BIBLIOTEKA PWSP KRAKÓW
11.770
KDN., 15. 10. I. 53, 20.000

NTONI ŁOMNICKI
FESOR B. POLITECHNIKI LWOWSKIEJ

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY

DLA POTRZEB PRZYRODNIKÓW I TECHNIKÓW

TOM I

CZ. III

ZASTOSOWANIA RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO

WYDANIE DRUGIE

PRZEDRUK FOTOGRAFICZNY Z I WYDANIA
AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI W KRAKOWIE 1939 r.

BIBLIOTEKA PODRĘCZNIKOWA Komitetu Uczelnianego Z.S.P. Nr. ..... przy P.W.S.P. w Krakowie

WYDAWNICTWO „UNIVERSUM" KATOWICE

BIBLIOTEKA
Państwowej
Wyższej Szkoły Pedagogicznej
W KRAKOWIE
11770

BIBLIOTEKA Komitetu Uczelnianego Z.S.P. Nr. przy P.W.S.P. w Krakowie

CZĘŚĆ III.

Zastosowania rachunku różniczkowego.

ROZDZIAŁ XIII.

Maxima i minima funkcyj.

Ustęp I.

MAXIMA I MINIMA FUNKCYJ JEDNEJ ZMIENNEJ, PODANYCH W FORMIE WYRAŹNEJ.

§ 144. Definicje extremów.

We wszystkich naukach, posługujących się matematyką, bardzo ważną rolę odgrywa zbadanie, dla jakich wartości zmiennej niezależnej przybiera zmienna zależna wartości największe lub najmniejsze. Może tu chodzić bądźto o wartości największe i najmniejsze spośród wszystkich wogóle wartości tej funkcji, bądźto spośród wszystkich wartości, należących do pewnego przedziału zmiennej niezależnej, bądźto wreszcie spo-

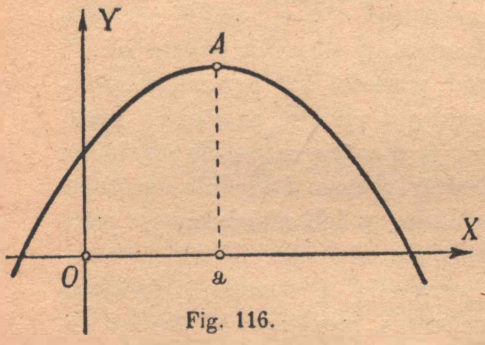


Fig. 116.

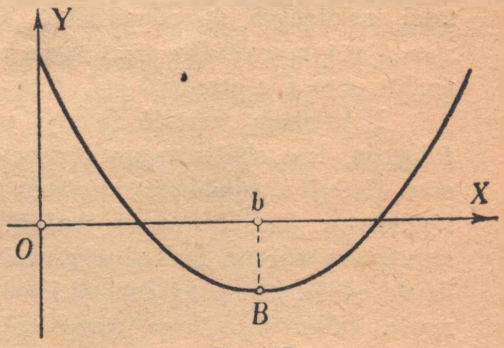


Fig. 117.

śród wartości, należących tylko do odpowiednio bliskiego lecz obustronnego otoczenia jakiejś wartości zmiennej niezależnej.

Tak np. funkcja, której obrazem graficznym jest parabola, przedstawiona na fig. 116, przybiera dla $x = a$ wartość $y = A$, największą wśród wszystkich wogóle wartości tej funkcji; funkcja, której obrazem graficznym jest parabola, przedstawiona na fig. 117, przybiera dla $x = b$

wartość $y = B$, najmniejszą spośród wszystkich możliwych wartości tej funkcji. Funkcja, której obrazem graficznym jest parabola trzeciego stopnia, przedstawiona na fig. 118, nie posiada wartości największej z *wszystkich* wogóle wartości tej funkcji, albowiem wzrasta nieograniczenie z wzrostem x; nie istnieje również dla tej funkcji wartość najmniejsza z wszystkich wogóle wartości tej funkcji. Natomiast, jeżeli się ograniczymy do przedziału np. $\langle c, d \rangle$, to widzimy, że na jednym końcu tego przedziału, a mianowicie dla $x = c$, ta funkcja przybiera wartość $y = C$, najmniejszą spośród wszystkich wartości, należących do przedziału $\langle c, d \rangle$. Podobnie dla $x = d$ przybiera ta funkcja wartość największą spośród wszystkich wartości, należących do przedziału $\langle c, d \rangle$.

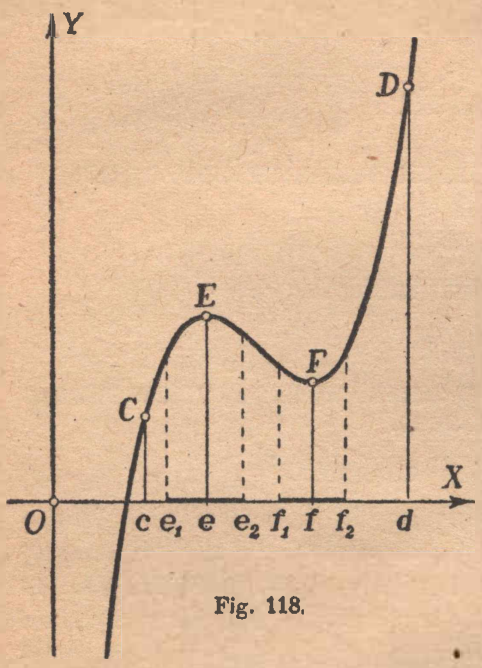


Fig. 118.

Ważniejsze jednak dla zbadania przebiegu tej funkcji są takie punkty, jak $x = e$ i $x = f$, w których funkcja przybiera wartość największą lub najmniejszą spośród wartości, należących do odpowiednio bliskiego otoczenia punktu $x = e$ lub $x = f$; w tym wypadku przedstawia np. przedział $\langle e_1, e_2 \rangle$ takie otoczenie punktu $x = e$, a przedział $\langle f_1, f_2 \rangle$ odpowiednie otoczenie punktu $x = f$.

Największą wartość funkcji wśród wartości z odpowiednio zacieśnionego, lecz obustronnego otoczenia jakiegoś punktu, nazywamy *maximum funkcji* a najmniejszą *minimum funkcji*; wspólną nazwą dla maximum i minimum jest: *extremum funkcji*. Należy zawsze dokładnie odróżniać *największą* wartość funkcji w jakimś właściwym lub niewłaściwym przedziale od *maximum* tej funkcji i podobnie dla *minimum*. (Niektórzy autorowie, celem wyraźnego odróżnienia, nazywają tę wartość, największą w stosunku do odpowiednio małego otoczenia, maximum *lokalnem* i podobnie dla minimum). Tak np. na fig. 116 mamy w punkcie $x = a$ maximum a zarazem wartość największą z całego niewłaściwego przedziału; na fig. 117 mamy w punkcie $x = b$ minimum a zarazem wartość najmniejszą; na fig. 118 mamy w punktach $x = c$ i $x = d$ wartość największą i najmniejszą, lecz nie maximum ani minimum, a w punktach $x = e$ i $x = f$ mamy extrema, lecz nie są to ani najmniejsze ani największe wartości funkcji z przedziału $\langle c, d \rangle$

Funkcja, której obraz graficzny przedstawiono na fig. 119, ma w punkcie $x=c$ maximum a zarazem wartość największą z przedziału $\langle a, b\rangle$, w punkcie $x=d$ minimum a zarazem wartość najmniejszą, natomiast w punkcie $x=a$ niema minimum, albowiem wartości funkcji istnieją tylko z jednej strony tego punktu, a nie w *obustronnem* jego otoczeniu.

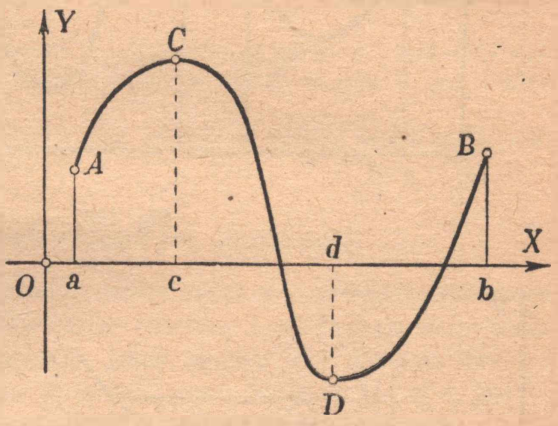


Fig. 119.

W tym rozdziale zajmiemy się badaniem extremów funkcyj ciągłych, określonych w skończonych przedziałach.

Uwaga. Z funkcyj nieciągłych występują w zastosowaniach tylko takie funkcje, które w skończonym przedziale posiadają skończoną liczbę punktów nieciągłości. Każdy taki punkt wymaga specjalnego, bezpośredniego badania, nie będziemy więc tu rozwijali żadnych metod ogólnych, służących do badania extremów w punktach nieciągłości

Wiadomo z ogólnych własności funkcyj ciągłych (por. § 58), że każda funkcja, która jest ciągła w przedziale zamkniętym, posiada w tym przedziale wartość największą i najmniejszą, nie podaliśmy jednak dogodnej metody efektywnego wyznaczania tych wartości — o ile one nie leżą przypadkiem na końcach badanego przedziału. Chcąc znaleźć największe i najmniejsze wartości funkcji ciągłej, określonej w skończonym przedziale zamkniętym, należy wyznaczyć wszystkie extrema, a ponadto wartości tej funkcji na końcach przedziału i wybrać z tych wszystkich liczb największą i najmniejszą.

Uwaga. Ten wybór nie sprawia żadnych trudności, gdy w skończonym przedziale istnieje tylko skończona liczba extremów; nie będziemy się zaś tutaj obszerniej zajmowali takiemi skomplikowanemi funkcjami ciągłemi, które posiadają w skończonym przedziale nieskończenie wiele extremów.

Cała trudność w takich zagadnieniach polega na wyznaczeniu extremów. Rachunek różniczkowy dostarcza nam, jak to wnet zobaczymy, bardzo dogodnych metod, służących do wyznaczania extremów funkcyj ciągłych, *różniczkowalnych* (z któremi najczęściej mamy w praktyce do czynienia) a nawet w pewnych wypadkach dla funkcyj ciągłych, nieróżniczkowalnych w odosobnionych punktach, możemy wyznaczyć extrema przy pomocy rachunku różniczkowego.

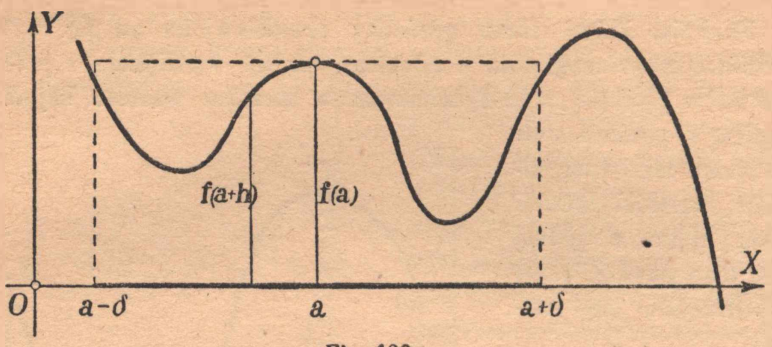


Fig. 120.

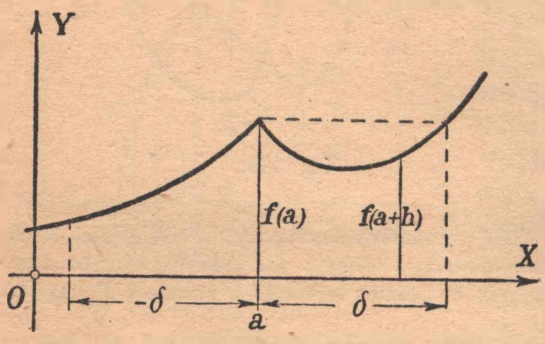


Fig. 121.

Aby się zaznajomić z temi metodami, musimy najpierw sprecyzować ściśle arytmetycznie pojęcie extremum. I tak mówimy, że *funkcja $f(x)$ posiada w punkcie $x=a$ maximum, jeżeli istnieje taki przedział, otaczający a, w którym wszystkie wartości funkcji są mniejsze od $f(a)$* czyli: jeżeli istnieje taka dodatnia liczba δ, że dla wszystkich (dodatnich i ujemnych) przyrostów h, spełniających warunek $|h|<\delta$, jest

$$f(a+h)<f(a)$$

(Porównaj fig. 120 i 121).

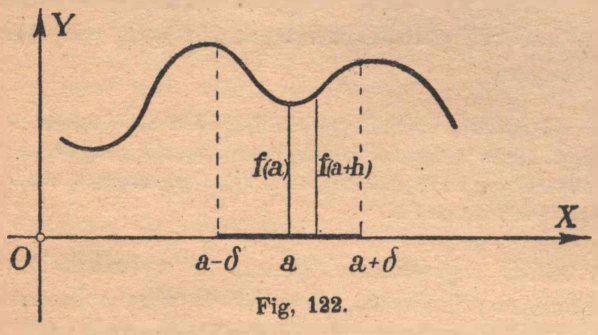


Fig. 122.

Podobnie mówimy, że *funkcja posiada w punkcie $x=a$ minimum, jeżeli istnieje taka dodatnia liczba δ, że dla wszystkich przyrostów h, spełniających warunek:*

$$|h|<\delta$$

jest

$$f(a+h)>f(a)$$

(Por. fig. 122).

Uwaga. Jeżeli $f(x)$ jest różna od zera w punkcie a i w jakimś jego otoczeniu, to badanie extremum funkcji $f(x)$ w tym punkcie można zastąpić przez badanie extremum odwrotności tej funkcji, t. j. funkcji $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

I tak, jeżeli $f(a) > 0$ i obierzemy takie otoczenie punktu a, w którem także $f(a+h) > 0$, to warunek:

$$f(a+h) > f(a)$$

pociąga za sobą $\frac{1}{f(a+h)} < \frac{1}{f(a)}$ czyli $g(a+h) < g(a)$ i odwrotnie. Tak samo ma się rzecz dla $f(a) < 0$.

A zatem, jeżeli funkcja posiada w jakimś punkcie minimum i zachowuje stały znak w otoczeniu tego punktu, to odwrotność tej funkcji posiada w tym punkcie maximum i odwrotnie.

Z tej uwagi korzystamy często, gdy odwrotność badanej funkcji ma prostszą postać, aniżeli dana funkcja.

§ 145. O niewłaściwych extremach.

Prócz właściwych extremów, omówionych w poprzednim paragrafie, występują niekiedy t. zw. *niewłaściwe* extrema. I tak funkcja ma w punkcie $x = a$ niewłaściwe maximum, jeżeli istnieje taka dodatnia liczba δ, że dla wszystkich przyrostów h, spełniających warunek $|h| < \delta$, jest:

$$f(a+h) \leqq f(a)$$

przyczem w każdem, chociażby dowolnie bliskiem otoczeniu punktu $x = a$, znajdują się takie liczby, dla których $f(a+h) = f(a)$.

Podobnie określamy niewłaściwe minimum. Otóż dla niewłaściwych extremów charakterystycznem jest to, że w dowolnie bliskiem otoczeniu badanego punktu a funkcja przyjmuje także wartości, *równe* wartości funkcji w punkcie a.

Przykłady. 1) Funkcja, określona warunkami:

$$y = x^2 \sin^2 \frac{1}{x} \quad \text{dla} \quad x \neq 0$$

$$y = 0 \qquad \text{„} \quad x = 0$$

(por. fig. 123) ma w punkcie $x = 0$ niewłaściwe minimum.

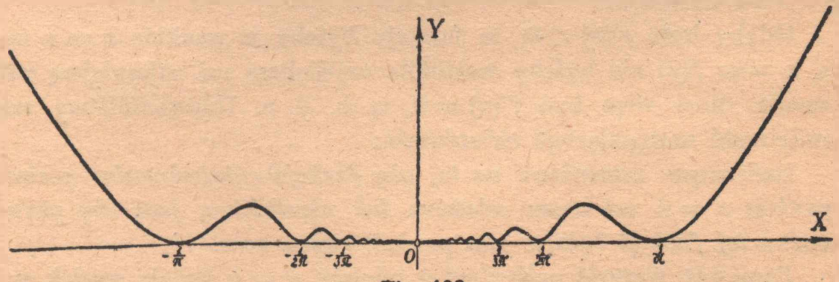


Fig. 123.

Wszystkie bowiem wartości funkcji w otoczeniu punktu $x = 0$ są niemniejsze od wartości: $y = 0$ funkcji w tym punkcie, ale w dowolnej

bliskości tego punktu znajdują się punkty, dla których funkcja ma wartości równe 0 $\left(\text{są to te wszystkie punkty, dla których } \sin^2\frac{1}{x}=0 \text{ t. j. } \frac{1}{x}=n\pi \text{ czyli } x=\frac{1}{n\pi}\right)$.

2) Dalszym przykładem takich niewłaściwych extremów jest każdy punkt, leżący wewnątrz przedziału *stałości* funkcji (por. str. 71, fig. 40). W każdem otoczeniu takiego punktu, mieszczącem się jeszcze w obrębie przedziału stałości, wszystkie wartości funkcji są równe, a więc spełnia się warunek $f(a+h)=f(a)$. Wobec tego każdy taki punkt możemy uważać zarówno za niewłaściwe maximum jak i minimum.

W dalszym ciągu będziemy się zajmowali prawie wyłącznie zwykłemi, właściwemi extremami. O ileby zaś chodziło o niewłaściwe extrema, to zaznaczymy to wyraźnie.

§ 146. Konieczny warunek istnienia extremów dla funkcyj różniczkowalnych.

Zajmiemy się najpierw badaniem extremów funkcyj, które posiadają wszystkie pochodne ciągłe w tym całym przedziale, w którym tę funkcję badamy.

Łatwo zauważyć, chociażby z figur 116—120, że w punktach, w których funkcja (różniczkowalna) posiada extremum, styczna jest równoległa do osi odciętych, czyli pierwsza pochodna ma w tych punktach wartość zero. Istotnie według założenia w takim punkcie np. $x=a$ istnieje skończona pochodna $f'(a)$. Gdyby ta wartość była dodatnia: $f'(a)>0$, to funkcja byłaby w tym punkcie rosnącą (por. § 101, 6), a więc w otoczeniu tego punktu przyjmowałaby wartości $f(a+h)$ mniejsze od $f(a)$ dla h ujemnych a większe od $f(a)$ dla h dodatnich, a więc dla $x=a$ nie byłoby extremum.

Gdyby było $f'(a)<0$, to funkcja byłaby w punkcie $x=a$ malejąca, a więc $f(a)$ nie byłoby wartością największą ani najmniejszą wśród otoczenia. Musi więc być $f'(a)=0$, c. b. d. o. Udowodniliśmy zatem prawdziwość następującego twierdzenia:

koniecznym warunkiem na to, aby funkcja różniczkowalna posiadała w punkcie $x=a$ extremum właściwe lub niewłaściwe, jest, aby pierwsza pochodna tej funkcji była w tym punkcie równa zeru.

Ponieważ wartość pochodnej w miejscu $x=a$ podaje spadek stycznej: $f'(a)=\operatorname{tg}\alpha$, przeto geometryczne znaczenie warunku $f'(a)=0$ jest następujące: *styczne w tych punktach krzywej różniczkowalnej, w których posiada ona extrema, są równoległe do osi odciętych.*

Zwracamy jednak już teraz uwagę na to, że ten warunek jest tylko

konieczny, lecz nie jest jeszcze *wystarczający*, to znaczy, że może się zdarzyć, że funkcja różniczkowalna nie posiada w punkcie $x = a$ extremum, jakkolwiek $f'(a) = 0$.

Przykłady. 1) Chcemy wykryć extrema funkcji:

$$y = 4x^3 - 21x^2 + 30x - 8$$

różniczkowalnej dla każdej wartości x.

Tworzymy

$$y' = 12x^2 - 42x + 30$$

Extrema mogą istnieć tylko dla tych wartości x, dla których ta pochodna ma wartość 0; te wartości znajdujemy, rozwiązując równanie:

$$12x^2 - 42x + 30 = 0$$

Stąd:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{5}{2}$$

Aby rozstrzygnąć, czy w punkcie $x_1 = 1$ jest extremum i jakiego rodzaju, możemy użyć następującego rozumowania.

Obliczmy wartość pochodnej przed punktem $x_1 = 1$ i poza tym punktem, to znaczy dla $x = 1 - \delta$ i dla $x = 1 + \delta$, przyczem δ jest liczba dodatnią. Otrzymamy:

$$y'(1 - \delta) = 12(1 - \delta)^2 - 42(1 - \delta) + 30$$

i

$$y'(1 + \delta) = 12(1 + \delta)^2 - 42(1 + \delta) + 30$$

czyli

$$y'(1 - \delta) = 12\delta^2 + 18\delta = 6\delta(2\delta + 3)$$
$$y'(1 + \delta) = 12\delta^2 - 18\delta = 6\delta(2\delta - 3)$$

Otóż $y'(1 - \delta)$ jest stale dodatnie, a zatem funkcja wzrasta przed punktem $x_1 = 1$; $y'(1 + \delta)$ jest ujemne, gdy $\delta < \frac{3}{2}$, a więc funkcja maleje poza punktem $x_1 = 1$ (aż do punktu $x = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$). A więc w punkcie $x_1 = 1$ badana funkcja osiąga maximum. Wartością tego maximum jest

$$y(1) = 4 - 21 + 30 - 8 = 5$$

W podobny sposób może czytelnik sprawdzić, że w punkcie $x_2 = \frac{5}{2}$ funkcja osiąga minimum. Wykresem tej funkcji jest parabola 3-go stopnia tak połczona, jak na fig. 118.

Tego postępowania można użyć dla funkcyj ciągłych zawsze wtedy, gdy istnieje pochodna w otoczeniu badanego punktu: jeżeli ta pochodna jest dodatnia (ujemna) przed badanym punktem, a ujemna (dodatnia) poza nim, to w tym punkcie funkcja osiąga maximum (minimum).

Możnaby także obliczyć bezpośrednio, że przyrost funkcji

$$y(1+\delta)-y(1)=\delta^2(4\delta-9)<0 \quad \text{dla} \quad \delta<\tfrac{9}{4}$$
$$y(1-\delta)-y(1)=-\delta^2(4\delta+9)<0$$

a stąd wynika, że funkcja ma w punkcie $x_1=1$ maximum. Ta bezpośrednia metoda wymaga jednak zwykle nieco dłuższego rachunku.

2) Zbadać extrema funkcji:

$$y=4+(x-2)^3$$

Tworzymy:

$$y'=3(x-2)^2$$

Widzimy, że $y'=0$ tylko dla $x=2$.

W tym punkcie styczna jest równoległa do osi x-ów. Aby zbadać, czy w tym punkcie funkcja posiada extremum, badamy sposób jej wzrastania i malenia przed tym punktem i za tym punktem.

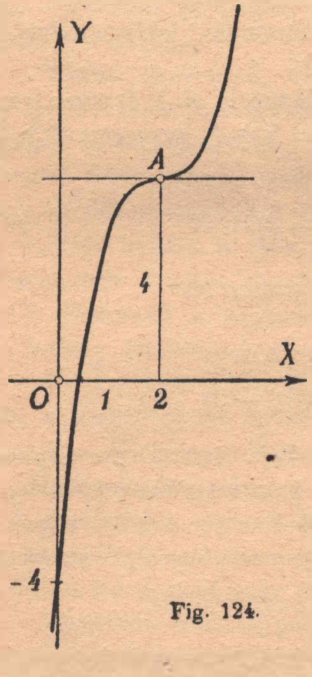


Fig. 124.

Postępując podobnie jak w poprzednim przykładzie, znajdujemy:

$$y'(2-\delta)=3\delta^2>0$$
$$y'(2+\delta)=3\delta^2>0$$

A zatem funkcja: y wzrasta zarówno przed punktem $x=2$ jak i poza tym punktem, a więc w tym punkcie niema extremum, jakkolwiek spełnia się warunek konieczny:

$$y'(2)=0$$

Widzimy więc, że ten warunek konieczny nie jest jeszcze dostateczny. Figura 124 ilustruje przebieg tej funkcji; jest ona, jak widzimy, monotonicznie rosnącą.

Punkty tego rodzaju jak A, zwane punktami *przegięcia*, omówimy później dokładniej, w rozdziale poświęconym geometrycznym zastosowaniom rachunku różniczkowego.

§ 147. Badanie extremów funkcji ciągłej, lecz nieróżniczkowalnej w jakimś punkcie.

Używając metody podobnej, jak w poprzednich przykładach, możemy niekiedy zbadać także extrema w punktach, w których funkcja nie posiada pochodnej, jeżeli tylko w otoczeniu tych punktów istnieje pochodna. Tak np. chcemy znaleźć extrema funkcji ciągłej:

$$y = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

Utwórzmy pochodną:

$$y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

Ta pochodna nie staje się zerem dla żadnej wartości x. Z tego jednak nie możemy jeszcze wnioskować, jakoby ta funkcja nie posiadała extremów, albowiem ta funkcja nie wszędzie jest różniczkowalna, a nasz warunek konieczny dotyczy tylko funkcyj różniczkowalnych. I tak jedynym punktem, dla którego funkcja jest nieróżniczkowalna, jest: $x = 1$.

Punkt ten wymaga osobnego badania. Pochodna nie istnieje wprawdzie w tym punkcie, ale istnieje zarówno przed tym punktem jak i poza nim. Badamy zatem:

$$y'(1-\delta) = +\frac{2}{3\sqrt[3]{\delta}} > 0$$

$$y'(1+\delta) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{\delta}} < 0$$

Pochodną jest dodatnia przed punktem $x = 1$, a ujemna poza nim, zatem sama funkcja wzrasta przed punktem $x = 1$, a maleje poza nim; ponieważ zaś jest ciągła w punkcie $x = 1$, przeto ma w nim wartość największą.

Fig. 125 ilustruje przebieg tej funkcji. W punkcie B posiada funkcja maximum. Wartością maksymalną funkcji jest $y(1) = 2$.

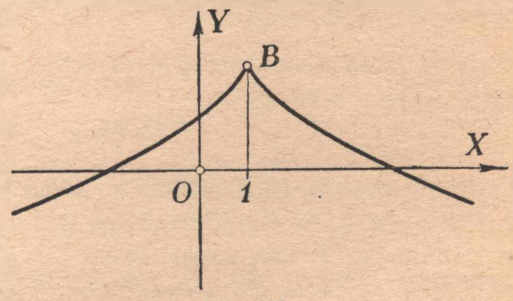


Fig. 125.

Do tego samego wyniku dochodzi się także wprost, tworząc przyrosty:

$$y(1+\delta) - y(1) = 2 - \sqrt[3]{\delta^2} - 2 = -\sqrt[3]{\delta^2} < 0$$

$$y(1-\delta) - y(1) = 2 - \sqrt[3]{(-\delta)^2} - 2 = -\sqrt[3]{\delta^2} < 0$$

Niechaj czytelnik stwierdzi, że podobnie zbudowana funkcja: $y = 2 - \sqrt[3]{x-1}$ nie posiada w punkcie $x = 1$ extremum, lecz przechodzi przez ten punkt, malejąc monotonicznie.

Z powyższego przykładu widzimy, jakie ostrożności należy zachować, aby nie pominąć żadnego extremum. I tak przedewszystkiem należy zbadać osobno wszystkie punkty nieciągłości; następnie trzeba osobno zbadać te punkty, w których nie istnieje pochodna, jakkolwiek sama funkcja jest ciągła, a wreszcie należy badać wszystkie punkty, w których pierwsza pochodna jest równa zeru.

§ 148. Dostateczne warunki istnienia extremum.

W poprzednim paragrafie rozstrzygaliśmy o istnieniu extremum przez badanie znaku pierwszej pochodnej w otoczeniu danego punktu. Badanie takie bywa nieraz dość trudne i rozwlekłe. Dla funkcyj, *posiadających drugie, trzecie i dalsze pochodne, ciągłe* we wszystkich badanych punktach, można najczęściej to badanie znacznie uprościć, opierając się na wzorze Taylora. I tak, wyznaczywszy wszystkie punkty, w których $f'(x) = 0$, tworzymy rozwinięcie Taylora w otoczeniu tych punktów. Tak np., jeżeli $x = a$ jest pierwiastkiem pierwszej pochodnej, to tworzymy rozwinięcie Taylora w otoczeniu tego punktu, poprzestając narazie na trzech wyrazach, a mianowicie:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a+\vartheta h)$$

Ponieważ $f'(a) = 0$, przeto pozostaje:

$$\text{(w)} \qquad \Delta f = f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{2} f''(a+\vartheta h)$$

Badamy teraz znak drugiej pochodnej w miejscu $x = a$.

Jeżeli się okaże, że:

$$f''(a) > 0$$

to da się znaleźć takie otoczenie punktu a, że także $f''(a+h) > 0$, a więc i $f''(a+\vartheta h) > 0$, albowiem $f''(x)$ jest według założenia funkcją ciągłą w punkcie a. Prawa strona wzoru (w) jest wtedy dodatnia w otoczeniu punktu a, zarówno dla dodatnich jak i dla ujemnych przyrostów h, jest bowiem iloczynem z $\frac{1}{2}h^2$ i z liczby dodatniej $f''(a+\vartheta h)$. A więc i lewa strona jest dodatnia, a zatem:

$$f(a+h) > f(a)$$

w otoczeniu punktu a, to zaś dowodzi, że w punkcie $x = a$ jest *minimum*.

W zupełnie podobny sposób okazuje się, że w punkcie $x=a$ funkcja posiada *maximum*, jeżeli w tym punkcie:

$$f''(a)<0$$

wtedy bowiem otrzymuje się $f(a+h)<f(a)$ dla odpowiednio małych h. Pozostały przypadek: $f''(a)=0$ wymaga osobnego badania; przeprowadzimy je w dalszym toku. Narazie doszliśmy do następującego wyniku.

Jeżeli w jakimś punkcie pierwsza pochodna jest równa zeru, a druga pochodna jest ciągła i ma wartość ujemną, to w tym punkcie funkcja posiada maximum; jeżeli zaś druga pochodna jest ciągła i ma wartość dodatnią, to funkcja posiada minimum.

A zatem warunki: $f'(a)=0$ i $f''(a)<0$ dowodzą istnienia maximum, a warunki $f'(a)=0$ i $f''(a)>0$ minimum.

Przykłady. 1) W przykładzie 1 z poprzedniego paragrafu znaleźliśmy pierwiastki pochodnej:

$$x_1=1 \quad \text{i} \quad x_2=\tfrac{5}{2}$$

Chcąc rozstrzygnąć, czy w tych punktach występują extrema i jakiego są one rodzaju, tworzymy drugą pochodną:

$$y'=24x-42$$

i podstawiamy za x znalezione wartości. Otrzymujemy:

$$y''(1)=24\cdot 1-42=-18<0$$

a zatem dla $x=1$ jest maximum;

$$y''(\tfrac{5}{2})=24\cdot\tfrac{5}{2}-42=+18>0$$

a zatem dla $x=\frac{5}{2}$ jest minimum.

Widzimy, że dyskusja przy pomocy znaku drugiej pochodnej w miejscu $x=a$ jest krótsza, aniżeli przeprowadzona w poprzednim paragrafie dyskusja przy pomocy znaku pierwszej pochodnej przed punktem $x=a$ i poza tym punktem.

2) Dla trójmianu kwadratowego mamy:

$$y=ax^2+bx+c$$

$$y'=2ax+b=0 \quad \text{stąd} \quad x=-\frac{b}{2a}$$

$$y''=2a$$

Widzimy zatem, że trójmian kwadratowy posiada zawsze extremum w punkcie $x=-\frac{b}{2a}$; jest to minimum, gdy $a>0$ (bo wtedy $y''>0$) a maximum, gdy $a<0$.

Widzimy, jak szybko doszliśmy tu, używając rachunku różniczkowego, do wyniku, który się zdobywa w elementarnej algebrze przy pomocy dość mozolnych rozważań.

W następnych paragrafach podamy dalsze przykłady extremów zaczerpnięte z rozmaitych dziedzin, obecnie zaś uzupełnimy warunki dostateczne przez rozważenie pominiętego przypadku: $f''(a) = 0$.

Jeżeli w jakimś punkcie $x = a$ prócz pierwszej pochodnej także i druga pochodna jest równa zeru, to zatrzymując w rozwinięciu Taylora cztery wyrazy, otrzymujemy:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a+\vartheta h)$$

Ponieważ $f'(a) = 0$ i $f''(a) = 0$, przeto otrzymujemy:

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = \frac{h^3}{3!}f'''(a+\vartheta h)$$

Znak przyrostu Δf zależy zatem od wartości trzeciej pochodnej.

Jeżeli $f'''(a) > 0$, to wskutek ciągłości jest ta pochodna dodatnia także w otoczeniu punktu a, a więc dla odpowiednio małych h jest także $f'''(a+\vartheta h)$ liczbą dodatnią. Ponieważ h występuje tu w trzeciej potędze, przeto dla $h > 0$ jest $\Delta f > 0$, a dla $h < 0$ jest $\Delta f < 0$, a więc przed punktem a jest $f(a+h) < f(a)$ a poza punktem a jest $f(a+h) > f(a)$.

Funkcja nie posiada zatem extremum w punkcie a, lecz przechodzi przez ten punkt, wzrastając monotonicznie (jak na fig. 124 z § 146). Podobnie, gdy $f'''(a) < 0$, to funkcja nie posiada extremum w punkcie $x = a$, lecz przechodzi przez ten punkt, malejąc monotonicznie. Jeżeli zaś $f'''(a) = 0$, to trzeba się posunąć we wzorze Taylora jeszcze o jeden wyraz. Otrzymamy zatem:

$$\Delta f = f(a+h) - f(a) = \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(a+\vartheta h)$$

Jeżeli pochodna $f^{(4)}(a)$ jest różna od zera, to i $f^{(4)}(a+\vartheta h)$ jest różna od zera dla małych h i ma ten sam znak co $f^{(4)}(a)$, a przyrost Δf ma ten sam znak dla dodatnich i ujemnych h, a zatem wtedy funkcja posiada w punkcie $x = a$ maximum, gdy $f^{(4)}(a) < 0$, a minimum, gdy $f^{(4)}(a) > 0$. Postępując w ten sposób dalej, dochodzimy do następujących, ogólniejszych, dostatecznych warunków istnienia extremów.

Jeżeli w jakimś punkcie pierwsza, a ewentualnie i dalsze kolejne pochodne, są równe zeru, a pierwsza nieznikająca w tym punkcie pochodna jest ciągła i jest rzędu parzystego, to w tym punkcie funkcja posiada maximum, gdy wartość tej pochodnej jest ujemna, a minimum, gdy jej wartość jest dodatnia.

A więc funkcja posiada extremum w punkcie $x = a$, gdy się spełniają warunki:

$$f'(a) = 0,\quad f''(a) = 0,\quad f'''(a) = 0, \ldots, f^{(2n-1)}(a) = 0,\quad f^{2n}(a) \neq 0 \quad \text{i} \quad f^{(2n)}(x)$$

jest funkcją ciągłą w punkcie a, a mianowicie maximum jest wtedy, gdy $f^{(2n)}(a) < 0$, a minimum, gdy $f^{(2n)}(a) > 0$.

Jeżeli zaś w jakimś punkcie pierwsza i druga pochodna jest równa zeru, a ewentualnie i dalsze kolejne pochodne, a pierwsza nieznikająca w tym punkcie pochodna jest ciągła i jest rzędu nieparzystego, to funkcja nie posiada w tym punkcie extremum, lecz wzrasta lub maleje monotonicznie, przechodząc przez ten punkt, zależnie od tego, czy ta pierwsza nieznikająca pochodna ma wartość dodatnią czy też ujemną.

Przykłady. 1) Zbadać extrema funkcji:

$$y = (x-2)^4 - 3$$

Tworzymy:

$$y' = 4(x-2)^3$$

Ta pochodna jest równa zeru tylko dla $x = 2$. W tym punkcie może, ale nie musi, zachodzić extremum. Aby to rozstrzygnąć, tworzymy:

$$y'' = 12(x-2)^2$$

Ponieważ $y''(2) = 0$, przeto trzeba sięgnąć do dalszych pochodnych.

$$y''' = 24(x-2)$$

a zatem także jest równa zeru dla $x = 2$. Dopiero:

$$y^{(4)} = 24 > 0$$

a więc w punkcie $x = 2$ posiada badana funkcja *minimum*. Wartością tego minimum jest $y(2) = -3$.

2) Zbadać, czy funkcja:

$$y = 4 + (x-2)^3$$

posiada extrema (por. przykład 2 w § 146)

Tworzymy:

$$y' = 3(x-2)^2$$

Jedynem miejscem zerowem tej funkcji jest $x = 2$, a zatem tylko w tym punkcie mogłaby funkcja posiadać extremum.

Rozstrzygamy o tem przy pomocy wyższych pochodnych:

$$y'' = 6(x-2); \quad y''(2) = 0$$
$$y''' = 6 > 0 \qquad y'''(2) > 0$$

Pierwsza, nieznikająca w punkcie $x = 2$ pochodna jest rzędu nieparzystego, zatem ta funkcja nie posiada extremum w tym punkcie, a więc wogóle w żadnym punkcie i jest stale rosnącą, albowiem jest stale $y''' > 0$.

3) Znaleźć extrema funkcji:

$$y = 4\cos x + \cos 2x.$$

Obliczamy:

$$y' = -4\sin x - 2\sin 2x = -4\sin x - 4\sin x\cos x = -4\sin x(1+\cos x)$$

Miejsca zerowe tej funkcji otrzymuje się z warunków:

$\sin x = 0$ a więc $x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi\ldots$ ogólnie $\boxed{x = m\pi}$

$\cos x = -1$ „ „ $x = \pm\pi,\ \pm 3\pi,\ldots$ „ $\boxed{x = (2m+1)\pi}$

Obliczamy:

$$y'' = -4\cos x - 4\cos 2x$$

i wstawiamy w tę pochodną otrzymane poprzednio pierwiastki pierwszej pochodnej. Dla:

$$x = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ldots, 2n\pi$$

otrzymujemy:

$$y''(0) = y''(\pm 2\pi) = \ldots = y''(2n\pi) = -4 - 4 = -8 < 0$$

więc dla wszystkich wartości:

$$x = 2n\pi$$

posiada badana funkcja *maxima*.

Dla:

$$x = \pm\pi,\ \pm 3\pi,\ldots,(2n+1)\pi$$

otrzymujemy:

$$y''(\pm\pi) = y''(\pm 3\pi) = \ldots = y''((2n+1)\pi) = 0$$

Wobec tego przechodzimy do dalszych pochodnych. I tak:

$$y''' = 4\sin x + 8\sin 2x$$

Dla $x = (2n+1)\pi$ jest zerem zarówno $\sin x$ jak i $\sin 2x$, a zatem:

$$y'''((2n+1)\pi) = 0$$

Tworzymy wobec tego dalszą pochodną.

$$y^{(4)} = 4\cos x + 16\cos 2x$$

Ponieważ:

$$\cos(2n+1)\pi = -1 \quad \text{a} \quad \cos[2\cdot(2n+1)\pi] = +1$$

przeto:

$$y^{(4)}((2n+1)\pi) = -4 + 16 = 12 > 0$$

a zatem dla wszystkich wartości x, wyrażonych wzorem:

$$x = (2n+1)\pi$$

posiada badana funkcja *minima*. Wykres tej funkcji przedstawiono na fig. 126

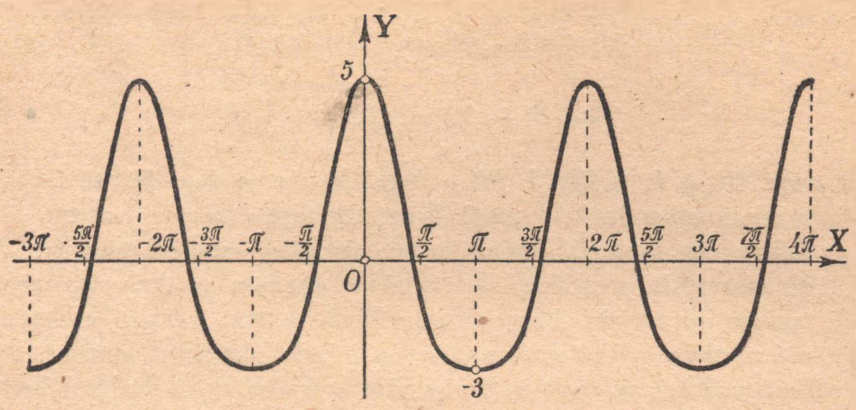


Fig. 126.

4) Niechaj czytelnik zbada extrema funkcji:

$$y = x^m \cdot e^{-x^2}$$

dla $m = 0, 1, 2, 3$ i ogólnie dla m parzystych i nieparzystych.

§ 149. O extremach w punktach, w których wszystkie pochodne są równe zeru.

Kryterja powyższe zawodzą (przy funkcjach, posiadających wszystkie pochodne) tylko wtedy, gdy wszystkie pochodne są w jakimś punkcie równe zeru. Przykładem takiego wyjątkowego zachowania się jest omówiona w § 142 funkcja, określona warunkami:

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{dla} \quad x \neq 0$$
$$y = 0 \quad \text{„} \quad x = 0$$

przedstawiona na fig. 115, str. 420. Widzieliśmy, że wszystkie pochodne tej funkcji są równe zeru w punkcie $x = 0$.

Wtedy uciekamy się do metody, omówionej w przykładach z §§ 146 i 147, a mianowicie tworzymy dla $\delta > 0$:

$$f'(0-\delta) = e^{-\frac{1}{\delta^2}} \cdot \frac{2}{-\delta^3} < 0$$

$$f'(0+\delta) = e^{-\frac{1}{\delta^2}} \cdot \frac{2}{+\delta^3} > 0$$

Widzimy, że ta funkcja maleje przed punktem $x = 0$, a wzrasta poza nim, a zatem w punkcie $x = 0$ funkcja posiada minimum. Jeszcze prościej dochodzimy do tego wniosku, badając bezpośrednio przyrost funkcji:

$$f(0+\delta)-f(0)=e^{-\frac{1}{\delta^2}}-0>0$$

$$f(0-\delta)-f(0)=e^{-\frac{1}{\delta^2}}-0>0$$

Jest więc $f(0+\delta)>f(0)$ i $f(0-\delta)>f(0)$, a to dowodzi, że funkcja posiada minimum w punkcie $x=0$. Wartością tego minimum jest $y(0)=0$.

Także dla funkcyj, posiadających przedziały stałości (por. str. 71, fig. 40), wszystkie pochodne są zerami w każdym punkcie wewnętrznym takiego przedziału. Przy badaniu funkcyj tego rodzaju może nas interesować chyba tylko zachowanie się ich w otoczeniu końców tego przedziału stałości; w razie potrzeby przeprowadza się to badanie bezpośrednio, bez pomocy rachunku różniczkowego, albowiem zwykle w tych punktach końcowych funkcja jest nieróżniczkowalna. W każdym punkcie takiego przedziału stałości mamy do czynienia z extremum *niewłaściwem* (por. § 145, przykład 2).

§ 150. Teoretyczne i praktyczne przykłady na extrema.

1) Funkcje $\log x$ i x wzrastają monotonicznie: zbadać, czy ich iloraz zachowuje się tak samo. Kwestję tę rozstrzygniemy przez zbadanie, czy funkcja:

$$y=\frac{\log x}{x}$$

posiada extrema. Ta funkcja jest określona tylko dla dodatnich x, a zatem niema potrzeby zajmowania się osobliwym punktem $x=0$. Obliczamy pierwszą pochodną:

$$y'=\frac{x\cdot\frac{1}{x}-1\cdot\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$y'=0$, gdy $1-\log x=0$ czyli $\log x=1$ a stąd $x=e$.

Dla tej wartości obliczamy:

$$y''=\frac{x^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}$$

Dla $x=e$ odpada druga część licznika i zostaje:

$$y''(e)=-\frac{1}{e^3}<0$$

a zatem badana funkcja posiada jedno maximum, a mianowicie w punkcie $x=e$. Jest to zarazem największa wartość, albowiem przed tym punktem

funkcja wzrasta, a poza nim maleje (bo $y' > 0$ dla $x < e$, a $y' < 0$ dla $x > e$). Zatem ta funkcja nie jest monotoniczna.

2) Wykazać, że nierówność:

$$e^x \geqq 1 + x$$

zachodzi dla wszystkich x (a więc także dla ujemnych x).

Badamy w tym celu extrema funkcji:

$$y = e^x - 1 - x,$$
$$y' = e^x - 1$$

$y' = 0$, gdy $e^x = 1$, t. j. dla $x = 0$.

Ponieważ:

$$y'' = e^x, \quad y''(0) = 1 > 0$$

przeto w punkcie $x = 0$ funkcja posiada *minimum*.

Jest to jednak zarazem wartość najmniejsza, jak to wynika z następującego prostego rozumowania.

Przed punktem $x = 0$, a mianowicie dla *wszystkich* ujemnych x, jest $e^x < 1$, a więc $y' = e^x - 1 < 0$, a to znaczy, że funkcja y jest stale malejąca przed $x = 0$.

Dla $x > 0$ jest $e^x > 1$, a więc $y' = e^x - 1 > 0$, a to znaczy, że funkcja y jest stale rosnąca poza punktem $x = 0$. A więc istotnie w punkcie $x = 0$ osiąga funkcja wartość najmniejszą.

Najmniejszą wartością funkcji y jest więc:

$$y(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$$

A zatem jest zawsze:

$$y \geqq 0$$

czyli:

$$e^x - 1 - x \geqq 0$$

a więc:

$$e^x \geqq 1 + x \qquad \text{c. b. d. o.}$$

3) Wzór na wychylenie w drganiach zanikających ma postać:

(r) $$y = b e^{-ax} \sin(cx + d)$$

przyczem $a > 0$, a $c \neq 0$. Funkcja ta ma nieskończenie wiele maximów i minimów. *Dekrementem logarytmicznym* D takich drgań nazywamy naturalny logarytm z ilorazu dwóch sąsiednich maksymalnych wychyleń. Chcemy obliczyć wartość tego dekrementu.

Już w § 86 obliczyliśmy pierwiastki pierwszej pochodnej tej funkcji, a mianowicie otrzymaliśmy:

$$x_n = x_0 + n \cdot \frac{T}{2}$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$; $T = \frac{2\pi}{c}$ oznacza okres każdego drgania a

$$x_0 = \frac{\operatorname{arctg} \frac{c}{a} - d}{c}$$

W tych punktach mogą leżeć extrema. Celem stwierdzenia, gdzie leżą maxima a gdzie minima, tworzymy drugą pochodną. Otóż:

$$y' = be^{-ax}(c\cos(cx+d) - a\sin(cx+d))$$
$$y'' = -abe^{-ax}(c\cos(cx+d) - a\sin(cx+d)) +$$
$$+ be^{-ax}(-c^2\sin(cx+d) - ac\cos(cx+d))$$

Dla pierwiastków: $x = x_n$ pierwszej pochodnej spełnia się równanie:

$$c\cos(cx_n+d) = a\sin(cx_n+d)$$

a więc:

$$y''(x_n) = be^{-ax_n}(-c^2\sin(cx_n+d) - a^2\sin(cx_n+d))$$
$$y''(x_n) = -b(a^2+c^2)e^{-ax_n}\sin(cx_n+d)$$

Ponieważ:

$$cx_n + d = \operatorname{arctg}\frac{c}{a} + n\pi$$

nie staje się równe zeru ani równe $n\pi$ dla żadnego całkowitego n, przeto we wszystkich punktach x_n mamy istotnie extrema. Jeżeli dla jakiegoś $n = p$ jest $y''(x_p) < 0$, to funkcja posiada tam maximum, a wtedy następny pierwiastek $x_{p+1} = x_p + \frac{\pi}{c}$ daje minimum; jeżeli bowiem $\sin(cx_p+d)$ jest dodatnie, to $\sin(cx_{p+1}+d) = \sin(cx_p+d+\pi)$ jest ujemne i naodwrót, a więc $y''(x_{p+1}) > 0$. A więc po maximum następuje zawsze minimum i odwrotnie. Dwa sąsiednie maxima mają zatem odcięte x_p i x_{p+2}, różniące się o $2\cdot\frac{\pi}{c}$. Maksymalne wychylenia sąsiednie są więc: $y(x_p)$ i $y(x_{p+2})$, i wynoszą:

$$y_1 = y(x_p) = be^{-ax_p}\sin(cx_p+d)$$
$$y_2 = y(x_{p+2}) = be^{-ax_{p+2}}\sin(cx_{p+2}+d) = be^{-ax_p-\frac{2\pi a}{c}}\sin(cx_p+2\pi+d)$$
$$= be^{-ax_p-aT}\sin(cx_p+d)$$

Wobec tego:

$$y_1 : y_2 = e^{aT}$$

a

$$D = \log_e\frac{y_1}{y_2} = aT \tag{151}$$

Widzimy stąd, że dla drgania zanikającego, określonego wzorem (r), nietylko okres drgania jest liczbą stałą, lecz także iloraz dwóch sąsiednich

maksymalnych wychyleń, a zatem i dekrement logarytmiczny jest liczbą stałą, a mianowicie równa się iloczynowi z okresu drgania: $T = \frac{2\pi}{c}$ i z liczby a, charakteryzującej szybkość zanikania drgań.

Wyznaczając doświadczalnie okres drgań T i dekrement logarytmiczny (przez zmierzenie maksymalnych odchyleń w dwóch bezpośrednio po sobie następujących drganiach), możemy zatem wyznaczyć stałą a, występującą w czynniku wykładniczym e^{-ax}, od której zależy stopień tłumienia tych drgań.

4) Dla funkcji, która jest ilorazem dwóch funkcyj:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

można znacznie uprościć badanie extremów w punktach, w których mianownik jest różny od zera.

I tak tworzymy najpierw pierwszą pochodną:

$$y' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Ponieważ mianownik tego wyrażenia jest zawsze liczbą dodatnią, gdy g jest różne od zera, przeto wystarczy zbadać pierwiastki równania:

(152) $$gf' - fg' = 0$$

Dla tych x, które spełniają to równanie, należy zbadać znak drugiej pochodnej:

$$y'' = \frac{g^2(f''g + g'f' - f'g' - fg'') - 2gg'(gf' - fg')}{g^4}$$

Dla pierwiastków równania (152) odpada druga część licznika.

Ponieważ zaś g^2 i g^4 są zawsze dodatnie przy naszem założeniu, przeto wystarczy zbadać znak wyrażenia, zawartego w pierwszym nawiasie, t. j. znak wyrażenia:

(153) $$w = f''g - fg''$$

Nie trzeba więc obliczać całej drugiej pochodnej, przez co unika się nieraz bardzo rozwlekłych rachunków.

Tak np. chcemy znaleźć punkty, w których funkcja:

$$y = \frac{2 - 3x + x^2}{2 + 3x + x^2}$$

posiada extrema. Tworzymy:

$$gf' - fg' = (2 + 3x + x^2)(-3 + 2x) - (2 - 3x + x^2)(3 + 2x) = 6x^2 - 12 = 0$$

Stąd:

$$x_1 = \sqrt{2}, \qquad x_2 = -\sqrt{2}$$

Obliczamy wyrażenie:

$$w = f''g - fg'' = 2(2 + 3x + x^2) - (2 - 3x + x^2)2 = 12x$$

Ponieważ:

$$w(\sqrt{2}) = 12\sqrt{2} > 0$$
$$w(-\sqrt{2}) = -12\sqrt{2} < 0$$

przeto w punkcie $x_1 = \sqrt{2}$ posiada badana funkcja minimum, a w punkcie $x_2 = -\sqrt{2}$ maximum.

Co się tyczy pominiętych w tej dyskusji pierwiastków mianownika, które mają wartości:

$$x_3 = -1, \quad x_4 = -2$$

to funkcja jest w tych punktach nieokreślona, a jej wartość dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$, a więc nie może być mowy o extremum.

Łatwo stwierdzić, że w punktach, w których $y' = 0$ i $y'' = 0$, znak trzeciej pochodnej jest taki sam, jak znak wyrażenia:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d(f''g - fg'')}{dx} = (f'''g - fg''') + (f''g' - f'g'')$$

5) Z prostokątnego arkusza tektury o bokach $a = 80$ cm, $b = 50$ cm chcemy zrobić otwarte pudełko w formie prostopadłościanu bez dna górnego, wycinając przy wierzchołkach danego prostokąta równe kwadraty (fig. 127).

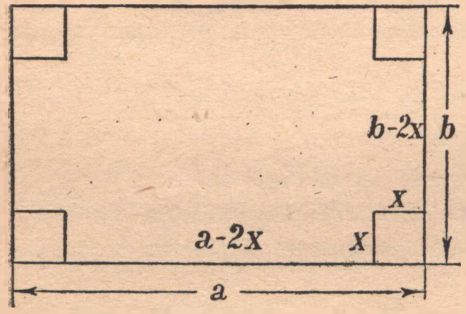


Fig. 127.

Jak należy obrać bok tego wycięcia, aby objętość pudełka była możliwie największa?

Objętość tego pudełka wyrażamy wzorem:

$$V = (a - 2x)(b - 2x)x$$

a więc dla szczegółowych, podanych powyżej wartości, jest

$$V = 4x^3 - 260x^2 + 4000x$$

Tworzymy:

$$V' = 12x^2 - 520x + 4000 = 0$$

Pierwiastkami tej pochodnej są:

$$x_1 = 10, \quad x_2 = 33\tfrac{1}{3}$$

Wartość x_2 jest w naszem zagadnieniu nieprzydatna, ponieważ bok wyciętego kwadratu musi być mniejszy od połowy boku $b = 50$, t. j. mniejszy od 25.

Biblioteka P.[illegible]
w Krakowie

Pozostaje zatem do zbadania tylko pierwsza wartość: $x_1 = 10$. Tworzymy:

$$V''(x) = 24x - 520$$
$$V''(10) = 24 \cdot 10 - 520 = -280 < 0$$

Ponieważ druga pochodna jest ujemna, przeto dla $x = 10$ mamy maximum.

Należy jeszcze zbadać, czy to maximum jest zarazem największą wartością w naszem zagadnieniu. Otóż w naszem zagadnieniu może x przyjmować tylko wartości z przedziału $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ czyli (0,25), o ile b jest mniejszym (a przynajmniej nie większym) bokiem prostokąta, albowiem tylko wtedy objętość ma wartość dodatnią. Wewnątrz tego przedziału: (0,25) istnieje tylko jedno maximum; dla $x = 10$. Objętość ma dla tego x wartość $V(10) = 4000 - 26000 + 40000 = 18000$. Na końcach przedziału jest $V(0) = 0$ i $V(25) = 0$, a więc te wartości są mniejsze od $V(10)$ zatem $x = 10$ daje istotnie największą wartość objętości.

6) Mamy podaną ilość materjału, z którego należy sporządzić zbiornik otwarty w formie walca kołowego bez dna górnego. Jak należy obrać wymiary tego walca, aby uzyskać maximum objętości?

Powierzchnia P tego walca ma wartość stałą (daną). Wyrażamy ją wzorem:

$$P = r^2\pi + 2r\pi w$$

Stąd:

$$w = \frac{P - r^2\pi}{2r\pi}$$

Funkcją, której maximum szukamy, jest:

$$V = r^2\pi w = r^2\pi \cdot \frac{P - r^2\pi}{2r\pi} = \frac{Pr - r^3\pi}{2}$$

Stąd:

$$V' = \frac{P - 3r^2\pi}{2}$$
$$V'' = -3r\pi$$

Miejscami zerowemi pierwszej pochodnej są:

$$r_1 = +\sqrt{\frac{P}{3\pi}} \quad \text{i} \quad r_2 = -\sqrt{\frac{P}{3\pi}}$$

Ujemna wartość r_2 nie ma znaczenia dla naszego zagadnienia, a dla r_1 jest:

$$V''(r_1) = -3\pi\sqrt{\frac{P}{3\pi}} < 0$$

a więc mamy do czynienia z *maximum*. Aby rozstrzygnąć, czy jest to zarazem największa wartość, bierzemy pod uwagę dla zmiennej niezależnej r tylko przedział niewłaściwy $(0, +\infty)$, albowiem ujemne r nie mają znaczenia w tem zagadnieniu.

Ponieważ w tym przedziale niema żadnych innych extremów, a funkcja wzrasta monotonicznie przed punktem r, a maleje poza nim, przeto wszystkie inne wartości funkcji z całego tego niewłaściwego przedziału są mniejsze od $V(r_1)$, a więc w punkcie $r = r_1$ mamy największą wartość objętości. (Dopiero dla ujemnych, odpowiednio dalekich punktów r, otrzymujemy większe wartości V). Łatwo stwierdzić, że dla tej wartości r_1 także wysokość ma tę samą wartość:

$$w = \frac{P - r_1^2\pi}{2r_1\pi} = \frac{P - \frac{P}{3\pi}\cdot\pi}{2\sqrt{\frac{P}{3\pi}}\cdot\pi} = \frac{\frac{2}{3}P}{2\pi\sqrt{\frac{P}{3\pi}}} = \sqrt{\frac{P}{3\pi}}$$

a więc:

$$w = r_1$$

Żądany walec ma zatem postać, przedstawioną na fig. 128. W laboratorjach używa się często naczyń takiej postaci.

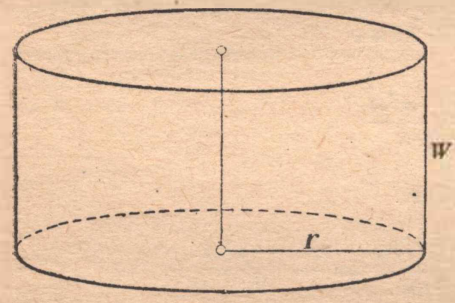


Fig. 128.

Niechaj czytelnik rozwiąże analogiczne zagadnienie dla walca zamkniętego! Otrzyma się walec równoboczny. W podobny sposób rozwiązuje się bardziej skomplikowane zagadnienia, np. dla zbiorników ropy w formie walca, nakrytego odcinkiem kuli, dla którego są podane jeszcze pewne dodatkowe warunki.

7) Pszczoły budują z wosku komórki w postaci graniastosłupa sześciobocznego o podstawie foremnej, w którym trzy naroża są ścięte a nakrywka składa się z trzech rombów (por. fig. 129a i b). Dany jest bok a podstawy i wysokość w. Jakie odcinki x należy odciąć na krawędziach bocznych, aby uzyskać minimum powierzchni takiej bryły?

Łatwo stwierdzić, że objętość tej bryły równa się objętości pierwotnego graniastosłupa. Chodzi tu o to, by użyć możliwie najmniej wosku na budowę takiej komórki.

Powierzchnia składa się z dna o polu $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, z sześciu trapezów o bokach równoległych w i $w - x$, a o wysokości a (zatem suma ich

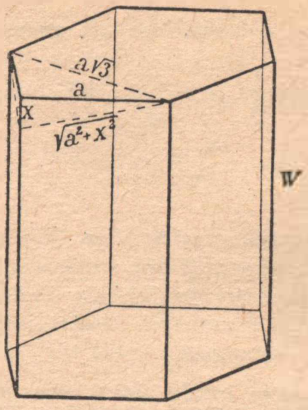


Fig. 129 a.

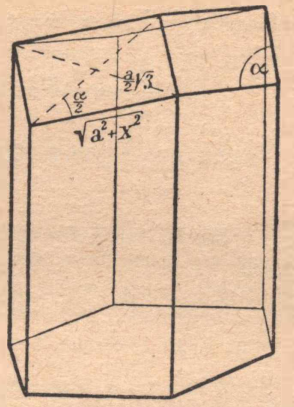


Fig. 129 b.

pól wynosi $6 \cdot \frac{w + w - x}{2} \cdot a = 6aw - 3ax$) i z trzech rombów o przekątnych:

$$d_1 = a\sqrt{3}, \qquad d_2 = 2\sqrt{a^2 + x^2 - \tfrac{3}{4}a^2} = 2\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + x^2}$$

Suma pól tych trzech rombów wynosi zatem:

$$3 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 3a\sqrt{3}\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + x^2}$$

Całkowita powierzchnia tej bryły ma więc wielkość:

$$P = \tfrac{3}{2}a^2\sqrt{3} + 6aw - 3ax + 3a\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}a^2}$$

Jedyną wielkością zmienną, o którą chodzi w tem zagadnieniu, jest x. Szukamy minimum tej funkcji. Tworzymy:

$$P' = -3a + 3a\sqrt{3}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}a^2}}$$

Łatwo oblicza się dodatni pierwiastek tej pochodnej, a mianowicie:

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{8}}$$

Ponieważ druga pochodna:

$$P'' = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}\left(x^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

jest stale dodatnia, przeto w badanym punkcie mamy *minimum*. Nietrudno stwierdzić, że jest to zarazem wartość najmniejsza.

Rozwarty kąt α, występujący w rombach, oblicza się ze związku:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} : \sqrt{a^2 + x_1^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3} : \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{8}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

W tablicach znajdujemy stąd:

$$\alpha = 109^\circ 28'$$

Uwaga. Ten kąt nadaje się dobrze do pomiaru na komórce. Wykonywano liczne pomiary i najpierw stwierdzono bardzo dobrą zgodność wyników pomiarów z tą wartością α, przy której powierzchnia osiąga najmniejszą wartość. Te dawniejsze pomiary dawały nawet dokładnie 109°28′; jednakże w nowszych czasach powtórzono pomiary na kilku tysiącach komórek i otrzymano przeciętną wartość 107°[1]).

8) Wiedząc o tem, że koszty transportu prądu elektrycznego o maksymalnem natężeniu I kablem o stałej długości, a o przekroju s, wyrażamy wzorem:

$$k = a\frac{I^2}{s} + bs + c$$

(por. str. 4 wzór k), obliczyć „przekrój gospodarczo najkorzystniejszy", t. j. taki przekrój, dla którego koszty są najmniejsze.

Otrzymujemy:

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{aI^2}{s^2} + b = 0$$

a stąd:

$$s_1 = I\sqrt{\frac{a}{b}}, \qquad s_2 = -I\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Druga wartość, ujemna, nie ma znaczenia w naszem zagadnieniu, a dla pierwszej otrzymujemy:

$$\frac{d^2k}{ds^2} = \frac{2aI^2}{s^3} > 0 \quad \text{dla} \quad s = s_1$$

A więc dla przekroju:

$$s_1 = I\sqrt{\frac{a}{b}}$$

otrzymaliśmy *minimum* kosztów.

Pozostawiamy czytelnikowi stwierdzenie, że jest to zarazem najmniejsza wartość w przedziale niewłaściwym $(0, +\infty)$ dla s. (Wykres tej funkcji otrzymuje się z łatwością, dodając do rzędnych hiperboli równobocznej $y = \frac{aI^2}{s}$ rzędne prostej $y = bs + c$). Otrzymany wynik wypo-

---

[1]) H. Vogt. *Geometrie und Ökonomie der Bienenzellen*, Breslau, 1911; cytowane według podręcznika p. t. J. Salpeter. *Einführung in die höhere Mathematik*. Jena, 1913, str. 114.

wiada się w elektrotechnice przy pomocy następującego twierdzenia: przekrój gospodarczo najkorzystniejszy jest proporcjonalny do prądu największego obciążenia. Obliczmy jeszcze te minimalne koszty:

$$k(s_1) = a\frac{I^2}{I\sqrt{\frac{a}{b}}} + bI\sqrt{\frac{a}{b}} + c = I\sqrt{ab} + I\sqrt{ab} + c$$

Stąd widać, że przy najmniejszych kosztach przesyłania prądu ta część kosztów, która jest proporcjonalna do przekroju (t. j. $b \cdot s$), musi być równa tej części kosztów, która jest odwrotnie proporcjonalna do przekroju $\left(\text{t. j. } \frac{aI^2}{s}\right)$ i wynosi $I\sqrt{ab}$.

9) Natężenie I prądu elektrycznego przy stałem napięciu e wyraża się wzorem:

$$I = \frac{e}{R}$$

gdzie R oznacza całkowity opór. Nazwijmy opór wewnętrzny literą r a zewnętrzny literą x, to:

$$I = \frac{e}{r + x}$$

Przy jakim oporze zewnętrznym osiągamy największą *wydajność* (dzielność) prądu w obwodzie zewnętrznym?

Wydajność tę wyrażamy wzorem:

$$L = x \cdot I^2$$

czyli:

$$L = \frac{e^2 x}{(r + x)^2}$$

Chodzi nam o maximum tej funkcji. Mamy tu do czynienia z ilorazem dwóch funkcyj, możemy zatem użyć uproszczeń, omówionych w przykładzie 4. I tak tworzymy najpierw równanie:

$$gf' - fg' = (r + x)^2 \cdot e^2 - e^2 x \cdot 2(r + x) = 0$$

Jednym pierwiastkiem tego równania jest $x = -r$, jednakże ujemna wartość nie ma znaczenia dla naszego zagadnienia, opór jest bowiem zawsze liczbą dodatnią. Zakładamy więc $x \neq -r$ i upraszczamy równanie przez $r + x$. Otrzymujemy zatem:

$$(r + x)e^2 - 2e^2 x = 0$$

a stąd

$$x_1 = r$$

jako jedyną liczbę, dla której może zachodzić extremum.

Zamiast drugiej pochodnej tworzymy teraz — w myśl rozważań przykładu 4 — wyrażenie:

$$w = f''g - fg'' = 0 \cdot (r + x)^2 - e^2 x \cdot 2 = -2e^2 x$$
$$w(r) = -2e^2 r < 0$$

zatem dla $x = r$ wydajność L osiąga maximum.

Nie trudno jest zbadać, że jest to zarazem największa wartość.

Doszliśmy zatem do wyniku, bardzo ważnego w elektrotechnice, że największą wydajność prądu osiąga się wtedy, gdy opór zewnętrzny jest równy oporowi wewnętrznemu.

10) Mamy dwa źródła ciepła (lub światła), leżące w odległości a, o różnem natężeniu; np. natężenie drugiego źródła jest n razy większe od pierwszego. Zbadać, który punkt prostej, łączącej te dwa źródła, otrzymuje najmniej ciepła (lub światła).

Jeżeli nazwiemy literą k ilość ciepła, którą otrzymuje punkt odległy o jednostkę od pierwszego źródła, to punkt, leżący w odległości x, otrzymuje $\frac{k}{x^2}$ jednostek ciepła od pierwszego źródła, a $\frac{nk}{(a-x)^2}$ od drugiego. Razem więc otrzymuje ten punkt ilość ciepła, wyrażoną wzorem

$$y = \frac{k}{x^2} + \frac{nk}{(a-x)^2}$$

Chodzi nam o znalezienie minimum tej funkcji. Obliczamy:

$$y' = -\frac{2k}{x^3} + \frac{2nk}{(a-x)^3}$$
$$y'' = \frac{6k}{x^4} + \frac{6nk}{(a-x)^4}$$

Pierwiastkiem rzeczywistym równania $-\frac{2k}{x^3} + \frac{2nk}{(a-x)^3} = 0$ jest $x_1 = -\frac{a}{1+\sqrt[3]{n}}$. Ponieważ w przedziale $0 < x < a$ jest stale $y'' > 0$, przeto dla wartości x_1 mamy *minimum* ciepła (lub światła). Łatwo stwierdzić, że jest to zarazem najmniejsza wartość.

11) Celem zmierzenia wysokości EA (por. fig. 130) mierzy się odcinek DE i kąt wzniesienia x wierzchołka A. Użyto do pomiaru kąta takiego przyrządu, w którym błąd pomiaru nie przekracza kąta $b = \frac{1}{2}'$. Jak daleko należy się ustawić z przyrządem mierniczym, aby błąd w pomiarze wysokości był jak najmniejszy?

Zamiast tego wystarczy zbadać, pod jakim kątem wzniesienia x należy mierzyć tę wysokość, aby ją najdokładniej zmierzyć. Jeżeli zamiast kąta x odczytamy kąt $x+b$, to zamiast prawdziwej wysokości EA otrzymamy EC, przyczem błąd wynosi $\delta = CA$. Chodzi nam o to, aby δ było minimum. Staramy się wyrazić to δ jako funkcję zmiennej x. W tym celu wykreślamy $AB \perp DC$ i obliczamy

$$\sphericalangle BAC = x + b,\ BA = AD \cdot \sin b = \frac{w}{\sin x} \cdot \sin b,\ \delta = BA : \cos \sphericalangle (BAC)$$

a więc:

$$\delta = \frac{w \sin b}{\sin x \cos (x+b)}$$

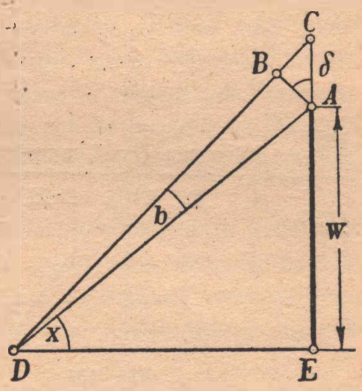


Fig. 130.

Zamiast obliczać *minimum* tej funkcji możemy obliczyć maximum odwrotności tej funkcji (por. uwagę na str. 428), t. j. *maximum* funkcji:

$$y = \frac{1}{\delta} = \frac{\sin x \cos (x+b)}{w \sin b}$$

przyczem rachunki będą prostsze, a mianowicie:

$$y' = \frac{\cos x \cos (x+b) - \sin x \sin (x+b)}{w \sin b} = \frac{\cos (2x+b)}{w \sin b}$$

Pierwiastkiem równania $y' = 0$ jest $2x + b = 90^0$, a więc

$$x_1 = 45^0 - \tfrac{1}{2} b = 45^0 - \tfrac{1}{4}$$

Inne pierwiastki: $x_2 = -x_1$ i ich perjodyczne powtórzenia co 360^0 nie wchodzą w grę przy tem zagadnieniu, w którem x musi być kątem dodatnim, mniejszym od 90^0, t. j. $0 < x < 90^0$. Założyliśmy, że $b > 0$. Dla wartości x_1 druga pochodna $y'' = \frac{-2 \sin (2x+b)}{w \sin b}$ ma wartość ujemną: $y''(x_1) = \frac{-2}{w \sin b}$ a zatem y osiąga dla x_1 maximum. Można okazać, że jest to największa wartość z całego badanego przedziału $(0, 90^0)$. Funkcja $\frac{1}{y} = \delta$ jest dodatnia w otoczeniu punktu x_1. Wobec tego δ osiąga minimum a zarazem najmniejszą wartość dla kąta $x_1 = 45^0 - \frac{1}{4}'$, bliskiego 45^0 a w praktyce, uwzględniając błąd przyrządu mierniczego, dla 45^0.

Wtedy DA jest prawie równe AE. Należy się zatem ustawić z przy-

rządem mierniczym w odległości równej w przybliżeniu szukanej wysokości. Podobne rozumowanie przeprowadza się dla ujemnych b.

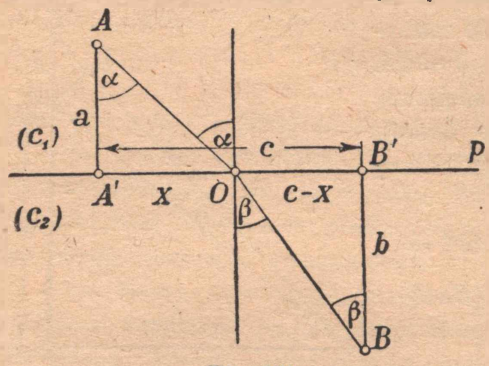


Fig. 131.

