VI.

SPRAWOZDANIE

Dyrekcyi c. k. wyższej szkoły realnej w Jarosławiu za rok szkolny 1909|10.

TREŚĆ:

Dr. Jan Ralski: Zasady rachunku różniczkowego i całkowego dla użytku szkół średnich.
Grundzüge der Differential- und Integralrechnung zum Gebrauch an den Mittelschulen.

2. Wiadomości szkolne podane przez dyrektora zakładu.

NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.

Z DRUKARNI LUDWIKA WIŚNIEWSKIEGO W JAROSŁAWIU.

1910.

I.

Uwagi ogólne.

Matematyka jako nauka, która rozumuje ściśle i wnioski wynikające z rozumowania jasno wyraża, używa za podstawę rozumowania liczb dających się *jasno* określić i uważa za użyteczne tylko takie wnioski, które można wyrazić w liczbach dających się również jasno określić. Aby liczba dała się jasno określić, musi być skończona t. j. musi mieć wartość skończoną. Liczba skończona może być dokładna lub przybliżona. N. p. liczby: $0, 1, -2, 5, -307; \frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, 0{\cdot}8, -5{\cdot}46$ są dokładne, liczby:

$$0.\dot{3}\dot{7} = 0{\cdot}373737\ldots, \qquad \sqrt{2} = 1{\cdot}41421356\ldots,$$

są przybliżone.

Z liczb przybliżonych tylko takie mogą być jasno określone i tylko takie mają zastosowanie w matematyce, które dadzą się wyrazić zapomocą liczb dokładnych z tak małym błędem, jak się nam podoba – innymi słowy – z dokładnością zależną od nas.

N. p. pisząc $0{\cdot}\dot{3}\dot{7} = 0{\cdot}3737$, $\sqrt{2} = 1{\cdot}4142$, popełniamy błąd mniejszy niż $0{\cdot}0001$, pisząc $0{\cdot}\dot{3}\dot{7} = 0{\cdot}373737$, $\sqrt{2} = 1{\cdot}414214$ popełniamy błąd mniejszy, niż $0{\cdot}000001$ i t. d.; liczby $0{\cdot}\dot{3}\dot{7}$, $\sqrt{2}$ możemy wyrazić tak dokładnie, jak się nam podoba.

Przy niektórych liczbach przybliżonych możemy podać całkiem dokładnie granicę, do której się zbliżamy, jeżeli je coraz dokładniej wyrażamy; przy innych możemy podać granicę tylko w sposób przybliżony. N. p. pisząc $0{\cdot}\dot{3}\dot{7} = 0{\cdot}3737$, $0{\cdot}\dot{3}\dot{7} = 0{\cdot}373737$ i t. d. zbliżamy się coraz bardziej do liczby $\frac{37}{99}$; gdy wyrażamy $\sqrt{2}$ coraz dokładniej, zbliżamy się do granicy, której nie możemy całkiem dokładnie podać, ale o której wiemy, że się znajduje

między 1·4142 a 1·4143,

między 1·414213 a 1·414214 i t. d.

Liczby mogą być szczególne lub ogólne.

Liczby szczególne wyrażamy zapomocą cyfr n. p. 5, — 7, $\frac{2}{3}$, — $\frac{5}{6}$, 0·64 ; liczby ogólne zapomocą głosek n. p. a, b, e, x, y, α, β, π.

Wyrażając liczbę zapomocą głosek, przyjmujemy, że ma ona pewną szczególną wartość n. p. $e = 2·71828.$, $\pi = 3·14159.$, lub też, że może przybierać różne wartości, czyli że się może zmieniać. Pierwsze liczby nazywamy *stałemi*, drugie *zmiennemi*.

W ogóle głoska może wyrażać *wielkość* czyli *ilość* wszelkiego rodzaju n. p. liczbę, długość, czas, siłę i t. p; jakoż w tem znaczeniu będziemy w przyszłości używać głosek.

II.

Pojęcie funkcyi.

Wyrażenie, w którem się znajduje jakaś ilość, nazywa się jej *funkcyą*. N. p. wyrażenie $3x^2 - 8x + 5$ jest funkcyą ilości x, wyrażenie $3.4^2 - 8.4 + 5$ taką samą funkcyą liczby 4. Pisze się to w ten sposób :

$$3x^2 - 8x + 5 = f(x),$$
$$3.4^2 - 8.4 + 5 = f(4),$$

lub

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 5,$$
$$f(4) = 3.4^2 - 8.4 + 5.$$

Czyta się zaś: $f(x)$ jest funkcyą ilości x, $f(4)$ jest funkcyą liczby 4. Oczywista, że funkcya $f(x)$ zależy od ilości x, funkcya $f(4)$ od liczby 4.

W ogóle, gdy ilość się zmienią, to jej funkcya $f(x)$ przybiera różne wartości a zatem zmienia się również. N. p. funkcya $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$ dla $x = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$ przybiera wartości $f(0) = 5$, $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 8$, $f(-1) = 16$, $f(-2) = 33$, $f(-3) = 56$.

Jak na powyższym przykładzie widzimy, ilości x i $f(x)$ zmieniają się, czyli są ilościami *zmiennemi* z tą różnicą, że ilości x

nadajemy dowolne wartości a na $f(x)$ wypadają wartości pewne. Z tego powodu ilość x nazywa się *zmienną niezależną* a $f(x)$ *zmienną zależną.*

Na wyrażenie funkcyi używamy głosek: f, F, φ, ψ i t. p. N. p. $f(x) = x^n$, $F(r) = \frac{4}{3} r^3\pi$, $\varphi(x) = a^x$, $\psi(x) = \sin x.$, $f_1(r) = \frac{mm_1}{r}$, $F(t) = \frac{1}{2} gt^2$.

Na bliższą uwagę zasługuje przypadek, kiedy funkcya $F(x)$ nie zmienia swej wartości C, jakkolwiek x się zmienia, czyli kiedy funkcya $F(x)$ jest *od x niezależna.*

Wtenczas funkcya $F(x)$ jest *ilością stałą* (ze względu na x) i pisze się:

$$F(x) = C.$$

N. p.
$$F(x) = \frac{5(x+3)^2}{x^2+6x+9} = 5,$$
$$\varphi(x) = \frac{a(x-b)^2}{x^2-2bx+b^2} = a,$$
$$\psi(x) = \left(\frac{1}{x+a} + \frac{2a}{b} - \frac{1}{x-a}\right)\frac{b}{2} + \frac{ab}{x^2-a^2} = a.$$

III.

Funkcye elementarne.

Najprostszemi funkcyami są: funkcya od x niezależna a, funkcya potęgowa x^m, wykładnicza a^x, logarytmiczna $lg_b\, x$, funkcye goniometryczne $\cos x$, $\sin x$, $tg\, x$, $ctg\, x$, i nadto tak zwane funkcye cyklometryczne, które niżej poznamy. Są to *funkcye elementarne.*

W funkcyach goniometrycznych będziemy wyrażać zmienną x nie zapomocą kąta, lecz zapomocą łuku kołą o promieniu 1, odpowiadającego kątowi stósownie do proporcyi.

$x : 2\pi. = \alpha^0 : 360^0$ (fig. 1), skąd wypada

$$x = \frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180}$$

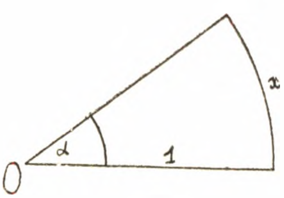

Fig. 1

Według tego można n. p. napisać:

$$\cos 60^0 = \cos\frac{\pi}{3} = \cos(1{\cdot}0472),$$
$$\sin 30^0 = \sin\frac{\pi}{6} = \sin(0{\cdot}5236),$$
$$tg\, 45^0 = tg\frac{\pi}{4} = tg(0{\cdot}7854),$$
$$ctg\, 90^0 = ctg\frac{\pi}{2} = ctg(1{\cdot}5708).$$

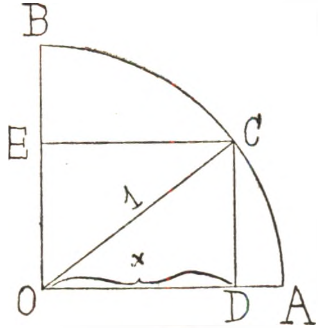

Fig. 2.

Jeżeli x jest *dostawą (cosinus)* łuku $\overset{\frown}{AC}$ (fig. 2.) koła o promieniu 1, natenczas naodwrót łuk $\overset{\frown}{AC}$ jest łukiem, którego *dostawa (cos)* jest równa x. Pisze się to krótko: $\overset{\frown}{AC} = arc\ cos\ x$, (czyta się *arcus cosinus x*). *Arc* jest początkiem słowa łacińskiego *arcus*, co znaczy *łuk*. Podobnież *arc sin x* oznacza łuk (koła o promieniu 1), którego *wstawa (sinus)* jest równa x, *arc tg x* oznacza łuk, którego *styczna (tangens)* jest równa x, *arc ctg x* łuk, którego *dotyczna (cotangens)* jest równa x.

Funkcye *arc cos x*, *arc sin x*, *arc tg x*, *arc ctg x* nazywają się funkcyami *cyklometrycznemi*.

Jeżeli $x = cos\ \overset{\frown}{AC}$, to także $x = cos\ (\overset{\frown}{AC} + 2n\pi)$, gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią lub ujemną. Jest przeto ogólnie

$$\overset{\frown}{AC} + 2n\pi = arc\ cos\ x,$$

z czego poznajemy, że takich łuków, których *dostawa (cos)* jest równa x, jest nieskończenie wiele. Celem ustrzeżenia się wieloznaczności przyjmuje się najmniejszy łuk w obszarze od 0 do 2π, który spełnia warunek $\overset{\frown}{AC} = arc\ cos\ x$.

N. p. $cos \frac{2\pi}{3} = cos\ 120^0 = -\frac{1}{2}$,

$$cos \frac{4\pi}{3} = cos\ 240^0 = -\frac{1}{2},$$

$$cos \frac{8\pi}{3} = cos\ 480^0 = -\frac{1}{2} \text{ i t. d.}$$

t. j. dla dostawy $-\frac{1}{2}$ wypadają łuki $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$ i t. d.

Bierzemy najmniejszy łuk i piszemy

$$arc\ cos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Podobnież $arc\ cos \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$,

$$arc\ sin \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad arc\ sin \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{6},$$

$$arc\ tg\ (1) = \frac{\pi}{4}, \quad arc\ tg\ (-1) = \frac{3\pi}{4},$$

$$arc\ ctg(1) = \frac{\pi}{4}, \quad arc\ ctg(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

Na fig. 2. widzimy, że

$$x = \cos \overset{\frown}{AC} = \sin \overset{\frown}{BC},$$

skąd wypada

$$\overset{\frown}{AC} = arc\cos x, \quad \overset{\frown}{BC} = arc\sin x.$$

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = arc\cos x + arc\sin x.$$

Lecz $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = \frac{\pi}{2}$, zatem

$$arc\cos x + arc\sin x = \frac{\pi}{2}.$$

To samo otrzymamy z równań

$$x = \cos \overset{\frown}{AC} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \overset{\frown}{AC}\right),$$

albowiem z nich wypada, że

$$\overset{\frown}{AC} = arc\cos x, \quad \frac{\pi}{2} - \overset{\frown}{AC} = arc\sin x.$$

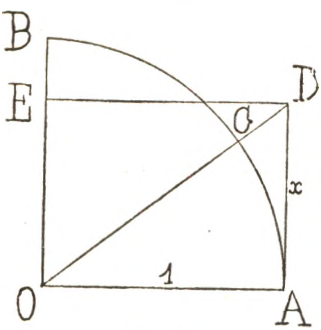

Fig. 3.

Z fig. 3. poznajemy, że

$$x = tg\, \overset{\frown}{AC} = ctg\, \overset{\frown}{BC},$$

skąd wypada

$$\overset{\frown}{AC} = arc\ tg\, x, \quad \overset{\frown}{BC} = arc\ ctg\, x,$$

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = \frac{\pi}{2} = arc\ tg\, x + arc\ ctg\, x.$$

To samo otrzymuje się z równań

$$x = tg\, \overset{\frown}{AC} = ctg\left(\frac{\pi}{2} - \overset{\frown}{AC}\right),$$

bo z nich wypływa $\overset{\frown}{AC} = arc\ tg\, x$, $\frac{\pi}{2} - \overset{\frown}{AC} = arc\ ctg\, x$.

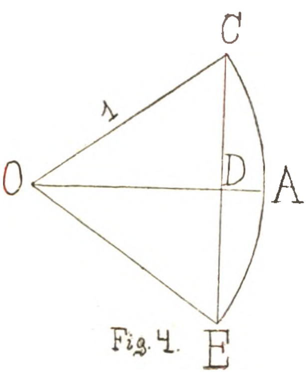

Fig. 4.

Weźmy łuki $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AE}$ równe co do bezwzględnej wartości (fig. 4) w kole o promieniu 1. Przy ich mierzeniu kierujemy się tą samą zasadą, co przy mierzeniu kątów t. j. przyjmujemy, że kątom dodatnim odpowiadają łuki dodatnie, kątom ujemnym ujemne. Według tego łuk $\overset{\frown}{AC}$ uważa się za dodatni, łuk $\overset{\frown}{AE}$ za ujemny. Jest więc

$$\overset{\frown}{AE} = -\overset{\frown}{AC}.$$

Jeżeli $DC = x$, to $DE = -x$, zatem

$$\overset{\frown}{AE} = arc\,sin\,x, \quad \overset{\frown}{AE} = arc\,sin\,(-x).$$

Podstawiwszy to w równanie $\overset{\frown}{AE} = -\overset{\frown}{AC}$, otrzymamy

$$arc\,sin\,(-x) = -arc\,sin\,x.$$

Podobnie rzecz się ma z $arc\,tg\,x$. (fig. 5.) Jest bowiem

$$\overset{\frown}{AE} = -\overset{\frown}{AC}.$$

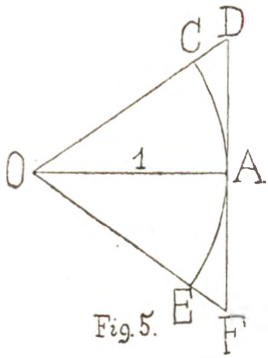

Fig. 5.

Jeżeli $AD = x$, to $AF = -x$,

$$\overset{\frown}{AC} = arc\,tg\,x, \quad \overset{\frown}{AE} = arc\,tg\,(-x),$$

a po podstawieniu w równanie $\overset{\frown}{AE} = -\overset{\frown}{AC}$ wypada

$$arc\,tg\,(-x) = -arc\,tg\,x.$$

IV.

Obraz funkcyi.

Uważajmy ilości x, $f(x)$ jako współrzędne punktu na płaszczyznie w układzie prostokątnym. Kreśląc punkta odpowiadające każdej parze ilości w miarę jak się x zmienia, otrzymamy szereg punktów tworzących pewną linię, która jest *obrazem geometrycznym funkcyi* $f(x)$ Np. gdy $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$, współrzędne punktów są $[0, f(0)]$, $[1, f(1)]$ $[-1, f(-1)]$ i t. d. Ponieważ $f(0) = 2$, $f(1) = 0$, $f(1\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f(1\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$, $f(2) = 0$, $f(3) = 2$, $f(4) = 6$, $f(-1) = 6$ i t. d., przeto współrzędne punktów są $[0, 2]$, $[1, 0]$, $[1\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}]$, $[1\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$, $[2, 0]$,

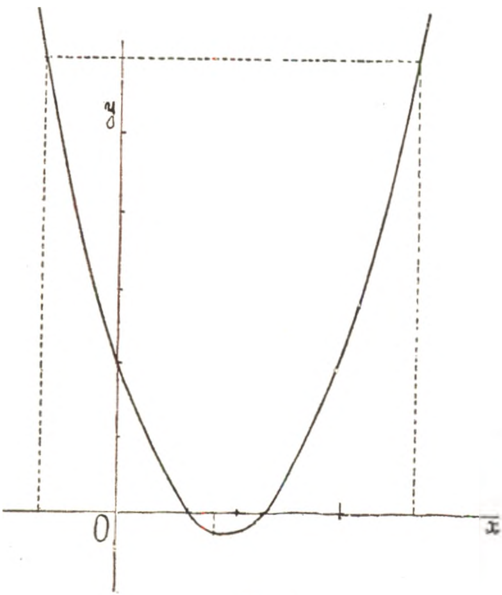

Fig. 6.

[3, 2], [4, 6], [—1, 6] i t. d. Kreśląc te punkta, otrzymamy linię przedstawioną na fig. 6.

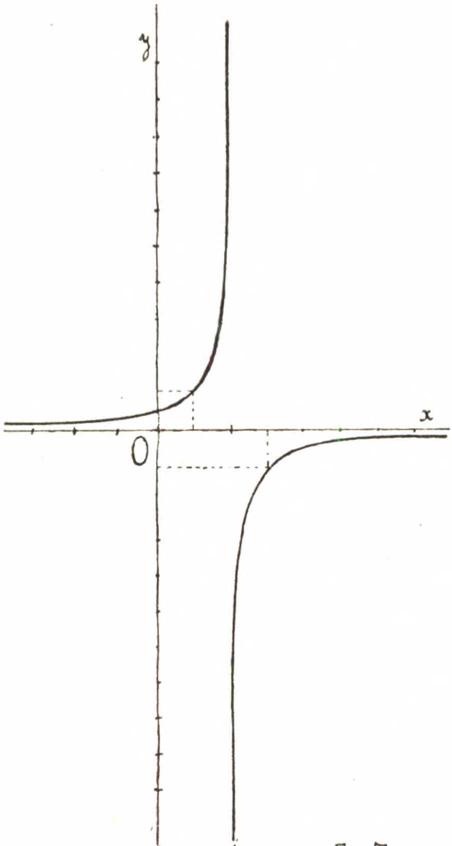

Fig. 7.

Obrazem funkcyi może być linia ciągła, przerywana, składająca się z osobnych punktów, kawałków i t. p. odpowiednio do kształtu funkcyi, jak to można widzieć na dalszych figurach.

Fig. 7. jest obrazem funkcyi $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

Współrzędne punktów są: $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}]$ $[\frac{3}{4}, \frac{4}{5}]$, $[1, 1]$, $[1\frac{1}{2}, 2]$, $[1\frac{2}{3}, 3]$, $[1\frac{4}{5}, 5]$, $[1\frac{9}{10}, 10]$, $[2\frac{1}{10}, -10]$, $[2\frac{1}{5}, -5]$, $[2\frac{1}{4}, -4]$, $[2\frac{1}{3}, -3]$, $[2\frac{1}{2}, -2]$, $[3, -1]$, $[4, -\frac{1}{2}]$, $[5, -\frac{1}{3}]$, $[6, -\frac{1}{5}]$, $[-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}]$, $[-1, \frac{1}{3}]$, $[-2, \frac{1}{4}]$, $[-3, -\frac{1}{5}]$ i t. d.

Fig. 8. jest obrazem funkcyi

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}.$$

Współrzędne punktów są: $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{4}{9}]$, $[1, 1]$, $[1\frac{1}{2}, 4]$, $[1\frac{2}{3}, 9]$, $[2\frac{1}{3}, 9]$, $[2\frac{1}{2}, 4]$, $[3, 1]$, $[3\frac{1}{2}, \frac{4}{9}]$, $[4, \frac{1}{4}]$, $[5, \frac{1}{9}]$, $[-1, \frac{1}{9}]$ i t. d.

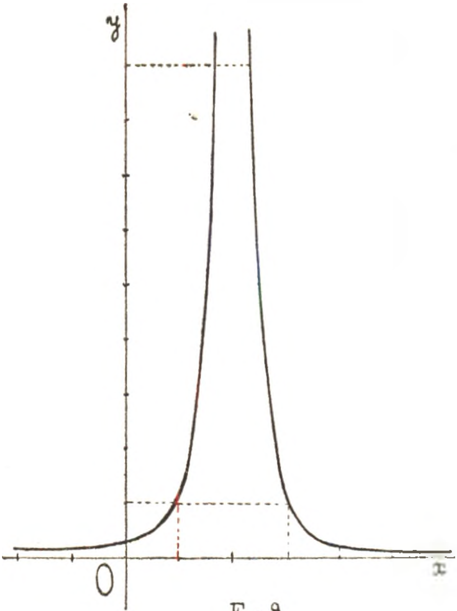

Fig. 8.

