więc.

$$f'_+(c) = f'_-(c) = f'(c)$$

To zaś jest możliwe tylko wtedy, gdy $f'_+(c) = 0$ i $f'_-(c) = 0$, czyli

$$f'(c) = 0$$

A więc istnieje taka pośrednia wartość $x = c$, dla której pochodna przyjmuje wartość zero.

3°. Jeżeli $M = 0$ ale $m \neq 0$, to oznaczając teraz literą c ten punkt, dla którego funkcja przybiera wartość m , otrzymujemy przy pomocy podobnego rozumowania jak w poprzednim przypadku, że:

$$f'(c) = 0$$

Gdyby funkcja była nieciągła choćby tylko w jednym punkcie, np. na końcu przedziału, jak na fig. 97, to twierdzenie Rollego mogłoby się nie spełniać. Widzimy istotnie, że niema stycznej równoległej do osi x -ów, chociaż $f(a) = 0$ i $f(b) = 0$. Tak samo nie można pominąć w zało-

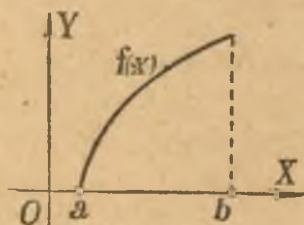


Fig. 97.

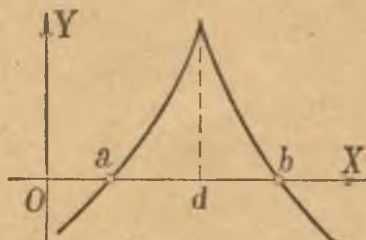


Fig. 98.

żeniu różniczkowalności funkcji wewnątrz przedziału. Tak np. na fig. 98 mamy przedstawioną funkcję ciągłą w całym przedziale zamkniętym $\langle a, b \rangle$ i różniczkowalną wszędzie, z wyjątkiem jednego punktu $x = d$. Twierdzenie Rollego nie spełnia się dla tej funkcji: nie istnieje tu styczna równoległa do osi x -ów.

§ 100. Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

Twierdzenie Rollego uogólniono w następujący sposób. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) a na końcach tego przedziału ciągła (choćby jednostronnie) i przyjmuje na końcach tego przedziału dowolne wartości: $f(a)$ i $f(b)$ (a więc niekoniecznie wartości 0,

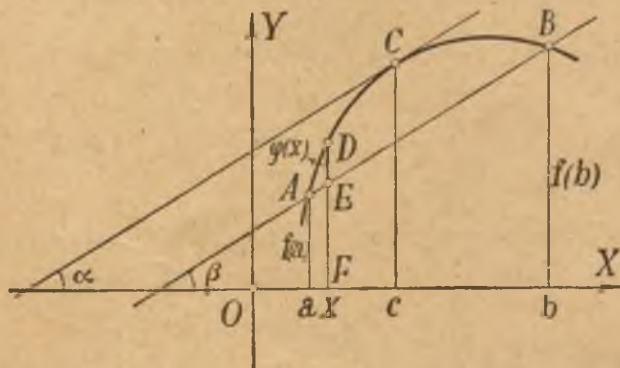


Fig. 99.

jak w twierdzeniu Rollego), to istnieje taka wartość c , pośrednia między a i b , dla której pochodna jest równa ilorazowi różnicowemu: $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. W geometrycznej interpretacji znaczy to, że w jakimś punkcie C , pośrednim między A i B (por. fig. 99), istnieje styczna równoległa do siecznej AB !

Wtedy bowiem istotnie spadek stycznej w punkcie $x = c$, t. j.:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(c)$$

jest równy spadkowi siecznej:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Z tej figury widać, że to twierdzenie jest w bezpośrednim związku z twierdzeniem Rollego; jeżeli bowiem obrócimy osie o kąt α i przesuniemy je odpowiednio, to otrzymamy figurę, odpowiadającą twierdzeniu Rollego.

Dowód twierdzenia Lagrange'a. Weźmy pod uwagę różnicę ED pomiędzy rzędną FD linii krzywej a rzędną FE siecznej AB i nazwijmy tę różnicę $\varphi(x)$. Rzędna krzywej ma wartość $y_k = f(x)$, a rzędną y , siecznej otrzymujemy z równania siecznej:

$$y_s - f(a) = \frac{x - a}{b - a} (f(b) - f(a))$$

A więc:

$$\varphi(x) = y_k - y_s = f(x) - f(a) - \frac{x - a}{b - a} (f(b) - f(a))$$

Widocznem jest chociażby z figury, że ta pomocnicza funkcja $\varphi(x)$ staje się równa 0 na końcach przedziału, jest zaś ciągła i różniczkowalna dla tych samych wartości x , co funkcja $f(x)$, a więc spełnia założenia twierdzenia Rollego. Wobec tego istnieje taka wartość c , leżąca między a i b , dla której pochodna funkcji pomocniczej $\varphi(x)$ ma wartość 0, t. j.:

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

czyli:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

c. b. d. o.

To twierdzenie podaje związek między skończonym przyrostem funkcji a pochodną, albowiem z ostatniego wzoru wynika:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Oznaczmy a literą x , a $b - a$ czyli $b - x$ literą h , to $b = x + h$ i wzór Lagrange'a przyjmuje postać:

$$f(x + h) - f(x) = hf'(c)$$

Wartość c , leżącą między x i $x + h$, możemy przedstawić w postaci:

$$c = x + \vartheta h$$

przyczem ϑ jest dodatnim ułamkiem właściwym, t. j. $0 < \vartheta < 1$.

Używając tych oznaczeń, piszemy twierdzenie o wartości średniej w postaci:

$$(68) \quad \boxed{f(x+h) - f(x) = hf'(x+\vartheta h)} \quad \text{przyczem} \quad \boxed{0 < \vartheta < 1}$$

W tej postaci bywa to twierdzenie najczęściej używane. Oprócz nazwy: „twierdzenie o wartości średniej” używa się też nazwy „twierdzenie o przyroście skończonym”. Mieści ono w sobie jako przypadek specjalny twierdzenie Rollego, a mianowicie, gdy $f(x)=0$ i $f(x+h)=0$. Przedstawienie przyrostu funkcji zapomocą wzoru (68) jest w wielu przypadkach dogodniejsze, aniżeli przedstawienie przy pomocy wzoru (B) z § 68.

Wartość ułamka ϑ zależy w ogólności od x i od h , co można zaznaczyć, pisząc $\vartheta(x, h)$.

Tak np. stosując twierdzenie o wartości średniej do funkcji $y = \log x$, otrzymujemy:

$$\log(x+h) - \log x = h \cdot \frac{1}{x+\vartheta h}$$

a stąd:

$$(a) \quad \vartheta = \frac{1}{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)} - \frac{x}{h} = \varphi(x, h)$$

Dla niektórych funkcji jest jednak ϑ funkcją tylko samego h . Np. dla $y = e^x$ otrzymujemy:

$$e^{x+h} - e^x = h e^{x+\vartheta h}$$

a stąd:

$$\frac{e^h - 1}{h} = e^{\vartheta h}$$

a więc:

$$(b) \quad \vartheta = \frac{1}{h} \log \frac{e^h - 1}{h} = \varphi(h)$$

Dla paraboli zaś: $y = ax^2 + bx + c$ jest ϑ liczbą stałą, a mianowicie:

$$a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) = h[2a(x+\vartheta h) + b]$$

a stąd:

$$(c) \quad \vartheta = \frac{1}{2}$$

Tę własność paraboli, bardzo ważną przy rozmaitych konstrukcjach, można wypowiedzieć w następujący sposób: styczna równoległa do dowolnej cięciwy paraboli styka się z nią w punkcie, którego odcięta jest średnią arytmetyczną odciętych końcowych punktów tej cięciwy (korzystaliśmy z tego np. przy konstrukcji wykresu pochodnej w § 65: uważaliśmy wiadośnie łuk krzywej w przybliżeniu za parabolę).

§ 101. Wnioski z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

Wyprowadzimy kilka bezpośrednich wniosków z twierdzenia (Lagrange'a) o wartości średniej.

1. Widzieliśmy (w § 71), że funkcja, która dla każdej wartości x ma stałą wartość: $y = c$, ma pochodną: $y' = 0$ dla każdego x . Bardzo ważnem jest odwrócenie tego twierdzenia, a mianowicie: *jeżeli pochodna jakiejś funkcji jest stale zerem dla wszystkich x , to ta funkcja ma stałą wartość: $y = c$ dla dowolnego x .*

Dowód. Zbadajmy przyrost tej funkcji przy pomocy twierdzenia o wartości średniej (wzór 68).

Ponieważ według założenia jest stale $f' = 0$, przeto:

$$f(x + h) - f(x) = h \cdot 0$$

a więc:

$$f(x + h) = f(x)$$

To zaś znaczy, że $f(x)$ ma stałą wartość dla wszystkich x .

2. Z tego twierdzenia wynika prawdziwość następującego twierdzenia: *jeżeli dwie funkcje mają równe pochodne dla wszystkich wartości x , to te funkcje mogą się różnić conajwyżej o stałą liczbę.*

Dowód. Jeżeli:

$$f'(x) = g'(x)$$

to:

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0$$

Według poprzedniego twierdzenia jest więc:

$$f(x) - g(x) = c$$

To twierdzenie ma wielką doniosłość przy szukaniu funkcji pierwotnej do danej funkcji pochodnej. Jeżeli znajdziemy w jakikolwiek sposób do funkcji $f(x)$ jedną funkcję pierwotną: $F(x)$, to wszystkie inne funkcje pierwotne, należące do $f(x)$, mogą się różnić od $F(x)$ tylko o stałą liczbę. A zatem najogólniejszą formą funkcji pierwotnej jest wtedy $F(x) + C$. Ten wzór przedstawia całą gromadę funkcyj pierwotnych, wszystkie jednak można otrzymać z jednej z nich przez przesunięcia w kierunku osi y o C .

3. Omówiliśmy już przypadek, gdy pochodna jest stale zerem dla wszystkich x . Zajmijmy się teraz przypadkiem, gdy pochodna jest stale dodatnia w całym przedziale $\langle a, b \rangle$. Weźmy pod uwagę dwa dowolne punkty x i $x + h$ wewnątrz tego przedziału i zastosujmy do nich wzór (68). Ponieważ $f' > 0$, przeto dla dodatnich h jest $f(x + h) - f(x) > 0$ czyli $f(x + h) > f(x)$, a dla ujemnych h jest $f(x + h) < f(x)$, a to znaczy, że funkcja stale rośnie w całym przedziale $\langle a, b \rangle$.

4. Podobnie wnioskujemy, że, gdy pochodna jest w jakimś przedziale stale ujemna, to funkcja maleje w całym tym przedziale.

5. Jeżeli $f'(x) \geq 0$ w całym przedziale, to $f(x)$ jest funkcją niemalejącą w tym przedziale, a jeżeli $f'(x) \leq 0$, to $f(x)$ jest funkcją nierosnącą.

6. Jeżeli pochodna jest w jakimś punkcie $x=a$ dodatnia, to mówimy, że funkcja jest w tym punkcie rosnąca. Wtedy można znaleźć takie otoczenie tego punktu, że przyrost $f(a+h) - f(a)$ ma ten sam znak, co przyrost h zmiennej niezależnej. Jeżeli bowiem granica funkcji $F(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ dla $h \rightarrow 0$, t. j. $f'(a)$ jest liczbą dodatnią, to istnieje

taki przedział, otaczający punkt $h=0$, dla którego $F(h)$ jest liczbą dodatnią (por. § 43, przykład 4). Wtedy zaś licznik i mianownik tej funkcji mają jednakowe znaki.

7. Jeżeli w jakimś punkcie $x=a$ pochodna $f'(a)$ ma wartość ujemną, to funkcję nazywamy malejącą w tym punkcie. Wtedy istnieje takie otoczenie punktu a , w którym przyrost funkcji ma znak przeciwny aniżeli przyrost h zmiennej niezależnej. Geometrycznie charakteryzują się te punkty, w których funkcja wzrasta, tem, że linja wznosi się a styczna tworzy z osią x -ów kąt ostry, albowiem z $f'(a) > 0$ wynika $\operatorname{tg} \alpha > 0$, a więc $0 < \alpha < 90^\circ$. W punktach zaś, w których funkcja maleje, linja opada, czyli styczna tworzy z osią x -ów kąt rozwarty; albowiem z $f'(a) < 0$ wynika $\operatorname{tg} \alpha < 0$, a więc: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

8. Przypadkiem $f'(a) = 0$ zajmijmy się osobno w rozdziale XIII, poświęconym badaniu maximów i minimów.

§ 102. Twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej.

Jeszcze ogólniejszem twierdzeniem tego typu jest następujące twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej, odnoszące się do dwóch funkcyj $f(x)$ i $g(x)$. Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne w przedziale otwartym (a, b) , a ciągle na końcach tego przedziału, jeżeli ponadto $f'(x)$ i $g'(x)$ nie stają się w tym przedziale równocześnie zerami a $g(b) \neq g(a)$, to istnieje taka liczba c między a i b , że:

(69)

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Dowód. Wprowadzamy następującą funkcję pomocniczą:

$$\varphi(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a)) - [f(a)g(b) - f(b)g(a)]$$

Ta funkcja jest ciągła w $\langle a, b \rangle$ i różniczkowalna w (a, b) , tak samo jak $f(x)$ i $g(x)$. W końcowych punktach przedziału jest:

$$\varphi(a) = 0 \quad \text{ i } \quad \varphi(b) = 0$$

jak łatwo sprawdzić przez podstawienie wartości $x=a$ lub $x=b$ we wzór, określający tę funkcję. Założenia twierdzenia Rollego są więc spełnione dla tej funkcji pomocniczej, zatem istnieje taka liczba c , zawarta między a i b , dla której $\varphi'(c) = 0$, czyli:

$$\varphi'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$$

Tutaj $g(b) - g(a)$ jest różne od zera. Nie może być również $g'(c) = 0$, albowiem wtedy byłoby i $f'(c) = 0$, wbrew założeniu. Można więc podzielić obie strony przez $g(b) - g(a)$ i przez $g'(c)$ i otrzymamy wzór Cauchy'ego:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ten wzór można napisać także w postaci:

(69_a)

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{g(x+h) - g(x)} = \frac{f'(x+\vartheta h)}{g'(x+\vartheta h)}$$

$$0 < \vartheta < 1$$

przyczem ϑ ma tę samą wartość w liczniku i w mianowniku.

Uwaga. Kładąc $g(x) = x$, otrzymujemy z twierdzenia Cauchy'ego twierdzenie Lagrange'a. Natomiast twierdzenie Cauchy'ego nie wynika z twierdzenia Lagrange'a.

ROZDZIAŁ X.

Pochodne i różniczki funkcji dwóch i więcej zmiennych.

§ 103. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

Jeżeli w funkcji dwóch zmiennych:

$$z = f(x, y)$$

zmienia się tylko jedna zmienna, np. x , a druga: y zachowuje jakąś wartość stałą, to możemy obliczyć pochodną według zmiennej x , używając zwyczajnej definicji pochodnej. W tym celu trzeba utworzyć iloraz różnicowy:

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

i zbadać jego granicę, gdy Δx dąży do zera. O ile ta granica istnieje przy danym y , to nazywamy ją *pochodną cząstkową* funkcji $z = f(x, y)$ według zmiennej x w miejscu y . Dla odróżnienia od zwyczajnej pochodnej funkcji jednej zmiennej oznaczamy ją symbolem: $\frac{\partial z}{\partial x}$ a nie $\frac{dz}{dx}$ (litera ∂ jest tu stylizowaną łacińską literą d , a nie delta: δ , ani teta: ϑ !) i czytamy: „ dz cząstkowo względem dx ”. Używa się też często skróconego sposobu pisania z_x lub f_x . A więc:

$$(70) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = f_x = f_x(x, y)$$

Podobnie określamy cząstkową pochodną funkcji $z = f(x, y)$ według zmiennej y wzorem:

$$(71) \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = f_y = f_y(x, y)$$

Tutaj znowu obieramy za x jakąkolwiek wartość stałą, a zmienia się tylko y .

Te cząstkowe pochodne można też interpretować w bardzo prosty sposób geometrycznie. Obrazem geometrycznym funkcji $z = f(x, y)$ jest jakaś powierzchnia krzywa, wznosząca się nad jakimś obszarem, leżącym na płaszczyźnie XY , np. nad prostokątem na fig. 100. Chcemy znaleźć geometryczne znaczenie pochodnych cząstkowych w punkcie P , który odpowiada wartościom x, y zmiennych niezależnych.

Najpierw ustalamy y , t. j. wyznaczamy przekrój tej powierzchni za pomocą płaszczyzny równoległej do XZ w odstępie $BA = y$. Przekrojem jest linia $N'K'$. Przy zmianie x punkt P przebiega tę linię, a jej spadek w punkcie P jest równy pochodnej cząstkowej funkcji $z = f(x, y)$ według zmiennej x . A więc

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$$

przyczem α jest kątem nachylenia stycznej linii przekroju: $N'K'$ w punkcie P do płaszczyzny poziomej. Podobnie pochodna cząstkowa według zmiennej y daje spadek stycznej do linii $M'L'$ w punkcie P , przyczem $M'L'$

jest przekrojem danej powierzchni za pomocą płaszczyzny równoległej do YZ w odstępie x . A więc:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$$

Pochodna cząstkowa z_x charakteryzuje więc zmienność funkcji w kierunku osi x -ów a pochodna z_y w kierunku osi y -ów.

Obliczanie pochodnych cząstkowych odbywa się według tych samych reguł, co dla funkcji jednej zmiennej, a drugą zmienną uważa się przytem za liczbę stałą, tak jak np. jakieś stałe $a, b, c, \dots$ przy różniczkowaniu funkcji jednej zmiennej.

Przykłady.

1) Funkcja: $z = 2x + 3y - 5$ ma pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3$$

2) Dla $z = x^2 + y^2$ pochodnymi cząstkowymi są: $z_x = 2x$, $z_y = 2y$.

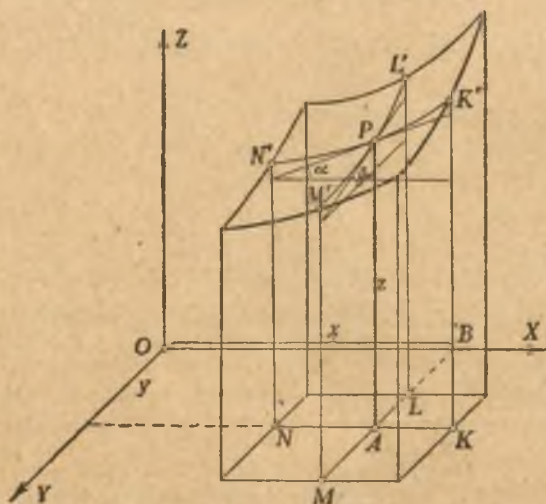


Fig. 100.

3) Dla $z = e^x \sin(x + y)$ pochodnemi cząstkowemi są:

$$z_x = e^x \sin(x + y) + e^x \cos(x + y), \quad z_y = e^x \cos(x + y)$$

4) Dla $z = y^2$ jest $z_y = 2y$ a $z_x = 0$, ponieważ ta funkcja nie zależy wcale zmiennej x .

5) Podobnie dla:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2}$$

jest

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

natomiast

$$z_y = 0$$

Ogólnie: jeżeli w wyrażeniu funkcji zapomocą wzoru nie występuje jakaś zmienna, to pochodna według tej zmiennej jest zerem.

Wynika to łatwo także z geometrycznego przedstawienia takich funkcji. Funkcja bowiem:

$$z = f(x)$$

ma w przestrzeni trójwymiarowej jako obraz geometryczny nie linię, lecz powierzchnię, a mianowicie powierzchnię walcową o tworzących równoległych do osi y -ów; jej przekrój płaszczyzną ZX jest linią o równaniach $z = f(x)$, $y = 0$ (por. str. 46). Otóż przekrój tej powierzchni walcowej jakąkolwiek płaszczyzną o stałym x , t. j. płaszczyzną równoległą do płaszczyzny bocznej YZ , jest prostą tworzącą, a więc równoległą do osi y -ów. Wobec tego spadek tego przekroju jest równy zeru, a więc $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Podobnie obrazem funkcji:

$$z = f(y)$$

w przestrzeni trójwymiarowej jest walec o tworzących równoległych do osi x -ów. Przekrój płaszczyzną o stałym y , t. j. płaszczyzną równoległą do płaszczyzny pionowej, jest prostą tworzącą. Spadek tego przekroju jest równy zeru, a więc $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Odwrotnie: jeżeli pochodna cząstkowa jakiejś nieznannej funkcji względem zmiennej x jest stale równa zeru dla wszystkich x i y , to stąd nie można wnioskować, że ta funkcja ma wartość stałą (jak to miało miejsce przy funkcjach jednej zmiennej), lecz możemy tylko twierdzić, że szukana funkcja *nie zawiera zmiennej x* . Może więc ona być jeszcze zupełnie dowolną funkcją drugiej zmiennej y .

A więc: ze spełniania się warunku $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ dla wszystkich x, y wynika, że $z = \varphi(y)$, gdzie $\varphi(y)$ jest dowolną funkcją zmiennej y . Podobnie

z $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ dla wszystkich x i y wynika, że $z = \psi(x)$, przyczem $\psi(x)$ może być zupełnie dowolną funkcją zmiennej x . Nie możemy więc twierdzić, że obrazem takiej funkcji jest płaszczyzna $z = c$ równoległa do płaszczyzny poziomej, lecz tylko, że obraz ten jest jakimś walcem o tworzących równoległych do osi x , gdy $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, a do osi y , gdy $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

§ 104. Różniczki cząstkowe i różniczka zupełna.

Jeżeli w funkcji $z = f(x, y)$ dajemy zmiennej y wartość stałą, to mamy do czynienia z funkcją jednej zmiennej i możemy utworzyć jej różniczkę według tej zmiennej, a mianowicie:

$$\partial_x z = z_x \cdot \Delta x = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x$$

To wyrażenie nazywamy *różniczką cząstkową* funkcji z według zmiennej x .

Podobnie określamy różniczkę cząstkową według zmiennej y wzorem:

$$\partial_y z = z_y \cdot \Delta y = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y$$

Sumę tych różniczek cząstkowych, t. j. wyrażenie;

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

nazywamy *różniczką zupełną* funkcji z według zmiennych x, y .

Gdyby mogła zachodzić jakaś wątpliwość co do tego, które zmienne uważamy za niezależne, to należałoby zamiast dz pisać dokładniej: $d_x z$. Wzór, przedstawiający różniczkę zupełną, piszemy zwykle w innej, dogodniejszej formie. Zastosujmy mianowicie pojęcie różniczki zupełnej do funkcji: $z = x$. Otrzymujemy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

zatem:

$$dx = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x$$

a więc zamiast Δx możemy napisać dx lub dokładniej $d_x x$.

Podobnie, stosując pojęcie różniczki zupełnej do funkcji: $z = y$, otrzymujemy

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

a więc:

$$dy = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y = \Delta y$$

Zatem zamiast Δy możemy napisać dy lub dokładniej $d_y y$.

Wobec tego wzór na różniczkę zupełną przyjmuje postać:

(72)

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

lub dokładniej:

(72 a)

$$d_{xy}z = \frac{\partial z}{\partial x} d_{xy}x + \frac{\partial z}{\partial y} d_{xy}y$$

Przykład. Znaleźć różniczkę zupełną funkcji:

$$z = \arctg \frac{y}{x}$$

Obliczamy najpierw pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Stąd:

$$dz = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Geometrycznie możemy przedstawić różniczkę zupełną w następujący sposób. Na fig. 101 mamy przedstawioną część powierzchni o równaniu $z = f(x, y)$. Chcemy przedstawić różniczkę zupełną tej funkcji dla punktu P , należącego do wartości x, y i dla przyrostów $\Delta x = AB$, $\Delta y = AC$. Linia PD przedstawia przekrój badanej powierzchni płaszczyzną równoległą do płaszczyzny pionowej w odstępach y , a linia PE przekrój danej powierzchni płaszczyzną równoległą do płaszczyzny bocznej w odstępach x . Gdyby przy zmianie x o Δx (a przy stałym y) punkt P posuwał się po stycznej do linii PD , to wzniósłby się na wysokość równą różniczkę cząstkową $\partial_x z$, jak to

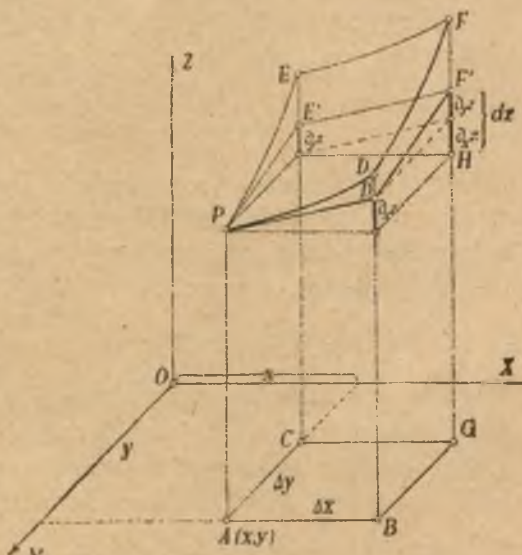


Fig. 101.

widzieliśmy przy funkcjach jednej zmiennej (por. § 69). Gdyby przy zmianie y o Δy (a przy stałym x) punkt P posuwał się po stycznej do linii PE ,

to wzniosłby się na wysokość równą różniczce cząstkowej $\partial_z z$. Uzupełnijmy odcinki PD' i PE' stycznych do równoległoboku $PD'F'E'$. Wierzchołek F'' tego równoległoboku wznosi się nad poziom punktu P o odcinek HF'' równy sumie różniczek cząstkowych $\partial_x z + \partial_y z$ czyli równy różniczce zupełnej dz , jak to łatwo stwierdzić z figury.

Płaszczyzna tego równoległoboku, wyznaczona przez dwie styczne, przechodzące przez punkt P , nazywa się *plaszczyną styczną* do powierzchni $z = f(x, y)$. (Dokładniej omówimy tę płaszczyznę w § 110).

Gdy x i y wzrastają równocześnie o Δx i Δy , to punkt P powierzchni wznosi się do punktu F , natomiast punkt płaszczyzny stycznej wznosi się tylko do punktu F' . Prawdziwym przyrostem funkcji $z = f(x, y)$ jest więc odcinek HF , a różniczka zupełna przedstawia przyrost HF' , wynikający z zastąpienia danej powierzchni jej płaszczyzną styczną. Mamy tu więc interpretację geometryczną różniczki zupełnej, analogiczną do geometrycznej interpretacji różniczki funkcji jednej zmiennej. Przedstawia ona nie prawdziwy przyrost funkcji, tylko przybliżony. Rodzaj i stopień tego przybliżenia omówimy w następnym paragrafie.

§ 105. Związek różniczki zupełnej z prawdziwym przyrostem funkcji.

Zbadajmy prawdziwy przyrost funkcji $z = f(x, y)$, wynikający z równoczesnego wzrastania zmiennych niezależnych x i y o przyrosty Δx i Δy , t. j.

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Założmy, że funkcja $f(x, y)$ posiada *ciągłe* cząstkowe pochodne f_x i f_y w otoczeniu punktu (x, y) . Aby znaleźć związek tego przyrostu z cząstkowymi pochodnymi, wprowadzamy dwa wyrazy pomocnicze: $f(x, y + \Delta y)$ i $f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$, a więc:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

W pierwszym i drugim wyrazie prawej strony druga zmienna zachowuje stałą wartość: $y + \Delta y$, a zmienia się tylko x . Możemy zatem do tych dwóch wyrazów zastosować twierdzenie o wartości średniej, poznane przy badaniu funkcji jednej zmiennej (str. 317, wzór (68)). Otrzymamy:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \cdot f_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y)$$

Podobnie w trzecim i czwartym wyrazie nie ulega zmianie zmienna x , a zmienia się tylko y , zatem z twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy:

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot f_y(x, y + \vartheta_1 \Delta y)$$

Zatem:

$$\Delta z = \Delta x \cdot f_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y) + \Delta y \cdot f_y(x, y + \vartheta, \Delta y)$$

Według założenia pochodne cząstkowe f_x i f_y są funkcjami *ciągłymi*. Można więc przedstawić występujące tu wartości f_x i f_y w postaci (por. § 54, str. 198):

$$f_x(x + \vartheta \Delta x, y + \Delta y) = f_x(x, y) + \eta_1(\Delta x, \Delta y)$$

$$f_y(x, y + \vartheta, \Delta y) = f_y(x, y) + \eta_2(\Delta x, \Delta y)$$

przyczem η_1 i η_2 dążą do zera, gdy Δx i Δy równocześnie dążą do zera.

A więc:

$$\Delta z = f_x(x, y) \cdot \Delta x + f_y(x, y) \cdot \Delta y + \eta_1 \cdot \Delta x + \eta_2 \cdot \Delta y$$

Pierwszy i drugi wyraz prawej strony tworzą razem różniczkę zupełną dz , a zatem:

$$(73) \quad \Delta z = dz + \eta_1 \cdot \Delta x + \eta_2 \cdot \Delta y$$

Widzimy stąd, że różniczka zupełna nie przedstawia przyrostu zupełnego lecz różni się od niego o wielkość (błąd):

$$\eta_1 \cdot \Delta x + \eta_2 \cdot \Delta y$$

Okażemy jednakże, że, gdy Δx i Δy zdążają równocześnie do zera, to ten błąd, wynikający z zastąpienia przyrostu zupełnego różniczką zupełną, dąży do zera silniej, aniżeli Δx lub Δy a nawet silniej, aniżeli suma $|\Delta x| + |\Delta y|$. Twierdzimy zatem, że

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\eta_1 \cdot \Delta x + \eta_2 \cdot \Delta y}{|\Delta x| + |\Delta y|} = 0$$

Otóż:

$$\begin{aligned} 0 < |A| &= \left| \frac{\eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y}{|\Delta x| + |\Delta y|} \right| \leq |\eta_1| \frac{|\Delta x|}{|\Delta x| + |\Delta y|} + \\ &+ |\eta_2| \frac{|\Delta y|}{|\Delta x| + |\Delta y|} \leq |\eta_1| \cdot 1 + |\eta_2| \cdot 1 \end{aligned}$$

Ponieważ η_1 i η_2 dążą do zera, to i A dąży do zera na podstawie twierdzenia o trzech funkcjach (albowiem $|A|$ zawiera się stale między 0 a między funkcją $|\eta_1| + |\eta_2|$, dążącą również do zera).

Oznaczmy literą l odległość punktów (x, y) i $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, t. j. $l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Rozumowaniem zupełnie podobnem do poprzedniego można okazać, że także

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y}{l} = 0$$

czyli, że:

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta z - dz}{l} = 0$$

to znaczy, że różnica między prawdziwym przyrostem a różniczką zupełną dąży do zera w wyższym stopniu aniżeli odległość punktów (x, y) i $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, do których się odnosi badany przyrost.

Uwaga. Twierdzenie to udowodniliśmy przy założeniu, że cząstkowe pochodne są funkcjami ciągłymi. Dla nieciągłych f_x i f_y twierdzenie to może się nie sprawdzać.

§ 106. Zastosowanie różniczki zupełnej do ocenienia błędu funkcji dwóch i więcej zmiennych.