12) Prosta p oddziela dwa ośrodki, w których światło porusza się z różnemi prędkościami c_1 i c_2, w każdym z tych ośrodków po linji prostej. W jednym ośrodku znajduje się punkt A, w drugim zaś B (por. fig. 131). Którą drogą (łamaną) musi przebiegać promień światła z A do B, aby czas przebiegania tej drogi był najkrótszy?

Oznaczmy literą c odległość rzutów tych punktów na prostą p, a literami a i b ich odległości od prostej p. Punkt O, w którym promień przecina prostą p, jest odległy o x od rzutu punktu A. Czas potrzebny na przebycie drogi AO jest: $t_1 = \frac{AO}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}$, a dla drogi OB:

$$t_2 = \frac{OB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{c_2}$$

Szukamy minimum funkcji:

$$y = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{c_2}$$

Stąd:

$$y' = \frac{2x}{2c_1\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{2(c-x)\cdot(-1)}{2c_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$$

Z warunku $y' = 0$ otrzymujemy:

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} : \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = c_1 : c_2$$

czyli:

$$\sin\alpha : \sin\beta = c_1 : c_2$$

Kąt α nazywamy kątem padania a β kątem załamania.

Stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania jest zatem stały, a mianowicie równa się stosunkowi prędkości światła w obu ośrodkach, zwanemu spółczynnikiem załamania światła. Pozostaje jeszcze tylko do sprawdzenia, czy wtedy istotnie czas przebycia tej drogi jest najkrótszy, t. j. czy funkcja y przybiera wtedy minimum i czy to minimum jest zarazem najmniejszą wartością. Nietrudno obliczyć, że:

$$y'' = \frac{a^2}{c_1(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{c_2(b^2 + (c - x)^2)^{3/2}}$$

a więc druga pochodna ma zawsze wartość dodatnią. Wobec tego istotnie w tym przypadku mamy do czynienia z minimum. Pomijamy tu badanie, prowadzące do wyniku, że to jest zarazem najmniejsza wartość.

To prawo załamania (Snelliusa) odnosi się do wszystkich ruchów prostolinjowych, odbywających się z różnemi stałemi prędkościami w dwóch ośrodkach.

13) W jaki sposób należy z kloca walcowego o przekroju kołowym wyciąć belkę prostokątną, aby uzyskać: a) największą objętość, b) największą wytrzymałość na złamanie, c) możliwie największy moment bezwładności przekroju względem osi, łączącej środki dwóch przeciwległych boków tego prostokąta?

Nazwijmy boki przekroju prostokątnego literami x i y.

Objętość jest wtedy największa, gdy pole

$$P = x \cdot y$$

tego prostokąta jest największe.

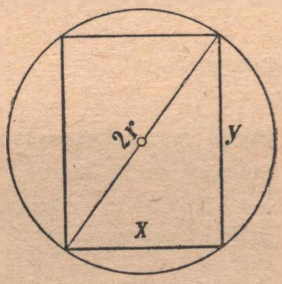


Fig. 132.

Wytrzymałość wyraża się wzorem:

$$W = \frac{xy^2}{6}$$

a moment bezwładności:

$$B = \frac{xy^3}{12}$$

Wyrażamy y przez zmienną x i stałą r (fig. 132) i otrzymujemy:

$$P = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$W = \frac{x(4r^2 - x^2)}{6}$$

$$B = \frac{x\sqrt{(4r^2 - x^2)^3}}{12}$$

a) Extremum pola znajdujemy, tworząc:

$$P' = \sqrt{4r^2 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

Kładziemy $P' = 0$ i otrzymujemy: $4r^2 - 2x^2 = 0$ a stąd:

$$x = r\sqrt{2}$$

Wartość ujemną odrzucamy, ponieważ w naszem zagadnieniu nie ma ona znaczenia. W tym punkcie może być extremum.

Aby rozstrzygnąć, czy naprawdę jest tam extremum i jakie, tworzymy:

$$P' = \frac{\sqrt{4r^2 - x^2} \cdot (-4x) - (4r^2 - 2x^2) \cdot \frac{-x}{\sqrt{4r^2 - x^2}}}{4r^2 - x^2} = \frac{-12r^2x + 2x^3}{(4r^2 - x^2)^{3/2}}$$

Dla $x = r\sqrt{2}$ przyjmuje ta druga pochodna wartość:

$$P''(r\sqrt{2}) = \frac{-12r^3\sqrt{2} + 2r^3 \cdot 2\sqrt{2}}{(2r^2)^{3/2}} = -4 < 0$$

a więc dla tej wartości pole ma *maximum*.

Osobnego badania wymaga punkt $x = 2r$, w którym pochodna P' nie istnieje. Widocznem jest jednak, że w tym przypadku pole redukuje się do zera, albowiem wtedy bok $y = 0$. Zatem i ten przypadek nie ma znaczenia dla naszego zagadnienia. Otrzymaliśmy zatem maximum pola dla $x = r\sqrt{2}$. Wtedy:

$$y = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = r\sqrt{2}$$

a więc:

$$y = x$$

Zatem prostokątem o największem polu jest w tym wypadku kwadrat, wpisany w to koło.

b) Celem wyznaczenia prostokąta o największej wytrzymałości na złamanie tworzymy:

$$W' = \frac{1}{6}(4r^3 - 3x^3)$$

Kładziemy $W' = 0$, to $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ (znowu zatrzymujemy tylko dodatni pierwiastek). Tworzymy:

$$W'' = \frac{1}{6} \cdot (-6x) = -x$$

a więc:

$$W''\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2r}{\sqrt{3}} < 0$$

a zatem dla $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ mamy maximum wytrzymałości.

Wtedy $y = 2r\sqrt{\frac{2}{3}} = x\sqrt{2}$, a zatem boki prostokąta nie są równe, lecz pozostają do siebie w stosunku: $y : x = \sqrt{2}$.

c) W podobny sposób może czytelnik stwierdzić, że maximum momentu bezwładności otrzymamy, gdy:

$$y : x = \sqrt{3}$$

Pozostawia się czytelnikom szczegółowe badanie, czy w tych wszystkich przypadkach mamy do czynienia z *największemi* wartościami funkcyj.

§ 151. O metodzie najmniejszych kwadratów i o rozmaitych średnich.

Wykonując kilkakrotnie pomiar jakiejś wielkości, otrzymuje się zwykle wskutek nieuniknionych błędów obserwacji kilka różnych naogół liczb

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$$

W teorji błędów uważa się za najodpowiedniejszą taką wartość x, przypisaną tej mierzonej wielkości, dla której suma kwadratów odchyleń (czyli błędów): $x - a_1, x - a_2, \ldots x - a_n$ ma wartość najmniejszą. Aby tę wartość x wyznaczyć, należy zatem obliczyć, dla której wartości x wyrażenie:

$$S(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$

ma wartość najmniejszą. W tym celu tworzymy pochodną:

$$S'(x) = 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \ldots + 2(x - a_n)$$

Rozwiązujemy równanie $S' = 0$ i otrzymujemy:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = s_a \tag{154}$$

czyli *średnią arytmetyczną* wszystkich wartości, otrzymanych z pomiarów. Aby rozstrzygnąć, z jakiego rodzaju extremum mamy tu do czynienia, tworzymy drugą pochodną:

$$S''(x) = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n$$

Ponieważ zawsze jest $2n > 0$, przeto $S'' > 0$, a więc mamy tu do czynienia z minimum. Jest to zarazem najmniejsza wartość, jak to wynika z tego, że obrazem funkcji $S(x)$ jest parabola o równaniu:

$$S(x) = nx^2 - 2x(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$$

a więc o dodatnim spółczynniku przy x^2. Jeszcze prościej wynika to z tego, że pierwsza pochodna:

$$S'(x) = 2nx - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

przedstawia linję prostą o dodatnim spółczynniku kierunkowym $2n$. Przed punktem zerowym $x = s_a$ ma ta pochodna wartości ujemne a poza nim dodatnie, a zatem pierwotna funkcja $S(x)$ maleje stale przed tym punktem a wzrasta stale poza nim, to zaś dowodzi, że w punkcie $x = s_a$ mamy najmniejszą wartość funkcji.

Wartość tej sumy dla $x = s_a$ służy za miarę dokładności pomiarów: im większą jest ta suma, tem bardziej rozprószone są liczby $a_1, a_2, \ldots a_n$. Średnia arytmetyczna kilku liczb ma więc tę własność, że suma kwa-

dratów odchyleń tych liczb od tej średniej jest mniejsza aniżeli suma kwadratów odchyleń tych liczb od dowolnej innej liczby. Stąd pochodzi tak częste używanie średniej arytmetycznej przy pomiarach.

Zasadę, polegającą na tem, aby sumę kwadratów błędów uczynić minimum, nazywamy *metodą najmniejszych kwadratów*. Metody tej używa się także w rozmaitych, bardziej skomplikowanych przypadkach; powrócimy do niej po omówieniu extremów funkcyj dwóch i więcej zmiennych (§ 158). Teorja błędów, używana powszechnie w miernictwie, jest oparta właśnie na metodzie najmniejszych kwadratów.

Uwagi o rozmaitych średnich.

Prócz średniej arytmetycznej używa się w rozmaitych badaniach, np. w statystyce, także rozmaitych innych średnich, jak średniej geometrycznej, harmonicznej i medjany.

Te rozmaite średnie można wyprowadzić drogą podobną do tej, która nas doprowadziła do średniej arytmetycznej.

a) I tak zażądajmy, aby suma kwadratów odchyleń *logarytmów* kilku liczb dodatnich od *logarytmu* liczby x była minimum, t. j. zbadajmy, dla której wartości x suma:

$$S_1 = (\log x - \log a_1)^2 + (\log x - \log a_2)^2 + \ldots + (\log x - \log a_n)^2$$

przybiera wartość najmniejszą. W tym celu tworzymy:

$$S_1' = 2(\log x - \log a_1) \cdot \frac{1}{x} + 2(\log x - \log a_2) \cdot \frac{1}{x} + \ldots + 2(\log x - \log a_n) \cdot \frac{1}{x}$$

Kładąc $S_1' = 0$, otrzymujemy:

$$n \log x = \log a_1 + \log a_2 + \ldots + \log a_n$$

a stąd:

$$x = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = s_g \tag{155}$$

Otrzymaliśmy zatem średnią *geometryczną* liczb $a_1, a_2, \ldots a_n$. Czytelnik stwierdzi z łatwością, że dla tej wartości x jest $S_1'' > 0$, a więc, że mamy tu do czynienia z minimum.

b) Zażądajmy, aby suma kwadratów odchyleń *odwrotności* kilku liczb od odwrotności liczby x była minimum, t. j. zbadajmy, dla jakiej wartości x suma:

$$S_2 = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a_n}\right)^2$$

przybiera wartość najmniejszą. Tworzymy pochodną:

$$S_2' = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} + \ldots + 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a_n}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}$$

Kładąc $S_2' = 0$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

czyli:

(156) $$x = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = s_h$$

Liczbę, określoną tym wzorem, nazywamy średnią *harmoniczną* n liczb $a_1, a_2, \ldots a_n$. Nietrudno stwierdzić, że dla tej wartości x jest $S_2'' > 0$, a więc, że mamy tu do czynienia z minimum.

Te trzy średnie: s_a, s_g i s_h nie są bynajmniej w ogólnym przypadku równe, lecz zachodzą pomiędzy niemi następujące nierówności:

$$s_a \geqq s_g \geqq s_h$$

(Dowód znajdzie czytelnik np. w zbiorze zadań W. Nikliborca i H. Steinhausa p. t. *Ćwiczenia z rachunku różniczkowego*, str. 3—4, 98—99).

Możnaby tworzyć średnie, oparte na rozmaitych innych zasadach. Można np. żądać, aby suma czwartych potęg odchyleń była minimum. Wtedy jednak rachunki byłyby bardzo skomplikowane: już samo obliczenie tej średniej wymagałoby rozwiązania równania trzeciego stopnia, jak to czytelnik łatwo może stwierdzić. Natomiast dość rozpowszechnioną jest zwłaszcza w statystyce średnia, wynikająca z żądania, aby suma bezwzględnych wartości błędów była minimum, t. j. aby suma:

$$S_3 = |x - a_1| + |x - a_2| + \ldots + |x - a_n|$$

przybierała wartość możliwie najmniejszą. Tutaj już nie możemy się posługiwać rachunkiem różniczkowym, albowiem funkcje $|x - a|$ są — jak wiadomo — nieróżniczkowalne w punktach $x = a$ (por. str. 231, § 67, przykład 2), a jak się okaże, właśnie zachowanie się funkcji w tych punktach odgrywa tu zasadniczą rolę. Natomiast nietrudno jest zbadać zapomocą bezpośredniego rozumowania, dla jakich wartości x suma S_3 przybiera wartość najmniejszą. I tak uporządkujmy dane liczby według ich wielkości tak, że:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$$

Otrzymamy tu wyniki zasadniczo odmienne, zależnie od tego, czy n jest liczbą parzystą, czy też nieparzystą.

Jeżeli n jest liczbą nieparzystą, np. $n = 2p + 1$, to najmniejszą wartość sumy S_3 otrzymujemy, obierając za x środkową wartość z tego szeregu, a mianowicie $x = a_{p+1}$. Nie będziemy tu przeprowadzali szcze-

gółowego dowodu, poprzestając na wykazaniu tego twierdzenia dla $n = 5$. Twierdzimy, że wtedy dla $x = a_3$ suma:

$$S_3 = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4| + |x - a_5|$$

ma wartość najmniejszą. Otóż wtedy $|x - a_3| = 0$, a pozostała suma równa się długości sumy odcinków (por. fig. 133)

$$AC + BC + CD + CE = AE + BD$$

bez uwzględnienia znaków tych odcinków. Gdybyśmy zaś obrali x gdziekolwiek poza punktem $x = a_3$, np. w punkcie X', to trzebaby powiększyć sumę $AE + BD$ jeszcze o odcinek $X'C$. A więc istotnie dla $x = a$ ma S_3 najmniejszą wartość.

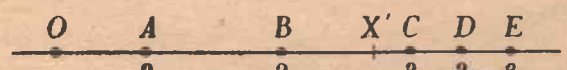


Fig. 133.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, np. $n = 2p$, to każda liczba, należąca do środkowego przedziału zamkniętego: $\langle a_p, a_{p+1} \rangle$, daje minimum sumy S_3. Np. dla $n = 4$ (por. fig. 134) każda liczba z przedziału $\langle a_2, a_3 \rangle$, t. j. z odcinka BC, sprawia, że suma:

$$S_4 = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4|$$

ma wartość równą długości sumy odcinków $AD + BC$. Np. dla punktu X otrzymujemy:

$$S_4 = AX + BX + CX + DX = AD + BC$$

(przyczem nie uwzględnia się znaków odcinków). Gdybyśmy zaś obrali x gdziekolwiek poza odcinkiem BC, np. w punkcie X', to trzebaby do tej sumy dodać jeszcze odcinek $X'C$.

Tę liczbę x, ściśle oznaczoną dla n nieparzystego, a wziętą dowolnie z środkowego odcinka dla n parzystego, nazywamy w statystyce *medjaną* szeregu liczb $a_1, a_2, \ldots a_n$. Ten rodzaj średniej ma w matematyce podrzędne znaczenie, charakteryzuje ona bowiem tylko uporządkowanie danego zbioru liczb a nie uwydatnia przeciętnej wielkości tych wszystkich liczb.

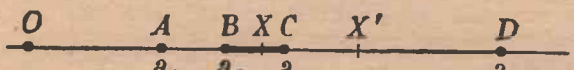


Fig. 134.

§ 152. Extrema funkcyj, podanych w formie uwikłanej.

Jeżeli funkcja jest podana w formie uwikłanej, to zwykle możemy wykryć jej extrema przez badanie pochodnych, nie uciekając się do przedstawiania tej funkcji w formie wyraźnej.

I tak, mając podaną funkcję y zmiennej x w formie:

(a) $$f(x, y) = 0$$

tworzymy pochodną:

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

i badamy miejsca zerowe tej pochodnej. W tym celu kładziemy:

(b) $$f_x(x, y) = 0$$

i rozwiązujemy *układ równań* (a) i (b). Otrzymawszy pierwiastki (x_1, y_1), $(x_2, y_2)\ldots$, sprawdzamy przedewszystkiem, czy w tych punktach nie jest przypadkiem także mianownik: $f_y(x, y)$ równy zeru.

Takie wyjątkowe pary wartości (x, y), zwane punktami osobliwemi (por. § 116), wymagają specjalnego badania, którem się na tem miejscu nie będziemy zajmowali. Jeżeli mianownik nie jest zerem dla danej pary wartości, np. dla (x_1, y_1), to tworzymy drugą pochodną (por. str. 357, wzór 93):

$$y''(x) = -\frac{f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_{yy}y'^2}{f_y}$$

i badamy jej znak dla wartości (x_1, y_1). Otóż dla tej pary liczb jest $y' = 0$, a więc y'' redukuje się do:

$$y''(x_1) = -\frac{f_{xx}(x_1, y_1)}{f_y(x_1, y_1)}$$

Chodzi nam o znak tej pochodnej. Widzimy, że do tego nie trzeba tworzyć całej pochodnej y'', lecz wystarczy obliczyć f_{xx} i f_y i zbadać ich znaki.

Jeżeli f_{xx} i f_y mają dla (x_1, y_1) znaki jednakowe, to $y'' < 0$, a więc funkcja y przybiera dla $x = x_1$ maximum: $y = y_1$; jeżeli mają znaki przeciwne, to $y'' > 0$, a więc y przybiera dla $x = x_1$ minimum: $y = y_1$; jeżeli zaś $y'' = 0$, to trzeba badać wyższe pochodne. A więc extrema względem osi x-ów w punktach nieosobliwych bada się w następujący sposób.

Rozwiązujemy układ równań: $f = 0$ *i* $f_x = 0$ *i każdą parę pierwiastków wstawiamy w* f_y *i w* f_{xx}; *o ile* $f_y \neq 0$, *to, gdy* f_{xx} *i* f_y *mają znaki jednakowe, mamy maximum, gdy zaś znaki są przeciwne, to mamy minimum. Przypadek zaś* $f_{xx} = 0$ *czyli* $y'' = 0$ *wymaga dalszego badania.*

Jeżeli w równaniu (a) uważamy y za zmienną niezależną a x za jej funkcję, to możemy badać extrema tej funkcji $x(y)$ czyli extrema względem osi y-ów.

Ponieważ pochodna tej funkcji $x(y)$ wyraża się wzorem:

$$x'_y = -\frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)}$$

przeto należy teraz położyć:

$$f_y(x, y) = 0 \tag{c}$$

i rozwiązać *układ równań* (a) i (c). Otrzymamy jakieś pary pierwiastków: $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$, ...

Sprawdzamy, czy w tych punktach nie jest zerem mianownik, t. j. $f_x(x, y)$, a wrazie, gdyby tak było, wyłączamy te punkty osobliwe z naszych rozważań. Dla pozostałych punktów, np. dla $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, badamy znak drugiej pochodnej. Łatwo okazać, że:

$$x''(y) = -\frac{f_{yy} + 2f_{xy}x' + f_{xx}x'^2}{f_x}$$

a więc wobec $x'(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 0$ mamy:

$$x''(\bar{y}_1) = -\frac{f_{yy}(\bar{x}_1, \bar{y}_1)}{f_x(\bar{x}_1, \bar{y}_1)}$$

A więc extrema względem osi y-ów w punktach nieosobliwych bada się w następujący sposób. *Rozwiązujemy układ równań*: $f = 0$ *i* $f_y = 0$ *i każdą parę pierwiastków wstawiamy w* f_x *i w* f_{yy}; *jeżeli dla* $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ *funkcje* f_{yy} *i* f_x *mają znaki jednakowe, to* $x'' < 0$, *a więc funkcja* $x(y)$ *przybiera dla* $y = \bar{y}_1$ *maximum równe* $x = \bar{x}_1$; *jeżeli* f_{yy} *i* f_x *mają znaki przeciwne, to* $x'' > 0$, *a więc funkcja* $x(y)$ *przybiera dla* $y = \bar{y}_1$ *minimum:* $x = \bar{x}_1$; *jeżeli zaś* $f_{yy} = 0$, *to i* $x'' = 0$ *i wtedy należy zbadać dalsze pochodne.*

Przykład. Zbadać, które punkty linji, przedstawionej w formie uwikłanej równaniem:

$$8x^2 + 12xy + 7y^2 - 10 = 0$$

mają największe, a które najmniejsze odcięte i rzędne.

Chodzi tu o extrema względem osi y-ów i x-ów.

Tworzymy:

$$f_x = 16x + 12y$$

$$f_y = 12x + 14y$$

Jedyną parą liczb, spełniających dwa równania $f_x = 0$ i $f_y = 0$, jest $x = 0$, $y = 0$. Ten punkt nie należy jednak do danej linji krzywej, nie spełnia bowiem jej równania. A zatem badana linja nie ma żadnych punktów osobliwych.

Zbadajmy najpierw extrema względem osi x-ów

Z równania danej linji i z równania:

$$f_x = 16x + 12y = 0$$

znajdujemy: $y = -\frac{4}{3}x$ a następnie:

$$8x^2 - \frac{48}{3}x^2 + 7 \cdot \frac{16}{9}x^2 - 10 = 0$$

$$\frac{4}{9}x^2 = 1$$

$$x_1 = +\frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$y_1 = -2, \quad y_2 = +2$$

Dla tych par wartości jest:

$$f_y(x_1, y_1) = 12 \cdot \tfrac{8}{7} - 28 = -10$$
$$f_y(x_2, y_2) = -12 \cdot \tfrac{8}{7} + 28 = +10$$

Dla wyznaczenia znaku y'' potrzebna jest jeszcze druga pochodna:

$$f_{xx} = 16$$

Ponieważ f_{xx} i $f_y(x_1, y_1)$ mają znaki przeciwne, przeto $y''(x_1) > 0$, a więc w punkcie $x_1 = \frac{3}{2}$ przybiera funkcja minimum, równe $y_1 = -2$. Ponieważ f_{xx} i $f_y(x_2, y_2)$ mają znaki równe, przeto dla $x_2 = -\frac{3}{2}$ mamy maximum, wynoszące $y_2 = +2$.

Extrema względem osi y-ów znajdziemy, kładąc:

$$f_y = 12x + 14y = 0$$
$$y = -\tfrac{6}{7}x$$

Podstawiamy to w dane równanie, rozwiązujemy je i otrzymujemy:

$$\bar{x}_1 = +\sqrt{\tfrac{7}{2}}, \quad \bar{y}_1 = -\sqrt{\tfrac{18}{7}}$$
$$\bar{x}_2 = -\sqrt{\tfrac{7}{2}}, \quad \bar{y}_2 = +\sqrt{\tfrac{18}{7}}$$

Tworzymy:

$$f_x(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 16 \cdot \sqrt{\tfrac{7}{2}} - 12\sqrt{\tfrac{18}{7}} = \tfrac{40}{\sqrt{14}} > 0$$
$$f_x(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = -\tfrac{40}{\sqrt{14}} < 0$$

Ponieważ $f_{yy} = 14$ i $f_x(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ mają znaki jednakowe, przeto w punkcie $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ mamy maximum odciętej; ponieważ zaś f_{yy} i $f_x(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ mają znaki przeciwne, przeto w punkcie $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ mamy minimum (odciętej). Na fig. 135 jest przedstawiona badana linja. Jest to elipsa o osiach nierównoległych do osi spółrzędnych. Punkt A ma najmniejszą rzędną a punkt B największą; punkt C ma największą odciętą a punkt D najmniejszą. Styczne w tych punktach są oczywiście równoległe do osi.

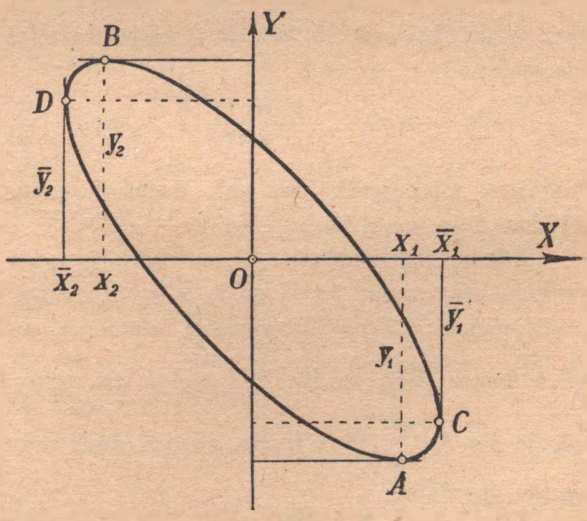


Fig. 135.

Niechaj czytelnik zbada dla ćwiczenia extrema linij, przedstawionych równaniami:

a) $(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$ (lemniskata)

b) $x^3+y^3-3axy=0$ (liść Descartesa; por. § 19, przykład a, fig. 47)

§ 153. Badanie extremów funkcyj, podanych w formie parametrowej.

Chąc znaleźć extrema funkcji $y=f(x)$, podanej w formie parametrowej:

(p) $$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

obliczamy w znany sposób pierwszą pochodną:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi' t)}{\varphi'(t)}$$

Wyłączamy na razie z rozważania punkty, w których mianownik staje się zerem i badamy pierwiastki równania:

$$\psi'(t)=0$$

Dla tych pierwiastków należy zbadać znak drugiej pochodnej:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\varphi'(t)^3}$$

(por. wzór. (61) z § 95, str. 301). Dla wartości t, dla których $\psi'(t)=0$. pozostaje:

$$\frac{\varphi'(t)\cdot\psi''(t)}{\varphi'(t)^3} \quad \text{czyli} \quad \frac{\psi''(t)}{\varphi'(t)^2}$$

Ponieważ mianownik jest stale dodatni, przeto o znaku drugiej pochodnej decyduje znak funkcji: $\psi''(t)$.

I tak: jeżeli $\psi''(t)<0$, to funkcja $y=f(x)$ posiada w badanym punkcie maximum; jeżeli $\psi''(t)>0$, to mamy do czynienia z minimum, a przypadek $\psi''(t)=0$ wymaga zbadania wyższych pochodnych. Tak np. z wzoru (63), na str. 302 widać, że wtedy trzecia pochodna $\frac{d^3y}{dx^3}$ redukuje się do $\frac{\psi'''(t)}{\varphi'(t)^3}$ i trzeba zbadać znak tego wyrażenia i podobnie postępuje się dalej.

W ten sposób bada się extrema danej funkcji względem osi x-ów. Aby zbadać zachowanie się funkcji w punktach, w których mianownik: $\varphi'(t)=0$, najdogodniej jest zająć się funkcją odwrotną względem funkcji $y=f(x)$, nazwijmy ją $x=F(y)$.

Wzory (p) możemy uważać także za parametrowe przedstawienie tej funkcji odwrotnej. Chcąc znaleźć jej extrema, czyli extrema względem osi y-ów, tworzymy:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

i obliczamy pierwiastki równania $\varphi'(t) = 0$, zakładając, że teraz $\psi'(t)$ nie jest równe zeru. Następnie — podobnie jak w poprzednim przypadku — badamy znak wyrażenia $\varphi''(t)$ dla tych wartości t, które spełniają równanie $\varphi'(t) = 0$. Jeżeli się okaże, że $\varphi''(t) < 0$, to funkcja $x = F(y)$ posiada maximum (względem osi y); dla $\varphi''(t) > 0$ mamy minimum, a przypadek $\varphi''(t) = 0$ wymaga badania dalszych pochodnych.

Pozostają jeszcze do zbadania te wyjątkowe punkty, w których jest równocześnie $\varphi'(t) = 0$ i $\psi'(t) = 0$. Te punkty nazywamy osobliwemi punktami funkcji (lub linji, przedstawiającej tę funkcję); wymagają one osobnego badania; pochodna jest w tych punktach nieokreślona.

Przykład. Zbadać extrema względem obu osi funkcji, przedstawionej wzorami:

$$x = 4(2 \sin t - \sin 2t) = \varphi(t)$$
$$y = 4(2 \cos t - \cos 2t) = \psi(t)$$

Celem zbadania extremów względem osi x, tworzymy:

$$\psi'(t) = -4(2 \sin t - 2 \sin 2t) = 0$$

Stąd:

$$\sin t = \sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

Równanie to spełnia się dla dwóch szeregów kątów, a mianowicie:

1^0 dla $\sin t = 0$, czyli dla $t = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots \pm n\pi, \ldots$

2^0 „ $\cos t = \frac{1}{2}$ „ „ $t = \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi, \ldots \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \ldots$

Spośród tych wartości osobnego badania wymagają wartości.

$$0, \pm 2\pi, \ldots \pm 2n\pi, \ldots,$$

ponieważ dla tych wartości także $\varphi'(t) = 0$, albowiem

$$\varphi'(t) = 4(2 \cos t - 2 \cos 2t)$$

Wyłączywszy narazie te wartości, zbadajmy dla pozostałych wartości pierwszego szeregu znak drugiej pochodnej:

$$\psi''(t) = -4(2 \cos t - 4 \cos 2t)$$

Otrzymujemy

$$\psi''(\pi) = -4(2 \cdot (-1) - 4 \cdot 1) = +24 > 0$$

a więc dla $t = \pi$ mamy *minimum*. Podobnie dla $t = -\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$; jednakże te dalsze wartości nie dają żadnych nowych punktów badanej

linji. Wszystkie bowiem punkty tej linji otrzymamy, gdy t przebiega od 0 do 2π; przy dalszem zaś wzrastaniu (lub maleniu) t zarówno x jak i y przebiegają te same wartości, a więc punkt (x, y) przebiega po raz drugi, trzeci i t. d. tę samą linję. Dla $t = \pi$ otrzymujemy $x = 4(2 \cdot 0 - 0) = 0$, $y = 4(2 \cdot (-1) - 1) = -12$, a więc w punkcie $A(0, -12)$ ma funkcja minimum (por. fig. 136). Ten sam punkt dostajemy dla $t = -\pi, +3\pi, -3\pi, \ldots$

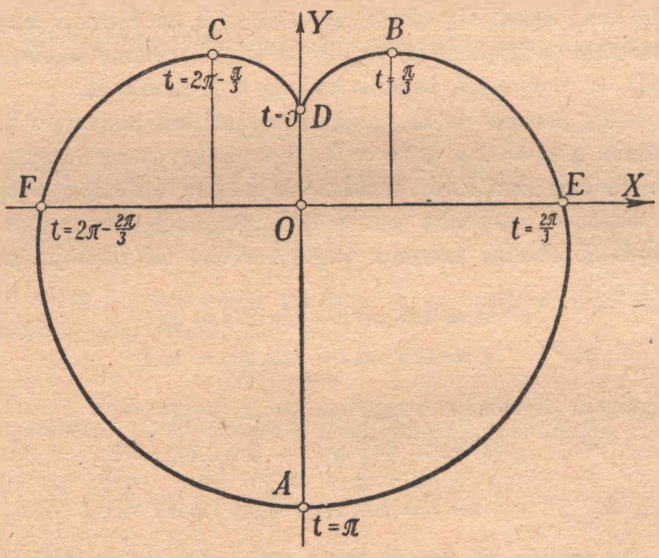


Fig. 136.

Zbadajmy teraz drugi szereg wartości t. I tak:

$$\psi''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -4\left(2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} - 4\cos\frac{2\pi}{3}\right) = -4\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -12 < 0$$

Dla $t = \frac{\pi}{3}$ mamy więc *maximum*.

Ponieważ $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$ a $\cos 2 \cdot \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$, przeto tę samą wartość -12 przyjmuje $\psi''(t)$ dla $t = 2\pi - \frac{\pi}{3}$. Mamy więc dwa *maxima*: dla $t = \frac{\pi}{3}$ i $t = 2\pi - \frac{\pi}{3}$. Dalszych wartości drugiego szeregu nie trzeba już badać, ponieważ dla nich powtarzają się już perjodycznie wartości funkcyj x i y.

Te maxima leżą w punktach o spółrzędnych:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4\left(2\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3} \\ y &= 4(2\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = 6 \end{aligned}\right\} \quad B(2\sqrt{3}, 6)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 4\left(2\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sin 2\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ &= 4\left(2\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \\ y &= 6 \end{aligned}\right\} \quad C(-2\sqrt{3}, 6)$$

Badając w podobny sposób extrema względem osi y-ów, otrzymujemy:

$$\varphi'(t) = 4(2\cos t - 2\cos 2t) = 0$$

a stąd:

$$\cos t = 1 \quad \text{lub} \quad \cos t = -\tfrac{1}{2}$$

Z warunku $\cos t = 1$ otrzymujemy wartości:

$$t = 0,\ \pm 2\pi \ldots$$

w których także równocześnie $\psi'(t) = 0$, a które zbadamy zaraz osobno. Z warunku zaś $\cos t = -\frac{1}{2}$ otrzymujemy $t = \frac{2}{3}\pi$, $t = 2\pi - \frac{2}{3}\pi$ i kąty powiększone o $2n\pi$, które jednak nie wchodzą tu w grę wskutek perjodyczności funkcyj $\varphi(t)$ i $\psi(t)$. Badając w tych punktach $\varphi''(t)$, przekonamy się z łatwością, że dla $t = \frac{2}{3}\pi$ mamy maximum względem osi y-ów a dla $t = 2\pi - \frac{2}{3}\pi$ minimum. Spółrzędne x i y tych punktów są, jak łatwo wyrachować, $E(6\sqrt{3}, 0)$ i $F(-6\sqrt{3}, 0)$.

Pozostaje jeszcze do zbadania osobliwy punkt, w którym $t = 0$ (a zarazem $t = \pm 2\pi,\ \pm 4\pi, \ldots$). Spółrzędnemi tego punktu są:

$$\left.\begin{aligned} x &= 4\cdot(2\cdot 0 - 0) = 0 \\ y &= 4\cdot(2\cdot 1 - 1) = 4 \end{aligned}\right\} \quad D(0, 4)$$

Gdy t wzrośnie o dodatnią liczbę ε, to x wzrośnie od zera do wartości:

$$x = 4(2\sin\varepsilon - \sin 2\varepsilon) = 8\sin\varepsilon(1 - \cos\varepsilon) > 0$$

a y wzrośnie od wartości 4 do wartości:

$$y = 4(2\cos\varepsilon - \cos 2\varepsilon) = 4(2\cos\varepsilon - 2\cos^2\varepsilon + 1) = 4 + 8\cos\varepsilon(1 - \cos\varepsilon) > 4.$$

Gdy t zmaleje o ε, to x zmaleje od zera do:

$$x = 8\sin(-\varepsilon)(1 - \cos(-\varepsilon)) = -8\sin\varepsilon(1 - \cos\varepsilon) < 0$$

a y wzrośnie od 4 do wartości:

$$y = 4 + 8\cos(-\varepsilon)(1 - \cos(-\varepsilon)) = 4 + 8\cos\varepsilon(1 - \cos\varepsilon) > 4$$

To zaś świadczy, że w punkcie $D(0, 4)$ mamy *minimum*.

Obrazem badanej funkcji (a raczej układu dwóch funkcyj) jest linja, przedstawiona na fig. 136, zwana *kardioidą*.

Jest to specjalny przypadek epicykloidy: powstaje ona przez toczenie się koła po kole o równym promieniu. Każdy punkt na obwodzie toczącego się koła zakreśla taką kardioidę (por. § 19, przykład e, na str. 79—80). W naszym przykładzie promienie tych kół są równe 4.

Ustęp II.

EXTREMA FUNKCYJ DWÓCH I WIĘCEJ ZMIENNYCH.

§ 154. Definicja extremów funkcji dwóch zmiennych i konieczne warunki istnienia extremów.

Będziemy się tu zajmowali podobnie jak w poprzednich ustępach extremami względem odpowiednio bliskiego otoczenia punktu. Funkcja dwóch zmiennych $y = f(x, y)$ ma w punkcie $x = a$, $y = b$ maximum, to znaczy, że istnieje takie otoczenie punktu (a, b), w którem wszystkie wartości funkcji są mniejsze od $f(a, b)$. Arytmetycznie można tę definicję sformułować w następujący sposób.

Jeżeli istnieje taka dodatnia liczba δ, że dla wszystkich przyrostów h, k zmiennych niezależnych, które spełniają warunki $|h| < \delta$, $|k| < \delta$, przyrost funkcji spełnia nierówność:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) < 0 \tag{157}$$

to funkcja posiada w punkcie (a, b) *maximum*, jeżeli zaś:

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) > 0$$

to funkcja posiada w punkcie *minimum*.

Jeżeli natomiast w każdem otoczeniu punktu (a, b) istnieją takie punkty, dla których przyrost funkcji jest dodatni i takie punkty, dla których ten przyrost jest ujemny, to w punkcie (a, b) niema extremum.

Gęometrycznym obrazem funkcji dwóch zmiennych jest jakaś powierzchnia, a maxima i minima są to jej punkty najwyższe i najniższe w porównaniu do odpowiednio dobranego otoczenia.

Nie będziemy się tu zajmowali takiemi, wyjątkowemi w praktycznych zastosowaniach, punktami, w których funkcja nie posiada pochodnych; takie punkty wymagają bezpośredniego badania, opartego wprost na definicji extremów.

Będziemy zatem w całym tym ustępie zakładali, że badana funkcja jest ciągła, a ponadto, że posiada pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu, ciągłe w tym obszarze, w którym ją badamy. Przy tem zało-

żeniu bardzo łatwo jest podać *konieczne* warunki istnienia extremum w jakimś punkcie. I tak, jeżeli wartość $f(a, b)$ ma być największą spośród wszystkich wogóle wartości tej funkcji z otoczenia punktu (a, b), to musi być ona oczywiście także największą spośród wszystkich wartości, które otrzymamy przez zmianę jednej tylko zmiennej x, przy zachowaniu stałej wartości $y = b$ drugiej zmiennej. A więc pochodna tej funkcji względem zmiennej x musi być zerem, t. j. dla punktu (a, b) musi się spełniać warunek:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$$

Geometrycznie znaczy to, że linja, otrzymana przez przekrój badanej powierzchni płaszczyzną, przechodzącą przez punkt $(a, b, f(a, b))$ a równoległą do płaszczyzny pionowej ZX, musi posiadać w tym punkcie styczną równoległą do płaszczyzny poziomej. Podobnie ma się rzecz dla minimum. Jeżeli zaś ustalimy $x = a$, a zmieniamy tylko y, to musi być:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

A zatem także dla przekroju płaszczyzną równoległą do płaszczyzny bocznej YZ styczna jest równoległa do płaszczyzny poziomej.

Otrzymaliśmy zatem następujące *konieczne* warunki istnienia extremum dla funkcyj różniczkowalnych.

Extrema różniczkowalnej funkcji dwóch zmiennych mogą istnieć tylko w tych punktach, w których obydwie czastkowe pochodne: $f_x(x, y)$ i $f_y(x, y)$ są równe zeru.

Z definicji pochodnej w dowolnym kierunku (por. § 109) wynika, że wtedy także pochodna w dowolnym kierunku jest równa zeru.

Pierwszym więc krokiem przy badaniu extremów funkcji dwóch zmiennych jest rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \tag{158}$$

Jeżeli punkty (a_1, b_1), (a_2, b_2),... spełniają te obydwa równania, to w nich mogą, lecz nie muszą, istnieć extrema.

Płaszczyzna styczna do powierzchni (por. § 104, str. 326) w tych punktach jest równoległa do płaszczyzny poziomej lub nakrywa się z nią, ogólnie: jest prostopadła do osi z.

Przykład. Dla funkcji:

$$z = 2x^2 - xy - 3x + y^2 - 8y + 3$$

extremum może istnieć tylko dla tych wartości x i y, które spełniają następujący układ równań o dwóch niewiadomych:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - y - 3 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y - 8 = 0$$

Jedyną parą liczb, spełniających te obydwa równania, jest: $x = 2, y = 5$. Chcąc rozstrzygnąć, czy funkcja posiada w tym punkcie extremum i jakiego rodzaju jest to extremum, należy zbadać znak przyrostu:

$$\Delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

t. j. w naszym przypadku znak różnicy:

$$\Delta f = f(2 + h, 5 + k) - f(2, 5)$$

Badanie to można przeprowadzić bezpośrednio, a mianowicie:

$$\Delta f = 2(2 + h)^2 - (2 + h)(5 + k) - 3(2 + h) + (5 + k)^2 - 8(5 + k) + \\ + 3 - [2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 5^2 - 8 \cdot 5 + 3]$$

czyli:

$$\Delta f = 2h^2 - hk + k^2$$

Dla zbadania zachowania się tego trójmianu najprościej jest sprowadzić go do formy kanonicznej, uzupełniając dwa początkowe wyrazy do zupełnego kwadratu. Otrzymamy w ten sposób:

$$\Delta f = \frac{(4h - k)^2 + 7k^2}{8}$$

Z tej formy widać, że przyrost Δf ma stale wartość *dodatnią*, dla wszystkich wogóle przyrostów h i k zmiennych niezależnych, wyłączając oczywiście badany pukt (2, 5), dla którego $h = 0$ i równocześnie $k = 0$, a więc przyrost ma wartość zero.

A więc jest stale:

$$\Delta f > 0$$

a to dowodzi, że funkcja posiada w badanym punkcie *minimum* (w tym przypadku jest to nietylko minimum, lecz wogóle najmniejsza wartość funkcji, ponieważ nie trzeba było wcale ograniczać przyrostów h i k zmiennych niezależnych).

§ 155. Dostateczne warunki istnienia extremów funkcyj dwóch zmiennych.

Taki bezpośredni sposób badania znaku przyrostu funkcji jest często bardzo uciążliwy i skomplikowany. Okażemy jednakże, że można znaleźć pewne dogodne warunki *dostateczne* na istnienie lub nieistnienie extremów. Oprzemy się na rozwinięciu badanej funkcji na wzór Taylora w otoczeniu tego punktu (a, b), w którym pierwsze cząstkowe pochodne są

równe zeru. Zajmijmy się tu tylko tym przypadkiem, w którym nie wszystkie drugie cząstkowe pochodne są równe zeru dla $x = a$, $y = b$. (Gdyby zaś wszystkie były zerami, to przeprowadzilibyśmy badanie bezpośrednio, tak jak w powyższym przykładzie).

Zatrzymajmy się w rozwinięciu Taylora na drugiej różniczce (por. wzór (149) z § 143). Otrzymamy:

$$\Delta f = df(a, b) + \tfrac{1}{2!}[d^2 f]_{\substack{x=a+\vartheta h \\ y=b+\vartheta k}}$$

Ponieważ w punkcie (a, b) jest $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, przeto:

$$df(a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} h + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} k = 0$$

Pozostaje więc następujący wzór na przyrost funkcji:

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}[d^2 f]_{\substack{x=a+\vartheta h \\ y=b+\vartheta k}}$$

Należy zatem zbadać znak drugiej różniczki w *otoczeniu* punktu (a, b). Druga różniczka przedstawia się, jak wiadomo (por. § 115, wzór (87)), wzorem:

$$\text{(I)} \qquad [d^2 f]_{\substack{x=a+\vartheta h \\ y=b+\vartheta k}} = f_{xx}(a + \vartheta h, b + \vartheta k)h^2 + 2f_{xy}(a + \vartheta h, b + \vartheta k)hk + f_{yy}(a + \vartheta h, b + \vartheta k)k^2$$

Celem zbadania znaku tego wyrażenia postępujemy drogą, wskazaną przez poprzedni przykład, a mianowicie sprowadzamy to wyrażenie do formy *kanonicznej*. Aby to uzyskać, załóżmy najpierw, że wartość $f_{xx}(a, b)$ jest różna od zera, ma więc jakiś znak: $+$ lub $-$. Później zbadamy także przypadek $f_{xx}(a, b) = 0$. Wskutek ciągłości funkcji $f_{xx}(x, y)$ można znaleźć takie otoczenie punktu (a, b), że także wartości $f_{xx}(a + \vartheta h, b + \vartheta k)$ będą różne od zera i będą miały ten sam znak, co $f_{xx}(a, b)$. To znaczy, można znaleźć takie δ, że dla $|h| < \delta$ i $|k| < \delta$ będzie $f_{xx}(a + \vartheta h, b + \vartheta k)$ różne od zera. Wobec tego można prawą stronę wzoru (I) *podzielić* i pomnożyć przez spółczynnik przy h^2 i otrzymamy w ten sposób (opuszczając narazie wartości zmiennych $a + \vartheta h$, $b + \vartheta k$):

$$d^2 f = \frac{f_{xx}^2 h^2 + 2f_{xx} f_{xy} hk + f_{xx} f_{yy} k^2}{f_{xx}}$$

czyli:

$$d^2 f = \frac{(f_{xx} h + f_{xy} k)^2 + (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)k^2}{f_{xx}}$$

Ponieważ badamy tylko *otoczenie* punktu (a, b), a nie sam punkt (a, b), przeto h i k nie mogą być równocześnie zerami.

Znak prawej strony zależy tylko od znaków wyrażeń f_{xx} i $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ w otoczeniu punktu (a, b), albowiem pozostałe wyrażenia:

$$(f_{xx}h + f_{xy}k)^2 \quad \text{i} \quad k^2$$

są stale nieujemne.

Widzieliśmy już, że dla odpowiednio małych h i k znak f_{xx} w otoczeniu punktu (a, b) jest taki sam, jak znak $f_{xx}(a, b)$ w samym punkcie (a, b). Podobnie ma się rzecz ze znakami pochodnych f_{xy} i f_{yy}, a zatem także ze znakiem wyrażenia $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ w otoczeniu (a, b), o ile tylko to wyrażenie nie jest zerem w punkcie (a, b).

Okażemy, że w tych przypadkach, w których D nie jest równe zeru w *punkcie* (a, b), można w bardzo prosty sposób rozstrzygnąć kwestję znaku badanego przyrostu.

a) I tak, jeżeli $D(a, b) > 0$, to i $D(a + \vartheta h, b + \vartheta k) > 0$ dla odpowiednio małych h i k wskutek ciągłości tej funkcji, a więc licznik we wzorze na $d^2 f$ jest dodatni. Jeżeli prócz tego także $f_{xx}(a, b) > 0$, to i mianownik $f_{xx}(a + \vartheta h, b + \vartheta k) > 0$, a więc $d^2 f$ ma tylko wartości dodatnie w otoczeniu punktu (a, b). To zaś dowodzi, że badana funkcja ma w punkcie (a, b) *minimum*.

b) Jeżeli $D(a, b) > 0$ a $f_{xx}(a, b) < 0$, to $d^2 f < 0$ w otoczeniu punktu (a, b), a to znaczy, że funkcja ma w tym punkcie *maximum*.

W obydwu omówionych dotychczas przypadkach, t. j. gdy $D(a, b) > 0$, nie może być zerem $f_{xx}(a, b)$, albowiem wtedy wyrażenie D redukowałoby się do liczby niedodatniej: $D = -f_{xy}^2$.

c) Jeżeli $D(a, b) < 0$, to trzeba już rozróżniać przypadki $f_{xx}(a, b) \neq 0$ i $f_{xx}(a, b) = 0$. Załóżmy najpierw $f_{xx}(a, b) \neq 0$. Wtedy w każdem (chociażby najbliższem) otoczeniu punktu (a, b) istnieją takie punkty, dla których przyrost Δf jest dodatni i takie, dla których $\Delta f < 0$. Tak np. dla $k = 0$ a $h \neq 0$, licznik jest dodatni w otoczeniu (a, b), a dla $k \neq 0$ i $h = -k \frac{f_{xy}}{f_{xx}}$ licznik jest ujemny, mianownik zaś zachowuje stały znak, ponieważ $f_{xx}(a, b) \neq 0$ a $f_{xx}(a + \vartheta h, b + \vartheta k)$ dla odpowiednio małych h, k zachowuje ten sam znak, co $f_{xx}(a, b)$. A więc, gdy $D(a, b) < 0$, a $f_{xx}(a, b) \neq 0$, to w punkcie (a, b) *niema extremum*.

Okażemy, że niema extremum także, gdy $f_{xx}(a, b) = 0$ a wyrażenie $D(a, b) < 0$

I tak, gdyby było $f(a, b) = 0$ lecz $f_{yy}(a, b) \neq 0$, to użylibyśmy do dowodu formy kanonicznej:

$$d^2 f = \frac{(f_{yy}k + f_{xy}h)^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)h^2}{f_{yy}}$$

i doszlibyśmy oczywiście do tego samego wyniku, co poprzednio.

Wreszcie, jeżeli równocześnie jest $f_{xx}(a, b) = 0$ i $f_{yy}(a, b) = 0$, a $D(a, b) < 0$, to musi być $f_{xy}(a, b) \neq 0$. W tym przypadku o znaku drugiej różniczki decyduje znak wyrazu środkowego:

$$2f_{xy}(a + \vartheta h, b + \vartheta k)hk$$

w otoczeniu punktu (a, b) lub wprost w samym punkcie (a, b), t. j. znak wyrażenia:

$$2f_{xy}(a, b)hk$$

Widocznem zaś jest, że to wyrażenie może przyjmować zarówno dodatnie jak i ujemne wartości dla dowolnie małych h i k (np. gdy ustalimy k a za h podstawimy raz wartość dodatnią a drugi raz ujemną, to to wyrażenie zmieni znak).

Wogóle więc, gdy $D(a, b) < 0$, to w punkcie (a, b) *niema extremum*, bez względu na to, czy któraś z pochodnych $f_{xx}(a, b)$, $f_{yy}(a, b)$ jest zerem, czy też nie.

W otoczeniu takich punktów, w których $f_x = 0$, $f_y = 0$ i $D < 0$, powierzchnia ma kształt *siodła*. Takim jest np. punkt O na fig. 25 (str. 45): występuje tam jeden przekrój AOB, mający minimum względem osi x-ów, w związku z warunkiem $f_x = 0$, a drugi COD, mający maximum względem osi y-ów, w związku z warunkiem $f_y = 0$.

d) Pozostaje nierozstrzygnięty przypadek, gdy $D(a, b) = 0$.

Nie będziemy tu przeprowadzali dość trudnej w tym przypadku dyskusji, a wykażemy tylko zapomocą odpowiednio dobranych przykładów, że wtedy w badanym punkcie może istnieć lub nie istnieć extremum. Z tego powodu nazywamy ten przypadek: przypadkiem *wątpliwym*. O ile zechcemy w takim przypadku zbadać extrema, to badamy wprost przyrost Δf bez pomocy wzoru Taylora.

Wyrażenie:

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \tag{159}$$

które odgrywa decydującą rolę w całej tej dyskusji, nazywamy *wyróżnikiem formy kwadratowej*:

$$f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2$$

Wyniki, do których doszliśmy w tej dyskusji, ujmujemy w następujące twierdzenie.

Jeżeli w punkcie, dla którego $f_x = 0$ i $f_y = 0$, wyróżnik $D > 0$, to funkcja posiada w tym punkcie extremum i to maximum, jeżeli w tym punkcie $f_{xx} < 0$, a minimum, jeżeli $f_{xx} > 0$; jeżeli wyróżnik $D < 0$, to funkcja nie posiada w tym punkcie extremum; jeżeli $D = 0$, to mamy do czynienia z przypadkiem wątpliwym, który wymaga osobnej dyskusji.

§ 156. Przykłady na badanie extremów funkcji dwóch zmienych.

Przykłady. 1) Zobaczymy najpierw, jak prosto przedstawia się dyskusja w przykładzie:

$$z = 2x^2 - xy - 3x + y^2 - 8y + 3$$

który roztrząsaliśmy powyżej zapomocą bezpośredniego badania przyrostu. Z warunków:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 = 4x - y - 3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 = -x + 2y - 8$$

otrzymaliśmy:

$$x = 2, \quad y = 5$$

Dla tych wartości badamy znak wyróżnika:

$$D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 \cdot 2 - (-1)^2 = 7$$

Ponieważ $D > 0$, a $f_{xx} = 4 > 0$, przeto w punkcie $x = 2$, $y = 5$ funkcja posiada *minimum*.

2) Zbadać extrema funkcji:

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

Potrzebne nam będą do dyskusji pochodne:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$$

Spółrzędne punktów, w których mogą być extrema, obliczamy z układu równań:

$$f_x = 4x^3 - 4x + 4y = 0$$

$$f_y = 4y^3 + 4x - 4y = 0$$

Stąd otrzymujemy: $x^3 = -y^3$, $x = -y$, a więc pierwsze równanie daje po podstawieniu:

$$4x^3 - 4x - 4x = 0$$

$$x^3 - 2x = 0$$

Pierwiastkami tego równania są:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = +\sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}$$

a więc:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -\sqrt{2}, \quad y_3 = +\sqrt{2}$$

Dla tych 3 par liczb mogą być extrema. Aby rozstrzygnąć, czy są istotnie, tworzymy wyróżnik:

$$D = (12x^2 - 4)(12y^2 - 4) - 16$$

a) Podstawmy tu najpierw $x = x_2$, $y = y_2$, to:

$$D = (12 \cdot 2 - 4)(12 \cdot 2 - 4) - 16 = 400 - 16 = 384$$

a więc $D > 0$. Dla punktu (x_2, y_2) jest więc z pewnością extremum. O rodzaju tego extremum decyduje znak $f_{xx}(x_2, y_2)$, t. j. znak wyrażenia:

$$12x_2^2 - 4 = 12 \cdot 2 - 4 = 20$$

Ponieważ $f_{xx}(x_2, y_2) > 0$, przeto w tym punkcie jest *minimum*.

b) Dla (x_3, y_3) otrzymamy te same wartości D i f_{xx}, a więc i w tym punkcie jest *minimum*.

c) Dla (x_1, y_1) otrzymamy:

$$D = (-4)(-4) - 16 = 0$$

Jest to więc przypadek wątpliwy. Zbadajmy bezpośrednio przyrost Δf danej funkcji, t. j.:

$$\Delta f = h^4 + k^4 - 2h^2 + 4hk - 2k^2 = h^4 + k^4 - 2(h - k)^2$$

Należy zbadać, czy to wyrażenie jest stale dodatnie, czy ujemne, czy też może przybierać zarówno wartości dodatnie jak i ujemne. Widzimy, że np. dla $h = k$ jest $\Delta f = h^4 + k^4 > 0$, natomiast dla $k = 0$ a $0 < h < \sqrt{2}$ jest $\Delta f = h^4 - 2h^2 = h^2(h^2 - 2) < 0$. A więc Δf może być w otoczeniu punktu (x_1, y_1) dodatnie i ujemne, zależnie od doboru h i k, a to dowodzi, że w tym punkcie niema ani maximum ani minimum.

3)

$$z = x^4 + y^4$$

$$z_x = 4x^3 \quad | \quad z_{xx} = 12x^2 \quad | \quad z_{xy} = 0$$
$$z_y = 4y^3 \quad | \quad z_{yy} = 12y^2 \quad |$$

Jedynym punktem, dla którego pochodne z_x i z_y są zerami, jest: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$. W tym punkcie:

$$D = 12 \cdot 0^2 \cdot 12 \cdot 0^2 - 0^2 = 0$$

a więc jest to przypadek wątpliwy.

Badamy bezpośrednio przyrost:

$$\Delta z = z(0 + h,\ 0 + k) - z(0, 0) = h^4 + k^4$$

Ponieważ stale $\Delta z > 0$, przeto w punkcie $(0, 0)$ funkcja posiada *minimum*.

Z przykładów 2) i 3) widzimy, że w przypadku wątpliwym, t. j. gdy $D = 0$, może nie istnieć extremum a może także istnieć extremum.

W następnym przykładzie zobaczymy, że dla $D=0$ może istnieć także t. zw. extremum *niewłaściwe*; jest to taki punkt, dla którego $\Delta f \geqq 0$ (minimum niewłaściwe) lub $\Delta f \leqq 0$ (maximum niewłaściwe).

Dzieje się to wtedy, gdy w najbliższem otoczeniu punktu (a, b) wartości funkcji mogą być także *równe* wartości funkcji w punkcie (a, b). Geometrycznym przykładem takiego niewłaściwego extremum jest walec kołowy, którego tworząca leży na płaszczyźnie poziomej. Każdy punkt tej tworzącej przedstawia minimum niewłaściwe, gdy cały walec leży nad płaszczyzną poziomą, a maximum niewłaściwe, gdy cały walec leży pod tą płaszczyzną.

Podobny przykład można zbudować, obracając koło osi Z jakąkolwiek linję, która posiada extremum w punkcie, nie leżącym na osi Z. Koło, zakreślone przez ten punkt, w którym ta linja ma extremum, składa się z samych punktów, w których istnieje extremum niewłaściwe.

Jak się wykrywa arytmetycznie takie extrema niewłaściwe, zobaczymy z następującego przykładu.

4) Zbadać extrema funkcji:

$$z=(x+y)^2$$

Tutaj:

$$z_x=2(x+y) \quad | \quad z_{xx}=2 \quad | \quad z_{xy}=2$$
$$z_y=2(x+y) \quad | \quad z_{yy}=2 \quad |$$

Kładąc $z_x=0$ i $z_y=0$, otrzymamy: $y=-x$. Każdy więc punkt prostej $y=-x$ na płaszczyźnie poziomej może być extremum. Celem rozstrzygnięcia tworzymy:

$$D=2\cdot 2-2^2=0$$

a więc mamy tu do czynienia z przypadkiem wątpliwym. Weźmy pod uwagę którykolwiek z punktów, w którym może być extremum, np. punkt $x_1=1$, $y_1=-1$.

Dla tego punktu otrzymujemy:

$$\Delta f=f(1+h,-1+k)-f(1,-1)=(1+h-1+k)^2+(1-1)^2=(h+k)^2$$

Otóż ten przyrost jest dodatni lub równa się zeru (np. dla $h=-k$), zatem:

$$\Delta f \geqq 0$$

To dowodzi, że w tym punkcie jest *minimum niewłaściwe*.

Istotnie dla wszystkich punktów prostej $y=-x$ badana funkcja ma wartość: 0, a dla wszystkich innych punktów ma wartości większe.

5) Znaleźć na płaszczyźnie trójkąta taki punkt, aby suma kwadratów jego odległości od wierzchołków tego trójkąta była minimum.

Oznaczmy spółrzędne wierzchołków tego trójkąta, odniesionych do dowolnych osi, leżących na jego płaszczyźnie: $A(a_1, b_1)$, $B(a_2, b_2)$, $C(a_3, b_3)$,

a ich odległości od dowolnego punktu $P(x, y)$ na tej płaszczyźnie niechaj będą d_1, d_2, d_3. Żądamy, aby suma:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$$

była minimum. Trzeba więc znaleźć minimum funkcji:

$$f(x, y) = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + \\ + (x - a_3)^2 + (y - b_3)^2$$

Koniecznym warunkiem istnienia minimum jest spełnienie się równań:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + 2(x - a_3) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - b_1) + 2(y - b_2) + 2(y - b_3) = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \quad y = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$$

a więc *środek ciężkości* tego trójkąta.

Aby rozstrzygnąć, czy to jest minimum, tworzymy:

$$f_{xx} = 2 + 2 + 2 = 6, \quad f_{yy} = 6, \; f_{xy} = 0$$

Stąd:

$$D = 6 \cdot 6 - 0^2 = 36 > 0$$

a więc istotnie środek ciężkości trójkąta ma tę własność, że suma kwadratów jego odległości od wierzchołków trójkąta jest *minimum*.

Nietrudno jest zbadać, że jest to zarazem wartość najmniejsza.

§ 157. Extrema funkcyj trzech i więcej zmiennych.

Extrema funkcyj trzech i więcej zmiennych bada się w podobny sposób, jak dla funkcyj dwóch zmiennych. I tak dla funkcji:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

maximum właściwe istnieje dla:

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$$

wtedy i tylko wtedy, gdy przyrost:

$$\Delta f = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0$$

dla odpowiednio małych przyrostów:

$$h_1, h_2, \ldots, h_n$$

a *minimum* właściwe, gdy:

$$\Delta f > 0$$

Konieczne warunki istnienia extremum dla funkcji różniczkowalnej mają postać:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{160}$$

Z tego układu n równań oblicza się układy wartości: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ i t. d., w których mogą lecz nie muszą istnieć extrema.

Używając rozwinięcia Taylora, sprowadzamy dalsze badanie do badania znaku drugiej różniczki, albowiem dla tych liczb, dla których pierwsze cząstkowe pochodne są zerami, rozwinięcie Taylora redukuje się do:

$$\Delta f = \frac{1}{2!}[d^2 f]_{\substack{x_1 = a_1 + \vartheta h_1 \\ x_2 = a_2 + \vartheta h_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_n + \vartheta h_n}}$$

Zamiast badać tę różniczkę w otoczeniu wartości $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, wystarczy w ogólności zbadać jej znak dla samych wartości $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, a więc zbadać znak wyrażenia:

$$d^2 f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_{x_1 x_1} h_1^2 + 2 f_{x_1 x_2} h_1 h_2 + f_{x_2 x_2} h_2^2 + f_{x_3 x_3} h_3^2 + 2 f_{x_1 x_3} h_1 h_3 + \ldots$$

dla odpowiednio małych przyrostów $h_1, h_2 \ldots h_n$.

Do tego celu możnaby wyprowadzić rozmaite kryterja, oparte na badaniu znaków wyróżników, są one jednak tak skomplikowane, że nie będziemy się tutaj niemi zajmowali. W konkretnych przykładach będziemy się starali zbadać znak tej różniczki bezpośrednio.

§ 158. Zastosowanie extremów funkcyj dwóch i więcej zmiennych w teorji wyrównania błędów i w statystyce.

Dla kilku wartości zmiennej niezależnej x:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

pomierzono odpowiednie wartości zmiennej zależnej y i znaleziono:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

Przedstawmy graficznie te pary liczb, należących do siebie, punktami płaszczyzny.

Wskutek nieuniknionych błędów spostrzeżeń są te punkty zwykle dość nieregularnie rozsiane po płaszczyźnie (zob. np. fig. 137). Załóżmy, że wiemy lub mamy jakieś powody do przypuszczenia, że prawdziwe

wartości x, y są ze sobą związane linjowo, to znaczy zapomocą wzoru:

$$y = ax + b$$

lub w geometrycznej interpretacji, że te punkty powinny leżeć na jakiejś jednej linji prostej. Chodzi nam o *wyrównanie* tego szeregu punktów zapomocą jednej linji prostej w tym sensie, aby suma kwadratów odchyleń tych punktów od tej nieznanej narazie prostej była możliwie najmniejsza. Odchylenia bierzmy w kierunku równoległym do osi Y. Oznaczając te odchylenia literami:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n,$$

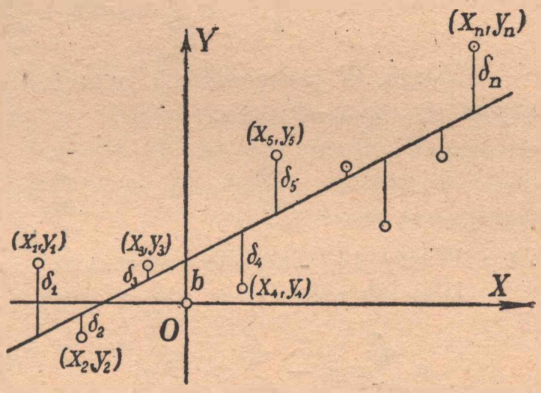


Fig. 137.

otrzymujemy na sumę kwadratów tych odchyleń wzór:

$$f(a, b) = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_n^2 =$$
$$= (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \ldots + (y_n - ax_n - b)^2$$

albowiem odchylenie np. δ_1 jest różnicą między znalezioną z pomiaru wartością y_1 a rzędną prostej $y = ax + b$ w punkcie x_1, która ma wartość $ax_1 + b$. Należy wyznaczyć liczby a i b, charakteryzujące położenie tej nieznanej prostej. Zmiennemi niezależnemi są więc w tem zagadnieniu parametry a i b. Zachodzi pytanie, jak je należy obrać, aby wyrażenie $f(a, b)$ było minimum.

W tym celu trzeba rozwiązać układ dwóch równań:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2(y_1 - ax_1 - b) \cdot (-x_1) + 2(y_2 - ax_2 - b) \cdot (-x_2) + \ldots +$$
$$+ 2(y_n - ax_n - b) \cdot (-x_n) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2(y_1 - ax_1 - b) \cdot (-1) + 2(y_2 - ax_2 - b_2) \cdot (-1) + \ldots +$$
$$+ 2(y_n - ax_n - b) \cdot (-1) = 0$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n - a(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n - a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - nb = 0$$

Używając na sumę skróconego znaku Σ, możemy te równania napisać w postaci:

$$(161)\qquad \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Uwaga. W podręcznikach, poświęconych teorji wyrównania błędów, używa się często skróceń:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = [x, x], \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = [x, y],$$

i t. p. Wzory (161) nazywamy równaniami *normalnemi* dla tego zagadnienia.

Jako ich rozwiązania otrzymujemy liczby:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Używając wyznaczników, możemy te wzory napisać w postaci:

$$(162)\qquad a = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i \\ \Sigma y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & n \end{vmatrix}} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i & \Sigma y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & n \end{vmatrix}}$$

Aby zbadać, czy dla tych wartości zachodzi istotnie minimum, obliczamy wyróżnik. Ponieważ:

$$f_{aa} = 2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2), \quad f_{bb} = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n$$
$$f_{ab} = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

przeto wyróżnik ma wartość:

$$D = 4n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - 4(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

czyli:

$$D = 4[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + \ldots + (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2]$$

a więc ma zawsze wartość dodatnią. To zaś dowodzi, że dla znalezionych wartości a, b mamy do czynienia z minimum.

Dzieląc obie strony drugiego równania normalnego przez n, otrzymujemy:

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} = a\,\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} + b$$

Liczby:

$$\eta = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}, \quad \xi = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

są spółrzędnemi środka ciężkości badanego układu punktów. Drugie równanie normalne przyjmuje zatem postać:

$$\eta = a\xi + b$$

a to dowodzi, że znaleziona prosta, wyrównywująca badany układ punktów, przechodzi przez środek ciężkości $S(\xi, \eta)$ tego układu. Wskazanem jest dla uproszczenia rachunków przyjąć ten środek ciężkości za nowy początek układu spółrzędnych. W tym celu trzeba wykonać przesunięcie o (ξ, η) i wprowadzić nowe spółrzędne X, Y zapomocą równań:

$$x = \xi + X$$
$$y = \eta + Y$$

Trzeba więc z danych liczb x_i i y_i obliczyć ich średnie arytmetyczne (ξ, η) i wprowadzić w rachunek odrazu zamiast x_i i y_i liczby:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= x_i - \xi \\ Y_i &= y_i - \eta \end{aligned}\right\} \text{ dla } \quad i = 1, 2, \ldots n$$

Przeprowadzając cały rachunek w tych nowych spółrzędnych, otrzymujemy na a i b takie same wzory, jak poprzednio, tylko wszędzie zamiast małych liter x_i, y_i występują X_i, Y_i. Teraz jednak można te wzory znacznie uprościć. I tak:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n\xi =$$
$$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0$$

a taksamo:

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i = 0$$

Podstawiamy te wartości we wzory na a, b (po zastąpieniu w nich wszystkich x_i i y_i przez X_i, Y_i) i otrzymujemy:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - 0 \cdot 0}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 0^2} \quad \text{a} \quad b = 0$$

czyli:

(163)
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$$

Szukana prosta $Y = aX$ przechodzi zatem teraz przez początek układu, który obraliśmy w środku ciężkości badanego układu punktów i ma spadek wyrażony wzorem (163). Tę linję prostą, służącą do wyrównania szeregu punktów według powyższej zasady, nazywamy *prostą regresji* zmiennej y względem zmiennej x a jej spadek: a nazywamy *spółczynnikiem regresji* zmiennej y względem zmiennej x. Pojęcia te są bardzo ważne w statystyce matematycznej.

Badany szereg punktów można wyrównać także przy pomocy innej linji prostej, żądając, aby suma odchyleń danych punktów od tej nowej prostej była minimum, przyczem jednak odchylenia będziemy teraz mierzyli nie w kierunku równoległym do osi y-ów, lecz w kierunku równoległym do osi x-ów, jak na fig. 138. Dogodnie jest przyjąć równanie tej nowej prostej w postaci:

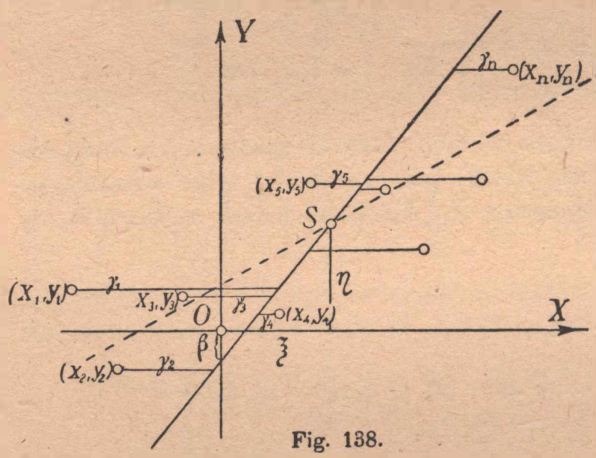


Fig. 138.

$$x = \alpha y + \beta$$

Parametry α i β wyznacza się drogą podobną, jak w poprzednim przypadku i otrzymuje się wzory podobne, z tą tylko różnicą, że należy wszędzie pomieniać x z y. Otrzymamy w ten sposób drugą *prostą regresji* o równaniu:

$$X = \alpha Y$$

przyczem jej spadek α (w odniesieniu do osi Y) wyraża się wzorem:

(164)
$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}$$

Biblioteka Pol... w Krakowie

Tę liczbę nazywamy *spółczynnikiem regresji* zmiennej x względem zmiennej y. Na fig 138 są przedstawione obydwie proste regresji, które się w ogólności nie nakrywają.

Średnią geometryczną z obu spółczynników regresji, opatrzoną znakiem takim samym, jak a i α (które mają, jak widać z wzorów (163) i (164), te same znaki), nazywamy *spółczynnikiem korelacji*. Ten spółczynnik ma więc wartość:

(165)
$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{i=1}^{n} Y_i^2}}$$

lub krótko $r = \sqrt{a\alpha} \cdot \operatorname{sign} a$, przyczem $\operatorname{sing} a = +1$, gdy a jest dodatnie, a $\operatorname{sing} a = -1$, gdy a jest ujemne lub równe zeru.

Wartości tego spółczynnika są zawsze zawarte w przedziale $<-1, +1>$, t. j.

$$-1 \leqq r \leqq +1$$

Wynika to z następującego ogólnego wzoru, zwanego identycznością Lagrange'a:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 =$$
$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + \ldots + (a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1})^2 \geqq 0$$

Największą bezwzględną wartość, t. j. 1, przyjmuje r tylko wtedy, gdy $\alpha = \frac{1}{a}$, to znaczy wtedy, gdy obydwie proste regresje mają równania: $Y = aX$, $X = \alpha Y = \frac{1}{a} Y$ czyli $Y = aX$, a więc gdy się te dwie proste regresji *nakrywają*. Wtedy mówimy, że między zmiennemi x i y zachodzi najściślejsza korelacja. Najmniejszą wartość bezwzględną, t. j. wartość 0, przyjmuje r tylko wtedy, gdy $\alpha = 0$, t. j. gdy $\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i = 0$ a wtedy i $a = 0$. Proste regresji są wtedy do siebie prostopadłe a mianowicie jedna jest równoległa do osi x-ów, a druga do osi y-ów. Mówimy, że w tym wypadku zmienne x i y są bez korelacji. Wartości r używa się w statystyce bardzo często do mierzenia *stopnia korelacji*.