Fig. 9. jest obrazem funkcyi

$$f(x) = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^5 - 1}{x - 1} \cdot$$

Współrzędne punktów są: [0, 0·2], [0·3, 0·3], [0·5, 0·4], [0·9, 0·8], [1,1], [1·1,1·2], [1·2,1·5], [1·3, 1·8], [1·5, 2·6], [1·8, 4·4], [2, 6·2], [—0·1, 0·2], [—0·2, 0·2], [—0·6, 0·1] [—1, 0·2], [—1·5, 0·7], [—2, 2·2], [—2·5, 5·6] i t. d.

Że [1, 1] są współrzędnemi punktu, okażemy później (V. 5).

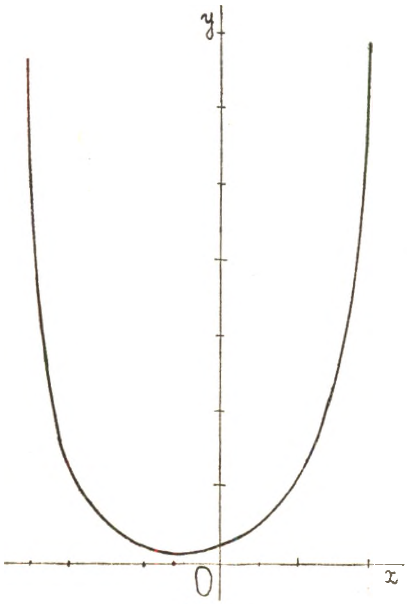

Fig. 9.

Fig. 10. jest obrazem funkcyi

$$f(x) = (x - 1)\sqrt{x - 2}.$$

Współrzędne punktów są: [1, 0], [2, 0], [2·3, ±0·7], [2·5, ±1·1], [2·7, ±1·4], [3, ±2], [4, ±4·2], [5, ±6·9], [6, ±10] i t. d. Punkt [1, 0] jest odosobniony.

Fig. 11. jest obrazem funkcyi

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)\sqrt{x - 3}.$$

Współrzędne punktów są: [1, 0], [2, 0], [3, 0], [3·3, ± 1·5], [3·5, ± 2·7], [4, ± 6] i t. d.

Punkta [1 0], [2, 0] są odosobnione.

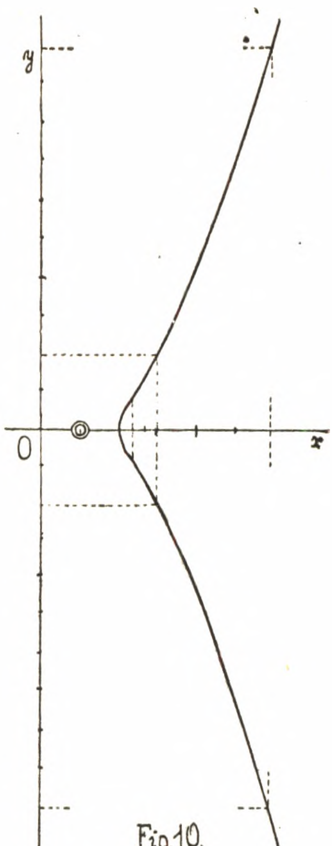

Fig.10.

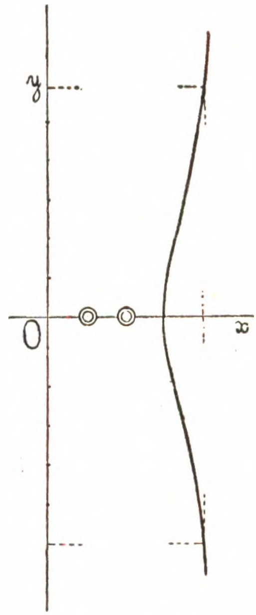

Fig.11

Fig. 12. jest obrazem funkcyi: $f(x) = e^{\frac{1}{x - 2}}$.

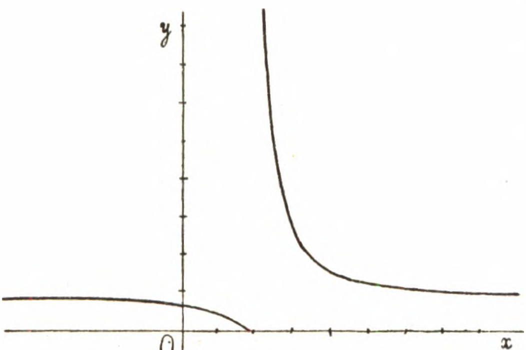

Fig 12.

Współrzędne punktów są: [0, 0·6,], [1, 0·4], [1·5, 0·1], [2, 0], [2, ∞], [2·5, 7·4], [3, 2·7], [4, 1·7], [5, 1·4], [6, 1·3], [7, 1·2], [10, 1·1], [—1, 0·7], [—2·5, 0·8], [—5, 0·9 i t. d. Że [2, 0], [2, ∞] są współrzędnemi, okażemy później (V, 1.)

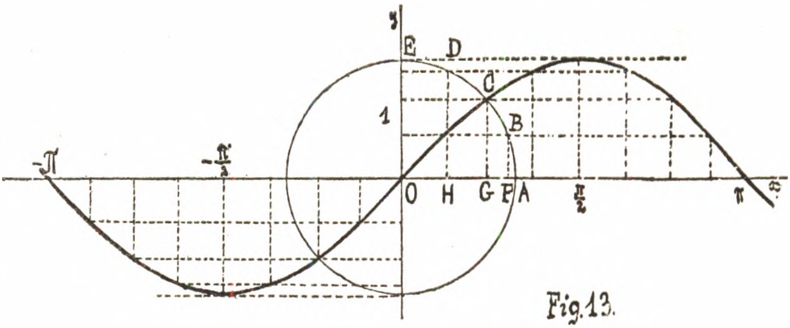

Fig. 13.

Fig. 13. jest obrazem funkcyi:

$$f(x) = \sin x.$$

Współrzędne punktów są: [0·1, 0·1], [0·2, 0·2], [0·3, 0·3], [$0·5 = \frac{\pi}{6}$, 0·5], [0·7, 0·6], [$0·8 = \frac{\pi}{4}$, 0·7], [0·9, 0·8], [$1·0 = \frac{\pi}{3}$, 0·9], [1·2, 0·9], [$1·6 = \frac{\pi}{2}$, 1], [2, 0·9], [2·2, 0·8], [$2·4 = \frac{3\pi}{4}$, 0·7,] [$2·6 = \frac{5\pi}{6}$, 0·5], [2·8, 0·3], [2·9, 0·2], [3·0, 0·1], [$3·1 = \pi$, 0], nadto te same współrzędne ze znakiem — i t. d. Funkcyę $\sin x$ można także wykreślić w ten sposób: w początku współrzędnych zakreśla się koło o promieniu 1, dzieli się je na n. p. 16 równych części $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \ldots.$, wtenczas $BF = \sin\frac{\pi}{8}$, $CD = \sin\frac{2\pi}{8}$, $DC = \sin\frac{3\pi}{8}$, $OE = \sin\frac{4\pi}{8}$.... Odcinając na osi odciętych w odległości $\frac{\pi}{8}, \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \ldots$ powyższe rzędne, będziemy mieć obraz funkcyi.

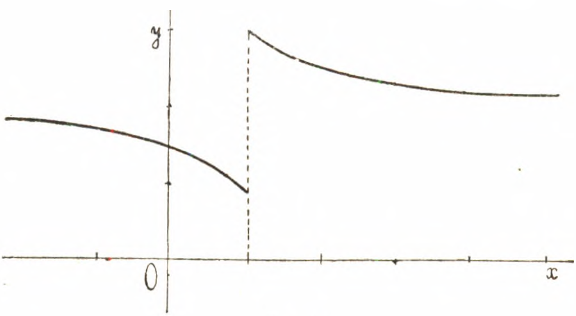

Fig. 14.

Fig. 14 jest obrazem funkcyi

$$f(x) = 2 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x-1}.$$

Współrzędne punktów są [0, 1·5], [0·5, 1·3], [0·7, 1·2], [0·9, 1·1], [1·1, 2·9], [1·5, 2·7], [2, 2·5], [3, 2·3], [5, 2·2], [—1, 1·7], [—3, 1·8] i t. d. Później okażemy, że [1, 1], [1, 3] są także współrzędnemi. (VI, 6).

V.

Granica funkcyi.

Jeżeli wartość funkcyi $f(x)$ w miarę gdy zmiennej nadajemy wartości od a do b zbliża się coraz bardziej do pewnej ilości c, natenczas mówimy, że funkcya w obszarze od a do b *dąży do granicy c.* Pisze się to symbolicznie: $\lim\limits_{x=b} f(x) = c$. *Lim* jest początkiem słowa łacińskiego *limes*, co znaczy *granica.* Czyta się zaś: funkcya $f(x)$ dąży do granicy c, gdy x zbliża się do b. Czy x zbliża się do b od wartości mniejszych od b, czy większych od b wynika w poszczególnych przypadkach od rodzaju zagadnienia i uważamy to jako znane, chociaż tego nie piszemy w znakowaniu symbolicznem.

N. p. 1) Funkcya $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ (str. 9) dla wartości x od 0 do 2 przybiera wartości $f(0) = 0·6$, $f(1) = 0·4$, $f(1·5) = 0·1$, $f(1·8) = 0·01$, wartości coraz bliższe 0, zatem dąży do 0, co się pisze

$$\lim_{x=2} e^{\frac{1}{x-2}} = 0.$$

Lecz ta sama funkcya dla wartości x od 4 do 2 przybiera wartości $f(4) = 1·7$, $f(3) = 2·7$, $f(2·5) = 7·4$, $f(2·3) = 28·0$. $f(2·2) = 148·4$, $f(2·1) = 2202·6$, wartości rosnące bez końca, co się pisze

$$\lim_{x=2} e^{\frac{1}{x-2}} = \infty.$$

Jak się szuka granicy funkcyi, zobaczymy poniżej. Ponieważ najłatwiej znaleźć wartość funkcyi, jeżeli zmienna niezależna maleje do 0 lub rośnie do ∞, przeto do tego przypadku sprowadzamy każdy inny. N. p. Chcąc znaleźć wartość funkcyi $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ dla $x = 2$ w przypadku, gdy x zbliża się do 2 od wartości mniejszej, podstawiamy $x = 2 - \delta$, gdzie δ oznacza liczbę dodatnią. Otrzymamy $f(x)=f(2-\delta)=e^{-\frac{1}{\delta}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{\delta}}}$.

Ponieważ δ zbliża się do zera, gdy x zbliża się do 2, przeto

$$\lim_{x=2} f(x)=\lim_{\delta=0} f(2-\delta)=\lim_{\delta=0} \frac{1}{e^{\frac{1}{\delta}}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{0}}}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Chcąc znaleźć wartość tejże funkcyi dla $x=2$ w przypadku, gdy wartość x zbliża się do 2 od wartości większej, podstawiamy $x=2+\delta$, gdzie δ oznacza liczbę dodatnią.

Otrzymamy $f(x)=f(2+\delta)=e^{\frac{1}{\delta}}$.

Ponieważ δ zbliża się do 0, gdy x zbliża się do 2, przeto

$$\lim_{x=2} f(x)=\lim_{\delta=0} f(2+\delta)=\lim_{\delta=0} e^{\frac{1}{\delta}}=e^{\frac{1}{0}}=e^{\infty}=\infty$$

zgodnie z poprzedzającem.

Widzimy z tego, że funkcya $e^{\frac{1}{x-2}}$ ma dwie wartości 0 i ∞ dla $x=2$.

2) Do jakiej granicy dąży funkcya $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$, jeżeli x rośnie bez końca?

$$\lim_{x=\infty} f(x)=\lim_{x=\infty} e^{\frac{1}{x-2}}=e^{\frac{1}{\infty}}=e^{0}=1$$

zgodnie z tem, cośmy podali na str. 9, gdzie widzimy, że $f(2{\cdot}5)=7{\cdot}4$, $f(3)=2{\cdot}7$, $f(4)=1{\cdot}7$, $f(5)=1{\cdot}4$, $f(6)=1{\cdot}3$, $f(7)=1{\cdot}2$, $f(10)=1{\cdot}1$.

3) Do jakiej granicy dąży funkcya

$$F(k)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^k}=2\left(1-\frac{1}{2^k}\right),$$

jeżeli k jest liczbą całkowitą dodatnią, rosnącą bez końca?

$$\lim_{k=\infty} F(k)=\lim_{k=\infty}\left|\left(2\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\right|=2\left(1-\frac{1}{2^{\infty}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\infty}\right)$$
$$=2\,(1-0)=2,$$

co też można poznać z przebiegu wartości funkcyi $F(k)$, n. p. $F(20)=2\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right)$, $F(30)=2\left(1-\frac{1}{2^{30}}\right)$, $F(100)=2\left(1-\frac{1}{2^{100}}\right)\ldots$

4) Do jakiej granicy dąży funkcya

$$\psi(k) = \frac{m-k}{k+1}x,$$

jeżeli k jest liczbą całkowitą dodatnią, rosnącą bez końca?

Ponieważ $\frac{m-k}{k+1}x = \frac{\frac{m}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}x$, przeto

$$\lim_{k=\infty}\psi(k) = \lim_{k=\infty}\frac{\frac{m}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}x = \frac{\frac{m}{\infty}-1}{1+\frac{1}{\infty}}x = \frac{0-1}{1+0}x = -x.$$

5) Do jakiej granicy dąży funkcya

$$f(x) = \frac{1}{5}\cdot\frac{x^5-1}{x-1}$$

dla $x = 1$?

Podstawiając $x = 1 - \delta$, otrzymamy

$$\lim_{x=1} f(x) = \lim_{\delta=0} f(1-\delta) = \lim_{\delta=0}\left|\frac{1}{5}\cdot\frac{(1-\delta)^5-1}{-\delta}\right|$$

$$= \lim_{\delta=0}\left|1 - 2\delta + 2\delta^2 - \delta^3 + \frac{\delta^4}{5}\right| = 1.$$

Podstawiając zaś $x = 1 + \delta$, otrzymamy

$$\lim_{x=1} f(x) = \lim_{\delta=0} f(1+\delta = \lim_{\delta=0}\left|\frac{1}{5}\cdot\frac{(1+\delta)^5-1}{\delta}\right|$$

$$= \lim_{\delta=0}\left|1+2\delta+2\delta^2+\delta^3+\frac{\delta^4}{5}\right| = 1.$$

Zatem $f(1) = 1$.

Do tego samego wyniku dochodzimy, pamiętając, że

$$\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5-1}{x-1} = \frac{1}{5}(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

VI.

Ciągłość funkcyi.

O ciągłości można mówić tylko przy takich funkcyach, w których zmienna niezależna może mieć wszelkie możliwe wartości. Są bowiem funkcyę, w których zmienna niezależna podlega pewnemu ograniczeniu n. p. może być tylko liczbą całkowitą dodatnią, jak to ma miejsce przy wzorze binomialnym

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + . . + \binom{n}{k-1} x^{k-1} + \ldots,$$

gdzie współczynnik wyrazu *kgo* jest funkcyą liczby całkowitej *k*

$$\psi(k) = \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1 . 2 \; . \; . \; . \; (k-1)}.$$

Jeżeli zmienna niezależna jest poddana pewnemu ograniczeniu, jest to zawsze wyraźnie zaznaczone, jeżeli nie ma żadnego zastrzeżenia, natenczas przyjmuje się, że zmienna niezależna może przyjmować wszelkie możliwe wartości.

W dalszym ciągu ograniczymy się na rozważaniu ilości rzeczywistych i skończonych, zatem we funkcyi będziemy zmiennej niezależnej przypisywać wartości rzeczywiste i skończone i takie wartości funkcyi będziemy uważać za użyteczne, które będą ilościami rzeczywistemi i skończonemi ; jednem słowem będziemy rozważać funkcye w obszarach, w których mają wartości rzeczywiste i skończone.

Funkcya $f(x)$ jest *ciągła dla pewnej wartości zmiennej niezależnej a*, jeżeli wartości, jakie przybierze funkcya dla wartości zmiennej niezależnej bardzo mało różniących się od a, mianowicie dla $a-\delta$ i $a+\delta$, gdzie δ wyraża bardzo małą ilość, bardzo mało się różnią od $f(a)$ i to tem mniej, im δ jest mniejsze, czyli jeżeli $\lim\limits_{\delta=0} f(a-\delta) = \lim\limits_{\delta=0} f(a+\delta) = f(a)$.

Co do ilości a, $f(a)$, $f(a-\delta)$, $f(a+\delta)$ przyjmujemy, że są rzeczywiste i skończone.

Geometrycznie znaczy to : jeżeli funkcya $f(x)$ jest ciągła dla $x=a$, to w jej obrazie punkta

$$[a-\delta, f(a-\delta)], \; [a, f(a)], \; [a+\delta, f(a+\delta)]$$

są rzeczywiste bardzo blizko siebie położone i to tem bliżej, im δ jest mniejsze (fig 15).

Jeżeli funkcya $f(x)$ jest ciągłą dla wszystkich wartości zmiennej niezależnej od $x=a$ do $x=b$, natenczas jest ciągłą w obszarze od $f(a)$ do $f(b)$.

Geometrycznie znaczy to: jeżeli funkcya $f(x)$ jest ciągłą w obszarze od $f(a)$ do $f(b)$, natenczas w jej obrazie wszystkie punkta od $[a, f(a)]$ do $[b, f(b)]$ tworzą linię nieprzerwaną (fig. 15).

Jeżeli nie wszystkie wartości funkcyi $f(a)$, $f(a-\delta)$, $f(a+\delta)$, są skończone, rzeczywiste i bardzo mało różniące się od siebie i to tem mniej, im δ jest mniejsze, wtenczas funkcya dla $x=a$ nie jest ciągłą, lecz doznaje przerwy.

Geometrycznie znaczy to, że w obrazie funkcyi linia w punkcie $[a, f(a)]$ jest przerwana, czyli robi skok (fig. 16).

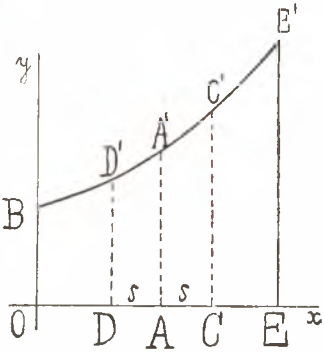

Fig. 15

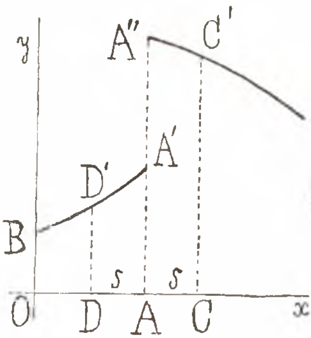

Fig. 16

Objaśnienie geometryczne.

Jeżeli (fig. 15.) $BD'A'C'E'$ jest obrazem funkcyi $f(x)$, $OA=a$, $DA=AC=\delta$, natenczas $AA'=f(a)$, $DD'=f(a-\delta)$, $CC'=f(a+\delta)$. Gdy δ maleje, punkta C' i D' zbliżają się ustawicznie do punktu A', aż w końcu dla $\delta=0$ nań padną. W punkcie $[a, f(a)]$ linia jest ciągła; również w punktach aż do $[OE=b,\ EE'=f(b)]$. Widzimy, że linia jest ciągła od punktu A' do E'.

Jeżeli (fig. 16), $BD'A'A''C'$ jest obrazem funkcyi $f(x)$, $OA=a$, $DA=AC=\delta$, $DD'=f(a-\delta)$, $CC'=f(a+\delta)$, $f(a)$ ma dwie wartości AA' i AA'' różne od siebie. Gdy δ maleje, punkt D' zbliża się do punktu A', punkt C' do punktu A''. Dla $\delta=0$ punkt D' padnie na punkt A', punkt C' na punkt A''. Linia w punkcie $[a, f(a)]$ jest przerwana i czyni skok.

Przykłady.

1) Funkcya $f(x)=3x^2-8x+5$ (fig. 6.) jest ciągłą dla wszystkich wartości skończonych zmiennej niezależnej.

Dowód. Ponieważ $f(x+\delta)=3(x+\delta)^2-8(x+\delta)+5$

$$=3x^2-8x+5+(6x-8)\delta+3\delta^2,$$

przeto $\lim\limits_{\delta=0} f(x+\delta)=\lim\limits_{\delta=0}\,[3x^2-8x+5+(6x-8)\delta+3\delta^2]=f(x)$,

podobnież $\lim\limits_{\delta=0} f(x-\delta)=\lim\limits_{\delta=0}\,[3x^2-8x+5-(6x-8)\delta+3\delta^2]=f(x)$.