Wskutek tego związku różniczki zupełnej z prawdziwym przyrostem funkcji dwóch zmiennych różniczka ta nadaje się bardzo dobrze do przybliżonego przedstawienia tego przyrostu, np. przy obliczaniu wartości funkcji dwóch zmiennych do oszacowania błędu, wynikającego z użycia wartości zmiennych niezależnych, obciążonych niewielkimi błędami.

Przykłady.

1) Dla funkcji

$$z = xy$$

pochodnymi cząstkowymi są: $z_x = y$, $z_y = x$, a zatem różniczką zupełną jest:

$$dz = y dx + x dy$$

Wzoru tego używa się w rachunkach przybliżonych jako przybliżonego wzoru na błąd Δz iloczynu: $z = xy$.

Zwykle używa się bezwzględnych wartości wszystkich, występujących tu liczb, a wtedy wzór przyjmuje postać:

$$|\Delta z| \approx |dz| \leq |y dx| + |x dy|$$

2) W podobny sposób wyprowadza się wzór na przybliżony błąd ilorazu. Obliczamy w tym celu różniczkę zupełną funkcji:

$$z = \frac{x}{y}$$

a mianowicie:

$$z_x = \frac{1}{y}, \quad z_y = -\frac{x}{y^2}$$

a więc:

$$dz = \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

Zatem:

$$|\Delta z| \approx |dz| \leq \frac{|y dx| + |x dy|}{y^2}$$

3) Metody tej używa się często w miernictwie, przy rozwiązywaniu trójkątów z elementów, obciążonych błędami obserwacji. Tak np.,

mając zmierzone dwie przyprostokątne a i b trójkąta prostokątnego z błędami, chcemy oszacować, jaki wpływ mają te błędy na obliczenie przeciwprostokątnej c . W tym wypadku chodzi nam o przyrost funkcji:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ponieważ:

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{\partial c}{\partial b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

to różniczka zupełna ma postać:

$$dc = \frac{ada}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{bdb}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

czyli:

$$dc = \frac{ada}{c} + \frac{bdb}{c}$$

Otrzymujemy więc następujący, łatwy do zapamiętania, przybliżony wzór na błąd dc przeciwprostokątnej:

$$cdc = ada + bdb$$

4) Zmierzono w trójkącie prostokątnym kąt ostry α i przeciwprostokątną c . Jaki wpływ mają błędy pomiarowe tych dwóch wielkości na obliczenie przyprostokątnej a , leżącej naprzeciw kąta α ?

Obliczamy różniczkę zupełną funkcji:

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

Ponieważ

$$\frac{\partial a}{\partial c} = \sin \alpha, \quad \frac{\partial a}{\partial \alpha} = c \cos \alpha$$

przeto

$$da = \sin \alpha \cdot dc + c \cos \alpha \cdot d\alpha$$

a stąd, dzieląc obie strony przez $a = c \sin \alpha$, otrzymujemy na błąd *względny* boku a następujący przybliżony wzór:

$$\frac{da}{a} = \frac{dc}{c} + \operatorname{ctg} \alpha d\alpha$$

Przy używaniu tego wzoru trzeba pamiętać o tem, że przyrost da należy wyrażać w mierze *łukowej*. Podobne wzory można wyprowadzić dla wszystkich przypadków rozwiązywania trójkątów, także ukośnokątnych wtedy jednak używa się już funkcji trzech zmiennych niezależnych.

Różniczkę zupełną funkcji trzech i więcej zmiennych niezależnych określa się podobnie jak dla funkcji dwóch zmiennych. Jeżeli mianowicie:

$$z = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

to

$$(74) \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Przykład. Wyprowadzić przybliżony wzór na błąd boku b trójkąta ukośnokątnego, w którym zmierzono bok a i kąty α i β , leżące naprzeciw boków a i b , z błędami.

Tworzymy w tym celu zupełną różniczkę funkcji trzech zmiennych:

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$$

Obliczamy najpierw:

$$\frac{\partial b}{\partial a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \frac{\partial b}{\partial \alpha} = -\frac{a \sin \beta \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad \frac{\partial b}{\partial \beta} = \frac{a \cos \beta}{\sin \alpha}$$

Stąd:

$$db = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} da - \frac{a \sin \beta \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha + \frac{a \cos \beta}{\sin \alpha} d\beta$$

Czyli:

$$db = \frac{b}{a} da - b \operatorname{ctg} \alpha d\alpha + b \operatorname{ctg} \beta d\beta$$

Stąd otrzymujemy następujący wzór na obliczenie przybliżonej wartości błędu *względego* boku b :

$$\frac{db}{b} = \frac{da}{a} + \operatorname{ctg} \beta d\beta - \operatorname{ctg} \alpha d\alpha$$

§ 107. Zastosowanie pochodnych cząstkowych do obliczania pochodnej funkcji jednej zmiennej, złożonej z dwóch lub więcej funkcji jednej zmiennej.

Weźmy pod uwagę taką funkcję:

$$z = f(x, y)$$

w której x i y nie są zmiennymi niezależnymi, lecz funkcjami jednej zmiennej t , a więc:

$$z = f(x(t), y(t))$$

Wobec tego także z jest ostatecznie funkcją tylko jednej zmiennej t . Jest to nowy rodzaj funkcji *złożonych*, ogólniejszy od funkcji złożonych postaci $z = f(x(t))$, z którymi mieliśmy dotychczas do czynienia. Chcemy wyprowadzić wzór na obliczenie pochodnej takiej funkcji złożonej względem zmiennej t . Załóżmy, że funkcja $f(x, y)$ posiada ciągle cząstkowe pochodne $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ a funkcje $x(t)$ i $y(t)$ posiadają zwyczajne pochodne

$\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$. Utwórzmy prawdziwy przyrost funkcji z , wynikający z przyrostu zmiennej t o Δt ; wtedy x wzrośnie o Δx a y o Δy i otrzymamy według wzoru (73), (str. 327):

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \eta_1 \Delta x + \eta_2 \Delta y$$

Stąd:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \eta_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \eta_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Gdy Δt dąży do zera, to także Δx i Δy dążą do zera, albowiem $x(t)$ i $y(t)$ są funkcjami różniczkowalnymi a zatem ciągłymi. Wobec tego $\eta_1(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ i $\eta_2(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ i otrzymujemy po przejściu do granicy dla $\Delta t \rightarrow 0$:

$$(75) \quad \boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}}$$

Jest to uogólnienie poznanej w § 78 reguły łańcuchowej na obliczenie pochodnej funkcji złożonej. Pochodną funkcji z (według zmiennej t) nazywamy w tym przypadku *całkowitą* pochodną, w odróżnieniu od cząstkowych pochodnych (według zmiennych x i y).

Przykłady. 1) Obliczyć pochodną funkcji: $v = \log x \cdot \sin x - \frac{\sin^3 x}{\log x}$.

Tutaj y jest funkcją złożoną z dwóch funkcji: $u(x) = \log x$ i $v(x) = \sin x$ a mianowicie:

$$y = u \cdot v - \frac{v^3}{u}$$

Chcąc znaleźć pochodną tej funkcji według zmiennej x , tworzymy najpierw

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v + \frac{v^3}{u^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u - \frac{3v^2}{u}$$

a następnie stosujemy wzór (75) i otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \left(v + \frac{v^3}{u^2} \right) \frac{du}{dx} + \left(u - \frac{3v^2}{u} \right) \frac{dv}{dx}$$

czyli:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\sin x + \frac{\sin^3 x}{\log^2 x} \right) \cdot \frac{1}{x} + \left(\log x - \frac{3 \sin^2 x}{\log x} \right) \cos x$$

2) Niechaj:

$$z = f(x)^{g(x)}$$

Obliczaliśmy już pochodne takich funkcji przy pomocy pochodnej logarytmicznej. Uważając tę funkcję za funkcję złożoną:

$$z = u^u$$

z dwóch funkcji $u = f(x)$ i $v = g(x)$, możemy zastosować wzór (75) i otrzymamy od razu:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot f'(x) + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot g'(x)$$

Ale

$$\frac{\partial z}{\partial u} = u u^{u-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^u \log u$$

a więc

$$\frac{dz}{dx} = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x) + f(x)^{g(x)} \cdot \log f(x) \cdot g'(x)$$

3) Jeżeli $z = f(x, y)$, a y jest funkcją x , to

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

Np. gdy $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$ a $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, to

$$\frac{dz}{dx} = 2ax + 2by + (2bx + 2cy) \cdot \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Mnożąc obie strony wzoru (75) przez dt , otrzymujemy następujący wzór na różniczkę funkcji z :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Ten wzór ma taką samą postać, jak różniczką zupełną funkcji $z = f(x, y)$ w przypadku, gdy x i y są zmiennymi niezależnymi, jakkolwiek obecnie x i y są funkcjami jednej wspólnej zmiennej t . Dla wyraźniejszego odróżnienia poszczególnych różniczek, występujących w tych wzorach, należałoby pisać w razie, gdy x i y są zmiennymi niezależnymi:

$$d_{xy}z = \frac{\partial f}{\partial x} d_{xy}x + \frac{\partial f}{\partial y} d_{xy}y$$

a w razie, gdy x i y są funkcjami t , t. j. gdy t jest zmienną niezależną:

$$d_t z = \frac{\partial f}{\partial x} d_t x + \frac{\partial f}{\partial y} d_t y$$

W podobny sposób oblicza się pochodną i różniczkę funkcji złożonej z trzech i więcej funkcji jednej zmiennej t .

Np. jeżeli:

$$z = f(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

to

$$(76) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt}$$

a różniczka ma postać:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

Przykład. Funkcję:

$$f(x, y, z)$$

nazywamy *jednorodną* stopnia n , jeżeli po podstawieniu za x, y, z wartości tx, ty, tz można ją przedstawić w postaci

$$(77) \quad f(tx, ty, tz) = t^n \cdot f(x, y, z)$$

Taką funkcją jest np. taki wielomian trzech zmiennych, którego każdy wyraz $a \cdot x^p \cdot y^r \cdot z^s$ jest tego samego stopnia $p + r + s = n$ w tych trzech zmiennych.

Utwórzmy pochodną takiej funkcji według zmiennej t .

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial (tx)} \cdot \frac{d(tx)}{dt} + \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial (ty)} \frac{d(ty)}{dt} + \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial (tz)} \frac{d(tz)}{dt} = \\ &= x \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial (tx)} + y \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial (ty)} + z \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial (tz)} = n t^{n-1} f(x, y, z) \end{aligned}$$

Dla $t = 1$ otrzymujemy stąd następujący wzór Eulera:

$$(78) \quad n f(x, y, z) = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}$$

Przy pomocy tego wzoru możemy przedstawić każdą funkcję jednorodną zapomocą jej cząstkowych pochodnych.

Wzór ten stosuje się ogólnie do dowolnej liczby zmiennych niezależnych.

§ 108. Pochodne funkcji złożonej z dwóch funkcji dwóch zmiennych.

W wielu zagadnieniach analizy i geometrii występują funkcje złożone z dwóch funkcji dwóch zmiennych niezależnych a mianowicie:

$$z = f(x(u, v), y(u, v))$$

Chcemy obliczyć pochodne cząstkowe tej funkcji według zmiennych u i v a następnie różniczkę zupełną tej funkcji dla zmiennych niezależnych

u i v . Przy obliczaniu cząstkowej pochodnej z_u czyli $\frac{\partial z}{\partial u}$ dajemy zmiennej v jakąś wartość stałą c , a wtedy mamy do czynienia z funkcją z złożoną z dwóch funkcji jednej zmiennej u , a mianowicie z funkcji $x(u, c)$ i $y(u, c)$. Wobec tego możemy zastosować poznany poprzednio wzór (75) z tą tylko różnicą, że zamiast $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$ występują teraz cząstkowe pochodne $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$ i $\frac{\partial y}{\partial u}$. Otrzymujemy zatem:

$$(79) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

i podobnie:

Przy pomocy tych cząstkowych pochodnych obliczamy różniczkę zupełną funkcji z , gdy u i v są zmiennymi niezależnymi, a mianowicie:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv$$

Wyłączając $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ przed nawias, otrzymujemy:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)$$

W nawiasach znajdują się różniczki zupełne: dx i dy funkcji x i y dla zmiennych niezależnych u i v , a więc

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Otrzymaliśmy zatem na różniczkę zupełną funkcji z (przy uważaniu u i v za zmienne niezależne) taki sam wzór, jak gdyby x i y były zmiennymi niezależnymi.

Różniczki, występujące w tym wzorze, odnoszą się do zmiennych niezależnych u i v , co można wyraźnie zaznaczyć w następujący sposób:

$$d_{uv}z = \frac{\partial f}{\partial x} d_{uv}x + \frac{\partial f}{\partial y} d_{uv}y$$

Uwaga. Zaznaczamy jednak już teraz, że ta zgodność formy występuje tylko przy różniczkach pierwszego rzędu. Zobaczymy w dalszym ciągu, że różniczki drugiego i wyższych rzędów mają inną postać, gdy x, y są zmiennymi niezależnymi a inną, gdy są funkcjami jednej lub dwóch zmiennych. Podobny fakt zauważyliśmy już przy badaniu wyższych różniczek funkcji jednej zmiennej (por. § 95).

Przykłady. 1) Znaleźć pochodne cząstkowe funkcji:

$$z = e^{u^2 \sin^2 v} + 2uv \sin u \sin v$$

Uważamy tę funkcję za funkcję złożoną:

$$z = e^{x+y}$$

z funkcji:

$$x = u^2 \sin^2 v, \quad y = 2uv \sin u \sin v \quad (a)$$

Według wzorów (79) obliczamy:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{x+y} \cdot 2u \sin^2 v + e^{x+y} (2v \sin u \sin v + 2uv \cos u \sin v)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = e^{x+y} \cdot 2u^2 \sin v \cos v + e^{x+y} (2u \sin u \sin v + 2uv \sin u \cos v)$$

Za x i y należy tu jeszcze podstawić wartości z wzorów (a).

2) Mamy podaną funkcję współrzędnych biegunowych:

$$z = f(r, \varphi)$$

Wprowadzamy współrzędne prostokątne zapomocą wzorów:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

czyli:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

Obliczyć pochodne funkcji z według zmiennych x i y .

Otóż:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Ponieważ:

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \\ & = \frac{-r \sin \varphi}{r^2} = -\frac{\sin \varphi}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \\ & = \frac{r \cos \varphi}{r^2} = \frac{\cos \varphi}{r} \end{array}$$

przeto:

$$(80) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \end{cases}$$

§ 109. Pochodna w dowolnym kierunku.

Obok pochodnych cząstkowych funkcji $z = f(x, y)$ według zmiennej x lub y rozważa się często (zwłaszcza w fizyce) pochodną cząstkową braną w pewnym kierunku, tworzącym z osią x -ów kąt α . Taką *pochodną w dowolnym kierunku* tworzymy w następujący sposób. Obracamy układ osi współrzędnych o dowolny kąt α koło początku układu. Wprowadzamy następnie zamiast zmiennych x i y nowe zmienne x' i y' , związane z pierwotnymi zmiennymi zapomocą znanych z geometrii analitycznej równań obrotu:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned}$$

W ten sposób z funkcji $z = f(x, y)$ otrzymujemy funkcję złożoną:

$$z = f(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)$$

Pochodną cząstkową tej funkcji według zmiennej x' nazywamy pochodną funkcji z w kierunku α . Używając pierwszego z wzorów (79), możemy wyrazić tę pochodną w następujący sposób:

$$z_{\alpha} = \frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'}$$

Ale $\frac{\partial x}{\partial x'} = \cos \alpha$, $\frac{\partial y}{\partial x'} = \sin \alpha$ a więc:

$$(81) \quad \boxed{f_{\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha}$$

Tego wzoru używamy jako *definicji* pochodnej cząstkowej funkcji $f(x, y)$ w kierunku α .

Pochodną w dowolnym kierunku można także określić bezpośrednio jako granicę ilorazu:

$$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

przyczem h i k dążą równocześnie do zera w ten sposób, że punkty $A(a, b)$ i $B(a+h, b+k)$ leżą stale na tej samej prostej p , tworzącej kąt α

z osią x -ów (por. fig. 102). Oznaczmy $\sqrt{h^2 + k^2} = r$ to możemy przedstawić badany iloraz w postaci:

$$\frac{f(a + r \cos \alpha, b + r \sin \alpha) - f(a, b)}{r}$$

Postępując z wyrażeniem, zawartem w liczniku, podobnie jak z przyrostem Δz w § 105, otrzymujemy po przejściu do granicy wzór (81).

Do tego samego wyniku dochodzimy, gdy punkt $B(a + h, b + k)$ posuwa się po linii krzywej l , stycznej do prostej p w punkcie $A(a, b)$. Wtedy wprowadza się w rachunek najpierw kąt β (por. fig. 102); ten kąt dąży do kąta α , a więc w końcowym wzorze wystąpi znowu kąt α .

Pochodna w dowolnym kierunku α podaje, podobnie jak pochodna cząstkowa według x i pochodna cząstkowa według y ,

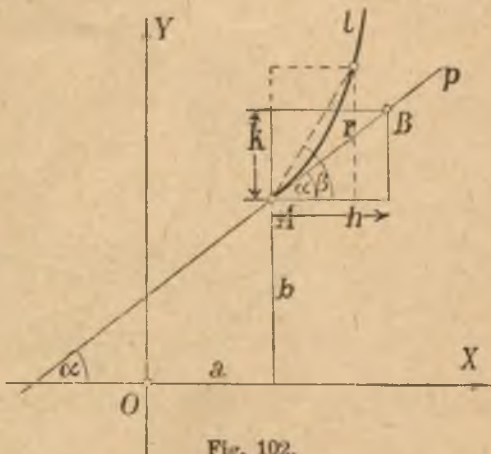


Fig. 102.

spadek stycznej do linii przekroju danej powierzchni z płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny poziomej XY , a mianowicie z taką płaszczyzną prostopadłą, której ślad poziomy tworzy z osią x -ów kąt α (por. fig. 103). Jeżeli bowiem obrócimy układ osi X, Y w płaszczyźnie XY o kąt α , zatrzymując niezmienną oś Z , to w tym nowym układzie $X'Y'Z$ płaszczyzna przekroju $ABCD$ jest równoległa do płaszczyzny pionowej $X'Z$, a więc, na podstawie § 103, pochodna względem x' jest równa spadkowi stycznej PE do linii BPC , która jest przekrojem danej powierzchni z tą płaszczyzną równoległą do $X'Z$. A więc istotnie: $f_\alpha = \operatorname{tg} \delta$.

§ 110. Płaszczyzna styczna do powierzchni.

Już w § 104 mieliśmy do czynienia z płaszczyzną styczną do powierzchni. Obecnie wyprowadzimy równanie tej płaszczyzny i omówimy niektóre jej własności. Weźmy pod uwagę taki regularny punkt $P(x_0, y_0, z_0)$ powierzchni o równaniu:

$$z = f(x, y)$$

w którym cząstkowe pochodne tej funkcji są ciągłe.

Płaszczyzną styczną do powierzchni w takim regularnym punkcie nazywamy płaszczyznę, wyznaczoną przez dwie proste t_1 i t_2 styczne do

linij l_1 i l_2 , otrzymanych z przekrojów danej powierzchni płaszczyznami, przechodzącymi przez ten punkt, z których jedna jest równoległa do płaszczyzny pionowej XZ , a druga do płaszczyzny bocznej YZ (por. fig. 103). Te dwie proste t_1 i t_2 leżą w różnych płaszczyznach piono-

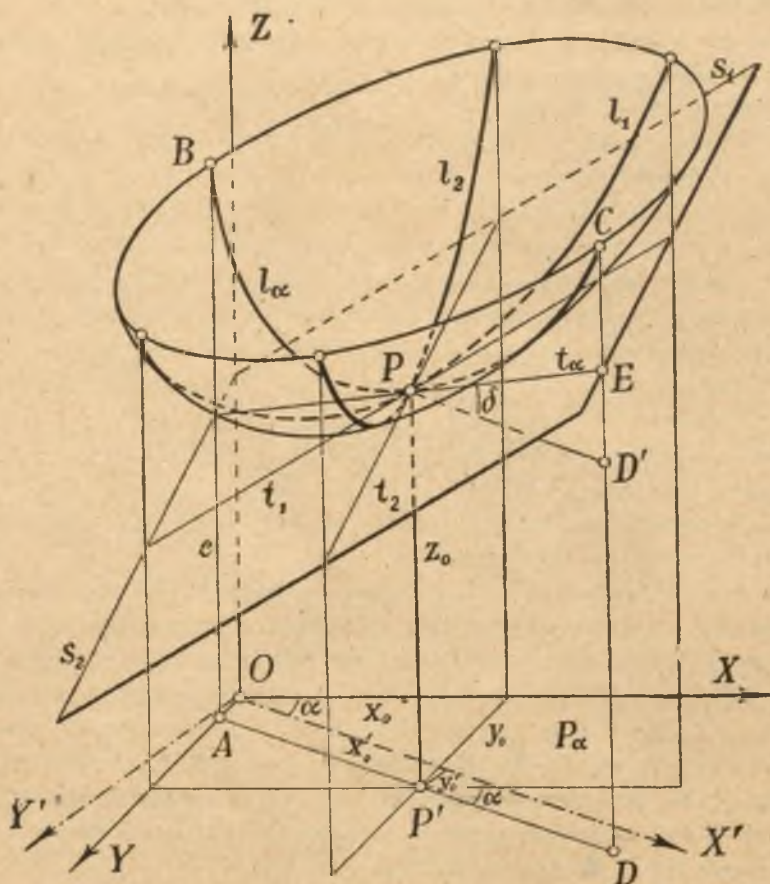


Fig. 103.

nowych, a więc płaszczyzna, wyznaczona przez nie, nie jest prostopadła do XY . Wobec tego równanie jej ma postać:

$$z = ax + by + c$$

(por. § 12, 1). Chodzi nam o wyznaczenie stałych a, b, c . Stała a jest, jak wiemy, równa spadkowi śladu pionowego s_1 tej płaszczyzny. Ten ślad pionowy jest jednak równoległy do prostej t_1 (są to bowiem proste, otrzymane z przecięcia dwóch płaszczyzn równoległych trzecią płaszczyzną), a więc spadek $f_z(x_0, y_0)$ prostej t_1 jest równy spadkowi a prostej s_1 .

Podobnie spadek $f_y(x_0, y_0)$ prostej t_2 jest równy spadkowi b prostej s_2 (śladu bocznego). Równanie płaszczyzny stycznej przyjmuje więc postać:

$$z = f_x \cdot x + f_y \cdot y + c$$

Pozostaje jeszcze do wyznaczenia stała c . Otrzymamy ją najprościej z warunku, że płaszczyzna styczna przechodzi przez punkt $P(x_0, y_0, z_0)$, a więc:

$$z_0 = f_x \cdot x_0 + f_y \cdot y_0 + c$$

a stąd:

$$c = z_0 - f_x \cdot x_0 - f_y \cdot y_0.$$

Podstawiamy tę wartość w poprzednie równanie i otrzymujemy po uproszczeniu:

(82)

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Taką postać ma równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $P(x_0, y_0, z_0)$ do powierzchni o równaniu $z = f(x, y)$.

Zwykle oznacza się krótko $f_x = p$, $f_y = q$; wtedy równanie płaszczyzny stycznej ma postać:

(82 a)

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Kąt ostry γ , zawarty między płaszczyzną styczną a płaszczyzną poziomą XY , oblicza się z wzoru:

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

który wynika odrazu z zastosowania wzoru (b), wyprowadzonego w § 12 (str. 41).

Okazemy, że płaszczyzna styczna zawiera nie tylko dwie styczne t_1 i t_2 , należące do przekrojów płaszczyznami równoległymi do XZ i YZ , lecz w ogóle wszystkie styczne t_α , należące do wszystkich przekrojów powierzchni płaszczyznami, przechodzącymi przez P a prostopadłymi do płaszczyzny poziomej XY .

Weźmy pod uwagę przekrój danej powierzchni płaszczyzną P_α prostopadłą do XY a nachyloną do płaszczyzny pionowej XZ pod kątem α . Obróćmy osie X, Y w płaszczyźnie XY o kąt α . W nowym układzie osi: X', Y', Z płaszczyzna styczna ma równanie:

$$\begin{aligned} z - z_0 = & f_x \cdot (x' \cos \alpha - y' \sin \alpha - x'_0 \cos \alpha + y'_0 \sin \alpha) + \\ & + f_y \cdot (x' \sin \alpha + y' \cos \alpha - x'_0 \sin \alpha - y'_0 \cos \alpha) \end{aligned}$$

Płaszczyzna P_α ma w tym układzie osi równanie $y' = y'_0$, a prosta t_α ,

styczna do przekroju l_α , leżącego w tej płaszczyźnie P_α , ma równania: $y' = y'_0$; $z - z_0 = f_\alpha \cdot (x' - x'_0)$, albowiem jej rzut prostopadły na płaszczyznę $X'Z$ ma w odniesieniu do osi X' i Z równanie $z - z_0 = f_\alpha \cdot (x' - x'_0)$. Twierdzimy, że ta prosta t_α leży na płaszczyźnie stycznej, że więc współrzędne wszystkich jej punktów spełniają równanie płaszczyzny stycznej. By się o tem przekonać, podstawiamy równania tej prostej w równanie płaszczyzny stycznej i otrzymujemy:

$$f_\alpha \cdot (x' - x'_0) = f_x \cdot (x' \cos \alpha - y'_0 \sin \alpha - x'_0 \cos \alpha + y'_0 \sin \alpha) + \\ + f_y \cdot (x' \sin \alpha + y'_0 \cos \alpha - x'_0 \sin \alpha - y'_0 \cos \alpha)$$

czyli:

$$f_\alpha \cdot (x' - x'_0) = f_x \cdot (x' \cos \alpha - x'_0 \cos \alpha) + f_y \cdot (x' \sin \alpha - x'_0 \sin \alpha) \\ f_\alpha (x' - x'_0) = f_x \cos \alpha (x' - x'_0) + f_y \sin \alpha (x' - x'_0) = (f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha)(x' - x'_0)$$

Ponieważ f_α jest pochodną w kierunku α , przeto, na podstawie wzoru (81), otrzymujemy po lewej stronie także:

$$(f_x \cos \alpha + f_y \sin \alpha)(x' - x'_0)$$

a więc równanie spełnia się *identycznie*, t. j. dla wszystkich x' , a co zatem idzie, dla wszystkich punktów prostej t_α . Ta prosta leży zatem na płaszczyźnie P_α , c. b. d. o.

Na podstawie tej własności płaszczyzny stycznej można jej definicję wypowiedzieć także w następujący sposób.

Płaszczyzna styczna do powierzchni w regularnym jej punkcie jest to płaszczyzna, zawierająca proste styczne do wszystkich linii, które otrzymujemy, przecinając daną powierzchnię płaszczyznami, przechodzącymi przez punkt styczności a prostopadłymi do płaszczyzny poziomej.

W rozdziale, poświęconym teorii powierzchni w II Tomie, poznamy jeszcze dalsze własności płaszczyzny stycznej i inne formy jej równania.

§ 111. Pochodne ogólnej funkcji złożonej.

Jeszcze ogólniejsza postać funkcji złożonej jest następująca:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

przyczem:

$$x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_p)$$

$$x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_p)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_n = \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_p)$$

Pochodne cząstkowe takiej funkcji z względem zmiennych niezależnych $u_1, u_2, \dots, u_p$ oblicza się, jak łatwo zauważyć, przy pomocy wzorów:

$$\frac{\partial z}{\partial u_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial u_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u_2} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial u_2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u_p} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_p} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u_p} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial u_p}$$

Tworząc różniczkę zupełną tej funkcji według zmiennych $u_1, u_2, \dots, u_p$ i porządkując odpowiednie wyrazy, przekonujemy się z łatwością, że:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial u_p} du_p = \\ &= \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n \end{aligned}$$

a więc ta różniczka ma taką samą postać, jak gdyby $x_1, x_2, \dots, x_n$ były zmiennymi niezależnymi.

§ 112. Twierdzenie o wartości średniej dla funkcji dwóch zmiennych.

Przy badaniu funkcji jednej zmiennej poznaliśmy twierdzenie o wartości średniej (Lagrange'a), które pozwala wyrazić prawdziwy przyrost funkcji zapomocą różniczki tej funkcji na miejscu pośrednim pomiędzy a a $a + h$, a mianowicie (por. wzór 68 w § 100):

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \vartheta h)$$

Podobny związek zachodzi, jak to zobaczymy, pomiędzy prawdziwym przyrostem funkcji dwóch zmiennych, t. j. pomiędzy:

$$\Delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

a pomiędzy różniczką zupełną. Załóżmy, że $f(x, y)$ posiada cząstkowe pochodne ciągle w obszarze wypukłym (por. str. 18), otaczającym punkt (a, b) .

Wprowadźmy funkcję pomocniczą jednej zmiennej t :

$$\varphi(t) = f(a + th, b + tk)$$

Jest to funkcja złożona z dwóch funkcji:

$$x = a + th, \quad y = b + tk$$

Dla $t=0$ mamy $\varphi(0)=f(a, b)$ a dla $t=1$ jest $\varphi(1)=f(a+h, b+k)$, a zatem przyrost Δf przedstawia się w postaci:

$$\Delta f = \varphi(1) - \varphi(0)$$

Do funkcji $\varphi(t)$ jednej zmiennej możemy zastosować twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, a więc:

$$\Delta f = \varphi(1) - \varphi(0) = (1 - 0) \varphi'(\vartheta)$$

przyczem $0 < \vartheta < 1$. Pochodna φ' istnieje, a obliczamy ją według wzoru (75) str. 331, a więc:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot k$$

Stąd:

$$\varphi'(\vartheta) = \frac{\partial f(a + \vartheta h, b + \vartheta k)}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial f(a + \vartheta h, b + \vartheta k)}{\partial y} \cdot k$$

przyczem wszędzie występuje to samo ϑ , zawarte między 0 a 1.

Dowiedliśmy więc, że:

$$(83) \quad \Delta f = f(a+h, b+k) - f(a, b) = h \cdot f_x(a + \vartheta h, b + \vartheta k) + k \cdot f_y(a + \vartheta h, b + \vartheta k)$$

To znaczy, że prawdziwy przyrost funkcji dwóch zmiennych równa się wartości różniczki tej funkcji, obliczonej dla odpowiednio dobranego punktu pośredniego między punktem (a, b) a punktem $(a+h, b+k)$. Ten punkt pośredni $(a + \vartheta h, b + \vartheta k)$ leży na linii prostej, łączącej punkt (a, b) z punktem $(a+h, b+k)$.

Jakkolwiek więc różniczka zupełna, obliczona dla punktu (a, b) i dla przyrostów h, k , jest tylko przybliżoną wartością prawdziwego przyrostu, to jednak istnieje taki punkt pośredni pomiędzy (a, b) i $(a+h, b+k)$, że różniczka zupełna, obliczona dla tego pośredniego punktu, jest równa ściśle prawdziwemu przyrostowi funkcji, wynikającemu z przyrostu zmiennej x od a do $a+h$ a zmiennej y od b do $b+k$.

Wnioski z twierdzenia o wartości średniej.

1) Jeżeli w jakimś obszarze pochodne cząstkowe f_x i f_y są zerami dla wszystkich par wartości x, y , to funkcja $f(x, y)$ ma stałą wartość dla wszystkich x, y tego obszaru. Wtedy bowiem $f(a+h, b+k) = f(a, b)$ dla wszystkich h i k (albowiem prawa strona wzoru (83) jest wtedy stale równa zeru).

