

III

[1872 r. I]

Powierzchnia falowa

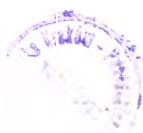
F R E S N E L A

ze stanowiska geometrycznego

napisał

Klacyd Dziwiński.

— i —



rec. 1225.
Spr. 51

W rozprawie umieszczonej w zeszłorocznym programie pod tytułem: „Przyczynek do teoryi stożków stycznych do powierzchni drugiego stopnia“ wykazałem, że wierzchołki stożków stycznych do ellipsoidy trójosiowej mieszczą się na powierzchni falowej Fresnela, jeżeli każdy z tych stożków przez płaszczyzny równoległe do jednej ze swych płaszczyzn głównych w hyperbolach równobocznych przecinać się daje.

Celem niniejszej rozprawy jest przeprowadzić dyskusję zrównania powyższej powierzchni i roztrząsnąć jej własności ze stanowiska czysto geometrycznego.

I.

Zrównanie powierzchni falowej może mieć jedną z tamże otrzymanych identycznych postaci:

$$A^2x^4 + B^2y^4 + C^2z^4 + (B^2 + C^2)y^2z^2 + (A^2 + C^2)x^2z^2 + (A^2 + B^2)x^2y^2 - A^2(B^2 + C^2)x^2 - B^2(A^2 + C^2)y^2 - C^2(A^2 + B^2)z^2 + A^2B^2C^2 = 0 \quad 1)$$

$$\text{albo: } (x^2 + y^2 + z^2)(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) - A^2(B^2 + C^2)x^2 - B^2(A^2 + C^2)y^2 - C^2(A^2 + B^2)z^2 + A^2B^2C^2 = 0 \quad 2)$$

albo wreszcie:

$$\frac{A^2x^2}{r^2 - A^2} + \frac{B^2y^2}{r^2 - B^2} + \frac{C^2z^2}{r^2 - C^2} = 0 \quad 3)$$

gdzie x, y, z wyrażają spółrzedne zmienne punktu powierzchni, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ oddalenie tegoż od punktu początkowego układu płaszczyzn spółrzednych, zaś A, B, C ,

ilości stale zawisłe od osi ellipsoidy (a, b, c) i oznaczone przez wzory:

$A^2 = b^2 + c^2$, $B^2 = a^2 + c^2$, $C^2 = a^2 + b^2$, z których wypada nierówność $A < B < C$, jeżeli dla ellipsoidy trójosiowej istniała nierówność $a > b > c$.

Aby dojść do wyobrażenia ogólnego kształtu tej powierzchni, przyjmijmy punkt początkowy jako punkt wyjścia i poprowadźmy z niego promień w dowolnie przyjętym kierunku, póki tenże na punkt powierzchni nie natrafi. Na oznaczenie tego punktu od punktu początkowego o długość r oddalonego, otrzymamy zrównania następujące:

$$(r)_{lmn} = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1} \sqrt{-1} \text{ jako też}$$

$$(r)_{lmn} = r(\cos l + \cos m \sqrt{-1} + \cos n \sqrt{-1} \sqrt{-1}),$$

z których wypada:

$x = r \cos l$, $y = r \cos m$, $z = r \cos n$, gdzie l, m, n oznaczają kąty nachylenia promienia r względem osi OX, OY, OZ . Punkt $x + y \sqrt{-1} + z \sqrt{-1} \sqrt{-1}$ ma być punktem powierzchni; spółrzedne jego muszą przeto sprawdzać zrównanie powierzchni. Na tej podstawie otrzymamy wprost ze zrównania 2) następujące zrównanie:

$$r^4(A^2 \cos^2 n + B^2 \cos^2 m + C^2 \cos^2 l) -$$

$$- r^2[A^2(B^2 + C^2) \cos^2 l + B^2(A^2 + C^2) \cos^2 m + C^2(A^2 + B^2) \cos^2 n] + A^2 B^2 C^2 = 0$$

$$\text{czyli: } sr^4 - tr^2 + u = 0$$

4)

jeżeli dla skrócenia

$$s = A^2 \cos^2 l + B^2 \cos^2 m + C^2 \cos^2 n$$

$$t = A^2(B^2 + C^2) \cos^2 l + B^2(A^2 + C^2) \cos^2 m + C^2(A^2 + B^2) \cos^2 n$$

$$u = A^2 B^2 C^2$$

postawimy i dodamy, że ilości s, t, u , dla każdego możliwego kierunku promienia r liczbami dodatniemi być muszą. Zrównanie 4) jest ze względu na r stopnia czwar-

tego, co dowodzi, że każdy promień przez punkt początkowy przechodzący powierzchnię w czterech punktach przebija.