2) Funkcya $f(x)=\frac{1}{2-x}$ (fig. 7.) dla $x=2$ doznaje przerwy, bo $f(2)=\frac{1}{0}=\infty$.

Z tego samego powodu funkcya $\frac{1}{(x-2)^2}$ (fig. 8) dla $x=2$ doznaje przerwy.

3) Funkcye $\frac{1}{5}\cdot\frac{x^5-1}{x-1}$ (fig. 9) i $\sin x$ (fig. 13) są ciągłe dla wszelkich skończonych wartości x.

4) Funkcya $f(x)=(x-1)\sqrt{x-2}$ (fig. 10) dla $x=1$, i $x=2$ doznaje przerwy, bo tak $f(1-\delta)=-\delta\sqrt{-\delta-2}$, $f(1+\delta)=\delta\sqrt{\delta-2}$ jak $f(2-\delta)=(1-\delta)\sqrt{-\delta}$ mają wartości urojone.

Z tego samego powodu funkcya $(x-1)(x-2)\sqrt{x-3}$ (fig. 11) doznaje przerwy dla $x=1$, $x=2$ i $x=3$.

5) Funkcya $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$ doznaje przerwy dla $x=2$, bo $\lim\limits_{\delta=0} f(2-\delta)=0$, $\lim\limits_{\delta=0} f(2+\delta)=\infty$ (fig. 12) (V, 1).

6) Funkcya $f(x)=2+\frac{2}{\pi}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-1}$ (fig. 14) dla $x=1$ doznaje przerwy, bo

$$\lim_{\delta=0} f(1-\delta)=\lim_{\delta=0}\left[2+\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\delta}\right)\right]=\lim_{\delta=0}\left[2-\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\delta}\right]$$

$$=2-\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{0}=2-\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\infty=2-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=2-1=1,$$

zaś
$$\lim_{\delta=0} f(1+\delta)=\lim_{\delta=0}\left[2+\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\delta}\right]=2+1=3.$$

Na przedstawionych obrazach wymienionych funkcyi widoczną jest rzeczą, jak linia robi skok w punktach odpowiadądających przerwom funkcyi.

VII.

Funkcya uwikłana.

Wyrażenie, w którem się znajdują dwie ilości x, y, jest ich funkcyą. N. p. $7y^5+2\sqrt[3]{x}-1$ jest funkcyą ilości x, y. Pisze się to:

$$7y^5+2\sqrt[3]{x}-1=F(x,y).$$

Jak widzimy, funkcya $F(x,y)$ zależy od ilości x i y. Podobnież $F(3,4)=7.4^5+2\sqrt[3]{3}-1$ jest funkcyą liczb 3, 4; $F(a,b)=7.b^5+2\sqrt[3]{a}-1$ jest funkcyą ilości a, b.

Biorąc pod uwagę równanie $F(x,y)=0$ widzimy, że tak ilość x zależy od ilości y, jak y od x, czyli że x jest funkcyą ilości y i naodwrót y jest funkcyą ilości x.

Funkcya, jaką jest jedna ilość względem drugiej w równaniu $F(x,y)=0$ nazywa się funkcyą *uwikłaną*. Gdybyśmy to równanie rozwiązali ze względu na jedną ilość, otrzymalibyśmy funkcyę *wyraźną* drugiej ilości. N. p. w równaniu

$$7y^5+2\sqrt[3]{x}-1=0$$

y jest funkcyą uwikłaną ilości x, a x jest funkcyą uwikłaną ilości y. Rozwiązawszy to równanie otrzymamy

$$y=\sqrt[5]{\frac{1-2\sqrt[3]{x}}{7}}=f(x)$$

t. j. y jako funkcyę wyraźną $f(x)$ ilości x i

$$x=\left(\frac{1-7y^5}{2}\right)^3=\varphi(y)$$

t. j. x jako funkcyę wyraźną ilości y.

Jeżeli ilości x, y są zmienne, to jeżeli jedną z nich przyjmiemy jako zmienną niezależną, druga jest zmienną zależną. N. p. w równaniu $y=f(x)$ ilość x jest zmienną niezależną, zaś w równaniu $x=\varphi(y)$ ilość y jest zmienną niezależną.

Bardzo często funkcya uwikłana jest tego rodzaju, że się żadna zmienna nie da przedstawić jako funkcya wyraźna drugiej. N. p.

$$3\,(x-1)-4y+5.e^{\frac{5}{4\,(x-1)+3y}}=0.$$

VIII.

Obraz funkcyi uwikłanej.

Uważając ilość x jako zmienną niezależną, otrzymamy y jako jej funkcyę.

Kreśląc linię wyrażoną przez równanie $F(x, y,=0$, otrzymamy geometryczny obraz ilości y uważanej jako funkcyę zmiennej niezależnej x. Fig. 17. przedstawia nam linię

$$3\,(x-1)-4y+5.e^{\frac{5}{4\,(x-1)+3y}}=0.$$

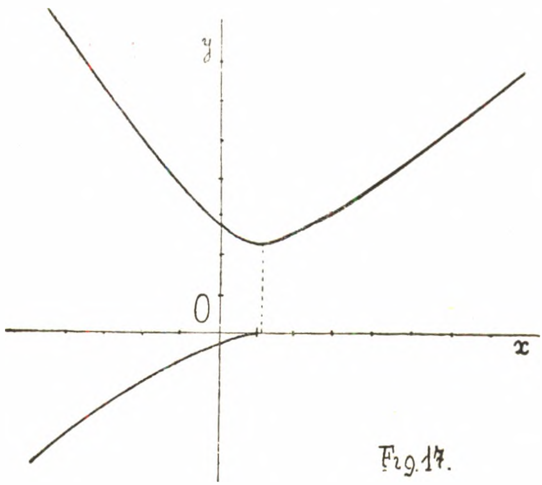

Fig. 17.

Współrzędne punktów linii są: [0,—0·3], [0·4,—0·2], [0·8,—0·1], [1, 0] [—0·5,—0·5], [—1,—0·7], [—2,—1·3], [—3,—2], [—4,—2·7], [—4,7·4], [—3,6·2], [—2,5], [—1,3·8], [—0·5,3·3], [0,2·9], [0·4, 2·6], [0·8,2·5], [1,2·46], [1·5,2·5], [2,2·7], [2·5,2·9], [3,3.2], [4,3·8], [5,4·5], [6,5·2], [7,5·9] i t. d.

IX.

Ciągłość funkcyi uwikłanej.

To cośmy mówili o ciągłości funkcyi wyraźnej, odnosi się także do funkcyi uwikłanej. Chcąc zbadać, czy w równaniu $F(x, y) = 0$ ilość y uważana jako funkcya zmiennej niezależnej x jest ciągłą dla $x = a$, postępujemy w następujący sposób: Szukamy ilości $y = b$ takiej, aby było spełnione równanie $F(a, b) = 0$. Wtenczas wiemy, że dla wartości $x = a$, wartość funkcyi jest $y = b$.

Szukamy następnie wartości funkcyi dla $x = a - \delta$ i $x = a + \delta$, gdzie δ oznacza ilość dodatnią. Niech niemi będą $y = b - \varepsilon$ i $y = b + \varepsilon'$, to znaczy, niech $b - \varepsilon$ i $b + \varepsilon'$ spełniają równania

$$F(a - \delta, b - \varepsilon) = 0 \quad \text{i} \quad F(a + \delta, b + \varepsilon') = 0.$$

Jeżeli dla δ malejącego do 0 także ε i ε' maleją do 0, t. j. jeżeli jest spełniony warunek

$$\lim_{\delta = 0} F(a - \delta, b - \varepsilon) = F(a, b) = 0,$$

$$\lim_{\delta = 0} F(a + \delta, b + \varepsilon') = F(a, b) = 0,$$

natenczas funkcya y jest *ciągłą dla* $x = a$. Geometrycznie znaczy to, że około punktu (a, b) znajdują się punkta bardzo blizko położone $[a - \delta, b - \varepsilon]$ i $[a + \delta, b + \varepsilon']$ i to tem bliżej, im δ jest mniejsze. Jeżeli powyższy warunek nie jest spełniony, funkcya doznaje przerwy, co geometrycznie znaczy, że linia w punkcie $[a, b]$ jest przerwana.

Przykład. $F(x, y) = 3(x-1) - 4y + 5 \cdot e^{\frac{5}{4(x-1)+3y}}$. Zbadać, czy gdy $F(x, y) = 0$, funkcya y jest ciągła dla $x = 1$.

Szukamy wartości funkcyi y dla $x = 1$, to znaczy szukamy wartości y spełniającej równanie $F(1, y) = 0$. Podstawiając $x = 1 - \delta$, otrzymamy

$$F(1 - \delta, y) = -3\delta - 4y + 5 \cdot e^{\frac{5}{-4\delta + 3y}} = 0 \quad \text{czyli}$$

$$-3\delta - 4y + \frac{5}{e^{\frac{5}{+4\delta - 3y}}} = 0.$$

Widzimy tu, że dla $\delta = 0$, $y = 0$ równanie to jest spełnione, bo

$$0 + \frac{5}{e^{\frac{5}{0}}} = \frac{5}{e^{\infty}} = \frac{5}{\infty} = 0.$$

Mamy zatem $F(1,0) = 0$, czyli wiemy, że dla $x = 1$ funkcya ma wartość $y = 0$.

Weźmy teraz pod uwagę ilości $1-\delta$, $0-\varepsilon$ spełniające równanie

$$F(1-\delta,\ 0-\varepsilon) = -3\delta + 4\varepsilon + 5 . e^{\frac{5}{-4\delta - 3\varepsilon}} = 0,$$

lub $$-3\delta + 4\varepsilon + \frac{5}{e^{\frac{5}{4\delta+3\varepsilon}}} = 0.$$

Gdy δ maleje do 0, to ε również maleje do 0, jeżeli powyższe równanie ma być spełnione; zatem ilości $1-\delta$, $0-\varepsilon$ zbliżają się do liczb 1, 0 i mamy

$$\lim_{\delta=0} F(1-\delta,\ 0-\varepsilon) = F(1, 0) = 0.$$

Weźmy następnie pod uwagę ilości $1+\delta$, $0+\varepsilon'$ spełniające równanie

$$F(1+\delta,\ 0+\varepsilon') = 3\delta - 4\varepsilon' + 5 . e^{\frac{5}{4\delta+3\varepsilon'}} = 0.$$

Jeżeli δ maleje do 0, to ε' nie może maleć do 0, boby było

$$5 . e^{\frac{5}{0}} = 5 . 5^{\infty} = \infty = 0,$$

co jest sprzecznem. W tym przypadku ε' zbliża się do takiej ilości, która spełnia równanie

$$F(1,\ 0+\varepsilon') = -4\varepsilon' + 5 . e^{\frac{5}{3\varepsilon'}} = 0.$$

Rachunkiem znajduje się, że $\varepsilon' = 2{\cdot}46$.

Widzimy zatem, że

$\lim\limits_{\delta=0} F(1+\delta,\ 0+\varepsilon') = F(1, 2{\cdot}46) = 0.$, z czego wynika, że funkcya y dla $x = 1$ doznaje przerwy.

Na fig. 17. widzimy, że linia w punkcie [1, 0] jest przerwana.

Z kształtu linii na fig. 17. łatwo poznać, że jestto ta sama linia, co na fig. 12, tylko odniesiona do innego układu współrzędnych.

Twierdzenia, jakie poniżej wyprowadzimy dla funkcyi, będą się odnosić do takich obszarów, w których rozważane funkcye są ciągłe.

X.

Szereg nieskończony.

Szereg, którego liczba wyrazów nie jest ograniczona, lecz rośnie bez końca, nazywa się *nieskończonym*.

N. p. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots$

Wyrazy szeregu nieskończonego będziemy oznaczać głoskami

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_k,\ a_{k+1},\ \ldots,$$

gdzie k oznacza liczbę całkowitą dodatnią.

Oznaczywszy

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots$$

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,$$

$$R_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots$$

mamy

$$S = S_k + R_k.$$

S nazywa się *sumą szeregu nieskończonego*, S_k *sumą k pierwszych wyrazów*, R_k *resztą* czyli *uzupełnieniem szeregu po wyrazie ktym*.

Jeżeli k rośnie bez końca, to S_k dąży do S a R_k maleje do 0. Można przeto napisać

$$\lim_{k=\infty} S_k = S, \qquad \lim_{k=\infty} R_k = 0.$$

W dalszym ciągu będziemy mówić o szeregach, których wyrazy a_1, a_2, $a_3 \ldots$ są ilościami dodatniemi i skończonemi.

Szeregu nieskończonego nie możemy wyrazić inaczej, tylko w sposób przybliżony. Jeżeli jednak taki szereg ma mieć zastosowanie w matematyce, jako jasno określony, musi się dać suma jego wyrazić zapomocą ilości skończonej z taką dokładnością, jak się nam podoba.

To może być spełnione w dwojaki sposób; albo suma S_k tem bardziej zbliża się do pewnej ilości skończonej, im k jest liczbą większą, albo też szereg jest tego rodzaju, że od pewnego

k począwszy reszta R_k może się stać mniejszą od dowolnie małej ilości ε, podczas gdy S_k ma wartość skończoną. N. p.

1) Szereg nieskończony

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = 2,$$

albowiem suma pierwszych k wyrazów dąży do granicy 2, gdy k rośnie bez końca (V, 3)

Ogólnie: postęp geometryczny nieskończony

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q},$$

jeżeli $0 < q < 1$. Albowiem

$$S_k = a\frac{q^k - 1}{q-1} = \frac{a}{1-q} - \frac{a\,q^k}{1-1}, \quad S_{k+s} = \frac{a}{1-q} - \frac{a\,q^{k+s}}{1-q},$$

gdzie s jest liczbą całkowitą, dodatnią.

Ponieważ $q < 1$, przeto

$$q^{k+s} < q^k, \quad \frac{q^{k+s}}{1-q} < \frac{q^k}{1-q},$$

to znaczy: biorąc sumę $k+s$ pierwszych wyrazów, popełniamy błąd mniejszy, niż biorąc sumę k pierwszych wyrazów postępu. Gdy k rośnie bez końca, q^k maleje do 0 a S_k dąży do granicy

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

2) W szeregu nieskończonym

$$S = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

$$S_9 = 2{\cdot}7182788, \qquad R_9 < 0{\cdot}0000031,$$
$$S_{10} = 2{\cdot}71828153, \qquad R_{10} < 0{\cdot}00000031,$$
$$S_{11} = 2{\cdot}71828180, \qquad R_{11} < 0{\cdot}00000003$$

i t. d. R_k może się stać mniejsze od dowolnie małej liczby. ($2! = 1.2$, $3! = 1.2.3$, ... $n! = 1.2.3.\ldots(n-1).n$.)

W obu przypadkach możemy szereg wyrazić z dowolną dokładnością; albowiem w pierwszym przypadku znamy granicę, do której S_k dąży, gdy k rośnie bez końca, w drugim możemy k tak dobrać, że gdy weźmiemy S_k zamiast S, popełnimy błąd tak mały, jak się nam podoba, n. p. w ostatnim przykładzie biorąc S_9 zamiast S popełnimy błąd mniejszy, niż 0·0000031, biorąc S_{10} popełnimy błąd mniejszy, niż 0·00000031 i t. d.

Szereg nieskończony, który się da wyrazić zapomocą ilości skończonych z dowolną dokładnością, nazywa się *zbieżny*.

XI.

Dwa znamiona zbieżności szeregu.

W szeregu zbieżnym muszą wyrazy od pewnego miejsca począwszy maleć. Gdyby bowiem nie malały, nie mogłaby suma nieskończenie wielu takich wyrazów stać się mniejszą od dowolnie małej ilości.

Ten warunek jest konieczny, ale nie wystarczający. N. p. szereg $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ nie jest zbieżny, chociaż jest malejący.

Pierwsze znamię zbieżności szeregu.

Gdy w szeregu nieskończonym

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} + \ldots$$

iloraz $\frac{a_{k+1}}{a_k} < b$, *gdzie* $0 < b < 1$, *jakkolwiek* k *rośnie bez końca, to szereg jest zbieżny.*

Albowiem z nierówności

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < b, \quad \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} < b, \quad \frac{a_{k+3}}{a_{k+2}} < b, \ldots$$

wynikają następujące

$$a_{k+1} < b.a_k, \quad a_{k+2} < b.a_{k+1}, \quad a_{k+3} < b.a_{k+2}, \ldots$$

Z tych zaś przez mnożenie otrzymamy

$$a_{k+1} < b.a_k, \quad a_{k+2} < b^2.a_k, \quad a_{k+3} < b^3.a_k, \ldots$$

Dodawszy te nierówności, mamy

$$R_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots < a_k (b + b^2 + b^3 + \ldots)$$

czyli, ponieważ $0 < b < 1$

$$R_k < a_k \cdot \frac{b}{1-b} \quad (X, 1).$$

Ponieważ szereg jest malejący, można k tak dobrać, iż $a_k \cdot \frac{b}{1-b}$ a zatem R_k stanie się mniejsze od dowolnie małej ilości ε a ponieważ suma pierwszych k wyrazów szeregu jest ilością skończoną, gdyż mamy do czynienia z szeregiem, którego wyrazy są ilościami skończonemi, przeto szereg jest zbieżny.

Drugie znamię zbieżności szeregu.

Dotychczas mówiliśmy o szeregach, których wyrazy są dodatnie, *teraz weźmiemy pod uwagę szereg nieskończony malejący, którego wyrazy od pewnego miejsca począwszy zmieniają kolejno znaki. Taki szereg jest zbieżny.*

Aby to udowodnić, weźmy pod uwagę szereg nieskończony, w którym reszta

$$R_k = a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - \ldots$$

i

$$a_{k+1} > a_{k+2} > a_{k+3} > \ldots$$

Resztę R_k możemy napisać

$$R_k = (a_{k+1} - a_{k+2}) + (a_{k+3} - a_{k+4}) + \ldots$$

lub

$$R_k = a_{k+1} - [(a_{k+2} - a_{k+3}) + (a_{k+4} - a_{k+5}) + \ldots.]$$

Ponieważ dwumiany w nawiasach będące są dodatnie, przeto

$$a_{k+1} > R_k > a_{k+1} - a_{k+2}.$$

Lecz wyrazy maleją bez końca, zatem można k tak dobrać, że a_{k+1} a więc i R_k staną się mniejsze od dowolnie małej ilości ε.

Jeżeli szereg mający wyrazy dodatnie jest zbieżny, to również szereg różniący się od poprzedzającego tylko tem, że niektóre wyrazy mają znaki ujemne, jest zbieżny. Tem bardziej bowiem jest wtenczas spełniony warunek zbieżności.

Gdyby wszystkie wyrazy miały zmienione znaki, toby cały drugi szereg różnił się tylko znakiem od pierwszego.

XII.

Zastosowanie znamion zbieżności szeregu.

1) Szereg $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$ jest zbieżny dla wszelkich wartości skończonych x tak dodatnich jak ujemnych.

D o w ó d. Gdy x jest dodatnie, natenczas ponieważ

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x}{k},$$

dla $k > x$ będzie $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, jakkolwiek k rośnie bez końca, gdyż $\lim\limits_{k=\infty} \frac{x}{k} = 0$. Szereg jest zbieżny na mocy pierwszego znamienia.

Gdy x jest ujemne, szereg

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \ldots$$

począwszy od $k > x$ jest malejący, a zatem jest zbieżny na mocy drugiego znamienia.

Dla $x = 1$ szereg pierwszy przechodzi na

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

Wartość tego szeregu jest 2·718281828459..., oznacza się głoską e i jest zasadą logarytmów naturalnych.

2) Szereg $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.\ 3}{2.\ 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1.\ 3.\ 5}{2.\ 4.\ 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$

$$+ \frac{1.\ 3 \ldots (2k-3)(2k-1)}{2.\ 4 \ldots (2k-2)\, 2k} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots$$

jest zbieżny dla $-1 < x < 1$ na zasadzie pierwszego znamienia, albowiem $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(2k-1)^2}{2k(2k+1)} x^2$ jest mniejsze od 1, mimo że k rośnie bez końca, gdyż

$$\lim_{k=\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k=\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{k}\right)^2}{2.\left(2+\frac{1}{k}\right)} x^2 = \frac{2.^2}{2.2} x^2 = x^2.$$

3) Szeregi: $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \ldots,$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{k^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots,$$

dla wszelkich skończonych wartości x;

szeregi: $1 - x^4 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots,$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots,$$

dla $-1 < x < 1$;

szeregi: $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots,$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots,$$

dla $0 < x < 1$;

jakoteż szeregi: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \ldots,$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

są zbieżne na mocy drugiego znamienia zbieżności.