2) Jeżeli pochodne f_x i f_y są ciągle w otoczeniu punktu (a, b) , to i funkcja $f(x, y)$ musi być ciągła w otoczeniu tego punktu. Wtedy bowiem różnica $f(x+h, y+k) - f(x, y)$ dąży do zera, gdy h i k dążą do zera, albowiem prawa strona wzoru (83) dąży wtedy do zera.

§ 113. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów.

Pochodne cząstkowe funkcji dwóch zmiennych są w ogólności także funkcjami dwóch zmiennych. Np. dla funkcji.

$$z = 2x^2y - 3y^3x + 5x^4y^2$$

pochodne cząstkowe mają postać:

$$z_x = 4xy - 3y^3 + 20x^3y^2$$

$$z_y = 2x^2 - 9y^2x + 10x^4y$$

Pochodne cząstkowe tych pochodnych nazywamy pochodnymi cząstkowymi *drugiego rzędu*; dla funkcji dwóch zmiennych istnieją *cztery* takie pochodne cząstkowe drugiego rzędu, a mianowicie:

$$\frac{\partial z_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial z_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial z_y}{\partial y}$$

Oznaczamy je następującymi symbolami:

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial z_x}{\partial x} = z_{xx} = f_{xx} = f_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial z_y}{\partial x} = z_{xy} = f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial z_x}{\partial y} = z_{xy} = f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial z_y}{\partial y} = z_{yy} = f_{yy} = f_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{array}$$

W rozważanym powyżej przykładzie otrzymujemy np.:

$$\begin{array}{l|l} z_{xx} = 4y + 60x^3y^2 & z_{xy} = 4x - 9y^3 + 40x^3y \\ z_{xy} = 4x - 9y^3 + 40x^3y & z_{yy} = -18yx + 10x^4 \end{array}$$

Spostrzegamy, że pochodne z_{xy} i z_{yx} , zwane także pochodnymi *mieszanymi*, są w tym przykładzie równe sobie:

$$z_{xy} = z_{yx}$$

Podobnie dla funkcji:

$$z = e^x \sin y$$

mamy:

$$z_x = e^x \sin y, \quad z_y = e^x \cos y$$

a stąd:

$$\begin{array}{l|l} z_{xx} = e^x \sin y & z_{yx} = e^x \cos y \\ z_{xy} = e^x \cos y & z_{yy} = -e^x \sin y \end{array}$$

Widzimy więc, że i w tym przykładzie *pochodne mieszane są równe*.

Udowodnimy, że tak jest zawsze, gdy tylko te pochodne mieszane są funkcjami *ciągłymi*.

Dowód. Chcemy okazać, że dla funkcji $z = f(x, y)$ pochodne f_{xy} i f_{yx} są sobie równe, gdy są funkcjami ciągłymi.

Tworzymy w tym celu przyrost funkcji $f(x, y)$, wynikający z przyrostu zmien-

nej x o h , t. j. $f(x+h, y) - f(x, y) = \varphi(y)$, a następnie przyrost tego przyrostu, wynikający z przyrostu zmiennej y o k , to znaczny:

$$A = \varphi(y+k) - \varphi(y) = f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - [f(x+h, y) - f(x, y)]$$

Wyrażenie to nazywamy drugą różnicą mieszaną funkcji $f(x, y)$ według zmiennej x , a następnie według zmiennej y .

Do różnicy $\varphi(y+k) - \varphi(y)$ stosujemy twierdzenie o wartości średniej (dla jednej zmiennej y) i otrzymujemy:

$$A = k \cdot \varphi'(y + \vartheta_1 k) = k(f_y(x+h, y + \vartheta_1 k) - f_y(x, y + \vartheta_1 k))$$

Stosując teraz do różnicy, zawartej w nawiasie, znowu twierdzenie o wartości średniej (dla jednej zmiennej x), otrzymujemy:

$$(a) \quad A = kh f_{yx}(x + \vartheta_2 h, y + \vartheta_1 k)$$

Możemy jednak pierwotne wyrażenie A uporządkować także w inny sposób, a mianowicie:

$$A = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - [f(x, y+k) - f(x, y)] = \psi(x+h) - \psi(x)$$

Widzimy stąd, że to samo wyrażenie A możemy uważać też za drugą różnicę mieszaną funkcji $f(x, y)$, najpierw według zmiennej y a potem według zmiennej x .

Stosując teraz dwukrotnie twierdzenie o wartości średniej, otrzymujemy

$$A = h \cdot \psi'(x + \vartheta_3 h) = h[f_x(x + \vartheta_3 h, y+k) - f_x(x + \vartheta_3 h, y)]$$

$$(b) \quad A = hk f_{xy}(x + \vartheta_3 h, y + \vartheta_1 k)$$

Z porównania wyrażeń (a) i (b) otrzymujemy:

$$f_{xy}(x + \vartheta_3 h, y + \vartheta_1 k) = f_{yx}(x + \vartheta_2 h, y + \vartheta_1 k)$$

Według założenia zarówno $f_{xy}(x, y)$ jak i $f_{yx}(x, y)$ są funkcjami ciągłymi. Przechodząc zatem po obu stronach do granicy dla $h \rightarrow 0$ i $k \rightarrow 0$, otrzymujemy ostatecznie:

$$(84) \quad \boxed{f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)} \quad \text{c. b. d. o.}$$

Uwaga. Gdyby funkcje f_{xy} i f_{yx} były nieciągłe, to mogłyby mieć różne wartości. Niechaj czytelnik sprawdzi, że dla funkcji, określonej wzorem:

$$z = f(x, y) = xy \cdot \frac{x-y}{x+y} \quad \text{dla } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\text{a} \quad z = f(x, y) = 0 \quad \text{"} \quad (x, y) = (0, 0)$$

jest: $f_{xy}(0, 0) = -1$ a $f_{yx}(0, 0) = +1$. Stwierdzić, że f_{xy} jest funkcją nieciągłą w punkcie $x=0, y=0$ (np. ta funkcja dąży do innej granicy, gdy punkt dąży do $(0, 0)$ po osi x -ów, a do innej, gdy punkt dąży do $(0, 0)$, po osi y -ów).

W dalszych rozważaniach będziemy zawsze czynili założenie, że wszystkie pochodne cząstkowe, występujące w tych rozważaniach, są ciągłe, że więc zawsze jest $f_{xy} = f_{yx}$.

Do oznaczania pierwszych i drugich cząstkowych pochodnych używa się często liter p, q, r, s, t , a mianowicie:

$$(85) \quad f_x = p, \quad f_y = q, \quad f_{xx} = r, \quad f_{xy} = f_{yx} = s, \quad f_{yy} = t$$

o ile mieszane pochodne są równe.

Przykłady. 1) Wykazać, że funkcja.

$$z = x \operatorname{tg} y$$

spełnia równanie:

$$(c) \quad (1 + q^2)r - 2pq s + (1 + p^2)t = 0$$

Obliczamy:

$$\begin{array}{l|l} p = \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} y & r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\cos^2 y} & s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\cos^2 y} \\ & t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x \sin y}{\cos^3 y} \end{array}$$

Wstawiając te wartości w dane równanie, otrzymamy:

$$\frac{-2x \operatorname{tg} y}{\cos^2 y} \cdot \frac{1}{\cos^2 y} + (1 + \operatorname{tg}^2 y) \frac{2x \sin y}{\cos^3 y} = \frac{-2x \sin y}{\cos^5 y} + \frac{2x \sin y}{\cos^5 y} = 0$$

2) Wykazać, że funkcja:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

spełnia równanie:

$$(d) \quad r t - s^2 = 0$$

Obliczamy z łatwością, że:

$$r = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad s = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \quad t = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

a stąd.

$$r t - s^2 = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^3} = 0$$

Uwaga. Równania, podające związek pochodnych cząstkowych jakiejś funkcji ze sobą lub ze zmiennymi, nazywamy równaniami różniczkowymi *cząstkowymi*. Wykazaliśmy w przykładzie 1, że funkcja $z = x \operatorname{tg} y$ spełnia równanie różniczkowe (c), a w przykładzie 2, że funkcja $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ spełnia równanie różniczkowe (d).

3) Równanie różniczkowe:

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

przekształcić na inne przez wprowadzenie nowych zmiennych:

$$x + ay = u, \quad x - ay = v$$

Ponieważ:

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2a}(u - v)$$

przeto mamy teraz do czynienia z funkcją złożoną. Zatem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot 1$$

Stąd znowu tworzymy w podobny sposób $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ i podobnie $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Po wykonaniu działań otrzymamy znacznie prostsze równanie różniczkowe o nowych zmiennych, a mianowicie: $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$.

Twierdzenie o pochodnych mieszanych odnosi się, jak nietrudno udowodnić, ogólnie do pochodnych wyższego rzędu, o ile te pochodne są ciągłe. Tak np. mamy 8 rozmaitych pochodnych trzeciego rzędu, a mianowicie:

$$\begin{aligned} & f_{xxx} \\ & f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} \\ & f_{xyy}, f_{yxy}, f_{yyx} \\ & f_{yyy} \end{aligned}$$

Jeżeli one są funkcjami ciągłymi, to tylko 4 są różne od siebie, a

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} \quad \text{i} \quad f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

Wobec tego każdą z pochodnych, w których występuje dwukrotnie różniczkowanie według x a jednokrotnie według y , można oznaczyć wspólnym symbolem: f_{x^2y} , a podobnie f_{xy^2}, f_{y^2x} symbolem f_{y^2x} .

Ogólnie można wypowiedzieć to twierdzenie w następujący sposób: wyniki, otrzymane z różniczkowania według rozmaitych zmiennych dowolną ilość razy, nie zależą od porządku, w jakim te różniczkowania wykonujemy, gdy te wyniki są funkcjami ciągłymi.

§ 114. Zastosowanie twierdzenia o pochodnych mieszanych do badania różniczki zupełnej.

Twierdzenie o pochodnych mieszanych drugiego rzędu znajduje ważne zastosowanie przy badaniu różniczek zupełnych. Różniczka zupełna funkcji dwóch zmiennych $z = f(x, y)$ ma postać:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Spółczynniki przy dx i dy są funkcjami zmiennych x, y , nazwijmy je $M(x, y)$ i $N(x, y)$, a więc:

$$dz = M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

Weźmy pod uwagę ogólnie wyrażenie, zbudowane linjowo z dx i dy i dowolnych dwóch funkcji dwóch zmiennych: $M(x, y)$ i $N(x, y)$, t. j.:

$$(c) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Założmy, że pochodne cząstkowe tych funkcji są ciągłe.

Zachodzi pytanie, czy i kiedy takie wyrażenie możemy uważać za zupełną różniczkę jakiejś jednej funkcji $z = f(x, y)$. Otóż, gdyby to wyrażenie miało być różniczką zupełną, to musiałoby być $M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$

a $N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$. Pochodnymi mieszanymi funkcji f byłyby wtedy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = M_y(x, y) = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = N_x(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Według założenia są to funkcje ciągłe, a zatem musiałyby być równe sobie. Musiałby się zatem spełniać warunek:

(85)

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Jest to konieczny warunek na to, aby wyrażenie (c) było różniczką zupełną

(o ile $\frac{\partial M}{\partial y}$ i $\frac{\partial N}{\partial x}$ są funkcjami ciągłymi). Okażemy później w rachunku całkowym, że ten warunek jest także dostateczny.

Przykłady. 1) Zbadać, czy wyrażenie:

$$(3x^3 - 5y)dx + (2xy - 7y)dy$$

jest różniczką zupełną.

Tutaj:

$$M(x, y) = 3x^3 - 5y, \quad N(x, y) = 2xy - 7y$$

a stąd:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -5, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$$

Te pochodne są różne, a zatem badane wyrażenie nie jest różniczką zupełną.

2) Zbadać, czy wyrażenie:

$$(d) \quad (4y^3 - 2)dx + (12xy^2 - 6y)dy$$

jest różniczką zupełną.

Tutaj:

$$M(x, y) = 4y^3 - 2, \quad N(x, y) = 12xy^2 - 6y$$

a stąd:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12y^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12y^2$$

a zatem:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Badane wyrażenie może być zatem różniczką zupełną. W tym specjalnym przykładzie można nietrudno okazać, że warunek ten jest także wystarczający, że więc badane wyrażenie jest istotnie różniczką zupełną, a nawet można wprost odgadnąć tę funkcję $z = f(x, y)$, dla której to wyrażenie jest różniczką zupełną.

I tak:

$$M(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = 4y^3 - 2$$

Znamy więc wartość *pochodnej* szukanej funkcji z według zmiennej x . Stąd nietrudno odgadnąć, że *pierwotna* funkcja ma postać $4y^3x - 2x$; można jednak jeszcze dodać dowolną funkcję $\varphi(y)$ zmiennej y , albowiem przy różniczkowaniu według x ta funkcja odpadnie.

Otrzymujemy zatem:

$$z = 4y^3x - 2x + \varphi(y)$$

Aby wyznaczyć funkcję $\varphi(y)$, wyzyskajmy drugi warunek:

$$N(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

A więc pochodna znalezionej funkcji z według zmiennej y ma dać:

$$N(x, y) = 12xy^2 - 6y$$

Wartością tej pochodnej jest:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 12xy^2 + \varphi'(y)$$

zatem:

$$12xy^2 + \varphi'(y) = 12xy^2 - 6y$$

a stąd:

$$\varphi'(y) = -6y$$

Znamy więc pochodną funkcji $\varphi(y)$ według zmiennej y . Stąd znowu odgadujemy funkcję pierwotną: $-3y^2$.

Można jednak jeszcze dodać dowolną stałą C , albowiem przy różniczkowaniu ta stała odpada. Wobec tego:

$$\varphi(y) = -3y^2 + C$$

Funkcja z ma więc postać:

$$(e) \quad z = 4y^3x - 2x - 3y^2 + C$$

Otrzymaliśmy zatem całą gromadę funkcji, różniących się tylko o stałą wielkość.

Próba. Różniczka zupełna tej funkcji ma wartość:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = (4y^3 - 2)dx + (12y^2x - 6y)dy$$

A więc istotnie badane wyrażenie (d) jest różniczką zupełną funkcji, przedstawionej wzorem (e).

Takie obliczanie funkcji z danej różniczki zupełnej nazywamy *całkowaniem* tej różniczki. W rachunku całkowym poznamy ogólną metodą całkowania różniczek zupełnych, opartą nie na odgadywaniu funkcji pierwotnych, lecz na ogólnych wzorach.

3) Wyrażenie:

$$4y dx - 7x dy$$

nie jest różniczką zupełną, albowiem:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4 \quad \text{a} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -7$$

a więc te pochodne są różne. Jeżeli jednak dane wyrażenie pomnożymy przez czynnik:

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$$

to otrzymamy.

$$(f) \quad \frac{1}{xy} (4y dx - 7x dy) = \frac{4}{x} dx - \frac{7}{y} dy$$

a dla tego nowego wyrażenia jest:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4}{x} \right) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{7}{y} \right) = 0$$

a więc wartości tych pochodnych są równe.

Postępując podobnie jak w poprzednim przykładzie, stwierdzi czytelnik z łatwością, że wyrażenie (f) jest różniczką zupełną następującej funkcji:

$$z = 4 \log x - 7 \log y + C$$

Taki czynnik $\mu(x, y)$, który zamienia wyrażenie, nie będące różniczką zupełną, na różniczkę zupełną, nazywamy *czynnikiem całkującym*. Wyjaśnienie tej nazwy i ogólną metodę wyznaczania takiego czynnika poznamy w rachunku całkowym. Tam także wykazemy, że każde wyrażenie postaci:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy$$

o ciągłych cząstkowych pochodnych M_x , M_y , N_x i N_y , posiada czynnik całkujący, jakkolwiek czasem jest bardzo trudno wyznaczyć efektywnie ten czynnik.

Różniczki, zupełne znalazły bardzo rozległe zastosowanie w termodynamice.

Jeżeli jakiś gaz poddajemy zmianom temperatury i objętości, to okazuje się, że przyrost energii tego gazu wyraża się wzorem:

$$(g) \quad C_v(t, v) dt + (l - p) dv$$

przyczem C_v oznacza ciepło właściwe przy stałej objętości, l ciepło utajone, p ciśnienie, t temperaturę a v objętość. Otóż okazuje się, że to wyrażenie jest różniczką zupełną, albowiem:

$$\frac{\partial C_v}{\partial v} = \frac{\partial (l - p)}{\partial t}$$

Funkcję $U(v, t)$, której różniczką zupełną jest to wyrażenie (g), nazywamy *energją*.

Badając natomiast nie przyrost energii, lecz przyrost ilości ciepła: ΔQ , otrzymujemy wzór:

$$(h) \quad \Delta Q = C_v dt + l dv$$

Okazuje się w termodynamice, że to wyrażenie nie jest różniczką zupełną, albowiem:

$$\frac{\partial C_v}{\partial v} \neq \frac{\partial l}{\partial t}$$

Jeżeli jednak obie strony wzoru (h) pomnożymy przez czynnik $\mu = \frac{1}{t}$, to otrzymujemy wyrażenie:

$$(k) \quad \frac{\Delta Q}{t} = \frac{C_v}{t} dt + \frac{l}{t} dv$$

które, jak się dowodzi w termodynamice, jest już różniczką zupełną. Tę funkcję $S(v, t)$, której różniczką zupełną jest wyrażenie (k), nazywamy *entropją*. Obydwie te funkcje: energia $U(v, t)$ i entropja $S(v, t)$ odgrywają zasadniczo ważną rolę w całej termodynamice.

§ 115. Różniczki zupełne wyższych rzędów.

Umiejąc tworzyć *pochodne* cząstkowe wyższych rzędów, potrafimy także obliczyć *różniczki zupełne* drugiego i wyższych rzędów. Wychodzimy z pierwszej różniczki zupełnej:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Aby utworzyć różniczkę zupełną drugiego rzędu czyli różniczkę zupełną z tej różniczki: $d^2z = d(dz)$, stosujemy ten wzór raz jeszcze, ale nie do z tylko do dz i otrzymujemy:

$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial(dz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y} dy$$

Otóż:

$$\frac{\partial(dz)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial(dx)}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial(dy)}{\partial x}$$

Przyrosty dx i dy zmiennych *niezależnych* uważamy za stałe, w tem znaczeniu, że każdej parze wartości x, y dajemy te same przyrosty dx i dy .

Jeżeli zaś $dx = c_1$ i $dy = c_1$, to $\frac{\partial(dx)}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial(dy)}{\partial x} = 0$ i zostaje:

$$\frac{\partial(dz)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy$$

Podobnie otrzymujemy:

$$\frac{\partial(dz)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$$

Mnożymy te pochodne przez dx i dy i dodajemy do siebie, to otrzymamy:

$$(87) \quad d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

Ten wzór, służący do obliczenia drugiej różniczki zupełnej, można napisać w symbolicznej formie:

$$(88) \quad d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} z$$

Ten sposób pisania oznacza, że wyrażenie w nawiasie trzeba podnieść do kwadratu, a następnie uważać w liczniku ∂^2 za znak drugiej pochodnej (a nie drugiej potęgi) i dopisać do każdego ∂^2 funkcję z .

W podobny sposób obliczamy ogólnie wyższe różniczki według symbolicznego wzoru:

$$(89) \quad d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} z$$

który czytamy: „ $d^n z$ równa się działaniu $\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$, podniesionemu do symbolicznej n -tej potęgi, wykonanemu na z^n ”

Wzory (87), (88), (89) odnoszą się do przypadku, gdy x, y są zmiennymi *niezależnymi*. Gdyby zaś x i y były funkcjami jednej lub dwóch zmiennych, np. $x = x(t)$, $y = y(t)$ lub $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, te wyrażenia $\frac{\partial(dx)}{\partial x}$, $\frac{\partial(dy)}{\partial x}$, $\frac{\partial(dx)}{\partial y}$ i $\frac{\partial(dy)}{\partial y}$ nie byłyby zerami i otrzymalibyśmy bar-

dziej zawiłe wzory na różniczki wyższego rzędu. Wtedy:

$$\frac{\partial(dx)}{\partial x} dx + \frac{\partial(dx)}{\partial y} dy = d^2 x, \quad \frac{\partial(dy)}{\partial x} dx + \frac{\partial(dy)}{\partial y} dy = d^2 y$$

są różne od zera i na drugą różniczkę zupełną otrzymujemy następujący wzór:

$$(90) \quad d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} z + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

Podobnie ma się rzecz dla funkcji trzech i więcej zmiennych.

Np. dla funkcji:

$$u = f(x, y, z)$$

jest:

$$(91) \quad d^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^{(2)} u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2$$

przyczem ostatnie trzy wyrazy odpadają, gdy x, y, z są zmiennymi niezależnymi, wtedy bowiem $d^2 x = d(dx) = 0$, $d^2 y = 0$ i $d^2 z = 0$.

Przykład. Wykazać, że druga różniczka funkcji:

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 4xy + 2y^2 - 36)$$

jest dla $\lambda = -1$ stale niedodatnia, a dla $\lambda = -\frac{1}{2}$ stale nieujemna. Tworzymy:

$$F_x = 2x + \lambda(10x + 4y)$$

$$F_y = 2y + \lambda(4x + 4y)$$

a następnie:

$$F_{xx} = 2 + 10\lambda \quad F_{xy} = 4\lambda, \quad F_{yy} = 2 + 4\lambda$$

a więc:

$$d^2 F = (2 + 10\lambda) dx^2 + 8\lambda dx dy + (2 + 4\lambda) dy^2$$

Dla $\lambda = -1$ otrzymamy:

$$d^2 F = -8 dx^2 - 8 dx dy - 2 dy^2 = -2(2 dx + dy)^2$$

a to wyrażenie jest stale niedodatnie.

Dla $\lambda = -\frac{1}{2}$ otrzymujemy:

$$d^2 F = \frac{2}{3} dx^2 - \frac{8}{3} dx dy + \frac{8}{3} dy^2 = \frac{1}{3}(dx - 2 dy)^2$$

a to wyrażenie jest stale nieujemne.

ROZDZIAŁ XI.

Pochodne funkcji uwikłanych.

§ 116. Dowód istnienia funkcji uwikłanej jednej zmiennej i jej pochodna.

W § 17 wprowadziliśmy pojęcie funkcji uwikłanej jednej i więcej zmiennych niezależnych. Widzieliśmy, że równanie:

$$(a) \quad f(x, y) = 0$$

nie zawsze określa funkcję uwikłaną.

Okażemy, że na to, aby *istniała* funkcja uwikłana $y = \varphi(x)$, określona równaniem $f(x, y) = 0$, a) jednoznaczna, b) ciągła i c) różniczkowalna w otoczeniu jakiegoś punktu $x = x_0$, wystarczają następujące warunki: 1° istnieje jedna para wartości: (x_0, y_0) , dla których $f(x_0, y_0) = 0$; 2° funkcja $z = f(x, y)$ i jej cząstkowe pochodne f_x, f_y są ciągle w otoczeniu tego punktu (x_0, y_0) (np. w obszarze U na fig. 104); 3° cząstkowa pochodna $f_y(x_0, y_0)$ jest różna od zera.

Dowód. a) Udowodnimy najpierw, że przy tych założeniach 1°, 2° i 3° *istnieje* jedna i tylko jedna funkcja $y = \varphi(x)$, spełniająca identycznie równanie $f(x, y) = 0$ w odpowiednio dobranym otoczeniu punktu $x = x_0$ i spełniająca warunek $\varphi(x_0) = y_0$. Dowód opiera się na tem, że $f_y(x_0, y_0)$ jest różne od zera, np. *dodatnie* i że f_y jest funkcją ciągłą. (Zupełnie podobnie przebiega dowód, gdy $f_y(x_0, y_0) < 0$). Wobec tego $f_y(x, y)$ zachowuje wartość dodatnią także w odpowiednio dobranym otoczeniu punktu (x_0, y_0) (por. § 49 d i § 54), np. w kwadracie $ABCD$ o środku w (x_0, y_0) a o bokach 2δ , na fig. 104, leżącym wewnątrz obszaru U . Jeżeli ustalimy $x = x_0$ a zmieniamy tylko y (t. j. posuwamy się po prostej EF), to $f(x_0, y)$, uważana jako funkcja jednej zmiennej y , jest ciągła i monotonicznie rosnąca w całym przedziale EF (bo $f_y > 0$; por. § 101, 3). Ponieważ zaś w samym punkcie (x_0, y_0) ma wartość zero (według 1°), przeto poniżej tego punktu, a zatem i w punkcie E , jest $f(x_0, y) < 0$ a powyżej, a więc i w punkcie F , jest $f(x_0, y) > 0$.

Wskutek ciągłości funkcji $f(x, y)$ przyjmuje ona wartość ujemną nie tylko w samym punkcie $E(x_0, y_0 - \delta_1)$, lecz także w odpowiednio dobranym otoczeniu punktu E , leżącym na odcinku AB .

Podobnie wartość dodatnią przyjmuje $f(x, y)$ nie tylko w punkcie $F(x_0, y_0 + \delta_1)$, lecz także w pewnym otoczeniu punktu F , leżącym na odcinku DC . Nazwijmy długość mniejszego z tych dwóch otoczeń $2\delta_2$, to $f(x, y)$ jest ujemną dla wszystkich punktów

odcinka A_1B_1 , a dodatnia w odcinku D_1C_1 . Obierzmy jakikolwiek punkt x_1 z odcinka A_1B_1 , i wykreślmy przez ten punkt prostą $H_1K_1 \parallel OY$. Gdy punkt posuwa się po tej prostej od H_1 do K_1 , to funkcja $f(x_1, y)$ jednej zmiennej y przechodzi od wartości ujemnej do dodatniej a zatem jako funkcja ciągła musi przejść przez wartość zero (por. § 55) i to tylko raz, ponieważ jest monotoniczna na każdym odcinku równoleg-

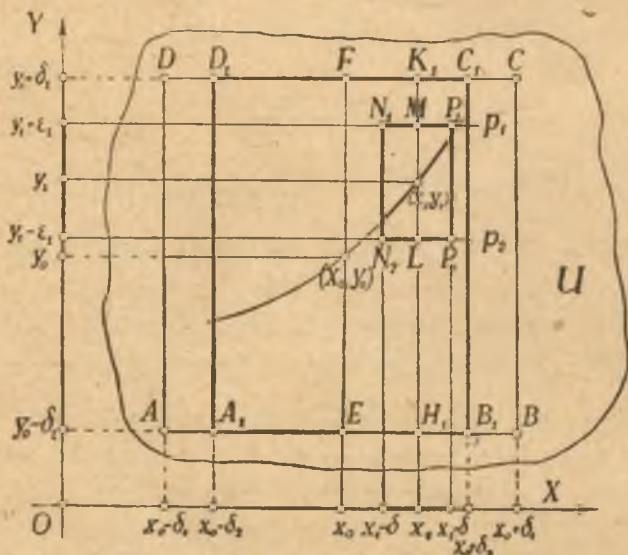


Fig. 104.

łym do OY a leżącym w kwadracie $ABCD$. A więc do każdego x_1 z odcinka A_1B_1 , t. j. z przedziału $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ należy jedno takie y_1 , że $f(x_1, y_1) = 0$.

To znaczy, że dla wszystkich x z przedziału $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ istnieje jednoznaczna funkcja y , spełniająca równanie $f(x, y) = 0$ czyli jednoznaczna funkcja uwikłana $y = \varphi(x)$.

b) Wykażemy, że ta funkcja $y = \varphi(x)$ jest ciągła w każdym punkcie przedziału A_1B_1 . Rozumowanie przy tym dowodzie przebiega podobnie do poprzedniego. Weźmy pod uwagę dowolny punkt x_1 z odcinka A_1B_1 (fig. 104). Chcemy okazać, że $y = \varphi(x)$ jest ciągła w tym punkcie, t. j., że do każdej dodatniej liczby $\varepsilon > 0$ da się dobrać takie $\delta > 0$, że dla wszystkich $|x - x_1| < \delta$ jest $|\varphi(x) - \varphi(x_1)| < \varepsilon$. Wykreślmy w tym celu dwie proste p_1 i p_2 równoległe do osi X w odstępach $+\varepsilon$ i $-\varepsilon$ od punktu (x_1, y_1) , przy czym obieramy $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$ tak, aby te równoległe trafiały bok prostokąta $A_1B_1C_1D_1$ pomiędzy A_1 i D_1 . Dobierzemy δ tak, aby było $|\varphi(x) - \varphi(x_1)| < \varepsilon_1$ a wtedy spełni się oczywiście także nierówność $|\varphi(x) - \varphi(x_1)| < \varepsilon$. W punkcie (x_1, y_1) jest $f(x_1, y_1) = 0$, a ponieważ $f(x_1, y)$ jest funkcją monotonicznie rosnącą zmiennej y , przeto w punkcie $L(x_1, y_1 - \varepsilon_1)$ jest $f(x_1, y) < 0$ a w punkcie $M(x_1, y_1 + \varepsilon_1)$ jest $f(x_1, y) > 0$. Wskutek ciągłości funkcji $f(x, y)$ jest $f(x, y) < 0$ nie tylko w punkcie L , lecz także w pewnym odpowiednio dobranym otoczeniu punktu L , leżącym na prostej p_2 wewnątrz prostokąta $A_1B_1C_1D_1$. Podobnie jest $f(x, y) > 0$ nie tylko w punkcie M , lecz także w pewnym otoczeniu punktu M na prostej p_1 . Nazwijmy długość mniejszego z tych otoczeń 2δ , to $f(x, y) < 0$ dla wszystkich punktów odcinka N_1P_1 , a $f(x, y) > 0$ dla wszystkich punktów odcinka N_1P_1 . Do każdego zatem x z przedziału $(x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ należy jedno y , zawarte między $y_1 - \varepsilon_1$ a $y_1 + \varepsilon_1$ (t. j. punkt,

zawarty pomiędzy N_1P_1 a N_2P_2 , a więc tembardziej między $y_1 - \varepsilon$ a $y_1 + \varepsilon$, spełniające równanie $f(x, y) = 0$. Znaleźliśmy więc takie $\delta > 0$, że dla wszystkich $|x - x_1| < \delta$ spełnia się nierówność $|y - y_1| < \varepsilon$ czyli $|\varphi(x) - \varphi(x_1)| < \varepsilon$, c. b. d. o.

c) Pozostało jeszcze do udowodnienia, że ta ciągła, jednoznaczna funkcja $y = \varphi(x)$, podana w formie uwikłanej zapomocą równania $f(x, y) = 0$, posiada pochodną. Okazemy, że w każdym punkcie przedziału A_1B_1 , t. j. $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, istnieje pochodna $\varphi'(x)$. Obierzmy jakikolwiek punkt x wewnątrz tego przedziału i dajmy mu tak mały przyrost h , aby i punkt $x + h$ leżał w tym przedziale. Wtedy do tej wartości $x + h$ należy jedna ściśle oznaczona wartość y a mianowicie $\varphi(x + h)$, zawarta między $y_0 - \delta_1$ a $y_0 + \delta_1$, która spełnia równanie (a). Chodzi nam o granicę stosunku:

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} \quad \text{czyli} \quad \frac{k}{h}$$

gdzie $k = \varphi(x + h) - \varphi(x)$. Wobec tego $\varphi(x + h) = y + k$. Wartości $x + h$ i $y + k$ spełniają równanie (a), a więc $f(x + h, y + k) = 0$.