Czytelnika, interesującego się statystyką matematyczną, odsyłamy do obszernej literatury specjalnej, z której wymieniamy tu następujące bardzo rozpowszechnione podręczniki: C. V. L. Charlier. *Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik.* (Lund-Hamburg 1920 r.);

G. Udny Yule: *Wstęp do statystyki* (przełożył z ang. Z. Limanowski, Warszawa 1921 r.); G. Darmois: *Statistique mathématique* (Paris 1928).

Przy wyrównywaniu szeregu spostrzeżeń zapomocą linji prostej możnaby się także oprzeć na rozmaitych innych zasadach, np. możnaby żądać, aby suma kwadratów odległości mierzonych *prostopadle* do szukanej prostej była minimum; wtedy otrzymalibyśmy prostą odmienną od obydwu prostych regresji. Taka prosta wyrównawcza nie znalazła jednak zastosowania ani w teorji wyrównania błędów ani w statystyce, toteż nie będziemy się tutaj zajmowali jej wyznaczaniem.

W podobny sposób rozwiązuje się następujące zagadnienie z teorji błędów. Zmierzono szereg trójek wartości $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots (x_n, y_n, z_n)$. Zmienne x, y, z powinny spełniać następujące równanie o dwóch parametrach a i b:

$$ax + by + z = 0$$

Jeżeli jednak wstawiamy za x, y, z znalezione wartości, to otrzymamy zamiast 0 pewne liczby $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$, zwane błędami.

Jak należy obrać a, b, aby suma kwadratów błędów była minimum?

Pozostawiamy czytelnikowi szczegółowe wykonanie rachunków, podajemy zaś tylko gotowe wyniki:

$$(166) \qquad a = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_i y_i & \Sigma x_i z_i \\ \Sigma y_i^2 & \Sigma y_i z_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma y_i^2 \end{vmatrix}} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x_i z_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma y_i z_i & \Sigma x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i y_i & \Sigma y_i^2 \end{vmatrix}}$$

otrzymane z odpowiednich równań normalnych.

Do wyrównania szeregu spostrzeżeń można używać nietylko linjowych związków, a więc linij prostych w przypadku dwóch zmiennych pomiarowych, lecz także rozmaitych linij krzywych. Tak np. w dość prosty sposób przedstawia się wyrównanie zapomocą *parabol* rozmaitych stopni. Zakładamy wtedy, że między zmienną y a x zachodzi związek:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Wykonano m pomiarów par (x, y). Staramy się wyznaczyć parametry $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ tak, aby suma kwadratów odchyleń δ_i postaci:

$$\delta_i = y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \ldots - a_n x_i^n \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

była minimum. Jest to zagadnienie z extremów $n+1$ zmiennych: $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$. Oblicza się pochodne cząstkowe sumy $\sum_{i=1}^{m} \delta_i^2$ i otrzymuje się $n+1$ równań normalnych w postaci:

$$(167)\quad \begin{cases} a_0\sum_{i=1}^{m}1+a_1\sum_{i=1}^{m}x_i+a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^2+\ldots+a_n\sum_{i=1}^{m}x_i^n=\sum_{i=1}^{m}y_i \\ a_0\sum_{i=1}^{m}x_i+a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^2+a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^3+\ldots+a_n\sum_{i=1}^{m}x_i^{n+1}=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum_{i=1}^{m}x_i^n+a_1\sum_{i=1}^{m}x_i^{n+1}+a_2\sum_{i=1}^{m}x_i^{n+2}+\ldots+a_n\sum_{i=1}^{m}x_i^{2n}=\sum_{i=1}^{m}x_i^ny_i \end{cases}$$

Szersze rozwinięcie tej metody i innych podobnych metod wraz z przykładami liczbowemi znaleźć może czytelnik w podręczniku: C. Runge und K. König. *Numerisches Rechnen* (Berlin, Springer, r. 1924).

W statystycznych zastosowaniach prowadzi ta metoda do używania zamiast *prostych* regresji rozmaitych *parabol* regresji. Bliższe szczegóły o tej metodzie jak i wogóle o teorji *korelacji* może czytelnik znaleźć w podręczniku p. t. A. Tschuprow. *Grundbegrife und Grundprobleme der Korrelationstheorie* (Lipsk 1925).

W jednym z dalszych rozdziałów (w II Tomie) zajmiemy się wyznaczaniem spółczynników t. zw. wielomianów trygonometrycznych, t. j. funkcyj postaci:

$$y=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

tak, aby suma kwadratów błędów była *minimum*. Zagadnienie to jest bardzo ważne przy badaniu zjawisk perjodycznych.

Ustęp III.

EXTREMA Z WARUNKAMI POBOCZNEMI.

§ 159. Sformułowanie zagadnień o extremach z warunkami pobocznemi.

Wiele zagadnień, dotyczących badania extremów, formułuje się w ten sposób, że szukamy extremów jakiejś funkcji kilku zmiennych, które jednak nie są niezależne, lecz muszą spełniać jeszcze jakieś dodatkowe warunki, zwane warukami *pobocznemi*.

a) Tak np. mało interesującem zagadnieniem jest zbadanie extremów funkcji:

$$z=xy$$

albowiem odrazu jest widocznem, że ta funkcja nie posiada extremów — o ile x, y są zmiennemi niezależnemi. Związek $z=xy$ możemy interpretować np. jako wzór na pole prostokąta o bokach x i y. Otóż to pole

wzrasta nieograniczenie, gdy x i y rosną a więc widocznie niema tu maximum. Gdybyśmy zaś rozważali tylko dodatnie wartości x, y, to minimum pola wynosiłoby zero.

Jeżeli jednak zażądamy dodatkowo, aby ten prostokąt posiadał zgóry podany obwód, np. 100 m, to zmienne x i y nie byłyby już niezależne, lecz musiałyby spełniać dodatkowy warunek:

$$2x + 2y = 100$$

czyli

$$\varphi(x, y) = 2x + 2y - 100 = 0$$

b) Podobnie dla objętości walca o zmiennej wysokości y i zmiennym promieniu podstawy x niema maximum a minimum jest równe zeru (o ile się ograniczamy do dodatnich x, y). A więc badanie extremów funkcji:

$$V = x^2 \pi y$$

nie przedstawia niczego interesującego. Natomiast ważnem i interesującem jest zagadnienie, dla jakich x, y przyjmuje ta objętość wartość największą, gdy podana jest zgóry wielkość powierzchni P. Wtedy zmienne x, y nie są już niezależne, lecz są związane warunkiem pobocznym:

$$\varphi(x, y) = 2x^2\pi + 2\pi xy - P = 0$$

c) Odległość dowolnego punktu $P(x, y)$ od początku układu wyrażamy wzorem:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ta funkcja nie posiada maximum, a minimum występuje w punkcie $0(0, 0)$ i wynosi $d = 0$. Zagadnienie to staje się trudniejszem a zarazem ważniejszem, gdy na zmienne x, y nałożymy dodatkowy, poboczny warunek, np. aby punkt P leżał na jakiejś linji krzywej o równaniu $\varphi(x, y) = 0$.

Ogólnie takie zagadnienie w odniesieniu do funkcji dwóch zmiennych ma następującą postać.

Zbadać extrema funkcji:

$$z = f(x, y)$$

przyczem zmienne x, y są związane warunkiem pobocznym:

$$\varphi(x, y) = 0$$

Uwaga. Istota tego zagadnienia występuje nadzwyczaj jasno w następującej geometrycznej interpretacji. Sporządzamy warstwicowy plan czyli mapę powierzchni o równaniu $z = f(x, y)$. Na tej mapie rysujemy jakąś ścieżkę w postaci linji o równaniu $\varphi(x, y) = 0$. Chodzi o wyznaczenie tych punktów, w których ścieżka osiąga najwyższą (lub najniższą) warstwicę. Jeżeli zarówno warstwice jak i ścieżka są linjami regularnemi, bez ostrz i innych punktów osobliwych, to jasnem jest, że w takich punktach

najwyższych (lub najniższych) ścieżki musi być ona *styczna* do warstwicy, przechodzącej przez taki punkt (nie może jej przecinać, weszłaby bowiem na następne, wyższe lub niższe warstwice). Z tego warunku można wyprowadzić warunek (168) z następującego paragrafu, służący do wyznaczania extremów z warunkiem pobocznym: trzeba tylko wyrazić zapomocą wzoru, że styczna do warstwicy w takim punkcie ma ten sam spadek, co styczna do ścieżki. Taką metodę badania extremów z warunkami pobocznemi podał prof. H. Steinhaus.

Dla funkcyj trzech zmiennych można sformułować dwa zagadnienia tego rodzaju, a mianowicie: chcemy wyznaczyć extrema funkcji:

$$u = f(x, y, z)$$

gdy trzy zmienne x, y, z spełniają jeden warunek poboczny:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

albotеż nakładamy na te 3 zmienne dwa warunki poboczne:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$
$$\psi(x, y, z) = 0$$

Zagadnienia takie spotykamy bardzo często w geometrji.

Chcemy np. wyznaczyć osie elipsy przekroju elipsoidy dowolną daną płaszczyzną, przechodzącą przez jej środek. Otóż długość każdej osi przekroju jest to najkrótsza i najdłuższa odległość pewnych punktów na powierzchni elipsoidy od jej środka. Przyjmijmy początek układu w środku badanej elipsoidy. Funkcją, której extrema chcemy zbadać, jest odległość punktu $P(x, y, z)$ od początku układu, t. j.

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Zmienne x, y, z nie są tu jednak dowolne, lecz są związane następującemi dwoma warunkami pobocznemi:

1° badany punkt ma leżeć na powierzchni elipsoidy, a więc jego spółrzędne muszą spełniać równanie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

2° badany punkt ma leżeć na pewnej zgóry podanej płaszczyźnie, przechodzącej przez środek elipsoidy. Równanie ogólne takiej płaszczyzny ma postać:

$$mx + ny + pz = 0$$

a więc spółrzędne punktu $P(x, y, z)$ muszą spełniać także to drugie równanie. Najogólniejsze zagadnienie tego typu otrzymujemy, szukając extremów funkcji n zmiennych, które spełniają p jakichś warunków pobocznych (przyczem musi być $p < n$).

§ 160. Extrema funkcji dwóch zmiennych z jednym warunkiem pobocznym.

Zajmiemy się najpierw szukaniem extremów funkcji dwóch zmiennych:

$$z = f(x, y)$$

z jednym warunkiem pobocznym:

$$\varphi(x, y) = 0$$

Drugie równanie określa y jako funkcję zmiennej x w postaci uwikłanej. O ile potrafimy tę funkcję w dość prosty sposób wyznaczyć w formie wyraźnej z tej formy uwikłanej i otrzymamy np. $y = g(x)$, to całe zagadnienie możemy sprowadzić do badania zwyczajnych extremów funkcji jednej zmiennej:

$$z = f(x, g(x))$$

W przypadkach zawilszych dogodniej jest jednak postępować inną drogą. I tak, utwórzmy pochodną całkowitą funkcji z według zmiennej x, pamiętając jednak o tem, że także y jest funkcją zmiennej x. Otrzymamy więc:

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx}$$

Koniecznym warunkiem istnienia extremów jest, aby ta pochodna była równa zeru, t. j.

$$f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0$$

Tworzymy ponadto całkowitą pochodną funkcji $\varphi(x, y)$ według zmiennej x, a mianowicie:

$$\varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} = 0$$

Z tych dwóch równań eliminujemy $\frac{dy}{dx}$ i otrzymujemy warunek:

$$\varphi_x f_y - \varphi_y f_x = 0$$

lub w formie wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix} = 0 \tag{168}$$

Ten warunek w połączeniu z równaniem $\varphi(x, y) = 0$ tworzy układ dwóch równań, z którego obliczamy wartości (x_1, y_1), (x_2, y_2)..., dla których może istnieć extremum.

Te konieczne warunki istnienia extremów można jednak przedstawić także w innej, bardzo dogodnej, symetrycznej formie, używając metody, zwanej *metodą czynnika dowolnego*, wprowadzonej przez Lagrange'a. Chodzi nam o wyeliminowanie y' z układu równań:

$$f_x + f_y y' = 0$$
$$\varphi_x + \varphi_y y' = 0 \,|\cdot \lambda$$

W tym celu mnożymy obie strony drugiego równania przez dowolny czynnik λ i dodajemy do siebie obydwa równania stronami:

$$(f_x + \lambda\varphi_x) + (f_y + \lambda\varphi_y)y' = 0$$

Obieramy teraz λ tak, aby odpadło y'.

W tym celu trzeba położyć: $f_y + \lambda\varphi_y = 0$, a wtedy zostanie $f_x + \lambda\varphi_x = 0$.

Mamy teraz trzy warunki na obliczenie trzech niewiadomych x, y i λ a mianowicie:

$$\text{(168a)} \qquad \begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

Do tego samego wyniku doszlibyśmy, szukając extremów następującej funkcji pomocniczej:

$$\text{(169)} \qquad \boxed{F = f + \lambda\varphi}$$

gdybyśmy uważali x i y za zmienne niezależne a λ za liczbę stałą. Wtedy bowiem trzeba utworzyć:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_x + \lambda\varphi_x = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = f_y + \lambda\varphi_y = 0$$

Otrzymuje się zatem te same warunki, do których doszliśmy poprzednio. Doszliśmy więc do następującej bardzo praktycznej reguły szukania extremów z warunkiem pobocznym.

Aby znaleźć extrema funkcji $z = f(x, y)$, gdy zmienne niezależne są związane warunkiem pobocznym $\varphi(x, y) = 0$, tworzymy funkcję pomocniczą $F = f + \lambda\varphi$ i obliczamy jej extrema tak, jak gdyby x i y były zmiennemi niezależnemi; z trzech równań (168a) *obliczamy te wartości x, y, λ, dla których może zachodzić extremum.*

Aby rozstrzygnąć, czy w znalezionych w ten sposób punktach naprawdę mamy do czynienia z extremum i jakiego rodzaju jest to extremum, należałoby zbadać znak drugiej różniczki: d^2f. Ponieważ jednak x i y są od siebie zależne, przeto do obliczania tej różniczki trzebaby użyć skomplikowanego wzoru (por. § 115, wzór (90)):

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)} f + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y$$

zamiast prostego wzoru (por. § 115, wzór (88)):

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)} f$$

albowiem drugie różniczki d^2x i d^2y nie są wtedy zerami.

Unikniemy jednak tej niedogodności, używając funkcji pomocniczej F. Ponieważ $\varphi = 0$, to $F = f + \lambda\varphi = f$ a więc także:

$$d^2f = d^2F$$

Zamiast drugiej różniczki funkcji f wystarczy więc obliczyć drugą różniczkę funkcji pomocniczej F. Otrzymujemy ją z następującego rachunku:

$$d^2F = d^2f + \lambda d^2\varphi = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}dy^2 + f_x d^2x + f_y d^2y + \\ + \lambda\varphi_{xx}dx^2 + \lambda 2\varphi_{xy}dx\,dy + \lambda\varphi_{yy}dy^2 + \lambda\varphi_x d^2x + \lambda\varphi_y d^2y$$

czyli:

$$d^2F = (f_{xx} + \lambda\varphi_{xx})dx^2 + 2(f_{xy} + \lambda\varphi_{xy})dx\,dy + (f_{yy} + \lambda\varphi_{yy})dy^2 + \\ + (f_x + \lambda\varphi_x)d^2x + (f_y + \lambda\varphi_y)d^2y$$

Ze spełniania się równań (168a) wynika jednak, że końcowe wyrazy odpadają, gdy za x, y, λ bierzemy te wartości, w których mogą istnieć extrema i zostaje ostatecznie:

$$d^2F = (f + \lambda\varphi)_{xx}dx^2 + 2(f + \lambda\varphi)_{xy}dx\,dy + (f + \lambda\varphi)_{yy}dy^2$$

lub krótko:

$$d^2f = d^2F = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)} F \tag{170}$$

Widzimy stąd, że w tej drugiej różniczce funkcji pomocniczej F nie trzeba już uwzględniać tego, że x i y są zmiennemi zależnemi, nie trzeba więc wypisywać wyrazów, zawierających d^2x i d^2y; spółczynniki przy d^2x i d^2y są tu bowiem zerami, gdy wstawiamy w d^2F te wartości x, y, λ, dla których może istnieć extremum. Ta uwaga upraszcza zwykle znacznie dyskusję.

§ 161. Extrema funkcyj trzech zmiennych z warunkami pobocznemi.

Zupełnie podobnie postępuje się, gdy chodzi o badanie extremów funkcji trzech zmiennych:

$$u = f(x, y, z)$$

z warunkiem pobocznym:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

Tworzy się funkcję pomocniczą:

$$F = f + \lambda\varphi$$

i oblicza się jej extrema tak, jakgdyby x, y, z były zmiennemi niezależnemi. Otrzymuje się w ten sposób układ 4 równań:

$$F_x = 0, \quad F_y = 0. \quad F_z = 0 \quad \text{i} \quad \varphi = 0$$

i z tego układu wyznacza się te czwórki wartości x, y, z, λ, dla których mogą istnieć extrema. Prosty dowód tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi.

W przypadku jeszcze ogólniejszym, gdy chodzi o extrema funkcji:

$$u = f(x, y, z)$$

z dwoma warunkami pobocznemi:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$
$$\psi(x, y, z) = 0$$

używa się dwóch czynników dowolnych: λ i μ. Tworzy się funkcję pomocniczą:

$$F = f + \lambda\varphi + \mu\psi \tag{171}$$

i oblicza się jej extrema tak, jakgdyby x, y, z były zmiennemi niezależnemi.

Dowód. Jeżeli warunki poboczne dadzą się rozwiązać ze względu na y i z, to istnieją dwie funkcje $y = g(x)$ i $z = h(x)$, podane zapomocą tych warunków w postaci uwikłanej (por. § 119 o istnieniu takich funkcyj uwikłanych i o ich pochodnych).

Wobec tego u możemy wtedy uważać za funkcję złożoną jednej zmiennej x, a mianowicie:

$$u = f(x, g(x), h(x))$$

Teraz już chodzi o znalezienie extremów funkcji jednej zmiennej, a więc tworzymy (por. § 107, wzór (76), na str. 333):

$$\frac{du}{dx} = f_x + f_y \cdot g' + f_z \cdot h' = 0$$

Podobnie z warunków pobocznych otrzymujemy dwa dalsze równania:

$$\varphi_x + \varphi_y g' + \varphi_z h' = 0 \,\Big|\cdot \lambda$$
$$\psi_x + \psi_y g' + \psi_z h' = 0 \,\Big|\cdot \mu$$

Z tych trzech równań możemy wyeliminować g' i h' w następujący sposób (metodą–Lagrange'a). Mnożymy drugie równanie przez czynnik λ a trzecie przez μ i dodajemy układ tych trzech równań stronami. Otrzymujemy:

$$(f_x + \lambda\varphi_x + \mu\psi_x) + (f_y + \lambda\varphi_y + \mu\psi_y)g' + (f_z + \lambda\varphi_z + \mu\psi_z)h' = 0$$

Dowolne czynniki λ i μ dobieramy tak, aby odpadły wyrażenia, zawierające g' i h', a więc kładziemy:

$$f_y + \lambda\varphi_y + \mu\psi_y = 0$$
$$f_z + \lambda\varphi_z + \mu\psi_z = 0$$

Z tych dwóch równań można obliczyć λ i μ, o ile jakobjan: $\begin{vmatrix} \varphi_y & \psi_y \\ \varphi_z & \psi_z \end{vmatrix}$ jest różny od zera (por. § 119). Te obliczone wartości możnaby wstawić w pozostałe równanie $f_x + \lambda\varphi_x + \mu\psi_x = 0$ i otrzymalibyśmy w ten sposób jedno równanie na wyznaczenie zmiennych x, y, z. Łącząc je z dwoma równaniami $\varphi = 0$ i $\psi = 0$, otrzymalibyśmy układ 3 równań, wystarczający do wyznaczenia trzech zmiennych x, y, z. Łatwiej jest jednak zwykle zatrzymać narazie te czynniki λ i μ i rozwiązywać następujący układ, złożony z 5 równań o 5 niewiadomych x, y, z, λ, μ:

$$f_x + \lambda\varphi_x + \mu\psi_x = 0$$
$$f_y + \lambda\varphi_y + \mu\psi_y = 0$$
$$f_z + \lambda\varphi_z + \mu\psi_z = 0$$
$$\varphi = 0$$
$$\psi = 0$$

Trzy początkowe równania tego układu utrzymuje się także odrazu, szukając extremów funkcji pomocniczej:

$$F = f + \lambda\varphi + \mu\psi$$

przyczem x, y, z uważa się za zmienne niezależne a λ i μ za czynniki stałe.

W podobny sposób postępuje się w ogólniejszych przypadkach badania extremów z warunkami pobocznemi.

§ 162. Przykłady na extrema z warunkami pobocznemi.

Metoda czynników dowolnych okazuje się bardzo pożyteczną przy rozwiązywaniu skomplikowanych zagadnień; natomiast dla prostych zagadnień (jak np. dla zagadnień, podanych w § 159 pod a) i b)) dochodzi się najszybciej do celu odrazu przez rozwikłanie warunku pobocznego według jednej zmiennej i sprowadzenie całego zagadnienia do szukania zwyczajnych extremów bez warunków pobocznych. W przykładach podanych poniżej metoda czynnika dowolnego okazuje się praktyczna.

1) Znaleźć osie główne elipsy, podanej równaniem:

$$(p) \qquad \varphi(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2 - 36 = 0$$

Połówki osi są wyznaczone przez największą i najmniejszą odległość środka elipsy od punktów, leżących na jej obwodzie.

Odległość dowolnego punktu $P(x, y)$ od początku układu wyrażamy wzorem $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Chodzi nam więc o extrema tego wyrażenia. Zamiast tego można badać extrema wyrażenia d^2, albowiem, gdy d osiąga extremum, to i d^2 osiąga extremum i to tego samego rodzaju, ponieważ d ma zawsze wartość dodatnią.

Będziemy więc badali extrema funkcji:

$$z = d^2 = x^2 + y^2$$

z warunkiem pobocznym (p). W tym celu tworzymy:

$$F = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 4xy + 2y^2 - 36)$$

i pochodne cząstkowe tej funkcji przyrównujemy do zera:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 10\lambda x + 4\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 4\lambda x + 4\lambda y = 0$$

Możnaby z tych równań wyeliminować λ i otrzymać jedno równanie o dwóch zmiennych x, y. Zestawiając je z warunkiem pobocznym (p), otrzymalibyśmy pary liczb x, y, dla których może istnieć extremum. Prościej jednak przedstawi się rachunek, gdy rozpoczniemy od obliczenia λ. I tak możemy napisać dwa ostatnie równania w postaci:

$$(r) \qquad \begin{aligned} (1 + 5\lambda)x &= -2\lambda y \\ 2\lambda x &= -(1 + 2\lambda)y \end{aligned}$$

Stąd odrazu eliminujemy x i y i otrzymujemy:

$$(1 + 5\lambda)(1 + 2\lambda) = 4\lambda^2$$

czyli:

$$6\lambda^2 + 7\lambda + 1 = 0$$

a stąd:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{6}$$

Podstawiamy wartość $\lambda_1 = -1$ w równania (r), to otrzymamy z obydwu równań:

$$y = -2x$$

a podstawiając to w równanie (p), otrzymamy po łatwych rachunkach:

$$x_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}, \quad y_1 = -\frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$x_2 = -\frac{6}{\sqrt{5}}, \quad y_2 = +\frac{12}{\sqrt{5}}$$

Dla tych wartości jest $d_1^2 = \frac{36}{5} + \frac{144}{5} = \frac{180}{5} = 36$, a więc $d_1 = 6$. Podstawiając znowu $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$, otrzymujemy z (r):

$$x = 2y$$

a następnie z równania (p):

$$x_3 = 2\sqrt{\tfrac{6}{5}}, \quad y_3 = \sqrt{\tfrac{6}{5}}$$

$$x_4 = -2\sqrt{\tfrac{6}{5}}, \quad y_4 = -\sqrt{\tfrac{6}{5}}$$

Dla tych wartości jest $d_2^2 = \frac{4 \cdot 6}{5} + \frac{6}{5} = 6$ a więc $d_2 = \sqrt{6}$. Widocznem jest odrazu, że d_1 jest maximum, a więc jest to połówka osi wielkiej, a d_2 minimum, t. j. połówka osi małej. Wartości (x_1, y_1), (x_2, y_2) są spółrzędnemi końców osi wielkiej, a (x_3, y_3), (x_4, y_4) końców osi małej.

Można było jednak odrazu, zgóry, bez obliczania d_1 i d_2, rozstrzygnąć, że dla λ_1 zachodzi maximum a dla λ_2 minimum. W tym celu trzeba zbadać drugą różniczkę pomocniczej funkcji $F = f + \lambda\varphi$. Badanie to przeprowadziliśmy już w § 115 (przykład).

Dla $\lambda_1 = -1$ otrzymaliśmy: $d^2F = -2(2dx + dy)^2 \leqq 0$

a dla $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$ „ $d^2F = \frac{1}{3}(dx - 2dy)^2 \geqq 0$

Przy dowolnych dx i dy te drugie różniczki mogą przyjmować także wartość zero. Jednakże w naszem zagadnieniu dy i dx nie są dowolne, lecz z warunku pobocznego otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{10x + 4y}{4x + 4y} = -\frac{5x + 2y}{2x + 2y}$$

a więc:

$$dy = -\frac{5x+2y}{2x+2y}dx$$

Dla $x_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}$, $y_1 = -\frac{12}{\sqrt{5}}$ otrzymujemy zatem:

$$dy = -\frac{\frac{30}{\sqrt{5}} - \frac{24}{\sqrt{5}}}{\frac{12}{\sqrt{5}} - \frac{24}{\sqrt{5}}}dx = \frac{1}{2}dx$$

a więc:

$$d^2F = -2(2dx + \tfrac{1}{2}dx)^2 = -2 \cdot \tfrac{25}{4}dx^2 = -\tfrac{25}{2}dx^2 < 0$$

Wtedy także przyrost Δf jest ujemny w otoczeniu badanego punktu, a zatem w punkcie (x_1, y_1) mamy *maximum*, a tak samo, jak się okazuje, w punkcie (x_3, y_3).

Dla (x_2, y_2) otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{10\sqrt{\frac{6}{5}} + 2\sqrt{\frac{6}{5}}}{4\sqrt{\frac{6}{5}} + 2\sqrt{\frac{6}{5}}} = -2$$

a więc:

$$dy = -2dx$$

wobec czego:

$$d^2F = \tfrac{1}{3}(dx + 4dx)^2 = +\tfrac{25}{3}dx^2 > 0$$

A zatem w punktach (x_3, y_3) i (x_4, y_4) mamy *minimum*.

Uwaga. Do tego samego można dojść, uważając z za funkcję złożoną jednej zmiennej, t. j.

$$z = x^2 + y(x)^2$$

Tworzymy pierwszą i drugą pochodną zupełną a mianowicie:

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2yy'$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2 + 2y'^2 + 2yy''$$

Obliczamy y' i y'' z uwikłanej formy (p) i podstawiamy następnie w $\frac{d^2z}{dx^2}$ wartości (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4). Po łatwych przeróbkach otrzymujemy:

$$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x_1, y_1} = -\frac{25}{2} < 0$$

$$\left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{x_3, y_3} = +\frac{25}{3} > 0$$

2) Znaleźć extrema funkcji:

$$u = x^m y^n z^p$$

(m, n, p, liczby dodatnie), przyczem zmienne niezależne są ze sobą związane zapomocą warunku pobocznego:

$$x + y + z - a = 0$$

a x, y, z przyjmują tylko wartości dodatnie.

Specjalnym przypadkiem tego zagadnienia jest np.: znaleźć 3 liczby o stałej sumie a tak, aby ich iloczyn $x \cdot y \cdot z$ miał możliwie największą wartość.

Obliczamy extrema pomocniczej funkcji:

$$F = f + \lambda\varphi = x^m y^n z^p + \lambda(x + y + z - a)$$

W tym celu kładziemy trzy pochodne cząstkowe równe zeru:

$$F_x = mx^{m-1} y^n z^p + \lambda = 0$$
$$F_y = nx^m y^{n-1} z^p + \lambda = 0$$
$$F_z = px^m y^n z^{p-1} + \lambda = 0$$

Stąd:

$$mx^{m-1} y^n z^p = nx^m y^{n-1} z^p = px^m y^n z^{p-1} \,|: x^m y^n z^p$$

a więc:

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z}$$

Stosując tu twierdzenie sumowe o proporcjach, otrzymujemy:

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z} = \frac{m+n+p}{x+y+z} = \frac{m+n+p}{a}$$

a więc:

$$x = \frac{am}{m+n+p}$$

$$y = \frac{an}{m+n+p}$$

$$z = \frac{ap}{m+n+p}$$

Dla tych wartości może zachodzić extremum. Aby rozstrzygnąć, czy tak jest istotnie, trzeba obliczyć dla tych wartości drugą różniczkę d^2f funkcji f lub, co na jedno wyjdzie, d^2F. Po wykonaniu odpowiednich rachunków otrzymuje się:

$$d^2F = -\left(\frac{m}{x^2}dx^2 + \frac{n}{y^2}dy^2 + \frac{p}{z^2}dz^2\right)\cdot x^m y^n z^p$$

a więc jest: $d^2F < 0$ dla wszystkich dodatnich x, y, z, m, n, p. A więc i $d^2f < 0$ a to dowodzi, że przyrost $\Delta f < 0$ w otoczeniu badanego punktu, a więc w tym punkcie funkcja posiada *maximum*.

W specjalnym przypadku, gdy $m = n = p = 1$, otrzymujemy: $x = y = z = \frac{a}{3}$. Wartość badanej funkcji dla tych wartości, t. j. $f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \left(\frac{a}{3}\right)^3$, nie może być zatem mniejsza od wartości $f(x, y, z) = xyz$ przy żadnej trójce liczb dodatnich. Zatem:

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3 \geqq xyz$$

czyli:

$$\frac{x+y+z}{3} \geqq \sqrt[3]{xyz}$$

To znaczy, że średnia arytmetyczna trzech liczb dodatnich jest zawsze większą a conajwyżej równa ich średniej geometrycznej. Jest to specjalny przypadek ogólnego twierdzenia, przytoczonego na str. 457.

3) Dana jest jakaś powierzchnia o równaniu:

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

i punkt $P(l, m, n)$, nie leżący na tej powierzchni. Znaleźć na danej powierzchni punkty, leżące najbliżej P i najdalej od P. Odległość danego punktu od każdego punktu, leżącego na powierzchni, wyrażamy wzorem:

$$d = \sqrt{(x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2}$$

Chodzi nam o extrema tej funkcji d lub — co na jedno wyjdzie (ponieważ $d > 0$) — o extrema funkcji d^2, t. j. funkcji:

$$f(x, y, z) = (x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2$$

z warunkiem pobocznym $\varphi(x, y, z) = 0$.

Tworzymy pochodne cząstkowe funkcji pomocniczej:

$$F = f + \lambda\varphi = (x-l)^2 + (y-m)^2 + (z-n)^2 + \lambda\varphi(x, y, z)$$

i przyrównujemy je do zera:

$$F_x = 2(x - l) + \lambda\varphi_x = 0$$
$$F_y = 2(y - m) + \lambda\varphi_y = 0$$
$$F_z = 2(z - n) + \lambda\varphi_z = 0$$

Eliminujemy z tych 3 równań λ i otrzymujemy:

$$\frac{x - l}{\varphi_x} = \frac{y - m}{\varphi_y} = \frac{z - n}{\varphi_z}$$

W geometrji różniczkowej dowodzi się, że te dwa równania są równaniami linji prostej *normalnej* do powierzchni (t. j. prostopadłej do płaszczyzny stycznej).

Stąd wniosek: punkty najbliższe punktu P i najdalsze leżą na tej normalnej do powierzchni, która przechodzi przez punkt P. Aby te punkty znaleźć, należy obliczyć spółrzędne punktów przecięcia tej normalnej z daną powierzchnią.

4) Znaleźć osie elipsy, otrzymanej przez przecięcie elipsoidy o równaniu:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

zapomocą dowolnie podanej płaszczyzny, przechodzącej przez środek tej elipsoidy. Równanie takiej płaszczyzny ma postać

$$\psi(x, y, z) = mx + ny + pz = 0$$

Przecina ona elipsoidę wzdłuż jakiejś elipsy.

Największa i najmniejsza odległość środka elipsy od punktów, leżących na jej obwodzie, dają połówkę osi wielkiej i małej. Środek jej leży w początku układu, a zatem odległość dowolnego punktu (x, y, z) od środka elipsy wyraża się wzorem:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Zamiast szukać extremów tej funkcji dodatniej, wystarczy zbadać extrema funkcji d^2 czyli:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Zmienne x, y, z nie są tu niezależne, lecz są związane dwoma warunkami pobocznemi $\varphi = 0$ i $\psi = 0$.

Zagadnienie to rozwiązujemy metodą czynników dowolnych w ten sposób, że szukamy extremów pomocniczej funkcji:

$$F = f + \lambda\varphi + \mu\psi$$

uważając w niej x, y, z za zmienne niezależne. Tworzymy zatem:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda \dfrac{2x}{a^2} + \mu l = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda \dfrac{2y}{b^2} + \mu m = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda \dfrac{2z}{c^2} + \mu n = 0 \end{cases}$$

Stąd:

$$x = -\frac{\mu l}{2 + \dfrac{2\lambda}{a^2}}$$

$$y = -\frac{\mu m}{2 + \dfrac{2\lambda}{b^2}}$$

$$z = -\frac{\mu n}{2 + \dfrac{2\lambda}{c^2}}$$

Te wartości podstawiamy w równanie $\psi = 0$ i otrzymujemy:

$$-\frac{\mu l^2}{2 + \dfrac{2\lambda}{a^2}} - \frac{\mu m^2}{2 + \dfrac{2\lambda}{b^2}} - \frac{\mu n^2}{2 + \dfrac{2\lambda}{c^2}} = 0$$

czyli:

$$\text{(B)} \qquad \frac{a^2 l^2}{a^2 + \lambda} + \frac{b^2 m^2}{b^2 + \lambda} + \frac{c^2 n^2}{c^2 + \lambda} = 0$$

Z tego równania drugiego stopnia w λ można otrzymać dwie wartości λ_1 i λ_2, a następnie przy pomocy tych wartości i warunku $\varphi = 0$ można obliczyć dalsze niewiadome: μ, x, y, z.

Jeżeli jednak chodzi tylko o wielkości półosi badanej elipsy, to możemy je otrzymać bezpośrednio w następujący sposób. Mnożymy obie strony równań (A) odpowiednio przez x, y i z i dodajemy je stronami.

Otrzymamy:

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) + \mu(lx + my + nz) = 0$$

Ale

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad lx + my + nz = 0$$

a więc:

$$2d^2 + 2\lambda = 0$$

a stąd:

$$d^2 = -\lambda$$

Dla wartości λ_1 i λ_2 otrzymujemy zatem:

$$d_1 = \sqrt{-\lambda_1} \quad \text{i} \quad d_2 = \sqrt{-\lambda_2}$$

Jedna z tych wielkości odpowiada maximum a druga minimum.

Znak: — pod pierwiastkiem znosi się ze znakiem liczb λ_1 i λ_2, które, o ile są rzeczywiste, mogą być tylko ujemne, jak to jest widoczne z równania (B), w którem prócz λ wszystkie wielkości są dodatnie. Nie będziemy tu jednak wchodzili w dalsze szczegóły dyskusji.

Uwaga. Podajemy tu tytuły kilkunastu zbiorów zadań i podręczników, obfitujących w ćwiczenia praktyczne zarówno na extrema rozmaitego rodzaju jak i na inne działy analizy wyższej.

Dölp-Netto. *Zarys rachunku różniczkowego i całkowego oraz zbiór zadań rozwiązanych*, (przeł. L. Wolfke, Warszawa 1922).

Cz. Rudziński. *Zbiór ćwiczeń i zadań z rachunku różniczkowego i całkowego*, (skrypt, część I, wyd. 2, Warszawa 1928).

M. E. Brahy. *Ćwiczenia metodyczne z rachunku różniczkowego*, przeł. M. i J. Krassowscy, Warszawa 1917).

F. Dingeldey. *Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung*, (2 części, 3 wyd. Lipsk 1923, 1930).

R. Rothe. *Höhere Mathematik*, (t. 1, 2, 4, Lipsk 1927 1929, 1933).

A. Fuhrmann. *Anwendung der Differentialrechnung*, (6 tomów, Berlin 1899—1900).

L. A. Sohncke. *Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung*, (część I, wyd. 6, Jena 1905)

O. Schlömilch. *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis*, (4 i 5 wyd. Lipsk 1904—1907).

D. Leib. *Applications du calcul différentiel et intégral*, (przekł. z angielskiego A. Sallin, Paryż 1930).

G. Fubini - G. Vivanti. *Esercizi di analisa matematica*, (Torino, 1920) i podręcznik tych samych autorów p. t. *Lezioni di analisa matematica*, (5 wyd. Torino 1925).

G. H. Hardy. *Kurs analizy*, (przekł. z angielskiego, 2 wyd Warszawa 1930).

P. Dziwiński. *Wykłady matematyki*, (2 tomy, Lwów 1902, 1908).

L. Kiepert - M. Stegemann. *Grundriss der Differential- und Integralrechnung*, (2 tomy, 14 wyd. 1921, 1923).

L. Zoretti. *Leçons de mathématiques générales*, (Paryż 1914).

G. Humbert. *Cours d'analyse*, (2 tomy, Paryż 1903, 1904).

P. Montel - E. Vessiot. *Cours de mathématiques générales*, (2 tomy, Paryż 1930).

§ 163. Uogólnienie zagadnień o extremach.

We wszystkich naszych rozważaniach, dotyczących extremów, szukaliśmy pewnych *liczb*, dla których dane funkcje przybierały najmniejsze lub największe wartości. Ogólniejszem zadaniem jest szukanie takich *funkcyj*, dla których inne, zależne od nich wyrażenia, przybierają wartości największe lub najmniejsze. Tak np. weźmy pod uwagę dwa punkty A

B, leżące w różnych poziomach nad powierzchnią ziemi, lecz nie na tym samym pionie (fig. 139). Punkt materjalny ma spadać od A do B, poruszając się po jakiejś sztywnej podstawie, np. po powierzchni o przekroju p lub s lub c i t. p. Zachodzi pytanie, jaka powinna być linja, po której punkt spada od A do B, aby czas tego ruchu był najkrótszy. Wszystkie możliwe drogi tego punktu wyrażamy zapomocą rozmaitych funkcyj. Chodzi o to, jaką *funkcję* należy obrać, aby czas był najkrótszy. Mogłoby się zdawać, że taką linją o najkrótszym czasie, czyli „brachistochroną", jest linja prosta p, łącząca te punkty. Ściślejsze jednak badanie prowadzi do nieoczekiwanego wniosku, że taką brachistochroną jest łuk, *cykloidy*. Zagadnienia podobnego typu spotykamy bardzo często w fizyce w geodezji i w innych naukach. Tak np. mając dane dwa punkty A i B na elipsoidzie obrotowej (nie leżące na tym samym południku ani na tym samym równoleżniku), chcemy znaleźć najkrótszą drogę, leżącą na powierzchni tej elipsoidy, a łączącą te dwa punkty. Rozmaite drogi są określone rozmaitemi funkcjami; chodzi zaś o wybranie takich *funkcyj*, aby długość łuku od A do B linji, określonej temi funkcjami, była minimum. Linję, spełniającą ten warunek, nazywamy „linją geodezyjną"

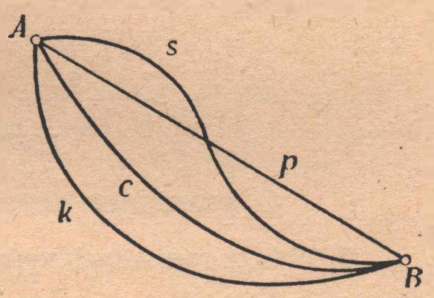


Fig. 139.

Te zagadnienia, polegające na szukaniu *funkcyj*, dla których pewne wyrażenia, zależne od tych funkcyj, osiągają extrema, tworzą osobny dział analizy wyższej, zwany rachunkiem *warjacyjnym*. W jednym z dalszych rozdziałów (w II Tomie) omówimy kilka najprostszych zagadnień z tego działu.

ROZDZIAŁ XIV.

O granicach wyrażeń nieokreślonych.

§ 164. O rozmaitych rodzajach wyrażeń nieokreślonych.

Bardzo często zachodzi potrzeba obliczenia granicy ilorazu:

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

w którym licznik i mianownik dążą równocześnie do zera.

Jakkolwiek wtedy nie można stosować twierdzenia o ilorazie granic, albowiem otrzymalibyśmy wyrażenie nieokreślone $\frac{0}{0}$, to jednak taki iloraz może dążyć do ściśle określonej właściwej lub niewłaściwej granicy. Liczne przykłady na to spotykaliśmy już np. przy obliczaniu pochodnych rozmaitych funkcyj wprost z definicji. Granica ta może więc istnieć.

Niektórzy autorowie nazywają ją „prawdziwą wartością funkcji“ w badanem miejscu, inni znowu „niewłaściwą wartością“; tutaj będziemy używali nazwy „granica, do której dąży wyrażenie nieokreślone“ lub krótko: „granica wyrażenia nieokreślonego“. Chcąc obliczyć taką granicę, musimy zrezygnować z bezpośredniego stosowania twierdzenia o ilorazie granic i używać jakichś innych sposobów, jak to czyniliśmy np. przy obliczaniu pochodnych. Otóż okaże się, że rachunek różniczkowy dostarcza w wielu przypadkach bardzo dogodnych i szybkich metod do obliczania takich granic. Podobnie ma się rzecz z wyrażeniami nieokreślonemi postaci: $\frac{\infty}{\infty}$, t. j., gdy licznik i mianownik dążą do nieskończoności. Takie wyrażenia spotykamy np. przy wyznaczaniu asymptot linji krzywej i przy porównywaniu stopnia wzrastania dwóch funkcyj, dążących do nieskończoności.

Okażemy, że także granice takich wyrażeń można bardzo często wyznaczyć przy pomocy rachunku różniczkowego.

To samo odnosi się do wyrażeń nieokreślonych postaci: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞, które spotykamy w rozmaitych działach analizy i geometrji.

Tak np. badaliśmy granicę wyrażenia $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, gdy x dąży do nieskończoności: tu zasada dąży do 1 a wykładnik do nieskończoności, wiemy zaś, że granicą tego wyrażenia nie jest bynajmniej 1, lecz e.

§ 165. Reguła Hospitala.

Zajmiemy się najpierw wyrażeniami nieokreślonemi postaci $\frac{0}{0}$, a mianowicie badaniem granicy ilorazu dwóch funkcyj $f(x)$ i $g(x)$, gdy obie te funkcje dążą do zera. Będziemy tu rozważali tylko takie funkcje, które są *ciągłe* w badanym punkcie $x=a$. Wtedy:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$

a więc:

$$f(a)=0 \text{ i } g(a)=0$$

Załóżmy ponadto, że istnieje takie otoczenie punktu a, w którem $f(x)$ i $g(x)$ posiadają pochodne $f'(x)$, $g'(x)$, nie stające się nigdzie w tem otoczeniu równocześnie zerami i że istnieje granica ilorazu $f'(x):g'(x)$. (Nie zakładamy zaś istnienia pochodnych w samym punkcie $x=a$).

Wykażemy, że przy tych założeniach granica ilorazu $f(x):g(x)$ istnieje i że

(171)
$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

To twierdzenie nazywamy regułą Hospitala[1]).

Dowód opiera się na twierdzeniu Cauchy'ego o wartości średniej (por. § 102). Wskutek uczynionych założeń spełniają się — jak łatwo stwierdzić — wszystkie warunki twierdzenia Cauchy'ego w jakimś przedziale, otaczającym punkt a, a więc dla wszystkich odpowiednio małych h zachodzi równość:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(a+\vartheta h)}{g'(a+\vartheta h)} \qquad 0<\vartheta<1$$

Ponieważ $f(a)=g(a)=0$, przeto wzór ten redukuje się do:

(c)
$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a+\vartheta h)}{g'(a+\vartheta h)}$$

---

[1]) Czytaj „Opitala". Tę regułę, przypisywaną markizowi de l'Hospital, wykrył Jan Bernoulli (żył w latach 1667—1748).

Oznaczmy $a+h$ literą x. Według założenia istnieje granica:

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}=A$$

Wobec tego istnieje także granica wyrażenia $f'(a+\vartheta h):g'(a+\vartheta h)$ i ma tę samą wartość A, albowiem ϑh przebiega tylko część zasobu wartości zmiennej h (ponieważ jest $0<\vartheta<1$). Prawa strona wzoru (c) posiada więc granicę A, a zatem i lewa strona musi posiadać tę samą granicę, a to znaczy, że:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=A$$

czyli, że:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ c. b. d. o.

Uwaga. Może się jednak zdarzyć, że $f'(a+h):g'(a+h)$ czyli $f'(x):g'(x)$ nie dąży do żadnej granicy (właściwej ani niewłaściwej) a pomimoto ϑ może przebiegać takie wartości, że: $f'(a+\vartheta h):g'(a+\vartheta h)$, a zatem i $f(x):g(x)$ dąży do granicy. A więc, pomimo że iloraz $f'(x):g'(x)$ nie dąży do granicy, iloraz $f(x):g(x)$ może dążyć do granicy. Wtedy oczywiście stosowanie reguły Hospitala nie prowadzi do celu.

Regułę Hospitala wyrażamy zatem zapomocą następującego twierdzenia. Jeżeli dwie funkcje, ciągłe w punkcie $x=a$, posiadają w otoczeniu tego punktu pochodne, nie stające się w tem otoczeniu równocześnie zerami, jeżeli iloraz tych pochodnych posiada granicę, gdy x dąży do a i *jeżeli dane funkcje dążą do zera, to granica ilorazu tych funkcyj równa się granicy ilorazu ich pochodnych* (por. wzór 171).

Reguła Hospitala odnosi się zarówno do obustronnej granicy, jak i do jednostronnych granic, t. j. gdy x dąży tylko z jednej strony do a. Stosuje się ona też do przypadku, gdy iloraz $f'(x):g'(x)$ posiada niewłaściwą granicę $+\infty$ lub $-\infty$. Wtedy bowiem odwrotny iloraz: $g'(x):f'(x)$ dąży do zera i całe poprzednie rozumowanie można zastosować do ilorazu: $g(x):f(x)$. Otrzymamy zatem w tym przypadku:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

a więc iloraz $f(x):g(x)$ może dążyć do $+\infty$ lub $-\infty$. Nietrudno okazać, że znak będzie tu taki sam, jak dla niewłaściwej granicy ilorazu $f'(x):g'(x)$.

* Istotnie, jeżeli $f'(x):g'(x)\to+\infty$, to ten iloraz jest stale dodatni w pewnem otoczeniu punktu a, a zatem i iloraz $g'(x):f'(x)$ jest stale dodatni w tem otoczeniu, a stąd na podstawie wzoru:

$$\frac{g(a+h)}{f(a+h)}=\frac{g'(a+\vartheta h)}{f'(a+\vartheta h)}$$

wynika, że także iloraz $g(x):f(x)$ jest w tem otoczeniu stale dodatni, a więc także $f(x):g(x)$ jest stale dodatni.

A więc także i w tym wypadku znajduje zastosowanie wzór (171).

Przykłady.

Zbadać: 1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

Jest to wyrażenie typu $\frac{0}{0}$, albowiem licznik i mianownik są funkcjami ciągłemi i stają się zerami dla $x=1$. Łatwo stwierdzić, że wszystkie założenia reguły Hospitala są tu spełnione, zatem:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{1}=3$$

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1-2^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-2^x\log_e 2}=-\frac{1}{\log_e 2}$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}$$

Iloraz pierwszych pochodnych ma w tym przykładzie postać: $\frac{e^x}{2x}$, a więc nie dąży do żadnej granicy, gdy x *obustronnie* dąży do zera. Natomiast, gdy x dąży *prawostronnie* do zera, to $\frac{e^x}{2x}\to+\infty$, a gdy x dąży *lewostronnie* do zera, to $\frac{e^x}{2x}\to-\infty$. Wobec tego:

$$\lim_{0<x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{0<x\to 0}\frac{e^x}{2x}=+\infty$$

$$\lim_{0>x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{0>x\to 0}\frac{e^x}{2x}=-\infty$$

§ 166. Wielokrotne stosowanie reguły Hospitala.

Gdyby się okazało, że także iloraz $f'(x):g'(x)$ przedstawia się w nieokreślonej postaci $\frac{0}{0}$ przy x dążącem do a, to granicę tego ilorazu możemy badać znowu w ten sam sposób, t. j. badać:

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Można jednak jeszcze przed utworzeniem drugiej pochodnej starać się o uproszczenie ilorazu $f'(x):g'(x)$. Dopiero, gdy po uproszczeniu otrzymujemy nadal wyrażenie nieokreślone, stosujemy powtórnie regułę Hospitala.

Przykłady.

1) Zbadać:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{tg}x}{x-\sin x}=A$$

Dla $x=0$ licznik i mianownik są równe 0, a więc jest to wyrażenie nieokreślone postaci $\frac{0}{0}$.

Stosując regułę Hospitala, otrzymujemy:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{1-\cos x}$$

Iloraz pochodnych ma więc znowu postać $\frac{0}{0}$ dla $x\to 0$. Możnaby tu już bezpośrednio zbadać tę granicę zapomocą przekształceń trygonometrycznych, szybciej jednak dochodzi się do celu, stosując powtórnie regułę Hospitala. Otrzymuje się:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos^{-3}x\sin x}{\sin x}$$

Tutaj wystarczy uprościć badany iloraz przez $\sin x$. Otrzymamy w ten sposób:

$$A=\lim_{x\to 0}-2\cos^{-3}x=-2$$

2) Zbadać, w jakim stopniu dąży do zera różnica:

$$\sin x-x$$

W tym celu trzeba utworzyć iloraz:

$$\frac{\sin x-x}{x^m}$$

i zbadać, dla jakiego wykładnika m ten iloraz dąży do skończonej, różnej od zera granicy, gdy x dąży do zera. Łatwo się można przekonać, że dla $m=1$ i $m=2$ iloraz ten dąży do zera. Zbadajmy natomiast:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}$$

To dowodzi, że różnica $\sin x-x$ dąży do zera w 3-cim stopniu.

.3) Na stycznej do koła w punkcie A (fig. 140) odcinamy AC równe łukowi $\overset{\frown}{AB}$, należącemu do kąta $\sphericalangle AOB = x$. Łączymy C z B i przedłużamy CB do przecięcia się z prostą AO w punkcie E.

Do jakiego położenia dąży punkt E, gdy kąt x dąży do zera?

Wyrażamy kąt w mierze łukowej, to łuk $\overset{\frown}{AB} = rx$. Chodzi nam o granicę, do jakiej dąży odległość $d = AE$. Z proporcji:

$$AE : DE = AC : DB$$

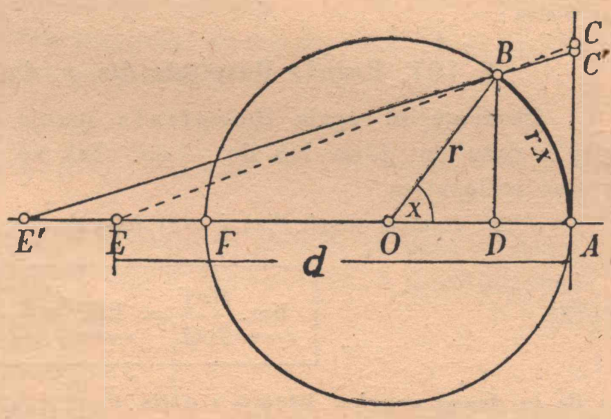


Fig. 140.

czyli:

$$d : (d - r + r\cos x) = rx : r\sin x$$

otrzymujemy

$$\frac{d}{r} = \frac{x\cos x - x}{\sin x - x}$$

Granicę tego wyrażenia obliczamy przez zastosowanie reguły Hospitala, a mianowicie:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - x}{\sin x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x - x\cos x}{-\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3\cos x + x\sin x}{-\cos x} = 3$$

Otrzymaliśmy więc: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{d}{r} = 3$ czyli:

$$\lim_{x\to 0} d = 3r = AE'$$

Uwaga. Wynik ten znajduje zastosowanie w praktyce do przybliżonego wyprostowywania łuków koła. Ponieważ d dąży do $3r$, przeto dla małych kątów można wziąć w przybliżeniu $d = 3r$. Chcąc więc wyprostować łuk $\overset{\frown}{AB}$ na fig. 140, obieramy E' w odległości $3r$ na przedłużeniu średnicy AF, łączymy E' z B i przedłużamy odcinek $E'B$ do przecięcia się z styczną AC, t. j. do punktu C'. Długość odcinka AC' tej stycznej jest w przybliżeniu równa długości łuku $\overset{\frown}{AB}$. To przybliżenie jest bardzo dobre, nawet dla dość wielkich kątów. Tak np. dla $x = 10^0$ łuk ma długość $r \cdot \text{arc } 10^0 = r \cdot 0{\cdot}1745\overline{33}$. Natomiast odcinek AC', obliczony z proporcji $AE' : DE' = AC' : DB$, ma długość:

$$AC' = \frac{3r^2 \sin 10^0}{2r + r\cos 10^0} = r \cdot 0{\cdot}1745\overline{16}$$

Uzyskaliśmy zatem zgodność do 4 miejsc dziesiętnych; błąd nie przekracza 0·00001 promienia.

§ 167. Reguła Hospitala dla x, dążącego do ∞

Okażemy, że reguła Hospitala stosuje się także do przypadku, gdy x dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$. Tak np. dla $x \to +\infty$ ma ona postać następującą.

Jeżeli funkcje ciągłe $f(x)$ i $g(x)$ dążą do zera, gdy x dąży do $+\infty$, to:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{172}$$

o ile ta druga granica istnieje i o ile $f'(x)$ i $g'(x)$ przy x, dążącem do $+\infty$, t. j. dla $x > L$, istnieją i nie stają się począwszy od $x = L$ równocześnie zerami.

Dowód. Położmy $x = \frac{1}{y}$, to badanie granicy wyrażenia $f(x) : g(x)$ sprowadza się do przypadku, dowiedzionego w poprzednim paragrafie. I tak:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{0\leftarrow y\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{0\leftarrow y\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{-1}{y^2}}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{-1}{y^2}} = \lim_{0\leftarrow y\to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}$$

czyli:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ta sama reguła odnosi się do przypadku, gdy $x \to -\infty$.

Przykład.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1:\left(1+\frac{4}{x}\right)\cdot\frac{-4}{x^2}}{1:\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}\cdot 4 = 4$$

§ 168. Reguła Hospitala dla wyrażeń nieokreślonych typu $\frac{\infty}{\infty}$.

Bardzo często spotykamy wyrażenia nieokreślone typu $\frac{\infty}{\infty}$. Chodzi nam o zbadanie granicy:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

gdy

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$

przyczem znak symbolu ∞ może być dowolny.

Okażemy, że także w tym przypadku stosuje się reguła Hospitala a mianowicie, że także w tym przypadku jest:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dowód.

Dla pochodnych $f'(x)$ i $g'(x)$ trzeba tu uczynić te same założenia któreśmy czynili przy pierwszej regule Hospitala, t. j., że obydwie istnieją w otoczeniu punktu $x = a$, że nie stają się równocześnie zerami w odpowiednio bliskiem otoczeniu punktu $x = a$ i że istnieje granica wyrażenia $f'(x) : g'(x)$, nazwijmy ją A. Aby można zastosować twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej, obieramy dwa punkty x i x_0 z tej samej strony punktu a, tak np. jak na fig. 141. W przedziale $<x, x_0>$ są spełnione warunki twierdzenia Cauchy'ego, a więc:

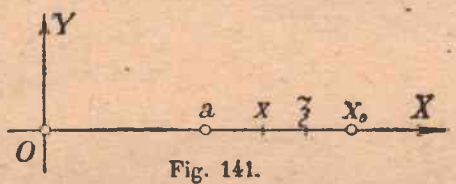


Fig. 141.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

gdzie ξ jest jakąś wartością pośrednią z przedziału $<x, x_0>$.

Ponieważ $f(x)$ i $g(x)$ wzrastają nieograniczenie, gdy x zbliża się do a, przeto będą one różne od zera, gdy końce tego przedziału $<x, x_0>$ będą dość bliskie punktu a. Wobec tego możemy podzielić licznik i mianownik przez $f(x)$ i $g(x)$, wyłączając te funkcje przed nawias. Otrzymamy zatem:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

a stąd:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}$$

Zatrzymajmy teraz punkt x_0 jako punkt stały. Gdy x dąży do a, to według założenia $f'(x) : g'(x)$ a więc i $f'(\xi) : g'(\xi)$ dąży do A; $g(x_0) : g(x)$

dąży do zera, bo $g(x)$ wzrasta nieograniczenie; tak samo $f(x_0):f(x)$ dąży do zera i otrzymujemy:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Dowiedliśmy zatem prawdziwości następującego twierdzenia:

jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ dążą do nieskończoności, gdy x dąży do a i jeżeli istnieje granica wyrażenia $f'(x):g'(x)$, to $f(x):g(x)$ dąży do tej samej granicy, o ile $f'(x)$ i $g'(x)$ spełniają te same dodatkowe założenie, któreśmy omówili przy regule Hospitala. Twierdzenie to stosuje się także, gdy $x\to+\infty$ lub $x\to-\infty$. Dowodzi się tego tak samo, jak dla wyrażeń typu $\frac{0}{0}$ (por. § 167).

Przykłady.

1) Zbadać:

$$\lim_{0<x\to 0}\frac{\log x}{\operatorname{ctg} x}$$

Jest to wyrażenie nieokreślone typu $\frac{\infty}{\infty}$, albowiem:

$$\lim_{0<x\to 0}\log x=-\infty,\quad \lim_{0<x\to 0}\operatorname{ctg} x=+\infty$$

Stosując regułę Hospitala, otrzymujemy:

$$\lim_{0<x\to 0}\frac{\log x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{0<x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Tutaj znowu mamy wyrażenie nieokreślone typu $\frac{\infty}{\infty}$ i gdybyśmy dalej różniczkowali, to ta nieokreśloność utrzymywałaby się ciągle. Jednakże przed różniczkowaniem upraszczamy to wyrażenie a mianowicie wykonujemy dzielenie ułamków i otrzymujemy:

$$\lim_{0<x\to 0}\frac{\log x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{0<x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x}$$

a to już jest wyrażeniem nieokreślonem typu $\frac{0}{0}$. Stosując powtórnie regułę Hospitala, otrzymamy już wyrażenie określone, a mianowicie:

$$\lim_{0<x\to 0}\frac{\log x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{0<x\to 0}\frac{-2\sin x\cos x}{1}=0$$

2) Wykazać, że *funkcja wykładnicza $y=e^x$ wzrasta szybciej aniżeli jakakolwiek dodatnia potęga x^n, gdy x dąży do $+\infty$, to znaczy, że:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

przy dowolnie wielkiem dodatniem n.

Otóż:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3!}{e^x}=0$$

i ogólnie:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

Dla dowolnego, całkowitego dodatniego wykładnika n powyższe twierdzenie jest zatem prawdziwe. Jeżeliby zaś wykładnik nie był całkowity, to byłby mniejszy od jakiejś liczby całkowitej l. Wtedy przez l-krotne stosowanie reguły Hospitala otrzymalibyśmy:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-l+1)x^{n-l}}{e^x}$$

Ponieważ $n<l$, przeto $x^{n-l}=\frac{1}{x^{l-n}}$ dąży do zera. Mianownik zaś e^x dąży do $+\infty$, a zatem całe wyrażenie dąży do zera.

Uwaga. Opierając się na tem twierdzeniu, nietrudno jest okazać, że $y=e^x$ jest funkcją przestępną, t. j., że nie spełnia żadnego równania algebraicznego, to znaczy równania postaci:

$$w_0(x)+w_1(x)\,y+w_2(x)\,y^2+\ldots+w_n(x)\,y^n=0$$

(por. str. 93, wzór b), przyczem $w_k(x)$ są wielomianami. Dowód może czytelnik znaleźć w znakomitej książce G. Kowalewskiego, p. t. *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen* (Lipsk, 2 wyd. 1921 r. str. 111—112).

3) Wykazać, że $y=\log x$ dąży do nieskończoności przy wzrastaniu x powolniej aniżeli jakakolwiek dodatnia potęga zmiennej x (chociażby jej wykładnik był bardzo małą liczbą dodatnią).

Chodzi tu o zbadanie granicy wyrażenia $\log x : x^\alpha$, gdzie $\alpha>0$. Otóż:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha}=0$$

To zaś dowodzi, że x^α dąży do nieskończoności w wyższym stopniu, aniżeli $\log x$. A więc stopnia zdążania logarytmu do $+\infty$ nie można wyrazić żadną liczbą α.

4) Nie zawsze jednak reguła Hospitala prowadzi do celu.

Tak np. chcemy zbadać: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$. Zastosowanie reguły Hospitala prowadzi do wyrażenia nieokreślonego tego samego typu, a mianowicie:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

Gdybyśmy zaś powtórnie zastosowali regułę Hospitala, otrzymalibyśmy spowrotem wyrażenie $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$. To nie dowodzi bynajmiej, jakoby to wyrażenie nie zdążało wogóle do żadnej granicy. Przeciwnie, w bardzo prosty sposób otrzymujemy bez użycia reguły Hospitala:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} = 1$$

Gdy $x \to -\infty$, to biorąc pod uwagę tylko ujemne x, otrzymujemy:

$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{-\sqrt{x^2}} = -\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

a więc granicą jest wtedy -1.

Jeżeli iloraz dwóch funkcyj dąży do 1, gdy x dąży do dodatniej nieskończoności, to mówimy, że jedna funkcja dąży *asymptotycznie* do drugiej. A więc, gdy:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

to $f(x)$ dąży asymptotycznie do $g(x)$. Tak więc funkcja $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$ dąży asymptotycznie do funkcji $g(x) = x$.

Gdybyśmy przy wielkich dodatnich wartościach x wzięli zamiast funkcji $f(x)$ funkcję $g(x)$, to popełnilibyśmy błąd *bezwzględny*:

$$f(x) - g(x) = f_1(x)$$

Ten błąd bezwzględny może nawet dążyć do nieskończoności, lecz błąd *względny*, t. j. stosunek błędu bezwzględnego do samej funkcji $f(x)$, dąży do zera, albowiem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = 1 - 1 = 0$$

Możemy więc $g(x)$ uważać za przybliżenie funkcji $f(x)$ dla wielkich x. Stopień tego przybliżenia możemy zwiększać, znajdując dla błędu $f_1(x)$

znowu jakieś asymptotyczne przedstawienie $g_1(x)$, t. j. taką funkcję $g_1(x)$, aby $f_1(x) : g_1(x) \to 1$.

Oznaczając błąd $f_1(x) - g_1(x)$ przez $f_2(x)$, otrzymamy:

$$f(x) = g(x) + g_1(x) + f_2(x)$$

Rozwinięcie to możemy posuwać dalej, a nawet możemy otrzymać nieskończony szereg:

$$g(x) + g_1(x) + g_2(x) + \dots$$

Czasem ten szereg jest zbieżny i przedstawia dokładnie funkcję $f(x)$.

Tak np. otrzymujemy zapomocą dwumiennego szeregu Newtona (por. § 140) następujące rozwinięcie, zbieżne dla $x > a > 0$:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = |x|\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2} = x\left(1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = x - \frac{a^2}{2x} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{a^4}{x^3} - \binom{\frac{1}{2}}{3}\frac{a^6}{x^5} + \dots$$

z którego otrzymujemy ciąg kolejnych, bardzo dogodnych asymptotycznych przybliżeń funkcji $\sqrt{x^2 - a^2}$ dla wielkich x, a mianowicie:

$$x, \quad x - \frac{a^2}{2x}, \quad x - \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3}, \dots$$

Czasem jednak otrzymuje się w ten sposób szereg rozbieżny a mimo to jego początkowe sumy częściowe mogą być bardzo pożyteczne przy aproksymowaniu funkcji.

Taki rozbieżny szereg, zbudowany z kolejnych asymptotycznych przybliżeń funkcji $f(x)$, nazywamy *szeregiem asymptotycznym* tej funkcji.

Rozmaite uwagi o szeregach asymptotycznych znajdzie czytelnik w *Analizie* W. Sierpińskiego (Tom I, Część III i IV, str. 196 i nast.) Obszerny rozdział poświęcono tym szeregom w podręczniku E. T. Whittakera i G. M. Watsona, p. t. *A course of modern Analysis* (3 wyd. Cambridge, 1920).

§ 169. Wyrażenia nieokreślone typu $0 \cdot \infty$.

Wyrażenie nieokreślone postaci $0 \cdot \infty$ sprowadza się do wyrażeń postaci $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$, a mianowicie, gdy $f(x) \to 0$ a $g(x) \to \infty$, to:

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

Do tych zaś wyrażeń postaci $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ stosujemy poprzednio poznane twierdzenia.

Przykłady.

1) $$\lim_{0<x\to 0} x\log x = \lim_{0<x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{0<x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{0<x\to 0}(-x) = 0$$

Wynik ten moglibyśmy wypowiedzieć w postaci następującego twierdzenia: gdy x dąży do zera (prawostronnie), to $\log x$ dąży do nieskończoności powolniej aniżeli x^{-1}. Niechaj czytelnik okaże, że $\log x$ dąży dla $0<x\to 0$ do $-\infty$ powolniej aniżeli $x^{-\alpha}$, gdy α jest dowolnie małą liczbą dodatnią.

2) Zbadać granicę wyrażenia:

$$y = x\left(\sqrt[x]{a}-1\right)$$

gdzie a jest dowolną liczbą dodatnią, gdy $x\to+\infty$.

Jest to wyrażenie nieokreślone typu: $\infty\cdot 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[x]{a}-1}{\frac{1}{x}}$$

Teraz już mamy wyrażenie typu $\frac{0}{0}$, a więc możemy stosować regułę Hospitala. Otrzymamy:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}\log_e a\cdot\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} a^{\frac{1}{x}}\log_e a = \log_e a$$

Wiemy (por. str. 114, przykład d), że ciąg $\sqrt[n]{a}$ dąży do 1; z udowodnionego zaś twierdzenia wynika, że ciąg:

$$n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) \quad \text{dąży do} \quad \log_e a$$

Możnaby wobec tego użyć ciągu $n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ do *definicji* logarytmu naturalnego, a mianowicie:

$$\log_e a = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$$

3) Wykazać, że spółrzędne x, y epicykloidy (por. § 19, str. 80):

(a)
$$\begin{cases} x = (R+a)\cos t - a\cos\dfrac{R+a}{a}t \\ y = (R+a)\sin t - a\sin\dfrac{R+a}{a}t \end{cases}$$

dążą do wartości:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = R(\cos t + t \sin t) \\ \bar{y} = R(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

gdy promień toczącego się koła dąży do nieskończoności.

Równania epicykloidy można napisać w postaci:

$$x = R\cos t - a\left(\cos\left(\frac{R}{a}+1\right)t - \cos t\right)$$

$$y = R\sin t - a\left(\sin\left(\frac{R}{a}+1\right)t - \sin t\right)$$

Gdy $a \to +\infty$, to wyrażenie:

$$f(a) = a\left(\cos\left(\frac{R}{a}+1\right)t - \cos t\right)$$

przyjmuje postać wyrażenia nieokreślonego $\infty \cdot 0$. Otóż:

$$\lim_{a\to\infty} f(a) = \lim_{a\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{R}{a}+1\right)t - \cos t}{\frac{1}{a}} = \lim_{a\to\infty} \frac{-\sin\left(\frac{R}{a}+1\right)t \cdot \frac{-Rt}{a^2}}{-\frac{1}{a^2}} =$$

$$= \lim_{a\to\infty} -Rt\sin\left(\frac{R}{a}+1\right)t = -Rt\sin t$$

Zatem:

$$\bar{x} = \lim_{a\to\infty} x = R\cos t + Rt\sin t = R(\cos t + t\sin t)$$

Podobnie wyprowadza się wzór na $\bar{y}$.

Linję, której równania mają postać wzorów (b), nazywamy *rozwijającą koła* czyli *ewolwentą koła*. Możemy ją otrzymać przez „toczenie się“ bez ślizgania linji prostej (stycznej do koła) po kole o promieniu R. Zobaczymy później, że można ją także uważać za linję, zakreśloną przez koniec wyprężonej nitki, nawiniętej na koło, gdy ją odwijamy z koła; stąd też pochodzi nazwa: „rozwijająca“.

§ 170. Wyrażenia nieokreślone typu $\infty - \infty$.

Także wyrażenia nieokreślone postaci $\infty - \infty$ sprowadza się łatwo do wyrażeń postaci $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

I tak:

$$f(x) - g(x) = f(x)\cdot g(x)\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)$$

Jeżeli $f(x)$ i $g(x)$ dążą do nieskończoności, to to wyrażenie ma postać $\infty \cdot 0$. Stąd:

$$f(x) - g(x) = \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)g(x)}} \tag{173}$$

a to wyrażenie ma postać $\frac{0}{0}$.

Zwykle jednak obchodzimy się bez tej przeróbki i uzyskujemy prostsze formy badanego wyrażenia wprost przez sprowadzenie obu funkcyj $f(x)$ i $g(x)$ do wspólnego mianownika lub przez inne przekształcenia.

Przykłady. 1) Zbadać:

$$A = \lim_{x \to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{\log x - \dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}\log x}$$

Przekształcenia tego dokonaliśmy na podstawie wzoru (173) i otrzymaliśmy wyrażenie postaci $\frac{0}{0}$. Zanim rozpoczniemy różniczkowanie, upraszczamy to wyrażenie i otrzymujemy:

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{x\log x - x + 1}{(x-1)\log x}$$

Otóż do tej postaci dochodzi się odrazu z pierwotnej formy, sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika.

Stosując tu regułę Hospitala, otrzymujemy:

$$A = \lim_{x \to 1} \frac{\log x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1}{\log x + \dfrac{x-1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{x\log x}{x\log x + x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\log x + 1}{\log x + 1 + 1}$$

czyli:

$$A = \tfrac{1}{2}$$

2) Obliczyć:

$$B = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$$

Przez sprowadzanie do wspólnego mianownika otrzymujemy wyrażenie:

$$B = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$$

typu $\frac{0}{0}$. Przez kilkakrotne zastosowanie reguły Hospitala otrzymamy po dość rozwlekłych rachunkach: $B = \frac{2}{3}$.