4) Jeżeli m jest liczbą ujemną lub ułamkową, to rozwinięcie potęgi

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{k} x^k + \ldots$$

jest szeregiem nieskończonym. Szereg ten jest zbieżny, gdy $-1 < x < 1$.

Aby to okazać, weźmy najpierw pod uwagę przypadek, kiedy $0 < x < 1$, a m jest liczbą dodatnią. Jest wtenczas

$$\frac{a^{k+1}}{a_k} = \frac{m-k+1}{k} x = -\frac{k-m-1}{k} x = -\left(1 - \frac{m+1}{k}\right) x.$$

Gdy $k > m+1$, natenczas $1 > \frac{m+1}{k}$, $1 - \frac{m+1}{k} > 0$, zatem i $\left(1 - \frac{m+1}{k}\right) x > 0$. Ponieważ zaś $\left(1 - \frac{m+1}{k}\right) < 1$, zatem i $\left(1 - \frac{m+1}{k}\right) x > 1$; to znaczy, że od wyrazu a_k, gdy $k > m+1$, rozpoczyna szereg maleć.

Gdy $0 < x < 1$ a m jest ujemne, t. j: gdy $m = -m'$, gdzie m' jest liczbą dodatnią, rozróżniamy dwa przypadki $m' < 1$ i $m' > 1$.

W przypadku, gdy $m' < 1$, jest

$$\frac{k+m'-1}{k} = 1 + \frac{m'-1}{k} = \left(1 - \frac{1-m'}{k}\right) < 1,$$

zatem $\frac{k+m'-1}{k} x < 1$; to znaczy, że szereg jest malejący od początku.

Gdy $m' > 1$, można znaleźć k tak wielkie, iż będzie spełniony warunek

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+m'-1}{k} x = \left(1 + \frac{m'-1}{k}\right) x < 1.$$

Jeżeli bowiem weźmiemy pod uwagę liczbę k_1 spełniającą równanie $\left(1 + \frac{m'-1}{k_1}\right) x = 1$, a jest nią $k_1 = \frac{(m'-1)x}{1-x}$, natenczas dla każdej liczby $k > k_1$ jest spełniona nierówność $\left(1 + \frac{m'-1}{k}\right) x < 1$ i to tem bardziej, im k jest większe.

Widzimy zatem, że w każdym przypadku, gdy $0 < x < 1$, szereg

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots$$

od pewnego miejsca jest malejący, a wyrazy zmieniają kolejno znaki; jest zatem zbieżny według drugiego znamienia zbieżności.

Gdy x jest ujemne, mniejsze od 1, natenczas szereg powyższy przechodzi na

$$(1-x)^m = 1 - \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 - \ldots + (-1)^k \binom{m}{k} x^k + \ldots,$$

gdzie $\frac{a_{k+1}}{a_k} = -\frac{m-k+1}{k} = \left(1 - \frac{m+1}{k}\right) x,$

który tem się różni od poprzedniego, że od pewnego miejsca począwszy wyrazy jego maleją, zachowując jednakowe znaki.

Ponieważ jednak $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$, mimo to, że k rośnie bez końca, gdyż

$$\lim_{k=\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k=\infty} \left(1 - \frac{m+1}{k}\right) x = \left(1 - \frac{m+1}{\infty}\right) x$$

$$= (1-0)\, x = x,$$

przeto szereg jest zbieżny na mocy pierwszego znamienia zbieżności.

Udowodniliśmy więc, że *rozwinięcie potęgi* $(1+x)^m$ *jest szeregiem zbieżnym, gdy* $-1 < x < 1$.

Przykłady.

α) $(1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - 0{\cdot}333\,x + 0{\cdot}222\,x^2 - 0{\cdot}173\,x^3 + 0{\cdot}144\,x^4 - 0{\cdot}125\,x^5 + \ldots,$
wyrazy maleją od początku, znąki kolejno się zmieniają.

β) $(1-x)^{-\frac{1}{3}} = 1 + 0{\cdot}333\,x + 0{\cdot}222\,x^2 + 0{\cdot}173\,x^3 + 0{\cdot}144\,x^4 + 0{\cdot}125\,x^5 + \ldots$

γ) $(1+x)^{-5} = 1 - 5x + 15x^2 - 35x^3 + 70x^4 - 126x^5 + 210x^6 - 330x^7 + 495x^8 - 715x^9 + \ldots$

Gdy $x = 0{\cdot}99$, wyrazy zaczynają maleć od wyrazu 397, albowiem $m' = 5$, $k_1 = 396$, $\frac{a_{397}}{a_{396}} = \left(1 + \frac{4}{396}\right) \cdot 0{\cdot}99 = 1$, $\frac{a_{398}}{a_{397}} = \left(1 + \frac{4}{397}\right) \cdot 0{\cdot}99 < 1$ i t. d.

δ) $(1-x)^{-5} = 1 + 5x + 15x^2 + 35x^3 + 70x^4 + 126x^5 + 210x^6 + 330x^7 + 495x^8 + 715x^9 + \ldots$

ε) $(1+x)^{\frac{2}{3}} = 1 + 0{\cdot}0667\,x - 0{\cdot}1111\,x^2 + 0{\cdot}0494\,x^3 - 0{\cdot}0288\,x^4 + 0{\cdot}0192\,x^5 - 0{\cdot}0139\,x^6 + \ldots,$
wyrazy zaczynają zmieniać znak, gdy $k > \frac{2}{3} + 1$ t. j. począwszy od drugiego wyrazu.

ζ) $(1-x)^{\frac{2}{3}} = 1 - 0{\cdot}0667\,x - 0{\cdot}1111\,x^2 - 0{\cdot}0494\,x^3 - 0{\cdot}0284\,x^4 - 0{\cdot}0192\,x^5 - 0{\cdot}0139\,x^6 - \ldots,$
wyrazy od drugiego począwszy mają jednakowe znaki.

η) $(1+x)^{\frac{16}{3}} = 1 + 5{\cdot}3333\,x + 11{\cdot}5556\,x^2 + 12{\cdot}8395\,x^3 + 7{\cdot}4897\,x^4 + 1{\cdot}9973\,x^5 + 0{\cdot}1110\,x^6 - 0{\cdot}0106\,x^7 + 0{\cdot}0022\,x^8 - 0{\cdot}0006\,x^9 + 0{\cdot}0002\,x^{10} - \ldots,$
wyrazy zaczynają zmieniać znak, gdy $k > \frac{16}{3} + 1$ t. j. od siódmego wyrazu.

ϑ) $(1-x)^{\frac{16}{3}} = 1 - 5{\cdot}3333\,x + 11{\cdot}5556\,x^2 - 12{\cdot}8395\,x^3$ $+ 7{\cdot}4897\,x^4 - 1{\cdot}9973\,x^5 + 0{\cdot}1110\,x^6 + 0{\cdot}0106\,x^7 + 0{\cdot}0022\,x^8$ $+ 0{\cdot}0006\,x^9 + 0{\cdot}0002\,x^{10} + \ldots,$
wyrazy od siódmego począwszy mają znaki jednakowe.

ι) Szereg

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1.(1-x)}{1.\;2} + \frac{1.(1-x)\;(1-2\,x)}{1.\;2.\;3.} + \ldots$$
$$+ \frac{1.\;(1-x)\;\ldots\;(1-(k-1)\,x)}{1.\;2\;\ldots\;k} + \ldots$$

jest zbieżny dla $-1 + x + 1$. Gdy x maleje do 0, szereg dąży do

$$\lim_{x=0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots,$$

co jest równe $2{\cdot}718281828459\ldots = e$ (XII, 2).

N. p. $(1+0{\cdot}1)^{10} = 2 + 0.45 + 0{\cdot}12 + 0{\cdot}021 + 0{\cdot}00252$ $+ 0{\cdot}000210 + 0{\cdot}000012 = 2{\cdot}593742,$

$(1+0{\cdot}001)^{1000} = 2 + 0{\cdot}4995 + 0{\cdot}166167 + 0{\cdot}041417$ $+ 0{\cdot}008250 + 0{\cdot}001368 + 0{\cdot}000194 + 0{\cdot}000024 + 0{\cdot}000003$ $= 2{\cdot}716923,$

$(1+0{\cdot}000001)^{1000000} = 2 + 0{\cdot}5 + 0{\cdot}166666 + 0{\cdot}041666$ $+ 0{\cdot}008333 + 0{\cdot}001389 + 0{\cdot}000198 + 0{\cdot}000025 + 0{\cdot}000003$ $= 2{\cdot}718280$

$(1-0{\cdot}1)^{-10} = 2 + 0{\cdot}55 + 0{\cdot}22 + 0{\cdot}0715 + 0{\cdot}02002$ $+ 0{\cdot}005005 + 0{\cdot}001144 + 0{\cdot}000243 + 0{\cdot}000049 + 0{\cdot}000009$ $+ 0{\cdot}000002 = 2{\cdot}867972,$

$(1-0{\cdot}001)^{-1000} = 2 + 0{\cdot}5005 + 0{\cdot}167167 + 0{\cdot}041917$ $+ 008417 + 0{\cdot}001410 + 0{\cdot}000203 + 0{\cdot}000026 + 0{\cdot}000003$ $= 2{\cdot}719643,$

$(1-0{\cdot}000001)^{-1000000} = 2 + 0{\cdot}500001 + 0{\cdot}166667$ $+ 0{\cdot}041667 + 0{\cdot}008333 + 0{\cdot}001389 + 0{\cdot}000198 + 0{\cdot}000025$ $+ 0{\cdot}000003 = 2{\cdot}718283.$

Ogólnie: Ponieważ

$$(a+x)^n = \left[a\left(1+\right)\frac{x}{a}\right]^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n,$$

przeto szereg

$$(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} x^3 + \ldots$$

jest zbieżny, gdy $-a < x < a$.

XIII.

Pojęcie funkcyi pochodnej.

Funkcya $f(x)$ ma pewną wartość. Jeżeli x wzrośnie o δ, czyli jeżeli będzie mieć wartość $x+\delta$, funkcya będzie mieć wartość $f(x+\delta)$ a jej *przyrost* będzie $f(x+\delta) - f(x)$. Gdy δ maleje do zera, stosunek

$$\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

dąży do pewnej granicy, która się nazywa *funkcyą pochodną* lub krótko *pochodną* funkcyi $f(x)$. Funkcya zaś $f(x)$ jest *pierwotną* względem swojej pochodnej. Znakiem pochodnej jest $f'(x)$ lub $\frac{d}{dx}f(x)$. Pisze się

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\delta=0} \frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$$

a czyta się: $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ jest pochodną funkcyi $f(x)$ co do zmiennej x.

Symbol $\frac{d}{dx}$ oznacza działanie dokładnie określone; co nas naprowadziło do używania tego symbolu, zobaczymy później (XVIII).

XIV.

Pochodne niektórych funkcyi elementarnych.

1) Pochodna ilości stałej.

Jeżeli $f(x) = a$, gdzie a jest ilością od x niezależną, natenczas $f(x+\delta) = a$, $f(x+\delta) - f(x) = a - a = 0$, a zatem $\dfrac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta} = 0$, jakkolwiek δ maleje.

Jest przeto $\dfrac{d}{dx}[a] = 0.$

t. j. *pochodna ilości stałej jest równa zeru.*

2) *Pochodna potęgi x^n.*

$$\frac{d}{dx}\left|x^n\right| = \lim_{\delta=0} \frac{(x+\delta)^n - x^n}{\delta}.$$

Ponieważ δ maleje do zera, więc jest mniejsze od x, szereg $(x+\delta)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\delta + \binom{n}{2} x^{n-2}\delta^2 + \ldots$ jest zbieżny (XII, 4).

Można napisać $(x+\delta)^n = x^n + n\,x^{n-1}\delta + M\delta^2$. To uwzględniwszy otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\left|x^n\right| = \lim_{\delta=0} \frac{x^n + n\,x^{n-1}\delta + M\delta^2 - x^n}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta=0}\left|n\,x^{n-1} + M\delta\right| = n\,x^{n-1}.$$

Mamy zatem wzór : $\dfrac{d}{dx}\left|x^n\right| = n\,x^{n-1}$.

3) *Pochodna funkcyi wykładniczej a^x.*

$$\frac{d}{dx}\left|a^x\right| = \lim_{\delta=0} \frac{a^{x+\delta} - a^x}{\delta} = \lim_{\delta=0} a^x . \frac{a^\delta - 1}{\delta}.$$

Kładąc $a^\delta - 1 = \mu$ i bacząc, że gdy $\delta = 0$, to także $\mu = 0$, otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\left|a^x\right| = \lim_{\delta=0,} a^x . \frac{\mu}{\delta}.$$

Z równania $a^\delta - 1 = \mu$ wynika $a^\delta = 1 + \mu$,

$$\delta \lg_b a = \lg_b (1+\mu),$$

$$\frac{\delta}{\mu} \lg_b a = \frac{\lg_b (1+\mu)}{\mu} = \lg_b \sqrt[\mu]{1+\mu},$$

$$\frac{\mu}{\delta} = \frac{\lg_b a}{\lg_b \sqrt[\mu]{1+\mu}}$$

Lecz według XII, 4, ι)

$$\lim_{\mu=0} \sqrt[\mu]{1+\mu} = \lim_{\mu=0} (1+\mu)^{\frac{1}{\mu}} = e = 2{\cdot}71828\ldots,$$

zatem

$$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = \lim_{\mu=0} a^x \frac{lg_b\, a}{lg_b \sqrt[\mu]{1+\mu}} = a^x . \frac{lg_b\, a}{lg_b\, e}$$

Gdy $b = e$, wtenczas

$$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = a^x .\ lg_e\, a.$$

$lg_e\, a$ jest *logarytmem naturalnym* liczby a. Na przyszłość logarytm naturalny będziemy krótko oznaczać przez ln.

Mamy więc wzory:

$$\frac{d}{dx}\left[a^x\right] = a^x .\ ln\ a, \quad \frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x . \quad (\text{gdyż } ln\ e = 1).$$

4) *Pochodna funkcyi logarytmicznej* $lg_b\, x$.

$$\frac{d}{dx}\left[lg_b\, x\right] = \lim_{\delta=0} \frac{lg_b(x+\delta) - lg_b\, x}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta=0} \frac{lg_b \dfrac{x+\delta}{x}}{\delta} = \lim_{\delta=0} \frac{lg_b\left[1+\dfrac{\delta}{x}\right]}{x . \dfrac{\delta}{x}}$$

Kładąc $\dfrac{\delta}{x} = \mu$ i bacząc, że gdy $\delta = 0$, to także $\mu = 0$, a uwzględniwszy przytem XII, 4, ι), otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\left[lg_b\, x\right] = \lim_{\mu=0} \frac{lg_b(1+\mu)}{\mu\ x} = \lim_{\mu=0} \frac{lg_b \sqrt[\mu]{1+\mu}}{x} = \frac{lg_b e}{x}.$$

Gdy $b = e$, wypada

$$\frac{d}{dx}\left[ln\ x\right] = \frac{1}{x}.$$

5) *Pochodna funkcyi sin x.*

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\right] = \lim_{\delta=0} \frac{\sin(x+\delta - \sin x}{\delta}.$$

Stosując wzór

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2},$$

otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\right] = \lim_{\delta=0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\sin\frac{\delta}{2}}{\delta}.$$

Kładąc $\frac{\delta}{2}=\varepsilon$ i bacząc, że gdy $\delta=0$, to także $\varepsilon=0$, mamy

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\right] = \lim_{\varepsilon=0}\cos(x+\varepsilon)\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}.$$

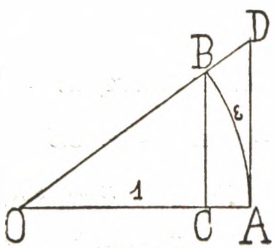

Fig. 18.

Chcąc wyznaczyć granicę, do której dąży iloraz $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$, gdy ε maleje do 0, weźmy pod uwagę fig. 18., na której $OA=1$, $\widehat{AB}=\varepsilon$, $OC=\cos\varepsilon$, $BC=\sin\varepsilon$, $AD=tg\,\varepsilon$. Widzimy, że

$$BC < \widehat{AB} < AD$$

czyli $\sin\varepsilon < \varepsilon < tg\,\varepsilon$.

Z tego wypada $\frac{1}{\sin\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} > ctg\,\varepsilon$,

a po pomnożeniu przez $\sin\varepsilon$, $1 > \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} > \cos\varepsilon$.

Jeżeli łuk ε maleje, natenczas punkt C zbliża się do punktu A, to znaczy $\cos\varepsilon$ dąży do 1. Mamy zatem

$$\lim_{\varepsilon=0}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1.$$

Ponieważ $\lim_{\varepsilon=0}\cos(x+\varepsilon) = \cos x$, przeto wypada

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x\right] = \cos x.$$

6) *Pochodna funkcyi tg x.*

$$\frac{d}{dx}\left[tg\,x\right] = \lim_{\delta=0}\frac{tg(x+\delta) - tg\,x}{\delta}.$$

Lecz $tg(x+\delta) - tg\,x = \dfrac{\sin(x+\delta)}{\cos(x+\delta)} - \dfrac{\sin x}{\cos x} =$

$$\frac{\sin(x+\delta)\cos x - \cos(x+\delta)\sin x}{\cos(x+\delta)\cos x} = \frac{\sin\delta}{\cos(x+\delta)\cos x},$$

przeto $\dfrac{d}{dx}\Big[tg\,x\Big] = \lim\limits_{\delta=0} \dfrac{1}{\cos(x+\delta)\cos x}\cdot\dfrac{\sin\delta}{\delta}.$

Uwzględniwszy to, cośmy w poprzednim ustępie mówili, otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\Big[tg\,x\Big] = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

7) *Pochodna funkcyi arc sin x.*

$$\frac{d}{dx}\Big[\arcsin x\Big] = \lim_{\delta=0} \frac{\arcsin(x+\delta) - \arcsin x}{\delta}.$$

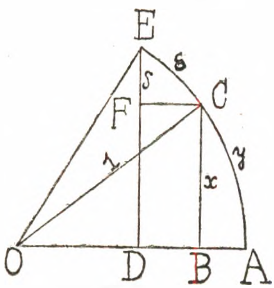

Fig. 19.

Lecz według fig. 19., na której $OA=1$, $BC = x$, $\widehat{AC} = y$, $EF = \delta$, $\widehat{CE} = \varepsilon$, jest $\arcsin x = y$, $\quad x = \sin y$, $\arcsin(x+\delta) = y+\varepsilon$, $x+\delta = \sin(y+\varepsilon)$,

$$\arcsin(x+\delta) - \arcsin x = \varepsilon,$$

$$\delta = \sin(y+\varepsilon) - \sin y.$$

Z ostatnich równań wypada zarazem, że jeżeli $\delta = 0$, natenczas $\varepsilon = 0$. Uwzględniwszy wartości na ε i δ, otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\Big[\arcsin x\Big] = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{\sin(y+\varepsilon) - \sin y} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\dfrac{\sin(y+\varepsilon) - \sin y}{\varepsilon}}$$

$$= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Mamy zatem wzór:

$$\frac{d}{dx}\Big[\arcsin x\Big] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

8) *Pochodna funkcyi arc tg x.*

$$\frac{d}{dx}\left[arc\,tg\,x\right] = \lim_{\delta=0} \frac{arc\,tg\,(x+\delta) - arc\,tg\,x}{\delta}.$$

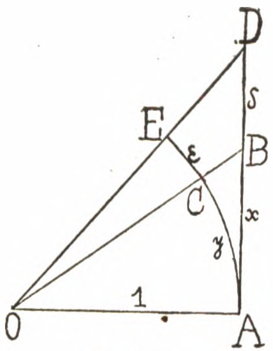

Fig. 20.

Lecz według fig. 20., na której $AO = 1$, $AB = x$, $\widehat{AC} = y$, $BD = \delta$, $\widehat{CE} = \varepsilon$, jest $arc\,tg\,x = y$, $x = tg\,y$, $arc\,tg(x+\delta) = y+\varepsilon$, $x+\delta = tg(y+\varepsilon)$,

$$arc\,tg\,(x+\delta) - arc\,tg\,x = \varepsilon,$$

$$\delta = tg\,(y+\varepsilon) - tg\,y.$$

Z ostatnich równań wynika, że gdy $\delta = 0$, natenczas $\varepsilon = 0$. Uwzględniwszy wartości na ε i δ, otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\left[arc\,tg\,x\right] = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon}{tg(y+\varepsilon) - tg\,y} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\dfrac{tg(y+\varepsilon) - tg\,y}{\varepsilon}}$$

$$= \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Mamy zatem wzór:

$$\frac{d}{dx}\left[arc\,tg\,x\right] = \frac{1}{1+x^2}.$$

XV.