Na oznaczenie miejsca tych punktów na promieniu r otrzymamy rozwiązując zrównanie 4):

$$r^2 = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4us}}{2s}$$

czyli następujące cztery wartości na r

$$\begin{aligned} r_1 &= + \sqrt{\frac{t + \sqrt{t^2 - 4us}}{2s}} & r_2 &= - \sqrt{\frac{t + \sqrt{t^2 - 4us}}{2s}} \\ r_3 &= + \sqrt{\frac{t - \sqrt{t^2 - 4us}}{2s}} & r_4 &= + \sqrt{\frac{t - \sqrt{t^2 - 4us}}{2}} \end{aligned} \quad 5)$$

które dowodzą, że ze wspomnianych 4 punktów przebicia promienia r z powierzchnią leżą co dwa po przeciwnej stronie punktu początkowego ale w równym od niego oddaleniu.

Powierzchnia falowa jest przeto powierzchnią środkową (Centralfläche) z dwóch powłok współśrodkowych złożoną a jej środek leży w środku układu płaszczyzn współrzędnych. Aby stanowczo orzec, czy powyższe cztery punkta przebicia na każdym promieniu przez środek przeprowadzonym rzeczywiście istnieją, należy bliżej zbadać wartości pod 5) otrzymane. Przedewszystkiem łatwo poznać, że dla każdego kierunku promienia musi być $t > \sqrt{t^2 - 4us}$, gdyż $4us$ jest zawsze liczbą dodatnią.

Rzeczywistość pierwiastków ($r_1 r_2 r_3 r_4$) zawisłą będzie przeto jedynie od znaku wyrazu $t^2 - 4us$. Nie trudno uzasadnić, że wyraz $t^2 - 4us$ nie może być ujemnym. Gdyż przypuściwszy $t^2 - 4us < 0$ otrzymalibyśmy

$$[A^2(B^2 + C^2)\cos^2 l + \&] * < 4A^2 B^2 C^2 (A^2 \cos^2 l + \&)$$

*) Znak $\&$ oznacza, że następne człony są w ten sam sposób jak człon pierwszy zbudowane.

czyli uwzględniając relację wszystkim kierunkom wspólną: $\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1$

następującą nierówność:

$[A^2(B^2 + C^2) \cos^2 l + \&]^2 < 4A^2 B^2 C^2 (\cos^2 l + \&) \cdot (A^2 \cos^2 l + \&)$
z której po wykonaniu wskazanych działań i uporządkowaniu wyrazów wedle potęg dostawy kątów l, m, n , wypadłoby:

$$A^4 \cos^4 l [B^4 + C^4 - 2B^2 C^2] + \& + \\ + 2A^2 B^2 \cos^2 l \cos^2 m [(B^2 + C^2)(C^2 + A^2) - 2C^2(A^2 + B^2)] + \& < 0$$

a ze względu, że $A < B < C$:

$$A^4 \cos^4 l (C^2 - B^2)^2 + B^4 \cos^4 m (C^2 - A^2)^2 + C^4 \cos^4 n (B^2 - A^2)^2 + \\ + 2A^2 B^2 \cos^2 l \cos^2 m (C^2 - B^2)(C^2 - A^2) + 2B^2 C^2 \cos^2 m \cos^2 n (C^2 - A^2)(B^2 - A^2) - 2A^2 C^2 \cos^2 l \cos^2 n (C^2 - B^2)(B^2 - A^2) < 0$$

czyli:

$$[A^2(C^2 - B^2) \cos^2 l + B^2(C^2 - A^2) \cos^2 m + C^2(B^2 - A^2) \cos^2 n]^2 \\ < 4A^2 C^2 \cos^2 l \cos^2 n (C^2 - B^2)(B^2 - A^2)$$

czyli wreszcie

$$A^2(C^2 - B^2) \cos^2 l + B^2(C^2 - A^2) \cos^2 m + C^2(B^2 - A^2) \cos^2 n \\ + 2A C \cos l \cos n \sqrt{(C^2 - B^2)(B^2 - A^2)} < 0$$

co doprowadziłoby do nierówności

$$[A \sqrt{C^2 - B^2} \cos l + C \sqrt{B^2 - A^2} \cos n]^2 + B^2(C^2 - A^2) \cos^2 m < 0$$

która oczywiście dla żadnego rzeczywistego kierunku (lmn) ostać się nie może w obec okoliczności, że z powodu przypuszczenia $A < B < C$ wyrazy $C^2 - A^2$, $C^2 - B^2$, $B^2 - A^2$ są liczbami dodatnimi.