3) Obliczyć:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)$$

Stosowanie wzoru (173) i reguły Hospitala doprowadza tu do dość skomplikowanych rachunków. Natomiast szybko dochodzi się do celu przez zastosowanie następującego przekształcenia, używanego często przy wyrażeniach, zawierających pierwiastki: mnożymy daną różnicę i dzielimy ją przez sumę $\sqrt{x^2-a^2}+x$.

W ten sposób otrzymujemy, ograniczając się do x większych od $|a|$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{x\left[\sqrt{1-\left(\frac{a}{x}\right)^2}+1\right]}=0$$

§ 171. Wyrażenia nieokreślone postaci ∞^0, 0^0, 1^∞.

Chcemy obliczyć granicę A wyrażenia:

$$F(x)=f(x)^{g(x)}$$

przy x dążącem do a, przyczem zakładamy, że $f(x)$ ma tylko dodatnie wartości w jakiemś otoczeniu punktu a.

Jeżeli $f(x)\to\infty$, a $g(x)\to 0$, to mamy wyrażenie nieokreślone postaci ∞^0; jeżeli $f(x)\to 0$ i $g(x)\to 0$, to mamy wyrażenie nieokreślone postaci 0^0; jeżeli $f(x)\to 1$, a $g(x)\to\infty$, to mamy wyrażenie nieokreślone postaci 1^∞.

We wszystkich tych przypadkach badamy zamiast granicy A wyrażenia $f(x)^{g(x)}$ najpierw *granicę B logarytmu* tego wyrażenia, t. j. granicę funkcji:

$$\log F(x)=g(x)\cdot\log f(x)$$

Teraz mamy już do czynienia we wszystkich trzech przypadkach z wyrażeniem nieokreślonem postaci $0\cdot\infty$, z którem postępujemy w sposób poznany w § 169.

Jeżeli otrzymamy w ten sposób skończoną granicę B, to:

(a) $$\lim_{x\to a}\log F(x)=B$$

Ponieważ logarytm jest funkcją ciągłą, to można znak $\lim_{x\to a}$ przestawić ze znakiem logarytmu i otrzymujemy:

(a') $$\log\left(\lim_{x\to a}F(x)\right)=B$$

a stąd:

(b) $$A=\lim_{x\to a}F(x)=e^B$$

Gdybyśmy otrzymali na B granicę niewłaściwą $-\infty$, to z wzoru (a') wnioskowalibyśmy, że wtedy $\lim_{x\to a} F(x) = 0$, gdybyśmy zaś na B otrzymali $+\infty$, to z wzoru (a') wynikałoby, że $\lim_{x\to a} F(x) = +\infty$.

Jeżeli wyrażeniu $e^{-\infty}$ nadamy znaczenie 0, a wyrażeniu $e^{+\infty}$ znaczenie $+\infty$, to wzór (b) obejmuje wszystkie przypadki.

A więc przy szukaniu granicy A wyrażeń nieokreślonych postaci ∞^0, 0^0, 1^∞ postępujemy w następujący sposób: *obliczamy granicę B logarytmu danego wyrażenia; potęgując zasadę e przez znalezioną granicę B, otrzymujemy żądaną granicę A.*

Przykłady.

1) Znaleźć granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$. Obliczamy w tym celu ogólniej granicę funkcji:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{2}{x}} = A$$

Jest to wyrażenie typu ∞^0. Zamiast tego obliczamy najpierw:

$$B = \lim_{x\to+\infty} \log x^{-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{2}{x}\log x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\log x}{x}$$

Teraz już mamy typ $\frac{\infty}{\infty}$, a więc stosujemy regułę Hospitala i otrzymujemy:

$$B = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x}}{1} = 0$$

Wobec tego:

$$A = e^0 = 1$$

A więc tę samą granicę otrzymamy, gdy x dąży do $+\infty$, przebiegając tylko liczby całkowite. To dowodzi, że:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$$

2) Obliczyć:

$$A = \lim_{0<x\to 0} x^{\frac{3}{2+\log x}}$$

Jest to wyrażenie typu 0^0. Logarytmujemy i otrzymujemy:

$$B = \lim_{0<x\to 0} \frac{3\log x}{2+\log x} = \lim_{0<x\to 0} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}} = 3$$

a więc:

$$A = e^B$$

3) Obliczyć granicę:

$$A = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

Gdy x dąży do $\frac{\pi}{4}$, to $\operatorname{tg} x$ dąży do 1, a $\operatorname{tg} 2x$ do ∞, zatem mamy tu do czynienia z wyrażeniem nieokreślonem postaci 1^∞.

Obliczmy najpierw granicę logarytmu badanego wyrażenia, t. j.:

$$B = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} 2x \cdot \log \operatorname{tg} x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\log \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$$

Teraz już mamy wyrażenie typu $\frac{\infty}{\infty}$. Zatem:

$$B = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{\sin^2 2x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (-\sin 2x) = -1$$

Więc:

$$A = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Niechaj czytelnik dla wprawy stwierdzi prawdziwość następujących wzorów:

$$\lim_{0 < x \to 0} x^x = 1 \quad \text{(typ: } 0^0\text{)}; \qquad \lim_{x \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{(typ: } \infty^0\text{)};$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{(typ: } 1^\infty\text{)}; \qquad \lim_{x \to 0} \sqrt[x]{\frac{a^x + b^x}{2}} = \sqrt{ab} \quad \text{(typ: } 1^\infty\text{)}.$$

§ 172. Uwagi o stosowalności reguły Hospitala.

Jakkolwiek reguła Hospitala okazuje się nadzwyczaj pożyteczną przy obliczaniu granic wyrażeń nieokreślonych, to jednak nie zawsze jest ona dogodna a czasem nawet wcale nie prowadzi do celu. Widzieliśmy to w przykładach: 4 z § 168 i 3 z § 170; wtedy dogodniej jest używać innych przekształceń.

Istnieją ponadto i takie przykłady, do których nie można stosować reguły Hospitala ze względów zasadniczych, t. j. dlatego, że nie spełniają się założenia, potrzebne do jej stosowalności.

Przykłady.

1) Tak np. spróbujmy zastosować tę regułę do wyznaczenia granicy:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - \sin x}{x}$$

Ilorazem pochodnych jest tu: $1 - \cos x$. To wyrażenie nie dąży do żadnej granicy, gdy $x \to \infty$, ponieważ $\cos x$ oscyluje nieskończenie wiele razy pomiędzy -1 a $+1$. Bylibyśmy więc skłonni mniemać, że i pierwotne wyrażenie nie dąży do granicy. Tymczasem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)$$

Gdy $x \to \infty$, to $\frac{\sin x}{x} \to 0$, albowiem bezwzględna wartość licznika nie przekracza stałej liczby 1 a mianownik dąży do ∞. A więc:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1$$

Tutaj nie można było stosować reguły. Hospitala, ponieważ nie spełnia się założenie, że ma *istnieć* granica wyrażenia $f'(x) : g'(x)$. Zwróciliśmy na to wyraźnie uwagę już na str. 502 w § 165 w uwadze.

2) Podobnie ma się rzecz z granicą:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

przyczem licznikowi dajemy dla $x = 0$ wartość 0.

Ilorazem pochodnych jest tu:

$$\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

Ten iloraz nie dąży do żadnej granicy, gdy x dąży do zera, albowiem licznik oscyluje wtedy nieskończenie wiele razy między -1 a $+1$ $\left(\text{wskutek obecności dodajnika } -\cos\frac{1}{x}\right)$. Nie spełnia się więc założenie potrzebne do stosowalności reguły Hospitala. Natomiast okażemy inną drogą w następnym paragrafie, że badane wyrażenie posiada granicę 0, gdy x dąży do zera.

§ 173. Uproszczona reguła Hospitala.

Przy dowodzie reguły Hospitala nie czyniliśmy żadnego założenia o pochodnych w samym punkcie $x = a$, dla którego badamy granicę. Jeżeli te pochodne istnieją w punkcie $x = a$, a pochodna mianownika jest w tym punkcie różna od zera, to można obliczyć granicę przy pomocy prostszej reguły, którą nazwiemy *uproszczoną regułą Hospitala*. Wtedy mianowicie granica ilorazu równa się wprost ilorazowi pochodnych w miejscu $x = a$.

Dowód. Założenia są:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = g(a) = 0$$

a ponadto istnieją $f'(a)$ i $g'(a)$ a $g'(a) \neq 0$.

Jeżeli np. $g'(a) > 0$, to funkcja $g(x)$ jest rosnąca w punkcie $x = a$ (por. § 101, 6) a więc istnieje takie otoczenie punktu a, w którem $g(x)$ nie staje się już zerem. Weźmyż punkty $x = a + h$ z tego otoczenia, to $g(a + h) \neq 0$, a więc dla tych punktów możemy utworzyć iloraz:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)}$$

Ponieważ $f(a) = g(a) = 0$, przeto przez odjęcie $f(a)$ w liczniku i $g(a)$ w mianowniku nie zmieniła się wartość tego ułamka. Chcąc zbadać granicę tego wyrażenia, gdy $x \to a$ czyli gdy $h \to 0$, podzielimy przedtem licznik i mianownik prawej strony przez h. Otrzymamy zatem:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\dfrac{g(a+h) - g(a)}{h}} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Zupełnie tak samo rozumuje się, gdy $g'(a) < 0$.

Udowodniliśmy zatem prawdziwość następującej *uproszczonej* reguły Hospitala.

Jeżeli dwie funkcje $f(x)$, $g(x)$ przyjmują w punkcie a wartość 0 i jeżeli istnieją ich pierwsze pochodne w tym punkcie, a pochodna $g'(a)$ jest różna od zera, to granica ilorazu tych funkcyj równa się ilorazowi ich pochodnych w tym punkcie, a mianowicie:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{174}$$

Używając wzoru Taylora, można rozszerzyć tę regułę także na wyższe pochodne, wrazie gdy $f'(a) = 0$ i $g'(a) = 0$.

Jakkolwiek ta reguła jest prostsza i wymaga prostszych założeń, aniżeli nieuproszczona reguła Hospitala, to jednak zakres jej stosowalności jest dość ograniczony (np. nie obejmuje ona przypadków, gdy $x \to +\infty$ lub $x \to -\infty$) i prowadzi ona zwykle do rachunków bardziej skomplikowanych, zwłaszcza gdy w grę wchodzą wyższe pochodne: trzeba je bowiem zawsze dokładnie wyliczać, *nie upraszczając* licznika z mianownikiem. Pomimo to może być ona w niektórych przypadkach przydatniejszą, aniżeli pierwotna reguła.

Tak np. zagadnienie 2) z poprzedniego paragrafu, którego nie można było rozwiązać przy pomocy nieuproszczonej reguły Hospitala, możemy teraz łatwo rozwiązać. I tak chcemy znaleźć:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

Obliczamy pochodną licznika w *punkcie* $x = 0$. Rachunek ten wykonaliśmy już w § 92 i otrzymaliśmy na tę pochodną wartość: $f'(0) = 0$. Pochodna mianownika ma w punkcie $x = 0$ wartość $g'(0) = \cos 0 = 1$, a zatem według wzoru (174) otrzymujemy:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{1} = 0$$

ROZDZIAŁ XV.

Zastosowanie rachunku różniczkowego do krzywych płaskich.

§ 174. Równania stycznej i normalnej. Cosinusy kierunkowe.

Poznaliśmy już w poprzednich rozdziałach niektóre najprostsze a zarazem najbardziej zasadnicze zastosowania rachunku różniczkowego do geometrji linij płaskich. I tak już przy wprowadzeniu definicji pochodnej poznaliśmy ścisły związek pochodnej ze *styczną* (por. § 64); widzieliśmy mianowicie, że *spadek stycznej*, nieprostopadłej do osi x-ów, jest równy wartości pochodnej w badanym punkcie (por. § 64, wzór 4). Na tej podstawie mogliśmy podać *równanie stycznej* i *normalnej* w każdym punkcie, w którym istnieje pochodna (por. § 64, wzory 5 i 6). Przy pomocy pochodnej wyprowadziliśmy wzory na rozmaite odcinki, mające zastosowanie przy dyskusji i konstrukcji linij krzywych, a mianowicie wzory na: *odcinek stycznej*, *normalnej*, *podstycznej* i *podnormalnej* (por. § 64, wzory 7—10). Ze znaku pierwszej pochodnej wnioskowaliśmy o *wznoszeniu się* i opadaniu linij (por. § 101, 3—7). Wreszcie przy pomocy pochodnych badaliśmy *najwyższe i najniższe* punkty linij (§ 144 i nast.). W tym rozdziale omówimy szereg dalszych zastosowań rachunku różniczkowego do badania rozmaitych innych własności linij krzywych, jak np. wypukłości i wklęsłości, krzywizny i t. p. Te wszystkie zastosowania analizy wyższej do geometrji tworzą osobny dział matematyki, zwany *geometrją różniczkową*.

Rozważania nasze rozpoczniemy od dokładniejszego omówienia stycznej, normalnej i ich zastosowań.

Równanie linij podajemy albo w formie wyraźnej:

$$y = f(x)$$

albo w formie parametrowej:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

albo w formie uwikłanej:

$$f(x, y) = 0$$

Rzadziej używa się formy biegunowej:

$$r = f(\varphi)$$

Tę formę będziemy uważali za specjalny przypadek formy parametrowej, a mianowicie, korzystając z wzorów na zamianę spółrzędnych biegunowych na prostokątne: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, napiszemy:

$$x = f(\varphi)\cos\varphi, \qquad y = f(\varphi)\sin\varphi$$

a to jest widocznie parametrowem przedstawieniem danej linji.

Spadek stycznej wyrażamy wzorem:

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x) = y'(x)$$

dla formy wyraźnej. Stąd otrzymujemy dla formy parametrowej:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

wrazie, gdy $\varphi'(t) \neq 0$. Gdyby zaś było $\varphi'(t) = 0$, lecz $\psi'(t) \neq 0$, to uważalibyśmy x za funkcję y, a wtedy spadek badanej linji względem osi y-ów wyrażałby się wzorem:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

Punkty zaś, w których jest równocześnie $\varphi'(t) = 0$ i $\psi'(t) = 0$, nazywamy punktami *osobliwemi*. Narazie wyłączymy je z naszych rozważań.

Dla formy uwikłanej jest:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

wrazie, gdy $f_y(x,y) \neq 0$. Jeżeli zaś jest $f_y(x, y) = 0$, lecz $f_x(x, y) \neq 0$, to uważamy x za funkcję y, a wtedy spadek badanej linji względem osi y-ów wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{f_y(x, y)}{f_x(x, y)}$$

Punkty, w których jest równocześnie $f_y(x, y) = 0$ i $f_x(x, y) = 0$, nazywamy punktami *osobliwemi*. Temi punktami zajmiemy się później w osobnym ustępie, narazie zaś wyłączamy je z naszych rozważań.

Obok spadku, t. j. tangensa kąta nachylenia stycznej, używa się często t. zw. *cosinusów kierunkowych*, to znaczy *cosinusów* kąta α, jaki tworzy styczna z osią x-ów i kąta β, jaki tworzy styczna z osią y-ów Jest to dogodnem dlatego, że nawet dla $\alpha = 90°$ lub $\beta = 90°$ nie staje się cosinus nieskończonością (w przeciwieństwie do tangensa).

Ponieważ:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \quad \text{a} \quad \cos\beta = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

przeto z powyższych wzorów łatwo jest otrzymać cosinusy kierunkowe. (Jeżeli rozważamy kąty α tylko w granicach od 0^0 do 180^0, to dla kątów ostrych należy brać przed pierwiastkiem znak $+$, a dla rozwartych $-$, jednakże ten sam znak w obu wzorach). I tak:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+y'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{\pm\sqrt{1+y'^2}} \tag{175}$$

Dla parametrowego przedstawienia otrzymujemy w ten sposób symetryczne wzory:

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\pm\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{\psi'(t)}{\pm\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}} \tag{176}$$

Jeżeli dla pierwiastka przyjmujemy znak $+$, to to znaczy, że za dodatni kierunek stycznej uważamy ten, dla którego $\cos\alpha$ ma ten sam znak, co $\varphi'(t)$, a $\sin\alpha$ ten sam znak, co $\psi'(t)$. Jeżeliby ten kierunek stycznej był z jakichkolwiek względów niedogodny, to przyjmujemy dla pierwiastka znak: $-$, a przez to odwróci się kierunek stycznej (obróci się o 180^0 w płaszczyźnie XY).

Podobne wzory można wypisać dla formy uwikłanej.

Mając wzory na spadek stycznej przy rozmaitych sposobach przedstawiania linji, możemy już z łatwością otrzymać równania stycznej dla tych rozmaitych sposobów. Niechaj spółrzędnemi punktu styczności będą x_1, y_1. Dla *formy wyraźnej* otrzymujemy *równanie stycznej* w znanej nam już postaci:

$$\boxed{y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)} \tag{5}$$

w tej formie mieszczą się jednak tylko styczne nieprostopadłe do osi x-ów.

Dla formy parametrowej niechaj t_1 będzie tą wartością parametru, dla której $x = x_1$ $y = y_1$, to równanie stycznej ma postać:

$$y - y_1 = \frac{\psi'(t_1)}{\varphi'(t_1)}(x - x_1)$$

o ile $\varphi'(t_1) \neq 0$. Stąd otrzymujemy równoważne z tem *równanie stycznej*:

$$\boxed{(x - x_1)\psi'(t_1) - (y - y_1)\varphi'(t_1) = 0} \tag{177}$$

Gdyby zaś było $\varphi'(t_1) = 0$ lecz $\psi'(t_1) \neq 0$, to, uważając x za funkcję y, otrzymalibyśmy równanie stycznej w postaci:

$$x - x_1 = \frac{\varphi'(t_1)}{\psi'(t_1)}(y - y_1)$$

Po uwolnieniu od mianownika otrzymujemy to samo równanie, co poprzednio.

Stąd widzimy, że równanie (177) zawiera w sobie zarówno styczne nieprostopadłe do osi x-ów jak i styczne prostopadłe.

O ile $\varphi'(t_1)$ ani $\psi'(t_1)$ nie jest równe zeru, to możemy napisać równanie (177) w następującej, symetrycznej i łatwej do zapamiętania postaci:

$$\frac{x - x_1}{\varphi'(t_1)} = \frac{y - y_1}{\psi'(t_1)} \tag{178}$$

Postępując w podobny sposób *dla formy uwikłanej*, otrzymujemy *równanie stycznej* w następującej postaci:

$$(x - x_1)f_x(x_1, y_1) + (y - y_1)f_y(x_1, y_1) = 0 \tag{179}$$

Ta forma jest, podobnie jak forma (177), *ogólna*, to znaczy ujmuje wszystkie przypadki: zarówno styczne nieprostopadłe do osi jak i prostopadłe

Z tych równań przechodzimy do równań *normalnej*, zastępując spadek stycznej jego odwrotnością ze znakiem przeciwnym. W ten sposób otrzymujemy *równanie normalnej*

dla formy wyraźnej:

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1)}(x - x_1) \tag{6}$$

dla formy parametrowej:

$$(x - x_1)\varphi'(t_1) + (y - y_1)\psi'(t_1) = 0 \tag{180}$$

dla formy uwikłanej:

$$(x - x_1)f_y(x_1, y_1) - (y - y_1)f_x(x_1, y_1) = 0 \tag{181}$$

Uwagi. 1. Jeżeli na stycznej S (fig. 142) ustalimy jakiś kierunek jako dodatni (np. przez obranie znaku pierwiastka we wzorach 176), to dla normalnej N przyjmuje się jako dodatni ten kierunek, który jest odchylony od dodatniego kierunku S o kąt 90^0, liczony w tym samym kierunku od S, w jakim dodatni kierunek osi Y jest odchylony od dodatniego kierunku osi X, a więc np. na fig. 142 w kierunku przeciwnym do biegu wskazówki zegarowej. Chodzi tu o to, aby kąty $\sphericalangle YOX$ i $\sphericalangle NPS$ przechodziły na siebie przez wykonanie obrotu i przesunięcia w płaszczyźnie XY.

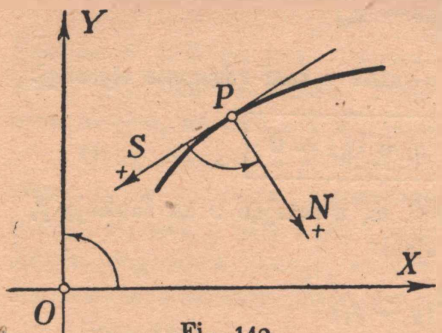


Fig. 142.

2. Styczną pojmowaliśmy dotychczas jako graniczne położenie siecznej. Można ją jednak określić także inaczej, a mianowicie biorąc pod uwagę odległość punktów

linji krzywej od prostych, przechodzących przez jeden jej punkt (x_1, y_1). Weźmy jakąkolwiek taką prostą p_1; gdy się posuwamy po linji krzywej z obu stron ku punktowi (x_1, y_1), to odległość tego punktu od prostej p_1 dąży oczywiście do zera. Jeżeli jednak istnieje taka prosta p, dla której ta odległość dąży do zera w stopniu wyższym aniżeli pierwszy, to tę prostą nazwiemy styczną w punkcie (x_1, y_1). Jeżeli np. funkcja $y = f(x)$ jest rozwijalna na wzór Taylora, to łatwo okazać, że prosta o żądanej własności ma właśnie równanie $y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1)$, a więc jest styczną także w pierwotnem znaczeniu. Z rozważań § 129 wynika to bezpośrednio.

W następnych paragrafach podamy niektóre zastosowania poznanych tu wzorów.

§ 175. Krzywa spodków.

Weźmy pod uwagę zbiór wszystkich stycznych dowolnej linji krzywej o równaniu:

(a) $$F(x, y) = 0$$

Z dowolnego punktu, np. z początku układu, wykreślamy prostopadłe do tych wszystkich stycznych (fig. 143). Punkty przecięcia się tych prostopadłych z odpowiedniemi stycznemi czyli *spodki* tych prostopadłych, leżące na stycznych, tworzą nową linję, zwaną *krzywą spodków*.

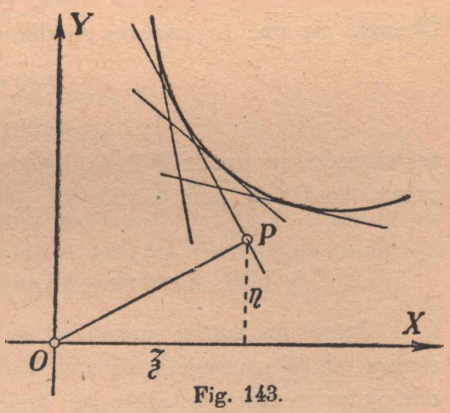


Fig. 143.

Chcemy zbudować równanie miejsca geometrycznego tych punktów. Punkty przecięcia się $P(\xi, \eta)$ prostopadłych ze stycznemi muszą spełniać następujące warunki.

Każdy taki punkt leży na stycznej, a więc spełnia równanie:

(b) $$(\xi - x)F_x + (\eta - y)F_y = 0$$

Ponadto każdy taki punkt leży na prostopadłej OP do odpowiedniej stycznej, musi więc spełniać równanie tej prostopadłej, przechodzącej przez O, t. j.:

$$\eta = a_1 \xi$$

Spadek

$$a_1 = -\frac{1}{a} = +\frac{F_y}{F_x}$$

a zatem:

(c) $$\eta F_x = \xi F_y$$

Muszą się więc spełniać warunki (a), (b) i (c). Z tych trzech warunków eliminujemy zmienne x i y i otrzymujemy związek pomiędzy pozostałemi zmiennemi ξ, η, t. j. jakieś równanie:

$$G(\xi, \eta) = 0$$

To jest właśnie równanie krzywej spodków.

Tak np. dla hiperboli równobocznej:

$$x^2 - y^2 - a^2 = 0$$

warunki (b) i (c) przyjmują postać:

$$\left.\begin{array}{l}(\xi - x)2x - (\eta - y)2y = 0 \\ \eta \cdot 2x = -\xi \cdot 2y\end{array}\right\} \text{ czyli } \begin{array}{l}\xi x - \eta y = x^2 - y^2 = a^2 \\ \eta x + \xi y = 0\end{array}$$

Stąd oblicza się x i y i wstawia się je w równanie hiperboli; po uporządkowaniu otrzymamy:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = a^2(\xi^2 - \eta^2)$$

Jest to linja 4-go stopnia, zwana *lemniskatą*. Zatem dla hiperboli równobocznej krzywa spodków ze względu na początek układu jest lemniskatą. Jeżeli wykreślamy prostopadłe nie z początku układu, lecz z dowolnego punktu $P(l, m)$, to trzeba tylko zastąpić trzeci warunek (c) warunkiem:

(c') $$(\eta - m)F_x = (\xi - l)F_y$$

Okazuje się np., że krzywą spodków dla koła:

$$x = a\cos t$$
$$y = a\sin t$$

ze względu na punkt $P(0, a)$, leżący na obwodzie tego koła, jest linja, zwana *kardioidą*, por. § 153, fig. 136).

§ 176. Krzywe równoległe do danej krzywej.

Jeżeli na każdej normalnej do danej krzywej odetniemy w obydwie strony od jej przecięcia się z tą linją równe odcinki d, to końce tych odcinków utworzą w ogólności dwie nowe krzywe, zwane *krzywemi równoległemi* do danej linji.

Chodzi o wyznaczenie równań tych linij równoległych.

Niechaj krzywa K będzie podana w formie parametrowej:

$$\bar{x} = \varphi(t), \quad \bar{y} = \psi(t)$$

Spółrzędne punktu P (fig. 144), leżącego na normalnej w odstępie d, znajdziemy z warunków, że rzuty odcinka AP na osie są równe różnicom spółrzędnych punktów końcowych tego odcinka, a mianowicie:

$$d\cos\gamma = x - \bar{x}, \quad d\cos\delta = y - \bar{y}$$

przyczem γ jest kątem normalnej z osią x a δ z osią y.

Ponieważ: $\beta = 90^0 - \alpha$, $\delta = 90^0 - \gamma$ a $\gamma = 90^0 + \alpha$, przeto:

$$x - \bar{x} = d \cdot \cos(90^0 + \alpha) = d \cdot \cos(180^0 - \beta) = -d \cdot \cos\beta$$
$$y - \bar{y} = d \cdot \cos(90^0 - \gamma) = d \cdot \cos(-\alpha) = d \cdot \cos\alpha$$

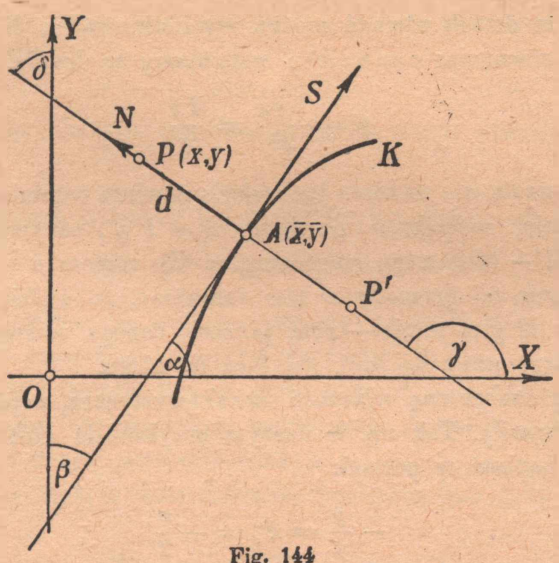


Fig. 144

a więc:

$$x = \varphi(t) - d \cdot \cos\beta$$
$$y = \psi(t) + d \cdot \cos\alpha$$

Podstawiamy tu za dostawy kierunkowe wartości z wzorów (176), raz ze znakami + a drugi raz (dla drugiej części normalnej) ze znakami — i otrzymujemy następujące wzory na dwie krzywe, równoległe do krzywej $\bar{x} = \varphi(t)$ i $\bar{y} = \psi(t)$:

$$(182)\quad \begin{cases} x = \varphi(t) - \dfrac{d \cdot \psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}} \\ y = \psi(t) + \dfrac{d \cdot \varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \varphi(t) + \dfrac{d \cdot \psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}} \\ y = \psi(t) - \dfrac{d \cdot \varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}} \end{cases}$$

Szczegółowy przykład, a mianowicie linje równoległe do elipsy, omówimy później, w § 189 (przykład 9).

§ 177. Równanie różniczkowe gromady linij.

Równanie:

$$y = cx^2$$

przedstawia gromadę parabol, jeżeli stałej c dajemy rozmaite wartości. Tę stałą c można usunąć przy pomocy spadku stycznej:

$$y' = 2cx$$

Z tych bowiem dwóch równań można wyeliminować c. Np. obliczamy c z pierwszego równania: $c = y : x^2$ i wstawiamy w drugie, to:

$$y' = \frac{2yx}{x^2} = \frac{2y}{x}$$

To nowe równanie nie zawiera już stałej c, zawiera natomiast pochodną y'. Takie równanie, zachodzące pomiędzy x, y i y', nazywamy — jak już wiemy z § 87 — *równaniem różniczkowem*. To równanie różniczkowe zastępuje równanie tej gromady w tem znaczeniu, że będzie można — jak zobaczymy w II-gim tomie — przy pomocy danego równania różniczkowego wyznaczyć gromadę linij, należącą do niego.

Zawiera ono pewną własność charakterystyczną, wspólną wszystkim linjom tej gromady. Tak np. w naszym przykładzie można to równanie różniczkowe napisać w postaci:

$$-\frac{y}{y'} = P_s = -\frac{x}{2}$$

a to znaczy, że *podstyczna* (por. § 64, wzór 7) w każdym punkcie każdej takiej paraboli równa się połowie odciętej tego punktu (por. przykłady (b) i (c) z § 64).

Podobnie dla gromady hiperbol równobocznych:

$$y = \frac{c}{x}$$

znajdujemy równanie różniczkowe:

$$y' = -\frac{y}{x}$$

(albowiem $y' = -\frac{c}{x^2}$, a $c = xy$).

Ogólnie zbiór wszystkich linij, których spółrzędne spełniają równanie:

$$F(x, y, c) = 0$$

nazywamy *gromadą jednoparametrową* linij.

Równanie różniczkowe tej gromady otrzymuje się, eliminując parametr c z równania tej gromady i z równania:

$$F_x(x, y, c) + y' \cdot F_y(x, y, c) = 0$$

które wynika z wzoru $y' = -\frac{F_x}{F_y}$ na pochodną funkcji uwikłanej.

Wynikiem tej eliminacji jest — w ogólności — związek:

$$f(x, y, y') = 0$$

zwany *równaniem różniczkowem pierwszego rzędu.*

Uwaga. Jednoparametrową gromadę linij możemy interpretować jako gromadę *warstwic* powierzchni:

$$F(x, y, z) = 0$$

otrzymanych przez przekroje zapomocą płaszczyzn $z = c$, równoległych do płaszczyzny XY.

Weźmy pod uwagę gromadę kół o stałym promieniu, np. $r = 4$:

(a) $$(x - p)^2 + (y - q)^2 - 16 = 0$$

To równanie przedstawia *dwuparametrową* gromadę linij, ponieważ występują tu dwa niezależne od siebie parametry p i q.

Także w tym przypadku możemy zastąpić to równanie takiem równaniem, w którem nie występują żadne stałe dowolne, natomiast występują pierwsza i druga pochodna funkcji y.

Tworzymy w tym celu *całkowitą* pochodną (por. § 107) tego równania t. j.

$$2(x - p) + 2(y - q)y' = 0$$

czyli:

(b) $$(x - p) + (y - q)y' = 0$$

Z tego równania tworzymy znowu całkowitą pochodną i otrzymujemy:

(c) $$1 + (y - q)y'' + y'^2 = 0 .$$

Z równań (a), (b), (c) eliminujemy $x - p$ i $y - q$ i otrzymujemy po łatwych rachunkach:

$$(1 + y'^2)^3 = 16 y''^2$$

Takie równanie różniczkowe nazywamy równaniem różniczkowem *drugiego rzędu*, albowiem zawiera ono *drugą pochodną*. Ogólną postacią równania różniczkowego drugiego rzędu jest:

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

To równanie podaje również pewną własność wspólną całej gromadzie linij, własność ta dotyczy jednak nie styczności, lecz — jak później zobaczymy — krzywizny.

W podobny sposób można dla n-parametrowej gromady linij:

$$F(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$$

utworzyć jej równanie różniczkowe n-tego rzędu, nie zawierające stałych $c_1, c_2 \ldots c_n$ a mianowicie:

$$f(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$$

Rozważaniami temi zajmiemy się dokładniej w II-gim tomie.

§ 178. Trajektorje gromady linij.

W wielu zagadnieniach fizyki i techniki trzeba do danej gromady linij dobrać drugą gromadę taką, aby każda linja drugiej gromady przecinała każdą linję pierwszej gromady pod kątem prostym, to znaczy, aby ich styczne w każdym punkcie tworzyły z sobą kąt prosty. Każdą linję, która przecina wszystkie linje jakiejś gromady pod kątem prostym, nazywamy *trajektorją ortogonalną* tej gromady. Chodzi więc o wyznaczenie wszystkich ortogonalnych trajektoryj danej gromady linij. Wybierając z każdej gromady szereg linij w pewnych odstępach, otrzymujemy na płaszczyźnie ortogonalną *siatkę* linij.

Takie siatki są potrzebne np. w kartografji, w terenoznawstwie (linje największego spadu), w hydrodynamice, w przewodnictwie cieplnem (izotermy), przy badaniu pola magnetycznego.

Otóż okażemy, że bardzo łatwo jest otrzymać równanie różniczkowe gromady trajektoryj, gdy podane jest zwyczajne równanie jakiejś gromady. I tak niechaj:

$$F(x, y, c) = 0 \tag{A}$$

będzie równaniem danej gromady linij. Spadek każdej z tych linij wyrażamy wzorem:

$$y'_k = -\frac{F_x(x, y, c)}{F_y(x, y, c)}$$

a zatem spadek linij prostopadłych wyrażamy wzorem:

$$y' = +\frac{F_y(x, y, c)}{F_x(x, y, c)} \tag{B}$$

Z równań (A) i (B) należy wyeliminować stałą c. W ten sposób otrzyma się związek:

$$g(x, y, y') = 0$$

który jest równaniem różniczkowem szukanej gromady.

Przykład. Wyznaczyć gromadę ortogonalnych trajektoryj dla krzywych (fig. 145) o równaniu:

$$y_k = ae^x$$

Stąd: $y'_k = ae^x$, a zatem dla trajektoryj spadek jest: $y' = -\frac{1}{ae^x}$. Wstawiamy tu a z pierwszego równania i otrzymujemy.

$$y' = -\frac{1}{y}$$

Zatem równaniem różniczkowem gromady trajektoryj jest:

$$yy' = -1$$

czyli:

$$2yy' = -2$$

To równanie różniczkowe możemy z łatwością rozwiązać, albowiem $2yy'$ jest pochodną funkcji y^2, a -2 jest pochodną funkcji $-2x$ lub najogólniej: $-2x+c$. Więc rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest jednoparametrowa gromada funkcyj:

$$y^2 = -2x + c$$

Jest to równanie parabol, położonych tak, jak na fig. 145.

Bardzo interesującą jest gromada linij drugiego stopnia, określona równaniem (por. fig. 146):

$$(c - e^2)x^2 + cy^2 = c(c - e^2)$$

Liczba e^2 jest tu obrana stale a parametr c może przebiegać wszystkie liczby nieujemne, a więc $c \geqq 0$; dla ujemnych wartości c żadna para (x, y) nie spełnia tego równania. Dla wartości $c = 0$ dostajemy $x^2 = 0$ czyli oś y-ów; dla $c = e^2$ otrzymujemy $y^2 = 0$ a więc oś x-ów; dla $c > e^2$ otrzymujemy elipsy a dla $0 < c < e^2$ hiperbole. Przez każdy punkt płaszczyzny, z wyjątkiem punktów $F_1(e, o)$ i $F_2(-e, o)$, przechodzą dwie linje, należące do badanej gromady, albowiem jest to równanie drugiego stopnia w zmiennej c, posiadające dwa rzeczywiste rozwiązania c_1 i c_2, które są równe tylko dla $x = \pm e$, $y = 0$. Przez punkty F_1, F_2 przechodzi zatem tylko jedna linja, należąca do danej gromady, a mianowicie oś x-ów (dla $c = e^2$).

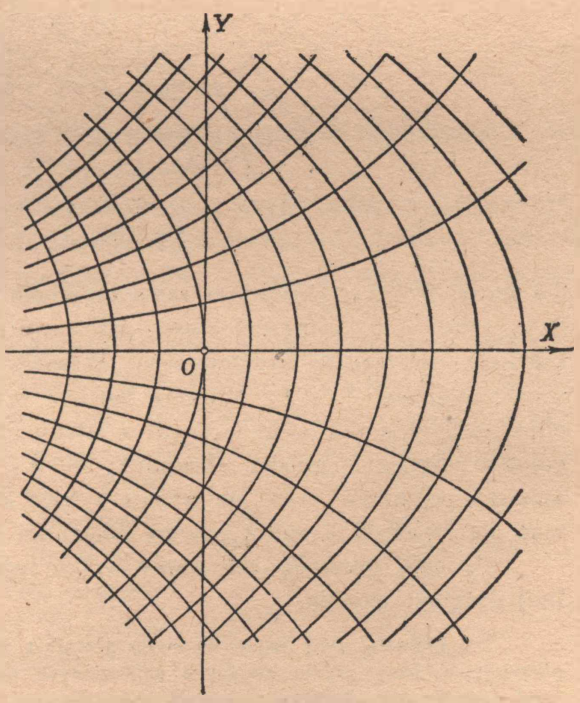


Fig. 145.

Otóż łatwo można stwierdzić, że równanie różniczkowe ortogonalnych trajektoryj tej gromady jest identyczne z równaniem różniczkowem tej gromady. Polega to na tem, że dana gromada rozpada się na dwie części: jedna, dla której $c \geqq e^2$, zawiera same elipsy i oś x-ów, druga zaś,

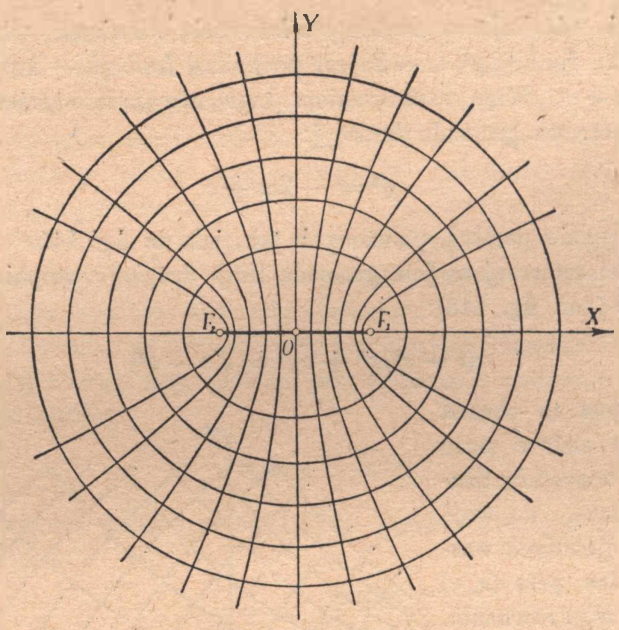


Fig. 146.

dla której $0 \leqq c < e^2$, zawiera same hiperbole i oś y-ów. Otóż wszystkie linje, należące do pierwszej części, przecinają pod kątem prostym wszystkie linje, należące do drugiej części. Wszystkie te elipsy i hiperbole mają wspólne *ogniska* F_1 i F_2. Możemy bowiem w przypadku $c > e^2$, t. j. dla elips, położyć $c - e^2 = b^2$ i $c = a^2$ a wtedy $a^2 - b^2 = e^2$ jest kwadratem połowy odległości ogniska od środka; dla $0 < c < e^2$, t. j. dla hiperbol, możemy położyć $b^2 = e^2 - c$, $a^2 = c$ a więc $a^2 + b^2 = e^2$, a to jest znowuż dla hiperboli kwadrat połowy odległości ogniska od środka.

Tę całą gromadę nazywamy wobec tego gromadą *spółogniskowych* linij drugiego stopnia.

Tej gromady linij użyto do wprowadzenia t. zw. *spółrzędnych eliptycznych* na płaszczyźnie. Przy użyciu zwykłych spółrzędnych prostokątnych x, y możemy sobie wyobrazić, że cała płaszczyzna została podzielona na kratki prostokątne zapomocą linij prostych równoległych do osi spółrzędnych: $x = c_1$ i $y = c_2$.

Spółrzędne prostokątne dowolnego punktu są zatem wyznaczone przez wybranie z tych dwóch gromad linij prostych odpowiednich linij: $x = c_1$ i $y = c_2$. Podobnie spółrzędne biegunowe są związane z podziałem płaszczyzny zapomocą pęku prostych $\varphi = c_1$ i gromady kół spółśrodkowych $r = c_2$ na krzywolinjowe czworokąty „prostokątne"; podanie spółrzędnych: r, φ jest równoważne z wybraniem z tych dwóch gro-

mad jednej prostej $\varphi = c_1$ i jednego koła $r = c_2$. Otóż podobnie można wyznaczyć każdy punkt płaszczyzny, uważając go za punkt przecięcia się jednej elipsy i jednej hiperboli. W tym celu napiszmy gromadę elips w postaci:

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - e^2} = 1 \qquad (\lambda > e^2)$$

a oś x-ów w postaci $y = 0$ (dla $\lambda = e^2$).

Gromadę hiperbol napiszmy w postaci:

$$\frac{x^2}{\mu} - \frac{y^2}{e^2 - \mu} = 1$$

przyczem $0 < \mu < e^2$, a oś y-ów w postaci $x = 0$ (dla $\mu = 0$).

Podając dwie liczby nieujemne: λ, μ, z których pierwsza spełnia warunek $\lambda \geqq e^2$, a druga $0 \leqq \mu < e^2$, mamy wyznaczone ściśle 4 lub 2 punkty płaszczyzny, a mianowicie 4 punkty przecięcia się odpowiedniej elipsy (lub osi x-ów) z hiperbolą (lub osią y-ów). Ograniczając się do jednej ćwiartki płaszczyzny, mamy przez podanie λ, μ wyznaczony zupełnie dokładnie jeden punkt. Otóż te liczby λ i μ nazywamy spółrzędnemi *eliptycznemi* danego punktu. Przejście od spółrzędnych prostokątnych do eliptycznych uskutecznia się, jak łatwo okazać, zapomocą dość prostych wzorów:

(183)
$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{\lambda\mu}{e^2} \\ y^2 = \dfrac{(\lambda - e^2)(e^2 - \mu)}{e^2} \end{cases}$$

Te spółrzędne eliptyczne znajdują zastosowanie w rozmaitych zagadnieniach z fizyki matematycznej.

Rozwiązanie równania różniczkowego gromady trajektoryj jest w ogólności niełatwe. W rozdziałach, poświęconych specjalnie równaniom różniczkowym (w II-gim tomie), podamy szereg ogólnych metod rozwiązywania takich równań.

Tutaj zajmiemy się jeszcze trajektorjami ogólniejszemi, a mianowicie *ukośnemi*, t. j. przecinającemi daną gromadę pod kątem ω, różnym od 90°. Za kąt linji T z daną linją K uważamy kąt, powstający przez obrót stycznej do K w tym kierunku, w którym trzeba obrócić dodatnią część osi x-ów o 90°, aby się nakryła z dodatnią częścią osi y-ów. Jeżeli spadek linji K, należącej do danej gromady, ma w jakimś punkcie wartość y'_k, to spadek y' trajektorji T, nachylonej pod kątem ω do K (por. fig. 147), wyrazimy wzorem:

(194)
$$y' = \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}(\alpha + \omega) = \frac{\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\omega} = \frac{y'_k + \operatorname{tg}\omega}{1 - y'_k \operatorname{tg}\omega}$$

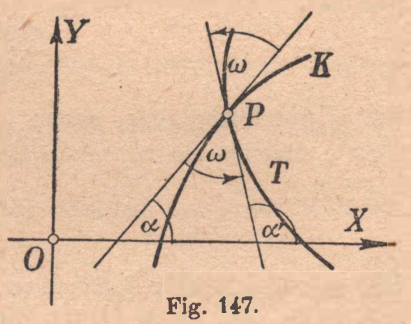


Fig. 147.

Wobec tego równanie różniczkowe gromady ukośnych trajektoryj otrzymamy przez eliminację parametru c z równań (np w formie wyraźnej):

$$y = f(x, c)$$

$$y' = \frac{f'(x, c) + \operatorname{tg} \omega}{1 - f'(x, c) \operatorname{tg} \omega}$$

Przykład. Dla pęku prostych:

$$y = ax$$

gromadą ortogonalnych trajektoryj jest, jak wiadomo, gromada kół spółśrodkowych o środku w wierzchołku tego pęku. Poszukajmy gromady trajektoryj ukośnych, przecinających ten pęk prostych pod kątem $\omega \neq 90^0$. Tutaj: $y'_x = a$, a zatem dla trajektoryj jest:

$$y' = \frac{a + \operatorname{tg} \omega}{1 - a \operatorname{tg} \omega}$$

Z pierwszego równania obliczamy: $a = \frac{y}{x}$; wstawiwszy to w drugie równanie, otrzymamy następujące równanie różniczkowe gromady ukośnych trajektoryj:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} + \operatorname{tg} \omega}{1 - \frac{y}{x} \operatorname{tg} \omega}$$

To równanie różniczkowe można rozwiązać w dość prosty sposób, wprowadzając zamiast spółrzędnych prostokątnych spółrzędne biegunowe, t. j. kładąc:

$$x = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = r(\varphi) \sin \varphi$$

W ten sposób otrzymujemy:

$$\frac{r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi}{r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \omega}$$

Stąd zaś:

$$\frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)} = \operatorname{ctg} \omega$$

Kąt ω jest liczbą stałą, zatem i $\operatorname{ctg} \omega = b$ jest liczbą stałą. Chodzi nam więc o rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\frac{r'(\varphi)}{r(\varphi)} = b$$

Jest to znane nam z § 87 równanie różniczkowe funkcyj wykładniczych (por. wzór (46) na str. 279). Widzieliśmy już, że gromada funkcyj:

$$r = ce^{b\varphi}$$

spełnia to równanie różniczkowe przy dowolnem c.

Otrzymaliśmy w ten sposób gromadę ukośnych trajektoryj pęku linij prostych, przedstawioną zapomocą spółrzędnych biegunowych.

Te linje nazywamy *spiralnemi logarytmicznemi* (por. fig. 156 w § 185).

§ 179. Wypukłość i wklęsłość łuków linji krzywej.

Jeżeli linja krzywa jest podana zapomocą równania $y = f(x)$, to, jak widzieliśmy (w § 101), ze znaku pierwszej pochodnej: $f'(x)$ można wnioskować o wznoszeniu się lub opadaniu tej linji. Podobne usługi oddaje znak drugiej pochodnej: $f''(x)$ przy badaniu *wypukłości i wklęsłości*. Intuicyjne pojęcie wypukłości ujmiemy w formę matematyczną. Tak np. łuk $\overset{\frown}{AB}$ linji l na fig. 148 jest zwrócony wypukłością w kierunku dodatniej osi y-ów; zamiast tego powiemy krótko, że ten łuk jest *wypukły* [1]). Każdy punkt P tego łuku leży powyżej odpowiedniego punktu P' cięciwy, która łączy dwa punkty C i D tego łuku, leżące po przeciwnych stronach punktu P. Wystarczy zawsze brać pod uwagę punkty C i D, należące do takich odciętych x_1 i x_2, dla których odcięta punktu P jest ich średnią arytmetyczną. To prowadzi nas do następującej definicji funkcji (lub linji) wypukłej w przedziale (a, b).

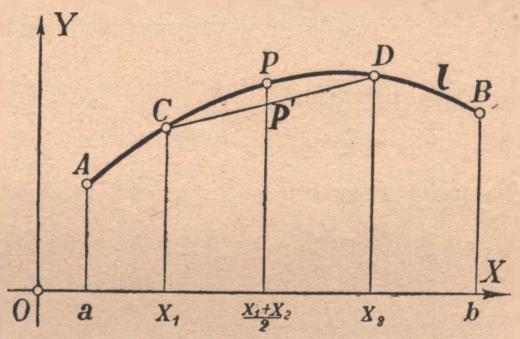


Fig. 148.

*Funkcję $f(x)$, a więc i linję o równaniu $y = f(x)$, nazywamy **wypukłą** w przedziale (a, b), jeżeli dla każdej pary punktów x_1 i x_2 z tego przedziału spełnia się nierówność:*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{185}$$

(tutaj $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ jest oczywiście rzędną punktu P, leżącego na krzywej, a średnia arytmetyczna $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ jest rzędną punktu P', leżącego na cięciwie).

W podobny sposób charakteryzujemy *wklęsłość* (zwróconą w dodatnim kierunku osi y-ów) nierównością:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \tag{186}$$

[1]) W nowszych pracach z teorji funkcyj używa się wręcz przeciwnej definicji wypukłości, t. j. za wypukły uważa się łuk, zwrócony wypukłością w kierunku ujemnych y-ów.

t. j. rzędna w punkcie środkowym każdego odcinka $\langle x_1, x_2 \rangle$ z przedziału (a, b) jest mniejsza od średniej arytmetycznej rzędnych w punktach skrajnych.

Okażemy, że, *jeżeli druga pochodna* $f''(x)$ *jest w całym przedziale* (a, b) *ujemna, to linja jest w tym przedziale wypukła* (t. j. zwrócona wypukłością w dodatnią stronę osi y-ów).

Dowód. Obierzmy dwa dowolne punkty x_1 i x_2 z przedziału (a, b), przyczem np. $x_2 > x_1$. Odległość ich nazwijmy: $x_2 - x_1 = 2h$, to $f(x_2) = f(x_1 + 2h)$, $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = f(x_1 + h)$, a h jest liczbą *dodatnią*.

Chcemy dowieść nierówności (185) czyli nierówności:

$$\text{(n)} \qquad \frac{f(x_1) + f(x_1 + 2h) - 2f(x_1 + h)}{2} < 0$$

Licznik możemy napisać także w postaci:

$$L(h) = f(x_1 + 2h) - f(x_1 + h) - [f(x_1 + h) - f(x_1)]$$

Na mocy twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy:

$$L(h) = hf'(x_1 + h + \vartheta h) - hf'(x_1 + \vartheta_1 h) = h[f'(x_1 + h + \vartheta h) - f'(x_1 + \vartheta_1 h)]$$

Ponieważ według założenia jest stale $f''(x) < 0$, przeto pierwsza pochodna jest funkcją monotonicznie malejącą w całym przedziale (a, b). Wobec tego jest:

$$f'(x_1 + h + \vartheta h) < f'(x_1 + \vartheta_1 h)$$

albowiem

$$x_1 + h + \vartheta h > x_1 + \vartheta_1 h$$

wskutek

$$0 < \vartheta_1 < 1$$

Zatem:

$$L(h) < 0$$

A więc nierówność (n) czyli (185) spełnia się dla każdej pary punktów x_1 i x_2 z przedziału (a, b).

Zupełnie podobnie dowodzi się, że, *gdy* $f''(x) > 0$ *w całym przedziale* (a, b), *to linja jest w tym przedziale wklęsła.*

Jeżeli druga pochodna jest ujemna w jakimś *punkcie* a, t. j. jeżeli $f''(a) < 0$, a wiemy ponadto, że jest *ciągła* w tym punkcie, to istnieje takie otoczenie punktu a, np. $\langle a - \delta, a + \delta \rangle$, w którem ta pochodna zachowuje swój znak, a więc wtedy w tem otoczeniu linja jest wypukła. W tym wypadku mówi się także krótko, że linja jest *wypukła w punkcie* a.

Uwaga. Gdybyśmy jednak nie założyli *ciągłości* funkcji $f''(x)$, to mogłaby się ona stawać w najbliższem otoczeniu punktu a ujemną lub zerem i wtedy mogłoby nie istnieć takie otoczenie, w którem się spełnia definicja wypukłości.

W podobny sposób określa się wklęsłość *w punkcie.*

W otoczeniu punktu, w którym linja jest wypukła, leży ona całkowicie po jednej stronie swej stycznej, należącej do tego punktu, a mianowicie rzędne wszystkich jej punktów z tego otoczenia są mniejsze od odpowiednich rzędnych stycznej.

Dowód. Zakładamy, że druga pochodna jest ciągła w tym punkcie $x = a$ i ma w nim wartość ujemną. Twierdzimy, że istnieje takie otoczenie tego punktu, w którem każda rzędna y linji krzywej jest mniejsza od odpowiedniej rzędnej $\bar{y}$ linji stycznej. W celu dowodu rozwijamy funkcję $y = f(x)$ w otoczeniu punktu $x = a$ na wzór Taylora, zatrzymując się w nim na drugiej pochodnej, a więc:

$$y = f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a + \vartheta h)$$

Równanie stycznej, przechodzącej przez punkt $x = a$, $y = f(a)$, ma postać:

$$\bar{y} = f(a) + f'(a) \cdot h$$

Stąd:

$$y - \bar{y} = \frac{h^2}{2} f''(a + \vartheta h)$$

Według założenia jest $f''(a) < 0$ a $f''(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie a. Wobec tego istnieje takie otoczenie punktu a, w którem także $f''(a + \vartheta h) < 0$. W tem otoczeniu jest więc stale:

$$y - \bar{y} < 0$$

czyli:

$$y < \bar{y}$$ c. b. d. o.

Takie samo twierdzenie odnosi się do punktów wklęsłości.

Uwaga. W niektórych podręcznikach przyjęto tę własność linji za definicję wypukłości (i wklęsłości), a mianowicie nazywa się linję wypukłą (lub wklęsłą) w jakimś punkcie, jeżeli istnieje takie jego otoczenie, w którem linja leży całkowicie po jednej stronie swej stycznej. Takie pojmowanie wypukłości i wklęsłości nie zgadza się jednak z intuicyjnem pojęciem wypukłości i wklęsłości.

Można bowiem zbudować taką linję, leżącą całkowicie po jednej stronie swej stycznej, która posiada nieskończenie wiele zanikających oscylacyj w otoczeniu badanego punktu (podobnie jak na fig. 123 z § 145; trzebaby tam tylko ograniczyć oscylacje od dołu nie osią x-ów lecz jakąś linją wklęsłą w punkcie 0), a więc zmienia w otoczeniu tego punktu nieskończenie wiele razy wypukłość na wklęsłość i odwrotnie. Takiego zaś punktu nie nazwiemy punktem wypukłości ani wklęsłości w intuicyjnem, potocznem pojmowaniu tej własności. Przy naszej definicji wypukłości udowodniona własność jest tylko koniecznym lecz niedostatecznym warunkiem wypukłości linji w punkcie.

Omówiliśmy dotychczas przypadki, gdy $f''(a) > 0$ i $f''(a) < 0$. W następnym paragrafie omówimy przypadek $f''(a) = 0$.

Osobnego zaś badania wymagają te punkty, w których druga pochodna nie istnieje lub istnieje, lecz nie jest funkcją ciągłą. Badanie to najdogodniej jest oprzeć wprost na definicji wypukłości i wklęsłości.

§ 180. Punkty przegięcia.

Punkt linji krzywej nazywamy *punktem przegięcia*, jeżeli krzywa przecina w tym punkcie styczną, należącą do niego, to znaczy, że (w otoczeniu tego punktu) przed tym punktem linja leży po jednej stronie stycznej a za nim po drugiej. Takim jest np. na fig. 124 z § 146 punkt *A*.

Weźmy pod uwagę linję o równaniu $y = f(x)$. Jeżeli druga pochodna jest ciągła w badanym punkcie $x = a$, to punkt przegięcia może istnieć tylko wtedy, gdy:

$$f''(a) = 0$$

Gdyby bowiem było $f''(a) > 0$ lub $f''(a) < 0$, to linja leżałaby w otoczeniu tego punktu całkowicie po jednej stronie swej stycznej, jak to widzieliśmy w poprzednim paragrafie. Stąd wynikają następujące *konieczne* warunki istnienia punktu przegięcia.

Linja o równaniu $y = f(x)$ może posiadać punkty przegięcia tylko dla tych wartości x, dla których druga pochodna jest równa zeru albo jest funkcją nieciągłą albo nie istnieje.

Chcąc więc wykryć punkty przegięcia, trzeba przedewszystkiem wyznaczyć pierwiastki równania:

$$f''(x) = 0 \tag{187}$$

a następnie punkty, w których druga pochodna jest nieciągła lub nieistnieje. W tych punktach mogą — lecz nie muszą — istnieć punkty przegięcia.

Chcąc wykryć *dostateczne* warunki na to, aby punkt $x = a$ był punktem przegięcia, zajmiemy się najpierw przypadkiem, gdy funkcja posiada w badanym punkcie pochodne wszystkich rzędów, przyczem nie wszystkie są zerami. Zbadajmy zachowanie się funkcji w otoczeniu punktu $x = a$, spełniającego warunek $f''(a) = 0$. W ten sposób uzupełnimy zarazem lukę, którą pozostawiliśmy przy dyskusji w poprzednim paragrafie. Chodzi nam o porównanie rzędnych danej linji z rzędnemi stycznej, należącej do punktu a. W tym celu rozwijamy $f(x)$ na wzór Taylora w otoczeniu tego punktu, zatrzymując w nim trzecią pochodną a mianowicie:

$$y = f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a+\vartheta h)$$

Równanie stycznej w punkcie a ma postać:

$$\bar{y} = f(a) + hf'(a)$$

Ponieważ w badanym punkcie jest $f''(a) = 0$, przeto różnicę rzędnych badanej linji i stycznej, należących do tej samej odciętej, możemy przedstawić wzorem:

$$y - \bar{y} = \frac{h^3}{3!} f'''(a + \vartheta h)$$

Jeżeli $f'''(a) > 0$, to wskutek ciągłości funkcji $f'''(x)$ istnieje takie otoczenie punktu a, w którem $f'''(x)$ zachowuje ten sam znak, a więc w tem otoczeniu jest także $f'''(a + \vartheta h) > 0$. A więc w tem otoczeniu jest $y < \bar{y}$ dla ujemnych h, a $y > \bar{y}$ dla dodatnich h. Punkty linji krzywej leżą więc przed punktem a poniżej stycznej a poza tym punktem powyżej, czyli punkt a jest wtedy punktem przegięcia. Podobnie ma się rzecz, gdy $f'''(a) < 0$. Jeżeli zaś oprócz $f''(a) = 0$ jest także $f'''(a) = 0$, lecz $f^{(4)}(a) \neq 0$, to posuwamy się w rozwinięciu Taylora dalej i otrzymujemy:

$$y - \bar{y} = \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(a + \vartheta_1 h)$$

Stąd wnioskujemy podobnie jak w § 179, że linja jest wtedy w badanym punkcie wypukła, gdy $f^{(4)}(a) < 0$, a wklęsła, gdy $f^{(4)}(a) > 0$, a więc punkt a nie jest wtedy punktem przegięcia. Jeżeli także $f^{(4)}(a) = 0$, to posuwamy się do dalszych pochodnych i jeżeli pierwsza nieznikająca pochodna ma rząd nieparzysty, to punkt a jest punktem przegięcia, a jeżeli ma rząd parzysty, to w punkcie a mamy wypukłość lub wklęsłość, a nie punkt przegięcia. Stąd otrzymujemy następujące twierdzenie, zawierające *dostateczne* warunki na to, aby punkt $x = a$ był punktem przegięcia (gdy $f(x)$ posiada wszystkie pochodne, przyczem nie wszystkie są zerami).

Jeżeli w jakimś punkcie **druga** *a ewentualnie i dalsze pochodne aż do* $(n-1)$*-szej włącznie równają się zeru, a n-ta pochodna jest różna od zera, to badany punkt jest punktem przegięcia, gdy n jest liczbą nieparzystą; jeżeli zaś n jest liczbą parzystą, to w badanym punkcie linja jest wypukła lub wklęsła zależnie od tego, czy ta n-ta pochodna jest liczbą ujemną czy też dodatnią.*

Punkty, w których $f''(a) = 0$, $f'''(a) = 0, \ldots f^{(2p-1)}(a) = 0$, ale $f^{(2p)}(a) \neq 0$, nazywamy punktami *undulacyjnemi*. Charakteryzują się one na oko tem, że linja krzywa jest w otoczeniu tych punktów silnie spłaszczona.

Osobnego badania wymagają te punkty, w których pochodne nie istnieją lub są nieciągłe lub są wszystkie zerami. Wtedy opieramy dyskusję wprost na definicji punktu przegięcia.

Z tych wszystkich rozważań widzimy, że badanie punktów przegięcia odbywa się podobnie, jak badanie extremów, jednakże nie samej funkcji, lecz jej pierwszej pochodnej.

Zwracamy uwagę jeszcze na jeden szczegół, w którym często błądzą początkujący, a mianowicie, że w punktach przegięcia pierwsza pochodna wcale nie musi być równa zeru (jak na fig. 124), lecz może mieć wartość dodatnią, ujemną a nawet może nie istnieć, jak np. w takich punktach przegięcia, w których styczna jest prostopadła do osi x-ów.

Przykłady. 1) Zbadać wklęsłość, wypukłość i punkty przegięcia linji, określonej równaniem:

$$y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 3x - 5$$

Rozpoczniemy badanie od wykrycia punktów przegięcia.

Ta funkcja posiada pochodne ciągłe wszystkich rzędów. Wystarczy więc zbadać te punkty, w których druga pochodna jest równa zeru.

Otóż:

$$y' = 4x^3 - 6x^2 - 24x - 3$$

$$y'' = 12x^2 - 12x - 24 = 0$$

czyli:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

a stąd:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1$$

Dla tych wartości badamy znaki trzeciej pochodnej:

$$y''' = 24x - 12$$

Otóż

$y'''(2) = 36 > 0$, a zatem dla $x_1 = 2$ badana linja ma punkt przegięcia

$y'''(-1) = -36 < 0$, „ „ „ $x_2 = -1$ „ „ „ „ „

Drugą pochodną możemy przedstawić w postaci:

$$y'' = 12(x - 2)(x + 1)$$

Stąd widać, że przybiera ona wartości ujemne dla $-1 < x < 2$, a poza tym przedziałem wartości dodatnie. A zatem badana linja jest zwrócona wypukłością w kierunku dodatniej osi y-ów w przedziale $(-1, 2)$ a poza tym przedziałem jest zwrócona wklęsłością do góry. Punkty przegięcia oddzielają miejsca wypukłości od miejsc wklęsłości. (Niechaj czytelnik sporządzi wykres tej funkcji, używając na osi y-ów jednostki 10 razy mniejszej aniżeli na osi x-ów)!

2) Wyznaczyć punkty przegięcia krzywej Gaussa, t. j. linji o równaniu:

$$y = ae^{-x^2}$$

Posiada ona wszystkie pochodne ciągłe. Punktami przegięcia mogą więc być tylko te punkty, dla których $y'' = 0$.

Otóż:

$$y' = -2axe^{-x^2}, \qquad y'' = -2ae^{-x^2} + 4ax^2e^{-x^2}$$

Równanie:

$$ae^{-x^2}(4x^2 - 2) = 0$$

spełnia się tylko dla

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dla tych punktów badamy znak y''', t. j. znak wyrażenia:

$$y''' = -2axe^{-x^2}(4x^2 - 2) + ae^{-x^2} \cdot 8x$$

Otóż przy dodatniem a jest:

$$y'''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = ae^{-\frac{1}{2}} \cdot 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$$

$$y'''\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = ae^{-\frac{1}{2}} \cdot 8 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} < 0$$

a więc w punktach o odciętych x_1, x_2 mamy istotnie punkty przegięcia. Łatwo stwierdzić, że przy dodatniem a linja jest wypukła pomiędzy x_1 i x_2 a wklęsła poza przedziałem $\langle x_1, x_2 \rangle$.

3) Prawo Robertsona (por. § 90) jest określone równaniem różniczkowem:

$$\frac{dy}{dt} = by(g - y)$$

Dla jakiej wartości funkcja $y = f(t)$ ma punkt przegięcia?

Trzeba wyznaczyć pierwiastki drugiej pochodnej, t. j. pierwiastki równania

$$\frac{d^2y}{dt^2} = [b(g - y) - by]\frac{dy}{dt} = 0$$

Otrzymujemy trzy wartości y a mianowicie z pierwszego czynnika $y_1 = \frac{1}{2}g$ a z drugiego $y_2 = 0$ i $y_3 = g$. Wartości y_2 i y_3 nie odpowiadają punktom przegięcia, albowiem — jak widzieliśmy w § 90 — funkcja y nie osiąga tych wartości dla żadnego skończonego t (a tylko dąży do 0, gdy $t \to -\infty$, a dąży do g, gdy $t \to \infty$). Natomiast wartość $y_1 = \frac{1}{2}g$ osiąga funkcja dla pewnego $t = T$. Łatwo się przekonać, że $y'''(T) = -\frac{1}{4}b^3g^3 < 0$, a więc istotnie dla $y_1 = \frac{1}{2}g$ mamy punkt przegięcia: przed tym punktem jest do góry zwrócona wklęsłość a za nim wypukłość (por. fig. 89 z § 90).

4) Sinusoida o równaniu:

$$y = \sin x$$

ma punkty przegięcia dla tych x, dla których:

$$y'' = -\sin x = 0$$

t. j. dla $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$ ogólnie dla $x = n\pi$.

W tych bowiem punktach jest: $y''' = -\cos x \neq 0$, a mianowicie dla $x = n\pi$ otrzymujemy $y'''(n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$.

5) Zbadać, czy linja określona równaniem:

$$y = (x-3)^4 + 2$$

posiada punkty przegięcia. Otrzymujemy kolejno: $y' = 4(x-3)^3$, $y'' = 12(x-3)^2$. Jedynym pierwiastkiem drugiej pochodnej jest $x = 3$.

Trzecia pochodna: $y''' = 24(x-3)$ jest równa zeru dla $x = 3$ a czwarta pochodna $y^{(4)} = 24$ jest stale *dodatnia*. To dowodzi, że linja jest wszędzie *wklęsła* (wklęsłością zwrócona w dodatnią stronę osi y-ów), a więc i w punkcie $x = 3$ mamy wklęsłość. Nie jest to zatem punkt przegięcia, lecz punkt *undulacyjny*: cała linja leży po jednej stronie stycznej, należącej do tego punktu.

6) Zbadać punkty przegięcia linji o równaniu:

$$y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3x - 1$$

Tutaj:

$$y' = \tfrac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}} + 3$$

$$y'' = \tfrac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x-2}}$$

Ta druga pochodna nie staje się równą zeru dla żadnego skończonego x. Nie należy stąd jednak wnosić, że badana linja nie posiada punktów przegięcia. Trzeba bowiem jeszcze zbadać bezpośrednio te punkty, w których y'' nie istnieje. Otóż takim punktem jest widocznie $x = 2$. Styczna w tym punkcie istnieje i ma spadek $y'(2) = 3$. Ponieważ $y(2) = 5$, przeto równanie stycznej w punkcie $x = 2$ ma postać:

$$\bar{y} - 5 = 3(x-2)$$

czyli:

$$\bar{y} = 3x - 1$$

Różnica pomiędzy rzędną linji krzywej a rzędną tej stycznej przedstawia się wzorem:

$$y - \bar{y} = \sqrt[3]{(x-2)^5}$$

Obierzmy jakąkolwiek dodatnią liczbę δ, to dla odciętych większych od $x = 2$ czyli dla $x = 2 + \delta$ otrzymamy:

$$y - \bar{y} = \sqrt[3]{\delta^5} > 0$$

Dla odciętych $x = 2 - \delta$ mniejszych od $x = 2$ otrzymujemy:

$$y - \bar{y} = -\sqrt[3]{\delta^5} < 0$$

A więc badana linja krzywa leży przed punktem styczności $x = 2$ poniżej stycznej a poza tym punktem powyżej. Stąd wynika, że w $x = 2$ jest punkt przegięcia.

7) Van der Waals podał następujący związek między prężnością p, temperaturą bezwzględną T i objętością właściwą v ciał płynnych:

$$p = -\frac{a}{v^2} + \frac{RT}{v - b}$$

Wartość $v = b$ jest w tym wzorze graniczną wartością, do której dąży objętość jednostki masy, gdy p dąży do nieskończoności. Zakłada się zatem, że $v > b$. Obierając stałą temperaturę T, otrzymamy izotermę. Zbadać, która izoterma posiada punkt przegięcia o stycznej równoległej do osi odciętych. Tworzymy w tym celu:

$$p' = \frac{2a}{v^3} - \frac{RT}{(v-b)^2}$$

$$p'' = -\frac{6a}{v^4} + \frac{2RT}{(v-b)^3}$$

Dla punktu przegięcia o żądanej własności ma być $p'' = p' = 0$ czyli:

$$\frac{2(v-b)^2}{v^3} = \frac{RT}{a} = \frac{3(v-b)^2}{v^4}$$

Stąd wynika:

$$2v = 3(v - b)$$

czyli:

$$v = 3b$$

Wtedy:

$$\frac{RT}{a} = \frac{2 \cdot 4b^2}{27b^3} = \frac{8}{27b}$$

a więc:

$$T = \frac{8a}{27bR}$$

Ta temperatura jest to znana z fizyki *temperatura krytyczna* T_k; odpowiadającą jej izotermę nazywamy izotermą krytyczną, a spółrzędne (v, p)

jej punktu przegięcia: $v_k = 3b$, $p_k = \frac{a}{27b^2}$ nazywamy objętością krytyczną i ciśnieniem krytycznem.

Wprowadźmy we wzór Van der Waals'a zamiast v, p, T t. zw. *zredukowane zmienne*: $x = \frac{v}{v_k}$, $y = \frac{p}{p_k}$, $z = \frac{T}{T_k}$; otrzymamy następujący wzór, wspólny dla wszystkich ciał płynnych:

$$y = -\frac{3}{x^2} + \frac{8z}{3x - 1}$$

Ten wzór jest bardzo dogodny do rozmaitych dyskusyj i wykresów. Tak np., badając tu y' i y'' przy stałem z, można okazać, że te izotermy dla temperatur wyższych od T_k nie posiadają extremów a dla niższych temperatur istnieje zawsze jedno maximum i jedno minimum.

Uwaga. Szczegółową dyskusję i wykresy tych linij można znaleźć w podręczniku E. Vessiot'a i P. Montel'a p. t. *Cours de mathématiques générales.* (4 wyd. Paris 1930. Tom I, str. 221 i nast.).

Szczegółowe omówienie prawa Van der Waals'a ze stanowiska fizykalnego znajduje się w II tomie podręcznika A. Witkowskiego p. t. *Zasady fizyki*

8) Zbadać punkty przegięcia cykloidy skróconej (por. § 19 d): Równania jej w formie parametrowej mają postać:

$$x = at - b \sin t$$
$$y = a - b \cos t$$

przyczem $0 < b < a$.