Pochodne funkcyi złożonych.

1) *Jeżeli funkcyę $f(x)$ pomnożymy przez stałą (czyli niezależną od x) ilość a, to jej pochodna zostaje pomnożona przez tę ilość.* Albowiem

$$\frac{d}{dx}\left[a f(x)\right] = \lim_{\delta=0} \frac{a f(x+\delta) - a f(x)}{\delta} = \lim_{\delta=0} a.\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} = a f'(x).$$

Mamy zatem wzór:

$$\frac{d}{dx}\left[a f(x)\right] = a \frac{d}{dx} f(x).$$

N. p. $\dfrac{d}{dx}\left[a x^n\right] = a \dfrac{d}{dx}\left[x^n\right] = a\, n\, x^{n-1},$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dx}\left[x^{n+1}\right] = x^n.$$

2) *Pochodna sumy funkcyi równa się sumie pochodnych tychże funkcyi.* Albowiem

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) + \varphi(x)\right] = \lim_{\delta = 0} \frac{f(x+\delta) + \varphi(x+\delta) - [f(x) + \varphi(x)]}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta = 0}\left[\frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} + \frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}\right] = f'(x) + \varphi'(x).$$

Mamy zatem wzór:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) + \varphi(x)\right] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx}\varphi(x).$$

N. p.

α) $\dfrac{d}{dx}\left[3 + 2x - x^2\right] = \dfrac{d}{dx}\left[3\right] + \dfrac{d}{dx}\left[2x\right] + \dfrac{d}{dx}\left[-x^2\right] = 2 - 2x.$

β) Ponieważ $arc \cos x = \dfrac{\pi}{2} - arc \sin x$ (III), przeto

$$\frac{d}{dx}\left[arc \cos x\right] = -\frac{d}{dx}\left[arc \sin x\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

γ) Ponieważ $arc\, ctg\, x = \dfrac{\pi}{2} - arc\, tg\, x,$ (III), przeto

$$\frac{d}{dx}\left[arc\, ctg\, x\right] = -\frac{d}{dx}\left[arc\, tg\, x\right] = -\frac{1}{1+x^2}.$$

3) Pochodna iloczynu dwóch funkcyi.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) . \varphi(x)\right] = \lim_{\delta = 0} \frac{f(x+\delta) . \varphi(x+\delta) - f(x) . \varphi(x)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta = 0} \frac{f(x+\delta) . \varphi(x+\delta) - f(x) . \varphi(x+\delta) + f(x)\varphi(x+\delta) - f(x) . \varphi(x)}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta = 0}\left[\varphi(x+\delta) . \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta} + f(x) . \frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}\right]$$

$$= \varphi(x) . f'(x) + f(x) . \varphi'(x).$$

Mamy więc wzór:

$$\frac{d}{dx}\Big[f(x).\ g(x)\Big] = g(x).\ \frac{d}{dx}f(x) + f(x).\ \frac{d}{dx}\,g(x).$$

N. p. $$\frac{d}{dx}\,[x^n.\ \sin x] = \sin x.\ \frac{d}{dx}\,[x^n] + x^n.\ \frac{d}{dx}\,[\sin x]$$

$$= n\,x^{n-1}.\ \sin x + x^n \cos x.$$

4) Pochodna ilorazu dwóch funkcyi.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{\delta=0} \frac{1}{\delta}\left[\frac{f(x+\delta)}{g(x+\delta)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

$$= \lim_{\delta=0} \frac{f(x+\delta)\,g(x) - f(x)\,g(x+\delta)}{\delta.\ g(x+\delta).\ g(x)}$$

$$= \lim_{\delta=0} \frac{f(x+\delta)\,g(x) - f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\delta) + f(x)\,g(x)}{\delta\ g(x+\delta)\ g(x)}$$

$$= \lim_{\delta=0}\left[\frac{1}{g(x+\delta)\,g(x)}\left\{g(x).\frac{f(g+\delta)-f(x)}{\delta} -\right.\right.$$

$$\left.f(x).\ \frac{g(x+\delta)-g(x)}{\delta}\right\} = \frac{g(x).\ f'(x) - f(x).\ g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Mamy więc wzór:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\,\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\,\frac{d}{dx}\,g(x)\right].$$

N. p. $$\frac{d}{dx}\left|\frac{\sin x}{x^m}\right| = \frac{1}{x^{2m}}\left\{x^m\,\frac{d}{dx}[\sin x] - \sin x\,\frac{d}{dx}\,[x^m]\right\}$$

$$= \frac{1}{x^{2m}}\left(x^m \cos x - m\,x^{m-1}\,\sin x\right) = \frac{\cos x}{x^m} - \frac{m \sin x}{x^{m+1}}.$$

XVI.

Pochodna funkcyi funkcyi.

$$\frac{d}{dx}f[\varphi(x)] = \lim_{\delta=0} \frac{f[\varphi(x+\delta)] - f[\varphi(x)]}{\delta}.$$

Podstawiwszy $\varphi(x) = u$, otrzymamy $\varphi(x+\delta) = u + \varepsilon$. Z tego równania wynika, że gdy $\delta = 0$, to także $\varepsilon = 0$. Uwzględniwszy, że $\varphi(x+\delta) - \varphi(x) = \varepsilon$, można napisać

$$\frac{d}{dx} f[\varphi(x)] = \lim_{\delta=0,\ \varepsilon=0} \frac{f(u+\varepsilon) - f(u)}{\delta} = \lim_{\delta=0,\ \varepsilon=0} \frac{f(u+\varepsilon) - f(u)}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{\delta}$$

$$= \lim_{\delta=0,\ \varepsilon=0} \left[\frac{f(u+\varepsilon) - f(u)}{\varepsilon} \cdot \frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}\right]$$

$$= \frac{d}{du} f(u) \cdot \frac{d}{dx}\varphi(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

Mamy więc wzór:

$$\frac{d}{dx} f[\varphi(x)] = \frac{d}{d[\varphi(x)]} f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$$

$$= \frac{d}{d[\varphi(x)]} f[\varphi(x)] \cdot \frac{d}{dx}\varphi(x).$$

N. p.

1) $$\frac{d}{dx}\left[(a+bx^2)^3\right] = \frac{d}{d[a+bx^2]}\left[(a+bx^2)^3\right] \cdot \frac{d}{dx}[a+bx^2]$$

$$= 3(a+bx^2)^2 \cdot 2bx = 6bx(a+bx^2)^2.$$

Lub też podstawiwszy $a + bx^2 = u$,

$$\frac{d}{dx}\left[(a+bx^2)^3\right] = \frac{d}{du}\left[u^3\right] \cdot \frac{d}{dx}\left[a+bx^2\right] = 3u^2 \cdot 2bx$$

$$= 6bu^2x = 6bx(a+bx^2)^2.$$

2) $$\frac{d}{dx}[\sin(a-bx)] = \frac{d}{[d\,a-bx]}[\sin(a-bx)] \cdot \frac{d}{dx}[a-bx]$$

$$= \cos(a-bx) \cdot (-b) = -b\cos(a-bx).$$

Lub też podstawiwszy $a - bx = u$

$$\frac{d}{dx}[\sin(a-bx)] = \frac{d}{du}[\sin u] \cdot \frac{d}{dx}(a-bx) = \cos u \cdot (-b)$$

$$= -b\cos u = -b \cdot \cos(a-bx).$$

3) $$\frac{d}{dx}[\cos x] = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = \frac{d}{d\left[\frac{\pi}{2}-x\right]}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x.$$

$$4)\ \frac{d}{dx}[ctg\,x]=\frac{d}{dx}\left[tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\frac{d}{d\left[\frac{\pi}{2}-x\right]}\left[tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\cdot\frac{d}{dx}\left[\frac{\pi}{2}-x\right]$$

$$=\frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot(-1)=-\frac{1}{cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\frac{1}{sin^2 x}.$$

$$5)\ \frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\right]=\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{d}{d[1-x^2]}\left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right].\ \frac{d}{dx}[1-x^2]$$

$$=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.\ (-2x)=-x.\ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

XVII.

Pojęcie różniczki.

Dla wartości zmiennej niezależnej x funkcya ma wartość $f(x)$, dla wartości $x+\delta$ funkcya ma wartość $f(x+\delta)$, to znaczy: jeżeli zmienna niezależna powiększy się o δ, funkcya powiększy się o $f(x+\delta)-f(x)$, czyli jeżeli δ jest *przyrostem zmiennej niezależnej*, to $f(x+\delta)-f(x)$ jest *przyrostem funkcyi.* Na przyszłość jako znak przyrostu będziemy uważać symbol $\triangle$, więc $\triangle x$ będzie oznaczać przyrost zmiennej x, oznaczony poprzednio przez δ a $\triangle f(x)$ będzie oznaczać przyrost funkcyi $f(x)$, oznaczony poprzednio przez $f(x+\delta)-f(x)$; innymi słowy $\triangle x$ będzie oznaczać *różnicę zmiennej niezależnej* x a $\triangle f(x)$ odpowiedną *różnicę funkcyi* $f(x)$. Jest tędy

$$f(x+\triangle x)-f(x)=\triangle f(x),$$

$$f'(x)=\lim_{\triangle x=0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x=0}\frac{\triangle f(x)}{\triangle x}$$

t. j. pochodna jestto granica, do której dąży stosunek różnicy czyli przyrostu funkcyi do różnicy czyli przyrostu zmiennej niezależnej, gdy różnica czyli przyrost zmiennej niezależnej maleje do 0.

Na wyrażenie, że przyrost czyli różnica Δx maleje do 0, jakkolwiek jest ilością różną od 0, używamy symbolu dx, podobnie na wyrażenie granicy, do której dąży $\Delta f(x)$, gdy Δx maleje do 0, używamy symbolu $df(x)$.

Według tego można napisać

$$f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Ilości dx, $df(x)$ są *nieskończenie malejące* i nazywają się *różniczkami*, dx jest *różniczką zmiennej niezależnej*, $df(x)$ *różniczką funkcyi* $f(x)$. Mówi się także, że różniczki są ilościami *nieskończenie małemi*, jakkolwiek pod tą nazwą rozumie się ilości nieskończenie malejące.

XVIII.

Związek między różniczką funkcyi a pochodną.

Dotychczas różniczki dx, $df(x)$ nie występowały samodzielnie, lecz tylko w granicy stosunku $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ dla Δx malejącego do 0. Aby poznać związek między różniczkami uważanemi samodzielnie, weźmy pod uwagę równanie $f'(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, z którego wynika

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

gdzie ε jest ilością dążącą do 0, gdy Δx maleje do 0.

Z tego równania wypada następujące:

$$\Delta f(x) = f'(x) . \Delta x + \varepsilon . \Delta x.$$

Pisząc $\Delta f(x) = f'(x) . \Delta x$ popełniamy błąd $\varepsilon . \Delta x$, który możemy zrobić tak mały, jak się nam podoba, gdy Δx weźmiemy odpowiednio małe.

N. p. Gdy $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, wtenczas $f'(x) = 6x - 5$,

$$\Delta f(x) = (6x - 5) . \Delta x + \varepsilon . \Delta x.$$

Dla $x = 2$, $\triangle x = 0{\cdot}1$ jest

$$f(2) = 3,\quad f(2{\cdot}1) = 3{\cdot}73,\quad f'(2) = 7,$$

$$\triangle f(2) = f(2{\cdot}1) - f(2) = 0{\cdot}73 = 7.0{\cdot}1 + \varepsilon.\ 0{\cdot}1,$$

skąd wynika $\varepsilon_1 = 0{\cdot}3$.

Gdy $\triangle x = 0{\cdot}01$, jest $f(2{\cdot}01) = 3{\cdot}0703$,

$$\triangle f(2) = f(2{\cdot}01) - f(2) = 0{\cdot}0703 = 7.0{\cdot}01 + \varepsilon_1\ 0.01,$$

skąd wypada $\varepsilon_1 = 0{\cdot}03$.

Gdy $\triangle x = 0{\cdot}001$, jest $f(2{\cdot}001) = 3{\cdot}007003$,

$$\triangle f(2) = f(2{\cdot}001) - f(2) = 0{\cdot}007003 = 7.0{\cdot}001 + \varepsilon_2.\ 0{\cdot}001,$$

skąd wynika $\varepsilon_2 = 0{\cdot}003$ i t. d.

Gdy $\triangle x$ maleje do 0, t. j. gdy $\triangle x$ zamienia się na różniczkę dx, błąd również maleje do 0 i możemy napisać:

$$df(u) = f'(u)\,du.$$

to znaczy: *różniczka funkcyi równa się iloczynowi pochodnej przez różniczkę zmiennej niezależnej.*

Pamiętając, że dx jest ilością nieskończenie malejącą jednak różną od 0, możemy podzielić obie strony ostatniego równania przez dx i otrzymamy

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{d}{dx} f(x),$$

z czego poznajemy, że *pochodna jest stosunkiem różniczki funkcyi do różniczki zmiennej niezależnej, czyli jest stosunkiem różniczkowym.* Zarazem mamy tu wytłómaczenie, dlaczego dla wyrażenia działania służącego do wyznaczenia pochodnej używamy symbolu $\frac{d}{dx}$ (XIII).

Równanie $df(x) = f'(x)\,dx$ okazuje, że znając pochodną, znamy różniczkę funkcyi i naodwrót; z tego powodu wyznaczanie pochodnych wchodzi w zakres *rachunku różniczkowego* a symbole d, $\frac{d}{dx}$ wyrażają działanie zwane *różniczkowaniem.*

XIX.

Wzory wyrażające różniczki funkcyi.

Uwzględniwszy wzory wyrażające pochodne, wyprowadzone w XIV, XV i XVI otrzymamy następujące wzory wyrażające różniczki funkcyi:

1) $da = 0$, gdzie a jest ilością stałą (od x niezależną),

2) $dx^n = nx^{n-1}\,dx$,

3) $da^x = a^x \,.\, ln\,a\,dx$,

4) $de^x = e^x \,.\, dx$,

5) $d\,ln\,x = \frac{dx}{x}$,

6) $d\,sin\,x = cos\,x\,dx$,

7) $d\,cos\,x = -\,sin\,x\,dx$,

8) $d\,tg\,x = \frac{dx}{cos^2 x}$,

9) $d\,ctg\,x = -\,\frac{dx}{sin^2 x}$,

10) $d\,arc\,sin\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

11) $d\,arc\,cos\,x = -\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

12) $d\,arc\,tg\,x = \frac{dx}{1+x^2}$,

13) $d\,arc\,ctg\,x = -\,\frac{dx}{1+x^2}$,

14) $d[a\,f(x)] = a\,df(x) = af'(x)\,dx$, gdzie a jest ilością stałą,

15) $d[f(x) + g(x)] = df(x) + dg(x) = f'(x)dx + g'(x)dx$,

16) $d[f(x)\,.\,g(x)] = g(x)\,df(x) + f(x)\,dg(x)$

$$= g(x)f'(x)\,dx + f(x)g'(x)\,dx,$$

17) $d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\,df(x) - f(x)\,dg(x)}{[g(x)]^2}$

$$= \frac{g(x)f'(x)\,dx - f(x)g'(x)\,dx}{[g(x)]^2},$$

$$18)\ df[\varphi(x)] = \frac{d}{du} f(u) d\varphi(x) = f'(u)\varphi'(x)dx, \text{ gdzie } u = \varphi(x),$$

$$\text{lub } df[\varphi(x)] = \frac{d}{d\varphi(x)} f[\varphi(x)] \cdot \frac{d}{dx} \varphi(x) dx$$

$$= \frac{d}{d\varphi(x)} f[\varphi(x)] . \varphi'(x)\ dx.$$

XX.

Różniczka funkcyi dwu zmiennych.

Jeżeli $F(x, y)$ jest funkcyą zmiennych x, y, natenczas gdy te zmienne wzrosną o Δx, Δy, przyrost funkcyi będzie $\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - F(x, y)$. N. p. jeżeli $F(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $x = 2$, $y = 3$, natenczas

$$F(2, 3) = 3.\ 2^2 + 2.\ 2.\ 3 + 3^2 = 12 + 12 + 9 = 33.$$

Gdy $\Delta x = 0{\cdot}01$, $\Delta y = 0{\cdot}02$, tedy

$$F(2{\cdot}01,\ 3{\cdot}02) = 3.2{\cdot}01^2 + 2.2{\cdot}01.\ 3{\cdot}02 + 3{\cdot}02^2 = 33{\cdot}3811,$$

$$\Delta F(2, 3) = F(2{\cdot}01,\ 3{\cdot}02) - F(2, 3) = 33{\cdot}3811 - 33 = 0{\cdot}3811,$$

Równanie wyrażające przyrost funkcyi można przerobić w sposób następujący:

$$\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y + \Delta y)$$

$$- F(x, y) = \frac{F(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)}{\Delta x} . \Delta x$$

$$+ \frac{F(x,\ y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y} . \Delta y.$$

Gdy Δx i Δy nieskończenie maleją, różnica $\Delta F(x, y)$ przechodzi na różniczkę

$$dF(x, y) = \frac{dF(x, y)}{dx} \cdot dx + \frac{dF(x, y)}{dy} \cdot dy.$$

$\frac{dF(x, y)}{dx}$, $\frac{dF(x, y)}{dy}$ nazywają się *pochodnemi cząstkowemi* co do zmiennych x względnie y i oznaczają się symbolami

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x},\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \text{ lub krótko } \frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},$$

Mamy więc wzór

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

To twierdzenie można rozszerzyć na funkcyę o większej ilości zmiennych n. p. na $F(x, y, z...)$. Wtenczas

$$dF(x, y, z..) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \ldots$$

Ponieważ według XVIII

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) = \Delta F(x, y + \Delta y)$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \varepsilon_1 . \Delta x,$$

$$F(x, y + \Delta y) - F(x, y) = \Delta F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_2 . \Delta y,$$

gdzie ε_1, ε_2 są ilościami dążącemi do 0, gdy Δx, Δy nieskończenie maleją, przeto można napisać

$$\Delta F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

W ostatnim przykładzie mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x + 2y = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + 2y = \psi(x, y),$$

$F(2{\cdot}01, 3{\cdot}02) - F(2, 3{\cdot}02) = \Delta F(2\ 3{\cdot}02) = \varphi(2, 3) . 0{\cdot}01 + \varepsilon_1 . 0{\cdot}01,$
$F(2, 3{\cdot}02) - F(2, 3) = \Delta F(2, 3) = \psi(2, 3) . 0{\cdot}02 + \varepsilon_2 . 0{\cdot}02,$

Lecz $\Delta F(2, 3{\cdot}02) = 0{\cdot}1807$, $\Delta F(2, 3) = 0{\cdot}2004$, $\varphi(2, 3) = 18$, $\psi(2, 3) = 10$, zatem $0{\cdot}1807 = 0{\cdot}18 + \varepsilon_1 . 0{\cdot}01$, $0{\cdot}2004 = 0{\cdot}2 + \varepsilon_2 . 0{\cdot}02$, skąd wypada $\varepsilon_1 = 0{\cdot}07$, $\varepsilon_2 = 0{\cdot}02$. $\Delta F(2, 3) = \varphi(2, 3) . 0{\cdot}01 + \psi(2, 3) . 0{\cdot}02 + \varepsilon_1 . 0{\cdot}01 + \varepsilon_2\ 0{\cdot}02 = 0{\cdot}18 + 0{\cdot}20 + 0{\cdot}0007 + 0{\cdot}0004 = 0{\cdot}3811$ zgodnie z poprzedniem.

XXI.

Różniczka funkcyi uwikłanej.

Jeżeli zmienne x, y są w takiej od siebie zależności, że $F(x . y) = 0$, t. j., że funkcya $F(x, y)$ jest ilością stałą, natenczas różniczka funkcyi $dF(x,y) = 0$ i według XX wypada równanie

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

Z tego równania można obliczyć różniczkę funkcyi uwikłanej i stosunek różniczkowy

$$dy = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \cdot dx, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

N. p. $F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2ax + 2by, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2bx + 2cy,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2bx + 2cy}{2ax + 2by} = -\frac{bx + cy}{ax + by}, \quad dy = -\frac{bx + cy}{ax + by} dx.$$

XXII.

Znaczenie różnicy funkcyi.