Wszystkie cztery pierwiastki (r_1, r_2, r_3, r_4) są przeto rzeczywiste dla każdego kierunku (l, m, n); obie powłoki powierzchni falowej są więc powierzchniami zamkniętymi.

Ze wzorów pod 5) otrzymanych wypływa dalej, że dla szczególnych kierunków (l, m, n) mogą być co dwa

pierwiastki (r_1, r_3) i (r_2, r_4) równe. Wypadek ten nacechowany jest warunkiem

$$t^2 - 4us = 0$$

który za wykonaniem powyżej przeprowadzonych działań prowadzi do zrównania:

$$[A\sqrt{C^2 - B^2} \cos l + C\sqrt{B^2 - A^2} \cos n]^2 + B^2(C^2 - A^2) \cos^2 m = 0 \quad 6)$$

przez które oznaczone są kierunki prowadzące do podwójnych punktów powierzchni. Kierunki te zwane są w optyce osiami optycznymi.

Zrównanie 6) przedstawia sumę dwóch wyrazów dodatnich równą zeru, co może tylko wtedy mieć miejsce, jeżeli każdy z tych wyrazów równa się 0, czyli jeżeli się spełnią relacje:

$$A\sqrt{C^2 - A^2} \cos l + C\sqrt{B^2 - A^2} \cos n = 0 \quad 7)$$

$$B\sqrt{C^2 - A^2} \cos m = 0$$

Pierwsza relacja wyobraża dla dowolnego m , kierunki leżące na dwóch w osi OY przecinających się płaszczyznach, druga wskazuje na kierunki, które mają $m = 90^\circ$ czyli leżą na płaszczyźnie XOZ, obie relacje razem cechują przeto dwie proste na płaszczyźnie XOZ leżące. Kierunki tych prostych oznaczają wzory z 7) otrzymane

$$\cos l = \pm \frac{C}{B} \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}}$$

$$\cos m = 0$$

$$\cos n = \pm \frac{A}{B} \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}} \quad 8)$$

Prowadząc więc promień ze środka w jednym z obu przez wzory 8) wskazanych kierunków, natrafimy tylko na dwa punkta powierzchni, których oddalenie od środka będzie podług 5):

$$r = \pm \sqrt{\frac{t}{2s}} = \pm \sqrt{\frac{(B^2 + C^2)(B^2 - A^2) + (A^2 + B^2)(C^2 - B^2)}{2(B^2 - A^2) + 2(C^2 - B^2)}} \\ = \pm \sqrt{\frac{B^2(C^2 - A^2)}{C^2 - A^2}} = \pm B.$$

a współrzędne będą:

$$x = \pm C \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}}$$

$$y = 0$$

9)

$$z = \pm A \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}}$$

W tych czterech punktach od środka O równo oddalonych a względem osi OX i OZ symetrycznie ułożonych schodzą się widocznie obie powłoki (wewnętrzna i zewnętrzna) powierzchni falowej.

Powierzchnia falowa składa się przeto z dwóch powierzchni zamkniętych współśrodkowych schodzących się w czterech punktach oddzielnych na jednej płaszczyźnie leżących.

II.

Ponieważ powierzchnia falowa jest powierzchnią środkową, przeto posiadać musi trzy nawzajem prostopadłe płaszczyzny środkowe, z których każda też powierzchnię na dwie przystające i symetrycznie ułożone połowy podzieli.

Ze zrównania powierzchni łatwo odczytać, że owymi płaszczyznami głównymi są w danym wypadku płaszczyzny współrzędne XOY, YOZ, ZOX, gdyż przyjąwszy w zrównaniu powierzchni

$$[A^2x^4 + (B^2 + C^2)y^2z^2 - A^2(B^2 + C^2)x^2] + \& = 0$$

wartości dwóch zmiennych z grupy x, y, z , otrzymamy dla trzeciej po dwie równe i różnoznaczne wartości.

Powierzchnia falowa rozciąga się symetrycznie względem każdej z płaszczyzn współrzędnych czyli płaszczyzny współrzędne są w istocie płaszczyznami głównymi powierzchni.

Zastanówmy się teraz nad przekrojami głównymi powierzchni.