Zastosujemy do różnicy $f(x + h, y + k) - f(x, y) = 0$ twierdzenie o wartości średniej (por § 112, wzór 83), otrzymamy

$$hf_x(x + \vartheta h, y + \vartheta k) + kf_y(x + \vartheta h, y + \vartheta k) = 0$$

Pochodna f_y jest różna od zera w całym prostokącie $A_1B_1C_1D_1$, a punkt $(x + \vartheta h, y + \vartheta k)$ leży w tym prostokącie, a więc można obie strony tego równania podzielić przez f_y . Mamy zatem:

$$\frac{k}{h} = - \frac{f_x(x + \vartheta h, y + \vartheta k)}{f_y(x + \vartheta h, y + \vartheta k)}$$

Gdy h dąży do zera, to i k dąży do zera wskutek ciągłości funkcji $\varphi(x)$, a wtedy licznik dąży do $f_x(x, y)$ a mianownik do $f_y(x, y)$ wskutek założonej ciągłości tych cząstkowych pochodnych. Zatem $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h}$ czyli $\varphi'(x)$ istnieje i wyraża się wzorem:

$$y' = \varphi'(x) = - \frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

O ile wiemy zgóry, że istnieje funkcja uwikłana, spełniająca równanie $f(x, y) = 0$ — nazwijmy ją $y = \varphi(x)$ — i że posiada pochodną y' , to tę pochodną możemy obliczyć z równania:

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

przez zastosowanie reguły łańcuchowej. Mamy tu bowiem do czynienia z funkcją, złożoną z dwóch funkcji: z x i z $y = \varphi(x)$.

Na podstawie wzoru (75) z § 107 otrzymujemy zatem:

$$(b) \quad \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0$$

Stąd:

$$(92) \quad y' = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

Widzimy, że koniecznym warunkiem dla stosowalności tego wzoru jest, aby było $f_y(x, y) \neq 0$. A więc, jeżeli zgóry wiemy, że istnieje funkcja uwikłana, że posiada pochodną i że $f_y \neq 0$, to możemy obliczyć tę pochodną y' według wzoru (92).

Gdyby było $f_y = 0$ ale $f_x \neq 0$, to moglibyśmy rozważać x jako funkcję zmiennej y , podaną w formie uwikłanej i otrzymalibyśmy na pochodną tej funkcji wzór

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f_y}{f_x}$$

Jeżeli zaś w jakimś punkcie jest równocześnie $f_x = 0$ i $f_y = 0$, to zarówno pochodna $\frac{dy}{dx}$ jak i $\frac{dx}{dy}$ wypadają nieoznaczone a nawet nie wiemy, czy wtedy istnieje funkcja uwikłana.

Takie wyjątkowe punkty, dla których spełniają się trzy równania:

$$f(x, y) = 0, \quad f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0$$

nazywamy punktami *osobliwymi* funkcji uwikłanej (lub linii krzywej, przedstawiającej graficznie tę funkcję uwikłaną).

W jednym z dalszych rozdziałów zajmiemy się osobno badaniem takich punktów osobliwych. Nadmieniamy jednak już teraz, że w takich punktach osobliwych linia może mieć przebieg nawet zupełnie regularny. Tak np. funkcją uwikłaną, określoną równaniem:

$$f(x, y) = (x - y)^2 = 0$$

jest $y = x$, a to jest równanie linii prostej. Pochodnymi cząstkowymi funkcji f są: $f_x = 2(x - y)$ i $f_y = -2(x - y)$.

Widoczne jest, że są one zerami dla tych wszystkich punktów, dla których $x = y$. A więc cała linia prosta $y = x$, przedstawiona danym równaniem $f(x, y) = 0$, składa się z samych punktów osobliwych, a pomimo przebieg tej funkcji uwikłanej i jej obraz graficzny są zupełnie regularne.

§ 117. Druga pochodna funkcji uwikłanej jednej zmiennej.

Drugą pochodną funkcji uwikłanej możemy obliczyć, tworząc pochodną pierwszej pochodnej:

$$y' = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}$$

przyczem należy pamiętać o tem, że jest to funkcja złożona z x i $y(x)$, jak to zaznaczono wyraźnie w nawiasach. Stosując tu wzór na pochodną ilorazu dwóch funkcji, otrzymujemy:

$$(93) \quad y'' = - \frac{f_y(f_{xx} \cdot 1 + f_{xy} \cdot y') - f_x(f_{yx} \cdot 1 + f_{yy} \cdot y')}{f_y^2}$$

Podstawiamy tu za y' wartość z wzoru (92); po uwolnieniu od mianownika otrzymamy:

$$y'' = - \frac{f_y(f_{xx}f_y - f_{xy}f_x) - f_x(f_{yx}f_y - f_{yy}f_x)}{f_y^3}$$

czyli:

$$(93) \quad y'' = - \frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

Widzimy, że do obliczenia y'' zapomocą tego wzoru jest koniecznem (prócz poprzednich warunków) istnienie cząstkowych pochodnych drugiego rzędu funkcji $f(x, y)$.

W podobny sposób oblicza się y''' i wyższe pochodne, otrzymuje się jednak wzory dość zawiłe.

Przykłady do §§ 116 i 117.

1) Obliczyć pochodną funkcji uwikłanej, danej równaniem:

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + g = 0$$

Stąd:

$$\begin{aligned} f_x &= 2ax + 2by + 2d \\ f_y &= 2bx + 2cy + 2e \end{aligned}$$

a więc:

$$y' = - \frac{f_x}{f_y} = - \frac{ax + by + d}{bx + cy + e}$$

Ta pochodna istnieje dla tych wszystkich punktów linii $f(x, y) = 0$, które nie leżą na prostej $bx + cy + e = 0$, t. j. dla wszystkich punktów, z wyjątkiem punktów przecięcia się tej prostej z linią, przedstawioną równaniem $f(x, y) = 0$.

2) Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji y , danej równaniem:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

(jest to równanie koła, znane z geometrii analitycznej).

Tutaj $f_x = 2x$, $f_y = 2y$, zatem:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x}{y}$$

Ta pochodna istnieje wszędzie z wyjątkiem punktów, w których $y = 0$, t. j. $x = \pm r$. Istotnie w tych punktach styczna do koła jest prostopadła do osi x -ów, zatem jej spadek nie istnieje (dąży do ∞ gdy $x \rightarrow r$ lub $x \rightarrow -r$).

Drugą pochodną można obliczyć przy pomocy ogólnego wzoru (93), lecz prościej otrzymamy ją, tworząc pochodną funkcji:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y(x)}$$

W ten sposób otrzymamy:

$$y'' = -\frac{y \cdot 1 - xy'}{y^2} = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$$

Ale $x^2 + y^2 = r^2$, a więc ostatecznie:

$$y'' = -\frac{r^2}{y^3}$$

3) W przykładach 1) i 2) możnaby rozwinąć te funkcje i obliczać następnie pochodne otrzymanych w ten sposób funkcji wyraźnych. Dla funkcji jednak, określonej wzorem:

$$x^3 + y^3 - 12xy = 0$$

rozwikłanie jest dość trudne, wymaga bowiem rozwiązania równania stopnia trzeciego. Pomimo to możemy z łatwością obliczyć pochodną tej funkcji uwikłanej. Tworzymy:

$$f_x = 3x^2 - 12y \quad \text{ i } \quad f_y = 3y^2 - 12x$$

Zatem

$$y' = -\frac{3x^2 - 12y}{3y^2 - 12x} = \frac{4y - x^2}{y^2 - 4x}$$

4) Równania:

$$x^y - y^x = 0$$

nie potrafimy wcale rozwinąć, a pochodną możemy obliczyć, a mianowicie:

$$f_x = yx^{y-1} - y^x \log y$$

$$f_y = x^y \log x - xy^{x-1}$$

zatem:

$$y' = -\frac{yx^{y-1} - y^x \log y}{x^y \log x - xy^{x-1}}$$

Ponieważ $x^y = y^x$, przeto, upraszczając licznik i mianownik przez x^y , otrzymamy:

$$y' = -\frac{\frac{y}{x} - \log y}{\log x - \frac{x}{y}} = -\frac{y^2 - xy \log y}{xy \log x - x^2} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x \log y - y}{y \log x - x}$$

Uwaga. Funkcję uwikłaną, określoną tem równaniem, można przedstawić w formie parametrowej:

$$x = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t, \quad y = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{1+t}$$

Czytelnik może stwierdzić, że linja, przedstawiona tem równaniem dla $x > 0$ i $y > 0$, składa się z gałęzi prostej $y = x$ i z gałęzi krzywej, mającej postać zbliżoną do hyperboli, której asymptotami są osie współrzędnych. Punkt przecięcia się gałęzi prostolinijowej z gałęzią krzywolinjową otrzymamy, gdy $t \rightarrow \infty$, t. j. dla $x = e$ i $y = e$.

§ 118. Pochodne funkcji uwikłanej dwóch zmiennych.

Podobnie do funkcji jednej zmiennej, także funkcje dwóch zmiennych mogą być podane w formie uwikłanej a mianowicie zapomoca równania

$$f(x, y, z) = 0$$

Przez rozwiązanie takiego równania można niekiedy otrzymać z w formie wyraźnej jako funkcję dwóch zmiennych:

$$z = \varphi(x, y)$$

Warunki istnienia i różniczkowalności funkcji uwikłanej dwóch zmiennych są podobne, jak dla funkcji jednej zmiennej, a mianowicie: 1^o jeżeli istnieje jedna taka trójka wartości $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, dla której spełnia się równanie:

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

2^o jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ posiada w otoczeniu punktu (x_0, y_0, z_0) ciągle cząstkowe pochodne f_x, f_y, f_z i 3^o jeżeli $f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, to istnieje jedna jedyna funkcja uwikłana $z = \varphi(x, y)$, jednoznaczna w otoczeniu (x_0, y_0) i posiadająca cząstkowe pochodne z_x, z_y , która przyjmuje dla $x = x_0$, $y = y_0$ wartość $z = z_0$. Dowód przeprowadza się podobnie, jak dla funkcji uwikłanych jednej zmiennej. Wzory na pochodne cząstkowe tej funkcji uwikłanej wyprowadzimy, różniczkując funkcję:

$$f(x, y, z(x, y)) = 0 \quad \text{czyli} \quad F(x, y) = 0$$

według zmiennych x i y .

I tak, aby znaleźć pochodną tej funkcji według zmiennej x , należy zwrócić uwagę na to, że ta zmienna występuje tu w dwa sposoby, a mianowicie wyraźnie, a ponadto w funkcji $z(x, y)$. Wobec tego:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Podobnie, różniczkując dane równanie według y , otrzymamy:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy żądane cząstkowe pochodne funkcji z w następującej postaci:

$$(94a) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = - \frac{f_x}{f_z}$$

$$(94b) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = - \frac{f_y}{f_z}$$

Drugie pochodne znajdujemy, tworząc pochodne tych ilorazów, przyczem należy pamiętać o tem, że tak x jak i y występują dwukrotnie.

Funkcje uwikłane dwóch zmiennych występują często przy badaniu powierzchni krzywych, podobnie jak przy badaniu linii krzywych mamy do czynienia z funkcjami uwikłanymi jednej zmiennej

Przykłady. Równanie kuli.

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

określa z jako funkcję zmiennych x, y . Obliczyć cząstkowe pochodne pierwsze i drugie bez rozwikływania danego równania!

Obliczamy w tym celu:

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y, \quad f_z = 2z$$

Zatem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{y}{z}$$

Drugie pochodne obliczymy z tych pochodnych, pamiętając jednak o tem, że z jest funkcją x i y . Zatem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{z \cdot 1 - x \cdot \frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = - \frac{z - x \left(- \frac{x}{z} \right)}{z^2} = - \frac{z^2 + x^2}{z^3} = - \frac{y^2 - r^2}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = - \frac{z \cdot 0 - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = - \frac{xy}{z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{z \cdot 1 - y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} = - \frac{z - y \left(- \frac{y}{z} \right)}{z^2} = - \frac{z^2 + y^2}{z^3} = - \frac{x^2 - r^2}{z^3}$$

W podobny sposób bada się funkcję uwikłaną n zmiennych, określoną zapomocą równania:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, z) = 0$$

§ 119. Pochodne dwóch funkcji jednej zmiennej, podanych w formie uwikłanej.

Ogólniejsze zagadnienia, dotyczące funkcji uwikłanych, otrzymuje się, rozważając zamiast jednej funkcji $f=0$ dwie lub więcej takich funkcji.

Jeżeli dwie funkcje zawierają tylko dwie zmienne:

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

to pary x, y , spełniające dwa takie równania, są w ogólności oddzielnymi punktami płaszczyzny XY , nie określają zatem *funkcji* w żadnym przedziale. Problem rozwiązywania takich równań nie należy do analizy lecz do algebry.

W ogólności, aby dwa takie równania określały jakies funkcje, to muszą one zawierać przynajmniej trzy zmienne.

Tak np. przy badaniu krzywych przestrzennych mamy do czynienia z funkcjami uwikłanymi, podanymi zapomocą pary równań:

$$f(x, y, z) = 0$$

$$g(x, y, z) = 0$$

Są to równania dwóch powierzchni. Wspólne rozwiązania: x, y, z tych równań dają punkty przenikania się tych powierzchni czyli linje (w ogólności krzywe) przestrzenne. Uważając np. x za zmienną niezależną, możemy przy odpowiednich założeniach wyznaczyć y i z jako funkcje wyrażone tej zmiennej x , rozwiązując układ tych dwóch równań według y i z . Otrzymamy wtedy

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x)$$

Zatem dane równania określają (przy pewnych założeniach, o których tu nie będziemy mówili) w sposób uwikłany dwie funkcje jednej zmiennej, które razem wzięte przedstawiają równania jednej krzywej przestrzennej. Chodzi nam o obliczenie pochodnych y' i z' tych dwóch funkcji. Napišmy w tym celu wyrażnie, że y i z są funkcjami zmiennej x , a więc:

$$f(x, y(x), z(x)) = 0$$

$$g(x, y(x), z(x)) = 0$$

Zarówno f jak i g jest funkcją, złożoną z trzech funkcji jednej zmiennej. Tworzymy pochodną względem x według wzoru (76) na str. 333 i otrzymujemy:

$$f_x + f_y \cdot y' + f_z \cdot z' = 0$$

$$g_x + g_y \cdot y' + g_z \cdot z' = 0$$

Z tych dwóch równań o dwóch niewiadomych y' i z' obliczamy je np. przy

pomocy wyznaczników. Otrzymamy:

$$(95) \quad \begin{cases} y' = \frac{\begin{vmatrix} -f_x & f_z \\ -g_x & g_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} = \frac{f_z g_x - f_x g_z}{f_y g_z - f_z g_y} \\ z' = \frac{\begin{vmatrix} f_y & -f_x \\ g_y & -g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}} = \frac{f_x g_y - f_y g_x}{f_y g_z - f_z g_y} \end{cases}$$

Te wzory są przydatne tylko wtedy, gdy wyznacznik, zawarty w mianowniku, jest różny od zera.

Ten wyznacznik:

$$(96) \quad J = \begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix} = f_y g_z - f_z g_y$$

nazywamy *wyznacznikiem funkcyjnym*, wyznacznikiem Jacobi'ego lub krótko *jakobjanem* funkcji f, g względem zmiennych y i z . Oznaczamy go krótko symbolem:

$$(97) \quad J = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}$$

Także w licznikach wzorów (95) występują jakobjany:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)} \quad ; \quad \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$$

Używając tych skrótów, możemy napisać wzory (95) w postaci:

$$y' = \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, x)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}} \quad z' = \frac{\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)}}$$

Uwaga. Jakobjany, które można uważać za pewien rodzaj uogólnienia pochodnych cząstkowych, odgrywają bardzo ważną rolę przy rozmaitych zagadnieniach z teorii funkcji dwóch i więcej zmiennych.

Można tworzyć jakobjany także dla 3 i więcej zmiennych, używając wyznaczników z 9 lub więcej elementów. Tak np.

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}$$

Przykłady. 1) Dla linii przenikania kuli z walcem kołowym o promieniu dwa razy mniejszym od kuli, którego kierownica styka się we-

wnętrze z kołem wielkiem, znaleźć pochodne y' i z' . Równania kuli i takiego walca, w przypadku gdy tworzące są prostopadłe do płaszczyzny XY (na fig. 105 przedstawiono przekrój tych powierzchni płaszczyzną XY), mają postać:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

$$g(x, y, z) = \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{r^2}{4} = 0$$

czyli

$$x^2 - rx + y^2 = 0$$

Stąd:

$$f_x = 2x, \quad f_y = 2y, \quad f_z = 2z$$

$$g_x = 2x - r, \quad g_y = 2y, \quad g_z = 0$$

Stosując wzory (95), otrzymamy:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2z(2x - r) - 2x \cdot 0}{2y \cdot 0 - 2y \cdot 2z} = -\frac{2x - r}{2y} & z' &= \frac{2x \cdot 2y - 2y(2x - r)}{-4yz} = \\ &= \frac{2ry}{-4yz} = -\frac{r}{2z} \end{aligned}$$

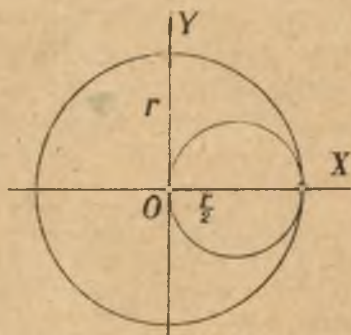


Fig. 105.

2) Niechaj czytelnik obliczy w podobny sposób y' i z' dla linii śrubowej, którą otrzymujemy z przecięcia się powierzchni śrubowej (por. § 17, str. 63—64, fig. 36) $\operatorname{tg} \frac{2\pi z}{k} - \frac{y}{x} = 0$ z walcem $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ (por. też § 124).

§ 120. Pochodne dwóch funkcji dwóch zmiennych, podanych w formie uwikłanej.

Podobną metodą możemy badać pochodne jeszcze ogólniejszych układów funkcji uwikłanych, a mianowicie funkcji, podanych zapomocą dwóch równań o czterech zmiennych:

$$f(x, y, u, v) = 0, \quad g(x, y, u, v) = 0$$

W tych dwóch funkcjach możemy uważać którekolwiek dwie zmienne za niezależne, a wtedy dwie inne możemy (przy pewnych dość ogólnych założeniach, o których tu nie wspominamy) uważać za dwie funkcje tych zmiennych. Tak np. obierając u i v za zmienne niezależne, możemy uważać x i y za funkcje zmiennych u i v :

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

Układ tych dwóch funkcji dwóch zmiennych jest więc podany w formie uwikłanej zapomocą równań $f = 0$ i $g = 0$.

Chcemy obliczyć pochodne cząstkowe: $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$ bez rozwijania tych funkcji. Tworzymy w tym celu najpierw pochodne równań $f=0$ i $g=0$ według zmiennej u , pamiętając jednak o tem, że u występuje zarówno osobno jak i w funkcjach $x(u, v)$ i $y(u, v)$.

Otrzymamy zatem:

$$f_x x_u + f_y y_u + f_u = 0$$

$$g_x x_u + g_y y_u + g_u = 0$$

Z tych równań obliczamy:

$$(98) \quad \begin{aligned} x_u &= \begin{vmatrix} -f_u & f_y \\ -g_u & g_y \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, u)} : \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \\ y_u &= \begin{vmatrix} f_x & -f_u \\ g_x & -g_u \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, x)} : \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \end{aligned}$$

Podobne wzory na x_v i y_v znajdziemy, różniczkując dane równania według v .

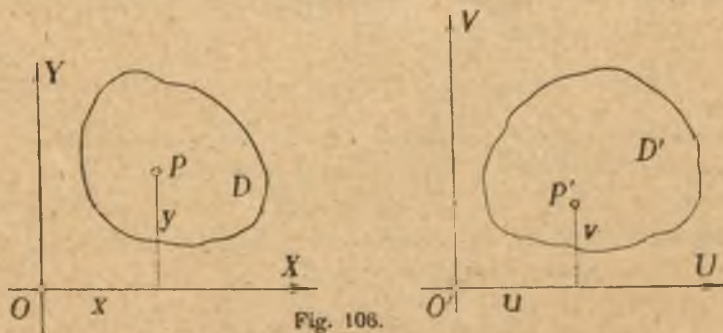
Widzimy, że koniecznym warunkiem stosowalności tych wszystkich wzorów jest, aby jacobian: $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$ był różny od zera.

§ 121. Geometryczna interpretacja dwóch funkcji dwóch zmiennych. Odzworowania.

Geometryczna interpretacja takiego układu dwóch funkcji dwóch zmiennych jest zupełnie odmienna od interpretacji przypadków poprzednio rozważanych. Równania bowiem $f=0$ i $g=0$ pomiędzy czterema zmiennymi: x, y, u, v , nie dadzą się interpretować w geometrii trójwymiarowej. Natomiast równania:

$$(99) \quad \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}$$

otrzymane z rozwiązania układu równań $f=0$ i $g=0$, interpretujemy



przy pomocy dwóch oddzielnych płaszczyzn, płaszczyzny XY i płaszczyzny UV (por. fig. 106).

Wzory (99) przyporządkowują każdemu punktowi P' płaszczyzny UV o współrzędnych u, v punkt P płaszczyzny XY o współrzędnych x, y , zwany obrazem punktu P . Całemu obszarowi D' płaszczyzny UV , w którym są określone funkcje φ i ψ , odpowiada w ogólności także jakiś obszar D na płaszczyźnie XY . Takie przyporządkowanie punktów jednej płaszczyzny punktom drugiej płaszczyzny nazywamy *odwzorowaniem* lub *przekształceniem* jednej płaszczyzny na drugą. Czasem dogodnie jest uważać tę samą płaszczyznę raz za płaszczyznę XY a drugi raz za płaszczyznę UV .

Podobnie, jak dwie funkcje dwóch zmiennych określają jakieś odwzorowanie jednej płaszczyzny na drugą, tak i jedna funkcja jednej zmiennej, np. $y = f(x)$, określa odwzorowanie jednej prostej na drugą, a mianowicie osi x -ów na oś y -ów (porównaj § 13, tworzenie skali funkcyjnej na osi y -ów), albowiem zapomocą funkcji $y = f(x)$ jest przyporządkowany każdemu punktowi osi x -ów, dla którego funkcja jest określona, jakiś punkt osi y -ów, a mianowicie punkt, mający rzędną równą y .

Odwzorowania mają bardzo rozległe zastosowania w rozmaitych działach matematyki czystej i stosowanej. Już w elementarnej geometrii analitycznej spotykamy rozmaite odwzorowania. Tak np. wzory:

$$(100) \quad \begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}$$

określają odwzorowanie płaszczyzny $X'Y'$ na płaszczyznę XY , zwane przesunięciem.

Uwaga. Wzory (100) możemy interpretować dwojako: albo jako odwzorowanie, zmieniające wszystkie punkty płaszczyzny na inne punkty tej samej lub innej płaszczyzny albo też jako zmianę układu współrzędnych, polegającą na obraniu innych, przesuniętych osi, przyczem wszystkie punkty pozostają na swych pierwotnych miejscach, a zmieniają się tylko liczby, wyrażające współrzędne tych punktów.

Wzory:

$$(101) \quad \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{aligned}$$

określają odwzorowanie, zwane obrotem.

Wzory:

$$\begin{aligned} x &= ax' \\ y &= ay' \end{aligned}$$

dają przekształcenie czyli odwzorowanie *podobne*, zmieniające każdą figurę płaszczyzny $X'Y'$ na figurą *podobną*, leżącą na płaszczyźnie XY .

Odwzorowanie, określone wzorami:

$$\begin{aligned} x &= ax' + by' + e \\ y &= cx' + ay' + f \end{aligned}$$

nazywamy powinowactwem (lub afinizmem). Przy takim odwzorowaniu np. każde koło zamienia się na elipsę (sprawdzić, podstawiając te x i y w równanie ogólne koła!).

W geometrii rzutowej bada się dokładnie ogólniejsze odwzorowanie, zwane kolineacją lub przekształceniem rzutowym. Wzory, charakteryzujące takie odwzorowanie, mają postać:

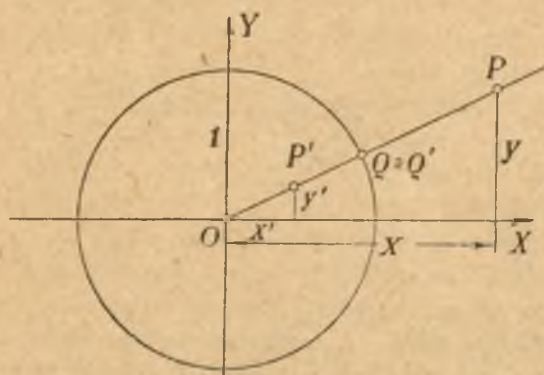


Fig. 107.

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_2 x' + b_2 y' + c_2} \\ y &= \frac{a_3 x' + b_3 y' + c_3}{a_4 x' + b_4 y' + c_4} \end{aligned}$$

W rozmaitych zagadnieniach technicznych używa się odwzorowania, zwanego przekształceniem za pomocą promieni odwrotnych lub *inwersją*. Geometryczna definicja tego odwzorowania jest następująca: aby znaleźć współrzędne x' , y' punktu P' (fig. 107),

odpowiadającego punktowi $P(x, y)$, łączymy punkt P z początkiem układu O i na tym promieniu $OP = r$ obieramy punkt P' tak, aby $OP' = r' = \frac{1}{r}$.

Wtedy:

$$x' : x = OP' : OP = \frac{1}{r} : r = 1 : r^2 = 1 : (x^2 + y^2)$$

a więc:

$$(102) \quad \left| \begin{array}{l} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \text{i podobnie: } y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{array} \right.$$

Punkty koła o promieniu równym 1, a o środku w początku układu, nie zmieniają się widocznie przy tem przekształceniu, bo:

$$OQ' = \frac{1}{OQ} = \frac{1}{1} = 1 = OQ$$

Punktom, leżącym zewnątrz tego koła, odpowiadają punkty, leżące wewnątrz niego i odwrotnie. Z tego powodu nazywamy to przekształcenie także *odbiciem* w kole o promieniu 1 i uważamy je za uogólnienie symetrycznego odbicia w prostej.

Łatwo udowodnić, że przy tem odwzorowaniu każde koło przechodzi na koło lub na linię prostą. Trzeba tylko w ogólne równanie koła:

$(x - p)^2 + (y - q)^2 - a^2 = 0$ podstawić x i y obliczone z wzorów (102), uwolnić od mianowników i uprościć przez $x'^2 + y'^2$. Wykończenie dowodu tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

Dobry pogląd na istotę odwzorowania i na zniekształcenie figur, leżących na jednej płaszczyźnie, wywołane przez odwzorowanie jej na drugą (lub tę samą) płaszczyznę, uzyskujemy często, badając, na co się zamienia siatka prostych równoległych do osi. I tak, chcąc znaleźć obrazy

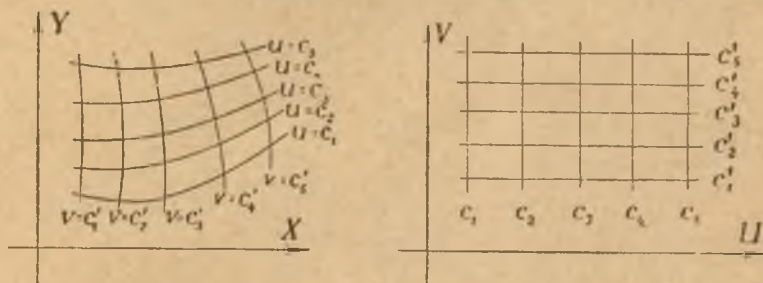


Fig. 108.

prostych równoległych do osi V na fig. 108, uzyskane zapomocą odwzorowania, określonego wzorami (99), kładziemy w tych wzorach: $u = c$.

Otrzymujemy w ten sposób:

$$x = \varphi(c, v), \quad y = \psi(c, v)$$

a to przedstawia jakąś linię — w ogólności krzywą — w formie parametrowej: zmiennym parametrem jest v .

Kładąc $u = c_1$, $u = c_2$, $u = c_3, \dots$, otrzymujemy na płaszczyźnie UV gromadę prostych, równoległych do osi V , a na płaszczyźnie XY , odpowiadającą im gromadę linii (w ogólności krzywych).

Podobnie, kładąc $v = c'$, otrzymujemy na płaszczyźnie UV gromadę prostych równoległych do osi U , a na płaszczyźnie XY , odpowiadającą im gromadę linii, w ogólności krzywych, o równaniach parametrowych:

$$x = \varphi(u, c'), \quad y = \psi(u, c')$$

Widzimy, że prostokąty na płaszczyźnie UV zamieniają się na czworoboki, w ogólności krzywoliniowe.

Tak np. wzory, służące do zamiany współrzędnych prostokątnych na biegunowe:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

podają zarazem przekształcenie płaszczyzny $R\Phi$ (zob. fig. 109) na płaszczyznę XY . Prostym równoległym $r = c$ na płaszczyźnie $R\Phi$ odpowiadają na płaszczyźnie XY koła spółśrodkowe, mające środek w po-

czątku układu, a prostym równoległym $\varphi = c$ odpowiadają proste, przechodzące przez początek układu.

Każde przekształcenie:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

możemy uważać za zmianę współrzędnych, stojąc na tem stanowisku, że każdą parę liczb, która pozwala w sposób jednoznaczny wyznaczyć położenie punktu P , nazywamy współrzędnymi tego punktu. I tak przy użyciu

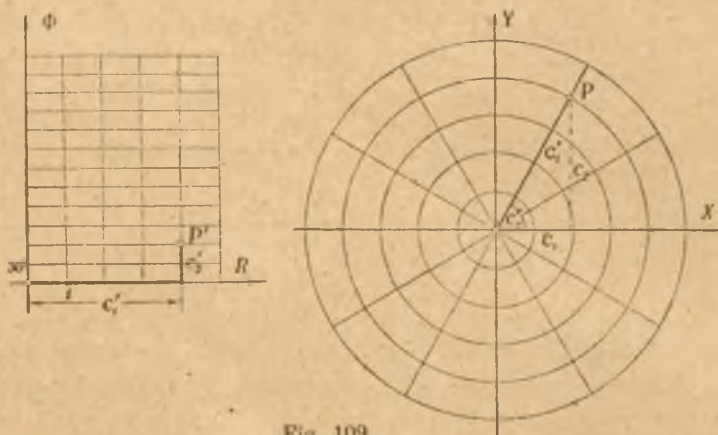


Fig. 109.

zwyczajnego układu współrzędnych prostokątnych podajemy $x = c_1, y = c_2$ i otrzymujemy punkt P , jako punkt przecięcia się dwóch linii prostych, równoległych do osi X i Y , w odstępach c_1 i c_2 . Ten sam punkt P możemy jednak otrzymać, kładąc $u = c'_1$ i $v = c'_2$, przyczem liczby c'_1 i c'_2 są otrzymane z rozwiązania układu równań:

$$c_1 = \varphi(u, v), \quad c_2 = \psi(u, v)$$

Jednakże teraz linje, odpowiadające wartościom $u = c'_1$ i $v = c'_2$, nie są już w ogólności linjami prostymi, lecz krzywymi. Tak np. przy użyciu współrzędnych biegunowych równanie $r = c'_1$ oznacza koło na płaszczyźnie XY a $\varphi = c'_2$ prostą, przechodzącą przez początek układu, a ich punktem przecięcia jest punkt P , mający współrzędne prostokątne $x = c_1 = c'_1 \cos c'_2$ i $y = c_2 = c'_1 \sin c'_2$.