Funkcye $f(x)$, $F(x,y)$ mają pewne wartości. Gdy ilości x, y weźmiemy z błędami Δx, Δy, natenczas wartości funkcyi staną się $f(x + \Delta x)$, $F(x + \Delta x, y + \Delta y)$ a błędy funkcyi będą $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x)$, $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x,y) = \Delta F(x,y)$. Lecz $\Delta f(x) = f'(x) \Delta x + \varepsilon \Delta x$, $\Delta F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$, zatem równań $\Delta f(x) = f'(x) \Delta x$ i $\Delta F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y$, można użyć do obliczenia błędu funkcyi. Wyrazy opuszczone $\varepsilon . \Delta x$, $\varepsilon_1 \Delta x$, $\varepsilon_2 . \Delta y$ nie mają znaczenia, bo się przyczyniają do błędu na dalszych miejscach dziesiętnych, na czem nam nie zależy, skoro wiemy, że popełniamy błąd na bliższem miejscu dziesiętnem.

Przykłady: 1) Bok sześcianu zmierzono na 5 m; jaki jest błąd przy obliczeniu objętości tego sześcianu, jeżeli pomiar długości boku jest dokładny α) do 0·01 m, β) do 0·001 m?

Objętość sześcianu $= x^3 = f(x)$, $f'(x) = 3x^2$, $\Delta f(x) = 3x^2 . \Delta x$.

Błąd wynosi α) $\Delta f(5) = f'(5) . 0{\cdot}01 = 75 . 0{\cdot}01 = 0{\cdot}75\ m^3$.
β) $\Delta f(5) = f'(5) . 0{\cdot}001 = 0{\cdot}075\ m^3$.

Błąd w zwykły sposób obliczony jest

$$\alpha)\ f(5{\cdot}01) - f(5) = 125{\cdot}75 - 125 = 0{\cdot}75\ m^3,$$

$$f(5 - 0{\cdot}01) - f(5) = (125 - 0{\cdot}75) - 125 = -0{\cdot}75\ m^3$$

z dokładnością do dwóch miejsc dziesiętnych.

$$\beta)\ f(5{\cdot}001) - f(5) = 125{\cdot}075 - 125 = 0{\cdot}075\ m^3$$

$$f(5 - 0{\cdot}001) - f(5) = (125 - 0{\cdot}075) - 125 = -0{\cdot}075\ m^3$$

z dokładnością do trzech miejsc dziesiętnych.

Widzimy tu zgodność z poprzedniem obliczeniem.

2) Jaki jest błąd przy obliczeniu $\cos x$, $\sin x$, dla kątów 30^0 i 60^0, jeżeli pomiar kąta jest dokładny do $0{\cdot}5^0$?

Ponieważ $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$, $\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$, mamy wzory do obliczenia błędów

$$\Delta \cos x = -\sin x . \Delta x, \quad \Delta \sin x = \cos x . \Delta x.$$

Podstawiając wartości za x, Δx i bacząc, że kątowi $0{\cdot}5^0$ odpowiada w kole o promieniu 1 łuk 0·00873, mamy

$$\Delta \cos 30^0 = -\sin 30^0 . 0{\cdot}5^0 = -0{\cdot}5 . 0{\cdot}00873 = -0{\cdot}0044,$$

$$\Delta \cos 60^0 = -\sin 60^0 . 0{\cdot}5^0 = -0{\cdot}866 . 0{\cdot}00873 = -0{\cdot}0076,$$

$$\Delta \sin 30^0 = \cos 30^0 . 0{\cdot}5^0 = 0{\cdot}866 . 0{\cdot}00873 = 0{\cdot}0076,$$

$$\Delta \sin 60^0 = \cos 60^0 . 0{\cdot}5^0 = 0{\cdot}5 . 0{\cdot}00873 = 0{\cdot}0044.$$

3) Obliczyć błąd kwadratu liczby 5·948...

Kwadrat liczby $= x^2 = f(x)$, $f'(x) = 2x$, $\Delta f(x) = 2x . \Delta x$.

W naszym przypadku $x = 5{\cdot}948$, $\Delta x = 0{\cdot}001$, zatem błąd

$$\Delta f(5{\cdot}948) = 11{\cdot}896 . 0{\cdot}001 = 0{\cdot}012.$$

Podobnie się oblicza błąd sześcianu tej samej liczby.

$$f(x) = x^2,\ f'(x) = 3x^2,\ \Delta f(x) = 3x^2.\ \Delta x,$$

$$\Delta f(5{\cdot}948) = 3.6^2.\ 0{\cdot}001 = 0{\cdot}11.$$

4) Obliczyć błąd pierwiastka kwadratowego liczby 4·756...

Pierwiastek liczby $= \sqrt{x} = f(x),\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},$

$$\Delta f(x) = \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}.$$

$$\Delta f(4{\cdot}756) = \frac{1}{2.\sqrt{4{\cdot}756}}.\ 0{\cdot}001 = \frac{0{\cdot}001}{2.2} = 0{\cdot}0002.$$

Podobnie się oblicza błąd pierwiastka sześciennego tej samej liczby.

$$f(x) = \sqrt[3]{x},\quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\quad \Delta f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

$$\Delta f(4{\cdot}756) = \frac{1}{3\sqrt[3]{4{\cdot}756^2}}.\ 0{\cdot}001 = \frac{0{\cdot}001}{3.2{\cdot}8} = \frac{0{\cdot}001}{8{\cdot}4} = 0{\cdot}0001.$$

5) Obliczyć błąd iloczynu liczb 6·345.., 1328..

Stosujemy wzór: $\Delta F(x, y) = \dfrac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \dfrac{\partial F}{\partial y} \Delta y.$

Mamy $F(x, y) = xy,\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = y,\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x.$

$$\Delta F(x, y) = y\,\Delta x + x\,\Delta y.$$

Lecz $x = 6{\cdot}345,\ y = 13{\cdot}28,\ \Delta x = 0{\cdot}001,\ \Delta y = 0{\cdot}01,$ zatem $\Delta F(6{\cdot}345,\ 13{\cdot}28) = 13{\cdot}28.0{\cdot}001 + 6{\cdot}345.0{\cdot}01$

$$= 0{\cdot}013 + 0{\cdot}063 = 0{\cdot}076.$$

Podobnie się oblicza błąd ilorazu liczb 6·345... 13·28...

$$F(x, y) = \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$\triangle F(x, y) = \frac{\triangle x}{y} - \frac{x \triangle y}{y^2}.$$

Biorąc pod uwagę przypadek najniekorzystniejszy, kiedy się błędy dodają, otrzymamy

$$\triangle F(x, y) = \frac{\triangle x}{y} + \frac{x \triangle y}{y^2} = \frac{y \triangle x + x \triangle y}{y^2} = \frac{0\cdot076}{13^2}$$

$$= \frac{0\cdot076}{169} = 0\cdot00045.$$

6) Przeciwprostokątnia trójkąta prostokątnego wynosi 320·14 *m*, jeden kąt 30^0, z jakim błędem obliczymy przyprostokątnię przeciwległą kątowi, jeżeli długość zmierzono z dokładnością 0·01 *m* a kąt z dokładnością $0\cdot5^0$?

Długość szukanej przyprostokątni jest $x \sin \alpha$, zatem

$$F(x, \alpha) = x \sin \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \sin \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = x \cos \alpha,$$

$$\triangle F(x, \alpha) = \sin \alpha . \triangle x + x \cos \alpha . \triangle \alpha.$$

Podstawiwszy $x = 320\cdot14\, m$, $\alpha = 30^0$, $\triangle x = 0\cdot01\, m$, $\triangle \alpha = 0\cdot5^0 = 0\cdot00873$, otrzymamy

$\triangle F\ (320\cdot14,\ 30) = 0\cdot5 .\ 0\cdot01 + 320\cdot14 .\ 0\cdot866 .\ 0\cdot00873 = 2\cdot4\ m.$

7) Bok rombu wynosi 50 *m*, kąt 60^0, z jakim błędem obliczymy powierzchnię rombu, jeżeli jest taka sama dokładność pomiaru, jak w poprzedzającym przykładzie?

Powierzchnia rombu jest $x^2 . \sin \alpha$, zatem

$$F(x, \alpha) = x^2 \sin \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2\, x \sin \alpha, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = x^2 \cos \alpha,$$

$$\triangle F(x, \alpha) = 2\, x \cdot \sin \alpha \ \triangle x + x^2 \cos \alpha \ \triangle \alpha.$$

$\triangle F\,(50,\ 60) = 2.50 .\ 0.866 .\ 0\cdot01 + 50^2 .\ 0\cdot5 .\ 0\cdot00873 = 11\cdot8\ m^2$.

8) Boki równoległe trapezu są 120 *m*, 80 *m*, bok nierównoległy 100 *m*, jeden kąt 60^0, z jakim błędem obliczymy powierzchnię, jeżeli jest taka dokładność pomiaru, jak w poprzedzającym przykładzie?

Wiadomości szkolne.

I.

a) Zmiany w gronie nauczycielskiem:

Przybyli:

1. **Konieczny Władysław,** zastępca nauczyciela w c. k. IV. gimnazyum w Krakowie, mianowany rzeczywistym nauczycielem w tutejszym zakładzie rozp. c. k. R. S. K. z 5. sierpnia 1909 l. 33297.
2. **Jakubowski Bolesław,** zastępca nauczyciela, mianowany rozp. c. k. R. S. K. z 10. października 1909 l. 34077.
3. **Tenczarowski Tadeusz,** zastępca nauczyciela, mianowany rozp. c. k. R. S. K. z 14. października 1909 l. 35473.

Ubyli:

1. **Chmiel Józef,** zastępca nauczyciela, uwolniony od pełnienia obowiązków rozp. c. k. R. S. K. z 15. lipca 1909 l. 31004.
2. **Jakubowski Bolesław,** zastępca nauczyciela, przeniesiony w tym samym charakterze do c. k. I szkoły realnej we Lwowie rozp. c. k. R. S. K. z 2. lutego 1910 l. 6624.

b) Grono nauczycielskie

z końcem roku szkolnego 1909/10.

Dyrektor:

Ralski Jan, dr. fil., VI rangi, delegat c. k. Rady szkolnej krajowej do wydziału szkoły przemysłowej uzupełniającej, uczył matematyki w kl. VII; tygodniowo godzin 5.

Nauczyciele :

1. **Drozd Hieronim,** profesor, od 18. października 1909 na urlopie.
2. **Fedorowicz Stanisław,** ksiądz, egz. zastępca nauczyciela, zawiadowca biblioteki ruskiej dla uczniów, uczył religii gr. kat. w kl. I — VII; tygodniowo godzin 7.
3. **Filimowski Stanisław,** profesor, zawiadowca biblioteki niemieckiej dla uczniów, uczył języka niemieckiego w kl. I, V — VII; tygodniowo godzin 16.
4. **Gartner Franciszek,** profesor, gospodarz kl. I, zawiadowca gabinetu historyi naturalnej, uczył matematyki w kl. I—III. historyi naturalnej w kl. I, II, V—VII; tygodniowo godzin 19.
5. **Gonet Michał,** profesor VIII. rangi, gospodarz kl. VII, zawiadowca zbioru geograficzno-historycznego, biblioteki nauczycielskiej i podręczników szkolnych dla ubogich uczniów, uczył historyi w kl. IV — VII, geografii w kl, IV, V; tygodniowo godzin 15.
6. **Jurkowski Błażej,** dr. fil., profesor, gospodarz kl. VI, uczył języka polskiego w kl. IV — VII ; tygodniowo godzin 14.
7. **Komęza Stanisław,** zastępca nauczyciela, gospodarz kl. II, zawiadowca biblioteki polskiej dla uczniów, uczył języka polskiego w kl. I—III, historyi w kl. I — III ; tygodniowo godzin 16.
8. **Konieczny Władysław,** rzeczywisty nauczyciel, gospodarz kl. IV, uczył języka niemieckiego w kl. II — IV; tygodniowo godzin 15.
9. **Litwin Walenty,** ksiądz, profesor, uczył religii rzym. kat. w kl. I—VII; tygodniowo godzin 14.
10. **Ostrowski Wiktor,** profesor, gospodarz kl. III, zawiadowca biblioteki francuskiej dla uczniów, uczył języka francuskiego w kl. III—VII; tygodniowo godzin 16.
11. **Otremba Gustaw,** profesor, zawiadowca gabinetu rysunków odręcznych, uczył rysunków odręcznych w kl. I. — VII; tygodniowo godzin 22.
12. **Rozmuski Tadeusz,** profesor, zawiadowca gabinetu chemicznego, uczył geografii w kl. I—III, chemii w kl. IV—VI, kierował pracownią chemiczną uczniów kl. V — VII ; tygodniowo godzin 17.

13. **Steczko Józef**, profesor, zawiadowca gabinetu fizycznego, uczył matematyki w kl. VI, fizyki w kl. III, IV, VI, VII; tygodniowo godzin 17.
14. **Tenczarowski Tadeusz**, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. V, zawiadowca gabinetu rysunków geometrycznych, uczył matematyki w kl. IV, V, geometryi w kl. II — VII, kaligrafii w kl. I; tygodniowo godzin 24.
15. **Wiśniowski Józef**, rzeczywisty nauczyciel, przydzielony do służby w c. k. gimnazyum IV. w Krakowie.

Nadto uczyli w 1. półroczu:

1. **Jakubowski Bolesław**, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. II, zawiadowca biblioteki polskiej dla uczniów, uczył języka polskiego w kl. I — III, historyi w kl. I — III, kaligrafii w kl. I; tygodniowo godzin 18.
2. **Tenczarowski Tadeusz**, zastępca nauczyciela, gospodarz kl. V., zawiadowca gabinetu rysunków geometrycznych, uczył matematyki w kl. IV, V, geometryi w kl. II — VII; tygodniowo godzin 22.

c) Zastępca nauczyciela gimnastyki:

Stanisław Wilk, egz., uczył gimnastyki w kl. I—VII; tygodniowo godzin 14.

d) Nauczyciel pomocniczy:

Seidenwerg Izydor, uczył religii mojżeszowej w kl. I — VII; tygodniowo godzin 7.

e) Nauczyciel przedmiotu względnie obowiązkowego:

Ks. **Fedorowicz Stanisław**, uczył języka ruskiego w dwóch oddziałach; tygodniowo godzin 4.

II.

Plan naukowy.

Na miejsce planu z roku 1900 wszedł w życie na podstawie rozp. c. k. R. S. K. z 20. lipca 1909 l. 37271 za zezwoleniem c. k. M. W. i O. z 6. lipca 1909 l. 24339 nowy plan naukowy z takiemi zmianami, które były niezbędne, aby przejście z jednego planu do drugiego odbyło się stopniowo bez uszczerbku dla nauki.

III.

Tematy do wypracowań piśmiennych dla klas wyższych.

Tematy polskie.

Klasa V. 1. Poranek jesienny. Opis. (dom.) 2. Mowa Nestora. (Według Iliady I. ks., szk.) 3. Stan oświaty w Polsce za Piastów. (dom.) 4. Jakiemu stanowi powinien się oddawać przedewszystkiem młody Polak? (Według „Żywota poczciwego człowieka“ Reja, szk.) 5. Modrzewski a Orzechowski jako pisarze polityczni. (Charakterystyka porównawcza) dom. 6. Ideał dworzaniną polskiego. (Według Ł. Górnickiego). szk. 7. Obrona Zbaraża. (Na podstawie „Ogniem i mieczem“ Sienkiewicza) dom. 8. Uczeń a rolnik. (Porównanie) dom. 9. Jakie wady obywateli gubią państwa? (Na podstawie „Odprawy posłów greckich“ Jana Kochanowskiego). szk. 10. Jakie zjawiska przyrody zwiastują nam schyłek zimy? (Opis). dom. 11. Znaczenie Jana Kochanowskiego w literaturze polskiej. szk. 12. Skrzetuski jako rycerz i obywatel. (Na podstawie „Ogniem i mieczem“ Sienkiewicza) dom. 13. Motywy swojskie w Sielankach Szymonowicza, (Na poostawie lektury szkolnej), szk.

---

*) Plan nauki dla galicyjskich szkół realnych do nabycia w Ekonomacie c. k. Namiestnictwa za cenę 20 hal.

Klasa VI. 1. Żołnierz polski w obozie i boju. (Na podstawie „Pamiętników“ Paska) dom. 2. Zasługi Konarskiego około szkolnictwa i literatury polskiej, szk. 3. Rozwój satyry w literaturze polsklej aż do Krasickiego włącznie, dom. 4. Znaczenie Krasickiego w literaturze polskiej, szk. 5. Jakie wady wytyka Naruszewicz społeczeństwu polskiemu w satyrze „Chudy literat“, dom. 6. Skrzetuski w „Ogniem i mieczem“ a Kmicic w „Potopie“ Sienkiewicza. (Charakterystyka porównawcza), szk. 7. Wpływ Francyi na oświatę i literaturę polską w epoce Stanisława Augusta, dom. 8. Alluzye polityczne w komedyi „Powrót posła“ Niemcewicza, szk. 9. Stopniowy rozwój i dojrzewanie pojęć politycznych w Polsce w ciągu XVIII. w. dom. 10. Stanowisko i znaczenie Woronicza w literaturze polskiej, szk. 11. Węzeł dramatyczny w „Barbarze Radziwiłłównie“ A. Felińskiego, dom. 12. Jakie stanowisko zajmuje Fr. Morawski w czasie walki klasyków z romantykami? szk. 13. Czem różni się „Wiesław“ Brodzińskiego od sielanek jego poprzedników? dom.

Klasa VII. 1. Wykazać na przykładach z historyi lub życia prawdę zawartą w przysłowiu: Kowal fortuny nie kuje, sobie ją, kto chce, zbuduje. (A. M. Fredro) dom. 2. Gustaw a Konrad w „Dziadach“ Mickiewicza szk. 3. Pierwiastek liryczny w „Panu Tadeuszu“ A. Mickiewicza dom. 4. Cześnik w „Zemście“ Fredry (Charakterystyka) szk. 5. Znamienne cechy bohaterów bajronicznych w „Maryi“ Malczewskiego i „Janie Bieleckim“ Słowackiego, dom. 6. Jacek Soplita w „Panu Tadeuszu“ a Kmicic w „Potopie“ Sienkiewicza (Porównanie) szk. 7. Idea „Kordyana“ Słowackiego a „Konrada Wallenroda“ Mickiewicza, dom. 8. Rozwinąć i uzasadnić myśl zawartą w przysłowiu: „Dobrym szkodzi, kto złym odpuszcza“ (Al. Maks Fredro) dom. 9. Nick w „Maryi Stuart“ Słowackiego (Charakterystyka) szkol. 10. Elsinoe w „Irydionie“ Krasińskiego. (Charakterystyka) dom. 11 Tragiczność Henryka w „Nieboskiej komedyi“ Krasińskiego. (Na podstawie lektury domowej) szk.

Tematy niemieckie.

Klasa V. 1. Kurzer Inhalt und Sinn des Märchens von Andersen „Des Kaisers neue Kleider“ dom. 2. Tellsage (Nach der Schullektüre) szk. 3. Die edle Tat des Grafen von Habsburg (Nach Schillers Gedicht „Der Graf von Habsburg“) dom. 4.

Theodor Körners Leben und Tod. (Auf Grund der Schullektüre) szk. 5. Möros auf seinem Rückwege nach Syrakus. (Nach Schillers Gedicht „Die Bürgschaft“) dom. „. Die Sage von Ödipus szk. 7, Das Reisen sonst und jetzt dom. 8. Schilderung der Theatervorstellung im Schillerschen Gedichte „Die Kraniche des Ibykus“ dom. 9. Die Sage von Tantalos szk. 10. Inhalt und Sinn des Märchens von R. Baumbach „Das Wasser der Jugend“ dom. 11. Goethes Jugend szk. 12. Meine diesjährigen Ostern. (In Briefform) dom. 13. Gedankengang in Geibels Gedichte „Aus dem Walde“ szk. 14. Inhalt der Ballade von Schiller „Der Taucher“ dom.

Klasa VI. 1. Wie habe ich meine Ferien zugebracht? (In Briefform) dom. 2. Gang der Handlung im ersten Aufzuge von Goethes „Egmont“ szk. 3. Hochmut kommt vor dem Fall (Nach Uhlands Ballade „Das Glück von Edenhall“) dom. 4. Grundgedanke der Schillerschen Ballade „Der Kampf mit dem Drachen“ szk. 5. Die Freuden des Winters dom. 6. Die Verkehrsmittel der Neuzent dom. 7. Hüons Abenteuer in Bagdad (Nach Wielands „Oberon“) szk. 8. Die Macht des Gesanges in Uhlands Ballade „Bertran de Born“ dom. 9. Die Faustsage szk. 10. Die Handlung im V. Akte von Goethes „Egmont“ dom.