Wstawiając w równanie 1) $y=0$, otrzymamy na oznaczenie przekroju powierzchni płaszczyzną XOZ równanie czwartego stopnia:

$$A^2x^4 + C^2z^4 + (A^2 + C^2)x^2z^2 - A^2(B^2 + C^2)x^2 - C^2(A^2 + B^2)z^2 + A^2B^2C^2 = 0$$

które się da atoli przedstawić jako iloczyn dwóch równań drugiego stopnia w postaci:

$$(x^2 + z^2 - B^2)(A^2x^2 + C^2z^2 - A^2C^2) = 0 \quad 10)$$

sprawdzającej się zarówno dla:

$$x^2 + z^2 = B^2$$

jako też dla:

$$A^2x^2 + C^2z^2 = A^2C^2$$

Pierwsze równanie wyobraża koło o promieniu B , drugie ellipsę o półosiach C i A , obie krzywe (Tab. I. fig 1.) przecinają się w punktach M_1, M_2, M_3, M_4 , oznaczonych przez współrzędne:

$$x = \pm \frac{C\sqrt{B^2 - A^2}}{\sqrt{C^2 - A^2}}, \quad z = \pm \frac{A\sqrt{C^2 - B^2}}{\sqrt{C^2 - A^2}}$$

które są w skutek warunku $A < B < C$ rzeczywiste, i właśnie owymi czterema punktami pod 9) otrzymanymi, w których wewnętrzna i zewnętrzna powłoka powierzchni się spotykają.

Podobnie otrzymamy za podstawieniem $x=0$ w równanie 1) na określenie przekroju powierzchni płaszczyzną YOZ równanie czwartego stopnia

$$B^2y^4 + C^2z^4 + (B^2 + C^2)y^2z^2 - B^2(A^2 + C^2)y^2 - C^2(A^2 + B^2)z^2 + A^2B^2C^2 = 0$$

dające się rozłożyć na dwa czynniki drugiego stopnia w formie:

$$(y^2 + z^2 - A^2)(B^2y^2 + C^2z^2 - B^2C^2) = 0 \quad (11)$$

wyobrażającej połączenie koła o promieniu A ze współśrodkową ellipsą o półosiach B i C (Tab. II. fig. 3). Koło znajduje się w tym przekroju z uwagi, że $A < B < C$, zupełnie wewnątrz ellipsy.

Nareszcie na oznaczenie przekroju powierzchni płaszczyzną XOY otrzymamy za podstawieniem $z=0$ także pozorne równanie 4. stopnia w postaci

$$A^2x^4 + B^2y^4 + (A^2 + B^2)x^2y^2 - A^2(B^2 + C^2)x^2 - B^2(A^2 + C^2)y^2 + A^2B^2C^2 = 0$$

rozpadające się na dwa równania drugiego stopnia

$$(x^2 + y^2 - C^2)(A^2x^2 + B^2y^2 - A^2B^2) = 0 \quad (12)$$

Przekrój tem równaniem przedstawiony składa się z koła o promieniu C i współśrodkowej ellipsy o półosiach A i B (Tab. I. fig. 2); ellipsa znajduje się zupełnie wewnątrz koła.

Główne przekroje powierzchni falowej są przeto dwie współśrodkowe krzywe drugiego stopnia, z których jedna jest zawsze kołem a druga ellipsą, w ten charakterystyczny sposób między sobą złączone, że wierzchołki ellipsy, w którymkolwiek przekroju wpadają w obwód kół dwóch innych przekrojów.

Tab. II. fig. 4. przedstawia axonometryczny obraz po-

łączenia wspomnianych krzywych trzech głównych przekrojów, z których przekrój

XOZ zawiera ellipsę (CA) i koło (B)

YOZ „ „ (CB) „ (A)

XOY „ „ (BA) „ (C)

W jednym z tych przekrojów (mianowicie na płaszczyźnie XOZ) przecinają się obie krzywe, tworząc cztery punkta zetknięcia się powłoki zewnętrznej powierzchni falowej z powłoką wewnętrzną, w dwóch innych przekrojach krzywe wspomniane nie przecinają się, tylko należą na przemian do wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni.

Przekroje powierzchni falowej równoległe do jednej z jej płaszczyzn głównych są krzywe czwartego stopnia złożone z dwóch oddzielnych współśrodkowych krzywych.

Zrównanie krzywych leżących w płaszczyznach do XOY równoległych będzie podług 1)

$$\begin{aligned} A^2x^4 + B^2y^4 + (A^2 + B^2)x^2y^2 - x^2[A^2(B^2 + C^2) - z^2(A^2 + C^2)] \\ - y^2[B^2(A^2 + C^2) - z^2(B^2 + C^2)] + [A^2B^2C^2 + C^2z^4 - \\ - C^2(A^2 + B^2)z^2] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

gdzie z wyraża oddalenie płaszczyzny przecinającej od płaszczyzny XOY.