Do obliczenia pochodnych $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ i $\frac{d^3y}{dx^3}$ są potrzebne pochodne:

$$x'_t = a - b\cos t \qquad y'_t = b \sin t$$
$$x''_t = b \sin t \qquad y''_t = b \cos t$$
$$x'''_t = b \cos t \qquad y'''_t = -b \sin t$$

Według wzoru (61) z § 95 jest:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{x'^3_t} = \frac{(a - b\cos t)\, b \cos t - b \sin t \cdot b \sin t}{(a - b\cos t)^3}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ab\cos t - b^2}{(a - b\cos t)^3}$$

Ta pochodna istnieje dla wszystkich t, albowiem mianownik nie może się stać zerem (wskutek założenia: $b < a$). Zerowe miejsca tej drugiej pochodnej otrzymujemy z warunku:

$$ab\cos t - b^2 = 0$$

czyli:

$$\cos t = \frac{b}{a}$$

To równanie ma dwa pierwiastki t_1 i t_2, zawarte w przedziałach: $0 < t_1 < \pi$, $\pi < t_2 < 2\pi$ a prócz tego nieskończenie wiele pierwiastków postaci $t_1 + 2n\pi$ i $t_2 + 2n\pi$. Ponieważ dla innych pierwiastków wartości y powtarzają się perjodycznie, przeto wystarczy zbadać t_1 i t_2. Na trzecią pochodną funkcji, podanej w formie parametrowej, mamy wzór (por. § 95 wzór (63)):

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'_t(x'_t y'''_t - x'''_t y'_t) - 3x''_t(x'_t y''_t - x''_t y'_t)}{x'^5_t}$$

Dla t_1 i t_2 odpada druga część licznika i zostaje:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-ab\sin t}{(a - b\cos t)^4}$$

Dla $t = t_1$ jest $\cos t_1 = \frac{b}{a}$ a $\sin t_1 = +\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, ponieważ $0 < t_1 < \pi$.

Dla $t = t_2$ jest $\cos t_2 = \frac{b}{a}$ a $\sin t_2 = -\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, ponieważ $\pi < t_2 < 2\pi$.

Otrzymujemy zatem dla $t = t_1$:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-ab\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}{\left(a - \frac{b^2}{a}\right)^4} < 0$$

a dla $t = t_2$:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{+ab\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}{\left(a - \frac{b^2}{a}\right)^4} > 0$$

A więc dla $t = t_1$ i $t = t_2$ otrzymujemy punkty przegięcia. Przy wzrastaniu parametru o $2n\pi$ powtarzają się perjodycznie te same wartości y a więc otrzymamy nieskończenie wiele punktów przegięcia, a mianowicie dla:

$$\left.\begin{array}{l} t = t_1 + 2n\pi \\ \text{i} \quad t = t_2 + 2n\pi \end{array}\right\} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Można stwierdzić, że ani cykloida wydłużona ani cykloida zwyczajna nie posiadają żadnych punktów przegięcia.

§ 181. O styczności rozmaitych rzędów.

Już przy geometrycznej interpretacji wzoru Taylora (por. § 129) mówiliśmy o styczności rozmaitych rzędów.

Mówimy, że dwie linje o równaniach $y = f(x)$ i $\bar{y} = g(x)$ mają w jakimś punkcie $x = a$ styczność rzędu k, jeżeli w tym punkcie są spełnione następujące warunki:

$$(188)\qquad \begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \\ f''(a) = g''(a) \\ \cdots\cdots\cdots \\ f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) \\ f^{(k+1)}(a) \neq g^{(k+1)}(a) \end{cases}$$

W tym więc punkcie, wspólnym obu linjom, kolejne pochodne, aż do k-tej pochodnej włącznie, są równe a $(k+1)$-sze pochodne różne.

Załóżmy, że wszystkie pochodne, występujące w dalszych rozważaniach tego paragrafu, są *ciągłe* w badanym punkcie.

Jeżeli dwie linje mają w punkcie $x = a$ styczność rzędu k, to różnica odpowiadających sobie rzędnych obu linij dąży do zera w stopniu $k+1$, gdy x dąży do a.

Dowód. Rozwijamy różnicę $f(x) - g(x)$ tych rzędnych na wzór Taylora, zatrzymując się w rozwinięciu na $(k+1)$-szych pochodnych. Oznaczmy różnicę $x - a$ literą h, to rozwinięcie przyjmie postać:

$$f(x)-g(x)=f(a)-g(a)+h(f'(a)-g'(a))+\frac{h^2}{2!}(f''(a)-g''(a))+\ldots+\frac{h^k}{k!}(f^{(k)}(a)-g^{(k)}(a))+$$
$$+\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}(f^{(k+1)}(a+\vartheta h)-g^{(k+1)}(a+\vartheta_1 h))$$

Na podstawie warunków (188) redukuje się ten wzór na:

$$(I)\qquad y-\bar{y}=\frac{h^{k+1}}{(k+1)!}[f^{(k+1)}(a+\vartheta h)-g^{(k+1)}(a+\vartheta_1 h)]$$

Z tego wzoru widać, że różnica $y - \bar{y}$ dąży do zera w stopniu $k+1$ (por. § 42), gdy h dąży do zera, czyli gdy x dąży do a, albowiem:

$$\lim_{h\to 0}\frac{y-\bar{y}}{h^{k+1}}=\frac{f^{(k+1)}(a)-g^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}=A\neq 0$$

Ta granica ma wartość A różną od zera, ponieważ według ostatniego z warunków (188) pochodne rzędu $k+1$ są różne od siebie w punkcie a.

Zastosujmy to pojęcie styczności rozmaitych rzędów najpierw do styczności dowolnej linji o równaniu $y = f(x)$ z linją *prostą* $\bar{y} = mx + n$. Jasnem jest, że linja prosta styczna ma z badaną linją styczność rzędu pierwszego w tych wszystkich punktach, w których $f''(x) \neq 0$. Wtedy bowiem $y = \bar{y} = f(a)$, $y' = \bar{y}' = f'(a)$, a $\bar{y}'' = 0$ a więc jest różne od $y'' = f''(a)$. Natomiast w punktach *przegięcia* ma linja prosta styczna z badaną linją styczność rzędu 2-go lub 4-go, wogóle *parzystego* rzędu. W punktach *undulacyjnych* prosta styczna ma z daną krzywą styczność rzędu 3-go, 5-go, wogóle *nieparzystego*, nie mniejszego od 3. Wynika to

stąd, że dla linji prostej: $\bar{y} = mx + n$ wszystkie pochodne, począwszy od drugiej, są zerami dla wszystkich x, a dla badanej linji ciąg kilku kolejnych pochodnych, od drugiej począwszy, staje się zerem w punktach przegięcia i w punktach undulacyjnych.

Z tych rozważań widzimy, że linja prosta ma z linją krzywą w ogólności styczność rzędu pierwszego a tylko w niektórych wyjątkowych punktach może być styczność rzędu wyższego. Wynika to także stąd, że w równaniu linji prostej występują *dwie* stałe: m, n, a więc można je zawsze dobrać tak, że spełnią się *dwa* spośród warunków (188) a tylko w wyjątkowych wypadkach będą spełnione także dalsze warunki (188).

Chcąc uzyskać w dowolnym punkcie linji krzywej styczność rzędu 2-go, należy brać, zamiast prostej stycznej, jakąś linję krzywą o 3 stałych dowolnych, np. parabolę: $y = ax^2 + bx + c$ lu' koło: $(x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2 = 0$.

O wyznaczaniu parabol rozmaitych stopni, mających w danym punkcie linji $y = f(x)$ styczność rozmaitych rzędów z tą linją, mówiliśmy w § 129. Okazało się, że wielomian Taylora n-tego stopnia daje właśnie parabolę, która ma z daną krzywą styczność rzędu n-tego.

W następnym paragrafie zajmiemy się wyznaczeniem *koła*, które ma z daną linją styczność conajmniej 2-go rzędu.

§ 182. Koło krzywiznowe czyli koło ściśle styczne.

Weźmy pod uwagę dowolny punkt linji krzywej o równaniu $y = f(x)$, w którym istnieją pochodne y' i y'' a pochodna y'' jest różna od zera. W takim punkcie A istnieje cały pęk kół stycznych do danej krzywej, t. j. mających z tą krzywą l wspólną styczną s. Ich środki leżą na prostej n, normalnej do krzywej (por. fig. 149). Każdego z tych kół można użyć do aproksymacji danej krzywej w otoczeniu punktu A. Istnieje jednak jedno koło styczne, które najlepiej aproksymuje daną krzywą, a mianowicie koło, mające z tą linją styczność conajmniej *drugiego* rzędu.

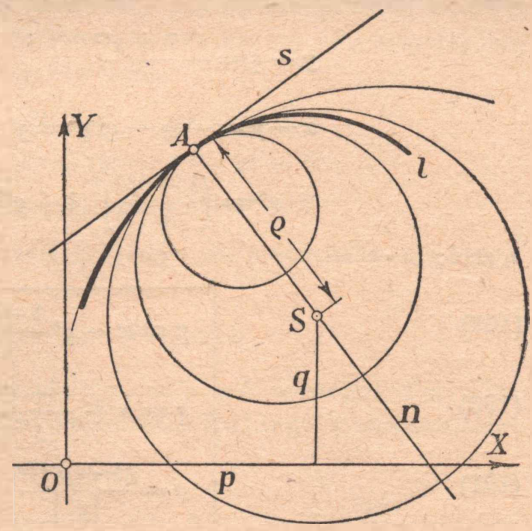


Fig. 149.

Wtedy bowiem różnica rzędnych y danej linji i rzędnych $\bar{y}$ koła dąży do zera conajmniej w drugim stopniu.

Aby koło:

$$(x-p)^2+(y-q)^2-\varrho^2=0$$

miało z linją:

$$y=f(x)$$

styczność rzędu conajmniej drugiego, muszą się spełniać *trzy* następujące warunki:

(w) $$y=\bar{y},\quad y'=\bar{y}',\quad y''=\bar{y}''$$

Ponieważ w równaniu koła występują *trzy* stałe dowolne: p, q, ϱ, przeto widocznem jest, że to zagadnienie może być rozwiązalne. Zamiast obliczać $\bar{y}$, $\bar{y}'$ i $\bar{y}''$ wyraźnie, otrzymamy je w formie uwikłanej, tworząc całkowite pochodne lewej strony równania koła według zmiennej x. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} 2(x-p)+2(\bar{y}-q)\,\bar{y}'&=0\\ 2+2\bar{y}'^2+2(\bar{y}-q)\bar{y}''&=0\end{aligned}$$

Uwzględniając warunki (w), otrzymamy układ 3 równań:

(z) $$\begin{cases} (x-p)^2+(y-q)^2-\varrho^2=0\\ x-p+(y-q)\,y'=0\\ 1+y'^2+(y-q)\,y''=0\end{cases}$$

Stąd obliczamy kolejno:

$$y-q=-\frac{1+y'^2}{y''}$$

$$x-p=-(y-q)\,y'=y'\,\frac{1+y'^2}{y''}$$

$$\varrho^2=\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right)^2(1+y'^2)=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

a stąd:

(189) $$p=x-y'\,\frac{1+y'^2}{y''}$$

(190) $$q=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

(191) $$\varrho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

Otrzymaliśmy zatem spółrzędne: p, q środka i promień ϱ koła, które ma z daną krzywą styczność conajmniej 2-go rzędu. Takie koło

nazywamy *kołem ściśle stycznem* lub *kołem krzywiznowem*; jego środek S nazywamy *środkiem krzywizny* danej krzywej w badanym punkcie A, a jego promień *promieniem krzywizny*. Widzimy, że istotnem założeniem dla istnienia koła krzywiznowego jest, aby pochodna y'' była w danym punkcie różna od zera. W punktach przegięcia i w punktach undulacyjnych niema koła krzywiznowego, natomiast w tych punktach istnieje — jak widzieliśmy — linja prosta, mająca styczność rzędu conajmniej drugiego, a mianowicie prosta styczna. W tych zatem wyjątkowych punktach linja prosta aproksymuje daną linję lepiej, aniżeli jakiekolwiek koło.

Uwaga. Gdy punkt, posuwając się po linji krzywej, dąży do punktu przegięcia to promień krzywizny dąży do niewłaściwej granicy ∞; podobnie zachowują się spółrzędne środka krzywizny.

Powyższe wzory, a szczególnie wzór (191), są nadzwyczaj ważne w geometrji różniczkowej, toteż należy je zapamiętać.

Do wzorów (189), (190) i (191) można dojść także zapomocą innych rozważań, nie opierając się na pojęciu styczności wyższego rzędu. Załóżmy, że pochodne $f'(x)$ i $f''(x)$ istnieją i są ciągłe nietylko w punkcie A o odciętej $x = x_1$, lecz także w jego otoczeniu i że $f''(x_1)$ jest różne od zera. Weźmy dowolne dwa punkty B i C z otoczenia punktu A, o odciętych $x = x_2$ i $x = x_3$. Przez trzy punkty A, B, C jest, jak wiadomo, zawsze wyznaczone koło, o ile one nie leżą na linji prostej: w naszym przypadku linja jest w otoczeniu punktu A stale wklęsła lub stale wypukła, a więc zawsze średni punkt leży poniżej lub powyżej cięciwy, łączącej dwa skrajne punkty. Ponieważ te trzy punkty linji krzywej leżą na kole, przeto spełniają się trzy równania:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} F(x_1) \equiv (x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 - \varrho^2 = 0 \\ F(x_2) \equiv (x_2 - p)^2 + (y_2 - q)^2 - \varrho^2 = 0 \\ F(x_3) \equiv (x_3 - p)^2 + (y_3 - q)^2 - \varrho^2 = 0 \end{cases}$$

Stosując do funkcji $F(x)$ twierdzenie Rollego dla przedziałów $\langle x_1, x_2 \rangle$ i $\langle x_2, x_3 \rangle$, otrzymujemy:

$$\text{(b)} \qquad F'(\xi_1) = 0 \quad \text{i} \quad F'(\xi_2) = 0$$

przyczem ξ_1 leży wewnątrz przedziału $\langle x_1, x_2 \rangle$, a ξ_2 wewnątrz $\langle x_2, x_3 \rangle$. Do funkcji $F'(x)$ stosujemy także twierdzenie Rollego i otrzymujemy:

$$\text{(c)} \qquad F''(\xi_3) = 0$$

przyczem ξ_3 leży wewnątrz przedziału $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle$. Niechaj teraz punkty A, B, C dążą do nakrycia się. Otóż jeżeli $x_2 \to x_1$ i $x_3 \to x_1$, to także $\xi_1 \to x_1$, $\xi_2 \to x_1$ i $\xi_3 \to x_1$, a koło, przechodzące przez A, B, C, zmienia się, dążąc do pewnego granicznego koła, które ma z daną linją krzywą

już tylko jeden punkt wspólny, a mianowicie $x = x_1$. Trzy warunki (a) zmieniają się wtedy na jeden warunek:

$$F(x_1) = 0$$

dwa warunki (b) zmieniają się na jeden warunek:

$$F'(x_1) = 0$$

a warunek (c) przechodzi na:

$$F''(x_1) = 0$$

Te trzy warunki mają tę samą postać, co warunki (z) na str. 548, a zatem otrzymamy z nich te same wzory (189), (190) i (191) dla punktu $x = x_1$. Okazało się więc, że koło krzywiznowe jest *granicznem kołem* zbioru kół, przechodzących przez 3 punkty linji krzywej, gdy te punkty dążą do nakrycia się.

Do tych wzorów można dojść także w trzeci, dość pouczający sposób. Weźmy pod uwagę *normalną* w punkcie A o odciętej x_1 i normalną w jakimś punkcie B o odciętej $x_1 + h$, wziętej z otoczenia x_1 (fig. 150). O ile linja jest np. wypukła w A i w tem otoczeniu, to te normalne przecinają się w jakimś punkcie S_1. Gdy zbliżamy punkt B do punktu A, to normalna przecina normalną punktu A w coraz to dalszych punktach $S_2, S_3, \ldots$ Otóż można nietrudno okazać, że te punkty przecięcia nie dążą do nieskończoności, jakby to się mogło zdawać na pierwszy rzut oka, lecz dążą do pewnego granicznego punktu S. Na spółrzędne: p, q tego granicznego punktu otrzymuje się właśnie wzory (189) i (190), a zatem ten punkt jest środkiem koła krzywiznowego. Pozostawiamy czytelnikowi dla ćwiczenia wykonanie tych nietrudnych rachunków.

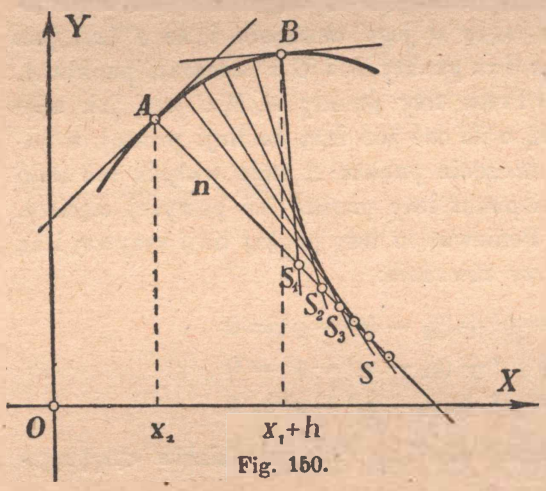


Fig. 150.

Koło krzywiznowe ma styczność rzędu conajmniej drugiego; tylko w pewnych wyjątkowych punktach może się zdarzyć, że styczność jest wyższego rzędu aniżeli 2; temi wyjątkowemi punktami zajmiemy się niebawem. Mogą one wystąpić tylko wtedy, gdy oprócz $y = \bar{y}$, $y' = \bar{y}'$, $y'' = \bar{y}''$ zachodzi także równość wyższych pochodnych. Załóżmy więc, że mamy

do czynienia z takim punktem, w którym już trzecie pochodne danej linji i koła są różne od siebie. Okażemy, że w takich zwyczajnych punktach koło krzywiznowe *przenika* daną linję (por. fig. 149), podobnie jak prosta styczna przenika daną linję w wyjątkowych punktach, a mianowicie w punktach przegięcia, to znaczy, że w otoczeniu wspólnego punktu dwie części łuku koła, schodzące się w tym punkcie, leżą po przeciwnych stronach tej linji.

Otóż wynika to odrazu z następującego ogólniejszego twierdzenia: *jeżeli dwie linje mają w jakimś punkcie styczność rzędu parzystego, to te dwie linje przenikają się w punkcie styczności; jeżeli zaś mają styczność rzędu nieparzystego, to w otoczeniu punktu styczności jedna linja leży całkowicie po jednej stronie drugiej linji.*

Dowód wynika odrazu z wzoru (I) z § 181. Jeżeli bowiem styczność jest rzędu parzystego k, to $k+1$ jest liczbą nieparzystą, a więc różnica $y-\bar{y}$ zmienia znak, gdy przechodzimy od ujemnych h do dodatnich. (Wyrażenie zawarte w klamrze jest różne od zera dla $h=0$, zatem wskutek ciągłości zachowuje stale pewien znak dla odpowiednio małych h). To zaś dowodzi, że, jeżeli przed punktem styczności jedna krzywa leży powyżej drugiej, to poza punktem styczności leży ona poniżej drugiej. Podobnie dowodzi się drugiej części powyższego twierdzenia.

Punkty, w których koło krzywiznowe ma styczność rzędu nieparzystego, wyższego od 2, nazywamy *wierzchołkami* linji krzywej. Aby wykryć te wierzchołki, należy do warunków styczności 2-go rzędu dołączyć jeszcze czwarty warunek $y''' = \bar{y}'''$.

Z równania koła otrzymujemy na trzecią pochodną $\bar{y}'''$ związek:

$$4\bar{y}'\,\bar{y}'' + 2\bar{y}'\,\bar{y}'' + 2(\bar{y}-q)\,\bar{y}''' = 0$$

Z warunków styczności rzędu conajmniej 3-go wynika, że za $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}'''$ można tu podstawić y, y', y'', y'''. Podstawiamy następnie za $y-q$ wartość z wzoru (190) i otrzymujemy po uporządkowaniu:

$$3y'\,y''^2 - (1+y'^2)\cdot y''' = 0 \tag{192}$$

To równanie służy do wyznaczenia wierzchołków linji krzywej. Po rozwiązaniu tego równania należy jeszcze przeprowadzić dyskusję, jakiego rzędu styczność występuje. Dla koła spełnia się to równanie identycznie, to znaczy dla wszystkich jego punktów. A więc koło ma tę własność, że każdy jego punkt jest wierzchołkiem. Udowodniono, że żadna inna linja nie ma tej własności.

Uwaga. Do tego samego równania (192) dochodzimy, tworząc warunek konieczny na istnienie extremum promienia krzywizny (w punktach regularnych i przy $y'' \neq 0$).

A mianowicie ten warunek ma postać:

$$\frac{d\varrho}{dx} = 0$$

Różniczkujemy wzór (191) i otrzymujemy po uporządkowaniu i uproszczeniu równanie (192). W tych punktach zatem mogą (lecz nie muszą) istnieć extrema promienia krzywizny.

Aproksymacja linji zapomocą koła ściśle stycznego oddaje bardzo ważne usługi przy ocenianiu stopnia zakrzywiania się tej linji czyli przy mierzeniu jej *krzywizny*. Stąd też pochodzi nazwa: „koło krzywiznowe". Związek tego koła z miarą krzywizny poznamy w następnym paragrafie.

§ 183. Krzywizna linij płaskich.

Nadzwyczaj ważnem zagadnieniem, zarówno w geometrji jak i w zastosowaniach matematyki, jest porównywanie rozmaitych linij pod względem ich stopnia zakrzywienia. Wiadomo np., jak ważną rolę gra w zagadnieniach mechaniki krzywizna toru. Wprowadzenie odpowiedniej miary, służącej do mierzenia stopnia zakrzywienia, oprzemy na następujących intuicyjnych rozważaniach. O dwóch łukach takich, jak łuki $\overset{\frown}{AB}$ i $\overset{\frown}{A'B'}$ na fig. 151, mówimy w potocznem życiu, że drugi jest silniej zakrzywiony aniżeli pierwszy, albowiem przy posuwaniu się po linji l' od A' do B' kierunek zmienia się szybciej, aniżeli przy posuwaniu się po linji l od A do B.

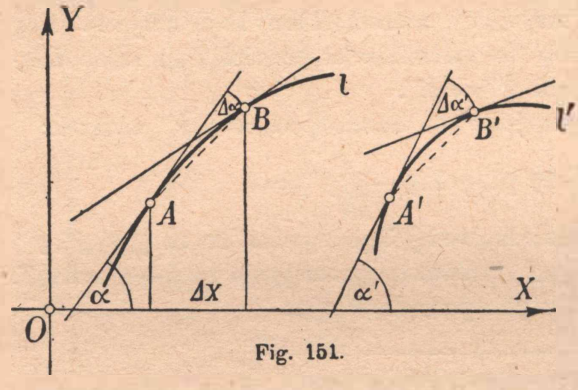


Fig. 151.

Ta zmiana kierunku uwydatnia się w tem, że styczne w końcowych punktach tych łuków tworzą z sobą jakiś kąt: $\Delta\alpha$ lub $\Delta\alpha'$. Otóż szybkość zmiany kąta α przy posuwaniu się wzdłuż łuku obrano za miarę stopnia krzywizny. Tę szybkość otrzymamy, dzieląc przyrost $\Delta\alpha$ kąta stycznej z osią x-ów przez drogę $\overset{\frown}{AB}$, t. j. przez łuk $\overset{\frown}{AB}$ i przechodząc do granicy, gdy punkt B dąży do A. (Gdybyśmy zamiast granicy tego stosunku brali pod uwagę wprost ten stosunek, to otrzymalibyśmy *przeciętną* miarę krzywizny; taka miara przeciętna zmieniałaby się w ogólności zależnie od drogi $\overset{\frown}{AB}$, por. podobne rozważania z § 62, dotyczące przeciętnej i prawdziwej szybkości wzrastania funkcji i z § 66, dotyczące przeciętnej i prawdziwej prędkości ruchu).

Zamiast tego jednak weźmiemy granicę stosunku $\Delta\alpha$ do *cięciwy* AB:

$$g = \lim_{AB \to 0} \frac{\Delta\alpha}{AB} \tag{193}$$

Uwaga. Okażemy później (w. II-gim tomie), że stosunek długości łuku do cięciwy dąży do 1, a więc:

$$g = \lim_{AB \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\overline{AB}} = \lim_{AB \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\overline{\overset{\frown}{AB}}} \cdot \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overline{AB}} = \lim_{\overset{\frown}{AB} \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\overline{\overset{\frown}{AB}}} \cdot 1$$

t. j., że można rozważać granicę stosunku przyrostu kąta do przyrostu łuku i dojdzie się do tej samej liczby g.

Bezwzględną wartość liczby g, określonej w ten sposób, nazywamy *miarą krzywizny* danej linji w punkcie A lub krótko *krzywizną* tej linji w badanym punkcie.

Krzywizna jest to zatem bezwzględna wartość granicy, do której dąży stosunek kąta, zawartego między styczną w danym punkcie a styczną w dowolnym punkcie z otoczenia tego punktu, do cięciwy, łączącej te punkty, gdy długość tej cięciwy dąży do zera. Oznaczmy krótko krzywiznę, t. j. $|g|$, literą k.

Wyprowadzimy wzór na krzywiznę linji o równaniu $y = f(x)$, w którem $f(x)$ posiada pierwszą i drugą pochodną. Przedewszystkiem zamiast $AB \to 0$ możemy brać $\Delta x \to 0$, albowiem, gdy $\Delta x \to 0$, to także $\Delta y \to 0$ (funkcja $f(x)$ jest bowiem ciągła!) a więc i cięciwa $AB = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ dąży do zera. Odwrotnie, gdy AB dąży do zera, to Δx musi też dążyć do zera. Otrzymujemy zatem zamiast (193) następujący wzór:

$$g = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}}{\pm\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} = \frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\pm\sqrt{1 + y'^2}}$$

Kąt stycznej z osią x-ów wyrażamy wzorem $\operatorname{tg}\alpha = y'$ czyli:

$$\alpha = \operatorname{arctg} y'$$

a stąd:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

A więc:

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} \tag{194}$$

Z tego *wzoru na krzywiznę* widzimy, porównując go z wzorem (191), że krzywizna jest równa odwrotności promienia krzywizny:

(195) $$\boxed{k = \frac{1}{\varrho}}$$

Wzór (194) można jednak stosować także do tych punktów, dla których ϱ dąży do nieskończoności, t. j. dla punktów, w których $y'' = 0$. W tych punktach krzywizna ma wartość 0. O ile używamy skrócenia $\frac{1}{\infty} = 0$, to możemy także wzór (195) utrzymać dla tych wyjątkowych punktów. Są to punkty przegięcia i punkty undulacyjne.

Dla każdego punktu linji prostej: $y = ax + b$ jest $y' = a$, a więc $y'' = 0$, a zatem linja prosta ma w każdym punkcie krzywiznę zero. Nasza definicja jest tu zatem w zupełnej zgodzie z intuicją. Inne zaś linje krzywe regularne mają krzywiznę równą zeru tylko w punktach przegięcia i w punktach undulacyjnych.

Gdybyśmy chcieli badać krzywiznę w takich punktach, w których styczna jest prostopadła do osi x-ów, to oczywiście nie można do tego używać wzoru (194), w którym występuje y' i y''. Wtedy jednak możemy zastosować to samo rozumowanie do funkcji odwrotnej $x = \varphi(y)$ i otrzymamy:

(194a) $$k = \frac{|x''_y|}{(1 + x'^2_y)^{3/2}}$$

Podstawiając we wzór (194) za y' i y'' wzory na pochodne funkcyj, przedstawionych w formie parametrowej lub uwikłanej (por. §§ 95, 116 i 117), otrzymuje się następujące dalsze wzory na krzywiznę:

(194b) $$k = \frac{|\varphi'\psi'' - \psi'\varphi''|}{(\varphi'^2 + \psi'^2)^{3/2}}$$

dla formy parametrowej,

(194c) $$k = \frac{|f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2|}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}$$

dla formy uwikłanej.

Jeżeli mamy podane równanie linji w spółrzędnych biegunowych, które są, jak wiemy, specjalnym przypadkiem formy parametrowej, to otrzymujemy na krzywiznę wzór:

(194d) $$k = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$$

(por. § 95, przykład 4).

§ 184. Ewoluta.

Do każdego punktu linji krzywej, w którym $f''(x)$ nie jest równe zeru, należy jakiś środek krzywizny, leżący na normalnej, wykreślonej w tym punkcie (fig. 152). Miejsce geometryczne środków krzywizny, należących do wszystkich punktów danej linji krzywej, nazywamy *ewolutą* lub *rozwiniętą* tej krzywej. Jeżeli zatem we wzorach (189) i (190) na spółrzędne środka krzywizny pojmujemy p i q jako zmienne, np. $p = x$, $q = \bar{y}$, a x_1 jako parametr, to równania:

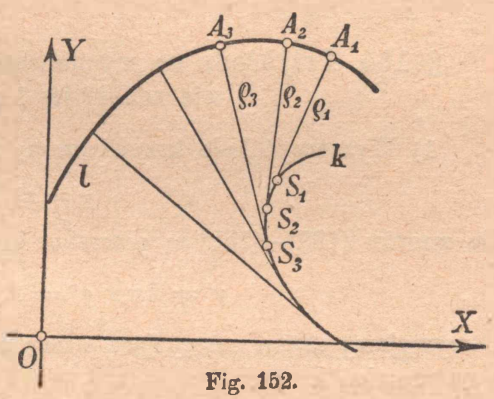


Fig. 152.

$$(196)\qquad \begin{cases} x = x_1 - y'(x_1)\dfrac{1+y'(x_1)^2}{y''(x_1)} = F(x_1) \\ \bar{y} = y(x_1) + \dfrac{1+y'(x_1)^2}{y''(x_1)} = G(x_1) \end{cases}$$

dają *parametrowe przedstawienie ewoluty* linji $y(x_1)$. Przez eliminację parametru x_1 z tych dwóch równań można otrzymać równanie ewoluty w formie uwikłanej: $\varphi(x, \bar{y}) = 0$. Dla koła redukuje się ewoluta do jednego punktu, mianowicie do środka tego koła.

Obliczmy spadek stycznej do ewoluty $\varphi(x, \bar{y}) = 0$, t. j.:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{G'(x_1)}{F'(x_1)} = \left[y' + \frac{y'' \cdot 2y'y'' - (1+y'^2)y'''}{y''^2}\right] : \left[1 - \frac{y''(1+y'^2)y'' + y' \cdot 2y'y''^2 - (1+y'^2)y'y'''}{y''^2}\right]$$

czyli po uporządkowaniu:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = -\frac{1}{y'}$$

A więc spadek stycznej do ewoluty równa się spadkowi normalnej danej krzywej. Ponieważ zaś styczna do ewoluty przechodzi ponadto przez jeden punkt normalnej, a mianowicie przez środek krzywizny, leżący na normalnej, przeto: *normalna danej krzywej jest styczną do ewoluty.*

Weźmy pod uwagę gromadę wszystkich stycznych do ewoluty k. Dana linja l przecina te wszystkie styczne pod kątem prostym, jest zatem *trajektorją ortogonalną* (por. § 178) gromady stycznych do ewoluty.

Każdą ortogonalną trajektorję wszystkich stycznych do dowolnej linji krzywej nazywamy *ewolwentą* czyli *rozwijającą* tej linji krzywej.

Te nazwy i związaną z tem konstrukcję ewolwenty wyjaśnimy później, gdy będziemy się zajmowali geometrycznemi zastosowaniami rachunku *całkowego* (w II-gim tomie).

§ 185. Przykłady na wyznaczenie koła krzywiznowego, wierzchołków i ewoluty.

1) Wyznaczyć koło krzywiznowe, wierzchołki i ewolutę paraboli:

$$y = x^2$$

Do wzorów (189)—(192) są potrzebne kolejne pochodne:

$$y' = 2x, \quad y'' = 2, \quad y''' = 0$$

Otrzymujemy zatem następujące wzory na spółrzędne środka krzywizny i na promień krzywizny:

$$p = x - \frac{2x(1+4x^2)}{2} = -4x^3$$

$$q = x^2 + \frac{1+4x^2}{2} = \tfrac{1}{2} + 3x^2$$

$$\varrho = \frac{(1+4x^2)^{3/2}}{2}$$

Tak np. w punkcie $x = 1$ jest:

$$S_1(-4, 3\tfrac{1}{2}), \quad \varrho_1 = \frac{\sqrt{125}}{2} = \tfrac{5}{2}\sqrt{5} \approx 5{\cdot}59$$

Równanie (192), służące do wyznaczania wierzchołków, redukuje się do:

$$3 \cdot 2x \cdot 4 = 0$$

a stąd: $x = 0$, a więc i $y = 0$.

Jedynym wierzchołkiem jest punkt $W(0, 0)$, t. j. początek układu. Promień krzywizny w wierzchołku ma wartość $\varrho = \frac{(1+0)^{3/2}}{2}$, t. j. $\varrho = \frac{1}{2}$, a środek krzywizny dla wierzchołka ma spółrzędne $S(0, \frac{1}{2})$ (por. fig. 153). Koła krzywiznowe o środkach S i S_1 nadają się bardzo dobrze do przybliżonej konstrukcji dość wielkich łuków paraboli.

Równania ewoluty paraboli mają w formie parametrowej postać:

$$x = -4x_1^3$$
$$y = \tfrac{1}{2} + 3x_1^2$$

Stąd eliminujemy x_1, a mianowicie z drugiego równania otrzymujemy:

$$x_1^2 = \frac{y - \frac{1}{2}}{3}$$

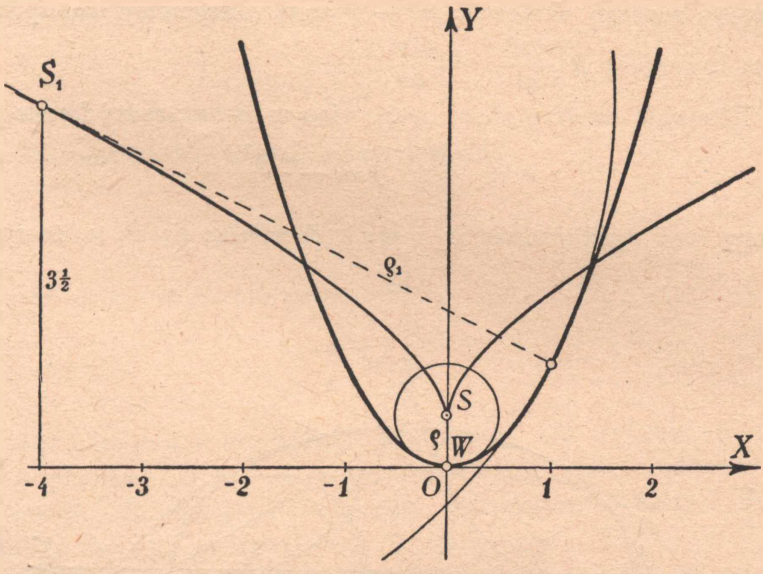


Fig. 153.

a wstawiając to w pierwsze równanie, otrzymujemy równanie ewoluty paraboli w postaci:

$$x^2 = 16\left(\frac{y-\frac{1}{2}}{3}\right)^3$$

Jest to t. zw. parabola półkubiczna czyli *parabola Neila* (najprostszą postacią równania takiej paraboli Neila jest $y^3 = Ax^2$).

2) Wyznaczyć ewolutę i promień krzywizny elipsy, danej w formie uwikłanej:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

Obliczamy najpierw y' i y''. Otóż:

$$y' = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2b^2x}{2a^2y} = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Stąd:

$$y'' = -\frac{a^2yb^2 - b^2xa^2y'}{a^4y^2} = -\frac{yb^2 + xb^2\cdot\frac{b^2x}{a^2y}}{a^2y^2}$$

czyli:

$$y'' = -\frac{a^2b^2y^2 + b^4x^2}{a^4y^3} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^2a^2b^2}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

Te wartości podstawiamy we wzory (189)—(191). Po redukcji otrzymamy:

$$\text{(w)}\quad p = \frac{(a^2-b^2)x^3}{a^4},\quad q = -\frac{(a^2-b^2)y^3}{b^4},\quad \varrho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}$$

Używając znanego skrócenia: $a^2 - b^2 = e^2$, otrzymamy na spółrzędne środka krzywizny $S\left(\frac{e^2x^3}{a^4}, -\frac{e^2y^3}{b^4}\right)$.

Równania ewoluty elipsy mają więc w parametrowej formie postać:

$$x = \frac{e^2x_1^3}{a^4}; \quad \bar{y} = -\frac{e^2y^3(x_1)}{b^4}$$

Możemy stąd wyeliminować x_1 i $y(x_1)$, powołując się na to, że spełniają

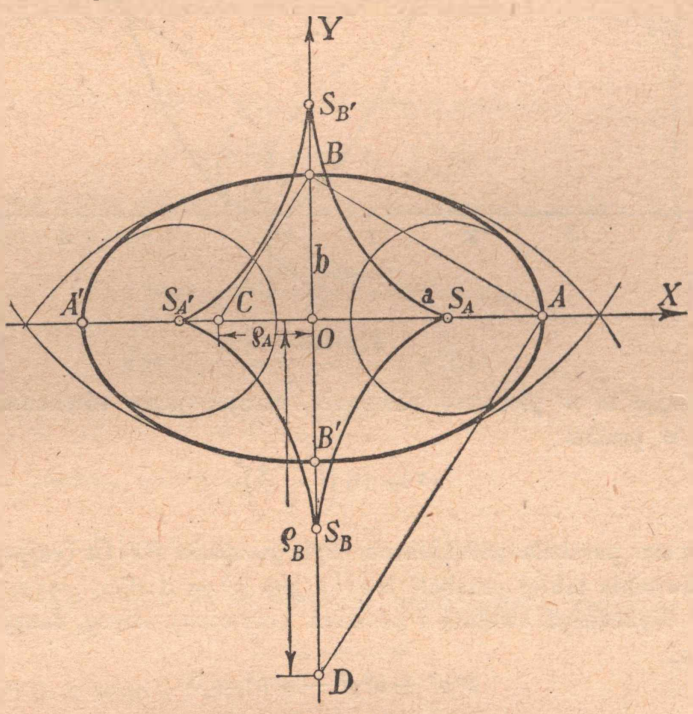


Fig. 154.

one równanie elipsy; i tak $x_1 = \left(\frac{a^4x}{e^2}\right)^{1/3}$ i $y(x_1) = \left(-\frac{b^4\bar{y}}{e^2}\right)^{1/3}$ wstawiamy w równanie elipsy i otrzymujemy:

$$b^2\left(\frac{a^4x}{e^2}\right)^{2/3} + a^2\left(\frac{b^4\bar{y}}{e^2}\right)^{2/3} = a^2b^2$$

czyli:

$$\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{b\bar{y}}{e^2}\right)^{2/3} = 1$$

Jest to równanie ewoluty elipsy, podane w formie uwikłanej. Linja ta posiada cztery ostrza (na osiach X i Y) (por. fig. 154).

Promienie krzywizny, należące do wierzchołków elipsy, można otrzymać przy pomocy bardzo prostej konstrukcji. I tak dla wierzchołka

$A(a, 0)$ otrzymujemy z wzoru (w):

$$\varrho_A = \frac{(b^4 a^2)^{3/2}}{b^4 a^4} = \frac{b^2}{a}$$

Podobnie dla wierzchołka $B(0, b)$ otrzymuje się:

$$\varrho_B = \frac{a^2}{b}$$

Napiszmy te wzory w formie proporcyj:

$$\varrho_A : b = b : a$$
$$\varrho_B : a = a : b$$

Stąd wynika następująca konstrukcja: do prostej AB wykreślamy prostopadłe w punktach B i A aż do przecięcia się z osiami spółrzędnych w punktach C i D. Stosując do trójkątów prostokątnych ABC i BAD twierdzenie o średniej geometrycznej, otrzymujemy:

$$OC = \varrho_A, \quad OD = \varrho_B$$

W ten sposób otrzymujemy cztery koła krzywiznowe, bardzo dogodne do aproksymacji elipsy w otoczeniu wierzchołków.

3) Dla cykloidy o równaniach:

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

wyznaczyć promień krzywizny i ewolutę (por. § 19, fig. 46).

Tutaj:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{dt}{dx} = \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-1}{2 \sin^2 \frac{t}{2} (1 - \cos t) a} = \frac{-1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}$$

Promień krzywizny ma wartość (por. wzór 194 b):

$$\varrho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|} = \frac{[a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t]^{3/2}}{|a(1 - \cos t) \cdot a \cos t - a \sin t \cdot a \sin t|}$$

Po redukcji otrzymujemy stąd:

$$\varrho = \left| 4a \sin \frac{t}{2} \right|$$

Ten wynik prowadzi do bardzo prostej konstrukcji promienia krzywizny (por. fig. 155). Obliczmy odcinek $AB = n$ normalnej od punktu A cykloidy do osi x-ów. Według wzoru (10) z § 64 jest:

$$n = |y|\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

a więc:

$$n = a|1 - \cos t|\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}$$

$$= 2a\sin^2\frac{t}{2}\sqrt{\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}}$$

$$= \frac{2a\sin^2\frac{t}{2}}{\left|\sin\frac{t}{2}\right|} = \left|2a\sin\frac{t}{2}\right|$$

A więc widzimy, że:

$$\varrho = 2n = 2 \cdot AB$$

To znaczy: promień krzywizny w dowolnym punkcie cykloidy jest równy podwójnemu odcinkowi normalnej.

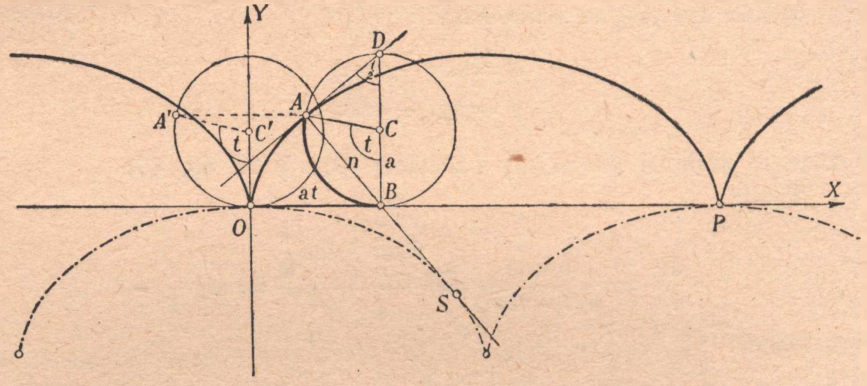


Fig. 155.

Na fig. 155 uwidoczniono także konstrukcję stycznej i normalnej w dowolnym punkcie cykloidy. Wiemy (z § 81, przykład 4), że normalna cykloidy w punkcie A przecina oś x-ów w tym punkcie, w którym koło, toczące się po osi x-ów, styka się z tą osią w momencie, gdy badany stały punkt tego koła przechodzi właśnie przez A. Trzeba zatem wykreślić przez punkt A koło o promieniu a, styczne do osi x-ów. (Tę konstrukcję najprościej wykonuje się przy pomocy t. zw. metody przesunięcia równoległego. Rysujemy koło o promieniu a, styczne do osi x-ów w dowolnym punkcie, np. w początku układu O. Z danego punktu A wykreślamy $AA' \parallel OX$. Punkt A', odpowiadający punktowi A, łączymy z środkiem C' tego koła a następnie przez punkt A wykreślamy $AC \parallel A'C'$ i odcinamy $AC = A'C'$. Punkt C, znaleziony w ten sposób,

jest środkiem szukanego koła). Prosta AB, łącząca punkt A z punktem styczności B tego koła, jest normalną cykloidy, należącą do A, a $AD \perp AB$ jest styczną.

Wstawiając wartości y' i y'' we wzory na spółrzędne środka krzywizny, otrzymujemy jako parametrowe równania ewoluty cykloidy:

$$x = a(t + \sin t)$$
$$y = -a(1 - \cos t)$$

Jest to znowu cykloida, przystająca do pierwotnej cykloidy, lecz przesunięta.

Jeżeli bowiem zmienimy parametr t na $\tau = t - \pi$, to:

$$x = a(\tau + \pi - \sin\tau)$$
$$y = -a(1 + \cos\tau)$$

a więc:

$$x - a\pi = a(\tau - \sin\tau)$$
$$y + 2a = a(1 - \cos\tau)$$

a to jest cykloida przystająca do pierwotnej, lecz przesunięta względem niej o $a\pi$ w kierunku osi x-ów, a o $-2a$ w kierunku osi y-ów (por. fig. 155).

4) Wyznaczyć promień krzywizny i ewolutę *spiralnej logarytmicznej*.

Jest to linja, której równanie wyraża się w spółrzędnych biegunowych w postaci (por. też § 178):

$$r = ae^{b\varphi}$$

Weźmy $a > 0$. Do obliczenia promienia krzywizny użyjemy tu wzoru (194 d), a mianowicie:

$$\varrho = \frac{1}{k} = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}$$

Wstawiamy tu:

$$r' = abe^{b\varphi}, \qquad r'' = ab^2e^{b\varphi}$$

Po uproszczeniu otrzymamy:

$$\varrho = ae^{b\varphi} \cdot \sqrt{1 + b^2} = r \cdot \sqrt{1 + b^2}$$

Stąd wynika bardzo prosta konstrukcja promienia krzywizny w dowolnym punkcie spiralnej logarytmicznej (por. fig. 156). Obliczmy najpierw kąt α, zawarty między promieniem $r = OA$ a normalną w punkcie A.

Widzimy z figury, że $\alpha = \varphi - \gamma$. Kąt γ, jako kąt normalnej z osią x-ów, oblicza się z wzoru: $\operatorname{tg}\gamma = -\frac{1}{y'}$. Pochodną zaś y' otrzymujemy z parametrowego przedstawienia:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad y' = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

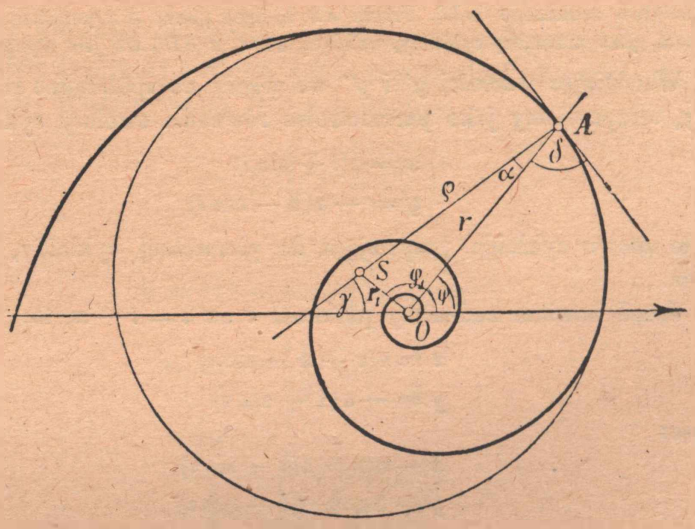


Fig. 156.

Tę wartość podstawiamy we wzór:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi - \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{y'}}{1 - \frac{1}{y'}\operatorname{tg}\varphi}$$

Po wykonaniu rachunków otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r'}{r}$$

Dla spiralnej logarytmicznej jest:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\,b\,e^{b\varphi}}{a\,e^{b\varphi}} = b$$

Uwaga. Stąd wynika, że kąt α, a więc i kąt δ, jest *stały*: to znaczy, że spiralna logarytmiczna przecina wszystkie promienie, wychodzące z bieguna O, pod *stałym kątem* δ.

Wobec tego:

$$\sqrt{1 + b^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

a więc promień krzywizny możemy wyrazić zapomocą wzoru:

$$\varrho = \frac{r}{\cos\alpha}$$

Stąd już widoczna jest konstrukcja promienia krzywizny: wykreślamy prostopadłą do promienia OA, przechodzącą przez biegun O; jej punkt przecięcia S z normalną jest środkiem krzywizny, a $SA = \varrho$.

Stąd możemy łatwo wyprowadzić biegunowe równanie *ewoluty*, nie używając ogólnych wzorów (189) i (190) na środek krzywizny. I tak spółrzędnemi biegunowemi środka krzywizny są:

$$r_1 = r\operatorname{tg}\alpha = ae^{b\varphi}b \quad \text{i} \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

a zatem:

$$r_1 = abe^{b\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

To jest równanie ewoluty w spółrzędnych biegunowych. Jest to znowu spiralna logarytmiczna, różniąca się od pierwotnej tylko spółczynnikiem i fazą. Dla $b = 1$ otrzymujemy tę samą spiralną, tylko faza jest przesunięta o $\frac{1}{2}\pi$.

§ 186. O punktach osobliwych.

Równanie linji na płaszczyźnie podajemy zwykle w jednej z trzech następujących form:

a) w formie wyraźnej, t. j. $y = F(x)$,

b) „ „ uwikłanej, t. j. $f(x, y) = 0$,

c) „ „ parametrowej, t. j. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Przy zastosowaniach rachunku różniczkowego do badania tych linij trzeba oczywiście zakładać, że funkcje $F(x)$, $f(x, y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ są w badanych punktach jednocześnie ciągłe i różniczkowalne. Zakładaliśmy nawet, że posiadają one pochodne ciągłe wszystkich rzędów. Zdawaćby się mogło, że zbiory punktów: (L), określone równaniami, spełniającemi te wszystkie warunki, są zupełnie regularnemi linjami. Tak jest istotnie dla formy wyraźnej $y = F(x)$. Inaczej się jednak rzecz przedstawia dla dwóch pozostałych sposobów podawania równań linij krzywych. Przy tych przedstawieniach mogą istnieć osobliwości, chociaż funkcje $f(x, y)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ są zupełnie regularne. I tak wiemy z nauki o funkcjach uwikłanych, że, jeżeli obydwie cząstkowe pochodne $f_x(x, y)$ i $f_y(x, y)$ istnieją, lecz są równe zeru w jakimś punkcie, spełniającym równanie $f(x, y) = 0$, to przez ten punkt nie musi przechodzić jedna ściśle oznaczona linja (może nie przechodzić żadna linja, może przechodzić jedna, ale mogą też przechodzić dwie lub więcej gałęzi).

Jeżeli f_x i f_y nie są obydwie równocześnie zerami, to istnieje jedna tylko linja, przechodząca przez badany punkt, a wzór:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \quad \text{lub} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{f_y}{f_x}$$

podaje spadek stycznej w tym punkcie. Dla punktów zaś, w których jest $f_x(x, y) = 0$ i $f_y(x, y) = 0$, wzór ten staje się nieoznaczonym.

Podobnie w przedstawieniu parametrowem spadek stycznej wyraziliśmy wzorem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Tu znowu otrzymujemy nieoznaczoność dla tych wartości t, dla których spełniają się równocześnie równania:

$$\varphi'(t) = 0 \quad \text{i} \quad \psi'(t) = 0$$

Gdyby tylko sam mianownik był równy zeru, to rozważalibyśmy funkcję odwrotną i otrzymalibyśmy dla niej spadek $\frac{dx}{dy} = 0$, a więc w zachowaniu się linji krzywej nie byłoby wtedy niczego szczególnego. Wyjątkowy sposób zachowania się może wystąpić tylko w tych punktach, w których równocześnie obydwie pochodne f_x i f_y lub $\varphi'(t)$ i $\psi'(t)$ są równe zeru.

Zajmiemy się tu tylko dyskusją formy uwikłanej. Punkty (x, y), których spółrzędne spełniają trzy warunki:

$$f(x, y) = 0, \quad f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0 \tag{197}$$

nazywamy *punktami osobliwemi* dla zbioru punktów (L), przedstawionego równaniem

$$f(x, y) = 0$$

Uwaga. Ta „osobliwość" polega na tem, że zwykłe wzory stają się tu nieprzydatne, jest to więc osobliwość arytmetycznej natury, pod względem zaś geometrycznym taki punkt może być nawet zupełnie regularnym punktem badanej linji. Tak się dzieje jednak tylko w wyjątkowych przypadkach; zwykle ta „arytmetyczna osobliwość" pociąga za sobą, jak to wnet zobaczymy, także geometryczne osobliwości.

Ponieważ mamy tu trzy równania o dwóch niewiadomych, przeto tylko w wyjątkowych przypadkach zdarza się, że te równania są równocześnie spełnione. Jest to t. zw. *problem nadmiernie wyznaczony.*

Badanie punktów osobliwych należy więc rozpocząć od rozwiązania układu dwóch równań: $f_x = 0$, $f_y = 0$ i stwierdzenia, czy otrzymane pary wartości $x = a$, $y = b$ i t. p. spełniają także równanie $f(x, y) = 0$, t. j. czy te punkty należą do badanego zbioru punktów. Jeżeli w takim punkcie osobliwym nie wszystkie pochodne drugiego rzędu są zerami, to ten punkt nazywamy punktem osobliwym *podwójnym.*

Jeżeli wszystkie pochodne drugiego rzędu są zerami, lecz nie wszystkie trzecie pochodne są zerami, to punkt nazywamy punktem osobliwym *potrójnym* i w ten sposób definjuje się ogólnie punkty osobliwe *wielokrotne*, np. r-krotne.

Omówimy tutaj tylko punkty podwójne, metoda bowiem badania punktów potrójnych i innych nie różni się zasadniczo od metody badania punktów podwójnych.

Chcąc badać w otoczeniu punktu podwójnego (a, b) postać utworu geometrycznego (L), złożonego z wszystkich punktów, spełniających równanie $f(x, y) = 0$, rozwijamy badaną funkcję $f(x, y)$ na wzór Taylora w otoczeniu tego punktu. Ponieważ $f(a, b) = 0$, $f_x(a, b) = 0$ i $f_y(a, b) = 0$, przeto wzór Taylora przyjmuje postać:

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}[(x-a)^2 f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b) f_{xy}(a,b) + (y-b)^2 f_{yy}(a,b)] + R_3$$

Gdy punkt (x, y) dąży do (a, b), to wyraz dopełniający R_3 dąży tu do zera w stopniu wyższym aniżeli kwadrat odległości tych punktów, t. j. w stopniu wyższym aniżeli $d^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$. Bierzemy pod uwagę tylko takie punkty (x, y), które należą do zbioru (L), a zatem spełniają równanie $f(x, y) = 0$.

Wobec tego:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} f(x,y) = \tfrac{1}{2}[&(x-a)^2 f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b) f_{xy}(a,b) + \\ &+ (y-b)^2 f_{yy}(a,b)] + R_3 = 0 \end{aligned}$$

Należy zbadać, czy istnieją jakie funkcje ciągłe $y = \varphi(x)$ lub $x = \psi(y)$, spełniające to równanie. Badanie to, uzupełniające teorję funkcji uwikłanych (por. § 116), wymaga dość subtelnych i zawiłych rozważań. Nie będziemy tu przeprowadzać tych dowodzeń, a ograniczymy się do podania ostatecznych rezultatów. Otóż okazuje się, że o istnieniu linij, których równania spełniają warunek (A), rozstrzyga z reguły następujące równanie drugiego stopnia:

$$(198) \qquad (x-a)^2 f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b) f_{xy}(a,b) + (y-b)^2 f_{yy}(a,b) = 0$$

a tylko w zupełnie wyjątkowych wypadkach trzeba sięgnąć także do wyrazu dopełniającego R_3. Z dyskusji wynikają następujące przypadki.

a) Jeżeli wyróżnik:

$$D(a,b) = f_{xx}(a,b) \cdot f_{yy}(a,b) - f_{xy}^2(a,b)$$

równania (198) ma wartość *ujemną*, to istnieją w otoczeniu punktu osobliwego (a, b) *dwie* funkcje ciągłe $y - b = \varphi_1(x)$ i $y - b = \varphi_2(x)$ lub $x - a = \psi_1(y)$ i $x - a = \psi_2(y)$ lub $y - b = \varphi(x)$ i $x - a = \psi(y)$, spełniające dane równanie $f(x, y) = 0$.

Ich obrazy geometryczne nazywamy dwiema *gałęziami* linji, określonej przez to równanie. Z równania (198) otrzymujemy wtedy dwie linje proste różne, które nazywamy *stycznemi* do obu gałęzi badanej linji; każda z tych linij jest bowiem granicznem położeniem siecznej, przechodzącej przez punkt (a, b) i punkt $(a + h, b + k)$, leżący na odpowiedniej gałęzi. Taki punkt osobliwy o dwóch różnych stycznych nazywamy *węzłem* linji krzywej (por. np. punkt O na fig. 47, str. 77 lub punkty P_1, P_2 na fig. 49, str. 79).

b) Jeżeli $D > 0$, to w otoczeniu punktu osobliwego (a, b) niema żadnych punktów, spełniających równanie $f(x, y) = 0$ (jakkolwiek sam punkt (a, b) spełnia to równanie). Taki punkt osobliwy nazywamy punktem *odosobnionym* lub *izolowanym*.

c) Jeżeli $D = 0$, to potrzebna jest dalsza dyskusja. Najczęściej jednak mamy wtedy dwie stykające się z sobą gałęzie, leżące z tej samej strony punktu osobliwego lecz po przeciwnych stronach wspólnej stycznej, jak np. w punktach cykloidy, leżących na osi x-ów (por. fig. 155, punkty O, P) lub w ostrzach, występujących w ewolucie paraboli i elipsy (por. fig. 153 i 154). Takie punkty nazywamy punktami *zwrotu*. Mogą jednak zachodzić także rozmaite inne przypadki, jak np. ostrza innego rodzaju, mogą się z sobą schodzić dwa ostrza z obu stron, może występować punkt izolowany i t. d. W następnym paragrafie podamy przykłady na te rozmaite możliwości.

Wyniki te można streścić w następującem twierdzeniu.

O ile istnieją punkty osobliwe utworu geometrycznego, przedstawionego (regularnem) *równaniem* $f(x, y) = 0$, *to otrzymujemy je przez rozwiązanie układu trzech równań*:

$$f(x, y) = 0, \quad f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0$$

Jeżeli dla punktu (a, b), *spełniającego układ tych trzech równań, wyróżnik:*

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b) \cdot f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b)$$

ma wartość ujemną, to badany punkt jest **podwójnym** *punktem węzłowym; jeżeli* $D > 0$, *to badany punkt jest punktem* **izolowanym**; *jeżeli* $D = 0$, *to potrzebne jest dalsze badanie.*

W tym ostatnim przypadku najczęściej występuje punkt *zwrotu*.

Badanie punktów osobliwych ma, jak widzimy, wiele wspólnego z badaniem extremów funkcyj dwóch zmiennych. Analogje te nie są przypadkowe, lecz sięgają bardzo głęboko w istotę rzeczy. I tak wiemy, że podanie funkcji w formie uwikłanej jest równoważne z podaniem przekroju powierzchni:

$$z = f(x, y)$$

zapomocą płaszczyzny poziomej (XY), t. j. dla $z = 0$. Weźmy pod uwagę powierzchnię zupełnie regularną, bez żadnych uskoków, ostrz lub punktów osobliwych. Wtedy funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ jest ciągła i posiada ciągłe pochodne wszelkich rzędów. Wykażemy, że pomimoto *przekroje* tej powierzchni mogą posiadać rozmaite osobliwości. Warunki $f_x = 0$ i $f_y = 0$, z których się oblicza spółrzędne: (a, b) i t. d. punktów osobliwych, są nam dobrze znane jako konieczne warunki istnienia extremów funkcji $z = f(x, y)$. W tych punktach płaszczyzna styczna do tej powierz-

chni jest prostopadła do osi (Z), a więc albo jest równoległa do płaszczyzny poziomej (XY) albo wprost nakrywa się z tą płaszczyzną. Jeżeli punkty (a, b) są osobliwe dla linji $f(x, y) = 0$, to leżą one na tej linji, a zatem dla tych punktów jest $z = 0$ a więc leżą one zarazem na płaszczyźnie poziomej (XY).

Ta płaszczyzna pozioma jest zatem styczną do powierzchni $z = f(x, y)$ w punktach (a, b).

Z dyskusji extremów wiemy, że w otoczeniu takiego punktu powierzchnia może przebiegać w rozmaity sposób, o czem się przekonujemy zapomocą badania znaku wyróżnika $D(a, b)$ w badanym punkcie.

I tak wiemy, że, jeżeli wyróżnik ma wartość *dodatnią*, to powierzchnia ma w danym punkcie *maximum lub minimum*, a więc leży w otoczeniu tego punktu całkowicie po jednej stronie swej płaszczyzny stycznej, nie przecina jej zatem nigdzie w odpowiednio bliskiem otoczeniu punktu styczności: (a, b). Krzywa przekroju powierzchni zapomocą tej płaszczyzny (XY) redukuje się zatem w tem otoczeniu do jednego *odosobnionego* punktu. Poza tym zaś punktem, w odpowiedniej od niego odległości, mogą istnieć rozmaite gałęzie przekroju $f(x, y) = 0$, nie redukujące się do punktu.

Taką konfiguracyę możemy sobie wyobrazić bardzo prosto, biorąc pod uwagę pasmo górskie o kopulastych wierzchołkach (maximach) rozmaitej wysokości. Płaszczyzna pozioma, styczna do jednego z niższych wierzchołków, przecina inne, wyższe części tego pasma w przekrojach, nie redukujących się do punktu. Do całokształtu tej warstwicy należą jednak nietylko te przekroje, lecz także odosobniony punkt (a, b), szczyt owego niższego wierzchołka.

Jeżeli wyróżnik ma wartość *ujemną*, to powierzchnia nie ma w badanym punkcie extremum, lecz t. zw. punkt *siodłowy*. Nie będziemy tu przeprowadzali szczegółowej dyskusji, jednakże widocznem jest z poglądu, że płaszczyzna pozioma, styczna do powierzchni w takim punkcie, przecina ją w dwóch przecinających się gałęziach. Jeżeli to jest np. siodło (przełęcz) między dwoma kopulastemi wierzchołkami, to przekrój poziomy, przechodzący przez punkt siodłowy, ma kształt ósemki. W siodle parabolicznem (np. w punkcie O na fig. 25, str. 45) otrzymujemy jako przekrój dwie linje proste, tworzące z sobą kąt różny od zera. W każdym razie mamy wtedy do czynienia w przekroju z *węzłem*.

Jeżeli wreszcie wyróżnik ma w badanym punkcie wartość *zero*, to powierzchnia może tam posiadać extremum właściwe lub niewłaściwe lub wcale nie posiada extremum. Wobec tego i przekroje w tym poziomie mogą mieć rozmaite postacie. Taki punkt (bez extremum) otrzymamy np., biorąc pod uwagę grzbiet, którego linja grzbietowa posiada punkt przegięcia o stycznej poziomej; tak będzie np., gdy linja grzbietowa ma

postać paraboli trzeciego stopnia o równaniu $z = x^3$, a po tej paraboli posuwamy parabolę drugiego stopnia o równaniu $z = -y^2$ tak, by jej wierzchołek leżał zawsze na paraboli $z = x^3$, a jej płaszczyzna aby była równoległa do (ZY). Okażemy zapomocą przykładów, że wtedy przekrój poziomy płaszczyzną (XY) posiada punkt *zwrotu* w punkcie styczności.

Widzimy stąd, że w warstwicach powierzchni regularnych mogą występować te wszystkie osobliwości, któreśmy poprzednio omówili, t. j. węzły, punkty odosobnione i punkty zwrotu. Punkty te mogą jednak występować w warstwicach poziomych tylko w tych punktach regularnych powierzchni, w których płaszczyzna styczna ma kierunek poziomy. Uwagi te znajdują zastosowanie w nauce o terenie, przy przedstawianiu rzeźby terenu zapomocą warstwic i przy odczytywaniu kształtu powierzchni z mapy warstwicowej.

§ 187. Przykłady punktów osobliwych.

1) Wyznaczyć punkty osobliwe linji, podanej równaniem:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Tworzymy:

$$f_x = 3x^2 - 3ay = 0$$
$$f_y = 3y^2 - 3ax = 0$$

Te dwa równania posiadają jako jedyne rozwiązania rzeczywiste: $A(0, 0)$ i $B(a, a)$. Punkt $A(0, 0)$ spełnia także pierwsze równanie: $f(x, y) = 0$ a więc jest punktem *osobliwym*; punkt B nie spełnia równania $f(x, y) = 0$, a więc nie należy do badanej linji.

Aby zbadać rodzaj punktu osobliwego A, tworzymy wyróżnik. Ponieważ $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3a$, $f_{yy} = 6y$, przeto wyróżnik ma postać:

$$D(x, y) = 36xy - 9a^2$$

Dla punktu $A(0, 0)$ jest:

$$D(0, 0) = -9a^2 < 0$$

a zatem to jest punkt *węzłowy* (por. fig. 157).

Styczne w tym punkcie węzłowym obliczymy z warunku:

$$(x - 0)^2 f_{xx}(0, 0) + 2(x - 0)(y - 0) f_{xy}(0, 0) + (y - 0)^2 f_{yy}(0, 0) = 0$$

a więc w naszym przypadku:

$$-3a \cdot 2xy = 0$$

Stąd otrzymamy $y = 0$ i $x = 0$ czyli osie spółrzędnych. Jest to znana nam już linja (por. str. 77, fig. 47), zwana liściem Descartes'a.

2) Zbadać punkty osobliwe linji o równaniu:

$$f(x, y) = 25y^2 + 4x^2 - x^3 = 0$$

Obliczamy:

$$f_x = 8x - 3x^2 \quad | \quad f_{xx} = 8 - 6x$$
$$f_y = 50y \quad | \quad f_{xy} = 0$$
$$\quad | \quad f_{yy} = 50$$

Z warunków:

$$8x - 3x^2 = 0$$
$$50y = 0$$

otrzymujemy dwie pary rozwiązań: $A(0, 0)$ i $B(\frac{8}{3}, 0)$.

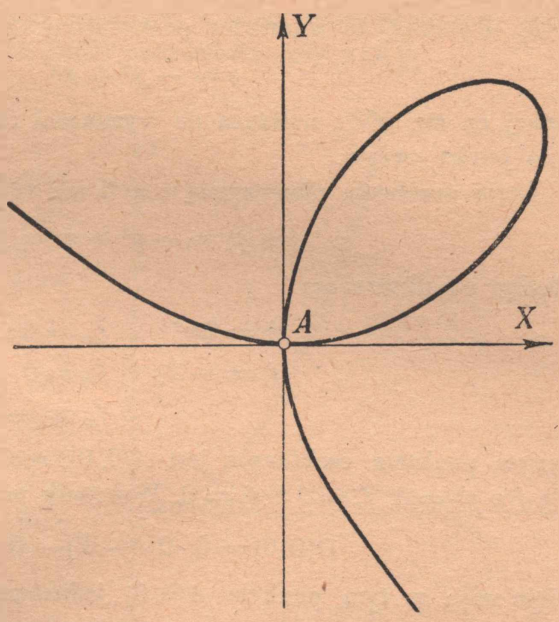


Fig 157

Tylko pierwsza para spełnia dane równanie $f(x, y) = 0$, a zatem tylko punkt $A(0, 0)$ jest punktem osobliwym. Wyróżnik ma postać:

$$D = (8 - 6x) \cdot 50 - 0^2$$

a więc:

$$D(0, 0) = 400 > 0$$

To dowodzi, że punkt A (fig. 158) jest punktem *izolowanym*. Odrazu stanie się to widocznem, gdy rozwikłamy równanie $f(x, y) = 0$. Otrzymamy dwie funkcje:

$$y = \tfrac{1}{8} x \sqrt{x - 4}$$

i

$$y = -\tfrac{1}{8} x \sqrt{x - 4}$$

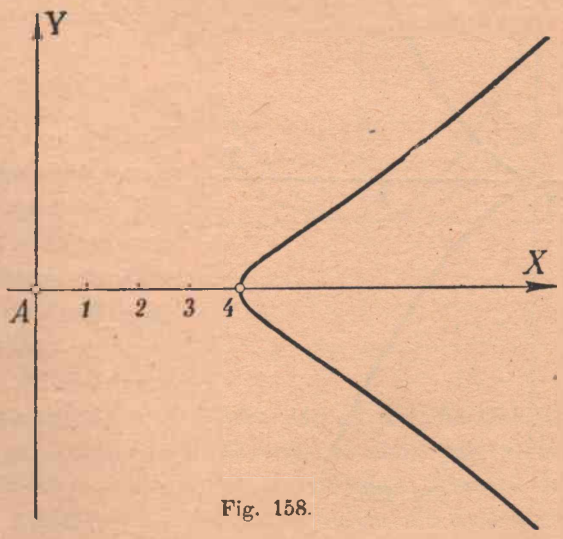


Fig. 158.

Otóż widać, że dla x, zawartych pomiędzy 0 a 4, niema rzeczywistych wartości y, a dopiero od $x = 4$ rozpoczyna się linja, leżąca symetrycznie po obu stronach osi x-ów. Łatwo stwierdzić, że dla $x = 5\frac{1}{3}$ mamy punkty przegięcia dla obydwu funkcyj y.

3) Wykazać, że warstwica powierzchni:

$$z = -y^2 + x^3$$

(opisanej na str. 568), należąca do wysokości $z = 0$, posiada w początku układu punkt zwrotu.

Linja przekroju płaszczyzną $z = 0$ ma równanie:

$$f(x, y) = -y^2 + x^3 = 0$$

Pochodne cząstkowe są:

$$f_x = 3x^2 \quad | \quad f_{xx} = 6x$$
$$f_y = -2y \quad | \quad f_{xy} = 0$$
$$\quad\quad\quad\quad | \quad f_{yy} = -2$$

Jedynym punktem osobliwym jest $A(0, 0)$, spełnia on bowiem trzy równania $f(x, y) = 0$, $f_x = 0$ i $f_y = 0$. Wyróżnik ma dla tego punktu wartość:

$$D(0, 0) = 6 \cdot 0 \cdot (-2) - 0^2 = 0$$

Istnieje więc w tym punkcie $A(0, 0)$ jedna rzeczywista styczna zwana podwójną, mająca, jak się łatwo przekonać, spadek $a = 0$, to znaczy, że jest to oś x-ów.

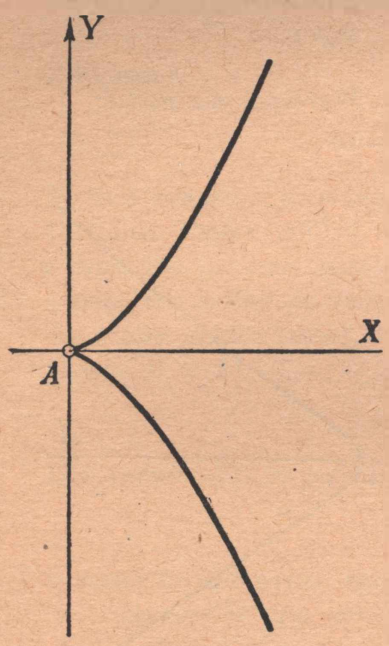


Fig. 159.

Chcąc zbadać rodzaj tego punktu osobliwego, rozwikłujemy dane równanie i otrzymujemy dwie funkcje:

$$y = +\sqrt{x^3}, \qquad y = -\sqrt{x^3}$$

Widocznem jest, że dla ujemnych x niema żadnych punktów badanej krzywej, natomiast dla każdego dodatniego x otrzymujemy dwa punkty, leżące symetrycznie względem osi x-ów. Linję tę przedstawiono na fig. 159; jest to znana nam już parabola Neila (por. § 185, przykład 1).