Współrzędne u, v , otrzymane przez zastąpienie współrzędnych prostokątnych x, y dowolnymi funkcjami $\varphi(u, v), \psi(u, v)$, nazywamy współrzędnymi krzywoliniowymi. Siatkę linii $u = c_1$ i $v = c_2$, która powstaje przy tem przekształceniu z linii równoległych do osi U i V , nazywamy „liniami współrzędnych”. Tak np. przy użyciu współrzędnych biegunowych liniami współrzędnych są koła i proste, należące do jednego pęku. W fizyce używa

się także innych spólrzędnych krzywolinjowych, np. takich, których linjami spólrzędnych są elipsy i hiperbole, przecinające te elipsy pod kątami prostemi; takie spólrzędne nazywamy spólrzędnymi eliptycznymi (por. § 178).

§ 122. Odwracanie układu dwóch funkcyj dwóch zmiennych. Uogólnienie twierdzenia o pochodnej funkcyj odwrotnej jednej zmiennej.

Przy badaniu wszystkich tych odwzorowań płaszczyzny UV na płaszczyznę XY bardzo ważne jest badanie odwzorowań odwrotnych, t. j. odwzorowań płaszczyzny XY na płaszczyznę UV . Arytmetycznie chodzi tu o *odwrócenie* układu dwóch funkcyj:

$$(99) \quad \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}$$

to znaczy o wyznaczenie z tych dwóch równań odwrotnie zmiennych u i v jako funkcyj zmiennych x i y .

Jest to bezpośrednie uogólnienie zagadnienia o odwracaniu funkcyj jednej zmiennej, które omówiliśmy dokładnie w poprzednich rozdziałach (por. §§ 18 i 57). Nie będziemy się tutaj szczegółowo tą kwestją zajmowali, natomiast wyprowadzimy wzory na pochodne takiego układu funkcyj odwrotnych. Chodzi nam o to, aby można było obliczać pochodne takich funkcyj odwrotnych bez efektywnego obliczania u i v z danych równań (99).

Założmy, że równania (99) posiadają jako rozwiązania jakieś funkcje $u(x, y)$ i $v(x, y)$, a więc, że:

$$(a) \quad \begin{cases} x = \varphi(u(x, y), v(x, y)) \\ y = \psi(u(x, y), v(x, y)) \end{cases}$$

Chodzi nam o obliczenie pochodnych $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ zapomocą znanych

pochodnych $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$. Aby je obliczyć, utwórzmy najpierw pochodne obu stron pierwszego i drugiego równania według zmiennej x . Używając wzorów (79) z § 108 na pochodne funkcyj złożonej z dwóch funkcyj dwóch zmiennych, otrzymamy:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Stąd obliczamy np. metodą wyznaczników:

$$(103 a) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \varphi_* \\ 0 & \psi_* \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_a & \varphi_* \\ \psi_a & \psi_* \end{vmatrix}} \quad \text{czyli:} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\psi_*}{\partial(\varphi, \psi)} \quad \text{lub} \quad u_x = \frac{y_*}{\partial(u, v)}$$

$$(103 b) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_* & 1 \\ \varphi_a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_a & \varphi_* \\ \psi_a & \psi_* \end{vmatrix}} = \frac{-\psi_a}{\partial(\varphi, \psi)} \quad \text{lub} \quad v_x = \frac{-y_a}{\partial(u, v)}$$

Podobnie, utworzywszy pochodne obu stron równań (a) według zmiennej y , otrzymamy:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ 1 &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

a stąd:

$$(103 c, d) \quad u_y = \frac{-x_*}{\partial(x, y)}, \quad v_y = \frac{x_a}{\partial(u, v)}$$

Utrzymane wzory są uogólnieniem wzoru $y_x = \frac{1}{x_y}$ na pochodną funkcji odwrotnej jednej zmiennej.

Widzimy, że do istnienia pochodnych funkcji odwrotnych u, v , otrzymanych z odwrócenia dwóch funkcji dwóch zmiennych (99), nie wystarcza istnienie pochodnych x_a, x_*, y_a, y_* , lecz trzeba ponadto, aby wyznacznik funkcyjny (jakobian) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ był różny od zera.

Interesującym jest fakt, że wyznacznik funkcyjny, zbudowany z funkcji odwrotnych, t. j. $u_x v_y - u_y v_x = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, jest odwrotnością wyznacznika funkcyjnego, zbudowanego z funkcji danych. Istotnie:

$$u_x v_y - u_y v_x = \frac{y_*}{\partial(x, y)} \cdot \frac{x_a}{\partial(u, v)} - \frac{-x_*}{\partial(x, y)} \cdot \frac{-y_a}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}$$

Przykład. 1) Dla:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

chcemy obliczyć:

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Wyznacznik funkcyjny ma tu wartość:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} &= \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = \\ &= \cos \varphi \cdot r \cos \varphi - (-r \sin \varphi) \sin \varphi = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r \end{aligned}$$

Wobec tego:

$$\begin{array}{l|l} r_x = \frac{y_x}{r} = \frac{r \cos \varphi}{r} = \cos \varphi & \varphi_x = \frac{-y_r}{r} = \frac{-\sin \varphi}{r} \\ r_y = \frac{-x_y}{r} = \frac{r \sin \varphi}{r} = \sin \varphi & \varphi_y = \frac{x_r}{r} = \frac{\cos \varphi}{r} \end{array}$$

Sprawdźmy wyniki, posługując się twierdzeniem o wyznaczniku funkcyjnym przekształcenia odwrotnego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} &= r_x \varphi_y - r_y \varphi_x = \\ &= \frac{\cos \varphi \cdot \cos \varphi}{r} - \frac{\sin \varphi (-\sin \varphi)}{r} = \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{r} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

a więc istotnie:

$$\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)}}$$

Por. także przykład 2 z § 108.

2) W funkcję $V(x, y)$ wprowadzono współrzędne biegunowe r, φ .
Wyrazić sumę:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

zapomocą pochodnych według r i φ .

Po wprowadzeniu nowych zmiennych jest V funkcją złożoną zmiennych x i y , za pośrednictwem funkcji $r(x, y)$ i $\varphi(x, y)$, a zatem:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r} r_x + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \varphi_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r} r_y + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \varphi_y$$

Korzystając z wyników poprzedniego przykładu, mamy zatem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \end{aligned}$$

Oznaczmy:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = R \quad \text{a} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = S$$

to:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial S}{\partial y}$$

Te pochodne cząstkowe obliczamy znowu w ten sam sposób, a więc:

$$(b) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial r} r_x + \frac{\partial R}{\partial \varphi} \varphi_x = \frac{\partial R}{\partial r} \cos \varphi - \frac{\partial R}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial r} r_y + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \varphi_y = \frac{\partial S}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial S}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \end{cases}$$

Ale:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \cos \varphi - \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial r} \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial V}{\partial r} \sin \varphi - \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial r} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi} \sin \varphi + \frac{\partial V}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{r}$$

Te wartości wstawiamy w równania (b). Po wymnożeniu i dodaniu otrzymamy ostatecznie:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

3) Obliczmy pochodne i jacobian funkcji, otrzymanych z odwrócenia układu funkcji, charakteryzujących inwersję (por. wzory (102), str. 366):

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Tworzymy najpierw: x'_x , x'_y , y'_x i y'_y , a mianowicie:

$$x'_x = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$x'_y = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 0 - x \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$y'_x = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 0 - y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$y'_y = \frac{(x^2 + y^2) \cdot 1 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Stąd wyznacznik funkcyjny:

$$D = \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = \frac{(y^2 - x^2)(x^2 - y^2) - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{-(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^4} = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

Wobec tego:

$$x_x = \frac{y'_x}{D} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot [-(x^2 + y^2)^2] = y^2 - x^2$$

$$x_y = \frac{-x'_y}{D} = -2xy$$

$$y_x = \frac{-y'_x}{D} = -2xy$$

$$y_y = \frac{x'_y}{D} = x^2 - y^2$$

Zatem:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} = (y^2 - x^2)(x^2 - y^2) - 4x^2y^2 = -(x^2 + y^2)^2 = 1 : \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}$$

Interesującym jest, że przekształcenie odwrotne względem inwersji jest znowu inwersją, jak to łatwo bezpośrednio obliczyć z wzorów:

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Stąd bowiem wynika:

$$x'^2 + y'^2 = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

a więc: $r' = \frac{1}{r}$, a to charakteryzuje inwersję.

Można zresztą bezpośrednio obliczyć:

$$x = x'(x^2 + y^2) = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}$$

$$y = y'(x^2 + y^2) = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}$$

a więc x, y wyrażają się temi samemi wzorami zapomocą x' i y' , co i x', y' zapomocą x, y .

§ 123. Odwzorowania zdegenerowane. Zależność jednej funkcji dwóch zmiennych od drugiej takiej funkcji.

Dotychczas zajmowaliśmy się tylko takimi odwzorowaniami:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

w których wyznacznik funkcyjny był różny od zera: $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$.

Gdyby ten wyznacznik był równy zeru w jakimś punkcie odosob-

nionym, to w tym punkcie mogłyby nie istnieć pochodne cząstkowe dla funkcji odwrotnych, jak to wynika z wzorów (103), jakkolwiek mogłyby istnieć jednoznaczne funkcje odwrotne.

Tak np. dla odwzorowania:

$$x = u^3, \quad y = v$$

wyznacznik funkcyjny ma wartość:

$$x_u y_v - x_v y_u = 3u^2 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 3u^2$$

a więc ma wartość 0 dla $u = 0, v = 0$. Mimo to odwzorowanie odwrotne istnieje i jest jednoznaczne, a mianowicie wyraża się zapomocą wzorów:

$$u = \sqrt[3]{x}, \quad v = y$$

Natomiast pochodna $u_x = \frac{1}{3u^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ nie istnieje w punkcie $u = 0, v = 0$.

Bardzo ważnym w rozmaitych dowodzeniach jest przypadek, gdy wyznacznik funkcyjny jest zerem nie tylko dla odosobnionych punktów, lecz dla wszystkich punktów, wypełniających jakiś *obszar*. Mówimy wtedy, że ten wyznacznik jest *identycznie* równy zero w tym obszarze i piszemy:

$$(104) \quad D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \equiv 0$$

Okazuje się, że wtedy badane odwzorowanie jest *zdegenerowane* w ten sposób, że całemu *obszarowi*, leżącemu na płaszczyźnie UV , odpowiada nie obszar, lecz jakaś jedna *linja*, leżąca na płaszczyźnie XY lub nawet odosobnione punkty. Jeśli więc $D \equiv 0$, to nie może być mowy o jednoznacznej odwróceniu układu funkcji: $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$. Wtedy y jest jakąś funkcją jednej zmiennej x , lub x jakąś funkcją zmiennej y , lub ogólnie: x i y są związane z sobą jakimś równaniem $F(x, y) = 0$, czyli:

$$F(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = 0$$

To równanie spełnia się wtedy *identycznie* w jakimś obszarze na płaszczyźnie UV , to znaczy dla wszystkich u, v z tego obszaru. Jeżeli zachodzi taki związek między funkcjami φ i ψ , a ponadto F_φ i F_ψ są ciągłe, a nie są równocześnie zerami w każdym punkcie obszaru, to mówimy, że funkcja ψ jest *zależna* od funkcji φ lub φ od ψ .

Tak np. dla odwzorowania, określonego równaniami:

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= \sin(u + v) \end{aligned}$$

mamy:

$$x_u = 1, \quad x_v = 1, \quad y_u = \cos(u + v), \quad y_v = \cos(u + v)$$

a więc:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u y_v - x_v y_u = 1 \cdot \cos(u + v) - 1 \cdot \cos(u + v) = 0$$

Ten wyznacznik jest identycznym zerem, t.j. dla wszystkich par wartości u, v jest on równy zeru.

Widzimy odrazu, że tu:

$$y = \sin x$$

Jeżeli więc punkt (u, v) przebiega jakikolwiek obszar, to jego obraz, punkt (x, y) , przebiega tylko jedną linię, a mianowicie sinusoidę. Wszystkim punktom, leżącym na prostej $u + v = c$ na płaszczyźnie UV , odpowiada zawsze tylko jeden punkt: $(c, \sin c)$ na płaszczyźnie XY . Odwzorowanie jest zatem zdegenerowane, a funkcja $\psi(u, v) = \sin(u + v)$ jest zależna od funkcji $\varphi(u, v) = u + v$, a mianowicie: $\psi(u, v) = \sin \varphi(u, v)$.

Udowodnimy, że to twierdzenie spełnia się przy bardzo ogólnych założeniach. Załóżmy mianowicie, że funkcje $\varphi(u, v)$ i $\psi(u, v)$ posiadają ciągłe pochodne cząstkowe w jakimś obszarze i że w tym obszarze dla wszystkich (u, v) spełnia się warunek:

$$D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix} = \varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u \equiv 0$$

Rozróżnimy tu dwa przypadki.

1) Równocześnie jest $\varphi_u = 0$ i $\varphi_v = 0$ dla wszystkich punktów jakiegoś obszaru. Wtedy funkcja φ nie zawiera ani zmiennej u , ani zmiennej v , jest więc liczbą stałą: $\varphi = c$. To znaczy, że dla każdej pary wartości (u, v) z danego obszaru płaszczyzny UV odpowiedni punkt (x, y) na płaszczyźnie XY leży na jednej linii prostej $x = c$, równoległej do osi y -ów. A więc odwzorowanie jest zdegenerowane: albowiem obrazem obszaru jest zbiór punktów, leżących na jednej linii, a mianowicie na prostej, równoległej do osi y -ów. Tutaj x czyli φ jest funkcją zmiennej y czyli ψ , a więc funkcja φ jest zależna od funkcji ψ ; jest to mianowicie funkcja $x = c$, mająca stałą tę samą wartość dla każdej wartości y .

2) Jeżeli obie pochodne φ_u, φ_v nie są równocześnie zerami w całym obszarze, to znajdzie się przynajmniej jeden taki punkt (u, v) , w którym np. $\varphi_u(u, v) \neq 0$. Weźmy pod uwagę funkcję uwikłaną:

$$F(x, u, v) = x - \varphi(u, v) = 0$$

Ponieważ $F_u = -\varphi_u \neq 0$, przeto istnieje funkcja uwikłana $u = f(x, v)$, spełniająca to równanie (por. § 118). Jej pochodną według zmiennej v można obliczyć według wzoru (94a), a mianowicie:

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}} = - \frac{-\varphi_v}{-\varphi_u} = - \frac{\varphi_v}{\varphi_u}$$

Podstawmy we wzorze $y = \psi(u, v)$ za $u = f(x, v)$, to:

$$y = \psi(f(x, v), v) = g(x, v)$$

Utwórzmy pochodną:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \left(-\frac{\varphi_v}{\varphi_u}\right) + \psi_v = \psi_u \cdot \left(-\frac{\varphi_v}{\varphi_u}\right) + \psi_v$$

czyli:

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u}{\varphi_u} = \frac{D}{\varphi_u} = 0$$

To znaczy, że y nie zawiera wcale zmiennej v , a więc:

$$y = g(x)$$

A zatem obszar na płaszczyźnie UV zostaje odwzorowany na zbiór punktów, leżących na jednej linii: $y = g(x)$ na płaszczyźnie XY . Dowiedliśmy więc następującego twierdzenia.

Jeżeli wyznacznik funkcyjny jakiegos odwzorowania jest identycznym zerem, to to odwzorowanie jest zdegenerowane, to znaczy odwzorowuje jakiś obszar na zbiór punktów, leżących na jednej linii; wtedy jedna z funkcyj odwzorowujących jest zależna od drugiej.

Wykażemy, że także odwrócenie tego twierdzenia jest prawdziwe, to znaczy:

jeżeli jedna z funkcyj $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ jest zależna od drugiej, to ich wyznacznik funkcyjny jest identycznym zerem.

Założenie możemy napisać w postaci:

$$F(\varphi, \psi) = 0$$

przyczem F_φ i F_ψ są ciągle i nie są wszędzie równocześnie zerami.

Utwórzmy pochodne lewej strony względem u i v , to:

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0$$

Iloraz $\frac{\partial F}{\partial \varphi} : \frac{\partial F}{\partial \psi}$ z pierwszego równania ma tę samą wartość, co ten sam iloraz obliczony z drugiego równania, zatem:

$$- \psi_u : \varphi_u = - \psi_v : \varphi_v$$

czyli:

$$\varphi_u \psi_v - \varphi_v \psi_u = 0$$

To zaś znaczy, że wyznacznik funkcyjny $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = 0$, co było do okazania. A więc koniecznym i dostatecznym warunkiem zależności dwóch funkcyj dwóch zmiennych od siebie jest identyczne znikanie ich wyznacznika funkcyjnego.

§ 124. Trzy funkcje jednej zmiennej, podane w formie uwikłanej.

Dalsze uogólnienia funkcyj uwikłanych otrzymujemy, biorąc pod uwagę trzy równania.

Gdyby trzy równania zawierały tylko 3 zmienne, to nie mielibyśmy do czynienia z żadnymi *funkcjami* uwikłanymi, tylko otrzymalibyśmy w ogólności jedną lub kilka oddzielnych trójek wartości, jako rozwiązania takiego układu trzech równań o trzech niewiadomych.

Jeżeli jednak trzy równania zawierają *cztery* zmienne:

$$(105) \quad \begin{cases} f(x, y, z, t) = 0 \\ g(x, y, z, t) = 0 \\ h(x, y, z, t) = 0 \end{cases}$$

to takie równania określają (przy pewnych dość ogólnych warunkach, których tu nie będziemy omawiali) trzy funkcje jednej z tych zmiennych, np. zmiennej t , a mianowicie:

$$(106) \quad \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

Takie trzy funkcje mają jako obraz graficzny jakąś linię przestrzenną, podobnie jak dwa równania o trzech zmiennych (por. str. 361). Jeżeli bowiem obliczymy zmienną t z równania $x = \varphi(t)$ i wstawimy tę wartość w $y = \psi(t)$ i $z = \chi(t)$, to otrzymamy dwa równania $y = F(x)$ i $z = G(x)$, które, jak wiemy, określają jakąś linię przestrzenną.

Przykład. Spółrzędne dowolnego punktu P linii śrubowej możemy wyrazić jako funkcje kąta obrotu promienia $r = OA$

(fig. 110). Jeżeli bowiem promień OA obraca się koło osi OZ , a równocześnie punkt O wznosi się wzdłuż tej osi o odcinek proporcjonalny do kąta obrotu, to jego koniec A zakresła linię śrubową. Nazwijmy literą t

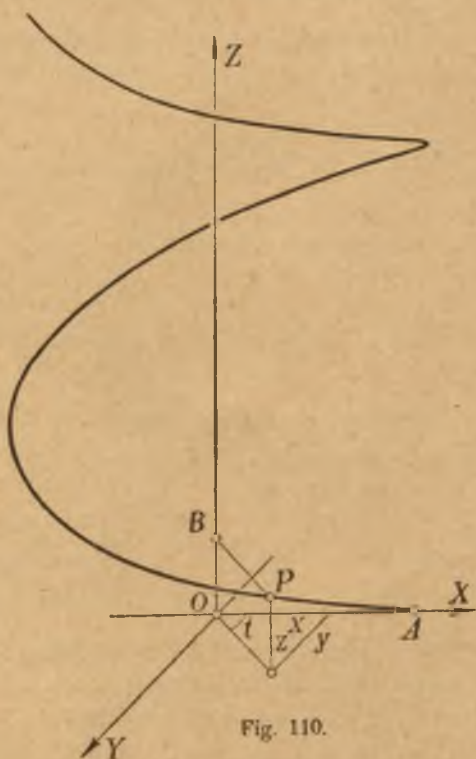


Fig. 110.

kąt obrotu, to z figury odczytujemy z łatwością współrzędne x, y, z punktu P a mianowicie:

$$(107) \quad \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \\ z = ct \end{cases}$$

Te trzy równania razem dają parametrowe przedstawienie linii śrubowej. Wartość stałej c jest w bliskim związku z t. zw. *krokiem*: k śruby, t. j. z wysokością, na jaką się wznosi punkt przy dokonaniu pełnego obrotu. Wtedy:

$$z = k = c \cdot 2\pi \quad \text{a stąd} \quad c = \frac{k}{2\pi}$$

(Por. § 119, przykład 2).

Z równań (105) można wydobyć wzory na $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ a także na $\frac{dz}{dx}, \frac{dy}{dx}$, nie będziemy się tu jednak tem zagadnieniem zajmowali, ponieważ przy dyskusji linii krzywych przestrzennych równania ich są podane zwykle odrazu w postaci (106) lub w postaci: $y = F(x), z = G(x)$.

§ 125. Trzy funkcje dwóch zmiennych, podane w formie uwikłanej i ich pochodne cząstkowe.

Jeżeli trzy równania zawierają pięć zmiennych:

$$(108) \quad \begin{aligned} f(x, y, z, u, v) &= 0 \\ g(x, y, z, u, v) &= 0 \\ h(x, y, z, u, v) &= 0 \end{aligned}$$

to określają one (przy pewnych, dość ogólnych założeniach) *trzy* funkcje dwóch zmiennych niezależnych; obierając np. u i v za zmienne niezależne, mamy:

$$(109) \quad \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

Takie trzy równania określają jakąś powierzchnię. Aby się o tem przekonać, wystarczy obliczyć u i v z równań $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$, np. $u = f(x, y), v = g(x, y)$ i wstawić te wartości w $z = \chi(u, v)$.

$$z = \chi(f(x, y), g(x, y)) = F(x, y)$$

To zaś równanie przedstawia, jak wiemy, jakąś powierzchnię.

Takie przedstawienie powierzchni zapomocą trzech równań (109) nazywamy *parametrowem* przedstawieniem powierzchni albo *parametrowem*

przedstawieniem funkcji $z = F(x, y)$ dwóch zmiennych. Zmienne pomocnicze: u, v nazywamy *parametrami* tego przedstawienia. Jest to uogólnienie parametrowego przedstawienia linii, a ogólnie: funkcji jednej zmiennej.

Gdy wartość jednego parametru ustalimy, np. kładąc $u = c$, to z równań (109) otrzymamy:

$$x = \varphi(c, v) = f_1(v)$$

$$y = \psi(c, v) = f_2(v)$$

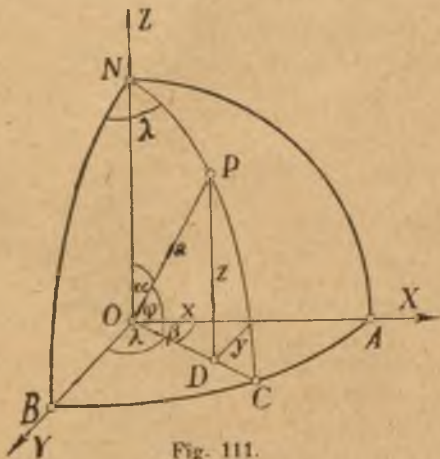
$$z = \chi(c, v) = f_3(v)$$

a to jest parametrowe przedstawienie jakiejś linii przestrzennej, leżącej na badanej powierzchni.

Tę linię nazywamy linią parametrową. Biorąc za c rozmaite wartości, otrzymamy całą gromadę linii parametrowych, pokrywających całą powierzchnię. Te linie nazywamy liniami parametrowymi (u). W podobny sposób, kładąc $v = c$, otrzymamy drugą gromadę linii parametrowych, zwanych liniami parametrowymi (v).

Forma parametrowa jest bardzo dogodna przy dyskusji powierzchni.

Przykład. Przedstawmy w formie parametrowej równanie kuli o promieniu a , a o środku w początku układu. Skorzystamy tu z dobrze znanego z geografii wyznaczania położenia punktu na kuli za pomocą dwóch kątów: długości i szerokości geograficznej. Na fig. 111 kąt λ (t. j. kąt, zawarty między płaszczyzną południka, przechodzącego przez P a płaszczyzną południka NB , obranego za początkowy) oznacza długość geograficzną punktu P a φ (kąt promienia OP z płaszczyzną równika $OACB$) jego szerokość geograficzną.



Słórzędne x, y, z dowolnego punktu P powierzchni kuli możemy wyrazić jako funkcje tych dwóch kątów, a mianowicie:

$$x = OD \cdot \sin \lambda = OP \cos \varphi \sin \lambda$$

Podobnie obliczamy y i z i otrzymujemy:

$$(110) \quad \begin{cases} x = a \cos \varphi \sin \lambda \\ y = a \cos \varphi \cos \lambda \\ z = a \sin \varphi \end{cases}$$

Jako parametry u i v występują tu kąty λ i φ . Możemy łatwo sprawdzić, że współrzędne x, y, z , określone równaniami (110), spełniają istotnie równanie kuli, albowiem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \cos^2 \varphi (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) + a^2 \sin^2 \varphi = a^2 \cos^2 \varphi \cdot 1 + a^2 \sin^2 \varphi = a^2$$

Kładąc $\lambda = c$, otrzymamy punkty południka, którego płaszczyzna jest nachylona do początkowego południka pod kątem c . Południki tworzą tu zatem gromadę linii parametrowych (λ). Drugą gromadę linii parametrowych, a mianowicie linie parametrowe (φ), otrzymamy, kładąc $\varphi = c$. W ten sposób otrzymamy, jak wiadomo, równoleżniki; zatem równoleżniki tworzą drugą gromadę linii parametrowych przy tem przedstawieniu kuli zapomocą równań (110).

Nie będziemy się tu zajmowali obliczaniem pochodnych $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$ wprost z formy uwikłanej (108), albowiem przy dyskusji powierzchni zwykle mamy podane odrazu równania (109). Natomiast bardzo ważne są przy dyskusji powierzchni pochodne cząstkowe $p = z_x$ i $q = z_y$.

Otóż z równań (109) możemy otrzymać pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ w następujący sposób. Wiemy, że $z = F(x, y)$, ale zarówno x jak i y są funkcjami zmiennych u i v . Utwórzmy z_u , to:

$$z_u = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

czyli:

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$

Podobnie:

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

Z tych dwóch równań otrzymujemy:

$$(111) \quad z_x = \frac{\begin{vmatrix} z_u & y_u \\ z_v & y_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}} \quad z_y = \frac{\begin{vmatrix} x_u & z_u \\ x_v & z_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}$$

Wszystkie pochodne, występujące po drugiej stronie, potrafimy obliczyć wprost z danych równań (109). Koniecznym warunkiem stosowalności tych wzorów jest, aby jakobian:

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

był różny od zera.

Niechaj czytelnik obliczy dla ćwiczenia z_x i z_y dla kuli, używając formy parametrowej (110) a następnie niechaj porówna wyniki z wynikami, otrzymanymi inną drogą w § 118.

§ 126. Trzy funkcje trzech zmiennych, podane w formie uwikłanej.

Jeżeli trzy równania zawierają sześć zmiennych:

$$f(x, y, z, u, v, w) = 0$$

$$g(x, y, z, u, v, w) = 0$$

$$h(x, y, z, u, v, w) = 0$$

to z rozwikłania tych równań otrzymujemy trzy funkcje trzech zmiennych niezależnych. Np. uważając u, v, w za zmienne niezależne, otrzymujemy:

$$(112) \quad \begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w) \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases}$$

Takie trzy równania interpretujemy geometrycznie jako *odwzorowanie przestrzeni* trójwymiarowej UVW na drugą przestrzeń trójwymiarową XYZ , albo też jako zmianę współrzędnych prostokątnych X, Y, Z na inne U, V, W . Do tych trójwymiarowych przekształceń odnoszą się zupełnie podobne rozważania, jak do przekształceń dwuwymiarowych, toteż nie będziemy ich tutaj powtarzali.

Tak np. nietrudno okazać, że pochodne funkcyj, które są odwróceniem układu 3 funkcyj (112), wyrażają się wzorami:

$$u_x = \frac{\partial(y, z)}{\partial(v, w)} : \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

$$u_y = \frac{\partial(z, x)}{\partial(v, w)} : \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

$$u_z = \frac{\partial(x, y)}{\partial(v, w)} : \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$

i podobnie $v_x, v_y, v_z, w_x, w_y, w_z$. Dowodzi się tych wzorów w taki sam sposób, jak wzorów (103) z § 122.

Niechaj czytelnik zastosuje dla ćwiczenia te wzory do obliczenia pochodnych $r_x, r_y, r_z, \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \beta_x, \beta_y, \beta_z$ przy zamianie współrzędnych prostokątnych trójwymiarowych na współrzędne biegunowe w przestrzeni. Wzory, służące do tej zamiany, mają postać:

$$x = r \sin \alpha \cos \beta$$

$$y = r \sin \alpha \sin \beta$$

$$z = r \cos \alpha$$

Kąty α i β są w bardzo bliskim związku ze współrzędnymi geograficznymi na kuli o promieniu r , a mianowicie: $\alpha = 90^\circ - \varphi$, $\beta = 90^\circ - \lambda$ (por. fig. 111).

Tych p równań o p niewiadomych możemy rozwiązać w sposób jednoznaczny w skończonej formie, gdy jakobian:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \frac{\partial f_p}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_p} \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_p)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_p)}$$

jest różny od zera.

W podobny sposób oblicza się $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y_p}{\partial x_p}$ i inne pochodne cząstkowe. Jakobian pozostaje dla wszystkich tych pochodnych ten sam. Wszystkie omówione poprzednio przypadki obliczania pochodnych funkcji uwikłanych są zawarte w tej ogólnej metodzie jako przypadki specjalne.

ROZDZIAŁ XII.

Wzory Taylora i Maclaurina w przypadku ogólnym.

§ 128. Ogólny wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej

Wyprowadziliśmy już w § 97 wzór Taylora dla funkcji całkowitych wymiernych czyli dla wielomianów. Widzieliśmy mianowicie, że każdy wielomian:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

można przedstawić w postaci następującego wzoru, zwanego wzorem Taylora:

$$(67) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

gdzie a jest zupełnie dowolną liczbą. Znając w jakimś jednym dowolnym punkcie $x = a$ wartość $f(a)$ tego wielomianu i wartości jego kolejnych pochodnych: $f'(a)$, $f''(a)$, ..., możemy przy pomocy tego wzoru obliczyć wartość tego wielomianu dla każdej innej dowolnej liczby x .

Tylko funkcje całkowite wymierne dadzą się przedstawić *ściśle* takim wzorem, albowiem prawa strona tego wzoru jest funkcją całkowitą wymierną stopnia n w zmiennej x .

Natomiast każdą inną funkcję, posiadającą $n - 1$ pochodnych dla $x = a$, możemy przedstawić w postaci zbliżonej do wzoru (67), a różniącej się od tego wzoru tylko ostatnim wyrazem, a mianowicie w postaci:

$$(113) \quad \boxed{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x - a)^{n-1} + R_n(x, a) \dots}$$

Ten wzór nazywamy (ogólnym) *wzorem Taylora*.

Funkcja $f(x)$ jest tu przedstawiona zapomocą wielomianu $(n-1)$ -go stopnia i zapomocą wyrazu dopełniającego, czyli reszty $R_n(x, a)$. Ta reszta jest prosto różnicą między daną funkcją $f(x)$ a wielomianem:

$$T_{n-1}(f; x, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

Nazwijmy ten wielomian *wielomianem Taylora* $(n-1)$ -go stopnia, utworzonym dla funkcji f w miejscu a . Możemy powiedzieć, że przybliżamy czyli *aproksymujemy* daną funkcję przy pomocy wielomianu Taylora stopnia $n-1$ i popełniamy przytem błąd $R_n(x, a)$. Taka aproksymacja będzie miała wartość praktyczną tylko wtedy, gdy błąd $R_n(x, a)$ będzie dążył do zera przy wzrastaniu stopnia wielomianu aproksymującego. Wtedy bowiem będzie można do danego ε dobrać tak wielkie n , że $|f(x) - T_{n-1}(f; x, a)| < \varepsilon$, że więc wielomian Taylora będzie przedstawiał daną funkcję z tak wielkiem przybliżeniem, jakiego zgóry żądamy.