W przypadku, gdy

$$C^2z^2 + (A^2 + B^2)z^2 + A^2B^2C^2 = 0$$

co się stanie dla $z=A$, lub $z=B$ sprowadza się krzywa wewnętrzna względnie zewnętrzna do punktu wierzchołkowego. Podobnie rzecz się ma z przekrojami równoległymi do dwóch innych płaszczyzn głównych.

Figury 5, 6, tab. III. i fig. 7. tab. IV. przedstawiają powierzchnię falową w rzutach ortogonalnych na płaszczyznę XOY, YOZ, ZOX, wraz z szeregiem prze-

krojów równoległych do płaszczyzn rzutowych. Krzywe należące do powierzchni zewnętrznej są nakreślone liniami pełnemi, wewnętrzne są kropkowane.

III.

Do osobliwszych wyników prowadzi roztrząsanie równania

$$\frac{A^2x^2}{r^2-A^2} + \frac{B^2y^2}{r^2-B^2} + \frac{C^2z^2}{r^2-C^2} = 0 \quad (13)$$

które już na pierwszy rzut oka wydaje się wcale przydatnem a swą szczególną i symetryczną postacią, jakby zapraszającym do badania sferycznych przekrojów powierzchni.

Nietrudno zauważać, że dla dowolnej wartości stałej wyrazu $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ równanie powyższe wyobraża stożek eliptyczny, którego wierzchołek znajduje się w środku kuli współśrodkowej z powierzchnią falową. co prowadzi do wniosku: że powierzchnia falowa przez kule współśrodkowe w stożkowych sferycznych przecinać się daje.

Zrównanie rzutów wspomnianych krzywych na trzy płaszczyzny współrzędne otrzymamy z połączenia równań:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\ \frac{A^2x^2}{r^2-A^2} + \frac{B^2y^2}{r^2-B^2} + \frac{C^2z^2}{r^2-C^2} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

w następujących postaciach:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{C^2-A^2}{r^2-A^2} + y^2 \frac{C^2-B^2}{r^2-B^2} &= C^2 \\ z^2 \frac{B^2-C^2}{r^2-C^2} + x^2 \frac{B^2-A^2}{r^2-A^2} &= B^2 \end{aligned}$$

$$y^2 \frac{A^2 - B^2}{r^2 - B^2} + z^2 \frac{A^2 - C^2}{r^2 - C^2} = A \quad (15)$$

z których wyczytać się daje, że rzuty wspomniane są współśrodkowemi ellipsami albo hyperbolami.

Ze względu na nierówność przyjętą $A < B < C$ wypływa ze wzorów 14) i 15), że wartości, jakie promień kuli przecinającej mieć może, zawarte są między granicami C i A .

Kula zakreślona promieniem $r > C$ albo $r < A$, nie ma z powierzchnią nie wspólnego.

Wartości promienia r mogą być tedy następujące:

1. $r = C$
2. $C > r > B$
3. $r = B$
4. $B > r > A$
5. $r = A$

Dla $r = C$ otrzymamy z 14) i 15)

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = C^2 \quad (16)$$

Kula zakreślona promieniem C dotyka się przeto powierzchni falowej w kole wielkim na płaszczyźnie XOY leżącym. Koło to jest zarazem pierwszą stożkową sferyczną, której powierzchnia stożkowa jest w tym wypadku płaszczyzną XOY .

Dla $C > r > B$ otrzymamy z 14)

$$\frac{A^2 x^2}{r^2 - A^2} + \frac{B^2 y^2}{r^2 - B^2} - \frac{C^2 z^2}{C^2 - r^2} = 0 \quad (17)$$

natomiast zrównania 15) jawić się będą w formie:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{C^2 - A^2}{r^2 - A^2} + y^2 \frac{C^2 - B^2}{r^2 - B^2} &= C^2 \\ z^2 \frac{C^2 - B^2}{C^2 - r^2} + x^2 \frac{B^2 - A^2}{r^2 - A^2} &= B^2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$-y^2 \frac{B^2 - A^2}{r^2 - B^2} + z^2 \frac{C^2 - A^2}{C^2 - r^2} = A^2$$

gdzie współczynniki przy x^2 , y^2 , z^2 są liczbami dodatnimi.

Zrównanie 15) dowodzi, że stożki, na których się przekroje sferyczne powłoki zewnętrznej mieszczą, mają wspólną oś OZ a płaszczyzny rzutowe za wspólne płaszczyzny główne.