Polecamy czytelnikowi sporządzenie planu warstwicowego powierzchni: $z = -y^2 + x^3$, obierając kolejno $z = 1, 2, 3, 4, \ldots$ i $z = -1, -2, -3, \ldots$ (Można okazać, że wszystkie warstwice dla $z > 0$ mają punkty przegięcia na osi y-ów).

Łatwo można okazać, że linja o równaniu:

$$y^2 + cx^2 - x^3 = 0$$

ma w punkcie $A(0,0)$ punkt osobliwy, a mianowicie *węzeł*, gdy $c<0$, punkt *zwrotu*, gdy $c=0$, a punkt *odosobniony*, gdy $c>0$.

4) Linja o równaniu:

$$(y-x^2)^2-x^5=0$$

ma w punkcie $A(0,0)$ ostrze tego rodzaju, że leży — podobnie jak parabola Neila — po jednej stronie osi y-ów a obydwie gałęzie krzywej stykają się z osią x-ów, lecz leżą po tej samej stronie tej osi. Taki punkt nazywamy dzióbem (por. fig. 160a). Pozostawiamy czytelnikowi stwierdzenie, że wyróżnik ma w tym punkcie osobliwym wartość 0.

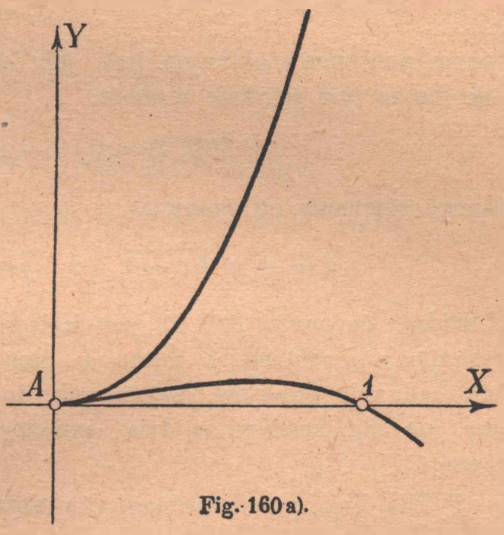


Fig. 160a).

5) Na fig. 160b) i c) przedstawione są linje o równaniach:

$$(y-x^2)\left(y+\tfrac{1}{2}x^2\right)=0 \quad \text{i} \quad (y-x^2)\left(y-\tfrac{1}{2}x^2\right)=0$$

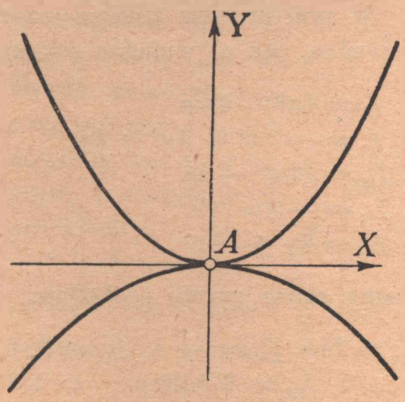


Fig. 160b).

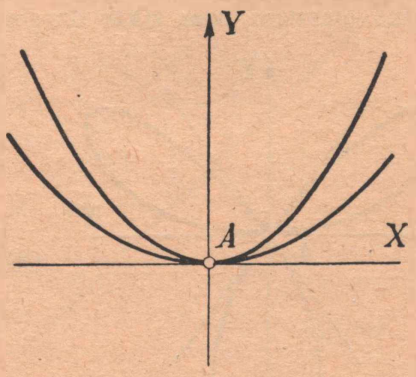


Fig. 160c).

(są to iloczyny równań dwóch parabol). Punkt $A(0,0)$ jest dla nich punktem osobliwym podwójnym, w którym $D=0$; oś x-ów jest styczną podwójną, a obydwie gałęzie rozciągają się po obydwu stronach tego punktu podwójnego (taki punkt można uważać za połączenie dwóch punktów zwrotu względnie dwóch dzióbów, lecz nie za węzeł!).

6) Zbadajmy osobliwy punkt linji o równaniu:

$$y^3+x^4-x^5=0$$

Tutaj:

$$f_x = 4x^3 - 5x^4 \qquad f_{xx} = 12x^2 - 20x^3$$
$$f_y = 2y \qquad f_{xy} = 0$$
$$f_{yy} = 2$$

Jedynym punktem osobliwym jest, jak łatwo stwierdzić, $A(0,0)$. Wyróżnik ma w tym punkcie wartość:

$$D(0,0) = 0 \cdot 2 - 0^2 = 0$$

Z danego równania otrzymujemy:

$$y = +x^2\sqrt{x-1} \quad \text{i} \quad y = -x^2\sqrt{x-1}$$

Stąd widać, że punkt $A(0,0)$ jest izolowany, albowiem dla $0 < x < 1$ otrzymujemy y urojone, a zatem w otoczeniu punktu A aż do $x = 1$ niema żadnych punktów, należących do badanej krzywej. Od $x = 1$ mamy już dla każdego x dwa, symetrycznie leżące punkty badanej krzywej.

7) Dla linji, przedstawionej równaniem:

$$f(x,y) \equiv x^4 - 2x^3y + y^3 + y^4 = 0$$

punkt $A(0,0)$ jest punktem osobliwym. W tym punkcie znikają jednak nietylko pierwsze, lecz także drugie pochodne, jak to widać z wzorów:

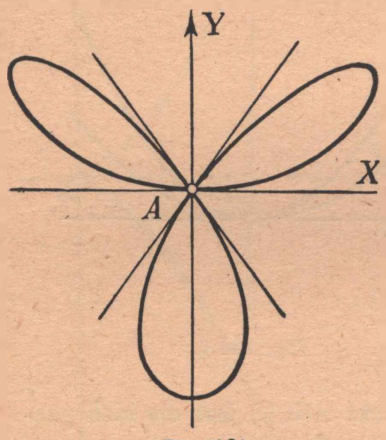


Fig. 161.

$$f_x = 4x^3 - 4xy$$
$$f_y = -2x^2 + 3y^2 + 4y^3$$
$$f_{xx} = 12x^2 - 4y$$
$$f_{xy} = -4x$$
$$f_{yy} = 6y + 12y^2$$

Obliczamy zatem trzecie pochodne:

$$f_{xxx} = 24x,\ f_{xxy} = -4,\ f_{xyy} = 0,$$
$$f_{yyy} = 6 + 24y$$

Dla $x = 0$ i $y = 0$ otrzymujemy:

$$f_{xxx} = 0,\ f_{xxy} = -4,\ f_{xyy} = 0,\ f_{yyy} = 6$$

Nie wszystkie trzecie pochodne są zerami, a zatem punkt $A(0,0)$ jest punktem *potrójnym*. Styczne, należące do tego punktu, wyznacza się z wyrazów trzeciego stopnia w rozwinięciu Taylora, a mianowicie z równania:

$$(x-a)^3 f_{xxx} + 3(x-a)^2(y-b) f_{xxy} + 3(x-a)(y-b)^2 f_{xyy} + (y-b)^3 f_{yyy} = 0$$

W naszym przykładzie otrzymujemy:

$$-12x^2y+6y^3=0$$

a stąd:

$$y=0,\quad y=x\sqrt{2},\quad y=-x\sqrt{2}$$

Mamy więc trzy styczne rzeczywiste, przechodzące przez punkt osobliwy $A(0,0)$. Badana linja ma w punkcie $A(0,0)$ potrójny węzeł (por. fig. 161).

§ 188. O linjach obwiednich [1]).

Zajmiemy się tu gromadami linij, określonemi zapomocą równań postaci:

$$f(x,y,c)=0$$

przyczem funkcja $f(x,y,c)$ jest dla x,y,c, zawartych w pewnym trójwymiarowym obszarze, ciągła i różniczkowalna. Do każdej wartości $c=c_1$ z tego obszaru należy jedna krzywa z tej gromady, podana w formie uwikłanej:

$$f(x,y,c_1)=0.$$

Zdarza się czasem, że wszystkie linje takiej gromady są styczne do pewnych linij a czasem nawet do jednej linji, jak to zobaczymy z następujących przykładów.

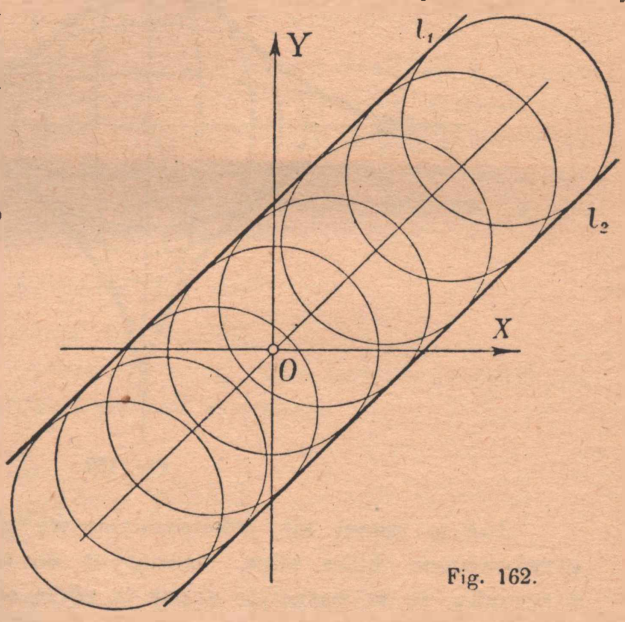


Fig. 162.

1) Równanie:

$$(x-c)^2+(y-c)^2=1$$

przedstawia gromadę kół o promieniu 1, których środki $S(c,c)$ leżą na jednej linji prostej, a mianowicie na prostej $y=x$ (por. fig. 162). Widzimy z rysunku, że te wszystkie koła są styczne do dwóch linij prostych l_1 i l_2. Mówimy, że ta gromada kół posiada dwie *obwiednie* a mianowicie proste l_1 i l_2.

---

[1]) Niektórzy autorowie odmieniają rzeczownik: „obwiednia“ według deklinacji rzeczownikowej; poczucie językowe dyktuje nam jednak, że mamy tu do czynienia z rzeczownikiem, który należy odmieniać według deklinacji przymiotnikowej, tak samo, jak: spiralna, prosta, prostopadła, pochodna i t. p.

2) Weźmy pod uwagę zbiór elips spółśrodkowych, których suma połówek osi jest liczbą *stałą*, np.

$$a + b = 10$$

Równanie tej gromady jest:

$$(10 - a)^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 (10 - a)^2 = 0$$

przyczem $0 < a < 10$. Jeżeli jeszcze dołączymy krańce przedziału $< 0, 10 >$, to dla $a = 0$ otrzymujemy $x = 0$, a to jest równanie osi y-ów; dla $a = 10$ otrzymujemy oś x-ów, t. j. $y = 0$.

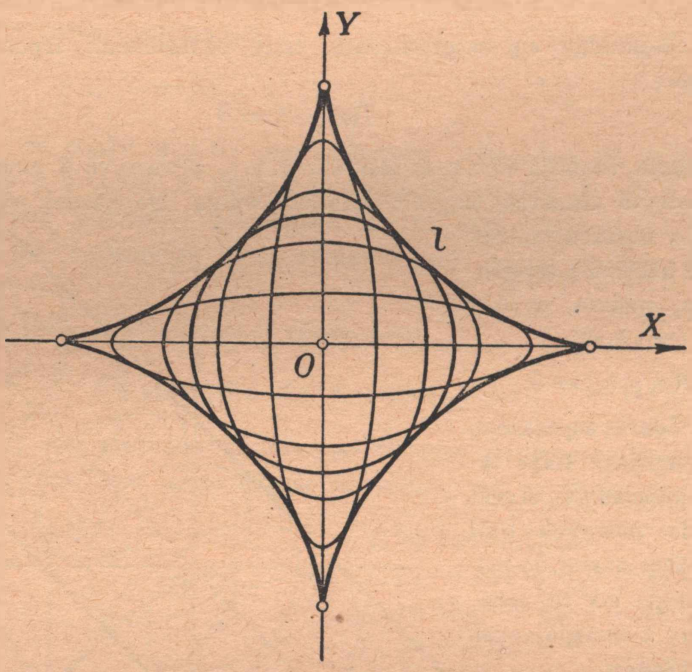


Fig. 163.

Jest to zatem też jednoparametrowa gromada linij. Na fig. 163 przedstawiono kilka elips, należących do tej gromady. Spostrzegamy z rysunku, że te wszystkie elipsy (a także oś x-ów i y-ów) są styczne do jednej linji l o czterech ostrzach. Ta linja jest więc *obwiednią* tej gromady elips i prostych.

3) Wiele przykładów obwiednich spotykamy w fizyce a szczególniej w ruchu falowym; tak np. czoło fali płaskiej, odbitej i załamanej. jest obwiednią gromady kul — a w przekroju kół — o rozmaitych promieniach; w optyce geometrycznej gromada promieni odbitych od jakiejś powierzchni krzywej posiada często obwiednią, zwaną *katakaustyką* a gromada promieni załamanych obwiednią, zwaną *diakaustyką*. Wogóle

przy zjawiskach, w których występuje nieskończona gromada jakichś linij lub powierzchni, zbiorowy efekt zjawiska jest zwykle ściśle związany z obwiednią — o ile taka obwiednia istnieje.

Każda linja jest obwiednią gromady swoich stycznych. Ewoluta jest obwiednią gromady normalnych do danej krzywej (na podstawie twierdzenia udowodnionego w § 184).

4) Nie należy jednak sądzić, aby każda jednoparametrowa gromada linij posiadała obwiednią: tak np. gromada prostych równoległych, parabol równoległych (przystających), gromada kół spółśrodkowych o różnych promieniach nie posiadają wcale obwiedniej.

Po tych objaśnieniach jasną będzie następująca definicja:

obwiednią gromady linij nazywamy linję styczną do wszystkich linij, należących do tej gromady, przyczem każdy punkt obwiedniej jest jej punktem styczności z jakąś linją z tej gromady.

Aby wykryć obwiednią jednoparametrowej gromady linij, danej równaniem

$$f(x, y, c) = 0 \tag{I}$$

użyjemy następującego rozumowania. Jeżeli istnieje obwiednia l, to spółrzędne x, y każdego jej punktu muszą przedewszystkiem spełniać równanie (I), albowiem każdy punkt obwiedniej należy do jakiejś linji z tej gromady. Każdej linji z danej gromady, a zatem każdej wartości c, odpowiadają jakieś wartości (x, y) spółrzędnych punktu, leżącego na obwiedniej, a więc x i y są funkcjami parametru c:

$$x = \varphi(c), \quad y = \psi(c)$$

Załóżmy, że są to funkcje różniczkowalne.

Spadek w każdym punkcie obwiedniej musi być równy spadkowi odpowiedniej linji z gromady w punkcie styczności.

Musi być zatem:

$$\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} = -\frac{f_x(x, y, c)}{f_y(x, y, c)}$$

czyli:

$$f_x(x, y, c) \cdot \varphi'(c) + f_y(x, y, c) \cdot \psi'(c) = 0 \tag{II}$$

To jest drugi warunek, który muszą spełniać funkcje $\varphi(c)$ i $\psi(c)$ (pierwszym jest: $f(\varphi(c), \psi(c), c) = 0$). Warunek ten zastąpimy innym, prostszym. Utwórzmy mianowicie całkowitą pochodną funkcji $f(x, y, c)$, uważając x i y za funkcje zmiennej c. Otrzymamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dc} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dc} + \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

Wskutek warunku (II) odpadają tu jednak dwa początkowe wyrazy i pozostaje:

$$\text{(III)} \qquad \frac{\partial f(x, y, c)}{\partial c} = 0$$

Stąd wynika następujące twierdzenie:

jeżeli gromada linij posiada obwiednią, to spółrzędne każdego punktu tej obwiedniej muszą spełniać następujące dwa warunki:

$$\text{(199)} \qquad \boxed{f(x, y, c) = 0, \ \frac{\partial f(x, y, c)}{\partial c} = 0}$$

Aby więc znaleźć obwiednią, należy z tych dwóch równań obliczyć x i y jako funkcje parametru c; wtedy uzyskuje się odrazu parametrowe przedstawienie obwiedniej:

$$x = \varphi(c), \quad y = \psi(c)$$

Albo też trzeba wyeliminować z tych dwóch równań (199) parametr c, obliczając np. c z jednego równania jako funkcję x i y i wstawiając to w drugie równanie. W ten sposób otrzyma się równanie obwiedniej w formie uwikłanej:

$$\Phi(x, y) = 0$$

Warunki (199) są tylko *konieczne* dla istnienia obwiedniej, lecz bynajmniej *nie dostateczne*. Może się bowiem zdarzyć, że te dwa równania nie określają x i y jako funkcyj zmiennej c; wiemy bowiem z rozważania układu dwóch równań o trzech zmiennych, że nie zawsze istnieją funkcje uwikłane, spełniające dwa dane równania (por. § 119). Tak samo eliminacja parametru nie zawsze jest możliwa: tak np. na pewno nie będzie ta eliminacja możliwą, jeżeli parametr c występuje w równaniu $f(x, y, c) = 0$ tylko w pierwszym stopniu, albowiem wtedy drugie równanie $\frac{\partial f(x, y, c)}{\partial c} = 0$ nie zawiera wcale tego parametru. Czasem zaś otrzymamy dwie funkcje $x = \varphi(c)$ i $y = \psi(c)$, określające jakąś linję, lecz nie styczną do danej gromady. Tak będzie np., gdy każda linja z danej gromady posiada jakiś punkt osobliwy. Dla każdego punktu osobliwego spełniają się, jak wiemy (§ 186), warunki: $f_x(x, y, c) = 0$ i $f_y(x, y, c) = 0$, a więc warunek (II) będzie spełniony, a co zatem idzie, także warunek (III). Warunek zaś (I) jest spełniony, bo punkty osobliwe leżą na linjach, należących do gromady. Widzimy więc, że linja, złożona z osobliwych punktów linij, należących do badanej gromady, spełnia także obydwa warunki (199).

Nie będziemy się tutaj zajmowali badaniem warunków dostatecznych na to, aby istniała obwiednia, a tylko zapomocą przykładów szczegółowych wyjaśnimy te rozmaite przypadki.

(Szczegółową dyskusję może czytelnik znaleźć w podręczniku H. von Mangoldt'a, p. t. *Einführung in die höhere Mathematik*, Tom II, wyd. 3. Lipsk 1931 r., str. 456—470).

W praktyce najprościej będzie postępować w następujący sposób: wyznaczyć — o ile istnieją — funkcje $x = \varphi(c)$ i $y = \psi(c)$, spełniające obydwa warunki (199), a następnie sprawdzić, czy spadek znalezionej linji jest równy spadkowi tej linji z gromady $f(x, y, c) = 0$, która odpowiada tej samej wartości parametru c, to znaczy, czy zachodzi równość:

$$\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} = -\frac{f_x(\varphi(c), \psi(c), c)}{f_y(\varphi(c), \psi(c), c)}$$

Te linje, dla których te spadki są równe, są napewno obwiedniemi.

§ 189. Przykłady na badanie obwiednich.

1) Zbadajmy obwiednią gromady kół (por. fig. 162), danych równaniem:

$$f(x, y, c) \equiv (x - c)^2 + (y - c)^2 - 1 = 0$$

W poprzednim paragrafie podaliśmy tę obwiednią bez dowodu.

Obliczmy:

$$\frac{\partial f(x, y, c)}{\partial c} \equiv -2(x - c) - 2(y - c) = 0$$

a stąd:

$$y = -x + 2c$$

Wstawiamy to w pierwsze równanie i otrzymujemy:

$$(x - c)^2 + (-x + c)^2 - 1 = 0 \quad \text{czyli} \quad 2(x - c)^2 = 1$$

a stąd:

Wobec tego:

$$\left.\begin{aligned} x &= c + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= c - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} (l_1) \qquad \text{i} \qquad \left.\begin{aligned} x &= c - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= c + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} (l_2)$$

Otrzymaliśmy parametrowe przedstawienie dwóch linij. Są to linje proste:

$$y = x - \sqrt{2} \ldots (l_1) \quad \text{i} \quad y = x + \sqrt{2} \ldots (l_2)$$

jak się łatwo przekonać, eliminując c. Aby zbadać, czy to są istotnie obwiednie, obliczamy spadki:

$$\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} = \frac{dy}{dx} = 1, \qquad \frac{-f_x(\varphi(c), \psi(c), c)}{f_y(\varphi(c), \psi(c), c)} = \frac{-2(x-c)}{2(y-c)} \Bigg|_{\substack{x=c+\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=c-\frac{1}{\sqrt{2}}}} = -\frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}}} = 1$$

i podobnie dla linji (l_2). Ponieważ spadki są równe w odpowiednich punktach przy każdem c, przeto proste (l_1) i (l_2) są istotnie obwiedniemi danej gromady.

2) Fala płaska, której czołem jest (w przekroju) odcinek OA, nachylony pod kątem α do osi x-ów (fig. 164), odbija się od osi OX. Znaleźć

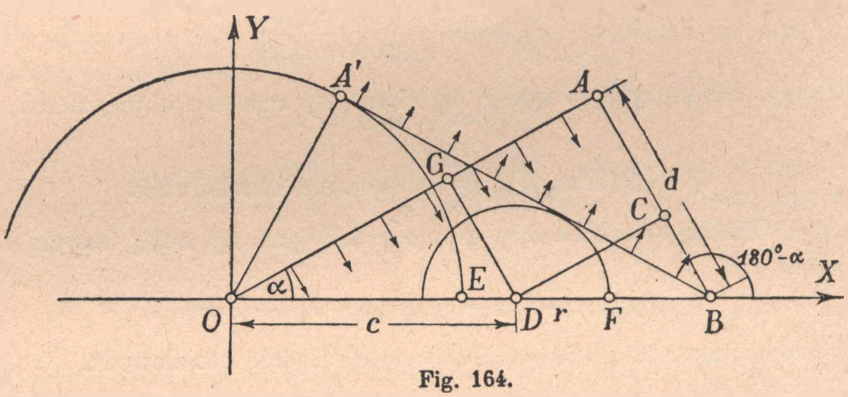


Fig. 164.

czoło fali odbitej w chwili, gdy fala padająca posunęła się o odcinek $d = AB$. Każdy punkt odcinka OB zostaje pobudzony do drgań przez falę padającą w innym czasie, a więc wysyła fale kuliste o rozmaitych promieniach r. I tak punkt O, najwcześniej pobudzony do drgania, wytworzy w tym czasie falę kulistą o promieniu $OE = AB$; dowolny zaś punkt D, leżący na osi x-ów w odstępie $c = OD$, wytworzy falę o promieniu: $r = DF = BC = AB - AC = AB - GD = d - c \sin\alpha$. Czoło fali odbitej jest obwiednią gromady kul — a w przekroju gromady kół — o równaniu:

$$(x-c)^2 + y^2 - (d - c\sin\alpha)^2 = 0$$

Tutaj d i α są liczbami stałemi a zmienia się tylko parametr c. Obliczamy cząstkową pochodną według c i otrzymujemy:

$$-2(x-c) + 2(d - c\sin\alpha)\sin\alpha = 0$$

Eliminujemy z tych dwóch równań c i otrzymujemy po łatwych przeróbkach:

$$y = -x \operatorname{tg} \alpha + \frac{d}{\cos \alpha}$$

i $$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{d}{\cos \alpha}$$

Pierwsza prosta jest właśnie równaniem (przekroju) czoła fali odbitej. Widzimy, że tworzy ona z osią x-ów kąt $180^\circ - \alpha$, skąd już łatwo wynika, że kąt padania jest równy kątowi odbicia.

Druga prosta, symetryczna do pierwszej względem osi x-ów, a więc równoległa do OA, jest obwiednią dla dolnych połówek tych kół. Przedstawia ona czoło fali, któraby się rozwinęła pod osią x-ów, gdyby się ten ruch falowy mógł tam rozwinąć z tą samą prędkością. Gdyby zaś prędkość ruchu falowego pod osią x-ów była inna, to otrzymalibyśmy pod osią gromadę kół o innych promieniach, a ich obwiednia byłaby czołem (w przekroju) fali załamanej. Aby znaleźć tę obwiednią, należałoby w równaniu gromady kół zmniejszyć lub powiększyć proporcjonalnie wszystkie promienie, a więc zamiast $r = d - c \sin \alpha$ należałoby podstawić w to równanie $r_1 = \frac{1}{n}(d - c \sin \alpha)$. Po wykonaniu rachunków otrzymalibyśmy jako obwiednią fali załamanej linję prostą o równaniu:

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} x - \frac{d}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

Kładąc spółczynnik kierunkowy tej prostej $\frac{\sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \operatorname{tg} \beta$, obliczamy stąd z łatwością, że $\sin \alpha : \sin \beta = n$. Jest to znane prawo załamania.

3) Dla gromady elips:

$$(10 - a)^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 (10 - a)^2 = 0$$

opisanej w poprzednim paragrafie, obliczymy obwiednią, dołączając do tego równania warunek $f_a = 0$, t. j.:

$$-2(10 - a) x^2 + 2ay^2 - 2a(10 - a)^2 + 2a^2(10 - a) = 0$$

Z tych dwóch równań nietrudno obliczyć:

$$x^2 = \frac{a^3}{10}, \quad y^2 = \frac{(10 - a)^3}{10}$$

Stąd otrzymuje się odrazu parametrowe przedstawienie obwiedniej. Można jednak łatwo wyeliminować parametr a i otrzymać równanie tej linji w formie uwikłanej, a mianowicie:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 10^{\frac{2}{3}}$$

Linja ta, zwana *asteroidą*, należy do hipocykloid.

Pozostawiamy czytelnikowi stwierdzenie, w sposób omówiony w pierwszym przykładzie, że ta linja jest istotnie obwiednią badanej gromady.

4) Z punktu O (fig. 165) można wyrzucać pociski we wszystkich kierunkach i pod rozmaitemi kątami. Jeżeli prędkość początkowa jest stała: v, to wszystkie te pociski nie przekraczają pewnej granicznej powierzchni, zwanej *powierzchnią bezpieczeństwa*. Wskutek symetrji będzie

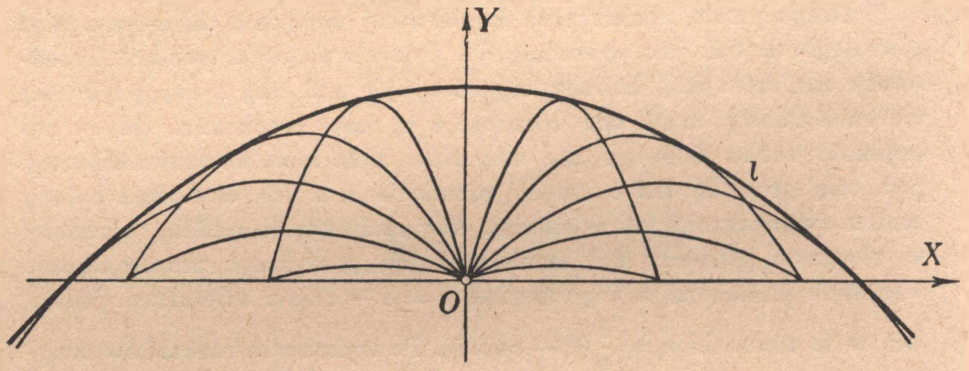


Fig. 165.

to jakaś powierzchnia obrotowa, wystarczy zatem znaleźć jej przekrój pionowy. Chcemy znaleźć tę powierzchnię, nie uwzględniając oporu powietrza ani ruchu obrotowego ziemi. Wtedy droga każdego pocisku jest — jak wiadomo — parabolą, której przedstawienie parametrowe ma postać:

$$x = vt \cos \alpha$$

$$y = -\frac{g}{2} t^2 + vt \sin \alpha$$

Stąd otrzymujemy formę wyraźną:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v^2 \cos^2 \alpha}$$

Oznaczmy $\operatorname{tg} \alpha = c$, to:

$$y - cx + \frac{g}{2} \frac{x^2(1 + c^2)}{v^2} = 0$$

Zmiennym parametrem jest tu c. Aby otrzymać obwiednią, tworzymy pochodną cząstkową według c i otrzymujemy:

$$-x + \frac{g}{2v^2} x^2 \cdot 2c = 0$$

Pierwszym pierwiastkiem tego równania jest $x = 0$ a wtedy i $y = 0$. Pierwszem rozwiązaniem tego układu równań jest więc jeden punkt,

a mianowicie początek układu. Jest to wprawdzie punkt bardzo ważny dla tej gromady parabol, a mianowicie wszystkie parabole tej gromady przechodzą przez ten punkt, nie jest to jednak obwiednia. Mamy tu więc pierwszy przykład na to, że warunki (199) wyznaczają nietylko obwiednią, lecz także inne linje lub punkty, ważne dla zbadania danej gromady. Wyłączywszy to rozwiązanie: $x = 0$, otrzymujemy:

$$-1 + \frac{g}{v^2} xc = 0$$

czyli:

$$c = \frac{v^2}{gx}$$

a wstawiwszy to w pierwsze równanie, otrzymamy po uporządkowaniu:

$$y = -\frac{g}{2v^2} x^2 + \frac{v^2}{2g}$$

Jest to parabola obwiednia całej gromady. Przez obrót tej paraboli w przestrzeni około osi y-ów otrzymujemy paraboloidę obrotową (por. str. 43—44). Ta paraboloida jest zatem szukaną powierzchnią bezpieczeństwa, oddzielającą te punkty przestrzeni, które są osiągalne z punktu O pociskami o stałej prędkości początkowej v, od punktów nieosiągalnych.

5) Dla gromady linij o równaniu:

$$x^2 + cy^2 - 1 - c = 0$$

pochodną cząstkową jest:

$$y^2 - 1 = 0$$

a stąd:

$$y = +1 \quad \text{i} \quad y = -1$$

Z pierwszego równania otrzymujemy dla tych wartości:

$$x^2 + c - 1 - c = 0 \quad \text{czyli} \quad x^2 = 1, \quad \text{a więc} \quad x = +1, \; x = -1$$

Otrzymaliśmy więc, jako rozwiązanie tego układu równań, tylko cztery punkty:

$$A(+1, +1), \quad B(+1, -1), \quad C(-1, +1), \quad D(-1, -1)$$

Badana gromada linij nie posiada więc obwiedniej. Natomiast wszystkie linje tej gromady przechodzą przez cztery stałe punkty. Taką gromadę nazywamy *pękiem* linij, a te stałe punkty *wierzchołkami* tego *pęku*.

W tym przypadku jest to — jak czytelnik łatwo stwierdzi — pęk *elips*. Odrazu z formy równania gromady linij można poznać, czy mamy do czynienia z pękiem. Równanie pęku tem się bowiem charakteryzuje, że parametr c występuje tylko w pierwszym stopniu, a więc to równanie ma postać:

$$f(x, y, c) \equiv g(x, y) + c \cdot h(x, y) = 0$$

Stąd:

$$\frac{\partial f}{\partial c} = h(x, y) = 0$$

Podstawiwszy to w pierwsze równanie, otrzymamy:

$$g(x, y) = 0$$

Otóż jasnem jest, że z dwóch równań o dwóch niewiadomych:

$$h(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad g(x, y) = 0$$

otrzymamy naogół szereg oddzielnych par pierwiastków:

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$$

a nie funkcje.

Przez te punkty przechodzą wszystkie linje danej gromady, są to zatem wierzchołki danego pęku.

6) Dla gromady linij, określonej równaniem:

$$f(x, y, c) \equiv y^4 - y^2 + (x - c)^2 = 0$$

pochodna cząstkowa według c ma postać:

$$\frac{\partial f}{\partial c} \equiv -2(x - c) = 0$$

Stąd:

$$x = c$$

Podstawiamy to w pierwsze równanie i otrzymujemy:

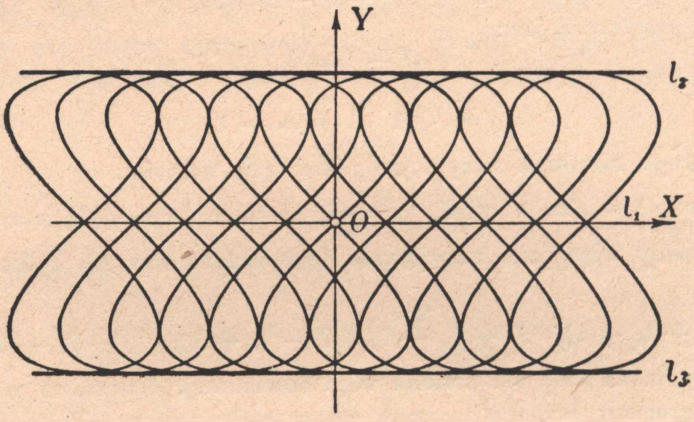


Fig. 166.

$$y^4 - y^2 = 0$$

a stąd:

$$y = 0, \quad y = +1 \quad \text{i} \quad y = -1$$

Mamy zatem parametrowe przedstawienie trzech linij:

$$\left.\begin{matrix} x = c \\ y = 0 \end{matrix}\right\} (l_1) \qquad \left.\begin{matrix} x = c \\ y = 1 \end{matrix}\right\} (l_2) \qquad \left.\begin{matrix} x = c \\ y = -1 \end{matrix}\right\} (l_3)$$

Dane równanie przedstawia — jak nietrudno stwierdzić — gromadę linij krzywych, mających postać ósemek (por. fig. 166). Linje l_2 i l_3 są widocznie obwiednemi tej gromady, natomiast linja l_1 nie jest obwiednią, lecz miejscem geometrycznem wszystkich punktów *osobliwych*, występujących w poszczególnych linjach badanej gromady.

7) Może się zdarzyć, że równania $f(x, y, c) = 0$ i $f_c = 0$ tworzą układ sprzeczny, a więc nie posiadają żadnych wspólnych rozwiązań.

Tak np. dla gromady kół spółśrodkowych:

$$x^2 + y^2 - c = 0$$

otrzymujemy $\frac{\partial f}{\partial c} = -1$, a to nigdy nie jest równe zeru.

8) Gromada krzywych, określonych równaniem:

$$y - (x - c)^3 = 0$$

przedstawia zbior paraboł trzeciego stopnia, przystających i równoległych (por. fig. 167). Celem znalezienia obwiedniej tworzymy pochodną według c:

$$3(x - c)^2 = 0$$

a stąd otrzymujemy:

$$x = c, \quad y = 0$$

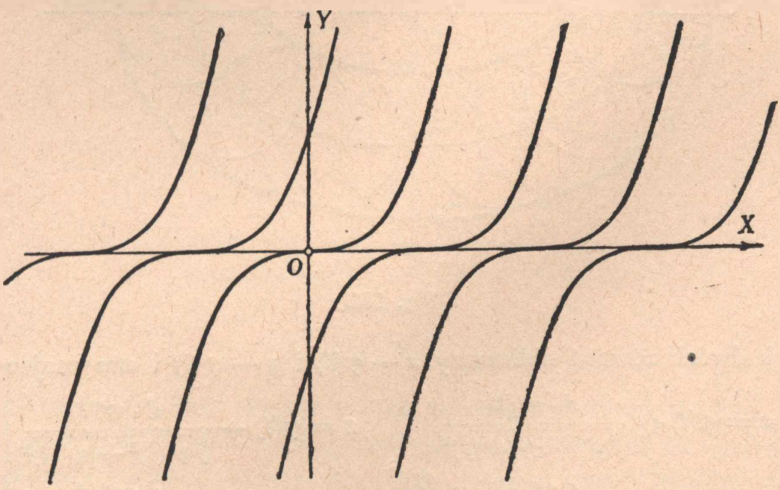


Fig. 167.

Te dwa równania razem dają parametrowe przedstawienie osi x-ów. Jest ona istotnie obwiednią, albowiem każda parabola 3-go stopnia z danej gromady posiada na osi x-ów punkt przegięcia o stycznej, mającej spadek 0. Ten przykład obwiedniej jest pouczający z dwóch względów: po pierwsze widzimy, że każda krzywa gromady może przenikać obwiednią, a po drugie, że obwiednia może istnieć, chociaż krzywe danej gromady wcale się z sobą nie przecinają.

9) Wyznaczyć obwiednie gromady kół o promieniu d, których środki leżą na danej krzywej. Tak np. na fig. 168 są przedstawione dwie takie obwiednie dla elipsy.

Jeżeli krzywa jest dana zapomocą przedstawienia parametrowego:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

to gromada kół o stałym promieniu d, których środki leżą na tej krzywej, ma równanie:

$$(x - \varphi(t))^2 + (y - \psi(t))^2 - d^2 = 0$$

Zmiennym parametrem jest tu t. Aby otrzymać obwiednią, tworzymy pochodną lewej strony według t i kładziemy ją równą zeru.

$$-2(x - \varphi(t))\varphi'(t) - 2(y - \psi(t))\psi'(t) = 0$$

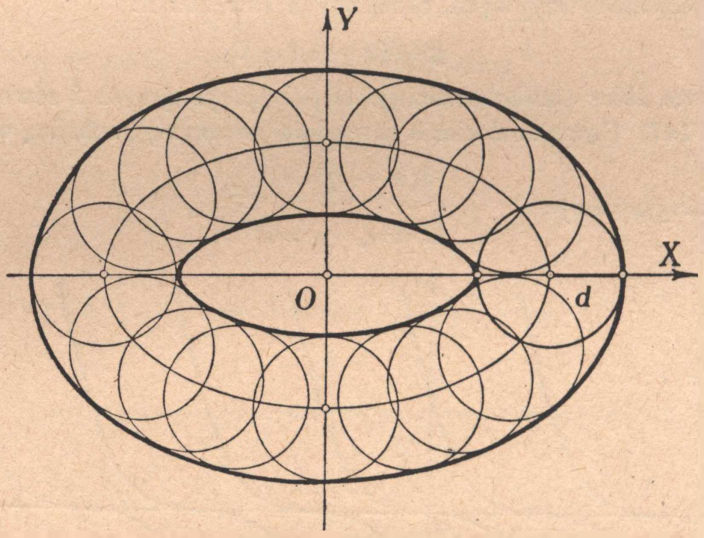


Fig. 168.

Z tych dwóch równań obliczamy $x - \varphi(t)$ i $y - \psi(t)$ i otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) + \frac{d \cdot \psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}} \\ y &= \psi(t) - \frac{d \cdot \varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}} \end{aligned}\right| \quad \text{i} \quad \left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) - \frac{d \cdot \psi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}} \\ y &= \psi(t) + \frac{d \cdot \varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}} \end{aligned}\right|$$

To są równania tych obwiednich, przedstawione w formie parametrowej. Widzieliśmy, że te same krzywe otrzymaliśmy, szukając krzywych *równoległych* do danej linji (por. § 176, wzory (182)).

Mamy tu więc nową, równoważną z dawniejszą, definicję krzywych równoległych do danej krzywej. Jeszcze inną definicję otrzymuje się na podstawie następującego twierdzenia.

Obwiednia gromady prostych równoległych do wszystkich stycznych danej linji, a leżących w stałym odstępie d od nich, tworzy dwie linje równoległe do danej linji. Dowód tego twierdzenia pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Jeżeli daną linją jest linja prosta, to wszystkie te konstrukcje prowadzą oczywiście do prostych równoległych. Dla koła linjami równoległemi są koła spółśrodkowe, z których jedno (wewnętrzne) może się zredukować do punktu. Dla elipsy otrzymujemy już wynik niespodziewanie skomplikowany. Biorąc mianowicie równanie elipsy w formie parametrowej:

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t$$

otrzymujemy z powyższych wzorów na krzywe równoległe do elipsy dość skomplikowane wzory:

$$x = a\cos t \pm \frac{bd\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

$$y = b\sin t \pm \frac{ad\sin t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$$

przyczem górne znaki należą do jednej krzywej równoległej, a dolne do drugiej. Eliminacja parametru t doprowadza tu do równania 8-go stopnia.

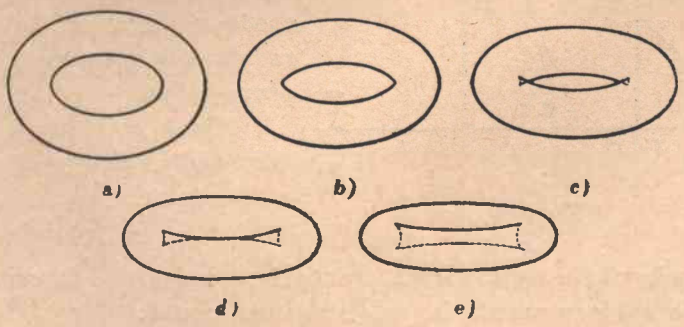


Fig. 169.

Krzywa zewnętrzna ma zawsze postać owalną, natomiast krzywa wewnętrzna może posiadać dość skomplikowaną postać, zależnie od wielkości d w porównaniu z osiami elipsy: może ona posiadać cztery punkty zwrotu i dwa węzły. Tak np. może ona mieć formy, uwidocznione na schematycznych figurach 169 a), b), c), d), e). Linje te występują w następującem zagadnieniu wykreślnem.

Chcemy przedstawić na rysunku płaskim *obręcz* (czyli: „torus“) o przekroju kołowym, jeżeli ta obręcz (t. j. jej koło osiowe) jest nachylona do płaszczyzny rysunku pod kątem różnym od 0^0 i od 90^0.

Obręcz taka powstaje, gdy koło k_1, leżące na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny drugiego koła k_2 (osiowego), posuwa się tak, że

jego środek leży zawsze na k_2. Obręcz taką możemy też pojmować jako obwiednią kul o stałym promieniu, których środki leżą na kole, zwanem osią tej obręczy. Na rysunku przedstawi się ta oś jako elipsa, każda zaś kula jako koło o stałym promieniu, a o środku na tej elipsie. Kontur rysunku tworzyć więc będą dwie krzywe równoległe do tej elipsy. Otóż zależnie od położenia tej obręczy i od jej „grubości" możemy otrzymać na kontur wewnętrzny wszystkie rodzaje linij równoległych do elipsy, przedstawione na fig. 169; widoczne będą zwykle tylko te części, które oznaczono na rysunku linją grubszą, nieprzerywaną.

10) Jeżeli promienie równoległe lub wychodzące z jakiegoś punktu S, padają na zwierciadło krzywe, to po odbiciu się od tego zwierciadła według praw optyki tworzą one gromadę linij prostych, które w ogólności nie schodzą się w jednym punkcie ani nie są do siebie równoległe. Jeżeli istnieje obwiednia tych promieni odbitych, to nazywamy ją *katakaustyką*. Łatwo można znaleźć dla zwierciadła walcowego przekrój takiej katakaustyki płaszczyzną równoległą do promieni padających, względnie płaszczyzną, przechodzącą przez S. Zajmiemy się tu tylko tym pierwszym, prostszym przypadkiem.

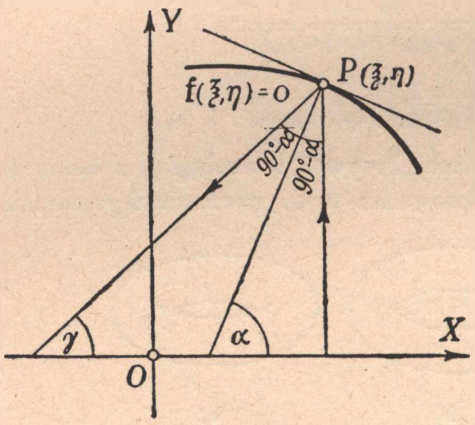


Fig. 170.

Dana jest krzywa przekroju zwierciadła walcowego (por. fig. 170) o równaniu:

$$f(\xi, \eta) = 0$$

Na to zwierciadło pada wiązka promieni równoległych do osi Y, a więc równanie każdego promienia padającego ma postać:

$$x = \xi$$

Chcemy znaleźć równanie promienia odbitego. Kąt α normalnej do zwierciadła w dowolnym punkcie z osią x-ów ma spadek:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\eta'(\xi)}$$

Promień odbity tworzy z osią x-ów kąt $\gamma = 2\alpha - 90°$ (por. fig. 170), a więc:

$$\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{ctg}2\alpha = -\frac{1-\eta'^2}{2\eta'}$$

Równanie każdego promienia odbitego ma więc postać:

$$y - \eta = -\frac{1-\eta'^2}{2\eta'}(x - \xi)$$

czyli:

$$(x-\xi)(1-\eta'^2)+2\eta'(y-\eta)=0=F(x,y,\xi)$$

Uważajmy ξ za zmienny parametr, to η jest funkcją ξ, a zatem mamy tu jednoparametrową gromadę promieni.

Obwiednią znajdziemy, dołączając do tego równania warunek:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}=-(1-\eta'^2)-(x-\xi)2\eta'\eta''+2\eta''(y-\eta)-2\eta'^2=0$$

Z tych dwóch równań łatwo jest obliczyć $x-\xi$ i $y-\eta$ i otrzymuje się:

$$x=\xi-\frac{\eta'}{\eta''}$$

$$y=\eta+\frac{1-\eta'^2}{2\eta''}$$

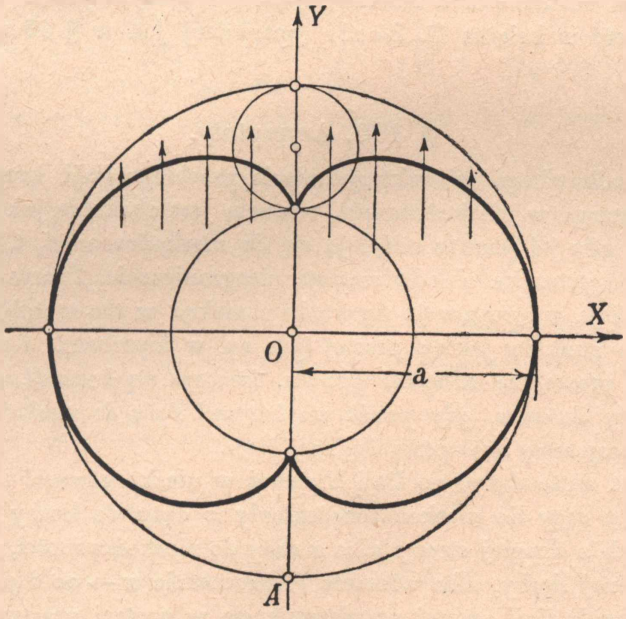


Fig. 171.

Jest to parametrowe przedstawienie katakaustyki, albowiem η jest funkcją zmiennej ξ, która jest parametrem dla tego przedstawienia.

Tak np. dla zwierciadła walcowego o przekroju kołowym, danym zapomocą równań:

$$\xi=a\cos t, \qquad \eta=a\sin t$$

otrzymamy dla promieni równoległych do osi y-ów katakaustykę:

$$x = \frac{a}{4}(3\cos t + \cos 3t)$$

$$y = \frac{a}{4}(3\sin t + \sin 3t)$$

Jest to *epicykloida* (por. fig. 171), powstająca przez toczenie się koła o promieniu $\frac{a}{4}$ po kole o promieniu $\frac{a}{2}$. Gdyby zaś promienie wychodziły z jednego punktu A na obwodzie koła, to jako katakaustykę otrzymalibyśmy kardioidę (por. § 153, fig. 136).

Podobnie wyznacza się *diakaustykę*, t. j. obwiednią promieni załamanych. Okazuje się np., że już w najprostszym przypadku, gdy promienie, wychodzące z jednego punktu, załamują się na linji prostej, otrzymujemy jako diakaustykę linję dość skomplikowaną, a mianowicie ewolutę elipsy (por. § 185, fig. 154).

Dalsze wiadomości o katakaustykach i diakaustykach może czytelnik znaleźć w książce G. Lorii (cytowanej już w § 19 na str. 81).

§ 190. Asymptoty.

Dla całkowitego scharakteryzowania przebiegu linji krzywej, o ile się ona rozciąga w nieskończoność, ważnem jest zbadanie, jak się ta linja zachowuje, gdy jej punkty oddalają się do nieskończoności, t. j. gdy ich odległość od początku układu wzrasta nieograniczenie. Zdarza się bardzo często, że linja wyprostowuje się wtedy poniekąd w ten sposób, że punkty jej dążą do punktów jakiejś prostej (jak np. w hiperboli). *Jeżeli* istnieje taka linja prosta, że *odległość punktu, leżącego na krzywej, od* tej *linji prostej dąży do zera, gdy punkt na krzywej dąży do nieskończoności, to tę prostą nazywamy asymptotą badanej linji.*

Punkt może dążyć po linji krzywej w nieskończoność albo w ten sposób, że y dąży do nieskończoności, gdy x dąży do liczby skończonej z jednej lub z drugiej strony, albo x dąży do nieskończoności, gdy y dąży do skończonej liczby, albo wreszcie równocześnie $x \to \infty$ i $y \to \infty$.

Równanie linji prostej przedstawia się w postaci $y = ax + b$, o ile nie jest ona prostopadła do osi x-ów lub w postaci $x = c$, gdy jest prostopadła do osi x-ów. Te dwa przypadki trzeba zbadać osobno.

A) I tak koniecznym i dostatecznym warunkiem na to, by prosta o równaniu $x = c$ była asymptotą linji o równaniu $y = f(x)$, jest, aby:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

Wtedy istotnie odległość $AP = d = x - c$ (por. fig. 172) dąży do zera, a równocześnie punkt P oddala się do nieskończoności. Może się przytem

zdarzyć, że $x = c$ jest asymptotą zarówno dla prawej jak i dla lewej gałęzi linji krzywej (jak na fig. 172), przyczem $y \to +\infty$ zarówno dla $c < x \to c$ jak i dla $c > x \to c$ (np. dla $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ przy $x \to 3$) albo $y \to +\infty$, gdy x dąży do c z prawej strony a $y \to -\infty$, gdy x dąży do c z lewej strony (np. dla $y = \frac{1}{x-3}$ przy $x \to 3$), a może być także tak, że linja $x = c$ jest tylko jednostronną asymptotą, jak np. prosta $x = 0$ dla linji, określonej równaniem $y = \log x$ lub dla linji o równaniu $y = e^{\frac{1}{x}}$. W tym ostatnim przykładzie $y \to +\infty$, gdy $0 < x \to 0$, a $y \to 0$, gdy $0 > x \to 0$ (por. fig. 173).

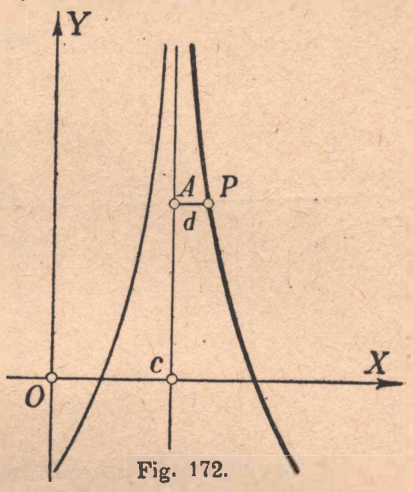


Fig. 172.

Aby więc wykryć asymptoty prostopadłe do osi x-ów, trzeba wy-

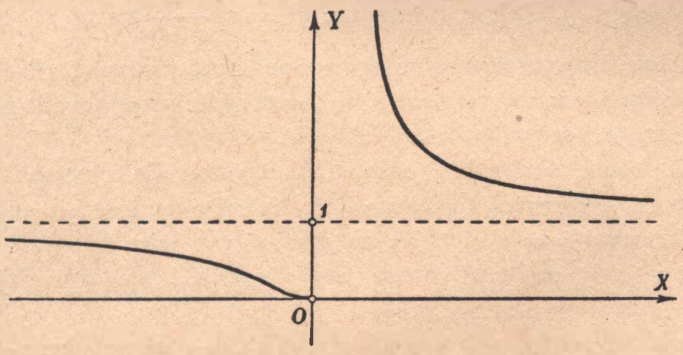


Fig. 173.

znaczyć wszystkie *skończone* wartości zmiennej x, dla których y dąży do nieskończoności.

Przykład. Wykryć asymptoty prostopadłe do osi x-ów dla linji o równaniu:

$$x^2y - 2x - 9y + 5 = 0$$

czyli:

$$y = \frac{2x-5}{x^2-9}$$

Tutaj rzędna y dąży do ∞ tylko wtedy, gdy $x \to +3$ lub gdy $x \to -3$. Proste o równaniach $x = 3$ i $x = -3$ są więc asymptotami. Zbadajmy dokładnie położenie badanej linji względem tych asymptot. Gdy x dąży do 3 z prawej strony, to y pozostaje stale dodatnie i dąży do $+\infty$.

Gdy zaś x dąży do 3 z lewej strony, to począwszy od $x = \frac{5}{2}$ jest y stale ujemne i dąży do $-\infty$ (por. fig. 174). Gdy x dąży do -3 z prawej strony, to $y \to +\infty$, a wreszcie, gdy x dąży do -3 z lewej strony, to $y \to -\infty$. Badana linja ma więc przebieg podany na fig. 174.

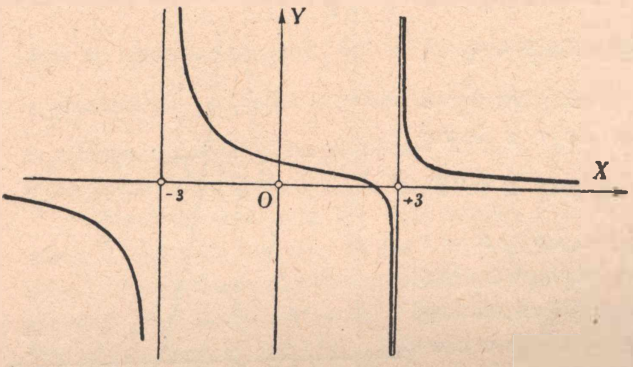


Fig. 174.

Podobnie zachowują się względem swych asymptot linje o równaniach $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$; dla tych linij istnieje nieskończenie wiele asymptot.

Poleca się czytelnikowi dla nabycia wprawy znalezienie asymptot prostopadłych do osi x-ów dla *cisoidy*, t. j. linji o równaniu: $x^3 + xy^2 - 2ay^2 = 0$ i dla *strofoidy*, t. j. linji o równaniu: $y^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x}$

Podobną drogą możnaby wykrywać asymptoty równoległe do osi x-ów, jednakże takie asymptoty mieszczą się już w ogólniejszej formie $y = ax + b$, której dyskusję przeprowadzimy obecnie.

B) Załóżmy, że istnieje taka linja prosta, nie prostopadła do osi x-ów, a więc o równaniu $y = ax + b$, której odległość od punktu, leżącego na krzywej $y = f(x)$, dąży do zera, gdy x dąży do $+\infty$ lub $-\infty$. Zobaczymy, jakie warunki muszą wtedy spełniać spółczynniki a i b tej prostej.

Odległość punktu od prostej wyraża się — jak wiadomo — wzorem.

$$(A) \qquad d = \frac{|y - ax - b|}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Ponieważ jednak $a = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem tej prostej z osią x-ów, przeto $\sqrt{1 + a^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{\sec^2 \alpha} = \frac{1}{|\cos \alpha|}$. A więc:

$$d = |(y - ax - b) \cos \alpha|$$

Kąt α jest w myśl założenia różny od 90^0, więc $\cos \alpha \neq 0$, a zatem d dąży do zera wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to \infty} (y - ax - b) = 0$$

Tutaj x, y są spółrzędnemi punktu, leżącego w ogólności poza daną linją prostą, a mianowicie na badanej linji $y = f(x)$.

Musi się więc spełniać warunek:

(B) $$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=0$$

Różnica $f(x)-ax-b=\varepsilon(x)$ jest więc taką funkcją zmiennej x, która dąży do zera, gdy x dąży do ∞. Wobec tego:

$$\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}=\frac{\varepsilon(x)}{x}$$

dąży także do zera, a stąd wynika, że:

(200) $$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a}$$

Z warunku zaś (B) otrzymujemy:

(201) $$\boxed{\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b}$$

Jeżeli więc prosta o równaniu $y=ax+b$ jest asymptotą linji o równaniu $y=f(x)$, to a i b tej prostej muszą spełniać warunki (200) i (201). Odwrotnie: jeżeli istnieją liczby a i b, spełniające warunki (200) i (201), to odległość prostej o równaniu $y=ax+b$ od punktu na linji $y=f(x)$ dąży do zera, gdy $x\to\infty$, jak to wynika z wzorów (B) i (A), a więc prosta jest asymptotą.

Wzory (200) *i* (201) *podają* więc *warunki konieczne i dostateczne dla istnienia asymptoty nierównoległej do osi y-ów.*

Przy wyznaczaniu takiej asymptoty należy najpierw obliczyć a z wzoru (200), a przy pomocy znalezionego a należy obliczyć b według wzoru (201).

Przykłady. 1) Znaleźć asymptotę nierównoległą do osi y-ów dla linji, omówionej w poprzednim przykładzie (por. fig. 174):

$$y=\frac{2x-5}{x^2-9}$$

Otóż:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{y}{x}=\frac{2-\frac{5}{x}}{x^2-9}$$

Stąd:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-5}{x^2-9}-0\cdot x\right)=0$$

A więc asymptotą jest prosta o równaniu: $y = 0 \cdot x + 0$ czyli oś x-ów: $y = 0$.

2) Wyznaczyć wszystkie asymptoty linji, której równanie jest podane w formie uwikłanej:

$$x^3 - 4xy^2 + 7 = 0$$

Szukamy najpierw asymptot równoległych do osi y-ów. Z danego równania wynika:

$$y^2 = \frac{x^3 + 7}{4x}$$

a zatem:

$$y = +\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3+7}{x}} \quad \text{lub} \quad y = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3+7}{x}}$$

Mamy więc dwie linje, leżące symetrycznie względem osi x-ów, a zatem wystarczy zbadać jedną z nich, np.

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^3+7}{x}}$$

Ta funkcja jest określona nie dla wszystkich x, lecz tylko w przedziałach $(-\infty, -\sqrt[3]{7})$ i $(0, +\infty)$.

Szukamy najpierw asymptot równoległych do osi y-ów. Widocznem jest, że $y \to +\infty$, gdy x zdąża do zera z *prawej* strony, z lewej zaś strony zera niema punktów badanej linji. Oś y-ów jest więc asymptotą (jednostronną).

Inne asymptoty otrzymamy z warunków (200) i (201), przyczem jednak trzeba osobno badać przypadek, gdy $x \to +\infty$ a osobno, gdy $x \to -\infty$. I tak:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+\frac{7}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+\frac{7}{x}}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{7}{x^3}} = \frac{1}{2} = a_1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{x^2+\frac{7}{x}}}{-\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{7}{x^3}} = -\frac{1}{2} = a_2$$

Uwaga. Przy takich rachunkach, w których chcemy wciągnąć pod pierwiastek jakąś liczbę, trzeba dobrze uważać na to, czy otrzyma się wynik dodatni czy też ujemny i znak ten musi wystąpić wyraźnie przed pierwiastkiem, albowiem sam pierwiastek pojmujemy zawsze jako liczbę dodatnią. Tak np. przy zdążaniu x do $-\infty$ wystarczy brać pod uwagę ujemne wartości x, a więc zamiast x można napisać $-\sqrt{x^2}$ a nie $\sqrt{x^2}$.

O ile więc istnieją asymptoty o tych spadkach a_1 i a_2, to muszą mieć równania:

$$y = \tfrac{1}{2}x + b_1 \quad \text{i} \quad y = -\tfrac{1}{2}x + b_2$$

Do obliczenia b_1 i b_2 używamy wzoru (201). Otóż

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+\tfrac{7}{x}} - \tfrac{1}{2}x\right) = \tfrac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\tfrac{7}{x}-x^2}{\sqrt{x^2+\tfrac{7}{x}}+x} = 0 = b_1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+\tfrac{7}{x}} + \tfrac{1}{2}x\right) = \tfrac{1}{2}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\tfrac{7}{x}-x^2}{\sqrt{x^2+\tfrac{7}{x}}-x} = 0 = b_2$$

A więc asymptotami nierównoległemi do osi y-ów są:

$$y = \tfrac{1}{2}x \quad \text{i} \quad y = -\tfrac{1}{2}x$$

Dla drugiej funkcji:

$$y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+\tfrac{7}{x}}$$

nie trzeba już powtarzać rozumowań, lecz wystarczy znaleźć symetryczne odbicie całej figury w osi x-ów. Otrzymamy w ten sposób linję, przedstawioną na fig. 175. Widzimy, że asymptota $y = \frac{1}{2}x$ jest z jednej strony

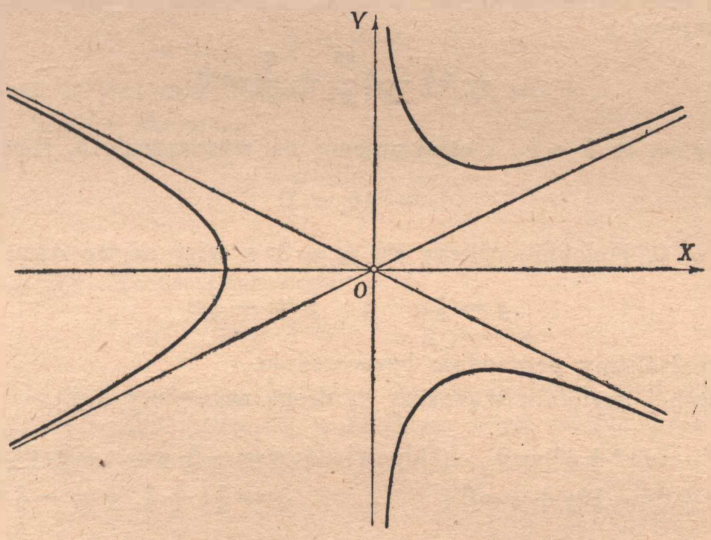


Fig. 175.

asymptotą dla prawej części dodatniej gałęzi, z drugiej zaś dla lewej części ujemnej gałęzi. Podobnie $y = -\frac{1}{2}x$ jest asymptotą lewej części dodatniej gałęzi i prawej części ujemnej gałęzi.

Dyskusja, którąśmy tutaj przeprowadzili, jest dość uciążliwa i wymaga wielkiej uwagi. Szybciej dochodzi się do celu dla wszystkich linij *algebraicznych* (por. § 24 A) przy pomocy następującej metody, której nie będziemy tu bliżej uzasadniali.

Dzielimy całe równanie przez x w potędze, równej najwyższemu stopniowi wyrazów tego równania; a więc w naszym przykładzie przez x^3. Otrzymamy:

$$1 - 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{7}{x^3} = 0$$

Gdy $x \to \infty$, to $\frac{y}{x} \to a$, i zostaje:

$$1 - 4a^2 = 0$$

a stąd: $a_1 = +\frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$.

Celem obliczenia b_1 i b_2 wstawia się w dane równanie raz $y = a_1 x + b$, a drugi raz $y = a_2 x + b$.

W ten sposób np. dla $a_1 = +\frac{1}{2}$ otrzymamy:

$$x^3 - 4x(\tfrac{1}{2}x + b)^2 + 7 = 0$$

czyli:

$$-4x^2 b - 4xb^2 + 7 = 0$$

Dzielimy całe równanie przez potęgę o jeden niższą aniżeli poprzednio i otrzymujemy:

$$-4b - 4\frac{b^2}{x} + \frac{7}{x^2} = 0$$

Gdy $x \to \infty$, to $b \to b_1$, i otrzymujemy na wyznaczenie b_1 równanie:

$$-4b_1 = 0$$

Stąd: $b_1 = 0$. Podobnie obliczy się $b_2 = 0$, a więc asymptotami są:

$$y = \tfrac{1}{2}x \quad \text{i} \quad y = -\tfrac{1}{2}x$$

jak to znaleźliśmy poprzednio bezpośrednio.

Niechaj czytelnik wyznaczy tą drogą asymptoty linij:

$x^3 - xy^2 - 5(x^2 + y^2) = 0$ (Odpowiedź: $x = -5$, $y = x - 5$, $y = -x + 5$)

$x^3 - 9y^2 + 8x - 10y + 7 = 0$ („ $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{9}$, $y = -\frac{1}{3}x - \frac{17}{9}$)

3) Zbadać asymptoty liścia Descartes'a (por. § 19, fig. 47 i § 187, przykład 1), używając parametrowej formy:

$$x = \frac{3kt}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3kt^2}{1 + t^3}$$

Zbadajmy najpierw asymptoty równoległe do osi y-ów. Trzeba więc zbadać, czy istnieją takie skończone x, dla których $y \to \infty$. Otóż y dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$ tylko wtedy, gdy mianownik dąży do zera, t. j. gdy $t \to -1$ ze strony prawej lub lewej. Wtedy jednak także x dąży do

$-\infty$ lub do $+\infty$. Niema więc takich skończonych x, dla których $y \to +\infty$, a zatem niema asymptot równoległych do osi y-ów.

By zbadać inne asymptoty, tworzymy:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to -1} t = -1 = a$$

A więc, o ile istnieje asymptota, to musi mieć spadek $a = -1$, a zatem jej równanie musi mieć postać: $y = -x + b$.

Wartość b obliczamy według wzoru (201), a mianowicie:

$$\lim_{x\to\infty}(y+x) = \lim_{t\to -1}\left(\frac{3kt^2}{1+t^3} + \frac{3kt}{1+t^3}\right) = \lim_{t\to -1}\frac{3k(t^2+t)}{1+t^3}$$

Stąd otrzymujemy np. przy pomocy reguły Hospitala:

$$\lim_{x\to\infty}(y+x) = \lim_{t\to -1}\frac{3k(2t+1)}{3t^2} = -k = b$$

Zatem asymptota istnieje i ma równanie:

$$y = -x - k$$

Asymptota ta jest uwidoczniona na fig. 47, na str. 77.

4) Linja o równaniu:

$$y = x\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

posiada inną asymptotę, gdy $x \to +\infty$ a inną, gdy $x \to -\infty$. Otrzymuje się, jak nietrudno sprawdzić:

$$y = +x \quad \text{i} \quad y = -x$$

Linja leży całkowicie po dodatniej stronie osi x-ów, pod asymptotami (pojmowanemi jako półproste, wychodzące z ich punktu przecięcia się, t. j. z początku układu).

§ 191. Związek asymptoty z styczną.

Twierdzenie: jeżeli styczna dąży do jakiejś prostej granicznej, gdy punkt oddala się po linji krzywej nieograniczenie od początku układu, to ta graniczna prosta jest asymptotą.

Uwaga. Mówimy, że prosta o równaniu: $y = f_1(t)x + f_2(t)$ *dąży* do prostej $y = ax + b$ przy t dążącem do t_0, gdy $\lim_{t\to t_0} f_1(t) = a$ i $\lim_{t\to t_0} f_2(t) = b$.

Dowód. Weźmy pod uwagę najpierw takie linje, które nie mają asymptot równoległych do osi y-ów.

Równanie stycznej ma wtedy postać:

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1)$$

czyli:

$$y = y_1' x + (y_1 - x_1 y_1')$$

Jest to zatem prosta o spadku $a(x_1) = y_1'$, odcinająca na osi y-ów odcinek $b(x_1) = y_1 - x_1 y_1'$.

Zakładamy, że ta styczna dąży do jakiegoś granicznego położenia, gdy $x_1 \to \infty$, to znaczy, że istnieją granice:

$$\lim_{x_1 \to \infty} a(x_1) = \lim_{x_1 \to \infty} y_1' = a_1$$

$$\lim_{x_1 \to \infty} b(x_1) = \lim_{x_1 \to \infty} (y_1 - x_1 y_1') = b_1$$

Graniczna prosta ma zatem równanie: $y = a_1 x + b_1$.

Twierdzimy, że ta prosta jest asymptotą.

Obliczmy dla asymptoty spadek a i odcinek b według znanych wzorów. Otóż:

$$a = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{y_1}{x_1}$$

Ponieważ wraz z x_1 równocześnie i y_1 dąży do nieskończoności (wykluczyliśmy bowiem narazie asymptoty prostopadłe do osi x-ów), przeto mamy tu wyrażenie nieokreślone postaci $\frac{\infty}{\infty}$. Na mocy reguły Hospitala otrzymujemy:

$$a = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{y_1'}{1} = a_1$$

ponieważ według założenia istnieje $\lim_{x_1 \to \infty} y_1'$ i jest równy a_1.

Podobnie:

$$b = \lim_{x_1 \to \infty} (y_1 - a x_1) = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{\frac{y_1}{x_1} - a}{\frac{1}{x_1}} = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{\frac{x_1 y_1' - y_1}{x_1^2}}{-\frac{1}{x_1^2}} = \lim_{x_1 \to \infty} (y_1 - x_1 y_1') = b_1$$

A więc asymptota istnieje i ma równanie:

$$y = a_1 x + b_1$$

Dla asymptoty $x = c$, równoległej do osi y-ów, mamy $\lim_{x \to c} y = \infty$. Spadek stycznej do takiej gałęzi krzywej może dążyć tylko do ∞, gdy $x \to c$, a ponieważ odcięta punktu styczności dąży do c, przeto styczna dąży do prostej $x = c$. A więc i w tym przypadku styczna dąży do asymptoty. Nie należy jednak sądzić, że każda asymptota jest granicznem

położeniem stycznej (czyli jak niekiedy mówią „styczną w nieskończoności“). Asymptota może bowiem istnieć, chociaż styczna nie dąży do żadnej granicznej prostej. Tak np. dla krzywej (fig. 176) o równaniu:

$$y = \frac{\cos x}{x}$$

oś x-ów jest asymptotą, bo odległość punktów tej krzywej od tej osi dąży

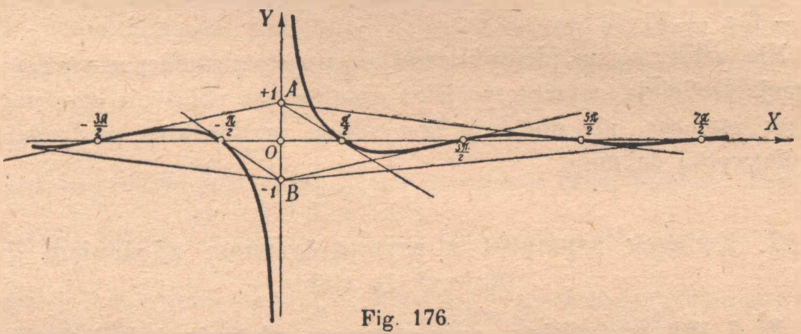


Fig. 176

do zera, gdy $x \to +\infty$ lub gdy $x \to -\infty$. Tą odległością jest tu mianowicie rzędna: y, a $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ jako iloraz ograniczonej funkcji $f(x) = \cos x$ i nieograniczonej funkcji $g(x) = x$.

Wykażemy natomiast, że styczna nie dąży tu do żadnego granicznego położenia. I tak równanie stycznej ma postać:

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1)$$

czyli:

$$y - \frac{\cos x_1}{x_1} = \frac{-x_1 \sin x_1 - \cos x_1}{x_1^2}(x - x_1)$$

Zbadajmy styczne w punktach, w których dana linja przecina dodatnią oś x-ów, t. j. w punktach $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ ogólnie: $(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

Dla $x = \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy:

$$y - 0 = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ta styczna przecina oś y-ów w punkcie $x = 0$, $y = +1$ (por. fig. 176).

Dla $x = \frac{3\pi}{2}$ otrzymujemy

$$y - 0 = \frac{+1}{\frac{3\pi}{2}}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Ta styczna przecina oś y-ów w punkcie $x = 0$, $y = -1$. Wszystkie styczne w punktach o odciętych: $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ przechodzą albo przez punkt $A(0, +1)$ albo przez punkt $B(0, -1)$; przez każdy z tych punktów przechodzi nieskończenie wiele takich stycznych.