Wyprowadzimy w dalszym ciągu rozmaite dogodne wzory na resztę $R_n(x, a)$, pozwalające ocenić wielkość tego błędu i przekonamy się, że istotnie w najpospolitszych w praktyce przypadkach uzyskujemy bardzo dobrą aproksymację funkcji zapomocą takiego wielomianu Taylora i to albo dla wszystkich wogóle wartości x albo przynajmniej dla wszystkich wartości x , wziętych z jakiegoś skończonego przedziału, otaczającego punkt $x = a$. Co więcej, uzyskamy w ten sposób zupełnie dokładne przedstawienie rozmaitych funkcji zapomocą nieskończonego szeregu, którego częściowemi sumami są właśnie kolejne wielomiany Taylora.

Najpierw jednak zastanowimy się nad geometrycznem znaczeniem takiej aproksymacji funkcji zapomocą wielomianów Taylora i zbadamy, jakie to geometryczne rozważania prowadzą do tych wielomianów.

§ 129. Geometryczne znaczenie aproksymacji zapomocą wielomianu Taylora.

Chcemy aproksymować dowolną linię o równaniu $y = f(x)$ w otoczeniu punktu $x = a$ zapomocą prostszych, łatwiejszych linii. Załóżmy, że funkcja $f(x)$ posiada dla $x = a$ pochodne $f'(a), f''(a), \dots, f^{(n-1)}(a)$.

Pierwszą linią, jaka się nam tu nasuwa, jest linia prosta o równaniu ogólnem

$$y_1 = Ax + B$$

która przechodzi przez punkt P danej linii o współrzędnych $x = a, y = f(a)$ i ma w tym punkcie spadek równy spadkowi badanej linii (por. fig. 112). Żądamy więc spełnienia się dwóch warunków:

1^o rzędna $\bar{y}_1$ linii prostej w punkcie $x=a$ ma być równa rzędnej linii $y=f(x)$ dla $x=a$, t. j. $f(a)$ i 2^o ma być $\bar{y}'_1(a)=f'(a)$.

Z tych dwóch warunków:

$$Aa + B = f(a)$$

$$A = f'(a)$$

możemy obliczyć wartości stałych A i B i otrzymamy oczywiście równanie stycznej w punkcie P :

$$\bar{y}_1 = f(a) + f'(a)(x - a)$$

jako pierwszą aproksymację.

Widzimy, że po prawej stronie występuje tu wielomian Taylora

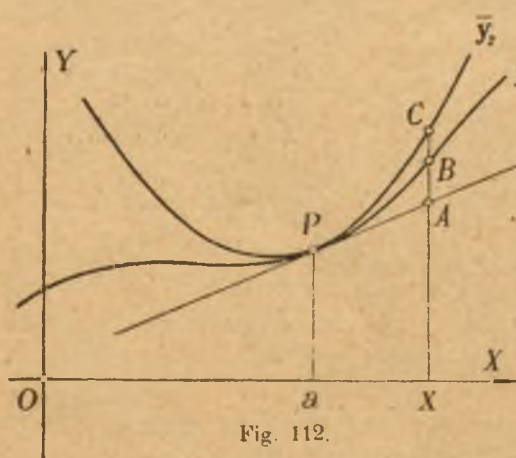


Fig. 112.

1-go stopnia. Oczywiście, że w ogólności $y \neq \bar{y}_1$ poza punktem $x=a$, a błąd: $R_1(x, a)$, przedstawiony na fig. 112 odcinkiem AB , zależy od a , t. j. od tego, w którym punkcie wykreślono styczną i od $x-a$, czyli od tego, jak daleko posunęliśmy się od punktu $x=a$.

Możemy zatem napisać:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1(x, a)$$

Lepszą aproksymację otrzymamy, biorąc jako linię aproksymującą zamiast linii prostej parabolę drugiego stopnia o osi równoległej do osi Y , t. j. parabolę o równaniu:

$$\bar{y}_2 = Ax^2 + Bx + C$$

Ponieważ w tem równaniu występują trzy stałe: A, B, C , przeto możemy na tę linię nałożyć trzy warunki i uzyskać w ten sposób większy stopień aproksymacji aniżeli zapomocą prostej stycznej.

Otóż, uogólniając postępowanie, które doprowadziło w poprzednim przypadku do prostej stycznej, żądamy, aby:

$$\bar{y}_2(a) = f(a)$$

$$\bar{y}'_2(a) = f'(a)$$

$$\bar{y}''_2(a) = f''(a)$$

Jeżeli się spełniają te trzy warunki, to mówimy, że te dwie linie mają w punkcie $x=a$ styczność rzędu wyższego niż pierwszy, a mianowicie styczność rzędu co najmniej drugiego.

Uwaga. Później zobaczymy, że wtedy te dwie linie mają w punkcie P jednakowy stopień zakrzywienia czyli jednakową *krzywiznę*. Uwaga ta stanie się jednak dopiero wtedy zupełnie zrozumiałą, gdy wprowadzimy metodę mierzenia stopnia zakrzywienia (por. § 183).

Warunki nasze możemy przedstawić w postaci:

$$Aa^2 + Ba + C = f(a)$$

$$2Aa + B = f'(a)$$

$$2A = f''(a)$$

Stąd nietrudno obliczyć stałe A, B, C , a mianowicie:

$$A = \frac{1}{2}f''(a), \quad B = f'(a) - af''(a), \quad C = f(a) - \frac{1}{2}f''(a)a^2 - (f'(a) - af''(a))a$$

Wobec tego równanie szukanej paraboli przyjmuje postać:

$$y_2 = \frac{1}{2}f''(a)x^2 + (f'(a) - af''(a))x + f(a) - \frac{1}{2}f''(a)a^2 - af'(a) + f''(a)a^2$$

czyli:

$$y_2 = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2 = T_2(f; x, a)$$

Widzimy, że równanie takiej paraboli, która ma z daną linią styczność rzędu co najmniej drugiego, wyraża się zapomocą wielomianu Taylora 2-go stopnia. Parabola ta zgadza się z daną krzywą tylko w punkcie $x = a$; poza tym punktem jest w ogólności $y_2 \neq y$, jednakże błąd: $R_2(x, a)$, przedstawiony na figurze odcinkiem BC , jest w pobliżu punktu P mały, mniejszy zwykle aniżeli błąd AB , wynikający z aproksymowania danej linii zapomocą prostej stycznej.

Biorąc podobnie pod uwagę parabolę trzeciego stopnia o równaniu:

$$y_3 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

i żądając styczności co najmniej trzeciego rzędu, otrzymamy:

$$y_3 = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 = T_3(f; x, a)$$

Ogólnie: parabola $(n - 1)$ -go stopnia, mająca z daną linią $y = f(x)$ styczność co najmniej $(n - 1)$ -go rzędu, t. j. parabola, której równanie w punkcie $x = a$ zgadza się z równaniem danej krzywej zarówno co do wartości samej funkcji jak i jej $n - 1$ początkowych pochodnych, ma równanie

$$y_{n-1} = T_{n-1}(f; x, a)$$

a więc prawa strona przedstawia wielomian Taylora $(n - 1)$ -go stopnia, utworzony dla funkcji $y = f(x)$.

Ten wynik można było przewidzieć zgóry, ponieważ wielomian, przyjmujący wraz z swemi pochodnymi w danym miejscu $x = a$ dane wartości $f(a), f'(a) \dots f^{(n-1)}(a)$, daje się w myśl § 97 przedstawić wzorem Taylora.

Zatem geometryczne znaczenie wzoru Taylora jest następujące: jest to zastąpienie danej krzywej parabolą $(n-1)$ -go stopnia, mającą z daną krzywą styczność $(n-1)$ -go rzędu w danym punkcie $x=a$ i resztą $R_n(x, a)$.

§ 130. Wzór Maclaurin'a.

Dla $a=0$ wzór Taylora przechodzi na wzór:

$$(114) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + R_n(x)$$

zwany wzorem Maclaurina (funkcję $R_n(x, 0)$ oznaczyliśmy tu krótko $R_n(x)$). Wszystko, cośmy mówili o aproksymacji zapomocą wzoru Taylora w punkcie $x=a$, odnosi się oczywiście także do wzoru Maclaurina w punkcie $x=0$.

§ 131. Wzory na wyraz dopełniający we wzorze Taylora.

Zasadniczo ważną rzeczą przy używaniu wzoru Taylora lub Maclaurina jest dokładne zbadanie wyrazu dopełniającego czyli reszty tego wzoru. Ta reszta ma postać.

$$R_n(x, a) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \right)$$

Postaramy się przedstawić całe to wyrażenie w dogodniejszej, zwięźlejszej formie. Do istnienia wzoru (113) wystarcza, jeżeli funkcja posiada $n-1$ pochodnych w punkcie $x=a$. Natomiast do wyprowadzenia dogodnych wzorów na resztę potrzebne są jeszcze inne, dalej idące założenia. Załóżmy mianowicie, że funkcja $f(x)$ posiada $(n-1)$ -szą pochodną ciągłą w całym przedziale zamkniętym $\langle a, x \rangle$ i że n -ta pochodna $f^{(n)}(x)$ istnieje w przedziale otwartym (a, x) . Wyłączmy z $R_n(x, a)$ czynnik $(x-a)^p$, przyczem p jest dowolną liczbą dodatnią, nie przekraczającą n , t. j. $0 < p \leq n$, a więc:

$$R_n(x, a) = (x-a)^p \cdot P_n(x, a)$$

Przenieśmy we wzorze Taylora wszystkie wyrazy na lewą stronę i zamiast stałej liczby a napiszmy zmienną z we wszystkich wyrazach z wyjątkiem $P_n(x, a)$. Wtedy lewa strona będzie jakąś funkcją zmienną z ; nazwijmy ją $F(z)$, a więc:

$$F'(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \dots - \\ - \frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} - (x-z)^p \cdot P_n(x, a)$$

Ta pomocnicza funkcja staje się równa zeru dla $z=a$ i dla $z=x$, albowiem dla $z=a$ otrzymujemy wzór (113) Taylora, w którym przeniesiono wszystkie wyrazy na jedną stronę, a dla $z=x$ jest $f(x)=f(z)$, więc dwa początkowe wyrazy odpadają, a we wszystkich dalszych wyrazach występuje czynnik $x-z$ w rozmaitych potęgach, a więc dla $z=x$ te wszystkie dalsze wyrazy odpadają. Jest więc:

$$F(a) = 0 \quad \text{ i } \quad F(x) = 0$$

Funkcja $F(z)$ jest różniczkowalna w całym przedziale (a, x) , ponieważ wszystkie wyrazy prawej strony, zawierające z , są według założenia różniczkowalne i jest ciągła w całym przedziale zamkniętym $\langle a, x \rangle$. Do tej funkcji pomocniczej stosuje się zatem twierdzenie Rollego (§ 99) o wartości średniej, a mianowicie pochodna tej funkcji jest równa zeru przynajmniej dla jednej wartości z , pośredniej między a i x . Pochodna funkcji $F(z)$ według zmiennej z ma wartość:

$$F'(z) = -f'(z) + f'(z) - f''(z)(x-z) + 2(x-z)\frac{f''(z)}{2!} - \\ - \frac{f'''(z)}{2!}(x-z)^2 + 3(x-z)^2 \cdot \frac{f'''(z)}{3!} - \dots + (n-1)(x-z)^{n-2} \frac{f^{(n-1)}(z)}{(n-1)!} - \\ - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} + p(x-z)^{p-1} P_n(x, a)$$

Po prawej stronie odpadają wszystkie wyrazy z wyjątkiem dwóch końcowych a więc:

$$F'(z) = - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1} + p(x-z)^{p-1} P_n(x, a)$$

Ta pochodna jest równa zeru dla $z=\xi$, przyczem $a < \xi < x$ lub $x < \xi < a$. Tę wartość pośrednią ξ możemy napisać w postaci:

$$\xi = a + \vartheta(x-a) \quad \text{ przyczem } 0 < \vartheta < 1$$

A więc $F'(\xi) = 0$ czyli.

$$- \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} [x-a-\vartheta(x-a)]^{n-1} + p[x-a-\vartheta(x-a)]^{p-1} P_n(x, a) = 0$$

a stąd:

$$P_n(x, a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!p} \frac{(x-a)^{n-1}(1-\vartheta)^{n-1}}{(x-a)^{p-1}(1-\vartheta)^{p-1}} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!p} (x-a)^{n-p}(1-\vartheta)^{n-p}$$

Wobec tego:

$$(115) \quad R_n(x, a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!p} (x-a)^n (1-\vartheta)^{n-p}$$

gdzie:

$$\xi = a + \vartheta(x-a) \quad a \quad 0 < \vartheta < 1$$

Ten wzór na resztę we wzorze Taylora podał Schlömilch.

W tym wzorze p jest dowolną liczbą dodatnią, nie przekraczającą n . Najczęściej używa się specjalnych przypadków wzoru Schlömilcha, wynikających z obrania $p=1$ lub $p=n$.

I tak dla $p=1$ otrzymujemy następujący wzór, podany przez Cauchy'ego:

$$(116) \quad R_n(x, a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} (x-a)^n (1-\vartheta)^{n-1}$$

W tym wzorze występuje dwukrotnie nieoznaczona bliżej liczba ϑ : raz w ξ a drugi raz w $(1-\vartheta)^{n-1}$

Kładąc $p=n$, otrzymujemy następujący wzór na resztę, zwany wzorem Lagrange'a:

$$(117) \quad R_n(x, a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^n$$

Ten wzór zawiera tylko raz liczbę ϑ a mianowicie w $\xi = a + \vartheta(x-a)$. Nadmienić należy, że ϑ ma w każdym z tych wzorów inną wartość i że ta wartość zależy od x , od a i od n , jest jednak zawsze dodatnim ułamkiem właściwym. Najłatwiejszym do zapamiętania jest wzór Lagrange'a. Jeżeli bowiem napiszemy pełny wzór Taylora wraz z resztą w formie Lagrange'a:

$$(118) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x-a)^n$$

to spostrzeczemy, że wzór ten tylko jedną literą różni się od wzoru Taylora dla wielomianu (por. § 97, wzór (67)), a mianowicie w ostatnim wyrazie występuje w n -tej pochodnej litera ξ zamiast a .

Dla $a=0$ otrzymujemy $\xi = \vartheta x$ i wzór (118) przyjmuje postać:

$$(119) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n!} x^n$$

przyczem $0 < \vartheta < 1$. Jest to ogólny wzór Maclaurina z resztą w formie Lagrange'a.

Jakkolwiek wzór Lagrange'a na wyraz dopełniający jest najprostszy, to jednak w niektórych rozważaniach okazuje się dogodniejszym — jak to wnet zobaczymy — użycie innego wzoru na resztę, np. wzoru Cauchy'ego.

Wzór Taylora można pojmować także jako wzór na przyrost funkcji; przenosząc bowiem $f(a)$ we wzorze (118) na lewą stronę, otrzymujemy $f(x) - f(a)$ czyli $\Delta f(x)$, wyrażone przez kolejne pochodne. Wyrażaliśmy już przyrost funkcji zapomocą pierwszej pochodnej na jakimś miejscu pośrednim, mianowicie przy pomocy twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej (por. wzór (68), str. 317):

$$(68) \quad f(x+h) - f(x) = hf'(x + \vartheta h)$$

Otóż wzór Taylora jest dalszem szczegółowem rozwinięciem tego wzoru. Aby to jasno wystąpiło, zmieńmy we wzorze (118) oznaczenia w następujący sposób: zamiast x wprowadźmy $x+h$, a zamiast a literę x , to zamiast $x-a$ należy wprowadzić $x+h-x$ czyli h i otrzymamy:

$$(118a) \quad f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}h^n$$

gdzie ξ jest jakąś wartością pośrednią pomiędzy x a $x+h$, a więc $\xi = x + \vartheta h$, przyczem $0 < \vartheta < 1$.

Twierdzenie o wartości średniej, wyrażone wzorem (68), możemy pojmować jako przedstawienie prawdziwego przyrostu $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ zapomocą wartości różniczki $df = f'(x) \cdot h$, ale nie na miejscu x , lecz na miejscu pośrednim: $x + \vartheta h$ i możemy napisać wzór (68) w postaci:

$$(68a) \quad \Delta f = [df]_{x+\vartheta h}$$

Wzór Taylora możemy pojmować podobnie jako przedstawienie prawdziwego przyrostu zapomocą kolejnych różniczek. Istotnie $f'(x) \cdot h$ jest pierwszą różniczką: df (por. definicję różniczki w § 68, wzór (13)), $f''(a)h^2$ jest drugą różniczką: d^2f (por. wzór (b) w § 93, na str. 296) i t. d. A więc wzór Taylora (118a) można napisać także w następującej postaci:

$$(120) \quad \Delta f = df + \frac{1}{2!}d^2f + \frac{1}{3!}d^3f + \dots + \frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f + \frac{1}{n!}[d^n f]_{x+\vartheta h}$$

Tu wszystkie różniczki, aż do $(n-1)$ -szej włącznie, odnoszą się do wartości x , a ostatnia jest obliczona dla wartości $x + \vartheta h$, co też wyraźnie zaznaczono we wzorze (120).

Z tej postaci wzoru Taylora widzimy, że daje on rozkład prawdziwego przyrostu funkcji na różniczki rozmaitych rzędów, przyczem ostatnia różniczka jest obliczona dla wartości pośredniej a wszystkie poprzednie dla początkowego punktu x .

§ 132. Nieskończony szereg Taylora.

Wróćmy do postaci wzoru Taylora, wyrażonej wzorem (113) (str. 384). Załóżmy, że funkcja posiada ciągle pochodne wszystkich rzędów.

Jeżeli się okaże, że dla jakiegoś x reszta $R_n(x, a)$ dąży do zera, gdy n dąży do nieskończoności, to ciąg sum częściowych szeregu nieskończonego:

$$(121) \quad f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

dąży do $f(x)$, t. j. do wartości funkcji w miejscu x , albowiem taka suma częściowa wyraża się wzorem:

$$S_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} = f(x) - R_n(x, a)$$

zatem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, a) = f(x) - 0 = f(x)$$

A więc *wartością* czyli sumą (por. § 35) szeregu nieskończonego (121) jest wtedy wartość funkcji $f(x)$ na miejscu x . Ten nieskończony szereg (121), otrzymany z wzoru Taylora, nazywamy *szeregiem Taylora* dla funkcji $f(x)$ i piszemy, w razie, gdy on przedstawia funkcję, t. j. gdy $R_n(x, a)$ dąży do zera:

$$(122) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

lub:

$$(122a) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

Tutaj $f^{(0)}(a)$ ma znaczenie $f(a)$, $0! = 1$, a $(x-a)^0 = 1$ stale, nawet dla $x = a$.

Ten wzór jest prawdziwy tylko pod tem założeniem, że $R_n(x, a)$ dąży do zera, gdy n dąży do nieskończoności. W przeciwnym razie, jak to później zobaczymy, szereg Taylora, zbudowany dla jakiejś funkcji,

nie przedstawia tej funkcji, nawet wtedy, gdy jest szeregiem zbieżnym a więc sama zbieżność szeregu Taylora nie jest warunkiem wystarczającym na to, aby ten szereg przedstawiał tę zgóry podaną funkcję $f(x)$, z której otrzymaliśmy szereg: może on bowiem dążyć do innej funkcji, gdy $R_n(x, a)$ nie dąży do zera. Może się okazać, że dla niektórych x szereg Taylora przedstawia funkcję $f(x)$ a dla innych nie; przykłady takiego zachowania się szeregu Taylora spotkamy również niebawem.

Widzimy stąd, jak ważną jest rzeczą dokładne zbadanie reszty wzoru Taylora. Badanie to przeprowadzimy w następnych paragrafach dla najważniejszych funkcji elementarnych, różnych od wielomianów (dla wielomianów bowiem szereg Taylora składa się tylko z skończonej liczby wyrazów).

Szereg Taylora, utworzony dla $a = 0$, nazywamy *szeregiem Maclaurina*. Ma on postać:

$$(122\ b) \quad f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

czyli:

$$(122\ c) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

§ 133. Rozwinięcie funkcji wykładniczej na wzór i szereg Maclaurina.

Rozpoczniemy od funkcji wykładniczej:

$$y = e^x$$

Do zbudowania *wzoru Maclaurina* potrzebne są wartości n początkowych pochodnych.

Otóż tutaj

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

Dla $x = 0$ otrzymujemy:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = e^0 = 1$$

Potrzebna jest jeszcze n -ta pochodna na miejscu ϑx ; otóż

$$f^{(n)}(\vartheta x) = e^{\vartheta x}$$

Wzór Maclaurina, z resztą w postaci Lagrange'a, ma więc tu postać:

(123)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

Pozornie nie uzyskaliśmy wiele, albowiem po drugiej stronie występuje także funkcja wykładnicza i to nawet w postaci bardziej skomplikowanej: $e^{\theta x}$. Jednakże przekonamy się, że reszta:

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}$$

dąży do zera przy $n \rightarrow \infty$ i to dla każdego x .

Dowód. Obierzmy jakiekolwiek stałe x , np. $x = x_1$ dodatnie. Wtedy

$$e^{\theta x_1} < e^{x_1} = A$$

przyczem stała A nie zależy już od n . Zatem

$$(a) \quad 0 < R_n(x_1) < \frac{x_1^n}{n!} A$$

Okazemy, że wyrażenie $\frac{x_1^n}{n!}$ zawsze dąży do zera, przy każdym, choćby dowolnie wielkiem, stałym x_1 . Jeżeli x_1 jest ułamkiem właściwym, to odrazu jest to widocznem, ponieważ wtedy licznik dąży do zera a mianownik do ∞ , gdy $n \rightarrow \infty$. Jeżeli zaś $x_1 \geq 1$, to nazywając największą liczbę całkowitą, zawartą w x_1 , literą g , mamy:

$$g \leq x_1 < g + 1$$

Weźmy $n > g$ i rozdzielimy ułamek $\frac{x_1^n}{n!}$ na dwie części, z których pierwsza niechaj zawiera g czynników, a druga pozostałe czynniki, t. j.

$$\frac{x_1^n}{n!} = \left(\frac{x_1}{1} \cdot \frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_1}{3} \cdot \dots \cdot \frac{x_1}{g} \right) \cdot \left(\frac{x_1}{g+1} \cdot \frac{x_1}{g+2} \cdot \dots \cdot \frac{x_1}{n} \right)$$

Pierwsza część ma jakąś wartość stałą B , niezależną od n , czynniki zaś drugiej części są wszystkie ułamkami właściwymi malejącymi. Jeżeli zatem oznaczmy pierwszy z tych ułamków: $\frac{x_1}{g+1} = u$, to wszystkie dalsze są mniejsze od u ; jest $n - g$ takich ułamków, zatem:

$$0 < \frac{x_1^n}{n!} \leq B \cdot u^{n-g}$$

Ale $\lim_{n \rightarrow \infty} u^{n-g} = 0$, ponieważ u jest ułamkiem właściwym, a więc i $Bu^{n-g} \rightarrow 0$; na podstawie twierdzenia o trzech ciągach mamy więc:

(124)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1^n}{n!} = 0$$

Jeżeli $x_1 = 0$, to oczywiście ten wzór utrzymuje się. Jeżeli zaś x_1 jest liczbą ujemną, to badamy bezwzględną wartość tego wyrażenia; wtedy wszędzie zamiast x_1 wystąpi $|x_1|$ i otrzymamy:

(124a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_1^n}{n!} \right| = 0$$

a stąd wynika — jak wiadomo (por. § 30, str. 119, twierdzenie Va) — wzór (124). Udowodniliśmy w ten sposób, że $n!$ zdąża silniej do nieskończoności, aniżeli n -ta potęga dowolnej liczby.

Wracając do wzoru (a), widzimy, ponieważ także $\frac{x_1^n}{n!} \cdot A \rightarrow 0$, że:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

gdy x_1 jest liczbą dodatnią lub zerem.

Gdy x_1 jest liczbą ujemną, to $0 < e^{x_1} < 1$, a więc:

$$0 < |R_n(x_1)| < \left| \frac{x_1^n}{n!} \right| \cdot 1$$

a stąd wynika, że także dla ujemnych x_1 jest:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x_1)| = 0$$

a więc także:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_1) = 0$$

A więc dla każdego x reszta w rozwinięciu funkcji e^x dąży do zera, gdy n dąży do nieskończoności, c. d. d. o.

Szereg nieskończony, utworzony z wzoru Maclaurina dla funkcji e^x , jest więc zbieżny dla każdego x , a jego wartością jest e^x .

Wobec tego możemy przedstawić funkcję e^x dla wszystkich wartości x następującym szeregiem nieskończonym:

(125)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

już bez wyrazu dopełniającego.

Ten wzór należy zapamiętać, używa się go bowiem w analizie bardzo często.

§ 134. Obliczenie liczby e .

Przy pomocy tego szeregu możemy obliczyć każdą potęgę liczby e , a w szczególności samą liczbę e , czyli e^1 , z dowolną dokładnością. Tak np., chcąc obliczyć samo e , kładziemy w tym wzorze $x=1$ i otrzymujemy:

$$(126) \quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \dots$$

Zatrzymując 10 wyrazów tego szeregu, otrzymujemy:

$$\begin{array}{rcl} e \approx 1 & & \\ + 1 & & \\ \frac{1}{2!} \dots\dots + 0.5 & & : 3 \\ \frac{1}{3!} = \frac{1}{2!} : 3 \dots + 0.1666\ 666 & & 6 \dots : 4 \\ \frac{1}{4!} = \frac{1}{3!} : 4 \dots + 0.0416\ 666 & & 6 \dots : 5 \\ \frac{1}{5!} = \frac{1}{4!} : 5 \dots + 0.0083\ 333 & & 3 \dots : 6 \\ \frac{1}{6!} = \frac{1}{5!} : 6 \dots + 0.0013\ 888 & & 8 \dots : 7 \\ \frac{1}{7!} = \frac{1}{6!} : 7 \dots + 0.0001\ 984 & & 1 \dots : 8 \\ \frac{1}{8!} = \frac{1}{7!} : 8 \dots + 0.0000\ 248 & & 0 \dots : 9 \\ \frac{1}{9!} = \frac{1}{8!} : 9 \dots + 0.0000\ 027 & & 5 \\ \hline e \approx 2.7182\ 815 & & \end{array}$$

(zatrzymaliśmy przy dodawaniu 7 miejsc po kropce, a z sumy następnych miejsc wzięliśmy poprawkę 3).

Okazemy, że już ten niedługi rachunek daje 6 miejsc po kropce dziesiętnej dokładnych, a mianowicie, że błąd może tu wystąpić dopiero na 7-em miejscu po kropce.

Aby ocenić wielkość tego błędu, użyjemy nie szeregu nieskończonego, lecz skończonego wzoru Maclaurina z wyrazem dopełniającym dla $n=10$, a mianowicie:

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{9!} + \frac{e^{\theta}}{10!}$$

Błąd, wynikający z opuszczenia wszystkich dalszych wyrazów szeregu, następujących po wyrazie $\frac{1}{9!}$, wynosi tutaj:

$$R_{10}(1) = \frac{e^{\theta}}{10!}$$

Ponieważ $e \leq 3$ (por. str. 127, Uwaga), a $\theta < 1$, przeto także $e^{\theta} < 3$; łatwo obliczyć, że $10! = 3,628800$, a więc:

$$R_{10}(1) < \frac{3}{3,628800} = \frac{1}{1,209600} < 10^{-6}$$

To zaś dowodzi, że błąd jest mniejszy aniżeli jednostka na szóstym miejscu po kropce dziesiętnej; błąd może więc wystąpić dopiero na 7-em miejscu po kropce, a zatem:

$$e = 2.718281...$$

przyczem wszystkie wypisane tu cyfry są dokładne

Zatrzymując więcej (a mianowicie 21) wyrazów szeregu (126), otrzymujemy:

$$e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536...$$

z dokładnością 20 cyfr po kropce. To rozwinięcie dziesiętne jest nieperjodyczne, łatwo bowiem wykazać, że e jest liczbą niewymierną.

Dowód niewymierności liczby e .

Gdyby e było liczbą wymierną, to dałoby się przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitemi. Obierzmy $n > q + 1$ i zarazem $n > 3$. Z wzoru (123) otrzymalibyśmy zatem dla $x = 1$:

$$e = \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^n}{n!}$$

Mnożąc obie strony przez $(n-1)!$, otrzymalibyśmy po lewej stronie liczbę całkowitą, albowiem $n-1 > q$, a po prawej stronie liczbę całkowitą, powiększoną o $\frac{e^n}{n}$. Ponieważ jednak $e^n < 3$ a $n > 3$, przeto $\frac{e^n}{n} < 1$, a więc jest ułamkiem właściwym. Nie możliwem zaś jest, aby liczba całkowita $(n-1)! \cdot \frac{p}{q}$ była sumą liczby całkowitej i ułamka właściwego. Zatem założenie, że $e = \frac{p}{q}$, było błędne. A więc e nie jest liczbą wymierną.

§ 125. Rozwinięcia funkcij hiperbolicznych: $\sinh x$ i $\cosh x$.

Z rozwinięcia funkcji e^x na szereg nieskończony Maclaurina łatwo możemy otrzymać rozwinięcia na szereg nieskończony dla funkcij hiperbolicznych: $\sinh x$ i $\cosh x$ (por. § 91). I tak:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x) + 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(-x) \right]$$

Obierzmy $n-1$ parzyste, to:

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{R_n(x) + R_n(-x)}{2}$$

Gdy n dąży do nieskończoności, to zarówno $R_n(x)$ jak i $R_n(-x)$ dążą

do zera; otrzymujemy zatem przedstawienie funkcji $\cosh y x$ zapomocą następującego szeregu nieskończonego:

$$(128) \quad \cosh y x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + \dots$$

dla wszystkich x .

W podobny sposób wyprowadzi czytelnik z łatwością następujące rozwinięcie dla funkcji $\sinh y x$:

$$(129) \quad \sinh y x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots$$

dla wszystkich wartości x .

Rozwinięcia te otrzymalibyśmy oczywiście także bezpośrednio, obliczając pochodne tych funkcji i podstawiając otrzymane wartości w ogólny wzór Maclaurina.

§ 136. Rozwinięcie funkcji sinus na wzór i szereg Maclaurina.

Przejdźmy do funkcji *trygonometrycznych*. Chcąc zbudować wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = \sin x$, obliczamy kolejne pochodne:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

Dalsze pochodne powtarzają się już w tym samym porządku. Dla $x = 0$ otrzymujemy stąd:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 0 \dots$$

Weźmy n parzyste, to:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \sin x \quad \text{a} \quad f^{(n)}(\vartheta x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \sin \vartheta x$$

Wzór Maclaurina dla funkcji sinus z wyrazem dopełniającym w formie Lagrange'a, ma zatem postać:

$$(130) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + (-1)^{\frac{n}{2}} \sin \vartheta x \cdot \frac{x^n}{n!}$$

Występują tu same nieparzyste potęgi zmiennej x ze znakami naprzemian $+$ i $-$. Wyraz dopełniający łatwo tu zbadać, opierając się na wzorze (124 a) (str. 395), a mianowicie:

$$|R_n(x)| = |\sin \vartheta x| \cdot \left| \frac{x^n}{n!} \right|$$

Ponieważ $|\sin \vartheta x|$ nie przekracza liczby 1 dla żadnego x , przeto:

$$(c) \quad 0 \leq |R_n(x)| \leq 1 \cdot \left| \frac{x^n}{n!} \right|$$

Stosując tu twierdzenie o trzech funkcjach, otrzymujemy, ponieważ

$$\left| \frac{x^n}{n!} \right| \rightarrow 0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$$

a stąd także:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Wobec tego możemy funkcję $\sin x$ dla każdego x przedstawić następującym, nieskończonym (zbieżnym) szeregiem Maclaurina:

$$(131) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Należy pamiętać o tem, że kąt x jest tu wyrażony w mierze łukowej. Szereg ten jest zbieżny szybko, jeszcze szybciej aniżeli szereg, przedstawiający funkcję e^x . Szeregu tego używa się bardzo często. Tak np. nowsze tablice funkcji trygonometrycznych obliczono przy pomocy tego szeregu. W praktyce używa się bardzo często jako wartości przybliżonych dla funkcji sinus albo pierwszego wyrazu x , albo dwóch początkowych wyrazów: $x - \frac{x^3}{6}$ tego szeregu.