Z płaszczyzny XOY jako stożka kołowego wyłaniają się tedy współosiowe stożki eliptyczne, mające w kierunku osi OY względnie OX półosie

$$\left| \frac{r^2 - B^2}{B^2} \right|^{1/2} \text{ i } \left| \frac{r^2 - A^2}{A^2} \right|^{1/2}$$

zweźające się przeto za zmniejszaniem promienia r prędkiej względem płaszczyzny XOZ, aniżeli płaszczyzny YOZ, tak, że gdy dla $r=B$ rodzące stożka w przekroju YOZ w oś OZ wpadną, rodzące w przekroju XOZ dopiero przez punkta

$$x = \pm \frac{C\sqrt{B^2 - A^2}}{\sqrt{C^2 - A^2}}; y = 0; z = \pm \frac{A\sqrt{C^2 - B^2}}{C^2 - A^2}$$

przechodzić będą, czyli w osie optyczne OM_1 , OM_2 wpadną, Stożek eliptyczny sprowadza się w ostatnim wypadku do wycinka kołowego ograniczonego łukami $M_1 M_2$ i $M_3 M_4$ jako odpowiedniami krzywymi sferycznymi.

W figurach 8, 9, 10, tab. IV. i V. uwidocznione są rzuty sferycznych przekrojów powłoki zewnętrznej liniami pełnemi. Na podstawie zrównań 18) są one na płaszczyźnie XOZ ellipsami zdążającymi do ograniczonej prostej $M_1 B M_2$: na płaszczyźnie XOZ niezupełnemi ellipsami zdążającymi do łuku $M_1 B M_2$ względnie $M_3 B M_4$, w płaszczyźnie ZOY ograniczonemi gałęziami hyperbol zweźającymi

się względem osi OZ, a zdatującemi do prostej M_1B względnie M_3B . Dla $r=B$ otrzymamy z 14) i 15)

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x^2 + z^2 &= B^2 \end{aligned} \quad 19)$$

Szereg sferycznych przekrojów zewnętrznej powłoki kończą więc dwa łuki M_1BM_2 i M_3BM_4 na płaszczyźnie XOZ leżące promieniem B zakreślone.

Pozostałe 2 łuki M_1CM_3 i M_2CM_4 należą już do powłoki wewnętrznej powierzchni falowej, rozpoczynając zarazem nowy szereg przekrojów sferycznych.

Kula zakreślona promieniem B dotyka się powierzchni falowej w kole na płaszczyźnie XOZ leżacem, odgraniczając powłokę zewnętrzną od wewnętrznej.

Dla $B > r > A$ otrzymamy z 14)

$$\frac{A^2x^2}{r^2 - A^2} - \frac{B^2y^2}{B^2 - r^2} - \frac{C^2z^2}{C^2 - r^2} = 0 \quad 20)$$

a z równania 15) przedstawia się w postaciach

$$\begin{aligned} x^2 \frac{B^2 - A^2}{r^2 - A^2} + z^2 \frac{C^2 - B^2}{C^2 - r^2} &= B^2 \\ x^2 \frac{C^2 - A^2}{r^2 - A^2} - y^2 \frac{C^2 - B^2}{B^2 - r^2} &= C^2 \\ y^2 \frac{B^2 - A^2}{B^2 - r^2} + z^2 \frac{C^2 - A^2}{C^2 - r^2} &= A^2 \end{aligned} \quad 21)$$

w których współczynniki przy x^2 , y^2 , z^2 , są liczbami dodatniemi. Również równanie pod 20) dowodzi, że stożki równych promieni wewnętrznej powłoki mają wspólną oś OX a płaszczyzny rzutowe za wspólne płaszczyzny główne.

Szereg tych stożków rozpoczyna się wycinkiem kołowym OM_1CM_3 , OM_2CM_4 , w płaszczyźnie XOZ leżącym. Skoro r przekroczy granicę B, wychodzą na jaw stożki eliptyczne o półosiach

$$\left| \frac{B^2 - r^2}{B^2} \right|^{1/2} \quad \text{ i } \quad \left| \frac{C^2 - r^2}{C^2} \right|^{1/2}$$

w kierunku osi OY i OZ. Rozwartość tych stożków zwiększa się w płaszczyźnie głównej XOY prędzej, aniżeli w płaszczyźnie XOZ. Podczas gdy rodząca stożka w przekroju XOZ przejdzie kąt ostry między osią optyczną, a osią OZ zawarty, wykona rodząca stożka w przekroju XOY ćwierć obrotu przechodząc przez wszystkie położenia między osią OX a OY zawarte.

Krzywe sferyczne wewnętrznej powłoki są tedy sferycznymi przekrojami stożków eliptycznych, których wspólną osią jest oś OX.