Klasa VII. 1. Die Entstehung des Nibelungenliedes szk. 2. Inhalt und Sinn des Gedichtes von Schiller „Das verschleierte Bild zu Sais“ dom. 3. Die antiken Motive in Schillers Drama „Die Braut von Messina“ szk. 4. Lessing als Reformator der deutschen Litteratur dom. 5. Inhalt und Grundgedanke des Goetheschen Gedichtes „Der Zauberlehrling“ szk. 6. Über den Zweck der Studien dom. 7. „Der Schatzgräber von Goethe (Inhalt und Grundgedanke) szk. 8. Der Höhepunkt der Handlung in Schillers Trauerspiel „Maria Stuart“ dom. 9. Inhaltsangabe des Gedichtes von H. Heine „Balsazer“ szk.

Tematy francuskie.

Klasa V. 1. Lettre sur les divertissements en hiver. dom. 2. Sujet de la comédie: „La joie fait peur“. szk. 3. Les administrations et les services publics à Jaroslaw. dom. 4. Description du tableau mural „La grande ville“. szk. 5. Le héros de la nouvelle: „Comment on devient beau“. dom. 6. Traduction du polonais. szk. 7. Demande d'admission à l'internat des élèves pauvres. dom. 8. Les fêtes catholiques de l'année. szk.

Klasa VI. 1. Les grands écrivains français au 18 siècle. dom. 2. Les bâtiments publics à Paris d'après le tableau mural „Paris". szk. 3. Lettre à un jeune ami sur l'art d'apprendre la leçon. dom. 4. Mazépa — d'après la lecture de „Charles XII". szk. 5. Une excursion en bicyclette avec un ami — en forme de lettre. dom. 6. Traduction du polonais. szk. 7. Description de la gare lors du départ des trains. dom. 8. Les emplettes de l'élève — en forme d'un dialogue avec le marchand. szk.

Klasa VII. 1. Les pouvoirs législatifs en Autriche. dom. 2. Les fables du moyen âge et Chantecler. szk. 3. La ligue du secours industriel en Galicie. dom. 4. L'alcool et le tabac au point de vue de l'hygiène. szk. 5. La bataille de Grunwald. dom. 6. Application pratique de la trigonométrie. szk.

IV.

Egzamin dojrzałości.

Piśmienny egzamin dojrzałości odbył się w dniach od 23. do 26. maja.

Tematy do piśmiennego egzaminu dojrzałości były następujące:

Z języka polskiego:

1. O ile regulacya rzek przyczynia się do podniesienia rolnictwa i przemysłu krajowego?
2. Porównać czasy panowania Stanisława Augusta z czasami Księstwa Warszawskiego w życiu politycznem i literaturze.
3. Lud wiejski w „Weselu" Wyspiańskiego (charakterystyka). (Uw. „Wesele" czytano w szkole).

Z języka niemieckiego:

Jerzy Stephenson.

Jerzy Stephenson urodził się 9. stycznia 1781 jako syn ubogich, lecz uczciwych i pracowitych rodziców. Ojciec jego był palaczem przy maszynie parowej w kopalni węgla obok Newcastle i zarabiał zaledwie na skromne utrzymanie rodziny. Nie mogąc uczęszczać do szkoły musiał mały Jerzy nosić ojcu jedzenie a w domu pilnować młodsze rodzeństwo. Największem pragnieniem jego było, by mógł podobnie jak jego ojciec pracować przy maszynie parowej. Lecz dopiero w 14 roku życia został pomocnikiem ojca. Wkrótce był tak obeznany z maszyną, że znał dokładnie konstrukcyę jej wewnątrz i zewnątrz. Przytem począł z gliny modelować różne maszyny, a mianowicie takie, które mu opisano. Gdy się dowiedział, że te wszystkie cudowne maszyny Jamesa Watta i Boultona opisane są w książkach, głęboko był przygnębiony, że nie umie czytać. Natychmiast zaczął uczęszczać do sąsiedniej szkoły wieczornej i z żelazną wytrwałością poświęcał każdą chwilę wolną nauce. Pracodawcy cenili w nim nadzwyczajną zdolność i niezmordowaną pilność a mając 20 lat zasłynął on już w całej okolicy jako młody wynalazca wprowadzając niektóre ulepszenia do maszyn. W roku 1813 badając maszyny, przeznaczone do przewozu węgli, wypracował plan „maszyny do podróży“ — tak bowiem nazwał on wówczas maszynę zmieniającą miejsce. Lord Ravensworth, właściciel kopalni węgli, zbadawszy plan Stephensona, polecił mu na swój koszt zbudować lokomotywę. Wielu nazywało go dlatego szaleńcem, że wyrzucą pieniądze na taki niepewny cel. Stephenson jednak szczęśliwie wybudował swoją lokomotywę, zwaną Mylord, która mogła uciągnąć 80 ton ciężaru z szybkością 4 mil angielskich na godzinę. To była pierwsza próba, przyczem genialny Stephenson zaraz zauważył, jakie ma poczynić zmiany i udoskonalenia w swojej maszynie, aby jej dać większą siłę i szybkość. Wkrótce też zbudował drugą lokomotywą, która już zawierała podstawę do wszystkiego, czego później dokonano na polu budowy maszyn. W roku 1825 założył Stephenson fabrykę maszyn w Newcastle, a już w następnym roku zbudowano według jego wskazówek pierwszą linię kolei żelaznej dla ruchu osobowego między miastami Stockton i Darlington. Również budowa kolei z Liverpolu do Manchester przeprowadzoną została pod kierunkiem Stephensona w r. 1829, a otwarcie tej linii było niejako narodową uroczystością i zupełnym tryumfem zasług Stephensona. Powszechnie podziwiano szybkość maszyny, dzieło jego syna Roberta, robiącej 24 mile angielskie na godzinę. Pokonanie ogromnych przeszkód terenu przy budowie tej linii rozstrzygnęło o powodzeniu kolei żelaznej nietylko w Anglii, lecz także we wszystkich krajach. Mimo zaszczytów i majątku pozostał Stephenson do końca życia skromnym i niestrudzenie czynnym człowiekiem. Umarł 12. sierpnia 1848. (Według A. W. Grubego. Wypisy niemieckie na kl. V.).

Z języka francuskiego:

Notions de gestion commerciale et industrielle.

Il y a dans toute exploitation industrielle et commerciale, deux éléments a considérer: la partie technique et la partie administrative; chacune d'elles exige des aptitudes particulieres. Certaines personnes possédent toutes les qualités du fabricant, de l'acheteur ou du vendeur, mais le sens administratif leur fait completement défaut: elles réussissent rarement. Quand les circonstances nous élevent a la dignité de chef de maison, sachons assez nous connaitre pour décider si nous pouvons, seul, affronter la lutte. Dans le cas contraire, n'hésitons pas a nous entourer de collaborateurs possédant les qualités qui nous font defaut.

D'abord, il faut déterminer avec soin le chiffre et la composition du capital, estimer sans aucune complaisance les choses qui representent l'apport initial et suivre minutieusement les fluctuations de leur valeur. Ou ne fera etat des plus values qu' apres realisation; les moins-values, au contraire, seront contrebalancées par des réserves. Le montant du capital sera axactement proportionné au chiffre d'affaires. Excessif, il devient encombrant et ne peut etre convenablement rémunéré. Insuffisant, c'est la gene; il faut alors recourir au credit, element delicat et instable. Si l'on emprunte a autrui le capital primitif, on stipulera un long delai de remboursement afin de ne pas etre expose a une reclamation imprevue qui pourrait faire crouler toute l'affaire.

Le credit revet deux formes principales. Tantôt les fournisseurs nous confient des marchandises payables a long terme; tantôt un banquier nous escompte le papier fourni sur les acheteurs en contre-valeur de nos ventes, et nous fait parfois, en outre, des avances pures et simples en espèces.

Cette ressource est tres precieuse; beaucoup de commerçants et d'industriels lui doivent leur fortune, car ils peuvent ainsi renouveler trois et quatre fois dans le meme espace de temps les operations qu'ils n'auraient faites qu' une fois avec leurs seuls moyens et, par suite, quadrupler leur benefice.

Mais ses inconvenients sont nombreux. La faillite possible du creancier, les changement de ses dispositions a notre egard. parfois sans cause apparente, nous exposent a de graves dangers. Rien n'est plus fragile que le credit; rien n'exige plus de circonspection de la part d'un commercant. Un train de maison un peu étendu, des dépenses personnelles excessives d'apparence: il n'en faut souvent pas d'avantage pour entamer la réputation d'une personne et nuire a son crédit. (Z książki: Gabriel Faure „Eléments de commerce et de comptabilité" str. 511—513).

Z geometryi wykreślnej:

1. Dane dwie płaszczyzny *P* i *E* i prosta *l*. Znaleźć na prostej *l* punkty równo oddalone od płaszczyzn *P* i *E*.
2. Dany ostrosłup czworościenny, umiarowy i prosty i prosta *l*. Znaleźć cień tej prostej na ostrosłup.
3. Wykreślić kulę styczną do danej kuli w punkcie tejże kuli i styczną do płaszczyzny poziomej rzutów.

Egzamin ustny odbył się w dniach od 13. do 15. czerwca pod przewodnictwem p. Artura Passendorfera, dyrektora c. k. Szkoły realnej w Tarnopolu, jako delegata c. k. Rady szkolnej krajowej.

Do egzaminu dojrzałości zgłosiło się 21 uczniów publicznych. Z tych otrzymało

świadectwo dojrzałości z odznaczeniem .	3
świadectwo dojrzałości	18
Razem	21

Wykaz abituryentów, którzy złożyli egzamin dojrzałości w terminie letnim r. szk. 1909/10.

L. p.	Imię i nazwisko	Rok urodzenia	Miejsce urodzenia	Religia	uczęszczał do szkoły realnej lat	Uznany za	Przyszły zawód
1	Aptilion Abraham	1890	Jarosław w Galicyi	mojż.	7	dojrzałego	medycyna
2	Dżułyński Roman	1892	Bolechów „	gr. kat.	5	„	akad. górn.
3	Freifeld Chaim	1888	Pawłosiów „	mojż.	9	„	technika
4	Friedman Józef	1882	Okonin „	„	8	„	akad. górn.
5	Gisges Wincenty	1890	Tarnawa w Król. pol.	rz. kat.	3	dojrz. z odzn.	technika
6	Gräber Chaim	1890	Jarosław w Galicyi	mojż.	9	dojrzałego	akad. handl.
7	Herman Julian	1893	„ „	rz. kat.	6	„	technika
8	Herman Władysław	1892	„ „	rz. kat.	8	„	„
9	Holzberger Henryk	1893	„ „	mojż.	7	„	akad. górn.
10	Krieger Natan	1892	„ „	„	8	„	technika
11	Lind Bernard	1890	Lwów „	„	7	„	akad eksport.
12	Markowski Tadeusz	1890	Kaszyce „	rz. kat.	8	„	akad. wojsk.
13	Noskiewicz Tadeusz	1892	Sanok „	gr. kat.	8	„	technika
14	Nowakowski Józef	1891	Jarosław „	rz. kat.	3	„	marynarka woj.
15	Salpeter Markus	1892	„ „	mojż.	8	„	technika
16	Schimel Schłojme	1888	Dubiecko „	„	9	„	prawo
17	Sneeweisz Izak	1893	Jarosław „	„	6	dojrz. z ozdz.	kolej
18	Schwarz Henryk	1890	„ „	rz. kat.	5	dojrzałego	technika
19	Sikora Paweł	1889	Ołomuniec na Moraw.	ewang.	9	„	kolej
20	Stybel Jan	1891	Jawornik Polski w G.	rz. kat.	7	„	kolej
21	Weisstein Ignacy	1893	Wozneseńsku w Ros.	mojż.	7	dojrz. z odzn.	technika

V.

Zbiory naukowe.

1. Biblioteka nauczycielska.

Zakupiono:

Smolik-Heller. Elemente der darstellenden Geometrie. — Opieński. Chopin. — Szematyzm Galicyi. — Kopia. Spis nauczycieli szkół średnich w Galicyi. — Chanderys. Kompletny skorowidz miejscowości w Galicyi i Bukowinie. — Jahrbuch des höheren Unterrichtswesens in Oesterreich. — 108 fotografii z 4 stereoskopami.

Prenumerowano czasopisma:

Biblioteka warszawska. — Kosmos. — Kwartalnik historyczny. — Pamiętnik literacki. — Poradnik językowy. — Przegląd historyczny. — Ruch. — Wszechświat. — Geographische Zeitschrift. — Vierteljahrschrift für körperliche Erziehung. — Zeitschrift für d. Realschulwesen. — Zeitschrift für physik. u. chem. Unterricht. — Zeitschrift für d. Zeichen- u. Kunstunterricht. — Verordnungsblatt für d. Dienstbericht des k. k. Minist. f. K. u. U.

W darze otrzymano wydawnictwa c. k. Akademii Umiejętności w Krakowie, c. k. Rady szk. kraj. i Wydziału krajowego.

Biblioteka liczy 1070 pozycyi.

2. Biblioteka uczniów.

Zakupiono:

German i Petelenz. Ćwiczenia niemieckie. — Węckowski. Książka do nauki języka francuskiego. — Ks. Sieniatycki. Ogólna katolicka dogmatyka. — Tarnowski-Bobin. Wypisy polskie. — Bolland. Zarys chemii organicznej. — Amborski. Wypisy francuskie. — Klus. Słownik polsko-niemiecki. Encyklopedya Macierzy Polskiej.

Otrzymano w darze: Misye katolickie za r. 1909.

Stan biblioteki wynosi:

książek	polskich	pozycyi	644
„	niemieckich	„	367
„	ruskich	„	88
„	francuskich	„	13
podręczników szkolnych			145

3. Gabinet fizykalny.

Zakupiono:
Chronoskop. — Dyament do rznięcia szkła.
Stan gabinetu:

I. Mechąnika ciał stałych	pozycyi	32
II. „ cieczy	„	22
III. „ gazów	„	22
IV. Nauka o głosie	„	21
V. „ „ świetle	„	65
VI. „ „ cieple	„	30
VII. „ „ etryczności	„	134
VIII. Astronomia	„	6
IX. Narzędzia i przybory	„	35

4. Gabinet historyi naturalnej.

Zakupiono:
Przeobrażenie mniszki.
Stan gabinetu:

a) z działu zoologii i anatomii:

Zwierząt wypchanych okazów 332

w tem dar Wielm. Pana Edwarda Micewskiego z Tuczemp w ilości 308 okazów.

Preparatów suchych 18

Preparatów w formalinie i spirytusie 77

w tem zbiór ryb krajowych zebranych staraniem zawiadowcy gabinetu.

Modeli zoologicznych 12

Szkieletów 5

Tablic ściennych 161

Pudełka z owadami 4

b) z działu botaniki:

Modeli botanicznych 33

Tablic ściennych 161

Zielnik z 300 roślin 1

c) z działu mineralogii i geologii:

Zbiór 240 minerałów 1

„ 150 skał 1

„ 100 skamielin 1

Modeli i przyrządów pomocn.	120
Tablic ściennych	18
Mikroskop	1
Preparatów mikroskopowych	93
Siekiera kamienna	1

5. Gabinet chemii.

Zakupiono:

Podstawki na eprawetki. — Młotek. — Obcęgi.

Stan gabinetu:

Przyrządów	pozycyi	27
Utensyliów drewnianych . . .	„	12
„ metalowych	„	36
„ porcelanowych . . .	„	8
„ szklanych	„	33
„ innych (regow. asbest i t. p.) .	„	7

6. Gabinet geometryi.

Zakupiono:

Cyrkiel. — Dwie linie 1·5 m. długie, drewniane.

Przybory do rysowania sztuk	42
Modele z wzorami tomów	88
Dzieła z wzorami tomów	6

7. Gabinet rysunków odręcznych.

Zakupiono:

8 modeli owoców, — 2 modele naczyń. — Hełm żandarmski. Szal japoński. — Dudek. -- 3 motyle. — 132 reprodukcyi obrazów. — Z sławnych miejsc sztuki: Kairo, Kraków, Paryż, Wenecya. — Z monografii mistrzów : Millet i Rousseau. — Rama zmienna. —

Stan gabinetu:

Modeli do nauki perspektywy . . .	4
„ drewnianych	39
„ gipsowych, glinianych	232
„ szklanych	21
„ metalowych	30
Rozmaitych przedmiotów z natury . . .	102
Dzieł z wzorami, książek	45

8. Zbiór geograficzno-historyczny.

Zakupiono:

9 obrazów typowych ze wschodniej Europy. — Gerasch. 3 obrazy geograficzne.

Stan zbioru:

Map zwykłych	65
„ reliefowych	2
Globusów	2
Obrazów geograficznych, etnograficznych . .	93
„ historycznych	150
Atlasy	2
Model terminologiczny	1
Obrazy Hirta do geografii i etnografii tomów .	5
Obrazów do stereoskopu	22

9. Zbiór środków do nauki śpiewu.

Stan zbioru:

Fisharmonia	1
Śpiewników	16
Mszy kościelnych	8

VI.

Kronika zakładu.

Rok szkolny rozpoczął się dnia 3. września uroczystem nabożeństwem.

Dnia 9. września i 19. listopada Zakład brał udział w uroczystem nabożeństwie za spokój duszy ś. p. Cesarzowej Elżbiety a 27. czerwca za spokój duszy ś. p. Cesarza Ferdynanda I.

Dnia 4. października obchodził Zakład Imieniny Najjaśniejszego Pana uroczystem nabożeństwem.

Dnia 27. października obchodził Zakład uroczystość Patrona szkolnego św. Jana Kantego.

Dnia 11. kwietnia hospitował naukę religii rz. kat. komisarz biskupi Przewielebny ks. Feliks Świerzyński Dziekan i Proboszcz w Grodzisku.

*W ciągu roku uczniowie wyznania katolickiego przystę*powali trzykrotnie do spowiedzi i komunii św.; przed spowiedzią wielkanocną odprawili rekolekcye wspólne pod przewodnictwem x. x. katechetów obu obrządków.

Dnia 30. stycznia zakończono pierwsze półrocze a dnia 30. czerwca rok szkolny.

VII.

Ważniejsze rozporządzenia władz szkolnych.

C. k. Rada szkolna krajowa rozp. z 20. lipca 1909 l. 37271 wprowadza nowy plan nauki i rozkład godzin dla szkół realnych w Galicyi z początkiem roku szkolnego 1909/10.

C. k. Rada szk. kr. rozp. z 4. marca 1910 l. 13213 ustanawia liczbę wypracowań piśmiennych w języku wykładowym w szkołach realnych.

C. k. Rada szk. kr. rozp. z 20. kwietnia 1910 l. 23719 przypomina zakaz wydany uczniom szkół średnich co do kwestowania, sprzedaży kokardek, dziennikow i t. p.

C. k. Rada szk. kr. rozp. z 9. maja 1910 l. 26725 podaje do wiadomości rozp. c. k. Ministerstwa W. i O. z 18. kwietnia 1910 l. 16500 normujące ferye w szkołach średnich.

C. k. Ministerstwo W. i O. rozp. z 10. kwietnia 1910 l. 1112 podaje do wiadomości ułatwienia przy przejściu wychowanków wojskowych do cywilnych szkół średnich.

VIII.

Ćwiczenia fizyczne młodzieży.

Tegoroczna pogoda sprzyjała urządzaniu wycieczek i zabaw na wolnem powietrzu z uczniami. To też żaden rok szkolny nie obfitował w taką ilość wycieczek i zabaw szkolnych jak tegoroczny. Nauczyciele: Gartner, Gonet, Komęza, Ostrowski, Tenczarowski chętnie urządzali wycieczki z uczniami czyto piesze, czy na rowerach. O ile było możliwem, wycieczki te połączone były z różnemi zabawami i grami.

Nauczyciel gimnastyki w czasie pogodnym w godzinach przeznaczonych na naukę gimnąstyki urządzał z odpowiednią klasą zabawy i gry w ogrodzie „Sokoła“. Wskutek tego kl. od I do VI miały po 14, kl. VII 9 zabaw. Wszyscy uczniowie uczęszczający na gimnastykę brali wtenczas obowiązkowo udział w zabawie, mianowicie z kl. I, 28; II, 28; III, 20; IV, 25; V, 22; VI, 22; VII, 24 uczniów. Ogółem było 93 zabaw.