Stąd widzimy, że styczna nie dąży do żadnego granicznego położenia, albowiem jej odcinek b na osi y-ów oscyluje ustawicznie pomiędzy -1 a $+1$.

Nie należy zatem identyfikować asymptoty z granicznem położeniem stycznej. Definicja asymptoty, jako granicznego położenia stycznej, jest bowiem zaciasna, nie obejmuje wszystkich przypadków, podpadających pod pierwotną definicję.

§ 192. Związek asymptot z asymptotycznem zdążaniem dwóch funkcyj do siebie.

W § 168 omówiliśmy asymptotyczne zdążanie jednej funkcji do drugiej, a mianowicie, jeżeli

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

to mówimy, że $f(x)$ *dąży asymptotycznie* do $g(x)$ i odwrotnie. Jeżeli linja $y = f(x)$ posiada asymptotę $y = ax + b$, to $f(x)$ dąży asymptotycznie do $ax + b$, albowiem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{ax+b} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{a+\frac{b}{x}} = \frac{a}{a} = 1$$

Jednakże nietylko ta prosta $g(x) = ax + b$ dąży asymptotycznie do $f(x)$, lecz także każda inna równoległa do niej prosta, np. $ax + 2b$, a także rozmaite inne linje, np. $g(x) = ax + \sqrt{x}$.

Dla asymptoty zachodzi zatem coś więcej, aniżeli zdążanie asymptotyczne, a mianowicie nietylko błąd *względny* dąży do zera, gdy zastąpimy $f(x)$ funkcją $g(x)$, t. j. nietylko:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = 0$$

lecz także błąd *bezwzględny* dąży do zera. Jeżeli bowiem prosta $g(x) = ax + b$ jest asymptotą, to:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax - b) = 0$$

w myśl wzoru (B) na str. 591.

O takich dwóch funkcjach, których błąd *bezwzględny* dąży do zera, gdy x dąży do ∞, mówimy, że są sobie *asymptotycznie równe.*

Uwaga. Niektórzy autorowie nazywają asymptotycznie równemi funkcjami dwie funkcje, które dążą do siebie asymptotycznie, bez względu na to, czy błąd bezwzględny $f(x)-g(x)$ dąży także do zera, czy też nie. Odróżnienie tych dwóch przypadków może być jednak pożytecznem.

W ten sposób można wprowadzić oprócz asymptot prostolinjowych także rozmaite *asymptoty krzywolinjowe*, np. paraboliczne. Jeżeli się mianowicie dla danej funkcji $f(x)$ znajdzie taka parabola $g(x)=ax^2+bx+c$, że

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$$

to tę parabolę nazwiemy paraboliczną asymptotą danej funkcji. Tak np. dla funkcji: $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+4x+5}{x-3}$ paraboliczną asymptotą jest $g(x)=$ $=x^2+x+7$, albowiem $f(x)=x^2+x+7+\dfrac{26}{x-3}$, a więc $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$. Te dwie funkcje są zatem asymptotycznie równe. Dla wielkich x można zastąpić jedną funkcję drugą.

ROZDZIAŁ XVI.

Wzory interpolacyjne i metody przybliżonego rozwiązywania równań.

Ustęp I.

WZORY INTERPOLACYJNE.

§ 193. Ogólne zagadnienie interpolacji.

Ogólne zagadnienie interpolacji można sformułować w następujący posób. Dla skończonego ciągu wartości zmiennej niezależnej:

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \dots x_n$$

znamy odpowiadające im wartości zmiennej zależnej:

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots y_n$$

Chcemy zbudować jakąkolwiek funkcję $y = f(x)$, określoną bądźto dla wszystkich x, bądźto tylko dla skończonego przedziału, zawierającego

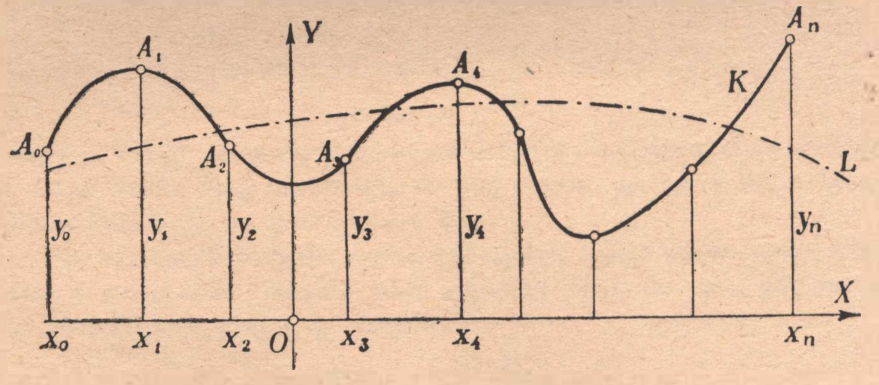


Fig. 177.

wszystkie dane wartości x, któraby przyjmowała jużto ściśle te dane wartości y_k, jużto wartości, nieznacznie tylko od nich odbiegające.

Zagadnienie to możemy przedstawić w następującej geometrycznej postaci. Dany jest na płaszczyźnie skończony zbiór oddzielnych punktów $A_0(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1), \dots A_n(x_n, y_n)$ (por. fig. 177). Chcemy znaleźć linję,

która bądźto przechodzi dokładnie przez te wszystkie punkty, jak np. linja K na fig. 177, bądźto przewija się pomiędzy temi punktami, odchylając się nieznacznie od nich wszystkich, jak np linja L na fig. 177.

Każdą taką funkcję $I(x)$ nazywamy *wzorem interpolacyjnym* dla danego zbioru par liczb. Znalazłszy jakiś wzór interpolacyjny, możemy obliczać wartości y także dla tych pośrednich wartości x, dla których zgóry nie są podane żadne wartości, czyli możemy *pomiędzy* dane wartości $y_0, y_1, y_2, \ldots$ *wstawiać* nowe wartości, zgodne z wzorem $I(x)$. Takie *wstawianie* nowych wartości między wyrazy jakiegoś ciągu, wykonywane na podstawie przyjętego wzoru interpolacyjnego, nazywamy *interpolacją* tego ciągu. Jeżeli funkcja $I(x)$ jest określona także *poza* najmniejszym przedziałem, zawierającym wszystkie dane x, to możemy obliczać także wartości y dla wartości x, leżących poza tym przedziałem: takie postępowanie nazywamy *extrapolacją* danego ciągu wartości $y_0, y_1, y_2, \ldots$.

Uwaga. Problem interpolacji uogólniono także na nieskończone ciągi par wartości (x, y) tutaj jednak nie będziemy się tem ogólniejszem zagadnieniem zajmowali, ze względu na mniejsze jego znaczenie dla celów matematyki stosowanej.

Zagadnienia interpolacji są nadzwyczaj doniosłe we wszystkich naukach, opartych na spostrzeżeniach pomiarowych. Jeżeli bowiem otrzymamy z pomiarów skończoną liczbę par wartości dwóch, związanych ze sobą zmiennych, to chcemy zwykle zbiór tych par ująć w jakiś wzór ogólny, pozwalający obliczyć wartości zmiennej zależnej także dla tych wartości zmiennej niezależnej, dla których nie wykonano pomiarów. Czasem jest zgóry podana ogólna postać takiego wzoru, na podstawie jakiejś zgóry przyjętej hipotezy, a trzeba tylko ten wzór dostosować do konkretnego, szczegółowego przypadku, przez obliczenie stałych współczynników lub innych ogólniejszych parametrów, występujących w przyjętym wzorze ogólnym. Tak się postępuje np. w astronomji przy wyznaczaniu dróg komet, o których na mocy praw mechaniki ciał niebieskich zakładamy, że są linjami drugiego stopnia. Czasem chcemy wypróbować, która z różnych dopuszczalnych hipotez najlepiej się zgadza z wynikami doświadczeń. Czasem znowu chodzi nam tylko o wygodne rachunkowe ujęcie całej serji spostrzeżeń, bez pretensji do stawiania jakiejś ogólnej hipotezy. Tak postępuje się np. często w zagadnieniach techniki, budując t. zw. empiryczne wzory. Wreszcie interpolacja odgrywa bardzo ważną rolę przy tabelarycznem przedstawieniu funkcji: wartości funkcji pośrednie, nie zawarte w tablicy, oblicza się przy pomocy wzorów interpolacyjnych, zbudowanych w najprostszym przypadku dla dwóch sąsiednich par (x_1, y_1) i (x_2, y_2) z tablicy (np. w logarytmach do 7 cyfr). Czasem trzeba używać trzech par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) (np. w logarytmach 10 cyfrowych) a ogólnie bierze się pod uwagę n par kolejnych z tablicy i buduje się ogólny wzór interpolacyjny.

Tak postawione zagadnienie interpolacji jest jeszcze pod wieloma względami nieoznaczone. I tak przedewszystkiem trzeba odróżnić te metody interpolacji, w których żądamy, aby zbudowana funkcja przybrała *ściśle* żądane wartości, od tych metod, w których poprzestajemy na funkcjach, odchylających się nieznacznie od danych wartości. Tą drugą grupą zagadnień zajmowaliśmy się już nieco w rozdziale poświęconym extremom (por. § 151 i § 158). W tym rozdziale zajmiemy się dokładniej tylko pierwszą grupą metod, t. j. funkcjami, przybierającemi ściśle podane wartości. Jednak i przy tem ograniczeniu zagadnienie jest jeszcze nieoznaczone, dopuszcza nieskończenie wiele rozmaitych rozwiązań. Jest to np. jasnem w geometrycznem sformułowaniu zagadnienia interpolacji. Widać mianowicie z fig. 177, że przez n danych punktów można przeprowadzić nieskończenie wiele linij krzywych, a więc istnieje nieskończenie wiele funkcyj, spełniających żądane warunki. Spośród tej mnogości funkcyj należy zatem wybrać pewne kategorje, bądźto szczególnie proste, bądźto szczególnie dobrze się nadające do ujęcia badanego zjawiska we wzór matematyczny. Najbardziej rozpowszechnione i najlepiej opracowane są dwie metody: jedna z nich, zwana interpolacją *paraboliczną,* polega na użyciu parabol rozmaitych stopni, czyli *wielomianów* jako wzorów interpolacyjnych: $I(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$, druga zaś, interpolacja *trygonometryczna,* polega na użyciu funkcji, zwanej wielomianem trygonometrycznym, przedstawiającej sumę drgań harmonicznych prostych:

$$I(x) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Ta druga metoda nadaje się szczególnie dobrze do przedstawiania zjawisk perjodycznych. Obydwie te metody nadają się zarówno do interpolacji jak i do extrapolacji, albowiem obydwie te funkcje są określone dla wszystkich x, także z poza przedziału, w którym się mieszczą x_0, $x_1, \ldots x_n$. W tym rozdziale zajmiemy się tylko interpolacją paraboliczną a interpolację trygonometryczną omówimy w drugim tomie, w związku z rozwijaniem funkcyj na nieskończone szeregi trygonometryczne.

Ale nawet przy ograniczeniu się do jednej z tych metod, w naszym przypadku do interpolacji parabolicznej, zagadnienie jest jeszcze nieoznaczone, dopóki nie ograniczymy *stopnia* paraboli (wielomianu).

Tak np. przez dwa dane punkty można zawsze przeprowadzić bądźto linję prostą (którą moglibyśmy uważać za parabolę 1-go stopnia), bądźto parabolę 2-go stopnia, 3-go stopnia i t. p.; przez trzy punkty można zawsze wykreślić parabolę stopnia nie większego jak 2 (tj. zwyczajną parabolę lub linję prostą, o ile te trzy punkty leżą na jednej linji prostej) lub parabolę stopnia 3-go lub 4-go i t. p. Zagadnienie stanie

się jednak zupełnie dokładnie oznaczonem, jeżeli zażądamy paraboli możliwie najniższego stopnia, przechodzącej przez $n+1$ danych punktów $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ czyli wielomianu możliwie najniższego stopnia, przybierającego dla $n+1$ danych wartości x, podane zgóry wartości y.

I tak w następnych paragrafach zbudujemy taki wielomian stopnia conajwyżej n-tego, który spełnia żądane warunki. Ma on więc postać:

$$I_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

zawiera zatem $n+1$ spółczynników, z których niektóre mogą być zerami, zależnie od szczegółowych wartości (x_k, y_k). Istnieje nieskończenie wiele wielomianów *wyższego* stopnia, które spełniają żądane warunki; takim jest np. każdy wielomian postaci: $I_n(x) + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \cdot W(x)$, gdzie $W(x)$ jest zupełnie dowolnym wielomianem. Jednakże prócz $I_n(x)$ niema żadnego innego wielomianu stopnia conajwyżej n-tego, któryby spełniał żądane warunki. Gdyby bowiem istniał drugi taki wielomian:

$$K_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

przyczem niektóre b mogą być także zerami, to wielomiany $I_n(x)$ i $K_n(x)$ byłyby sobie równe dla $n+1$ wartości $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$. Wiemy zaś z § 22, że takie dwa wielomiany stopnia n-tego lub niższego muszą być *tożsamościowo* równe czyli *identyczne*, a więc musi być:

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \quad b_2 = a_2, \ldots \quad b_n = a_n$$

Zagadnienie nasze jest więc jednoznacznie rozwiązalne, o ile wogóle posiada rozwiązanie. Że zaś rozwiązanie istnieje, to okażemy przez faktyczną konstrukcję takiego wielomianu.

Uwaga. Czytelnik, obeznany z zastosowaniem wyznaczników do rozwiązywania układów równań linjowych, znajdzie z łatwością odrazu rozwiązanie tego zagadnienia w następujący sposób. Z żądanych warunków wynika następujący układ $n+1$ równań linjowych na wyznaczenie niewiadomych $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= y_0 \\
a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= y_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= y_n
\end{aligned}$$

Stąd otrzymuje się $a_0, a_1, \ldots, a_n$ w sposób jednoznaczny jako ilorazy wyznaczników, np.:

$$a_0 = \begin{vmatrix} y_0 & x_0 & x_0^2 \ldots x_0^n \\ y_1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ y_n & x_n & x_n^2 \ldots x_n^n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots x_n^n \end{vmatrix}$$

W teorji wyznaczników okazuje się, że wyznacznik, przez który tu dzielimy, jest zawsze różny od zera (ponieważ $x_0, x_1, x_2 \ldots x_n$ są liczbami różnemi od siebie). Zatem wszystkie spółczynniki $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ są skończone i oznaczone (mogą zaś być zerami, o ile któryś z wyznaczników, zawartych w dzielnych, jest zerem). W ten sposób otrzymuje się odrazu żądany wielomian w sposób jednoznaczny, jednakże forma tych spółczynników jest bardzo niedogodna do rachunku. By tego uniknąć, podano dla tego wielomianu rozmaite inne dogodne formy.

Wzory interpolacyjne znajdują zastosowanie także do *aproksymacji* funkcyj. Jeżeli mamy do czynienia z jakąś skomplikowaną funkcją, której wzór jest bądźto nieznany (np. w rozmaitych diagramach, otrzymanych przy pomocy przyrządów samopiszących), bądźteż znany, lecz bardzo skomplikowany lub nieprzydatny do szczegółowych rachunków, to staramy się zastąpić tę funkcję jakąś prostszą funkcją. Za taką przybliżoną funkcję można brać np. wielomian interpolacyjny, który się zgadza z daną funkcją w n punktach. Bardzo ważnem zagadnieniem przy używaniu takiej aproksymacji jest ocena *błędu*, popełnionego przez zastąpienie danej funkcji prostszą funkcją.

§ 194. Wzór interpolacyjny Lagrange'a.

Chodzi nam o zbudowanie wielomianu możliwie najniższego stopnia, któryby dla $n+1$ różnych wartości:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$$

przybierał dane wartości:

$$y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$$

Wielomian ten złożymy z takich dodajników, z których każdy z osobna przyjmuje jedną z żądanych wartości, np. y_k dla $x = x_k$, a staje się zerem dla pozostałych wartości $x = x_0, x_1 \ldots x_{k-1}, x_{k+1} \ldots x_n$.

Najprostszym wielomianem, spełniającym ten drugi warunek, jest:

$$(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$$

Dla $x = x_k$ to wyrażenie nie jest już równe zeru, lecz przyjmuje wartość:

$$(x_k - x_0) \cdot (x_k - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1}) \cdot (x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_n)$$

Iloraz tych dwóch iloczynów przyjmuje zatem dla $x = x_k$ wartość 1 a dla pozostałych danych x wartość zero. Mnożąc otrzymany iloraz przez y_k, otrzymamy wyrażenie:

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)} \cdot y_k$$

To wyrażenie redukuje się do y_k dla $x = x_k$ a dla pozostałych danych x ma wartość zero. Tworzymy sumę $n+1$ podobnie zbudowanych dodajników, a mianowicie:

$$(202)\qquad \begin{aligned} L(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}\,y_0 + \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}\,y_1 + \dots + \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}\,y_n \end{aligned}$$

To wyrażenie jest *wielomianem* (mianowniki są bowiem liczbami stałemi dla danych $x_0, x_1 \dots x_n$) stopnia co najwyżej n: dla szczególowych danych może się stopień tego wielomianu obniżyć. Wiemy zaś z poprzedniego paragrafu, że istnieje tylko jeden taki wielomian dla $n+1$ danych warunków, jest to zatem ów jedyny wielomian interpolacyjny najniższego stopnia. Tę formę wielomianu interpolacyjnego nazywamy *wzorem interpolacyjnym Lagrange'a*.

Przykład. Wyznaczyć parabolę możliwie najniższego stopnia, przechodzącą przez punkty:

$$A_0(-1, 1), \quad A_1(1, 2), \quad A_2(3, -1), \quad A_3(6, 4)$$

Podstawiamy te wartości we wzór Lagrange'a i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} L(x) = {} & \frac{(x-1)(x-3)(x-6)}{(-1-1)(-1-3)(-1-6)}\cdot 1 + \frac{(x+1)(x-3)(x-6)}{(1+1)(1-3)(1-6)}\cdot 2 + \\ & + \frac{(x+1)(x-1)(x-6)}{(3+1)(3-1)(3-6)}\cdot(-1) + \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(6+1)(6-1)(6-3)}\cdot 4 \end{aligned}$$

Po wykonaniu łatwych rachunków otrzymamy:

$$L(x) = \tfrac{1}{210}(34x^3 - 207x^2 + 71x + 522)$$

Parabola 3-go stopnia o tem równaniu przechodzi przez 4 dane punkty. Nie istnieje zaś parabola niższego stopnia, któraby przechodziła przez te punkty.

Wzór Lagrange'a rozwiązuje wprawdzie w zupełności zagadnienie interpolacji parabolicznej, jednakże rachunki są tu dość uciążliwe a zwłaszcza dla większej ilości punktów. Dlatego też używa się w praktyce także rozmaitych innych postaci tego wielomianu, nadających się lepiej do przejrzystego wykonania obliczeń a ponadto wykazujących rozmaite ciekawe związki teoretyczne. Takim jest np. wzór interpolacyjny Newtona, którym się zajmiemy w następnych paragrafach.

§ 195. Wzór interpolacyjny Newtona dla równych odstępów zmiennej niezależnej.

Wiemy, że wielomian interpolacyjny możliwie najniższego stopnia przyjmujący $n+1$ danych wartości $y_0, y_1 \dots y_n$ dla $x = x_0, x_1 \dots x_n$, ma postać ogólną:

$$I(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Zasadniczą myślą w interpolacyjnym wzorze Newtona jest uporządkowanie tego wielomianu nie według kolejnych potęg zmiennej x, lecz według kolejnych iloczynów postaci:

$$x - x_0, \quad (x - x_0)(x - x_1),$$
$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), \dots (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})$$

stopni: $1, 2, 3, \dots, n$, to znaczy przedstawienie tego wielomianu w postaci:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} I(x) = c_0 &+ c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ &+ c_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Jeżeli ten wielomian ma przyjmować wartości $y_0, y_1, y_2 \dots y_n$, to otrzymujemy $n+1$ warunków na wyznaczenie stałych $c_0, c_1 \dots c_n$. Omówimy najpierw prostszy, a w praktyce najważniejszy przypadek, gdy odstępy wartości zmiennej niezależnej są równe, to znaczy, gdy:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x$$

Spółczynniki $c_0, c_1, c_2 \dots c_n$ wyznaczymy metodą podobną do tej, której używaliśmy do wyznaczania spółczynników wielomianu we wzorze Taylora lub Maclaurina (por. § 96). Utworzymy mianowicie dla funkcji $I(x)$ kolejne *ilorazy różnicowe* (przy budowie zaś wzoru Maclaurina, tworzyliśmy kolejne pochodne), określone wzorami:

$$\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta^2 I(x)}{\Delta x^2} = \frac{\dfrac{\Delta I(x + \Delta x)}{\Delta x} - \dfrac{\Delta I(x)}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\Delta I(x + \Delta x) - \Delta I(x)}{\Delta x^2}$$

i w ten *sam sposób ogólnie.* $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ nazywamy *pierwszą różnicą* funkcji $f(x)$, odniesioną do początkowej wartości x; $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x + \Delta x) - \Delta f(x)$ nazywamy *drugą różnicą* a ogólnie:

$$\Delta^r f(x) = \Delta^{r-1} f(x + \Delta x) - \Delta^{r-1} f(x)$$

nazywamy *r-tą różnicą funkcji* $f(x)$, odniesioną do początkowej wartości x.

Przy tworzeniu tych ilorazów różnicowych opieramy się na następujących prostych twierdzeniach (analogicznych do odpowiednich twierdzeń o pochodnych):

(I) $$\frac{\Delta c}{\Delta x} = 0$$

(II) $$\frac{\Delta(f(x) + g(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

(III) $$\frac{\Delta(c \cdot f(x))}{\Delta x} = c \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

które czytelnik sprawdzi bez trudności, tudzież na twierdzeniu o tworzeniu ilorazu różnicowego iloczynów postaci:

$$w_r(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{r-1})$$

Okażemy mianowicie, że stosuje się tu następujący wzór, podobny do wzoru na pochodną potęgi:

(IV) $$\frac{\Delta w_r(x)}{\Delta x} = r w_{r-1}(x)$$

t. j., że przy tworzeniu ilorazu różnicowego dla takiego iloczynu odpada czynnik końcowy $x - x_{r-1}$ a przybywa stały czynnik r.

Dowód.

$$\begin{aligned}\Delta w_r(x) &= (x + \Delta x - x_0)(x + \Delta x - x_1)\dots(x + \Delta x - x_{r-1}) - \\ &\qquad - (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{r-1}) \\ &= (x + \Delta x - x_0)(x - x_0)\dots(x - x_{r-2}) - \\ &\qquad - (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{r-1}) \\ &= (x + \Delta x - x_0 - x + x_{r-1}) \cdot [(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{r-2})] \\ &= (x_r - x_0) w_{r-1}(x) = r \cdot \Delta x\, w_{r-1}(x)\end{aligned}$$

a stąd:

$$\frac{\Delta w_r(x)}{\Delta x} = r w_{r-1}(x) \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Uderzającą jest analogja tych wzorów (I)—(IV) do odpowiednich wzorów rachunku różniczkowego. Używając tych wzorów, tworzymy bez trudności kolejne ilorazy różnicowe badanego wielomianu (a).

I tak:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta I(x)}{\Delta x} &= 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 (x - x_0) + 3 c_2 (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ &\qquad + n c_n (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-2}) \\ \frac{\Delta^2 I(x)}{\Delta x^2} &= 1 \cdot 2 c_2 + 2 \cdot 3 c_3 (x - x_0) + 3 \cdot 4 (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ &\qquad + n(n-1) c_n (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-3}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\Delta^n I(x)}{\Delta x^n} &= n!\, c_n\end{aligned}$$

Kładąc w tych wzorach $x = x_0$, otrzymamy odrazu wzory na wszystkie szukane spółczynniki, a mianowicie:

$$c_0 = I(x_0),\ c_1 = \frac{\Delta I(x_0)}{\Delta x},\ c_2 = \frac{1}{2!}\frac{\Delta^2 I(x_0)}{\Delta x^2},\ \ldots c_n = \frac{1}{n!}\frac{\Delta^n I(x_0)}{\Delta x^n}$$

A więc każdy wielomian n-tego stopnia można przedstawić zapomocą jego kolejnych różnic, odniesionych do tej samej początkowej wartości $x = x_0$, a mianowicie:

$$I(x) = I(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta I(x_0)}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 I(x_0)}{\Delta x^2} + \ldots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{n!} \cdot \frac{\Delta^n I(x_0)}{\Delta x^n}$$

Spostrzegamy tu wielką analogję z wzorem Taylora dla wielomianu. Można nawet okazać, że ten wzór wprost przechodzi w wzór Taylora, gdy Δx dąży do zera.

Jeżeli są podane zgóry wartości

$$I(x_0) = y_0,\ I(x_1) = y_1,\ I(x_2) = y_2, \ldots I(x_n) = y_n$$

to tem samem są podane wszystkie pierwsze różnice:

$$\Delta I(x_0) = y_1 - y_0 = \Delta y_0,\ \Delta I(x_1) = y_2 - y_1 = \Delta y_1, \ldots \Delta I(x_{n-1}) = y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1},$$

wszystkie drugie różnice:

$$\Delta^2 I(x_0) = \Delta I(x_1) - \Delta I(x_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0$$

i podobnie wszystkie dalsze różnice.

Wobec tego nasz wzór przyjmuje postać:

$$I(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \ldots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{n!}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}$$

Uwidoczniwszy zaś tu to, że wartości $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ mają równe odstępy Δx, otrzymujemy ostatecznie:

$$(203)\quad \boxed{I(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1!}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - \Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - \Delta x)\ldots(x - x_0 - (n-1)\Delta x)}{n!}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n}}$$

Tę postać wielomianu interpolacyjnego nazywamy *wzorem interpolacyjnym Newtona* dla równych odstępów zmiennej niezależnej.

Biblioteka P.N.S.P. w Krakowie

Można także bezpośrednio stwierdzić, że wielomian Newtona przyjmuje dla każdego $x = x_m$ żądaną wartość $I(x_m) = y_m$. W tym celu wyraża się y_m zapomocą kolejnych różnic następującym wzorem:

$$y_m = y_0 + \binom{m}{1}\Delta y_0 + \binom{m}{2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{m}{m}\Delta^m y_0$$

czyli w łatwo zrozumiałej symbolicznej formie:

$$y_m = (1+\Delta)^m y_0$$

Ten wzór jest prawdziwy dla początkowych $m = 1, 2$, jak to widać odrazu z definicji różnic. A mianowicie:

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0 \text{ a stąd } y_1 = y_0 + \Delta y_0 = (1+\Delta)y_0.$$

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0 \text{ a stąd } \Delta y_1 = \Delta y_0 + \Delta^2 y_0;$$

ponieważ zaś

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1,$$

przeto

$$y_2 = y_1 + \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = (1+\Delta)^2 y_0$$

Prawdziwość tego wzoru w przypadku ogólnym udowadnia się przez indukcję: z r na $r+1$. Pomijamy tu ten dość prosty dowód.

Otóż, jeżeli we wzorze Newtona (203) podstawimy $x = x_k$ $(k \leqq n)$, to wyrazy, zawierające różnice wyższe od $\Delta^k y_0$, odpadną i zostanie:

$$I(x_k) = y_0 + \frac{x_k - x_0}{1!}\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x_k - x_0)(x_k - x_0 - \Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{(x_k - x_0)(x_k - x_0 - \Delta x)\ldots(x_k - x_0 - (k-1)\Delta x)}{k!}\frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k} =$$

$$= y_0 + \frac{k\cdot\Delta x}{1!\,\Delta x}\cdot\Delta y_0 + \frac{k\cdot\Delta x\cdot(k-1)\cdot\Delta x}{2!\,\Delta x^2}\cdot\Delta^2 y_0 + \ldots +$$

$$+ \frac{k\cdot\Delta x\cdot(k-1)\Delta x\cdot\ldots 1\cdot\Delta x}{k!\,\Delta x^k}\Delta^k y_0$$

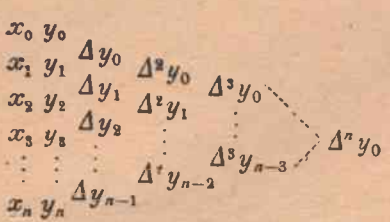
$$I(x_k) = y_0 + \binom{k}{1}\Delta y_0 + \binom{k}{2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{k}{k}\Delta^k y_0$$

A zatem istotnie: $I(x_k) = y_k$, a więc wielomian $I(x)$ przyjmuje żądane wartości dla danych x.

Budowa wzoru Newtona ma tę dogodność, że przy dobieraniu dalszych wartości $(x_{n+1}, y_{n+1}), (x_{n+2}, y_{n+2})\ldots$ nie trzeba zmieniać poprzednich wyrazów, lecz dopisuje się tylko dalsze dodajniki. Natomiast we wzorze Lagrange'a dołączenie każdej nowej pary wartości (x_{n+1}, y_{n+1}) zmienia wszystkie dodajniki tego wzoru.

Dalszą bardzo ważną zaletą wzoru Newtona jest nadzwyczaj przejrzysty schemat rachunkowy, którym się posługujemy przy obliczaniu

stałych spółczynników Δy_0 $\Delta^2 y_0, \ldots \Delta^n y_0$, występujących w tym wzorze. Wypisuje się mianowicie obok wartości zmiennej niezależnej, odpowiadające im wartości zmiennej zależnej, w następnej kolumnie wypisuje się pierwsze różnice pomiędzy odpowiednią odjemną i odjemnikiem, w następnej kolumnie w ten sam sposób drugie różnice i t. d. aż do n-tej różnicy.



Tak np. chcąc zbudować wielomian możliwie najniższego stopnia, który dla $x = 0, 1, 2, 3, 4$ przyjmuje wartości: $y = 10, 9, 12, 43, 150$, tworzymy następujący schemat:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	10				
		-1			
1	9		4		
		3		24	
2	12		28		24
		31		48	
3	43		76		
		107			
4	150				

Przy pomocy liczb, znajdujących się w pierwszym wierszu ukośnym, zstępującym, tworzymy odrazu wielomian interpolacyjny:

$$I(x) = 10 + \frac{x-0}{1!} \cdot (-1) + \frac{x(x-1)}{2!} \cdot 4 +$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \cdot 24 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!} \cdot 24$$

czyli:

$$I(x) = 10 - x + 2x(x-1) + 4x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)$$

lub:

$$I(x) = 10 - x + x^2 - 2x^3 + x^4$$

Wzór Newtona można napisać w pewnej jeszcze dogodniejszej formie, kładąc $\frac{x - x_0}{\Delta x} = z$. Wtedy $\frac{x - x_0 - \Delta x}{\Delta x} = z - 1$, $\frac{x - x_0 - 2\Delta x}{\Delta x} = z - 2$ i t. d. i otrzymujemy:

$$(204) \quad I(x) = I(x_0 + z \cdot \Delta x) = y_0 + z\Delta y_0 + \binom{z}{2} \Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{z}{n} \Delta^n y_0$$

Ten wzór nadaje się bardzo dobrze do rachunku maszynowego, zwłaszcza gdy wprowadzimy odpowiednie nawiasy:

$$I(x_0 + z \cdot \Delta x) = y_0 +$$

$$+ \frac{z}{1}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}(1-z)\left(\Delta^2 y_0 - \frac{1}{3}(2-z)\left(\ldots\left(\Delta^{n-1} y_0 - \frac{1}{n}(n-1-z)\Delta^n y_0\right)\ldots\right)\right)\right)$$

Rachunek trzeba wtedy rozpocząć od środkowego nawiasu.

§ 196. Zastosowanie wzoru Newtona do postępów arytmetycznych wyższych rzędów i do interpolacji tablic.

Ciąg liczb:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

nazywamy postępem arytmetycznym pierwszego rzędu, jeżeli wszystkie wyrazy ciągu jego pierwszych różnic są stałe t. j. jeżeli:

$$\Delta a_0 = \Delta a_1 = \ldots = \Delta a_n = \ldots = d$$

Znane są z elementarnej matematyki wzory na wyraz ogólny i n-tą sumę częściową szeregu arytmetycznego, a mianowicie:

$$a_n = a_0 + nd, \quad S_n = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n) = (n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}d$$

Jeżeli pierwsze różnice nie są stałe, lecz dopiero drugie, t. j. jeżeli:

$$\Delta^2 a_0 = \Delta^2 a_1 = \ldots = \Delta^2 a_n = \ldots = c$$

to dany ciąg nazywamy postępem arytmetycznym 2-go rzędu. Np. takim jest ciąg kwadratów kolejnych liczb naturalnych:

$$1^2, \quad 2^2, \quad 3^2, \quad 4^2, \quad 5^2, \ldots$$

albowiem:

$$\Delta a = 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \ldots$$
$$\Delta^2 a = \quad 2, \quad 2, \quad 2, \ldots$$

Ogólnie postęp arytmetyczny jest rzędu r, jeżeli wszystkie różnice rzędu r są sobie równe, a różnice rzędu $r-1$ jeszcze nie są równe. Przy pomocy wzoru interpolacyjnego Newtona można podać odrazu dla każdego postępu arytmetycznego dowolnego rzędu r wzory na wyraz ogólny a_n i na sumę częściową S_n, wyrażające a_n i S_n przy pomocy wskaźnika n, wyrazu początkowego a_0 i kolejnych różnic.

Zagadnienie bowiem znalezienia wzoru na a_n możemy sformułować w następujący sposób: dla $x = n = 0, 1, 2, \ldots$ dane są wartości $y = a_0, a_1, a_2, \ldots$; chcemy wyznaczyć wielomian $I(n)$ możliwie najniższego stopnia w zmiennej n, który przyjmuje te *wszystkie* wartości Mogłoby się zdawać, że to zagadnienie jest nierozwiązalne, ponieważ żądamy spełnienia się nieskończenie wielu warunków. Okażemy jednak, że w tym wypadku to zagadnienie jest rozwiązalne. W każdym bowiem razie potrafimy znaleźć przy dowolnem $k > r$ taki wielomian k-tego stopnia, który dla $n = 0, 1, 2, \ldots k$ przyjmuje $k+1$ wartości $a_0, a_1, \ldots a_k$. Jest to wielomian (204), w którym położono $n = k$, $x = n$ a więc $z = \frac{n-0}{1} = n$.

Mamy:

$$I(n) = a_0 + n\Delta a_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 a_0 + \ldots + \binom{n}{r}\Delta^r a_0 + \binom{n}{r+1}\Delta^{r+1} a_0 + \ldots + \binom{n}{k}\Delta^k a_0$$

Wobec tego, że $\Delta^r a_0 = c$, mamy $\Delta^{r+1} a_0 = \Delta^{r+2} a_0 = \ldots = \Delta^k a_0 = 0$. Zatem żądany wielomian redukuje się do następującego wielomianu r-tego stopnia, niezależnie od tego, jakie obierzemy k:

$$(w) \qquad I(n) = a_0 + n\Delta a_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 a_0 + \ldots + \binom{n}{r}\Delta^r a_0$$

Przybiera on dla wszystkich $n = 0, 1, 2, \ldots$ żądane wartości $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Ogólnie więc $I(n) = a_n$, a zatem:

$$(205) \qquad \boxed{a_n = a_0 + n\Delta a_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 a_0 + \ldots + \binom{n}{r}\Delta^r a_0}$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wzór na wyraz ogólny postępu arytmetycznego dowolnego rzędu r.

Równie łatwo wyprowadza się wzór na n-tą sumę częściową. Ponieważ:

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_1 = a_0 \\ S_2 = a_0 + a_1 \\ S_3 = a_0 + a_1 + a_2 \\ S_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} \end{array}\right| \quad \text{przeto} \quad \left|\begin{array}{l} \Delta S_0 = a_0 \\ \Delta S_1 = a_1 \\ \Delta S_2 = a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta S_{n-1} = a_n \end{array}\right.$$

Pierwsze różnice ciągu: $S_0, S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$ tworzą ciąg: $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n, \ldots$, który jest według założenia postępem arytmetycznym r-tego rzędu. A zatem sam ciąg sum częściowych jest postępem arytmetycznym $(r+1)$-go rzędu. Wobec tego wzór na wyraz ogólny ciągu sum ma (według wzoru (205)) postać:

$$S_n = S_0 + n \cdot \Delta S_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 S_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 S_0 + \ldots + \binom{n}{r+1}\Delta^{r+1} S_0$$

czyli:

$$(206) \qquad \boxed{S_n = na_0 + \binom{n}{2}\Delta a_0 + \binom{n}{3}\Delta^2 a_0 + \ldots + \binom{n}{r+1}\Delta^r a_0}$$

Tak np. dla $a_0 = 1^2$, $a_1 = 2^2$, $a_2 = 3^2$, ... $a_{n-1} = n^2$ jest

$$(207)\quad \underline{S_n} = n + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\cdot 2 = \underline{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}$$

Weźmy teraz pod uwagę ciąg trzecich potęg kolejnych liczb naturalnych:

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, \ldots$$

czyli

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216, \ldots$$
$$\Delta a \ldots \underline{7},\ 19,\ 37,\ 61,\ 91, \ldots$$
$$\Delta^2 a \ldots \underline{12},\ 18,\ 24,\ 30, \ldots$$
$$\Delta^3 a \ldots \underline{6},\ 6,\ 6, \ldots$$

Jest to postęp arytmetyczny trzeciego rzędu, a zatem:

$$(208)\quad \underline{S_n = n\cdot 1 + \binom{n}{2}\cdot 7 + \binom{n}{3}\cdot 12 + \binom{n}{4}\cdot 6}$$

Interpolacja rozmaitych tablic polega właśnie na tem, że kolejne liczby, zawarte w tej tablicy, można uważać w przybliżeniu za wyrazy postępu arytmetycznego odpowiednio wysokiego rzędu. Wielomian, przedstawiający wyraz ogólny tego szeregu, nadaje się bardzo dobrze do interpolacji takiej tablicy.

Tak np. z załączonych tu urywków tablic logarytmicznych 5-, 7- i 10-cyfrowych widzimy, że logarytmy 5- i 7-cyfrowe kilku sąsiednich liczb możemy uważać w przybliżeniu za wyrazy postępu arytmetycznego 1-go rzędu, a 10-cyfrowe za wyrazy post. arytm. 2-go rzędu.

x	$\log_{10} x$	$\Delta \log_{10} x$
1000	3·00000	0·00043
1001	3·00043	0·00044
1002	3·00087	0·00043
1003	3·00130	0·00043
1004	3·00173	0·00044
1005	3·00217	0·00043
1006	3·00260	0·00043
1007	3·00303	

x	$\log_{10} x$	$\Delta \log_{10} x$
10000	4·0000000	0·0000434
10001	4·0000434	0·0000435
10002	4·0000869	0·0000434
10003	4·0001303	0·0000434
10004	4·0001737	0·0000434
10005	4·0002171	0·0000434
10006	4·0002605	0·0000434
10007	4·0003039	

x	$\log_{10} x$	$\Delta \log_{10} x$	$\Delta^2 \log_{10} x$
10000	4·0000000000	0·0000434273	— 0·0000000044
10001	4·0000434273	0·0000434229	— 0·0000000043
10002	4·0000868502	0·0000434186	— 0·0000000043
10003	4·0001302688	0·0000434143	— 0·0000000044
10004	4·0001736831	0·0000434099	— 0·0000000044
10005	4·0002170930	0·0000434055	— 0·0000000042
10006	4·0002604985	0·0000434014	
10007	4·0003038998		

stąd jasnem jest, że do interpolacji tablic 5- i 7-cyfrowych wystarczy wielomian 1-go stopnia:

$$I(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$$

czyli interpolacja proporcjonalna, prostolinjowa. Natomiast przy tablicach 10-cyfrowych trzeba użyć wielomianu interpolacyjnego 2-go stopnia:

$$I(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - \Delta x)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}$$

Ponieważ tu zawsze jest $\Delta x = 1$, przeto te wzory upraszczają się w praktyce znacznie.

Potrzebne są nieraz w praktyce tablice, które tworzą dla kilku sąsiednich liczb w przybliżeniu postęp arytmetyczny jeszcze wyższego rzędu

Tak jest np. w załączonej części tablicy, podającej łuki $s(\varphi)$ południka ziemskiego, sięgające od równika do szerokości geograficznej φ w odstę-

φ	$s(\varphi)$	$\Delta s(\varphi)$	$\Delta^2 s(\varphi)$	$\Delta^3 s(\varphi)$	$\Delta^4 s(\varphi)$
47°	5207347·084 m				
		111184·369 m			
48°	5318531·453 „		19·534 m		
		111203·903 „		− 0·079 m	
49°	5429735·356 „		19·455 „		− 0·022 m
		111223·358 „		− 0·101 „	
50°	5540958·714 „		19·354 „		− 0·024 „
		111242·712 „		− 0·125 „	
51°	5652201·426 „		19·229 „		− 0·025 „
		111261·941 „		− 0·150 „	
52°	5763463·367 „		19·079 „		− 0·021 „
		111281·020 „		− 0·171 „	
53°	5874744·387 „		18·908 „		− 0·025 „
		111299·928 „		− 0·196 „	
54°	5986044·315 „		18·712 „		
		111318·640 „			
55°	6097362·955 „				

pach jednostopniowych. W tej tabelce dopiero *czwarte* różnice są w przybliżeniu stałe, a więc należy używać dla niej wzoru Newtona do 4-ej różnicy włącznie. W osobnym paragrafie zajmiemy się ocenianiem błędu, który popełniamy przy takiej interpolacji tablic.

Uwaga. Oprócz wzoru interpolacyjnego Newtona bardzo rozpowszechnione są także inne wzory, zbudowane z innych różnic; tak np. wzory Stirlinga i Bessela polegają na używaniu, zamiast pierwszego zstępującego wiersza w schemacie różnic innych ciągów różnic a mianowicie z wiersza poziomego i *średnich arytmetycznych* z dwóch ciągów różnic otaczających ten wiersz poziomy.

$$\begin{array}{lll}
x_{-2} & y_{-2} & \\
 & & \Delta y_{-2} \\
x_{-1} & y_{-1} & \\
 & & \Delta y_{-1} \\
x_0 & y_0 & \\
 & & \Delta y_0 \\
x_1 & y_1 & \\
 & & \Delta y_1 \\
x_2 & y_2 & \\
 & & \Delta y_2 \\
x_3 & y_3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & \\
\Delta^2 y_{-2} & \\
 & \\
\Delta^2 y_{-1} & \\
 & \\
\Delta^2 y_0 & \\
 & \\
\Delta^2 y_1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & \\
\Delta^3 y_{-2} & \\
 & \\
\Delta^3 y_{-1} & \\
 & \\
\Delta^3 y_0 & \\
 & \\
 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
 & \\
\Delta^4 y_{-2} & \\
 & \\
\Delta^4 y_{-1} & \\
 & \\
 & \\
 & \\
 &
\end{array}$$

Dane wartości numeruje się w tym celu znaczkami dodatniemi i ujemnemi, jak to uwidoczniono w dołączonym schemacie. Tak np. wzór Bessela jest zbudowany z różnic Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$, ... i z średnich arytmetycznych $\frac{y_0 + y_1}{2}$, $\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2}$, $\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2}$, ... jak to zaznaczono w schemacie przez podkreślenia.

Ma on postać:

$$I(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + v \cdot \Delta y_0 + \frac{v^2 - \frac{1}{4}}{2!} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{v(v^2 - \frac{1}{4})}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \tag{209}$$
$$+ \frac{(v^2 - \frac{1}{4})(v^2 - \frac{1}{4})}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \dots$$

przyczem

$$v = z - \tfrac{1}{2} = \frac{x - x_0}{\Delta x} - \tfrac{1}{2}$$

Wzór zaś Stirlinga otrzymuje się z różnic $y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \dots$ i z średnich arytmetycznych:

$$\frac{\Delta y_1 + \Delta y_0}{2}, \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}, \dots$$

jak to zaznaczono w schemacie przez podkreślenie linją przerywaną.

Przy użyciu tych różnic wzór interpolacyjny przyjmie postać:

$$I(x) = y_0 + z \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{z^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{z(z^2 - 1^2)}{3!} \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \tag{210}$$
$$+ \frac{z^2(z^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots$$

przyczem $z = \frac{x - x_0}{\Delta x}$.

Szczegółowe omówienie tych metod i dowody powyższych wzorów znaleźć można w cytowanych już podręcznikach (por. str. 483 i 22) Runge'go-Königa i Whittakera-Robinsona.

§ 197 Wzór interpolacyjny Newtona dla dowolnych odstępów zmiennej niezależnej.

Chcemy przedstawić wielomian interpolacyjny w postaci:

$$I(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots +$$
$$+ c_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

przyczem odstępy $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots x_n - x_{n-1}$ bierzemy już niekoniecznie równe, lecz *dowolne*. Spółczynniki $c_0, c_1, c_2, \dots c_n$ można wyznaczyć podobną metodą, jak dla równych odstępów. Nie będziemy tu przeprowadzali szczegółowo całego dowodu, ograniczając się do bezpośredniego wyznaczenia kilku początkowych spółczynników.

I tak dla $x = x_0$ ma być $I(x_0) = y_0$. Kładąc zaś we wzorze $x = x_0$, otrzymamy $I(x_0) = c_0$, albowiem wszystkie dalsze wyrazy odpadają. Wobec tego jest $c_0 = y_0$. Celem wyznaczenia drugiego spółczynnika kładziemy $x = x_1$; wtedy zostanie $I(x_1) = y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$ a reszta odpada. Stąd, uwzględniając, że $c_0 = y_0$, otrzymujemy:

$$c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \delta(y_1, y_0)$$

Symbolem $\delta(y_1, y_0)$ oznaczyliśmy *iloraz różnicowy* dla liczb y_1 i y_0. Ogólnie oznaczamy:

$$\delta(y_{i+1}, y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Aby wyznaczyć c_2, kładziemy w ogólnym wzorze $x = x_2$: ma być $I(x_2) = y_2$, a więc:

$$y_2 = y_0 + (x_2 - x_0)\,\delta(y_1, y_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Stąd:

$$c_2 = \frac{y_2 - y_0 - (x_2 - x_0)\,\delta(y_1, y_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_1 + y_1 - y_0 - (x_2 - x_0)\,\delta(y_1, y_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

To zaś łatwo można przekształcić na:

$$c_2 = \frac{\delta(y_2, y_1) - \delta(y_1, y_0)}{x_2 - x_0}$$

Ten iloraz nazywamy ilorazem różnicowym *drugiego rzędu* i oznaczamy go krótko symbolem $\delta^2(y_2, y_1, y_0)$. Ogólnie zaś określamy:

$$\delta^2(y_{i+2}, y_{i+1}, y_i) = \frac{\delta(y_{i+2}, y_{i+1}) - \delta(y_{i+1}, y_i)}{x_{i+2} - x_i}$$

Wobec tego spółczynnik c_2 ma wartość

$$c_2 = \delta^2(y_2, y_1, y_0)$$

Podobnie wprowadza się ogólne ilorazy różnicowe r-tego rzędu zapomocą wzorów zwrotnych:

$$\delta^r(y_{i+r}, y_{i+r-1}, \dots y_i) = \frac{\delta^{r-1}(y_{i+r}, y_{i+r-1}, \dots y_{i+1}) - \delta^{r-1}(y_{i+r-1}, y_{i+r-2}, \dots y_i)}{x_{i+r} - x_i}$$

Otóż można udowodnić, że ogólny spółczynnik c_r wyraża się wzorem:

$$c_r = \delta^r(y_r, y_{r-1}, \dots y_1, y_0)$$

Podstawiając te wartości w $I(x)$, otrzymujemy następujący *wielomian interpolacyjny Newtona* dla *dowolnych* odstępów zmiennej niezależnej:

$$(211)\quad \boxed{\begin{aligned} I(x) = y_0 + (x - x_0)\,\delta(y_1, y_0) + (x - x_0)(x - x_1)\,\delta^2(y_2, y_1, y_0) + \dots + \\ + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})\,\delta^n(y_n, y_{n-1}, \dots y_1, y_0) \end{aligned}}$$

Rachunki szczegółowe wykonuje się przy pomocy tego wzoru podobnie, jak w szczegółowym przypadku *równych* odstępów x, a mianowicie używa się następującego schematu:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & y_0 & & & & \\
 & & \delta(y_1, y_0) & & & \\
x_1 & y_1 & & \delta^2(y_2, y_1, y_0) & & \\
 & & \delta(y_2, y_1) & & \delta^3(y_3, y_2, y_1, y_0) & \\
x_2 & y_2 & & \delta^2(y_3, y_2, y_1) & \vdots & \searrow \delta^n(y_n, y_{n-1}, \ldots y_1, y_0) \\
 & & \delta(y_3, y_2) & \vdots & \ldots\ldots\ldots & \\
x_3 & y_3 & \vdots & & & \\
 & & & \delta^2(y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) & & \\
\vdots & \vdots & \delta(y_n, y_{n-1}) & & & \\
x_n & y_n & & & &
\end{array}
$$

Zastosujmy to do szczegółowego przykładu, który rozwiązaliśmy poprzednio (w § 194) przy pomocy wzoru Lagrange'a. Układamy następujący schemat rachunkowy:

x	y	δ	δ^2	δ^3
-1	1			
		$\frac{1}{2}$		
1	2		$-\frac{1}{2}$	
		$-\frac{3}{2}$		$\frac{17}{105}$
3	-1		$\frac{18}{30}$	
		$\frac{5}{3}$		
6	4			

Tak np. liczbę $\frac{18}{30} = \delta^2(y_3, y_2, y_1)$ otrzymano, dzieląc różnicę dwóch sąsiednich liczb: $\frac{5}{3} - (-\frac{3}{2})$ przez różnicę $x_3 - x_1$, t. j. przez $6 - 1$. Przy pomocy liczb, znajdujących się w pierwszym ukośnym wierszu zstępującym, tworzy się żądany wielomian według wzoru (211). Otrzymujemy:

$$I(x) = 1 + (x+1)\cdot\tfrac{1}{2} + (x+1)(x-1)\cdot(-\tfrac{1}{2}) + (x+1)(x-1)(x-3)\cdot\tfrac{17}{105}$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy oczywiście wielomian identyczny z wielomianem Lagrange'a: $L(x)$, którymśmy zbudowali z tych samych danych, a mianowicie:

$$I(x) = \tfrac{1}{210}(34x^3 - 207x^2 + 71x + 522)$$

§ 198. Aproksymacja przy pomocy wzorów interpolacyjnych. Obliczenie reszty.

Wspomnieliśmy już, że wzorów interpolacyjnych używamy często do aproksymacji rozmaitych funkcyj, które nie są wielomianami.

Jeżeli funkcja $f(x)$ przyjmuje dla:

$$x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$$

wartości:

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_n)$$

to możemy użyć jako aproksymacji wielomianu $I(x)$, który przyjmuje te same wartości w danych $n+1$ punktach. Różnicę: $f(x) - I(x) = R_{n+1}(x)$ nazywamy *resztą* danego wzoru interpolacyjnego dla danej funkcji $f(x)$. Ta różnica jest równa zeru na $n+1$ miejscach $x_0, x_1 \ldots x_n$. Przedstawmy ją w postaci:

$$f(x) - I(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \cdot S(x)$$

Obierzmy jakąś stałą wartość x.

Zbadajmy następującą funkcję zmiennej z:

$$F(z) = f(z) - I(z) - (z - x_0)(z - x_1)\dots(z - x_n)\,S(x)$$

Ta funkcja jest równa zeru dla $n+2$ wartości: $z = x, x_0, x_1, \dots x_n$.

Załóżmy, że funkcja $f(x)$ posiada $(n+1)$-szą pochodną w jakimś przedziale (a, b), zawierającym te wszystkie punkty. Wtedy możemy do $F(z)$ zastosować $(n+1)$-krotnie twierdzenie Rollego o wartości średniej. W ten sposób dochodzimy do wniosku, że

$$F^{(n+1)}(\xi) = 0$$

dla jakiejś wartości ξ z przedziału (a, b). Ponieważ pochodna wielomianu $I(x)$, którego stopień nie przekracza n, jest zerem, przeto:

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - (n+1)!\,S(x) = 0$$

stąd:

$$S(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

A więc na resztę $R_{n+1}(x) = f(x) - I(x)$ otrzymujemy ostatecznie następujący wzór:

(212)
$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}$$

Wzór ten odnosi się oczywiście do wszystkich form wzoru interpolacyjnego stopnia $\leqq n$, a więc zarówno do wzoru Lagrange'a jak i do wzoru Newtona.

Możemy więc przedstawić każdą funkcję, posiadającą $(n+1)$-szą pochodną w badanym przedziale, w postaci:

$$f(x) = I(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Przykład. Ocenić błąd, jaki popełniamy, używając interpolacji proporcjonalnej (prostolinjowej) w tablicach logarytmicznych, zawierających logarytmy wszystkich liczb całkowitych od 1000 do 10000 w odstępach 1.

Interpolacja proporcjonalna polega na zastosowaniu wzoru interpolacyjnego Newtona, przy ograniczeniu się do dwóch wyrazów; łuk logarytmiki od $x_0 = a$ do $x_1 = a + 1$ (przyczem $a \geqq 1000$) zastępujemy prostą, przechodzącą przez dwa punkty linji o równaniu $y = \log_{10} x$.

Używamy więc wzoru (z resztą):

$$f(x) = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} f''(\xi)$$

czyli:

$$\log_{10} x = \log_{10} a + (x-a)\frac{\Delta \log_{10} a}{1} - \frac{(x-a)(x-a-1)}{2} \cdot \frac{\log_{10} e}{\xi^2}$$

albowiem drugą pochodną funkcji: $\log_{10} x$ jest $-\frac{1}{x^2}\log_{10} e$.

Przy interpolacji tablicy logarytmicznej chodzi zawsze o obliczenie logarytmu dla liczby x, zawartej między dwiema kolejnemi liczbami całkowitemi: a i $a+1$, znajdującemi się w tej tablicy. Dwa początkowe wyrazy tego wzoru podają używany zwykle sposób interpolacji a mianowicie: do logarytmu liczby mniejszej dodaje się iloczyn z *różnicy tablicowej* $\Delta \log_{10} a = \log_{10}(a+1) - \log_{10} a$ i przyrostu $x-a$.

Trzeci wyraz naszego wzoru podaje błąd, popełniany przy takiej „prostolinjowej" interpolacji. Chcemy ocenić wartość tego błędu. Otóż ξ jest zawarte między a i $a+1$, a więc w każdym razie jest: $\xi > 1000$. Wobec tego:

$$|R_2(x)| = \left|\frac{-(x-a)(x-a-1)\log_{10} e}{2\,\xi^2}\right| < \frac{|(x-a)(a-x+1)|}{2} \cdot \frac{\log_{10} e}{10^6}$$

Wiadomo, że $\log_{10} e = 0{\cdot}43429\ldots$ a więc $\log_{10} e < \frac{1}{2}$. Iloczyn $(x-a)(a-x+1)$ można przedstawić w postaci:

$$(x-a-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})(a+\tfrac{1}{2}-x+\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2}+(x-a-\tfrac{1}{2}))\cdot(\tfrac{1}{2}-(x-a-\tfrac{1}{2})) = \\ = \tfrac{1}{4} - (x-a-\tfrac{1}{2})^2$$

Ale $-\frac{1}{2} < x-a-\frac{1}{2} < +\frac{1}{2}$, ponieważ $0 < x-a < 1$. A więc $0 < (x-a-\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{4}$. Wobec tego $0 < (x-a)(a-x+1) < \frac{1}{4}$, zatem:

$$|R_2(x)| < \frac{1}{16 \cdot 10^6} < 10^{-7}$$

Błąd nie przekracza jednostki na 7-mem miejscu po kropce. A więc ten błąd nie daje się odczuwać w tablicach 4, 5, 6 i 7-cyfrowych. Natomiast okazuje się, że w tablicach 10-cyfrowych błąd może wpływać na ostatnie miejsca. Wobec tego używa się w takich tablicach interpolacji *parabolicznej*, to znaczy wzoru:

$$I(x) = y_0 + (x-x_0)\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2}$$

Pozostawiamy czytelnikowi wykazanie, że reszta $R_3(x)$ nie wpływa wtedy na końcowe cyfry w tablicach 10-cyfrowych, zawierających logarytmy wszystkich liczb naturalnych od 10.000 do 100.000.

W rozdziale, poświęconym wzorowi Taylora, widzieliśmy, że wielomian Taylora daje także aproksymację funkcji (por. § 129). Porównując ten rodzaj aproksymacji z aproksymacją przy pomocy wielomianu

interpolacyjnego, widzimy, że wielomian Taylora zgadzał się z daną funkcją tylko w jednym punkcie, ale zgodność ta istniała zarówno pod względem rzędnej, jak i kierunku stycznej, krzywizny, wogóle była to styczność n-tego rzędu; stąd wynikała bardzo dobra aproksymacja w otoczeniu tego jednego punktu. Natomiast wielomian interpolacyjny zgadza się z daną funkcją w n-punktach, ale zgodność występuje tylko pod względem równości rzędnych: kierunek zaś linji, przedstawiającej ten wielomian interpolacyjny, może być w każdym punkcie wspólnym zupełnie odmiennym od kierunku linji, przedstawiającej daną funkcję. Otóż uogólniono zagadnienie interpolacji w tym kierunku, że znaleziono wielomian, zgadzający się z daną funkcją w n punktach, nietylko pod względem wielkości rzędnych, lecz także pod względem wartości jednej lub więcej pochodnych. Taki wielomian łączy w sobie zalety obu rodzajów aproksymacji. (Zob. np. A. Łomnicki. *Uogólnienie wzoru interpolacyjnego Lagrange'a.* Rozprawy Wydz. m. przyr. Akad. Um. Kraków, 1920 r. Serja A t. 60, str. 173—9; Bull. Int. Acad. Kraków, 1920, A. 109—111).

Ustęp II.

METODY PRZYBLIŻONEGO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ.

§ 199. Uwagi o metodach graficznych i tabelarycznych

Znamy z algebry elementarnej wzory, służące do rozwiązywania równań 1-go i 2-go stopnia. Podobne wzory wyprowadza się w algebrze wyższej także dla równań algebraicznych 3-go i 4-go stopnia. Natomiast dla ogólnych równań algebraicznych stopnia 5 i wyższych stopni, t. j. dla równań formy: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0$, przy $n \geqq 5$, nie mamy takiego wzoru, któryby wyrażał pierwiastki równania zapomocą jego spółczynników, przy użyciu skończonej liczby czterech działach arytmetycznych i wyciągania pierwiastków różnych stopni. Nie istnieją też takie wzory dla rozmaitych równań przestępnych, jak np.

$$\sin x - 0{\cdot}3x = 0$$
$$\log_{10} x - x + 3 = 0$$
$$\operatorname{tg} x - x = 0$$

Takie zaś równania występują bardzo często w matematyce stosowanej. Jakkolwiek często nie potrafimy znaleźć pierwiastków takiego równania, to jednak można zwykle w dość prosty sposób otrzymać *przybliżone* wartości pierwiastków, z dokładnością kilku miejsc dziesiętnych a czasem możemy nawet dowolnie zacieśniać granice, między któremi leży szukany pierwiastek. Dla celów praktycznych wystarczy zwykle znajomość kilku początkowych cyfr pierwiastka.

Jednym z bardzo rozpowszechnionych sposobów przybliżonego rozwiązywania równania:

$$f(x) = 0$$

jest sporządzenie *wykresu* funkcji $y = f(x)$. Odcięte punktów, w których ten wykres przecina oś x-ów, są pierwiastkami żądanego równania. Spowodu nieuniknionej niedokładności rysunku otrzymuje się w ten sposób zwykle dość grube przybliżenie. Chcąc zwiększyć stopień przybliżenia, można narysować w powiększonej skali te części rysunku, w których leżą punkty przecięcia się badanej linji z osią x-ów.

Zadanie to można sobie często ułatwić, sporządzając zamiast wykresu funkcji $y = f(x)$ dwa prostsze wykresy funkcyj: $f_1(x)$ i $f_2(x)$, otrzymanych przez rozłożenie danej funkcji na odpowiednio dobrane dodajniki:

$$y = f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

Wtedy pierwiastki równania $f(x) = 0$ otrzymamy ze związku $f_1(x) - f_2(x) = 0$, czyli:

$$f_1(x) = f_2(x)$$

Przedstawiwszy nasze zagadnienie w tej postaci, nie szukamy już punktów przecięcia się z osią x-ów, lecz odciętych punktów przecięcia się dwóch linij: $y_1 = f_1(x)$ i $y_2 = f_2(x)$ ze sobą.

Tak np. w celu graficznego rozwiązania równania:

(A) $\log_{10} x - x + 3 = 0$

piszemy:

$$\log_{10} x = x - 3$$

Pierwiastkami tego równania są odcięte tych punktów, w których się przecina łogarytmika o równaniu: $y_1 = \log_{10} x$ z linją prostą o równaniu: $y_2 = x - 3$ (por. fig. 178). Już z tego pobieżnego szkicu widzimy, że badane równanie przestępne posiada dwa pierwiastki, odpowiadające punktom przecięcia się A i B, których odcięte są zawarte w przedziałach (0,1) i (3,4). Możemy więc za pierwsze przybliżenia szukanych pierwiastków uważać:

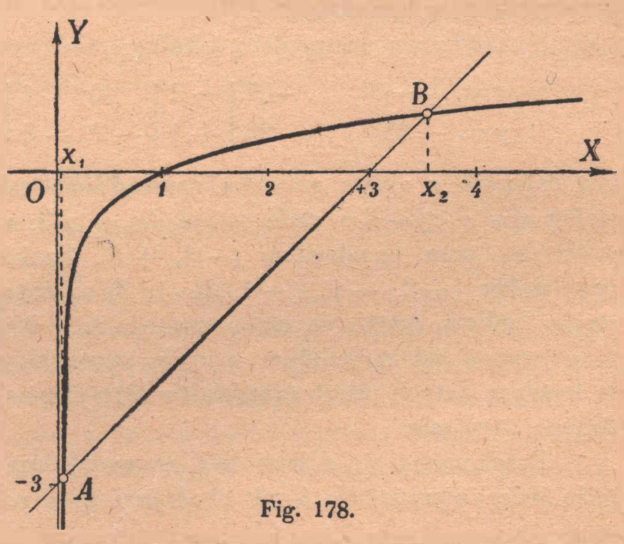


Fig. 178.

$$x_1 = 0 \cdot \ldots, \qquad x_2 = 3 \cdot \ldots$$

Graficzna metoda rozwiązywania równań staje się jednak bardzo mozolną, gdy nam chodzi o znaczniejszą dokładność; np. jeżeli chcemy mieć 5 cyfr po kropce dokładnych w powyższym przykładzie, to trzeba przerysować części rysunku około punktów A i B osobno w powiększonej skali, a jeżeli i to nie wystarczy, to trzeba będzie z tego nowego rysunku znowu wydzielić odpowiednie części i narysować je powtórnie w jeszcze większej skali.

Z tego powodu posługujemy się zwykle metodą graficzną tylko do pierwszej orjentacji, jak są rozmieszczone pierwiastki równania, a dokładniejsze przybliżenia uzyskujemy przy pomocy rozmaitych metod rachunkowych.

Uwaga. Bardzo rozpowszechnione są tabelaryczno-graficzne metody przybliżonego rozwiązywania równań, przy pomocy metod *nomografji* (por. § 14). Metody te są zwłaszcza wtedy pożyteczne, gdy nam chodzi o ujęcie w jeden wykres całego zbioru równań o zmiennych parametrach, np. wszystkich równań postaci $x^3+px+q=0$ lub $x^4+px+q=0$. W podręcznikach nomografji można znaleźć szczegółowe rozwinięcie tych metod.

Podobne usługi oddaje *tabelaryczne* ujęcie funkcji. Wyjaśnimy ten sposób odrazu na szczegółowym przykładzie. Chcemy znaleźć rzeczywiste pierwiastki równania:

$$(B) \qquad y = x^5 - 4x - 2 = 0$$

przynajmniej w przybliżeniu.

Sporządzamy następującą tabelkę:

$x=$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=$	-233	-26	$+1$	-2	-5	$+22$	$+229$

Dla dalszych x niema potrzeby sporządzania tabelki, albowiem y stale maleje dla $x<-3$ a stale rośnie dla $x>3$, a więc nie przechodzi już przez zero poza przedziałem $(-3, +3)$. Znaki funkcji y na końcach przedziałów $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$ są różne. Ponieważ zaś y jest *ciągłą* funkcją, przeto na mocy znanego (z § 55) twierdzenia przyjmuje *przynajmniej* raz w każdym z tych przedziałów wartość zero, a więc w każdym z tych trzech przedziałów leży przynajmniej jeden pierwiastek danego równania.

Przekonamy się z łatwością, że w każdym z tych przedziałów leży *tylko* jeden pierwiastek. I tak zbadajmy znak pochodnej:

$$y' = 5x^4 - 4$$

Odrazu jest widocznem, że w przedziałach $(-2, -1)$ i $(1, 2)$ jest stale $x^4>1$ a więc $y'>5.1-4>0$; to zaś dowodzi, że w tych przedziałach funkcja y wzrasta monotonicznie od ujemnych wartości -26 i -5 do dodatnich wartości $+1$ i $+22$, a zatem posiada w każdym z tych

przedziałów tylko jeden pierwiastek. W przedziale $(-1, 0)$ funkcja już nie jest monotoniczna, lecz najpierw wzrasta od wartości $+1$ do maximum, równego $y_M = \frac{16}{5}\sqrt[4]{\frac{4}{5}} - 2 = 1{\cdot}027\ldots$, które osiąga dla $x = -\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$, a następnie maleje od y_M do -2. Stąd jest widocznem, że także i w tym przedziale funkcja tylko raz przechodzi przez wartość zero; następne extremum, a mianowicie minimum, leży bowiem dopiero w punkcie $x = +\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$ a więc poza przedziałem $(-1, 0)$.

Na podstawie tych rozważań widzimy, że to równanie posiada tylko trzy pierwiastki rzeczywiste. Znamy też pierwszą cyfrę każdego z tych pierwiastków, a mianowicie:

$$x_1 = -1{\cdot}\ldots, \quad x_2 = -0{\cdot}\ldots, \quad x_3 = 1{\cdot}\ldots$$

Chcąc bardziej zacieśnić przedziały, w których leżą te pierwiastki i wyliczyć więcej cyfr, możnaby zagęszczać tablicę w tych przedziałach, obliczając np. przy x_3 wartości y także dla $x = 1{\cdot}1,\ 1{\cdot}2,\ 1{\cdot}3,\ 1{\cdot}6 \ldots 1{\cdot}9$.

Po wykonaniu tych dość mozolnych rachunków pokazałoby się, że pierwiastek x_3 leży w przedziale $(1{\cdot}5,\ 1{\cdot}6)$ a więc $x_3 = 1{\cdot}5\ldots$

Postępując w ten sposób mozolnie lecz systematycznie dalej, moglibyśmy wyliczyć dowolną liczbę cyfr po kropce dokładnie.

Uwaga. Gdybyśmy poprzestali przy każdym dalszym kroku na połowieniu przedziału, to możnaby w prosty sposób otrzymać rozwinięcie *dwójkowe* tego pierwiastka x_3 zamiast rozwinięcia *dziesiątkowego*.

W następnych paragrafach poznamy rozmaite inne, bardzo dogodne i szybko prowadzące do celu metody rachunkowe przybliżonego rozwiązywania równań.

§ 200. Regula falsi.

Ograniczmy się do przedziałów, w których funkcja $f(x)$ jest *ciągłą i różniczkowalną* dwukrotnie.

Przyjmijmy, że pierwiastki równania $f(x) = 0$ zostały już w jakikolwiek sposób (graficzny, tabelaryczny lub inny) *pooddzielane*. To znaczy, że znaleźliśmy takie przedziały $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle$, $\langle a_3, b_3\rangle, \ldots$, że w każdym z nich leży tylko jeden pierwiastek badanego równania.

Na końcach każdego z tych przedziałów wartości funkcji mają znaki przeciwne. Najprostszą myślą, nasuwającą się przy szukaniu odpowiednich przybliżeń pierwiastka x, leżącego w takim przedziale $\langle a, b\rangle$, jest zastąpienie funkcji $f(x)$ jakąś inną, prostszą funkcją, *aproksymującą* daną funkcję. Pierwiastek tej prostszej funkcji może być dogodnem przybliżeniem szukanego pierwiastka.

Otóż w pierwszym rzędzie nasuwa się tu zastąpienie łuku $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 179) cięciwą, łączącą końce tego łuku. Odciętą $\bar{x}$ punktu, w którym

a cięciwa przecina oś x-ów, uważamy za przybliżoną wartość szukanego pierwiastka x. Rachunkowo przedstawia się ta metoda w sposób następujący. Równanie prostej, przechodzącej przez punkty $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, jest:

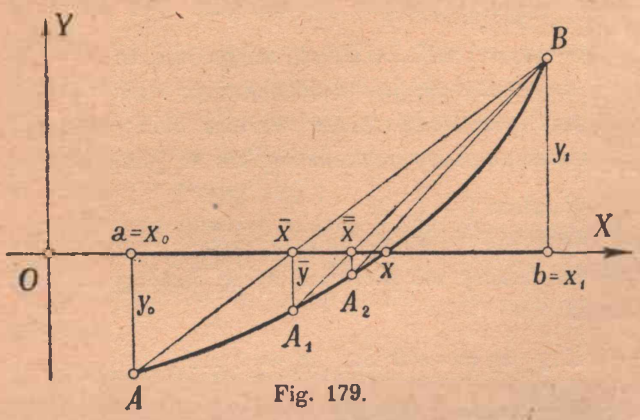


Fig. 179.

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Jej punkt przecięcia z osią x-ów ma spółrzędne $(\bar{x}, 0)$; odciętą $\bar{x}$ oblicza się z równania:

$$0 - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(\bar{x} - x_0)$$

a mianowicie:

(213)
$$\boxed{\bar{x} = x_0 - y_0 \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}}$$

Ten sposób obliczania przybliżonej wartości pierwiastka nazywa się: *regula falsi* (t. j. reguła, polegająca na fałszywem założeniu, a mianowicie na zastąpieniu łuku cięciwą). Z figury widzimy, że przedział, w którym leży szukany pierwiastek, zacieśnił się rzeczywiście do mniejszego przedziału $<\bar{x}, b>$, a więc dolny jego kraniec daje lepsze przybliżenie aniżeli a. Jeżeli zaś łuk $\widehat{AB}$ jest zwrócony wypukłością ku górze, jak na fig. 180 to

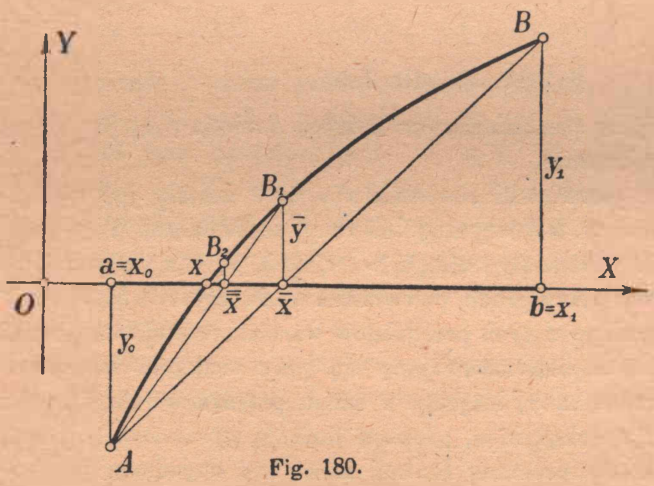


Fig. 180.

pierwiastek leży w przedziale $<a, \bar{x}>$, którego górny kraniec daje lepsze przybliżenie aniżeli b. Przeciwnie ma się rzecz, gdy wartość y_0 jest dodatnia (niechaj czytelnik sporządzi odpowiednie figury!). Przy tem

rozumowaniu zakładamy, że w całym przedziale $\langle a, b\rangle$ funkcja jest monotoniczna a druga pochodna (od której zależy, jak wiemy, wypukłość) ma stale ten sam znak, a więc, że w tym przedziale niema ani extremów ani punktów przegięcia. Gdyby zaś występowały takie wyjątkowe punkty, to trzebaby najpierw zacieśnić w jakikolwiek sposób przedział $\langle a, b\rangle$ tak, aby spełniał żądane warunki.