W figurach 8, 9, 10 uwidocznione są rzuty sferycznych przekrojów wewnętrznej powierzchni liniami kropkowanemi. Na podstawie równań 21) są one na płaszczyźnie XOY hyperbolami współśrodkowemi do prostej AOA zdążającemi, na płaszczyźnie YOZ ellipsami zupełnemi, na płaszczyźnie XOZ współśrodkowymi łukami eliptycznymi.

Dla $r = A$ otrzymamy z 14) $x = 0$, $y^2 + z^2 = A^2$ 22)

Kula zakreślona promieniem A dotyka się przeto powierzchni falowej w kole wielkiem na płaszczyźnie YOZ leżącym. Koło to kończy szereg wewnętrznych przekrojów sferycznych, a płaszczyzna YOZ szereg odpowiednich stożków eliptycznych.

Powierzchnia falowa zawartą jest przeto między trzema kulami, promieniami A, B, C zakreślonemi, a dotykającemi się powierzchni w kołach największych. Kule C i B zawierają zewnętrzną a kule B i A wewnętrzną powierzchnię.

Krzywe sferyczne powierzchni falowej są sferycznymi

przekrojami dwóch szeregów współosiowych stożków eliptycznych; jeden szereg posiada wspólną oś OX i odpowiada powierzchni zewnętrznej, drugi ułożony jest naokoło wspólnej osi OZ i należy do powierzchni zewnętrznej.

Ale każdy z tych szeregów przecina także drugą powierzchnię. Przekroje nie mogą być sferycznymi, gdyż musiałyby do drugiego szeregu należyć. Jakiegoż rodzaju są te krzywe? Jeżeli r oznacza oddalenie punkta M jednej powierzchni od środka, to na tym samym kierunku leży punkt drugiej powierzchni o długość R od środka oddalony.

Na oznaczenie tych oddaleń otrzymujemy podług 5)

$$R^2 = \frac{t + \sqrt{t^2 - 4us}}{2s}$$

$$r^2 = \frac{t - \sqrt{t^2 - 4us}}{2s}$$

z czego wypada

$$R^2 r^2 = \frac{u}{s}$$

czyli:

$$R^2 r^2 = \frac{A^2 B^2 C^2}{A^2 \cos^2 l + \&} \quad (23)$$

Wzór otrzymany uwidocznia związek między oddaleniami punktów powierzchni na jednym kierunku umieszczonych. Dowodzi on, że przy niezmiennem oddaleniu jednego punktu do środka, odległość drugiego zawisła jeszcze od zmiany kierunku promienia.

Przyjawszy dla r wartość stałą, otrzymamy na oznaczenie punktów $(R)_{\text{lin}}$ ze wzoru 23):

$$R^2 (A^2 \cos^2 l + \&) = \frac{A^2 B^2 C^2}{r^2}$$

czyli za wprowadzeniem spółrzędnych:

$$x = R. \cos l$$

$$y = R. \cos m$$

$$z = R. \cos n$$

zrównanie:

$$A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 = \frac{A^2 B^2 C^2}{r^2}$$

albo:

$$\left| \frac{BC}{r} \right|^2 + \left| \frac{AC}{r} \right|^2 + \left| \frac{AB}{r} \right|^2 = 1 \quad (24)$$

Zrównanie wyobraża ellipsoidę trójosiową o pół-osiach

$$\frac{BC}{r}, \frac{AC}{r}, \frac{AB}{r}$$

z czego wypływa, że stożek przecinający jedną powłokę powierzchni falowej w krzywej sferycznej przecina drugą w krzywej ellipsoidalnej, leżącej na ellipsoidzie podobnej do ellipsoidy o półosiach BC, CA, AB.

Powierzchnia falowa daje się przeto przez współśrodkowe ellipsoidy podobne przecinać w stożkowych ellipsoidalnych.*) Stożkowe ellipsoidalne jednej powłoki leżą na stożkach eliptycznych współosiowych odpowiadających stożkowym sferycznym drugiej powłoki. Obydwa rodzaje stożków eliptycznych 17) i 20) przecinają się widocznie pod kątem prostym, z czego wypływa także zdanie: Stożkowe sferyczne i ellipsoidalne tworzą na powierzchni falowej system krzywych pod kątem prostym się przecinających.

*) Stożkowa ellipsoidalna składa się podobnie jak stożkowa sferyczna z dwóch linii zamkniętych symetrycznych. Każda z tych krzywych jest perspektywą linii stożkowych na ellipsoidzie i nazywać by się mogła ellipsą ellipsoidalną, jak na sferze ellipsa sferyczną.

IV.