Dla małych kątów dają te przybliżenia już dość znaczną dokładność.

Niechaj czytelnik sporządzi wykres sinusoidy i na tym samym rysunku wykreśli linij o równaniach

$$y = x, \quad y = x - \frac{x^3}{6}, \quad y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!}$$

Z takiego rysunku rzuca się w oko silna aproksymacja funkcji sinus w okolicy punktu 0 wspomoczą kolejnych wielomianów Maclaurina

Przykład obliczenia funkcji sinus dla szczegółowej wartości.

Znaleźć wartość funkcji sinus dla kąta $x = 0.6$ w mierze łukowej (t. j. około $34^{\circ}22'40''$, jak to wynika z tego, że jednostka miary łukowej, czyli 1 radjan = $57^{\circ}17'44.8''$).

Zatrzymując 5 wyrazów szeregu, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sin 0.6 &\approx 0.6 - \frac{0.6^3}{3!} + \frac{0.6^5}{5!} - \frac{0.6^7}{7!} + \frac{0.6^9}{9!} \\ &= 0.6 \qquad \qquad \qquad - 0.036 \\ &\quad + 0.000648 \qquad - 0.000005554\bar{3} \\ &\quad + 0.000000278 \\ &\quad + 0.000000000\bar{2} \\ &\quad - 0.000000000\bar{2} \\ \sin 0.6 &\approx 0.56464247\bar{35} \end{aligned}$$

Aby ocenić błąd, użyjemy wzoru (c), t. j.

$$|R_{10}(0.6)| \leq \frac{0.6^{10}}{10!} = 0.0000000016$$

Stąd widzimy, że błąd może wystąpić dopiero na 9-tym miejscu po kropce dziesiętnej, a zatem 8 cyfr obliczyliśmy dokładnie. Możemy więc napisać:

$$\sin 0.6 = 0.56464247.$$

Gdybyśmy zatrzymali tylko 3 początkowe wyrazy szeregu, to otrzymalibyśmy 5 cyfr po kropce dziesiętnej dokładnie

§ 137 Rozwinięcie funkcji cosinus.

Dla funkcji cosinus mamy

$$\begin{array}{l|l} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 \end{array}$$

Biorąc nieparzyste n , otrzymamy

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin x \quad \text{a więc} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin 0$$

Rozwinięcie funkcji cosinus według wzoru Maclaurina, z wyrazem dopełniającym w formie Lagrange'a, ma więc postać

$$(132) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \sin 0 \frac{x^n}{n!}$$

Występują tu same parzyste potęgi zmiennej niezależnej ze znakami naprzemiennie $+$ i $-$. Wyraz dopełniający ma tu zupełnie tę samą wartość bezwzględną, co dla rozwinięcia funkcji sinus, a więc dąży również do zera przy każdym x , gdy $n \rightarrow \infty$.

Wobec tego można funkcję cosinus przedstawić następującym nieskończonym (zbieżnym) szeregiem Maclaurina.

(133)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Szereg ten jest w analizie równie ważny jak szereg, przedstawiający funkcję sinus. Odczytujemy z tego szeregu, że pierwszą przybliżoną wartością funkcji $\cos x$ jest 1, a drugą, dokładniejszą $1 - \frac{1}{2}x^2$; przybliżenia te bywają używane często, zwłaszcza dla małych kątów x .

Przykład liczbowy.

Obliczyć $\cos 10^\circ$ z dokładnością 8 cyfr po kropce dziesiętnej.

Ponieważ zmienna x jest wyrażona we wzorach (132) i (133) w mierze łukowej, przeto trzeba najpierw kąt 10° wyrazić w mierze łukowej. Ponieważ:

$$\text{arc } 1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0.01745\ 32925\ 1...$$

przeto:

$$x = \text{arc } 10^\circ = 0.17453\ 29251... = \frac{\pi}{18}$$

Obliczmy 4 wyrazy szeregu (133), t. j.:

$$\cos 10^\circ \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{18} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{18} \right)^4 - \frac{1}{720} \left(\frac{\pi}{18} \right)^6$$

czyli:

$$\cos 10^\circ \approx 1 - \frac{1}{2}(0.17453...) ^2 + \frac{1}{24}(0.17453...) ^4 - \frac{1}{720}(0.17453...) ^6$$

Zaznaczone potęgowania wykonujemy np. przy pomocy maszyny do rachowania do 10 miejsc dziesiętnych i otrzymujemy:

$$\begin{array}{r} \cos 10^\circ \approx 1 \qquad \qquad \qquad - 0.01523\ 08710... \\ \qquad \qquad \qquad + 0.00003\ 86631... - 0.00000\ 00393... \\ \hline \qquad \qquad \qquad = 1.00003\ 86631... \\ \qquad \qquad \qquad - 0.01523\ 09103... \\ \hline \cos 10^\circ \approx 0.98480\ 775\ 28 \end{array}$$

Do oceniania błędu użyjemy wyrazu dopełniającego z wzoru (132), a więc:

$$\begin{aligned} |R_7(10^\circ)| &= |(-1)^{\frac{7+1}{2}} \sin(\vartheta \cdot 10^\circ)| \cdot \frac{(0.17453...) ^7}{7!} < \frac{0.17453... ^7}{7!} = \\ &= \frac{0.17453... ^6}{6!} \cdot \frac{0.17453...}{7} \end{aligned}$$

$$|R_7(10^\circ)| < 0.00000\ 00393 \cdot 0.025 = 0.00000\ 00010$$

Stąd widzimy, że błąd nie przekracza jednostki na 9-tym miejscu po kropce dziesiętnej, a więc uzyskaliśmy 8 cyfr po kropce dokładnych

Możemy zatem napisać:

$$\cos 10^\circ = 0.98480\ 775...$$

Jeżeli zachodzi potrzeba częstego używania wzorów (131) i (133) dla kątów, wyrażonych w mierze stopniowej x° , to dogodnym jest użycie tabelki,

zawierającej wielocyfrowe wartości kolejnych potęg liczby π ; albowiem miarę łukową x takich kątów oblicza się z wzoru:

$$x^0 : 360^0 = x : 2\pi$$

czyli:

$$x = \pi \cdot \frac{x^0}{180^0}$$

Zwykle dość łatwe jest obliczenie rozmaitych potęg liczby $\frac{x^0}{180^0}$, a trudność sprawia tylko obliczenie wielocyfrowych potęg liczby π .

Uwaga 1.

W przykładach liczbowych na obliczenie wartości funkcji $\sin x$ i $\cos x$ używaliśmy dość dokładnego oceniania błędu. Grubszą ocenę błędu, bardzo jednak dogodną, otrzymuje się z następującego rozważania:

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x^{n-1}|}{(n-1)!} \cdot \frac{|x|}{n}$$

Otóż, jeżeli weźmiemy tak wielkie n , że: $|x| < n$, to $\frac{|x|}{n} < 1$ i wtedy:

$$|R_n(x)| < \frac{|x^{n-1}|}{(n-1)!}$$

Po prawej stronie tej nierówności występuje ostatni zatrzymany z szeregu wyraz. Otóż w szeregu na $\sin x$ i $\cos x$ bezwzględna wartość błędu, wynikającego z opuszczenia wszystkich wyrazów, następujących po jakimś wyrazie, jest mniejsza od bezwzględnej wartości ostatniego zatrzymanego wyrazu.

Używając tego sposobu oceniania błędu, nie potrzebujemy zatem wykonywać już żadnych dalszych rachunków; jednakże ta ocena błędu jest zwykle grubsza, mniej dokładna, aniżeli przy pomocy $\frac{x^n}{n!}$. Tak np. przy obliczaniu $\cos 10^0$ otrzymaliśmy jako ostatni zatrzymany wyraz: 0.00000 00 393, a więc od razu widzimy, że błąd jest napewno mniejszy od 0.00000 00 393; na podstawie tej oceny możemy zatem twierdzić, że otrzymaliśmy 7 cyfr dokładnie, podczas kiedy ściślejsze ocenienie błędu stwierdza, że mamy tu 8 cyfr dokładnych.

Uwaga 2.

Porównując metodę obliczania wartości funkcji $\sin x$ i $\cos x$ przy pomocy wzoru Maclaurina z metodami, poznanymi w elementarnej trygonometrii, widzimy jasno wyższość tej nowej metody: po pierwsze są tu rachunki o wiele prostsze i szybsze, a po drugie przy pomocy szeregów możemy uzyskać dowolnie wiele cyfr po kropce dokładnych, podczas gdy dokładność metod elementarnych jest ograniczona samą istotą tej metody (identyfikuje się $\sin x$ dla $1'$ lub $1''$ z x , wyrażonem w mierze łukowej, a zgodność ta zachodzi tylko dla kilku lub kilkunastu cyfr początkowych, następnie zaś te błędy narastają coraz bardziej przy dalszych rachunkach).

Przykład z elementarnej geometrii na zastosowanie rozwinięć funkcji trygonometrycznych.

Przy pomocy wzoru Maclaurina otrzymujemy rozmaite wzory przybliżone, używane bardzo często w zagadnieniach technicznych. Tak np.,

używając rozwinięć funkcji sinus i cosinus, wyprowadzimy przybliżone wzory na pole odcinka koła (część zacieniowana na fig. 113), na cięciwę $c = AB$ i na strzałkę $s = CD$ łuku, znając promień r i kąt środkowy α , wyrażony w mierze łukowej. I tak pole odcinka wynosi:

$$p = OACB - OAB = \\ = r\alpha \cdot \frac{r}{2} - \frac{r^2}{2} \sin \alpha$$

czyli:

$$p = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$$

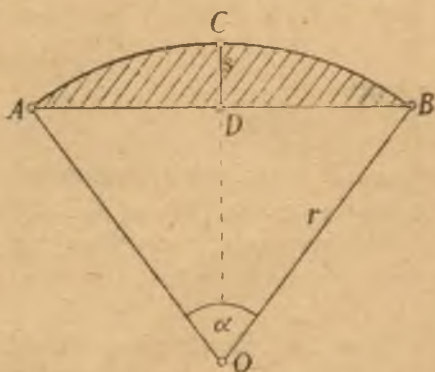


Fig. 113.

Wprowadzając za $\sin \alpha$ rozwinięcie według wzoru Maclaurina, otrzymujemy:

$$p = \frac{r^2}{2} \left(\alpha - \alpha + \frac{\alpha^3}{3!} - \frac{\alpha^5}{5!} + \dots \right)$$

a stąd w przybliżeniu:

$$p \approx \frac{r^3 \alpha^3}{12}$$

Na strzałkę otrzymujemy wzór:

$$s = OC - OD = r - r \cos \frac{\alpha}{2} = r \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$$

Podstawiamy za $\cos \frac{\alpha}{2}$ rozwinięcie według wzoru Maclaurina, to:

$$s = r \left(1 - 1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2!} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{4!} + \dots \right)$$

a stąd w przybliżeniu:

$$s \approx \frac{r \alpha^2}{8}$$

Na cięciwę otrzymujemy:

$$\frac{c}{2} = r \sin \frac{\alpha}{2} = r \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3}{3!} + \dots \right)$$

a stąd w przybliżeniu:

$$c \approx r \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{24} \right)$$

lub w jeszcze grubszej przybliżeniu:

$$c \approx r \alpha = \widehat{ACB}$$

Ponieważ:

$$p \approx \frac{r^2 \alpha^3}{12} = \frac{r \alpha^3}{8} \cdot \frac{3}{4} r \alpha$$

przeto:

$$p \approx \frac{3}{4} r \alpha$$

Pole odcinka równa się zatem w przybliżeniu $\frac{3}{4}$ prostokąta, mającego za podstawę cięciwę (lub lepiej łuk), a za wysokość strzałkę łuku.

Wzory te są szczególnie przydatne dla małych kątów α .

§ 138. Rozwinięcie funkcji logarytmicznej $\log_e(1+x)$ na wzór Maclaurina.

Funkcji:

$$y = \log_e x$$

nie można rozwinąć na wzór Maclaurina, albowiem w punkcie $x=0$ zarówno sama funkcja $\log_e x$ jak i jej pochodne: $\frac{1}{x}$, $-\frac{1}{x^2}$, $+\frac{1 \cdot 2}{x^3}$, ...

są nieokreślone (wiemy tylko, że $\lim_{0 < x \rightarrow 0} \log_e x = -\infty$, $\lim_{0 < x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$,

$\lim_{0 > x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$, i t. d.). Natomiast możnaby tę funkcję rozwinąć według wzoru Taylora dla punktu $x=1$. Zmieniając jednak nieco tę funkcję, a mianowicie wykonując przesunięcie wzdłuż osi x -ów o -1 , otrzymujemy:

$$f(x) = \log_e(1+x)$$

a tę funkcję możemy już rozwinąć według wzoru Maclaurina. Tworzymy w tym celu ciąg pochodnych i ich wartości dla $x=0$:

$f(x) = \log_e(1+x)$	$f(0) = \log_e 1 = 0$
$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} =$ $= -1 \cdot (1+x)^{-2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = (-1)^2 \cdot 1 \cdot 2 (1+x)^{-3}$	$f'''(0) = +1 \cdot 2$
$f^{(n-1)}(x) =$ $= (-1)^{n-2} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-2) (1+x)^{-(n-1)}$	$f^{(n-1)}(0) = (-1)^{n-2} (n-2)!$
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (1+x)^{-n}$	$f^{(n)}(0) =$ $= (-1)^{n-1} (n-1)! (1+0)^{-n}$

Wzór Maclaurina dla funkcji $\log_e(1+x)$ przyjmuje więc postać:

$$(134) \quad \log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(x)$$

Na wyraz dopełniający $R_n(x)$ będziemy tu używali zarówno formy Lagrange'a jak i formy Cauchy'ego.

Wzór Lagrange'a na wyraz dopełniający ma tu postać:

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} (-1)^{n-1} (n-1)! (1+\vartheta x)^{-n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{1+\vartheta x} \right)^n$$

a wzór Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{x^n}{(n-1)!} (1-\vartheta_1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-1} (n-1)! (1+\vartheta_1 x)^{-n} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{1+\vartheta_1 x} \left(\frac{1-\vartheta_1}{1+\vartheta_1 x} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

Rozwinięcie Maclaurina nie jest tu możliwe dla $x \leq -1$, albowiem dla tych wartości nie istnieje $\log_e(1+x)$, logarytm jest bowiem określony tylko dla dodatnich liczb logarytmowanych.

Przekonamy się, że także nie dla wszystkich $x > -1$ wzór Maclaurina jest przydatny, albowiem reszta niezawsze dąży do zera. Zbadajmy najpierw $R_n(x)$ dla $x \geq 0$. Otóż dla $x=0$ jest $R_n(x)=0$ a więc i $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x)=0$. Dla $x > 0$ użyjmy formy Lagrange'a.

Jeżeli $0 < x \leq 1$, to:

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n} \left(\frac{x}{1+\vartheta x} \right)^n \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\vartheta x} \right)^n < \frac{1}{n}$$

a więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1$$

A więc przy nieujemnem x reszta dąży pewnością do zera dla x z przedziału $<0, 1>$.

Dla $x > 1$ mógłby ułamek $\left(\frac{x}{1+\vartheta x} \right)^n$ wzrastać nieograniczenie, szybciej niż n , a wtedy oczywiście reszta nie dążyłaby do zera.

Dla ujemnych x musimy się ograniczyć, jak wspomnieliśmy powyżej, do przedziału $(-1, 0)$. Tu dogodniej jest użyć reszty w formie Cauchy'ego.

Niechaj $-1 < -u \leq x < 0$; u jest ułamkiem właściwym dodatnim. Wtedy jest:

$$|x| \leq u \quad \text{i} \quad 1+\vartheta_1 x \geq 1-\vartheta_1 u > 1-u > 0$$

a więc:

$$\frac{1 - \vartheta_1}{1 + \vartheta_1 x} \leq \frac{1 - \vartheta_1}{1 - \vartheta_1 u} < 1$$

a zatem także:

$$\left(\frac{1 - \vartheta_1}{1 - \vartheta_1 u} \right)^{n-1} < 1 \quad |x|^n \leq u^n$$

Wobec tego dla reszty Cauchy'ego otrzymujemy nierówność:

$$|R_n(x)| < \frac{u^n}{1 - u}$$

Ponieważ $u^n \rightarrow 0$, przeto i $R_n(x) \rightarrow 0$,

Doszliśmy zatem ostatecznie do wyniku, że reszta dąży do zera dla $-1 < x \leq 1$.

Dla wszystkich zatem wartości x z tego przedziału $(-1, +1)$ możemy przedstawić funkcję $\log_e(1+x)$ następującym szeregiem nieskończonym Maclaurina:

$$(135) \quad \log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Okazuje się, że aproksymacja funkcji $\log_e(1+x)$ przy pomocy tego szeregu jest dla niektórych x bardzo powolna. Tak np. z oszacowania reszty dla dodatnich x wiemy tylko, że:

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n}$$

Chcąc zatem uzyskać wartość naszej funkcji z dokładnością do $\frac{1}{100}$, t.j. dwa miejsca po kropce dziesiętnej dokładne, trzeba według tego oszacowania brać $n=100$, to znaczy 100 wyrazów szeregu (135). Wobec tego szereg (135) nie nadaje się do rachunków praktycznych.

§ 139. Inne rozwinięcia funkcji logarytmicznej, wyprowadzone z wzoru Maclaurina.

Dogodniejsze rozwinięcia otrzymamy, biorąc pod uwagę także rozwinięcie funkcji $\log_e(1-x)$, które otrzymamy, zmieniając we wzorze (134) x na $-x$:

$$(136) \quad \log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^{n-1}}{n-1} + R_n(-x)$$

Tworząc różnicę obu stron wzorów (134) i (136), otrzymujemy:

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) + \bar{R}_n(x)$$

Reszta $R_n(x)$ dąży również do zera, jako różnica dwóch wyrażeń, dążących do zera; można się przekonać, że to dążenie do zera jest szybsze, aniżeli $R_n(x)$. Połóżmy:

$$\frac{1+x}{1-x} = y, \quad \text{to} \quad x = \frac{y-1}{y+1}$$

Gdy x zmienia się od -1 do $+1$, to y zmienia się od 0 do $+\infty$.
Otrzymujemy więc rozwinięcie:

$$(137) \quad \log_e y = 2 \left[\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{y-1}{y+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{y-1}{y+1} \right)^5 + \dots \right]$$

prawdziwe dla wszystkich dodatnich y . Nie jest to jednak już rozwinięcie typu Maclaurina.

Położmy jeszcze:

$$y = \frac{z+1}{z}$$

to otrzymamy:

$$\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{2z+1}$$

i rozwinięcie przyjmie postać:

(138)

$$\log_e(z+1) = \log_e z + 2 \left[\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2z+1)^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2z+1)^5} + \frac{1}{7} \frac{1}{(2z+1)^7} + \dots \right]$$

To rozwinięcie jest prawdziwe pewnością dla wszystkich dodatnich wartości z , albowiem y jest liczbą dodatnią dla dodatnich z . Zbieżność szeregu, znajdującego się w graniastych nawiasach, jest bardzo szybka, zwłaszcza dla $z \geq 1$, a właśnie dla takich z używa się tego szeregu najczęściej.

Błąd, jaki popełniamy, zatrzymując tylko n wyrazów szeregu, można łatwo ocenić, gdy $z \geq 1$, w następujący sposób.

Wyraz n -ty szeregu ma postać:

$$2 \cdot \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{(2z+1)^{2n-1}}$$

Wszystkie dalsze wyrazy tworzą szereg nieskończony:

$$r_n(z) = \frac{2}{2n+1} \frac{1}{(2z+1)^{2n+1}} + \frac{2}{2n+3} \frac{1}{(2z+1)^{2n+3}} + \\ + \frac{2}{2n+5} \frac{1}{(2z+1)^{2n+5}} + \dots$$

Wyrazy tego szeregu są wszystkie dodatnie i nie przekraczają wyrazów następującego szeregu geometrycznego:

$$s_n(z) = \frac{2}{(2n+1)(2z+1)^{2n+1}} + \frac{2}{(2n+1)(2z+1)^{2n+3}} + \\ + \frac{2}{(2n+1)(2z+1)^{2n+5}} + \dots$$

o sumie:

$$s_n(z) = \frac{2}{(2n+1)(2z+1)^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2z+1)^2}}$$

Dla $z \geq 1$ ostatni czynnik nie przekracza liczby $\frac{1}{8}$ (albowiem dla $z=1$ jest $\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$, a dla większych z otrzymujemy mniejszą liczbę)

A więc:

$$s_n(z) \leq \frac{9}{4(2n+1)(2z+1)^{2n+1}}$$

a wobec tego także szereg $r_n(z)$ spełnia nierówność:

$$(139) \quad r_n(z) < \frac{9}{4(2n+1)(2z+1)^{2n+1}}$$

Wzoru (138) użyto do konstrukcji tablic logarytmicznych, t. j. do obliczenia logarytmów kolejnych liczb całkowitych. Obliczenie rozpoczyna się od $\log_e 2$. W tym celu kładziemy we wzorze (138) $z=1$ i otrzymujemy:

$$\log_e 2 = \log_e 1 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right)$$

Pierwszy wyraz drugiej strony jest równy 0. Obliczmy 8 początkowych wyrazów pozostałego szeregu, zatrzymując w każdym wyrazie 9 cyfr po kropce dziesiętnej. W ten sposób otrzymujemy:

$$\log_e 2 \approx 2 \cdot \begin{array}{|l|l|} \hline 0.333\ 333\ 33 & 3... \\ 0.012\ 345\ 67 & 9... \\ 0.000\ 823\ 04 & 5... \\ 0.000\ 065\ 32 & 1... \\ 0.000\ 005\ 64 & 5... \\ 0.000\ 000\ 51 & 3... \\ 0.000\ 000\ 04 & 8... \\ 0.000\ 000\ 00 & 4... \\ \hline \end{array}$$

$$= 2 \cdot 0.346\ 573\ 59$$

przyczem z sumy końcowych cyfr wzięliśmy poprawkę 4

Zatem:

$$\log_2 2 \approx 0.693\,147\,18$$

Zatrzymaliśmy 8 wyrazów szeregu, więc $n = 8$. Błąd ocenimy przy pomocy wzoru (139), a mianowicie:

$$e_8(1) < \frac{9}{4 \cdot 17 \cdot 3^{17}} = \frac{1}{975,725\,676} < 10^{-3}$$

a więc 8 cyfr obliczyliśmy dokładnie: błąd może wystąpić dopiero na 9-tym miejscu po kropce.

Ten $\log_2 2$ wymaga najdłuższych rachunków. Szeregi, służące do obliczenia dalszych logarytmów, są bowiem szybciej zbieżne, jak to wynika z wzoru (139). I tak dla $z = 2$ otrzymujemy:

$$\log_2 3 = \log_2 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7} \frac{1}{5^7} + \dots \right)$$

Tutaj wystarczy już zatrzymać tylko $n = 5$ wyrazów aby otrzymać dokładnie 8 cyfr po kropce, albowiem

$$e_5(2) < \frac{9}{4 \cdot 11 \cdot 5^{11}} = \frac{9}{2148,437\,500} < \frac{1}{200,000\,000} < 10^{-6}$$

Tak więc:

$$\begin{aligned} \log_2 3 &\approx \log_2 2 + 2 \cdot \begin{array}{r|l} 0.2 & \\ \hline 0.002\,666\,66 & 6\dots \\ 0.000\,064 & \\ \hline 0.000\,001\,82 & 8\dots \\ 0.000\,000\,05 & 6\dots \end{array} \\ &\approx \log_2 2 + 2 \cdot 0.202\,732\,55 \\ &\approx 0.693\,147\,18 \\ &\quad \underline{0.405\,465\,10} \\ \log_2 3 &\approx 1.098\,612\,28 \end{aligned}$$

Ważne jest obliczenie $\log_2 10$, liczba ta jest bowiem potrzebna do zamiany logarytmów naturalnych na zwyczajne i odwrotnie. Wystarczy w tym celu obliczyć przy pomocy szeregu jeszcze tylko $\log_2 5$. Otóż dla $z = 4$ otrzymujemy:

$$\log_2 5 = \log_2 4 + 2 \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \dots \right)$$

Znamy $\log_2 2$, więc:

$$\log_2 4 = 2 \log_2 2 \approx 1.386\,394\,36$$

Zatrzymując z nieskończonego szeregu tylko 4 wyrazy, otrzymujemy:

$$\log_e 5 \approx \log_e 4 + 2 \cdot \begin{array}{r|l} 0\ 111\ 111\ 11 & 1... \\ 0\ 000\ 457\ 24 & 7... \\ 0\ 000\ 003\ 38 & 6... \\ 0\ 000\ 000\ 02 & 9... \end{array}$$

$$\hline 2 \cdot 0\ 111\ 571\ 77$$

$$0\ 223\ 143\ 54$$

$$+ 1\ 386\ 394\ 36$$

$$\hline \log_e 5 \approx 1\ 609\ 437\ 90$$

$$\log_e 10 = \log_e 5 + \log_e 2 \approx 1\ 609\ 437\ 90$$

$$+ 0\ 693\ 147\ 18$$

$$\hline \log_e 10 \approx 2\ 302\ 585\ 08$$

Otrzymana liczba różni się tylko o jednostkę ostatniego miejsca od prawdziwego wyniku, osiągniętego przez dokładniejszy rachunek:

$$\log_e 10 = 2\ 302\ 585\ 092\ 994\ 045...$$

W podobny sposób oblicza się logarytmy naturalne dalszych liczb całkowitych, przyezem rachunki upraszczają się coraz bardziej. Tak np. gdy dojdziemy już do:

$$\log_e 100 = 2 \log_e 10 \approx 4\ 605\ 170\ 18$$

to dla następnej liczby całkowitej otrzymujemy szereg:

$$\log_e 101 = \log_e 100 + 2 \left(\frac{1}{201} + \frac{1}{3 \cdot 201^3} + \dots \right)$$

Gdy tu zatrzymamy w nawiasie tylko jeden wyraz (t. j. dla $n=1$), to otrzymamy już 7 cyfr po kropce dokładnie, jak to łatwo obliczyć z wzoru (136) na błąd. To znaczy, że poprzestając na 7 cyfrach dokładnych, możemy — dla liczb większych od 100 — używać zamiast szeregu (138) skróconego wzoru:

$$\log_e(z+1) \approx \log_e z + \frac{2}{2z+1}$$

Liczba $\frac{2}{2z+1}$ przedstawia więc w przybliżeniu różnicę tablicową w logarytmach naturalnych dla liczb większych od 100. Przy użyciu tablic 7 cyfrowych przybliżenie to wystarcza w zupełności. Mając obliczone logarytmy naturalne, zamieniamy je na zwyczajne, mnożąc każdy logarytm przez liczbę:

$$M = \frac{1}{\log_e 10} = 0\ 434\ 294\ 481\ 903\ 251...$$

Zamiast wzorów, w których występują funkcje logarytmiczne, używa się niekiedy w praktyce przybliżonych wzorów, wynikających z zastąpienia logarytmu początkowymi wyrazami jego rozwinięcia na szereg. Tak np. wzór, służący do obliczania wzniesienia nad poziom morza ze stanu barometru (t. zw. formułka barometryczna, por. str. 284):

$$x = \frac{1}{k} \log_e \frac{b_0}{y}$$

(gdzie x oznacza wysokość w metrach, b_0 stan barometru przy poziomie morza, y stan barometru w wysokości x , a k liczbę stałą) można zastąpić wzorem przybliżonym:

$$x \approx \frac{1}{k} 2 \cdot \frac{\frac{b_0}{y} - 1}{\frac{b_0}{y} + 1} = \frac{2}{k} \cdot \frac{b_0 - y}{b_0 + y}$$

Wzór ten otrzymuje się, rozwijając logarytm zapomocą wzoru (137) i zachowując tylko pierwszy wyraz.

§ 140. Wzór dwumienny (Newtona).

Znany jest z matematyki elementarnej wzór na potęgę dwumianu o wykładniku całkowitym dodatnim, a mianowicie:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

przyczem symbol: $\binom{n}{r}$ (czytaj: „ n nad r ”) ma znaczenie:

$$(140) \binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-(r-2)) \cdot (n-(r-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (r-1) \cdot r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Okazemy, że podobny wzór odnosi się także do potęgi dwumianu:

$$(1+x)^x$$

przy dowolnym wykładniku s , a więc zarówno dla s całkowitych jak i ułamkowych, zarówno dla s dodatnich jak i ujemnych, o ile tylko bezwzględna wartość liczby x nie przekracza 1. Zachodzi tylko ta istotna różnica, że o ile wykładnik s nie jest liczbą całkowitą dodatnią, to zamiast wielomianu otrzymuje się szereg nieskończony. Ten wzór otrzymamy, rozwijając funkcję:

$$f(x) = (1+x)^x$$

na szereg Maclaurina.

i tak:

$f(x) = (1+x)^s$ $f'(x) = s(1+x)^{s-1}$ $f''(x) = s(s-1)(1+x)^{s-2}$ $f'''(x) = s(s-1)(s-2)(1+x)^{s-3}$ $\dots$ $f^{(n-1)}(x) = s(s-1)(s-2)\dots$ $\dots(s-(n-2))(1+x)^{s-(n-1)}$ $f^{(n)}(x) = s(s-1)(s-2)\dots$ $\dots(s-(n-2))(s-(n-1))(1+x)^{s-n}$	$f(0) = 1$ $f'(0) = s$ $f''(0) = s(s-1)$ $f'''(0) = s(s-1)(s-2)$ $\dots$ $f^{(n-1)}(0) = s(s-1)(s-2)\dots(s-(n-2))$ $f^{(n)}(0) = s(s-1)(s-2)\dots$ $\dots(s-(n-1))(1+x)^{s-n}$
--	---

Wzór Maclaurina dla funkcji $(1+x)^s$ przyjmuje więc postać:

$$(1+x)^s = 1 + \frac{s}{1!}x + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \dots +$$

$$+ \frac{s(s-1)\dots(s-(n-2))}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

czyli:

$$(141) \quad (1+x)^s = 1 + \binom{s}{1}x + \binom{s}{2}x^2 + \dots + \binom{s}{n-1}x^{n-1} + R_n(x)$$

Gdyby s było liczbą całkowitą, to istniałoby tylko s kolejnych pochodnych różnych od zera, a wszystkie dalsze byłyby zerami i otrzymalibyśmy wielomian, podający znane skończone rozwinięcie na potęgę dwumianu.