Przerwy na pauzach spędzali uczniowie na podwórzu szkolnem na zabawach wolnych lub z przyrządami pod kierownictwem profesora Gartnera według programu przezeń ułożonego. W dniach 31. października, 1. i 2. listopada jako wolnych od nauki szkolnej, uczniowie klas VI i VII w liczbie 39 zrobili wycieczkę do Krakowa i Wieliczki pod kierownictwem prof. Gartnera. Nadto pod przewodnictwem tegoż profesora uczniowie klas I i II w godzinach popołudniowych pracowali około ogródka botanicznego urządzonego w celach szkolnych w parku miejskim przez Świet. Magistrat miasta Jarosławia.

Dnia 26. czerwca uczniowie w liczbie 60 pod kierownictwem nauczyciela gimnastyki Wilka brali udział w biegu rozstawnym pomiędzy Lwowem a Krakowem urządzonym przez Towarzystwo Zabaw ruchowych we Lwowie.

Obraz wycieczek przedstawia następująca tabelka :

L.	Wycieczka	do	ilość uczniów z klas	Prowadzący nauczyciel
1	piesza	Kidałowic	70, I, II, V	Gartner
2	„	„	45, I, II, V	„
3	„	Roźwienicy	80, I, II, IV–VI	„
4	„	Pawłosiowa	25, I, II	„
5	„	Starego Sanu	15, I, II	„
6	„	Cieszacina W.	55, I, II, V	„
7	„	wądołów	15, V	„
8	na rowerach	Olchowej	10 z różnych kl.	Gonet
9	„	Radymna	12 „ „	„
10	„	Woli Ryszkowej	10 „ „	Komęza
11	„	Olchowej	6, VII	Tenczarowski
12	„	„	10, z różnych kl.	Gonet, Ostrowski
13	„	Zarzecza	15 „ „	Gonet, Komęza, Ostrowski, Tenczarowski

IX.

Zajęcia uczniów poza nauką szkolną.

Poza nauką szkolną uczniowie brali udział w Czytelni uczniów, pracowni mechanicznej i introligatorni.

Czytelnią uczniów kierował prof. Ostrowski, pracownią mechaniczną prof. Ks. Litwin, introligatornią prof. Gartner.

Czytelnia uczniów otwarta była w zimie dwa razy tygodniowo, w środę i sobotę od godziny 5. do 7., w lecie zaś tylko w sobotę. Sprawami czytelni kierował wydział złożony z sześciu uczniów klas najwyższych z profesorem Ostrowskim na czele.

Liczba członków wynosiła 61.

Urządzono 22 zebrań, podczas których wygłoszono następujące referaty:

1) O wychowaniu narodowem.
2) Postacie ludowe w beletrystyce.
3) Polska a chwila obecna.
4) O zaćmieniach słońca i księżyca. (Z demonstracyami).
5) Życie i czyny T. Kościuszki.
6) Dobry ton.
7) Młodość Mickiewicza.
8) Jak żyć, aby być zdrowym.
9) „Quo Vadis" Sienkiewicza.
10) O powstaniu listopadowem.
11) O powstaniu styczniowem.
12) O mowie polskiej.

Prócz tego w czasie zebrań uczniowie wygłaszali celniejsze utwory poetów polskich lub produkowała się orkiestra smyczkowa i mandolinistów. Czytano w czasie zebrań lub wypożyczano następujące czasopisma:

1) Tygodnik Illustrowany.
2) Znicz.
3) Łan młodzieży.
4) Nasz Kraj.
5) Śmigus.

W pracowni mechanicznej pracowało w środę i sobotę po południu ogółem 21 uczniów a mianowicie: z kl. I 5, II 5, III 4, IV 4, VI 3.

Uczniowie wykonywali przedmioty następujące:

a) w zakresie stolarstwa i tokarstwa: półki na książki, stołki, ramy, pudełka na farby, sanki, łódkę, młotki drewniane, stoliki pod kwiaty, pulpity pod nuty, oszczepy.

b) w zakresie ślusarstwa: toczono groty do oszczepów, poszczególne części składowe do rowerów, oraz robiono ostrza do scyzoryków.

Jeden uczeń pracuje nad skonstruowaniem aparatu fotograficznego, jeden robi cewkę indukcyjną. Zrobiono kilka modeli do geometryi wykreślnej z drutu mosiężnego i blachy, sześcian z drzewa składany z części dla okazania dwumianu do sześcianu i model teodolitu.

Nadto wykonywali uczniowie różne naprawy dla siebie jak rowerów, sanek, oszczepów, scyzoryków, łyżew, nożów, klatki.

Do introligatorni uczęszczali uczniowie w czasie wolnym od nauki szkolnej dwa razy tygodniowo, t. j. w poniedziałki i czwartki, pracując od godziny 3 — 7 wieczorem. Wszystkich uczniów uczęszczało 25 z kl. II — V, przeważnie jednak z klasy II i III. Przeciętnie pracowało po 11 uczniów. Oprawiali książki szkolne własne i zakładowe, nadto atlasy, fotografie, robili pudełka i inne rzeczy. Równocześnie odbywały się ćwiczenia zootomiczne. Uczniowie robili preparaty i wypychali okazy zoologiczne.

W celu zachęcenia uczniów do oszczędności założono staraniem prof. Franciszka Gartnera szkolną Kasę oszczędności, która istnieje drugi rok pod jego zarządem i pomyślnie się rozwija. Z ogólnej liczby 180 uczniów składało do Kasy 85. Najniższa wkładka wynosiła 2 h. Niektórzy uczniowie uskładali w ten sposób dość znaczne kwoty dochodzące niekiedy do kilkunastu koron. Pieniądze składane umieszcza się na książeczce Kasy oszczędności miasta Jarosławia p. t. „Uczniowie Szkoły realnej" dwa razy na miesiąc t. j. 14. i 30. każdego miesiąca.

Ogólna kwota złożona tego roku przekroczyła sumę 240 kor,

X.

Pomoc dla ubogich uczniów.

Dochód.	K. h.
Pozostałość kasowa z r. s. 1908/9 . . .	119·71
Dar Świet. Rady miasta Jarosławia . . .	100·—
„ „ Wydz. powiat. w Jarosławiu . .	50·—
„ Szan. Gminy wyzn. izrael. w Jarosławiu . .	35·—
„ Profesorów egzaminujących	6·40
Od prof. Gartnera rabat od zeszytów . . .	36·—
Datki przy wpisach	110·80
„ profesorów i uczniów po egzortach rz. kat. .	26·36
Razem	484·27

Rozchód.	
Za ubrania dla uczniów	85·—
„ lekarstwa	67·20
„ książki i oprawę	187·38
„ przybory rysunkowe	7·79
Razem	347·37

Bilans.

Dochód . . .	484·27 K.
Rozchód .	347·37 „
Pozostałość .	136·90 K.

t. j. Pozostałość wynosi sto trzydzieści sześć koron 90 h. Nadto na rzecz ubogich uczniów znajduje się książeczka jarosławskiej Kasy Oszczędności Nr. 4741 z wkładką 147 K.

Dyrekcya w imieniu ubogiej młodzieży tutejszego Zakładu składa na tem miejscu wszystkim Ofiarodawcom i Dobroczyńcom najserdeczniejsze podziękowanie.

XI.

Statystyka.

	KLASA							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	Razem
1. Liczba uczniów.								
Z końcem r. s. 1908/9	34	27	27	33^{1}	26	28	20	195^{1}
Na początku r. s. 1909/10	33	36	20	30	25	32	24	200
W ciągu roku szkolnego wstąpiło	—	—	1	—	—	—	—	1
W ogóle przyjęto	33	36	21	30	25	32	24	201
z innych zakładów z promocyą	30	4	1	1	1	4	—	41
» » repetentów	—	—	—	—	—	2	—	2
z tutejszego zakładu z promocyą	—	28	18	24	21	22	23	136
» » repetentów	3	4	2	5	3	4	1	22
W ciągu roku szkolnego wystąpiło	3	8	—	3	2	4	—	20
Liczba uczniów z końcem r. s. 1909/10	30	28	21	27	23	28	24	181
publicznych	30	28	21	27	23	27	24	180
prywatnych	—	—	—	—	—	1	—	1
2. Miejsce urodzenia.								
Miasto Jarosław	10	12	9	9	12	11	12	75
Powiaty okoliczne (Jarosław, Cieszanów, Przeworsk)	9	4	2	12	2	—	2	31
Galicya z W. Ks. Krak.	10	12	10	6	8	16^{1}	7	69^{1}
Austrya dolna	—	—	—	—	1	—	—	1
Morawy	—	—	—	—	—	—	1	1
Węgry	1	—	—	—	—	—	—	1
Rosya	—	—	—	—	—	—	2	2
Razem	30	28	21	27	23	27^{1}	24	180^{1}
3. Język ojczysty.								
Polski	26	23	19	26	21	25^{1}	23	163^{1}
Ruski	4	5	1	1	2	2	1	16
Niemiecki	—	—	1	—	—	—	—	1
Razem	30	28	21	27	23	27^{1}	24	180^{1}
4. Wyznanie religijne.								
Rzymsko-katolickie	22	16	10	18	10	14^{1}	9	99^{1}
Grecko-katolickie	4	5	3	1	2	3	2	20
Ewangielickie	—	—	1	1	1	1	1	5
Mojżeszowe	4	7	7	7	10	9	12	56
Razem	30	28	21	27	23	27^{1}	24	180^{1}
5. Wiek uczniów.								
Urodzonych w r. 1899	3	—	—	—	—	—	—	3
» 1898	8	2	—	—	—	—	—	10
» 1897	12	8	3	—	—	—	—	23
» 1896	4	9	4	3	—	—	—	20
» 1895	3	8	4	5	3	—	—	23
» 1894	—	1	7	8	2	2	—	20
» 1893	—	—	3	4	8	4	4	23
» 1892	—	—	—	7	5	8	9	29
» 1891	—	—	—	—	5	5	5	15
» 1890	—	—	—	—	—	7	4	11
» 1889	—	—	—	—	—	1^{1}	—	1^{1}
» 1888	—	—	—	—	—	—	2	2
Razem	30	28	21	27	23	27^{1}	24	180^{1}

	KLASA							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	Razem
6. Według miejsca pobytu rodziców.								
Miejscowych	20	21	14	19	16	16^1	17	123^1
Zamiejscowych	19	7	7	8	7	11	7	57
Razem .	30	28	21	27	23	27^1	24	180^1
7. Klasyfikacya.								
a) Z końcem roku szk. 1909/10								
Chlubnie uzdolnionych . . .	—	4	—	—	1	—	2	7
Uzdolnionych	14	14	11	14	13	17	19	102
Nieuzdolnionych	5	7	3	5	3	5^1	1	29^1
Do egz. popr. przypuszczono .	11	3	7	8	6	5	2	42
Razem .	30	28	21	27	23	27^1	24	180^1
b) Uzupełnienie klasyfikacyi za rok szkolny 1908/9								
Do egzaminu popr. przypuszczono .	6	5	10	6	6	9	—	42
Zdało	6	5	9	6	6	8	—	40
Nie zdało	—	—	1	—	—	1	—	2
Ostateczny wynik za r. s. 1908/9								
Chlubnie uzdolnionych . . .	3	—	—	—	—	1	—	4
Uzdolnionych	23	22	23	26	21	22	19	156
Nieuzdolnionych	8	5	4	7^1	5	5	1	35^1
Razem .	34	27	27	33^1	26	28	20	195^1

8. Opłaty.

Opłatę szkolną złożyło
w 1. półroczu 66 ucz. publ. 1 pryw.
„ 2. „ 66 „ „ 1 „

Było uwolnionych
w 1. półroczu od całej opłaty 126 ucz. publ.
„ 2. „ „ „ „ 117 „ „

Opłata szkolna wynosiła
w 1. półroczu 2010 K.
„ 2. „ 2010 „
Razem 4020 K.

Taksy wstępne wynosiły	184 K. 80 h.
Dątki na środki naukowe	402 „ — „
Taksy za duplikaty świadectw	20 „ — „
Razem	606 K. 80 h.

9. Przedmioty nadobowiązkowe względnie obowiązkowe.

Na ćwiczenia w pracowni chemicznej uczęszczało 20 uczniów. Na naukę języka ruskiego jako przedmiotu względnie obowiązkowego uczęszczało 14 uczniów.

10. Stypendya.

Stypendya pobierało 3 uczniów.
Ogólna kwota stypendyów wynosi 470 K.

XII.

Spis uczniów

z końcem roku szk. 1909/10.

Uczniowie chlubnie uzdolnieni oznaczeni są tłustemi czcionkami.

Klasa I.

Chomicki Włodzimierz
Cząstka Stanisław
Fussteig Szymon
Gajewski Eugeniusz
Gorczyński Stanisław
Heil Wilhelm
Karpel Milan
Klein Oskar
Koczyrkiewicz Eugeniusz
Kraśniński Fryderyk
Ludwiczek Rudolf
Males Eliasz
Markowski Waleryan
Mazurkiewicz Franciszek
Michalski Zdzisław
Mieszczyk Karol
Milli Zygmunt
Myczkowski Adam
Niziński Stanisław
Ostrihańsky Ludwik
Pietruszka Zygmunt
Rech Stanisław
Schreckinger Rachmiel
Starek Józef
Stolarczyk Stanisław
Szwec Stefan
Tomczyszyn Józef
Wagner Adam
Wiszniewski Roman
Wrażej Leon

Klasa II.

Barański Józef
Berner Saul
Denasiewicz Kazimierz
Durkalec Wilhelm
Gacek Franciszek
Gehler Leiser
Harassek Adam
Haszczyc Orestes
Hatała Roman
Hofbauer Bronisław
Jaworski Józef
Kapuściński Władysław
Kondro Jan
Kratz Joachim
Król Antoni
Kulczycki Eugeniusz
Kurzweil Samuel
Latocha Stanisław
Oleksiński Feliks
Rokosz Jan
Rozenberg Leiser
Sanak Mieczysław
Schmalzbach Wilhelm
Stolarczyk Eugeniusz
Stölzer Emanuel
Szczekot Augustyn
Szumski Zenon
Wikarski Tadeusz

Klasa III.

Bojakowski Michał
Darowski Jerzy
Eilberg Izrael
Hartfelder Jan
Hatała Anatol
Kaucki Stanisław
Kling Henryk
Kowalski Władysław
Kurzweil Henryk
Maksymowicz Seweryn
Mizgalewicz Julian
Pastuch Leon
Piela Stanisław
Raab Izydor
Sandig Maurycy
Sobolewski Karol
Stieber Leiser
Ways Tadeusz
Wierzbicki Eugeniusz
Wondraczek Maryan
Rübner Filip

Klasa IV.

Bikowski Ludwik
Brathspiess Gabryel
Donenhirsch Abraham
Dygat Adam
Janz Antoni
Komenda Józef
Lorenz Maryan
Metzger Izaak
Michalski Jan
Mikulski Jan
Narcysenfeld Eisik
Naspiński Jan
Niemczycki Franciszek
Niemczyk Adam
Niezabitowski Czesław
Nowotarski Jan
Pastuch Jan
Podroużek Józef
Powolny Władysław
Rosenbaum Izaak
Schwarz Edward
Sonnenblick Perec
Wiatr Władysław
Wnęk Jan
Woller Kopel
Wrażej Władysław
Zieliński Wolf

Klasa V.

Baczyński Tadeusz
Bałaban Alfred
Dobrzański Ziemowit
Galotta Józef
Gwizda Zygmunt
Klang Natan
Kostórkiewicz Andrzej
Lipper Adolf
Łowicki Edmund
Machnowski Włodzimierz
Menkes Teodor
Mryczko Adam
Mühlbauer Józef
Mühlbauer Rudolf
Piela Bronisław
Podhorecki Michał
Ringel Izydor
Ringel Maurycy
Sikora Feliks
Starek Jan
Stec Aleksander
Tumidajski Wiktor
Turnheim Saul

Klasa VI.

Bałaban Zygmunt
Biliński Teofil
Gerstenfeld Abraham
Hand Maryan
Karczmarski Stanisław
Knispel Benzion
Knispel Mojżesz
Köhler Rudolf
Kwieciński Bolesław
Loegler Władysław
Madey Antoni
Manowarda Mieczysław
Montag Hersch
Morawiecki Adolf
Moses Naftali
Płoskoń Karol
Schneebaum Józef
Schreckinger Joachim
Skalij Stanisław
Skopal Franciszek (pryw.)
Sobolewski Zygmunt
Szkolnicki Aleksander
Wasner Abraham
Wikarski Leon
Wilk Zdzisław
Wiszniewski Edward
Wrażej Eugeniusz
Zawadowski Stefan

Klasa VII.

Aptilion Abraham
Dżułyński Roman
Freifeld Joachim
Friedmann Józef
Gisges Wincenty
Gräber Chaim
Herman Julian
Herman Władysław
Holzberger Henryk
Krieger Natan
Lind Bernard
Markowski Tadeusz
Noskiewicz Tadeusz
Nowakowski Józef
Salpeter Markus
Schimel Schlojme
Schlager Zygmunt
Schneeweis Izak
Schwarz Henryk
Sikora Paweł
Stawarski Józef
Stybel Jan
Troskiewicz Jan
Weisstein Ignacy

Zakres wymagań przy egzaminie wstępnym do szkół średnich.

(Rozp. c. k. R. S. K. z dnia 26. kwietnia 1880 l. 6995.)

a) Z religii należy wymagać wiadomości, których z teraźniejszego rozkładu nauki nabyć powinien uczeń w pierwszych czterech latach obowiązkowej nauki szkolnej w szkołach czteroklasowych.

b) z języka wykładowego: czytanie płynne i wyraziste, objaśnianie odczytanych ustępów pod względem treści i związku myśli; opowiadanie treści większymi ustępami; znajomość części mowy; odmiana imion i czasowników; znajomość zdania pojedyńczego, rozszerzonego i rozbiór jego części składowych pod względem składni zgody i rządu; poprawne napisanie dyktatu z zakresu pojęć znanych uczniom, z uwzględnieniem głównych zasad interpunkcyi;

c) z języka niemieckiego: czytanie płynne i zrozumiałe; znajomość odmiany rodzajników, rzeczowników i przymiotników i zaimków (osobistych, dzierżawczych, wskazujących i względnych); odmiana słów posiłkowych i czasowników słabych we wszystkich formach strony czynnej i biernej, tudzież odmiana najzwyklejszych czasowników mocnych; zasób wyrazów z zakresu pojęć uczniom znanych; poprawne napisanie łatwego dyktatu, którego treść przed podyktowaniem poda się uczniom w języku wykładowym;

d) z rachunków: pisanie liczb do miliona włącznie; biegłość w czterech działaniach liczbami całkowitemi; pewność w tabliczce mnożenia; znajomość miar metrycznych.

Do sali, gdzie się odbywa egzamin, nie mają wstępu obce osoby.

Niedostateczny postęp w jednym przedmiocie egzaminu usuwa ucznia na cały rok od przyjęcia go w jakiejkolwiek szkole średniej.

Warunki przyjęcia uczniów z gimnazyum do szkoły realnej.

(Rozp. c. k. R. S. K. z dnia 16. maja 1888. l. 2774.).

A) Uczeń gimnazyalny, ubiegający się o przyjęcie do II lub wyższej klasy realnej, może być uwolniony od egzaminu wstępnego: 1. z religii, 2. z języka polskiego, 3. niemieckiego, 4. z historyi powszechnej, 5. z historyi naturalnej i 6. z fizyki, jeżeli w świadectwie gimnazyalnem za ostatnie półrocze, poprzedzające bezpośrednio odnośną klasę realną, oprócz ogólnego stopnia dobrego (t. j. celującego albo pierwszego), otrzymał z wymaganego dla tej klasy przedmiotu i odnośnego materyału nauki przynajmniej „dostatecznie“ bez osłabiającego dodatku. Z reszty przedmiotów t. j. 1. matematyki, 2. chemii, 3. geografii, 4. rysunków i 5. języka francuskiego należy egzamin wstępny odbywać z wszelką ścisłością, by w interesie szkół realnych nie dopuszczać do tych zakładów uczniów nieudolnych.

B) Co do uczniów, którzy w gimnazyum tylko wskutek niedostatecznych cenzur z języków klasycznych otrzymali ogólny stopień drugi, zastrzega sobie Rada szkolna krajowa według okoliczności rozstrzygać w poszczególnych wypadkach, czy takiego ucznia przypuścić do egzaminu wstępnego do następnej klasy realnej, przyznając mu zresztą powyżej wskazane ulgi.

W Jarosławiu dnia 30. czerwca 1910.

Dr. Jan Ralski
c. k. dyrektor.