Zastosujmy tę regułę do równania:

$$(A) \qquad y = \log_{10} x - x + 3 = 0$$

Widzieliśmy, że jeden pierwiastek jest zawarty w przedziale $\langle 3, 4\rangle$. Na końcach tego przedziału ma y wartości:

$$y_0 = \log_{10} 3 = 0{\cdot}477\ldots \quad \text{i} \quad y_1 = \log_{10} 4 - 4 + 3 = 0{\cdot}602\ldots - 1 = -0{\cdot}398\ldots$$

Stosując wzór (213), otrzymujemy:

$$\bar{x} = 3 - 0{\cdot}477\ldots \frac{1}{-0{\cdot}398\ldots - 0{\cdot}477\ldots} \approx 3 + \frac{0{\cdot}477}{0{\cdot}875} \approx 3{\cdot}55$$

Szukany pierwiastek leży, jak łatwo stwierdzić, w przedziale $(\bar{x}, b)$.

Dla drugiego pierwiastka, zawartego w przedziale (0, 1), trzeba najpierw ten przedział w jakiś inny sposób nieco zacieśnić, ponieważ dla końca tego przedziału funkcja y nie jest ciągła. Z prostych rozważań wynika, że wystarczy w tym przypadku ograniczyć się do przedziału $(\frac{1}{1000}, 1)$ lub nawet $(\frac{1}{1000}, \frac{1}{100})$ i dopiero do tego przedziału zastosować naszą regułę.

Tę metodę można nawiązać do wzoru interpolacyjnego Newtona. Zastąpienie łuku $\overset{\frown}{AB}$ cięciwą, przechodzącą przez dwa punkty tego łuku, jest bowiem równoważne z zastąpieniem funkcji $f(x)$ wielomianem interpolacyjnym pierwszego stopnia, a mianowicie:

$$y = y_0 + (x - x_0)\frac{\Delta y_0}{\Delta x}$$

czyli:

$$y = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Stąd wynika oczywiście znowu wzór (213), a więc *regula falsi*.

Uwaga. Nasuwa się myśl, że dokładniejsze przybliżenie uzyskamy, używając wielomianu interpolacyjnego wyższego stopnia, np. następującego wielomianu Newtona dla dowolnych odstępów (por. § 197, wzór 211):

$$y = y_0 + (x - x_0)\,\delta(y_1, y_0) + (x - x_0)(x - x_1)\,\delta^2(y_2, y_1, y_0)$$

Trzebaby jeszcze tylko obliczyć $f(x)$ dla jakiejś dowolnej trzeciej wartości x_2, np. dla średniej arytmetycznej $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$. Istotnie w ten sposób uzyskałoby się lepsze wyniki, jednakże droga ta jest dość skomplikowana, albowiem do obliczenia $\bar{x}$ trzebaby wtedy rozwiązać równanie 2-go stopnia: $y = 0$.

Możnaby także użyć t. zw. interpolacji *odwrotnej*, polegającej na tem, że wyraża się x jako funkcję zmiennej y i buduje się wielomian (dla nierównych odstępów):

$$x = x_0 + (y - y_0)\,\delta(x_1\ x_0) + (y - y_0)(y - y_1)\,\delta^2(x_2, x_1, x_0) + \dots$$

Kładąc tu $y = 0$, otrzymujemy odrazu gotowy wzór na przybliżoną wartość pierwiastka:

$$\bar{x} = x_0 - y_0\,\delta(x_1, x_0) + y_0 y_1\,\delta^2(x_2, x_2, x_0) - y_0 y_1 y_2\,\delta^3(x_3, x_2, x_1, x_0) + \dots$$

Dwa początkowe wyrazy tego wzoru zawierają właśnie regułę „falsi". Dobierając dalsze wyrazy, uzyskujemy coraz większą dokładność. Przy tem postępowaniu trzeba dla kilku wartości x obliczyć y a następnie użyć schematu z § 197 str. 617, tylko z przemienionemi literami x i y.

Jednakże i ta metoda jest dość uciążliwa w porównaniu z inną metodą, ogólną i nadzwyczaj płodną także w innych działach matematyki, a mianowicie z metodą uzyskiwania kolejnych przybliżeń zapomocą *iteracyj*, którą się obecnie zajmiemy.

Stosowanie reguły „falsi" nie zawsze prowadzi do tak dobrych wyników, jak w podanym powyżej przykładzie. Okażemy natomiast, że kilkakrotne jej zastosowanie, czyli t. zw. „iterowanie" tego postępowania, prowadzi zazwyczaj do corazto lepszych wyników.

Załóżmy, że łuk $\overset{\frown}{AB}$ jest w całym przedziale $\langle a, b\rangle$ zwrócony wypukłością w tę samą stronę. Mogą wtedy zachodzić 4 przypadki: albo rzędna początkowego punktu a jest ujemna a wypukłość jest zwrócona na dół, a więc $y'' > 0$, jak na fig. 179, lub do góry, jak na fig. 180, albo rzędna punktu a jest dodatnia a wypukłość jest zwrócona do góry lub na dół.

Jeżeli $y_0 < 0$ a $y'' < 0$ w całym przedziale, jak na fig. 180, to rzędna $\bar{y}$ punktu B_1 o odciętej $\bar{x}$ ma taki sam znak, jak rzędna y_1 punktu B. Jeżeli zastosujemy powtórnie regułę „falsi" do łuku $\overset{\frown}{AB_1}$, to otrzymamy przybliżenie: $\bar{\bar{x}}$ widocznie lepsze aniżeli $\bar{x}$; a więc wtedy zatrzymuje się punkt A. Tak samo ma się rzecz, gdy $y_0 > 0$ i $y'' > 0$. Jeżeli zaś $y_0 < 0$ a $y'' > 0$, jak na fig. 179, to rzędna $\bar{y}$ punktu A_1 o odciętej $\bar{x}$ ma taki sam znak, jak rzędna y_0 punktu A. Wtedy przez zastosowanie reguły „falsi" do łuku $\overset{\frown}{A_1B}$ otrzymamy przybliżenie $\bar{\bar{x}}$ lepsze aniżeli $\bar{x}$, a więc zatrzymuje się punkt B.

Stąd ogólna reguła: *chcąc uzyskać lepsze przybliżenie aniżeli $\bar{x}$, należy zatrzymać ten koniec przedziału, dla którego y ma ten sam znak, co y'', a zmieniać drugi punkt.*

Wartość, dającą lepsze przybliżenie aniżeli $\bar{x}$, znajdujemy więc z wzoru:

$$\text{(a)} \qquad \bar{\bar{x}} = x_0 - y_0 \frac{\bar{x} - x_0}{\bar{y} - y_0}$$

jeżeli w punkcie o odciętej $a = x_0$ jest $y_0 < 0$ i $y'' < 0$ lub $y_0 > 0$ $y'' > 0$.

Jeżeli zaś w punkcie $a = x_0$ rzędna ma znak przeciwny aniżeli y'', to lepszą wartość przybliżoną znajdujemy z wzoru:

$$\text{(b)} \qquad \bar{\bar{x}} = \bar{x} - \bar{y}\,\frac{x_1 - \bar{x}}{y_1 - \bar{y}}$$

Powtarzając operacje, zawarte we wzorze (a) w pierwszym przypadku, a we wzorze (b) w drugim, otrzymujemy corazto lepsze przybliżenia badanego pierwiastka. Można więc zbudować ciąg kolejnych, coraz lepszych przybliżeń, przez *powtarzanie* czyli *iterowanie* tego samego procesu. W § 202 zajmiemy się ogólną metodą iteracji dla przybliżonego rozwiązywania równań.

W rachunkach praktycznych dogodnie jest czasem przysuwać także drugą granicę przedziału odpowiednio — uważając jednak przy tem na to, aby rzędna dla tej drugiej granicy nie zmieniała znaku.

Przykłady. 1) Dla równania (*A*) (str. 625) trzeba będzie użyć wzoru (b), ponieważ:

$$y_0 = \log_{10} 3 > 0 \quad \text{a} \quad y'' = -\frac{\log_{10} e}{x^2} < 0$$

Obliczamy zatem:

$$\bar{y}(3{\cdot}55) = \log_{10} 3{\cdot}55 - 3{\cdot}55 + 3 = 0{\cdot}000\,2284$$

Wstawiamy wartości $\bar{x} = 3{\cdot}55$ i $\bar{y}$ we wzór (b), to po wykonaniu prostych rachunków otrzymamy:

$$\bar{\bar{x}} = 3{\cdot}55\,026$$

Okaże się, że ta wartość ma już 5 cyfr po kropce zgodnych z prawdziwą wartością badanego pierwiastka. Gdybyśmy chcieli uzyskać jeszcze większą dokładność, należałoby dalej operować *tym samym* wzorem (b), zmieniając w nim tylko $\bar{x}$ i $\bar{y}$ na $\bar{\bar{x}}$ i $\bar{\bar{y}}$

2) Wiemy, że równanie:

$$y = x^5 - 4x - 2 = 0$$

posiada w przedziale $(1, 2)$ jeden pierwiastek. Łatwo stwierdzić, że jest to przypadek, przedstawiony na fig. 179. Przy pomocy wzoru (213) otrzymujemy tu:

$$\bar{x} = 1 - \frac{2-1}{22-(-5)} \cdot (-5) = 1 + \tfrac{5}{27} = 1{\cdot}\overline{2}$$

Dalszy rachunek należałoby przeprowadzić dla przedziału $(1{\cdot}2, 2)$.

Można się jednak ograniczyć do przedziału $(1{\cdot}2, 1{\cdot}6)$ i wtedy otrzyma się przy pomocy wzoru (b): $\bar{\bar{x}} = 1{\cdot}47$. Znowu przysuwamy gorną granicę i operując przedziałem $(1{\cdot}47, 1{\cdot}52)$, otrzymujemy $\bar{\bar{\bar{x}}} = 1{\cdot}5184$.

§ 201. Reguła Newtona do przybliżonego rozwiązywania równań.

Zakładamy tutaj, tak samo jak w poprzednim paragrafie, że funkcja $y = f(x)$ jest dwukrotnie różniczkowalna w całym przedziale i że f' ani f'' nie są w tym przedziale nigdzie równe zeru.

Regula falsi polega na zastąpieniu łuku cięciwą. Zastępując zaś daną krzywą $y = f(x)$ *styczną*, wykreśloną z jednego końca łuku, otrzymujemy drugą metodę przybliżonego rozwiązywania równań, zwaną *regułą Newtona* (por. fig. 181 i 182).

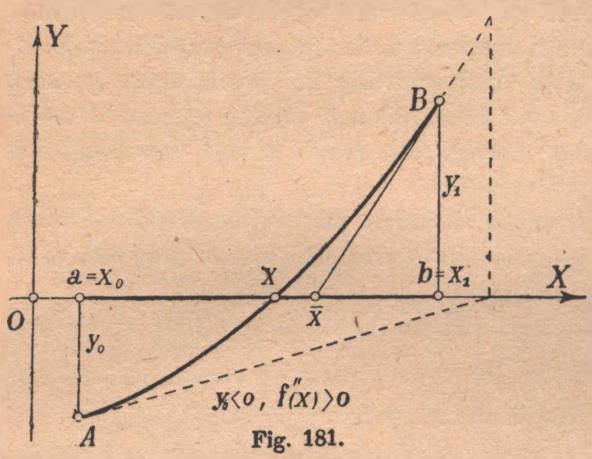


Fig. 181.

Odciętą $\bar{x}$ punktu, w którym styczna, wykreślona z końca łuku $\widehat{AB}$, przecina oś x-ów, uważamy za przybliżoną wartość szukanego pierwiastka x.

Rachunkowo przedstawia się ta metoda w następujący sposób. Równanie stycznej, przechodzącej przez punkt A (fig. 182), ma postać:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Jej punkt przecięcia z osią x-ów ma spółrzędne $(\bar{x}, 0)$; odciętą $\bar{x}$ oblicza się z równania:

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(\bar{x} - x_0)$$

a mianowicie:

$$\bar{x} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{214}$$

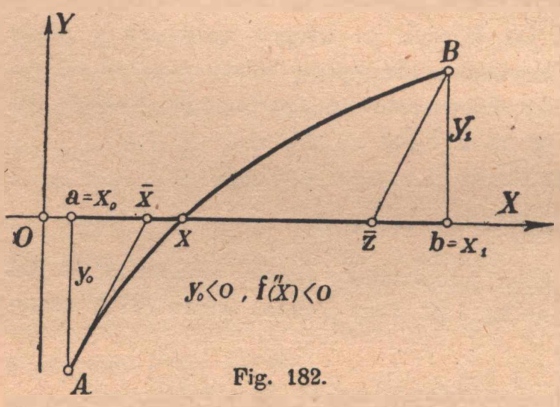


Fig. 182.

Ten sposób obliczania przybliżonej wartości pierwiastka nazywamy *regułą Newtona*.

Niechaj rzędna, należąca do odciętej x_0, będzie ujemna a łuk niechaj będzie zwrócony wypukłością do góry. Widzimy z figury 182, że przedział $\langle \bar{x}, x_1 \rangle$, w którym leży szukany pierwiastek, jest rzeczywiście mniejszy od pierwotnego przedziału $\langle x_0, x_1 \rangle$, a więc dolny jego koniec daje lepsze przybliżenie szukanego pierwiastka, aniżeli x_0.

Jeżeli zaś łuk jest zwrócony wklęsłością do góry, to styczną należy wykreślać z punktu B i wtedy reguła Newtona przyjmuje postać:

(214 a)
$$\bar{x} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Pierwiastek leży wtedy w przedziale $<x_0, \bar{x}>$.

Jeżeli rzędna punktu x_0 jest dodatnia a wklęsłość jest zwrócona do góry, to używa się stycznej w punkcie A, jeżeli zaś wklęsłość jest zwrócona na dół, to używa się stycznej w punkcie B.

Fakty te, spostrzeżone na figurach, udowodnimy, opierając się na wzorze Taylora. Zastąpienie łuku $\widehat{AB}$ styczną jest mianowicie równoważne z zastąpieniem funkcji $f(x)$ początkowemi wyrazami rozwinięcia Taylora, a mianowicie:

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

Stąd bowiem, kładąc $y = 0$, otrzymujemy *regułę Newtona*.

Dokładny wzór Taylora dla funkcji $f(x)$ ma postać:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(\xi)$$

przyczem ξ leży w przedziale (x_0, x). Jeżeli x jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, to otrzymujemy stąd:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_0)}$$

Załóżmy, że w punkcie x_0 rzędna $f(x_0)$ ma taki sam znak, jak $f''(x)$ w całym przedziale (jak np. fig. 182), a $x > x_0$.

Uwzględniając wzór (214), otrzymujemy:

$$x - \bar{x} = -\frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f'(x_0)}$$

$$\bar{x} - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Zatem:

$$\frac{x - \bar{x}}{\bar{x} - x_0} = \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{f''(\xi)}{f(x_0)}$$

Prawa strona ma wskutek założenia wartość dodatnią, a więc $x - \bar{x}$ ma taki sam znak, jak $\bar{x} - x_0$, a mianowicie znak sumy: $x - \bar{x} + \bar{x} - x_0 = x - x_0$, to znaczy znak dodatni. A więc $\bar{x}$ leży *między* x_0 a x, czyli daje lepsze przybliżenie aniżeli x_0.

Jeżeli więc prowadzimy styczną z tego punktu, w którym rzędna ma taki sam znak, jak $f''(x)$, to uzyskujemy lepsze przybliżenie aniżeli odcięta tego punktu.

Jeżeli to postępowanie powtarzamy, to znaki utrzymują się zawsze te same, a więc uzyskujemy przez to *iterowanie ciąg* kolejnych, corazto lepszych aproksymacyj. Co więcej, ten ciąg *dąży* ściśle do szukanego pierwiastka. Jeżeli bowiem oznaczymy n-tą wartość przybliżoną, otrzymaną przez n-krotne zastosowanie tego procesu, literą x_n, to wzór Newtona przyjmie postać:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

Ciąg $\{x_n\}$ jest monotoniczny i ograniczony (wartością pierwiastka x) a zatem zbieżny. Przechodząc do granicy, otrzymamy:

$$g = g - \frac{f(g)}{f'(g)}$$

a stąd:

$$f(g) = 0$$

A zatem granica g ciągu $\{x_n\}$ jest szukanym pierwiastkiem $x = g$ danego równania $f(x) = 0$.

Uwaga. Jeżelibyśmy nawet rachunek rozpoczęli od nieodpowiedniego punktu, np. od punktu A na fig. 181, to już w następnym kroku będziemy mieli do czynienia z odpowiednim punktem, o rzędnej dodatniej i $f'' > 0$ (por. linje kropkowane na fig. 181).

Przykłady. 1) Zastosujmy regułę Newtona do pierwiastka równania:

$$y = \log_{10} x - x + 3 \tag{A}$$

z przedziału $(3, 4)$. Potrzebne jest $y' = \frac{\log_{10} e}{x} - 1$. Dla $x = 3$ otrzymujemy $y'(3) = -0{\cdot}85524$. Zatem przez iterowanie wzoru (214) otrzymujemy:

$$\bar{x} = 3 + \frac{0{\cdot}477121}{0{\cdot}85524} = 3{\cdot}55$$

$$\bar{\bar{x}} = 3{\cdot}55 - \frac{y(3{\cdot}55)}{y'(3{\cdot}55)} = 3{\cdot}55025$$

$$\bar{\bar{\bar{x}}} = 3{\cdot}5502602$$

Tu już wszystkie zatrzymane miejsca są dokładne.

2) Stosując metodę Newtona do aproksymacji pierwiastka równania:

$$f(x) = x^5 - 4x - 2 = 0$$

zawartego w przedziale $(1, 2)$, otrzymujemy:

$$\bar{x} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{22}{76} = 1{\cdot}71$$

$$\bar{\bar{x}} = 1{\cdot}71 - \frac{f(1{\cdot}71)}{f'(1{\cdot}71)} = 1{\cdot}5582$$

$$\bar{\bar{\bar{x}}} = 1{\cdot}521$$

$$x_4 = 1{\cdot}51852$$

3) Przekonujemy się z łatwością, np. drogą graficzną, że dla równania:

$$\sin x = 0{\cdot}3\,x$$

jednym pierwiastkiem jest $x = 0$, drugi leży między $\frac{1}{2}\pi$ a π, a trzeci między $-\pi$ a $-\frac{1}{2}\pi$. Dla pierwiastka z przedziału $<\frac{1}{2}\pi, \pi>$ otrzymuje się:

$$\bar{x} = \pi - \frac{f(\pi)}{f'(\pi)} \approx 3{\cdot}14 - \frac{0{\cdot}942}{1{\cdot}3} \approx 2{\cdot}4154$$

Następne przybliżenia są: 2·3585, 2·3568, 2·35653, 2·356440. Ostatnie ma 6 cyfr po kropce dziesiętnej dokładnych.

Uwaga. Metodę Newtona można uogólnić podobnie jak regułę „falsi" albo przez zatrzymanie dalszych wyrazów we wzorze Taylora, albo też przez rozwinięcie funkcji odwrotnej do $y = f(x)$, t. j. $x = \varphi(y)$, w otoczeniu $y = y_0$, a mianowicie:

$$x = \varphi(y) + (y - y_0)\varphi'(y_0) + \frac{(y - y_0)^2}{2!}\varphi''(y_0) + \ldots$$

Stosując tu znane wzory na pochodne funkcji odwrotnej, otrzymujemy:

$$x = x_0 + (y - y_0)\cdot\frac{1}{f'(x_0)} - \frac{(y - y_0)^2}{2!}\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^3} + \ldots$$

Kładąc tu $y = 0$, otrzymujemy odrazu rozwinięcie pierwiastka w postaci:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0)}{2!}\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)^3} + \ldots$$

Rachunki są jednak przy tych metodach tak mozolne, że korzystniejszą okazuje się metoda *iteracji*.

§ 202. Przybliżone rozwiązywanie równań zapomocą ogólnej metody iteracji.

Zarówno kilkakrotne stosowanie reguły „falsi" jak i reguły Newtona są specjalnemi przypadkami ogólniejszej metody, dającej odrazu ciąg przybliżeń zbieżny do pierwiastka.

Aby tę metodę zastosować do równania $f(x) = 0$, przedstawimy je w postaci $f(x) \equiv x - \varphi(x) = 0$. Wtedy równanie $f(x) = 0$ przechodzi na:

$$x = \varphi(x)$$

Nazwijmy $\varphi(x) = z$.

Ograniczymy się do takiego przedziału, otaczającego szukany pierwiastek, w którym pierwsza pochodna $\varphi(x)$ albo jest mniejsza co do bezwzględnej wartości od liczby k, spełniającej warunki $0 < k < 1$, t. j.:

(a) $$|\varphi'(x)| < k < 1$$

albo jest stale $|\varphi'(x)| > 1$. W tym drugim przypadku odwrotna funkcja $x = \psi(z)$ spełnia zwykle warunek (a), albowiem $\varphi'(x) = \frac{1}{\psi'(z)}$, a więc,

gdy w pewnym przedziale jest stale $|\varphi'(x)| > 1$, to $|\psi'(z)| < 1$, zatem zwykle spełnia się wtedy także warunek $|\psi'(z)| < k < 1$.

Udowodnimy, że, *jeżeli przy założeniu* (a) x_1 *jest przybliżonem rozwiązaniem równania* $f(x) = 0$ *czyli równania* $x = \varphi(x)$, *to wartości* $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \varphi(x_2), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1}) \ldots$ *są coraz to lepszemi wartościami przybliżonemi, a ich granicą jest szukany pierwiastek równania.*

Dowód. Utwórzmy różnicę pomiędzy pierwiastkiem x a drugiem przybliżeniem x_2:

$$x - x_2 = \varphi(x) - \varphi(x_1)$$

Na mocy twierdzenia o wartości średniej otrzymujemy stąd:

$$x - x_2 = (x - x_1)\varphi'(\xi) \qquad x < \xi < x_1 \quad \text{lub} \quad x > \xi > x_1.$$

Ponieważ zaś $|\varphi'(x)| < k$ w całym badanym przedziale, przeto:

$$|x - x_2| < |x - x_1| \cdot k$$

Podobnie:

$$|x - x_3| < |x - x_2| \cdot k < |x - x_1| \cdot k^2$$

a ogólnie:

$$|x - x_n| < |x - x_1| \cdot k^n$$

Gdy $n \to \infty$, to $k^n \to 0$ a więc i $|x - x_n| \to 0$ a stąd wynika, że:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Metoda ta prowadzi nieraz bardzo szybko do daleko idących przybliżeń. Cały rachunek przy tej metodzie polega na podstawianiu znalezionej wartości każdym razem znowu w prawą stronę równania $x = \varphi(x)$.

Przykład. Równanie:

$$\operatorname{tg} x - x = 0$$

posiada prócz pierwiastka $x = 0$ nieskończony ciąg pierwiastków w przedziałach $(\pi, \frac{3\pi}{2}), (2\pi, \frac{5\pi}{2}), \ldots, (n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}), \ldots$, jak się łatwo można przekonać nawet z pobieżnego wykresu.

To równanie ma wprawdzie postać $x = \varphi(x)$, a mianowicie:

$$x = \operatorname{tg} x$$

lecz pochodna funkcji $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$, t. j. $\frac{1}{\cos^2 x}$ jest stale większa od 1. Natomiast dane równanie można napisać także w postaci:

$$x = \operatorname{arctg} x + m\pi$$

Pochodna prawej strony wynosi $\frac{1}{1 + x^2}$ i jest stale mniejsza od jakiejś liczby k, mniejszej od 1, gdy wyłączymy znany nam już pierwiastek $x = 0$.

Poszukajmy pierwiastka, leżącego w pobliżu $x_1 = \frac{5\pi}{2} = 2{\cdot}5\pi$. Wtedy trzeba położyć $m = 2$, a więc użyć wzoru:

$$x = \operatorname{arctg} x + 2\pi$$

Stąd otrzymujemy kolejno:

$x_1 = 7{\cdot}854$, $x_2 = 7{\cdot}727$, $x_3 = 7{\cdot}72528$, $x_4 = 7{\cdot}7252521$, $x_5 = 7{\cdot}72525184\ldots$

Tutaj $\psi'(x)$ ma w pobliżu $\frac{5\pi}{2}$ wartość około $\frac{1}{60}$, zatem $k \approx \frac{1}{60}$, a więc błąd maleje w tym stosunku przy każdym następnym kroku.

Uwaga. Wielokrotne stosowanie metody Newtona jest specjalnym przypadkiem metody iteracji, albowiem równanie $f(x) = 0$ można napisać także w postaci:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Podobnie i regula falsi, stosowana wielokrotnie, jest specjalnym przypadkiem metody iteracji, albowiem równanie $f(x) = 0$ można napisać w postaci:

$$x = x_0 - y_0 \frac{x - x_0}{f(x) - y_0}$$

(istotnie z tego wzoru otrzymuje się $x - x_0 = -\frac{y_0(x - x_0)}{f(x) - y_0}$ czyli $f(x) - y_0 = -y_0$, czyli $f(x) = 0$).

Rozmaite inne metody przybliżonego rozwiązywania równań można znaleźć w cytowanych już kilkakrotnie podręcznikach Rungego-Königa i Whittakera-Robinsona.

Alfabetyczny spis rzeczy.

Algebraiczna funkcja 93.
„ linja 94.
algorytm Euklidesa 151, 311.
amplituda hiperboliczna 292.
analiza wyższa 18.
Andoyer 21.
aproksymacja funkcji 88, 385, 511, 604.
Archimedes 152.
Archimedesa spiralna 222.
arcus sinus 67.
„ cosinus 68.
„ tangens 69.
„ cotangens 70.
area sinhyp 290.
argument 34.
asteroida 81, 579.
asymptota 588.
„ krzywolinjowa 599.
asymptotyczne dążenie jednej funkcji do drugiej 510, 511.
asymptotycznie równe funkcje 599.
asymptotyczny szereg 511.
Aulich 50.

Banach 250.
barometryczna formułka 284, 411.
Bernoulli Jan 501.
Bessela wzór interpolacyjny 614.
biegun 33.
Bloch 36.
błąd bezwzględny 236, 510.
„ iloczynu 328.
„ ilorazu 328.
„ względny 236, 510.
brachistochrona 499.
Brahy 498.
brzeg obszaru 17.

Całość z x 11.
Cauchy'ego zasada zbieżności 121.
„ tw. o wartości średniej 319, 501.
Charlier 481.
ciąg Fibonacci'ego 148.
„ monotoniczny 104.
„ malejący, nierosnący 105.
„ niemalejący 104.
„ nieskończony 81, 100.
„ ograniczony, nieograniczony 101.
ciąg rosnący 105.
„ rozbieżny 103.
„ zbieżny 102.
ciągłość funkcji jednej zmiennej 186—195.
„ „ dwu zmiennych 196.
„ „ odwrotnych 202.
„ „ złożonych 190.
„ jednostajna 206.
„ jednostronna 194.
cisoida 258, 590.
cosinusy kierunkowe 522—523.
Courant 207.
Crelle 22.
cykloida skrócona 79, 544.
„ wydłużona 79, 545.
„ zwyczajna 78, 264, 499, 559.
cylindroid 197.
czynnik całkujący 349.

Darmois 482.
Dedekind 98.
dekrement logarytmiczny 441.
Descartes'a liść 77, 258, 462, 568, 594.
diakaustyka 574, 588.
Dingeldey 498.
długość geograficzna 379.
Dölp 498.
drgania zanikające 441.
dwuparametrowa gromada linij 529.
działania arytmet. na ciągach 122—128, 132—139.
działania arytmet. na gran. funkcyj 161, 181—182.
działania arytmet. na funkcjach ciągłych 187
działania graficzne 31.
Dziwiński 498.

e 128, 273, 396, 397.
elipsa 74, 461, 557.
elipsoida 485, 496.
epicykloida 79, 466, 512, 588.
Euklidesa algorytm 151, 311.
Eulera twierdz. o f. jednorodnych 333.
ewoluta 555 i nast.
ewolwenta 555 i nast.
„ koła 513.
extrapolacja 601.

extrema funkcyj 1 zmiennej 426 i nast.
„ „ 2 zmiennych 466 i nast.
„ „ 3 i więcej zmiennych 475.
„ niewłaściwe 429, 474.
„ z warunkami poboczn. 486 i nast.

Fibonacci'ego ciąg 148.
forma kwadratowa 471.
frekwencja 20.
Fubini 498.
Fuhrmann 498.
funkcja algebraiczna 84, 92, 93; całkowita wym. 84—86; ciągła 186, 196; cyklometryczne 70; dwuch zmiennych 16, 38, 81; elementarne 81, 96; hiperboliczne i odwrotne 287—291, 397; jednej zmiennej 6, 13, 81, jednorodna 333; jednoznaczna 13; kwadratowa 85; linjowa 34, 84, 212; logarytmiczna 406—410; malejąca 81—82, 318—319; monotoniczna 81—82; nieciągła 191; niemalejąca 81—82, 319; nierosnąca 81—82, 319; niewymierna 84, 92; odwrotna 3, 64, 202, 252; parzysta i nieparzysta 82; perjodyczna i nieperjodyczna 83—84; pierwotna 216, 242; pochodna 215; postać uwikłana 60, 61, 63, 353, 359, 361, 363, 369, 377, 378, 381, 382; postać wyraźna 59—60; przestępna 84, 92, 95, 96; rosnąca 81—82, 318—319; różniczkowalna 235; rzeczywista i zespolona 81; trygonometryczna 96, 399 i nast.; wykładnicza 280—287, 395; wymierna 84, 89; wymierna ułamkowa 89; zależna od drugiej 374; złożona 14, 16, 32, 330, 333, 340.

Gałąź funkcji i linji 93, 565.
Gaussa krzywa 540.
geodezyjna linja 499.
geometrja różniczkowa 521.
Gołąb-Jakubowski 47.
graficzne dzielenie 32; mnożenie 32; rozwiązywanie równań 621; różniczkowanie 225—226.
granica ciągu 102, 111.
„ funkcji 154, 166, 171, 172, 174.
„ górna i dolna 120.
„ niewłaściwa ciągu 129, 130.
„ „ „ funkcji 178.
„ wyrażeń nieokreślonych 500 i nast.
gromada linij 528—529.

Hardy 498.
Hayashi 290.
hiperbola równoboczna 89, 223, 526.
hiperboliczna funkcja 2, 287 i nast.
hipocykloida 80.
Hornera schemat 89.
Hospitala reguła 501 i nast.
Humbert 498.
„Hütte“ 20, 290.

Identyczność Lagrange'a 481.
iloczyn nieskończony 143.
iloraz różnicowy 211, 606.
„ różniczkowy 235.
interpolacja 21—22, 232—233, 601 i nast.
interpolacyjny wzór 601.
„ „ Bessela 615.
„ „ Lagrange'a 605.
„ „ Newton'a 608, 616.
„ „ Stirlinga 615.
inwersja 366, 372.
iteracji metoda przybliż. rozw. równań 631—633.
iterowanie 627, 629.

Jacobi'ego wyznacznik 362.
Jahnke 20.
jakobjan 362, 383.
jednoparametrowa gromada linij 528.

Kapitalizacja 281—283.
kapitał 281.
kardioida 80, 466, 526, 588.
katakaustyka 574, 586.
kąt przestępny f. hiperbol. 292.
Kiepert 498.
Köhler 21.
kolineacja 366.
koło krzywiznowe (ściślo styczne) 549.
konoida Plückera 197.
Konorski 57.
König 483, 633.
korelacja 23.
korelacji spółczynnik 481.
Kowalewski 509.
kres dolny 98.
„ górny 98.
krok śruby 378.
krzywa (zob. też linja) Gaussa 540.
„ spodków 525 i nast.
krzywe równoległe 526, 584 i nast.
krzywizna 387, 553.
krzywizny promień 549.
„ środek 549.
kula 360, 379.

Lagrange'a identyczność 481.
„ metoda czynnika dowolnego 487, 490.
„ tw. o wartości średniej 315 i nast.
„ wzór interpolacyjny 605.
Leib 498.
Leibniz 222, 228.
Leibniza szereg na liczbę π 417.
„ wzór na pochodną iloczynu 299.
lemniskata 462, 526.
liczba ograniczająca 97.
liczby rzeczywiste, urojone, zespolone 9.
Limanowski 482.
limes 102.
„ inferior, superior 120.
linja (zob. też krzywa) algebraiczna 94, 593.

linja falowa 275—276.
„ geodezyjna 499.
„ Lissajou 74
„ łańcuchowa 292.
„ parametrowa na powierzchni 379.
„ przestrzenna 46, 361, 377.
„ śrubowa 363, 377.
linje największego spadu 530.
liść Descartes'a 77, 258, 462, 568, 594.
Loewy 153.
logarytm naturalny 272, 404 i nast., 512.
„ zwyczajny 272, 273, 410.
logarytmiczna pochodna 274.
Loria 81, 588.
Luckey 57.

Łańcuchowa linja 292.
łańcuchowa reguła w rach. różn. 250, 331
łańcuchowe dzielenie 151, 311.
„ ułamki 144 i nast.
Łomnicki 39, 620.

Machina szereg na liczbę π 418.
Maclaurina wzór 307, 388.
Mangoldt 577.
maximum (zob. też extremum) funkcji 1 zmiennej 427; f. 2 zmiennych 466; lokalne 426; niewłaściwe 429, 474.
medjana 458.
metoda Euklidesa dzielenia łańc. 151, 311.
„ iteracji 631, 633.
„ najmniejszych kwadratów 456.
„ nieznaczonych spółczynników 419.
miara krzywizny 552, 553.
„ łukowa 8.
miejsce zerowe funkcji 7.
„ „ wielomianu 86.
minimum (zob. też extremum) funkcji 1 zmiennej 427; funkcji 2 zmiennych 466; lokalne 426; niewłaściwe 429, 474.
Mitscherlich 285.
Montel 498, 544.

Największa i najmniejsza wartość funkcji 204, 426.
Neila parabola 557, 570.
Neper 273.
Netto-Dölp 498.
Newton 228.
Newtona reguła przybliż. rozw. równań 628.
„ szereg 511.
„ wielomian 609.
„ wzór dwumienny 106, 127.
„ „ interpolacyjny 608, 616.
nieciągłość 191 i nast.
nieokreślone wyrażenia 135, 136, 138, 184, 500 i nast.
niewłaściwa granica ciągu 129 i nast.
„ „ funkcji 178 i nast.
„ wartość „ 500.
niewymierna liczba 12,
„ funkcja 84, 92 i nast.
Nikliborc 128, 457.
nomografja 54, 622.
nomogram 54.
normalna do krzywej 221.
„ „ powierzchni 496.
normalne równanie 478, 482.

Obraz graficzny 23, 24, 39.
obręcz 585.
obrót osi układu spółrzędnych 29.
obszar otwarty 17; spójny, wypukły, domknięty 18.
d'Ocagne 57.
odbicie w kole 366.
odcięta 24, 38.
odosobniony punkt 566.
odwracanie układu funkcyj 369.
odwzorowanie 365, 366, 373, 374.
ortogonalna siatka linij 530.
ortogonalne trajektorje 530, 555.
oś biegunowa 33.
„ odciętych, rzędnych 23, 24, 38.

Papier biegunowy 36; logarytmiczny 51.
parabola 85; 3-go stopnia 85; n-tego stopnia 86, 223.
„ Neila 557, 570.
„ regresji 483.
paraboloida eliptyczna 44; hiperboliczna 45; obrotowa 44, 581.
parametrowe przedstawienie funkcyj 72 i nast., 378 i nast.
pas funkcyjny 47.
pęk linij 581.
perjod funkcji 83.
perjodyczne funkcje 13, 83.
Perron 153.
Peters 21.
π (szereg nieskończony) 417, 418.
pierwiastek arytmet., jednoznaczność 13.
„ „ obliczanie 415—416.
„ równania 7, 86.
„ wielokrotny 87, 309.
pierwiastkowy czynnik 87.
Pirani 47.
plan warstwicowy 57, 58.
Plückera konoida 197.
płaszczyzna, równanie 37, 38.
„ styczna do powierzchni 326, 337, 339, 340.
pochodna całkowita 321; definicja 216; funkcyj cyklometrycznych 265 i nast.; f. hiperbolicznych 290; f. odwrotnej 252 i nast., 302 i nast.; f. przedstawionej w formie parametrowej 256 i nast., 301, 302; f. trygonometrycznych 259 i nast.; f. uwikłanej 355, 357; f. wykładniczej 270 i nast.; f. $y=x$ 240; f. złożonej 249 i nast., 303; iloczynu 243—244, 299; ilorazu 246—247; lewostronna, prawostronna 216, 231, 294; logarytmiczna 274; logarytmu 271—272; niewłaściwa 216; potęgi 245, 247—248, 255—256, 275; stałej 240; sumy i różnicy 241—242, 298; wielomianu 246.

pochodna druga, trzecia n-ta 295 i nast.
pochodna cząstkowa, definicja 321; drugiego rzędu 344; funkcyj uwikłanych 360, 361, 364, 370, 381, 382; f. złożonej 333, 341; mieszana 343, 346; w dowolnym kierunku 336—337.
podnormalna 221, 521.
podstyczna 221, 521.
podział złoty 148.
Pogorzelski 89.
populacja 20.
postępy arytmetyczne 611 i nast.
potęga o wykładniku niewymiernym 108.
powierzchnia bezpieczeństwa 580.
„ walcowa 46, 323.
powinowactwo (affinizm) 366.
prawdziwa wartość funkcji 500.
prawie wszystkie 102.
prawo najlepszego przybliżenia 150.
„ wzrastania organicznego 283 i nast.
prędkość 1, 226—228; kątowa 263, 306.
procent składany 280—282.
promień krzywizny 549.
„ wodzący 34.
proporcjonalność odwrotna 89; prosta 84.
prosta regresji 480.
przedstawienie graficzne funkcyj 23, 39.
„ tabelaryczne „ 18.
przedział otwarty 8; stałości 71, 430; właściwy i niewłaściwy 8; zamknięty 8.
przekrój Dedekinda 98.
przekształcenie rzutowe 366.
„ zap. promieni odwrotnych (inwersja) 366.
przestępne funkcje 95—96.
„ równania 620.
przestępność funkcji wykładniczej 509.
przesunięcie 27, 28, 365.
przybliżone metody rozw. równ. 620 i nast.
„ wyprostowanie łuku koła 505.
przyporządkowanie 12.
przyrost funkcji 187, 233, 326.
przyśpieszenie 1, 228.
punkt izolowany 566, 569.
„ kątowy 294.
„ odosobniony 566.
„ osobliwy 356, 459, 463, 522, 564.
„ podwójny 564
„ potrójny 564, 572.
„ przegięcia 432, 538.
„ siodłowy 471, 567.
„ undulacyjny 539.
„ węzłowy 565, 568.
„ wielokrotny 564.
„ zwrotu 566.

Rachunek całkowy 556; różniczkowy 217, 235; warjacyjny 499.
redukt ułamka łańcuchowego 145.
„ poboczny 153.
regresja 480.
regula falsi 623 i nast.
reguła Hospitala 501 i nast.
reguła Newtona 628 i nast.
reszta wzoru interpolacyjnego 618.
„ „ Taylora 385; Cauchy'ego, Lagrange'a, Schlömilcha 390.
Robertsona prawo 541.
Robinson 22, 615, 633.
Rollego twierdzenie 313, 549.
Rothe 207, 498.
rozwijająca (ewolwenta) 513, 555.
rozwinięcia funkcyj 395—419.
rozwinięta (ewoluta) 555.
równania normalne 478, 483.
równanie algebraiczne 273, 309, 509.
„ linji 24.
„ normalnej 221, 524.
„ płaszczyzny 38, 39—42.
„ „ stycznej 339.
„ przestępne 620.
„ różniczkowe 278, 279, 283, 284, 286, 298, 304, 305, 527—530.
„ stycznej 220, 523—524.
równoległe krzywe 526 i nast.
równości symboliczne 133, 134, 136, 609.
różnice pierwsza, druga, r-ta 606.
różniczka 234.
„ cząstkowa 324.
„ zupełna 324 i nast.
„ wyższego rzędu 295 i nast.
„ zupełna wyż. rzędu 350 i nast.
różniczkowa geometrja 521.
różniczkowanie graficzne 225 i nast.
„ numeryczne 238.
ruch jednostajny 212; jednostajnie przyśpieszony, opóźniony 229; niejedn. przyśp., opóźniony 229; krzywolinjowy 229.
Rudziński 488.
Runge 47, 483, 615, 633.
Ruziewicz 201.
rzędna 24, 38.
rzut cechowany 57, 58.
„ ukośny równoległy 39.

Sallin 498.
Salpeter 498.
Schlömilch 390, 498.
Schwerdt 57.
Sierpiński 153, 166, 207, 511.
signum 11.
siodłowy punkt 471, 567.
skala funkcyjna 47 i nast.
skok 193.
Snelliusa prawo 453.
Sohncke 498.
spadek 84. 210 i nast.
„ stycznej 220, 522.
spiralna Archimedesa 36.
„ logarytmiczna 535.
spodków krzywa 525.
spółczynnik kierunkowy 211.
„ korelacji 481.
„ regresji 480, 481.
„ załamania światła 452.
spółogniskowe linje 2-go stopnia 532.

spółrzędne biegunowe na pł. 33—34.
„ „ w przestrzeni 381.
„ dwubiegunowe 37.
„ eliptyczne 37, 369, 532.
spółrzędne krzywolinjowe 368.
„ prostokątne na pł. 23.
„ „ w przestrzeni 37.
średnia arytmetyczna 455, 495; geometryczna 456, 495; harmoniczna 457.
środek ciężkości 475, 479; krzywizny 549; symetrji 28.
śrubowa linja 363, 377.
„ powierzchnia 63, 64.
Steckel 128.
Stegemann 498.
Steinhaus 128, 457, 485.
Stirlinga wzór interpolacyjny 614—615.
stopień korelacji 481
„ zdążania funkcji do zera 165.
stożek kołowy 43.
strofoida 590.
styczna (płaszczyzna) 326, 337, 339, 340.
„ (prosta) 220 i nast., 521 i nast.
styczność wyższego rzędu 386, 546 i nast.
suma szeregu nieskończonego 140.
szereg asymptotyczny 511.
„ geometryczny 141.
„ Leibniza 417.
„ Machina 418.
„ Maclaurina 393.
„ Newtona 414.
„ nieskończony 139.
„ rozbieżny 140.
„ Taylora 392.
„ zbieżny 140.
szerokość geograficzna 379.
szybkość wzrastania funkcji 209, 211—215, 220.

Tabelaryczne przedstawienie funkcji 18 i nast.
tablice wartości funkcyj 18—23.
„Technik“ 20.
torus 585.
trajektorje ortogonalne 530.
„ ukośne 533.

Układ lewej, prawej ręki 38.
„ równań linjowych 603.
„ spółrzędnych 23, 33, 37.
ukośne teajektorje 533.
ułamek łańcuchowy 144 i nast.
undulacyjny punkt 539.

Van der Waals 543.
Vessiot 498, 544.
Vivanti 498.
Vlak-Vega 21.
Vogt 448.

Warjacyjny rachunek 499.
warstwice 58, 484, 529.
wartość bezwzględna 10.
„ iloczynu nieskończonego 143.
„ szeregu nieskończonego 140.
wartość ułamka łańc. niesk. 145.
Watson 511.
Weierstrass 232.
wektor 229.
węzeł linji krzywej 565, 567.
Whittaker 22, 511, 615, 633.
wielkości skalarne 229.
wielomian 86.
„ interpolacyjny 602.
„ Newtona 609.
„ Taylora 385.
wierzchołki linji 551.
„ pęku linij 581.
Witkowski 544.
wklęsłość 535.
wykres funkcji 1 zmiennej 23 i nast.
„ „ 2 zmiennych 39 i nast.
„ „ odwrotnej 71.
„ „ złożonej 32.
wymierna funkcja 84, 86, 89.
„ liczba 12.
wypukłość 535.
wyraz dopełniający wzoru Taylora (zob. reszta) 385, 390.
wyrażenia nieokreślone 600 i nast.
wyrównanie szeregu punktów 477 i nast.
wyróżnik formy kwadratowej 471.
wysokość 38.
Wysocki 4.
wysuwka logarytmiczna 50.
wyznacznik 603.
„ funkcyjny (Jacobi'ego) 362, 370.
wzór Eulera 333
„ interpolacyjny zob. interpol. wzór.
„ Lagrange'a (dla wart. średniej) 317.
„ Leibniza na n-tą poch. ilocz. 299.
„ Maclaurina 307, 388, 390, 394, 398, 400, 405, 412, 416, 424.
„ Taylora 308, 384, 391, 423—424.
wzrastanie organiczne 280—287.

Yule 482.

Zagadnienie interpolacji 600.
zakres istnienia funkcji 13, 25.
„ wartości „ 8.
zasób wartości ciągu 100.
zbieżny ciąg 102.
zbiór 13, 15, 97 i nast.
„ nieograniczony 97.
„ ograniczony 97 98.
Zimmerman 22.
zmiana jednostki 29.
zmienna zależna i niezależna 7.
Zoretti 498.
zwrotu punkt 566.

Żyliński 201.

Spis rzeczy.

Str.

Wstęp 1

CZĘŚĆ I.

O funkcjach i granicach.

Rozdział I.

Pojęcie funkcji. Sposoby przedstawiania funkcyj. Podział funkcyj.

Ustęp I. Pojęcie funkcji.

§ 1. Pojęcie funkcji jednej zmiennej 6
§ 2. Pojęcie funkcji złożonej 14
§ 3. Pojęcie funkcji dwóch i więcej zmiennych 16

Ustęp II. O sposobach przedstawiania funkcji.

§ 4. Tabelaryczne przedstawienie funkcji 18
§ 5. Graficzne przedstawienie funkcyj jednej zmiennej przy użyciu spółrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie 23
§ 6. Przesunięcia 27
§ 7. Zmiana jednostki 29
§ 8. Graficzne działania 31
§ 9. Wykres funkcji złożonej 32
§ 10. Spółrzędne biegunowe 33
§ 11. Spółrzędne prostokątne w przestrzeni 37
§ 12. Przykłady graficznego przedstawiania funkcyj dwóch zmiennych . . . 39
§ 13. Skale funkcyjne 47
§ 14. Nomogramy 52
§ 15. Plan warstwicowy 57
§ 16. Przedstawianie funkcyj zapomocą wzorów matematycznych. Forma wyraźna 59
§ 17. Przedstawianie funkcji w formie uwikłanej 60
§ 18. Funkcje odwrotne 64
§ 19. Przedstawianie funkcyj w parametrowej formie 72

Ustęp III. Podział funkcyj. Funkcje elementarne.

§ 20. Rozmaite zasady podziału funkcyj 81
§ 21. Funkcje całkowite wymierne 84
§ 22. O zerowych miejscach wielomianu 86

Str.
§ 23. Funkcje ułamkowe wymierne 89
§ 24. Funkcje niewymierne 92

Rozdział II.

O ciągach nieskończonych i ich granicach.

§ 25. O niektórych własnościach zbiorów liczb 97
§ 26. Definicja ciągu i zasób jego wartości 100
§ 27. Granica ciągu 102
§ 28. Twierdzenia o granicach ciągu 103
§ 29. Definicja granicy w arytmetycznej postaci 110
§ 30. Twierdzenie o ciągu złożonym z bezwzględnych wartości wyrazów danego ciągu 118
§ 31. Granica górna i dolna. Zasada zbieżności Cauchy'ego 119
§ 32. Arytmetyczne działania, wykonywane na ciągach zbieżnych 122
§ 33. O niewłaściwych granicach ciągów 128
§ 34. Arytmetyczne działania dla niewłaściwych granic ciągów 132
§ 35. O nieskończonych szeregach 139
§ 36. O iloczynach nieskończonych 143
§ 37. O nieskończonych ułamkach łańcuchowych 144
§ 38. Prawo najlepszego przybliżenia zap. uł. łańcuchowych 150

Rozdział III.

O granicach funkcji.

§ 39. Definicja granicy funkcji 154
§ 40. Twierdzenia o granicach funkcji 158
§ 41. Zastosowania twierdzeń o granicach funkcyj 162
§ 42. Stopień zdążania funkcyj do zera 165
§ 43. Definicja granicy funkcji przy pomocy nierówności 165
§ 44. Pojęcie granicy dla funkcyj dwóch zmiennych 170
§ 45. O granicach jednostronnych 171
§ 46. Granica funkcji, gdy zmienna niez. dąży do $+\infty$ lub do $-\infty$ . . . 174
§ 47. O niewłaściwych granicach funkcji 178
§ 48. Arytmetyczne działania dla niewłaściwych granic funkcyj 181

Rozdział IV.

O funkcjach ciągłych.

§ 49. Definicja ciągłości funkcji 186
§ 50. Ciągłość elementarnych funkcyj 188
§ 51. Ciągłość funkcyj złożonych 190
§ 52. Uwagi o funkcjach nieciągłych 191
§ 53. Ciągłość jednostronna 194
§ 54. Ciągłość funkcyj dwóch i więcej zmiennych 196
§ 55. Przechodzenie funkcji ciągłej przez wartość zero 198
§ 56. Przechodzenie funkcji ciągłej przez dowolną wartość pośrednią 201
§ 57. O ciągłości funkcyj odwrotnych 202
§ 58. Największa i najmniejsza wartość funkcji 204
§ 59. O jednostajnej ciągłości 206

Str.

CZĘŚĆ II.

Rachunek różniczkowy.

Rozdział V.

Pochodna i różniczka funkcji jednej zmiennej.

Ustęp I. Szybkość wzrastania funkcji. Pochodna.

§ 60. Badanie wzrastania funkcji zapomocą prób 209
§ 61. Szybkość wzrastania funkcji linjowej 211
§ 62. Szybkość wzrastania dowolnej funkcji. Definicja pochodnej 213
§ 63. Przykłady obliczania pochodnej wprost z definicji 217
§ 64. Geometryczna interpretacja pochodnej 219
§ 65. Graficzne różniczkowanie 225
§ 66. Mechaniczna interpretacja pochodnej 226
§ 67. Warunek konieczny istnienia pochodnej 230

Ustęp II. Różniczka i jej zastosowanie.

§ 68. Definicja różniczki 232
§ 69. Geometryczne przedstawienie różniczki 236
§ 70. Zastosowanie różniczki w rachunkach przybliżonych 237

Rozdział VI.

Ogólne reguły różniczkowania funkcyj jednej zmiennej.

§ 71. Pochodna stałej 240
§ 72. Pochodna funkcji $y = x$ 240
§ 73. Pochodna sumy i różnicy 241
§ 74. Pochodna iloczynu 243
§ 75. Zachowanie się stałych czynników przy różniczkowaniu 244
§ 76. Zastosowanie wzoru na poch. ilocz. do potęg i wielomianów 244
§ 77. Pochodna ilorazu 246
§ 78. Pochodna funkcji złożonej 249
§ 79. Pochodna funkcji odwrotnej 252
§ 80. Pochodna funkcji przedst. w formie parametrowej 256

Rozdział VII.

Pochodne elementarnych funkcyj przestępnych.

§ 81. Pochodne funkcyj trygonometrycznych 259
§ 82. Pochodne funkcyj cyklometrycznych 265
§ 83. Pochodna funkcji wykładniczej 269
§ 84. Pochodna logarytmu 271
§ 85. Pochodna logarytmiczna 274
§ 86. Przykłady na poch. funkcyj wykł. i logarytmicznych 275
§ 87. Równanie różniczkowe funkcji wykładniczej 278
§ 88. Zastosowanie funkcji wykł. Wzrastanie „organiczne“ 280
§ 89. Wzrastanie według prawa Mitscherlicha 284
§ 90. Wzrastanie według prawa Robertsona 286
§ 91. Funkcje hiperboliczne i ich pochodne 287
§ 92. Obliczanie pochodnej funkcji, określonej dwoma wzorami 292

Rozdział VIII.

Pochodne wyższych rzędów funkcji jednej zmiennej.

§ 93. Poch. i róż. wyższych rzędów funkcji $y = f(x)$ w przypadku, gdy x jest zmienną niezależną 295
§ 94. Wyższe pochodne sumy i iloczynu dwóch funkcyj 298
§ 95. Wyższe pochodne funkcyj złożonych, odwrotnych i przedst. param. . . 301
§ 96. Wzór Maclaurina dla wielomianu 307
§ 97. Wzór Taylora dla wielomianu 308
§ 98. Zastosowanie wyższych pochodnych do algebry 309

Rozdział IX.

Twierdzenia o wartości średniej.

§ 99. Twierdzenie Rollego o wartości średnej 313
§ 100. Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej 315
§ 101. Wnioski z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej 318
§ 102. Twierdzenie Cauchy'ego o wartości średniej 319

Rozdział X.

Pochodne i różniczki funkcyj dwóch i więcej zmiennych.

§ 103. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu 321
§ 104. Różniczki cząstkowe i różniczka zupełna 324
§ 105. Związek różniczki zupełnej z prawdziwym przyrostem funkcji 326
§ 106. Zastos. róż. zupełnej do ocenienia błędu funkcyj 2 i więcej zmiennych . 328
§ 107. Zastos. poch. cząstkowych do obliczania pochodnej funkcji jednej zmiennej, złożonej z 2 lub więcej funkcyj jednej zmiennej 330
§ 108. Pochodne funkcji złożonej z dwóch funkcyj 2 zmiennych 333
§ 109. Pochodna w dowolnym kierunku 336
§ 110. Płaszczyzna styczna do powierzchni 337
§ 111. Pochodne ogólnej funkcji złożonej 340
§ 112. Twierdzenie o wart. śr. dla funkcji 2 zmiennych 341
§ 113. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów 343
§ 114. Zastosowanie twierdzenia o pochodnych mieszanych do badania róż. zup. 346
§ 115. Różniczki zupełne wyższych rzędów 350

Rozdział XI.

Pochodne funkcyj uwikłanych.

§ 116. Dowód istnienia funkcji uwikłanej jednej zmiennej i jej pochodna . . 353
§ 117. Druga pochodna funkcji uwikłanej jednej zmiennej 356
§ 118. Pochodne funkcji uwikłanej 2 zmiennych 359
§ 119. Pochodne 2 funkcyj 1 zmiennej, podanych w form. uwikł. 361
§ 120. Pochodne 2 funkcyj 2 zmiennych, podanych w form. uwikł. 363
§ 121. Geometryczna interpretacja 2 funkcyj 2 zmiennych. Odwzorowania . . 364
§ 122. Odwracanie układu 2 funkcyj 2 zmiennych 369
§ 123. Odwzorowania zdegenerowane. Zależność jednej funkcji 2 zmiennych od drugiej takiej funkcji 373
§ 124. 3 funkcje jednej zmiennej, podane w formie uwikłanej 377

Str.

§ 125. 3 funkcje dwóch zmiennych, podane w formie uwikłanej i ich pochodne cząstkowe 378
§ 126. 3 funkcje 3 zmiennych, podane w formie uwikłanej 381
§ 127. Ogólny układ funkcyj uwikłanych 382

Rozdział XII.

Wzory Taylora i Maclaurina w przypadku ogólnym.

§ 128. Ogólny wzór Taylora dla funkcyj jednej zmiennej 384
§ 129. Geometryczne znaczenie aproksymacji zapomocą wiel. Taylora . . . 385
§ 130. Wzór Maclaurina 388
§ 131. Wzory na wyraz dopełniający we wzorze Taylora 388
§ 132. Nieskończony szereg Taylora 392
§ 133. Rozwinięcie funkcji wykładniczej na wzór i szereg Maclaurina . . . 393
§ 134. Obliczenie liczby e 396
§ 135. Rozwinięcia funkcyj hiperbolicznych: $\sin \mathrm{hyp}\, x$ i $\cos \mathrm{hyp}\, x$ 397
§ 136. Rozwinięcie funkcji sinus na wzór Maclaurina 398
§ 137. Rozwinięcie funkcji cosinus 400
§ 138. Rozwinięcie funkcji logarytmicznej $\log_e(1+x)$ na wzór Maclaurina . . 404
§ 139. Inne rozwinięcia f. log., wyprowadzone z wzoru Maclaurina 406
§ 140. Wzór dwumienny (Newtona) 411
§ 141. Rozwinięcie funkcji $\mathrm{arctg}\, x$ 416
§ 142. Przykłady szeregów Taylora, które nie przedst. danej funkcji 419
§ 143. Wzór Taylora i Maclaurina dla f. 2 i więcej zmiennych 422

CZĘŚĆ III.

Zastosowania rachunku różniczkowego.

Rozdział XIII.

Maxima i minima funkcyj.

Ustęp I.

Maxima i minima funkcyj jednej zmiennej, podanych w formie wyraźnej.

§ 144. Definicje extremów 425
§ 145. O niewłaściwych extremach 429
§ 146. Konieczny warunek istnienia extremów dla f. różniczkowalnych . . . 430
§ 147. Badanie extr. funkcji ciągłej lecz nieróżniczk. w jakimś punkcie . . . 433
§ 148. Dostateczne warunki istnienia extremum 434
§ 149. O extremach w punktach, w których wszystkie pochodne są równe 0 . 439
§ 150. Teoretyczne i praktyczne przykłady na extrema 440
§ 151. O metodzie najmniejszych kwadratów i o rozmaitych średnich . . . 455
§ 152. Extrema f., podanych w formie uwikłanej 458
§ 153. Badanie extremów f., podanej w formie parametrowej 462

Ustęp II. Extrema funkcyj dwóch i więcej zmiennych.

§ 154. Definicja extremów funkcji dwóch zmiennych i konieczne warunki istnienia extremów 466
§ 155. Dostateczne warunki istnienia extremów f. 2 zmiennych 468
§ 156. Przykłady na badanie extremów f. 2 zmiennych 472

Str.
§ 157. Extrema funkcyj 3 i więcej zmiennych 475
§ 158. Zastosowanie extremów f. 2 i więcej zmiennych w teorji wyrównania błędów i w statystyce 476

Ustęp III. Extrema z warunkami pobocznemi.

§ 159. Sformułowanie zagadnień o extremach z war. pobocznemi 483
§ 160. Extrema f. 2 zmiennych z jednym warunkiem pobocznym 486
§ 161. Extrema f. 3 zmiennych z warunkami pobocznemi 489
§ 162. Przykłady na extrema z warunkami pobocznemi 491
§ 163. Uogólnienie zagadnień o extremach 498

Rozdział XIV.

O granicach wyrażeń nieokreślonych.

§ 164. O rozmaitych rodzajach wyrażeń nieokreślonych 500
§ 165. Reguła Hospitala 501
§ 166. Wielokrotne stosowanie reguły Hospitala 503
§ 167. Reguła Hospitala dla x, dążącego do ∞ 506
§ 168. Reguła Hospitala dla wyrażeń nieokreślonych typu $\frac{\infty}{\infty}$ 506
§ 169. Wyrażenia nieokreślone typu $0 \cdot \infty$ 511
§ 170. Wyrażenia nieokreślone typu $\infty - \infty$ 513
§ 171. Wyrażenia nieokreślone postaci ∞^0, 0^0 i 1^∞ 515
§ 172. Uwagi o stosowalności reguły Hospitala 517
§ 173. Uproszczona reguła Hospitala 518

Rozdział XV.

Zastosowania rachunku różniczkowego do krzywych płaskich.

§ 174. Równania stycznej i normalnej. Cosinusy kierunkowe 521
§ 175. Krzywa spodków 525
§ 176. Krzywe równoległe do danej krzywej 526
§ 177. Równanie różniczkowe gromady linij 527
§ 178. Trajektorje gromady linij 530
§ 179. Wypukłość i wklęsłość łuków linji krzywej 535
§ 180. Punkty przegięcia 538
§ 181. O styczności rozmaitych rzędów 546
§ 182. Koło krzywiznowe czyli koło ściśle styczne 547
§ 183. Krzywizna linij płaskich 552
§ 184. Ewoluta 555
§ 185. Przykłady na wyznaczenie koła krzywiznowego, wierzchołków i ewoluty 556
§ 186. O punktach osobliwych 563
§ 187. Przykłady punktów osobliwych 568
§ 188. O linjach obwiednich 573
§ 189. Przykłady na badanie obwiednich 577
§ 190. Asymptoty 588
§ 191. Związek asymptoty z styczną 595
§ 192. Związek asymptot z asymptotycznem zdążaniem 2 f. do siebie 598

Str.

Rozdział XVI.

Wzory interpolacyjne i metody przybliżonego rozwiązywania równań.

Ustęp I. Wzory interpolacyjne.

§ 193. Ogólne zagadnienie interpolacji 600
§ 194. Wzór interpolacyjny Lagrange'a 604
§ 195. Wzór interp. Newtona dla równych odstępów zmiennej niezależnej . . 606
§ 196. Zastosowanie wzoru Newtona do postępów arytmetycznych wyższych rzędów i do interpolacji tablic 611
§ 197. Wzór interp. Newtona dla dowolnych odstępów zmiennej niezależnej . 615
§ 198. Aproksymacja przy pomocy wzorów interpolacyjnych. Obliczenie reszty 617

Ustęp II. Metody przybliżonego rozwiązywania równań.

§ 199. Uwagi o metodach graficznych i tabelarycznych 620
§ 200. Regula falsi 623
§ 201. Reguła Newtona do przybliż. rozwiązywania równań 628
§ 202. Przybliżone rozwiązywanie równań zapomocą ogólnej metody iteracji . 631

Spis ważniejszych, dostrzeżonych omyłek i braków.

Str.	3	wiersz	13	od dołu	*zamiast* 06931 *ma być* 0·6931
„	13	„	6	„ „	*po słowie*: funkcje *dodać*: (por. str. 61—62, przykład b)
„	20	„	5	„ góry	*zamiast* 1909 *ma być* 1933, wyd. 2
„	28	„	10	„ dołu	„ x' „ „ x'^2
„	39	„	1	„ „	„ podręczniku *ma być* podręcznikach
„	„	na końcu ostatniego wiersza *dopisać*: (Warszawa, 1928); F. Leja. *Geometrja analityczna i początki geometrji różniczkowej* (Warszawa, 1934).			
„	41	wiersz	2	od dołu	*skreślić słowo*: najogólniejszego
„	47	„	13	„ góry	*po słowie*: Lipsk *dodać*: 1915
„	50	„	1	„ dołu	„ „ Lwów „ 1911
„	74	„	8	„ góry	*zamiast* y *ma być* x
„	80	„	5	„ „	„ T „ „ t
„	83	„	3	„ „	*po słowie*: więc *dodać* $\operatorname{tg} x$
„	87	„	9	„ „	*zamiast* dwukrotnym *ma być* wielokrotnym
„	„	„	11	„ „	*opuścić słowa*: różnych lub równych
„	88	„	20	„ „	*zamiast* równania stopnia r *ma być* równanie stopnia co najwyżej n
„	88	„	20	„ „	*zamiast* dla r *ma być* dla n
„	99	„	1	„ dołu	„ $s_1 + s_1$ „ „ $s_1 + s_2$
„	108	„	14	„ „	„ jakie znaczenie ma *ma być* co znaczy
„	„	„	9	„ „	„ znaczenie *ma być* , co znaczy
„	110	„	14	„ „	„ znaczku „ „ wskaźniku
„	118	„	17	„ góry	„ jest ona mniejsza *ma być* można ją uczynić mniejszą
„	119	„	3	„ „	*zamiast* $\|\|a_n\| - g\|\|$ *ma być* $\|\|a_n\| - \|g\|\|$
„	„	„	11	„ „	„ także „ „ takie
„	„	„	12	„ „	„ < 0 „ „ $< \varepsilon$
„	128	„	12	„ „	„ e^n „ „ e_n

Str. 133 wiersz 15 od dołu *zamiast* wyrazów *ma być* granic

„ 135 „ 2 „ „ „ $\frac{5}{n}$ „ „ $-\frac{5}{n}$

„ 140 „ 8 „ „ na końcu wiersza po 0 *dopisać kilka kropek*...

„ 142 „ 1 „ „ *zamiast* $\lim s(k)$ *ma być* $\lim_{k\to\infty} s(k)$

„ 143 „ 7 i 2 „ „ „ p_n p „ „ $p_n \to p$

„ 151 „ 15 „ „ „ 0·0042 „ „ − 0·0042

„ „ „ 2 „ „ „ szereg „ „ ciąg

„ 162 „ 7 „ „ „ y^5 „ „ x^5

„ 164 „ 5 i 6 „ „ „ przez zastosowanie *ma być* próba zastosowania

„ „ „ 5 „ „ *zamiast* wypadnie *ma być* daje

„ 177 „ 3 „ „ „ $\left(-\frac{1}{z+1}\right)$ „ „ $\left(1-\frac{1}{z+1}\right)$

„ 180 „ 12 „ góry „ punkt „ „ początek w

„ 183 „ 14 „ „ „ $a<1$ „ „ $0<a<1$

„ 197 „ 4 „ dołu „ x^2+y^2 „ „ x^3+y^4

„ „ „ 11 „ „ *po słowie*: równocześnie *dodać*: około osi z

„ 199 „ 1 „ góry *zamiast* koniecznym *ma być* istotnym

„ 216 „ 17 „ „ „ $y=f'(x)$ „ „ $y'=f'(x)$

„ 218 „ 14 „ „ *po słowach*: pochodna jest *dodać*: jak łatwo stwierdzić,

„ „ „ 5 „ dołu *zamiast* $x\to 0$ *ma być* $h\to 0$

„ 248 „ 9 „ góry „ $-\frac{3}{6}$ „ „ $-\frac{5}{8}$

„ 261 „ 1 „ „ „ wprowadzić *ma być* wyprowadzić

„ 266 „ 14 i 15 „ dołu „ „pochodna nie istnieje dla“ *ma być*: wzór na pochodną nie stosuje się do

„ 272 „ 14 „ góry *po* $y=\log_e(-x)$ *dodać*: dla $x<0$

„ 273 „ 4 „ dołu *po słowie*: algebraicznego *dodać*: (t. j. równania $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$) o spółczynnikach całkowitych.

„ 278 „ 17 „ „ *zamiast* $\log a$ *ma być* $\log_e a$

„ 284 „ 9 „ góry „ b_0c „ „ b_0e

„ 288 „ 1 „ dołu „ 1, wyrażone w formie parametrowej *ma być*: 1; w formie parametrowej wyrażamy to koło zapomocą równań $\xi=\cos t$, $\eta=\sin t$

„ 299 „ 6 „ góry na końcu wzoru *ma być* $uv^{(n)}$ *zamiast* uv^n

„ 310 „ 8 „ „ *zamiast* $r(r-1)(r-2)\ldots$ *ma być* $\binom{r}{1}r(r-1)(r-2)\ldots$

„ „ „ 9 „ „ „ $r(r-1)(r-2)\ldots$ „ „ $\binom{r}{3}r(r-1)(r-2)\ldots$

„ 347 „ 13 „ „ „ (85) „ „ (86)

„ 374 „ 11 „ „ *po* $v=0$ *dodać*: jak łatwo się można przekonać przez bezpośrednie obliczenie z definicji pochodnej.

Str. 383 wiersz 2 od góry *przekreślić słowa*: „w skończonej formie“
„ 384 „ 2 „ dołu po $R_n(x, a)$ *opuścić kropki*
„ 392 „ 7 „ góry *zamiast* „ciągłe“ *ma być*: w punkcie *a* i w jego otoczeniu
„ 395 „ 10 „ „ *zamiast* $R_n(x)$ *ma być*: $R_n(x_1)$
„ 397 „ 9 „ dołu „ § 125 „ „ § 135
„ 426 *zamiast* 15 i 14 wiersza od dołu *ma być*: Jeżeli wartość funkcji w jakimś punkcie jest największą wśród wartości z odpowiednio zacieśnionego, lecz obustronnego otoczenia tego punktu, to tę wartość nazywamy *maxi-*.
„ 426 wiersz 4 od dołu *po słowach*: „na fig. 118“ *dodać*: w przedziale $<c, d>$
„ 436 „ 17 „ góry *opuścić słowo* „monotonicznie“
„ 437 „ 3 „ „ „ „ „zaś“
„ 449 „ 15 „ „ *zamiast*: *wydajność ma być*: *moc*
„ 450 „ 5 i 8 „ „ „ „ „ „ „
„ 477 „ 7 „ dołu „ b_2 „ „ *b*
„ 489 „ 10 „ „ *opuścić* (171)

BIBLIOTEKA Państwowej Wyższej Szkoły Pedagogicznej W KRAKOWIE

WYDAWNICTWO „UNIVERSUM"

Katowice, Warszawska 26 - Telefon 316-03 - P. K. O. III-5320

poleca wydawnictwa:

Domańska	LEGENDY Z ŻYCIA ŚWIĘTYCH
Florczyk	TRYGONOMETRIA
Gillowa	Z PÓL I ŁĄK
Gillowa	WIĄZANKA ŻYCZEŃ zbiór powinszowań
Gillowa	NAOPAK W KRAJU
Gillowa	KUMA BIADA
Grabińska dr	LET US TRY podręcznik języka angielsk. I rok naucz.
Łomnicki A.	RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY Tom I Część I
Łomnicki A.	RACHUNEK RÓŻNICZKOWY I CAŁKOWY Tom I Część II
Pajewski inż.	LAKIERNICTWO
Szymanowska	ZWYCIĘSTWO powieść
Zakrzewska	ZASYPANA SZTOLNIA książka zatw. przez M. O. jako lekt. szk.

wydawnictwa muzyczne:

DZIECINNY POKOIK fox-trott
I ZNÓW NADESZŁA JESIEŃ tango
KAŻDY TAŃCZY TAK JAK UMIE walc
ZAWIANY ŚWIAT walc
KSIĄŻĘ Z BAJKI tango
MASZ W SOBIE COŚ tango
NA NOWEJ DRODZE piosenka repatriantów
PAWIE PIÓRA wiązanka krakowska
TWE ŁZY tango

Do nabycia we wszystkich księgarniach

Druk: Drukarnia Diecezjalna w Opolu / R 14314