Założmy w dalszych rozważaniach, że s nie jest liczbą całkowitą dodatnią. Wtedy istnieje nieskończony łańcuch pochodnych różnych od zera i możemy posuwać rozwinięcie Maclaurina dowolnie daleko. Wtedy też zachodzi potrzeba zbadania wyrazu dopełniającego $R_n(x)$.

Wzór Lagrange'a na wyraz dopełniający ma tu postać:

$$R_n(x) = \frac{x^n}{n!} s(s-1)(s-2)\dots(s-(n-1))(1+\vartheta x)^{s-n} =$$

$$= \binom{s}{n} (1+\vartheta x)^{s-n} x^n$$

a wzór Cauchy'ego:

$$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!} (1-\vartheta_1)^{n-1} s(s-1)(s-2)\dots(s-(n-1))(1+\vartheta_1 x)^{s-n} =$$

$$= \binom{s}{n} n(1+\vartheta_1 x)^{s-n} x^n (1-\vartheta_1)^{n-1}$$

Okazuje się, że $R_n(x)$ dąży do zera dla $-1 < x < +1$ czyli dla $|x| < 1$.

Dowód. Wydzielmy z obu form reszty czynnik:

$$c_n = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-(n-1))}{(n-1)!} x^n$$

Otrzymamy w ten sposób z formy Lagrange'a

$$R_n(x) = \frac{(1+\partial x)^{s-n}}{n} c_n$$

a z formy Cauchy'ego:

$$R_n(x) = (1+\partial_1 x)^{s-1} \left(\frac{1-\partial_1}{1+\partial_1 x} \right)^{n-1} c_n$$

Czynnik c_n dąży do zera, gdy $|x| < 1$, jak to wynika z następującego rozumowania. Gdy n wzrośnie o 1, to czynnik c_n zamieni się na:

$$c_{n+1} = c_n \cdot \frac{s-n}{n} \cdot x = c_n \left(\frac{s}{n} - 1 \right) x$$

Gdy $n \rightarrow \infty$, to $\left| \left(\frac{s}{n} - 1 \right) x \right| \rightarrow |x|$. Obierzmy jakąkolwiek liczbę dodatnią k , zawartą między $|x|$ a 1, t. j. $|x| < k < 1$, to od pewnego $n = N$ począwszy będzie:

$$\left| \left(\frac{s}{n} - 1 \right) x \right| < k < 1$$

a więc

$$|c_{N+1}| < |c_N| \cdot k, \quad |c_{N+2}| < |c_N| \cdot k^2$$

i t. d., ogólnie

$$|c_n| = |c_{N+p}| < |c_N| k^p$$

Tu $|c_N|$ jest liczbą stałą, a k^p dąży do zera, gdy p dąży do nieskończoności. Zatem czynnik c_n dąży do zera.

Pozostaje jeszcze do zbadania reszta czynników we wzorach na $R_n(x)$.

Przy $1 > x \geq 0$ użyjmy formy Lagrange'a. Otóż $1+\partial x$ jest wtedy liczbą nie mniejszą od 1 a więc $(1+\partial x)^{s-n} \leq 1$ dla $n > s$. Wobec tego

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \frac{1}{n} |c_n|$$

a ponieważ $c_n \rightarrow 0$, to $R_n(x) \rightarrow 0$

Dla ujemnych x z przedziału $(-1, 0)$ użyjemy formy Cauchy'ego. Wtedy $(1+\partial_1 x)^{s-1}$ jest dla każdego danego x jakąś liczbą dodatnią, nie przekraczającą liczby A , niezależnej od n , (równiej 1 dla $s > 1$, a $(1-x)^{s-1}$ dla $s < 1$). Wyrażenie:

$$\left(\frac{1-\partial_1}{1+\partial_1 x} \right)^{s-1}$$

jest ułamkiem właściwym, ponieważ $-1 < x < 0$.

A więc:

$$0 \leq |R_n(x)| < A \cdot |c_n|$$

Ponieważ $c_n \rightarrow 0$, przeto i $R_n(x) \rightarrow 0$.

Ponieważ dla $|x| < 1$ wyraz dopełniający dąży do zera z wzrostem n , przeto dla $|x| < 1$ możemy przedstawić funkcję $(1+x)^s$ nieskończonym,

zbieżnym szeregiem Maclaurina, otrzymanym z wzoru (141), zwanym w tym przypadku szeregiem Newtona, a mianowicie

$$(142) \quad (1+x)^s = 1 + \binom{s}{1}x + \binom{s}{2}x^2 + \binom{s}{3}x^3 + \dots$$

Uwaga. Okazano, że gdy $s \geq 0$, to ten szereg przedstawia daną funkcję także dla $x = -1$, a dla $x = +1$, gdy $s > -1$. Dla $|x| > 1$ szereg jest rozbieżny, nie przedstawia zatem funkcji $(1+x)^s$.

Wzór Newtona stosuje się bardzo często w rozmaitych rachunkach przybliżonych. Do postaci $(1+x)^s$ sprowadza się bowiem bardzo wiele funkcji wymiernych ułamkowych i niewymiernych.

Tak np. funkcje:

$$\frac{1}{1+x}, \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \sqrt{1+x}, \quad \sqrt{1+x^2}, \quad \sqrt[3]{1+x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \dots$$

można przedstawić w postaci potęg dwumianu:

$$(1+x)^{-1}, \quad (1-x)^{-1}, \quad (1+x^2)^{-1}, \quad (1+x)^{\frac{1}{2}}, \quad (1+x^2)^{\frac{1}{2}}, \\ (1+x)^{\frac{1}{3}}, \quad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \dots$$

Zatrzymując w rozwinięciu na szereg początkowe wyrazy, otrzymujemy bardzo rozpowszechnione wzory przybliżone.

Tak np.:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1}x + \binom{-1}{2}x^2 + \binom{-1}{3}x^3 + \dots = \\ = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Ten wzór jest prawdziwy tylko wtedy, gdy x jest ułamkiem właściwym. Natomiast dla $x = -1$ otrzymujemy po lewej stronie wyrażenie $\frac{1}{1-1}$, nie mające żadnego sensu, a po prawej stronie szereg rozbieżny:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

A więc dla $x = -1$ wzór nie jest prawdziwy.

Podobnie dla $x = +1$ otrzymujemy po lewej stronie $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, a po prawej rozbieżny szereg:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

a więc także dla $x = +1$ wzór nie jest prawdziwy.

Zatrzymując w naszym wzorze tylko dwa początkowe wyrazy, otrzymujemy następujący, często używany wzór przybliżony (dla $|x| < 1$):

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

Np. długość l_t pręta metalowego w temperaturze t^0 wyraża się wzorem:

$$l_t = l_0(1 + \alpha t)$$

przyczem l_0 oznacza długość pręta w temperaturze 0^0 , a α oznacza liczbę stałą, zwaną linjowym współczynnikiem rozszerzalności. Chcemy obliczyć długość l_0 pręta w temperaturze 0^0 , znając l_t . Otrzymujemy:

$$l_0 = \frac{l_t}{1 + \alpha t}$$

lub w przybliżeniu:

$$l_0 \approx l_t(1 - \alpha t)$$

opierając się na powyżej wyprowadzonym wzorze przybliżonym.

W ten sposób często w praktyce unikamy dzielenia przez dwumian, zastępując je mnożeniem. Można okazać, że błąd, popełniony przytem, nie przekracza x^2 , t. j. w naszym przykładzie $l_t \cdot \alpha^2 t^2$; ponieważ α jest zwykle małym ułamkiem, przeto ten błąd bardzo nieznacznie wpływa na wynik.

Podobnie otrzymuje się wzory przybliżone:

$$\frac{1}{1-x} \approx 1+x$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

Przykłady. 1) Rozwinać na szereg funkcję:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = (1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Z wzoru (142) otrzymujemy, kładąc $-z^2 = x$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-z^2) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-z^2)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-z^2)^3 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2} z^4 + \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-z^6) + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = 1 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 + \dots$$

Rozwinięcie to jest prawdziwe dla $|-z^2| < 1$ czyli dla $|z| < 1$.

2) Przy pomocy wzoru Newtona można obliczać z dowolną dokładnością pierwiastki z liczb szczegółowych.

Np. chcemy obliczyć $\sqrt[3]{39}$. W tym celu trzeba sprowadzić ten pierwiastek do takiej formy, aby występował dwumian $1+x$. Najbliższą liczbą całkowitą, której pierwiastek jest także liczbą całkowitą, jest 36.

Wobec tego przekształcamy $\sqrt[5]{39}$ w następujący sposób:

$$\sqrt[5]{39} = \sqrt[5]{36 + 3} = 6\sqrt[5]{1 + \frac{3}{36}} = 6\sqrt[5]{1 + \frac{1}{12}} = 6(1 + \frac{1}{12})^{\frac{1}{5}}$$

Według wzoru (142) otrzymujemy zatem:

$$\sqrt[5]{39} = 6 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} \right) \cdot \frac{1}{12^2} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{3} \right) \cdot \frac{1}{12^3} + \dots \right)$$

Zatrzymując w nawiasach dwa wyrazy, otrzymujemy $\sqrt[5]{39} \approx 6.25$, a zatrzymując trzy wyrazy: $\sqrt[5]{39} \approx 6.2448$; wartością zaś dokładną do 4 miejsc dziesiętnych jest 6.2449.

W podobny sposób można obliczać także wyższe, bardziej skomplikowane pierwiastki.

Np.:

$$\sqrt[5]{39} = \sqrt[5]{32 + 7} = 2(1 + \frac{7}{32})^{\frac{1}{5}} = 2 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{32} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{2} \right) \left(\frac{7}{32} \right)^2 + \dots \right)$$

Przy zatrzymaniu trzech wyrazów w nawiasie otrzymujemy $\sqrt[5]{39} \approx 2.0798$ a wartość dokładną do 4 miejsc dziesiętnych jest 2.0807 a więc tylko o 0.0009 większa.

§ 141. Rozwinięcie funkcji $\operatorname{arctg} x$.

Dla $f(x) = \operatorname{arctg} x$ mamy $f(0) = 0$. Pochodne dla $x = 0$ obliczyliśmy już w § 94, str. 299—300, a mianowicie:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 0 \\ f'''(0) &= -2! \\ f^{(4)}(0) &= 0 \\ f^{(5)}(0) &= 4! \\ &\dots \end{aligned}$$

Ogólnie: pochodne parzystego rzędu są zerami, a na pochodne nieparzystego rzędu otrzymaliśmy ogólny wzór:

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n (2n)!$$

Wzór Maclaurina dla funkcji $\operatorname{arctg} x$ przyjmuje więc postać:

$$(143) \quad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n}(x)$$

Badanie reszty doprowadza do wyniku, że $R_{2n}(x)$ dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie ale tylko dla $|x| \leq 1$.

Dowód. Wzór (60 a) na str. 300 na n -tą pochodną funkcji $\arctg x$ przyjmuje dla $2n$ postać

$$f^{(2n)}(x) = (2n-1)! \cos^{2n} y \sin 2n \left(y + \frac{\pi}{2} \right)$$

Ale

$$y = \arctg x, \quad x = \operatorname{tg} y \quad \text{a więc} \quad \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

Otrzymujemy zatem:

$$f^{(2n)}(x) = (2n-1)! \frac{1}{(1+x^2)^n} \sin(2n \arctg x + n\pi)$$

czyli

$$f^{(2n)}(x) = (2n-1)! \frac{1}{(1+x^2)^n} \sin(2n \arctg x) \cdot (-1)^n$$

Biorąc resztę w formie Lagrange'a, otrzymujemy:

$$R_{2n} = \frac{x^{2n}}{(2n)!} (2n-1)! \frac{1}{(1+\vartheta^2 x^2)^n} \sin(2n \arctg \vartheta x) \cdot (-1)^n$$

$$R_{2n} = \frac{(-1)^n}{2n} \left(\frac{x^2}{1+\vartheta^2 x^2} \right)^n \sin(2n \arctg \vartheta x)$$

Zatem:

$$|R_{2n}| \leq \frac{1}{2n} \left(\frac{x^2}{1+\vartheta^2 x^2} \right)^n \cdot 1$$

Jeżeli $|x| \leq 1$, to także $\left(\frac{x^2}{1+\vartheta^2 x^2} \right)^n < 1$, a więc dla takich x jest

$$|R_{2n}| < \frac{1}{2n}$$

a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n} = 0, \quad \text{c. b. d. o.}$$

Wobec tego można przedstawić funkcję $\arctg x$ następującym szeregiem nieskończonym:

$$(144) \quad \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Szereg ten jest zbieżny dla wszystkich x z przedziału $\langle -1, +1 \rangle$. Z tego szeregu można otrzymać bardzo interesujące rozwinięcie liczby π na szeregi nieskończone.

I tak kładąc $x = 1$, otrzymujemy $\arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ (czyli 45°) a więc.

$$(145) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots$$

Jest to szereg Leibniza na liczbę π . Okazuje się, że ten szereg jest bardzo wolno zbieżny. Co do reszty, to wiemy tylko, że $|R_{2n}| < \frac{1}{2n}$.

Chcąc więc mieć dwa miejsca po kropce dziesiętnej dokładne, t. j. $|R_{1n}| < \frac{1}{100}$, trzeba obrać $n = 50$, t. j. obliczyć 50 wyrazów tego szeregu. Przez rozmaite przekształcenia można jednak otrzymać przy pomocy wzoru (144) szeregi bardzo szybko zbieżne. Tak np. wychodząc z wzoru:

$$4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

który łatwo sprawdzić, otrzymujemy:

$$(146) \quad \frac{\pi}{4} = 4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots \right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right)$$

Szereg ten, nadzwyczaj szybko zbieżny, podał astronom John Machin (w r. 1706). Przy użyciu tego szeregu obliczono 700 cyfr liczby π po kropce dziesiętnej.

Przykład na praktyczne zastosowanie szeregu na $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

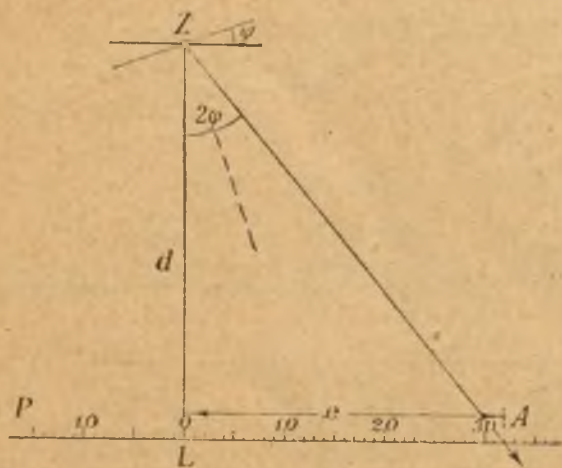


Fig. 114.

Przy pomocy lunety L i podziałki P można odczytać kąt φ , o który się odchyła zwierciadełko Z , umieszczone w odległości d od lunety (por. fig. 114). W zwierciadełku odczytujemy położenie punktu A , a mianowicie $LA = e$, gdy punkt zerowy podziałki leży w L . Kąt $\angle LZA = 2\varphi$, a $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{e}{d}$.

Stąd: $\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{e}{d}$.

Użyjmy dla funkcji arcustangens rozwinięcia według wzoru (144) i zatrzymajmy tylko dwa początkowe wyrazy tego rozwinięcia, to:

$$\varphi \approx \frac{1}{2} \left(\frac{e}{d} - \frac{1}{3} \left(\frac{e}{d} \right)^3 \right)$$

czyli

$$\varphi \approx \frac{e}{2d} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e^2}{d^2} \right)$$

W ten sposób otrzymujemy przybliżoną wartość kąta odchylenia φ bez używania tablic trygonometrycznych.

W mierze stopniowej wynosi ten kąt:

$$\varphi^0 \approx \frac{90}{\pi} \frac{e}{d} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{e^2}{d^2} \right)$$

Widzimy stąd, że w pierwszym przybliżeniu φ^0 wynosi $\frac{90}{\pi d} \cdot e$, a więc kąt jest proporcjonalny do odczytanego na podziałce odcinka e . Drugie przybliżenie uzyskujemy, odejmując poprawkę:

$$p = \frac{90}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \frac{e^3}{d^3}$$

Ponieważ jednak w przybliżeniu jest $\frac{e}{d} \approx \frac{\pi}{90} \cdot \varphi^0$, przeto

$$p \approx \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{90} \right)^3 (\varphi^0)^3$$

Poprawka ta jest dla małych kątów φ^0 nieznaczna. Tak np. dla kątów, nieprzekraczających 5° , poprawka nie przekracza 1% kąta φ^0 , jak łatwo może sprawdzić czytelnik.

Uwaga. W podobny sposób możnaby wyprowadzić dla funkcji $\arcsin x$ szereg:

$$(147) \quad \arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

zbieżny dla $|x| < 1$ i przedstawiający faktycznie dla tych wartości funkcję $\arcsin x$. Dla $x = +1$ i $x = -1$ potrzeba osobnych rozważań. Dowód ten przeprowadzimy później inną, prostszą drogą.

Rozwinięcia funkcyj: tangens, cotangens i innych zawilszych funkcyj możnaby również uzyskać przez obliczanie kolejnych pochodnych, jednakże wzory są tu tak zawiłe a dyskusja wyrazów dopełniających tak mozolna, że postaramy się uzyskać te rozwinięcia inną metodą, a mianowicie zapomocą t. zw. metody nieoznaczonych współczynników, którą wyjaśnimy w rozdziale, poświęconym teorii szeregów nieskończonych.

§ 142. Przykłady szeregów Taylora, które nie przedstawiają danej funkcji.

Zwracaliśmy już uwagę na to, jak ważny przy badaniu szeregów Taylora jest wyraz dopełniający. Albowiem tylko wtedy, gdy wyraz dopełniający $R_n(x, a)$ dąży do zera, szereg Taylora przedstawia daną funkcję. Może się zaś zdarzyć, że dla danej funkcji da się zbudować nieskończony szereg Taylora, nawet zbieżny, a mimo to nie przedstawia on danej funkcji (oczywiście wtedy $R_n(x, a)$ nie dąży do zera). Prosty przykład takiej funkcji jest funkcja, określona wzorami:

$$\begin{array}{ll} y = e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \\ y = 0 & \text{, } x = 0 \end{array}$$

Na fig. 115 mamy przedstawiony obraz graficzny tej funkcji. Ta funkcja jest ciągła dla wszystkich x , nawet dla $x=0$, albowiem: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ i tę graniczną wartość funkcja przyjmuje w punkcie $x=0$. Funkcja ta jest różniczkowalna dowolną ilość razy. Tak np. łatwo jest obliczyć pochodną w każdym miejscu różnem od $x=0$; a mianowicie: $y' = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$

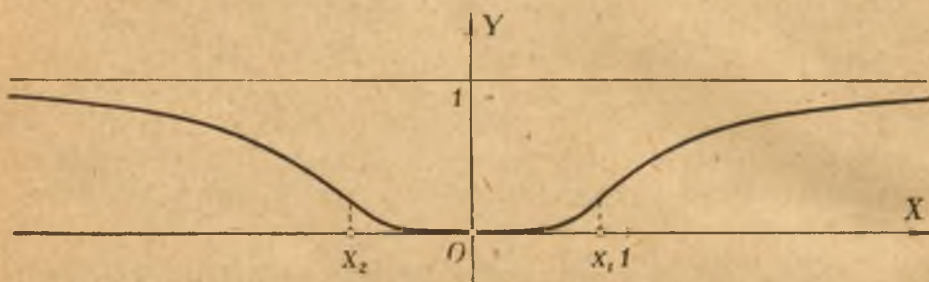


Fig. 115.

Natomiast pochodną w punkcie $x=0$ trzeba obliczyć wprost z definicji, a mianowicie:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h e^{\frac{1}{h^2}}}$$

Z rozwinięcia funkcji wykładniczej:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

otrzymujemy dla dodatnich x nierówność:

$$e^x > \frac{x^n}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

a więc

$$e^{\frac{1}{h^2}} > \frac{1}{h^2}$$

wobec czego:

$$0 < \left| \frac{1}{h e^{\frac{1}{h^2}}} \right| < \frac{1}{|h| \cdot \frac{1}{h^2}} = |h|$$

a więc to wyrażenie dąży do zera. Zatem:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h e^{\frac{1}{h^3}}} = 0$$

W podobny sposób oblicza się dalsze pochodne w punkcie $x=0$. Np.

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{h^3} e^{-\frac{1}{h^3}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h^4 e^{\frac{1}{h^3}}}$$

Stosując tu nierówność $e^x > \frac{x^3}{3!}$, otrzymujemy:

$$0 < \left| \frac{2}{h^4 e^{\frac{1}{h^3}}} \right| < \frac{2 \cdot 3!}{h^4 \cdot \frac{1}{h^3}} = 12h^2$$

a to dąży do zera, a więc także:

$$f''(0) = 0$$

W ten sposób okazuje się, że

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 0$$

Wobec tego szereg Taylora ma dla badanej funkcji postać:

$$(a) \quad 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \dots$$

czyli

$$0 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

Jest to szereg nieskończony zbieżny; jego wartością jest 0 a nie $e^{-\frac{1}{x^3}}$. Gdy więc napiszemy:

$$e^{-\frac{1}{x^3}} = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \dots + \frac{0}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

to ten wzór jest prawdziwy, a $R_n(x)$ jest widocznie równe $e^{-\frac{1}{x^3}}$ a więc wyraz dopełniający zawiera całą funkcję. Szereg zaś (a) nie przedstawia tej funkcji, ani jej nie aproksymuje, a więc nie możemy napisać, że szereg (a) jest równy funkcji $e^{-\frac{1}{x^3}}$. Szereg ten przedstawia oś x -ów t.j. $y=0$, a nie krzywą, przedstawioną na fig. 115. Wartość tego szeregu zgadza się z wartością funkcji tylko w jednym punkcie $x=0$, a nie w jakimś przedziale. Podobną własność ma szereg Taylora, utworzony dla funkcji:

$$\begin{array}{ll} y = \sin x + e^{-\frac{1}{x^3}} & \text{dla } x \neq 0 \\ y = 0 & \text{dla } x = 0 \end{array}$$

Tutaj już nie wszystkie pochodne są zerami dla $x = 0$, lecz rozwinięcie Taylora ma postać:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

przedstawia więc funkcję $\sin x$, a nie żadaną funkcję y .

§ 143. Wzór Taylora i Maclaurina dla funkcji dwóch i więcej zmiennych.

Wzory Taylora i Maclaurina można rozszerzyć na funkcje dwóch i więcej zmiennych. Omówimy tu funkcje dwóch zmiennych, rozważania te jednak stosują się bez istotnych zmian także do większej ilości zmiennych. Niechaj funkcja $z = f(x, y)$ będzie ciągła wraz z wszystkimi cząstkowymi pochodnymi w punkcie (a, b) i w otoczeniu (Z) tego punktu.

Znamy wartość funkcji:

$$z = f(x, y)$$

w jakimś punkcie (a, b) , t. j. znamy $f(a, b)$ i wartości cząstkowych pochodnych w tym punkcie, t. j. $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$, $f_{xx}(a, b)$, $f_{xy}(a, b)$, $f_{yy}(a, b)$, ...; dajemy zmiennym takie przyrosty h i k , aby wartości $a + h$, $b + k$ należały do otoczenia (Z) .

Chcemy wyrazić

$$z = f(a + h, b + k)$$

zapomocą $f(a, b)$, $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$, $f_{xx}(a, b)$, $f_{xy}(a, b)$, ... i zapomocą przyrostów h i k .

Postępujemy w tym celu podobnie, jak przy dowodzie twierdzenia o wartości średniej dla funkcji dwóch zmiennych (por. § 112, str. 341), a mianowicie wprowadzamy funkcję pomocniczą:

$$(a) \quad \varphi(t) = f(a + th, b + tk)$$

Jeżeli uważamy chwilowo a, b, h, k za stałe, to $\varphi(t)$ jest funkcją jednej zmiennej t . Możemy ją zatem rozwinąć według wzoru Maclaurina:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{t}{1!} \varphi'(0) + \frac{t^2}{2!} \varphi''(0) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) + \frac{t^n}{n!} \varphi^{(n)}(\theta t)$$

przyczem użyliśmy wzoru Lagrange'a na wyraz dopełniający.

Kładąc tu $t = 1$, otrzymujemy:

$$(b) \quad \begin{aligned} \varphi(1) = f(a + h, b + k) = \varphi(0) + \frac{1}{1!} \varphi'(0) + \frac{1}{2!} \varphi''(0) + \dots + \\ + \frac{1}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!} \varphi^{(n)}(\theta) \end{aligned}$$

przyczem:

$$0 < \vartheta < 1$$

Wartość $\varphi(0)$ otrzymujemy z wzoru (a), kładąc w nim $t=0$, a więc:

$$\varphi(0) = f(a, b)$$

Wartości pochodnych $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$... oblicza się według wzoru (75) z § 107, uważając $\varphi(t)$ za funkcję złożoną z dwóch funkcyj:

$$x = a + th$$

$$y = b + tk$$

I tak:

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

czyli

$$\varphi'(t) = f_x(a + ht, b + kt) \cdot h + f_y(a + ht, b + kt) \cdot k$$

Dla $t=0$ otrzymujemy stąd:

$$\varphi'(0) = f_x(a, b) \cdot h + f_y(a, b) \cdot k$$

Jest to pierwsza różniczka zupełna funkcji $f(x, y)$ na miejscu (a, b) , dla przyrostów h, k , a więc:

$$\varphi'(0) = df(a, b)$$

Podobnie otrzymuje się po wykonaniu łatwych rachunków:

$$\varphi''(0) = f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$$

czyli:

$$\varphi''(0) = d^2 f(a, b)$$

Ogólnie:

$$\varphi^{(n-1)}(0) = d^{n-1} f(a, b) = f_{x^{n-1}}(a, b)h^{n-1} + \binom{n-1}{1} f_{x^{n-2}y}(a, b)h^{n-2}k + \dots +$$

$$+ f_{y^{n-1}}(a, b)k^{n-1}$$

a

$$\varphi^{(n)}(\vartheta) = [d^n f]_{x=a+\vartheta h, y=b+\vartheta k}$$

Otrzymane wartości podstawiamy we wzór (b) i otrzymujemy:

$$(148) \quad \begin{aligned} z = f(a + h, b + k) &= f(a, b) + \frac{1}{1!} (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k) + \\ &+ \frac{1}{2!} (f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2) + \dots + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \left(f_{x^{n-1}}(a, b)h^{n-1} + \binom{n-1}{1} f_{x^{n-2}y}(a, b)h^{n-2}k + \dots + \right. \\ &\left. + f_{y^{n-1}}(a, b)k^{n-1} \right) + \frac{1}{n!} [d^n f]_{x=a+\vartheta h, y=b+\vartheta k} \end{aligned}$$

Taką postać ma wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych. Wzór ten można sprowadzić do postaci podobnej do wzoru (120) na str. 391, podającego przyrost funkcji, wyrażony zapomocą kolejnych różniczek. I tak oznaczymy przyrost $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ symbolem Δf , a kolejne różniczki zupełne symbolami $df, d^2f, \dots$, to otrzymamy z wzoru (148), przenosząc $f(a, b)$ na lewą stronę, następujący zwięzły wzór:

$$(149) \quad \Delta f = df + \frac{1}{2!} d^2f + \frac{1}{3!} d^3f + \dots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1}f + \frac{1}{n!} [d^n f]_{x=a, y=b}^{\Delta x, \Delta y}$$

Widzimy tu zupełną analogję z wzorem (120), odnoszącym się do funkcji jednej zmiennej.

Kładąc we wzorze (148) $a=0$ i $b=0$, otrzymujemy następujący wzór Maclaurina dla funkcji dwóch zmiennych:

$$f(h, k) = f(0, 0) + \frac{1}{1!} (f_x(0, 0)h + f_y(0, 0)k) + \frac{1}{2!} (f_{xx}(0, 0)h^2 + 2f_{xy}(0, 0)hk + f_{yy}(0, 0)k^2) + \dots + \frac{1}{n!} [d^n f]_{x=0, y=0}^{\Delta x, \Delta y}$$

Zamiast h i k używa się tu zwykle liter x i y , a wtedy ten wzór przyjmuje postać:

$$(150) \quad z = f(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!} (f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y) + \frac{1}{2!} (f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2) + \dots + \frac{1}{n!} [d^n f]_{0,0}^{\Delta x, \Delta y}$$

Jeżeli wyraz dopełniający dąży do zera, przy n dążącym do nieskończoności, to otrzymujemy z wzoru Taylora lub Maclaurina nieskończony szereg Taylora lub Maclaurina, przedstawiający funkcję $z = f(x, y)$.

Uwaga. Twierdzenie o wartości średniej, które omówiono w § 112 (str. 341–342), jest specjalnym przypadkiem wzoru Taylora.

Istotnie dla $n=1$ przechodzi wzór (148) na twierdzenie o wartości średniej, wyrażone wzorem (83) na str. 342.

Wszystkie wzory, omówione w tym paragrafie, rozszerza się bez trudności na trzy i więcej zmiennych. W szczególności wzór (149) na przyrost funkcji pozostaje bez zmiany, a tylko w dopełniającym wyrazie trzeba dopisać odpowiednio większą liczbę podstawień.

WYDAWNICTWO „UNIVERSUM“ Katowice

poleca wydawnictwa:

Domańska A.	Przy kominku. Zbiór baśni
Eker L. inż.	Zasady układu tolerancyj średnic
Florczyk H.	Trygonometria w zakresie szkoły średniej (Wyd. IV)
Gillowa J.	Kuma Biada. Książeczka obrazk. z ilustr.
Gillowa J.	Naopak w kraju " " " "
Gillowa J.	Panna Ojdana " " " "
Gillowa J.	Sprawa Bylejaka " " " "
Jastrzębski J. inż.	Suwaki rachunkowe. Teoria, budowa i sposób użycia
Łomnicki A. prof.	Matematyka. Algebra i trygonometria
Łomnicki A. prof.	Matematyka. Geometria analityczna. Zasady rachunku różniczkowego i całkowego
Łomnicki A. prof.	Rachunek różniczkowy i całkowity dla potrzeb przyrodników i techników
	Tom I. cz. I. O funkcjach i granicach
	Tom I. cz. II. Rachunek różniczkowy
	Tom I. cz. III. Zastosowanie rachunku róż- niczkowego
	Tom II. Rachunek całkowity
	Tom III. Szeregi nieskończone. Równania róż- niczkowe. Geometria różniczkowa
Niementowski W. inż.	Silniki lotnicze do modeli latających Podręcznik dla modelarzy
Nocoń R. H.	Zasady gramatyki angielskiej
Orlicki M. inż.	Zbiór zadań z geometrii analitycznej na płaszczyźnie i w przestrzeni (z rozwiązaniami) Podręcznik zatwierdzony do użytku szkolnego przez M. O.
Ostrowska W.	Chłopcy malowani. Wiersze z lat 1940-45.
Ostrowska W.	Czworonożni przyjaciele. Książeczka z ilustr.
Pajewski K. inż. dr	Lakiernictwo. Podręcznik dla inżynierów, la- kierników i malarzy
Pajewski K. inż. dr	Wytuczne walki z korozją
Plamitzer A. inż.	Elektrotechnika samochodowa. Podręcznik dla kierowców
Smyczyński L. mgr	Psy - Rasy, hodowla, szkolenie
Szymanowska Z.	Zwycięstwo. Powieść
Wand K. T.	Krwawy szlak pogranicza. Powieść z Dzikiego Zachodu
Zakrzewska H.	Zasypana sztolnia (lektura szkolna zatw. przez M. O.)

Do nabycia w księgarniach