Przyjmijmy teraz na powierzchni falowej pewien punkt $(x y z)$ i oznaczmy płaszczyznę styczną w tym punkcie do powierzchni. Zrównanie płaszczyzny stycznej do danej powierzchni $f=0$ w punkcie $(x y z)$ przedstawia się w postaci:

$$\frac{df}{dx}(X-x) + \frac{df}{dy}(Y-y) + \frac{df}{dz}(Z-z) = 0$$

z której na określenie kierunku (lmn) normalnej do powierzchni otrzymamy wzory:

$$\cos l = \frac{\frac{df}{dx}}{R}, \quad \cos m = \frac{\frac{df}{dy}}{R}, \quad \cos n = \frac{\frac{df}{dz}}{R}$$

$$\text{gdzie } R = \sqrt{\left|\frac{df}{dx}\right|^2 + \left|\frac{df}{dy}\right|^2 + \left|\frac{df}{dz}\right|^2}$$

Dla powierzchni falowej mamy:

$$f = r^2(A^2x^2 + \&) - [A^2(B^2 + C^2)x^2 + \&] + A^2B^2C^2 = 0$$

$$\frac{df}{dx} = 2x[A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + A^2(r^2 - (B^2 + C^2))] = 2xF_1$$

$$\frac{df}{dy} = 2y[A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + B^2(r^2 - (A^2 + C^2))] = 2yF_2$$

$$\frac{df}{dz} = 2z[A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 + C^2(r^2 - (B^2 + A^2))] = 2zF_3 \quad 25)$$

przeto:

$$xF_1(X-x) + yF_2(Y-y) + zF_3(Z-z) = 0 \quad 26)$$

$$\cos l = \frac{x F_1}{\sqrt{x^2 F_1^2 + \&}}, \quad \cos m = \frac{y F_2}{\sqrt{x^2 F_1^2 + \&}}, \quad \cos n = \frac{z F_3}{\sqrt{x^2 F_1^2 + \&}}$$

Płaszczyzna styczna w punkcie xyz jest ściśle oznaczoną, skoro współrzędne punktu nie spełniają równocześnie warunków:

$$xF_1=0 \quad yF_2=0 \quad zF_3=0.$$

Przyjmując jeden z tych warunków, łatwo dojść do następujących wyników:

Płaszczyzny styczne do powierzchni falowej w punktach leżących na jednej z płaszczyzn współrzędnych, są do tejże płaszczyzny prostopadłe. Płaszczyzny styczne do powierzchni, a prostopadłe do jednej z płaszczyzn współrzędnych tworzą dwie powierzchnie walcowe, jedną eliptyczną, drugą kołową dotykające się powierzchni w jej głównych przekrojach.

Jeżeli współrzędne punktu x, y, z , spełniają wszystkie trzy warunki

$$xF_1=0 \quad yF_2=0 \quad zF_3=0 \quad (27)$$

płaszczyzna styczna w tym punkcie jest nieoznaczona; punkt taki będzie punktem osobliwym powierzchni. Relacjom 26) czyni zadość jedna z następujących grup równań:

- 1) $x=0 \quad y=0 \quad z=0$
- 2) $F_1=0 \quad F_2=0 \quad F_3=0$
- 3) $x=0 \quad y=0 \quad F_3=0$
- 4) $x=0 \quad F_2=0 \quad z=0$
- 5) $F_1=0 \quad y=0 \quad z=0$
- 6) $x=0 \quad F_2=0 \quad F_3=0$
- 7) $F_1=0 \quad y=0 \quad F_3=0$
- 8) $F_1=0 \quad F_2=0 \quad z=0$

Pierwsza i druga grupa nie dają punktów rzeczywistych na powierzchni; następne trzy grupy wskazują na punkta na osiach układu leżące, które nie są jednakowoż punktami powierzchni; ostatnie trzy grupy cechują punkta na płaszczyznach współrzędnych leżące, będące punktami głównych przekrojów powierzchni.

Takie punkta istnieją rzeczywiście tylko na jednej płaszczyźnie XOZ. Jedynie grupa równań:

$$F_1 = 0 \quad y = 0 \quad F_3 = 0$$

proceedzi tedy do rzeczywistych punktów osobliwych powierzchni falowej. Gdyż z grupy tej otrzymamy:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ F_1 &= A^2 x^2 + C^2 z^2 - A^2 C^2 + A^2 (x^2 + z^2 - B^2) = 0 \\ F_3 &= A^2 x^2 + C^2 z^2 - A^2 C^2 + C^2 (x^2 + z^2 - B^2) = 0 \end{aligned}$$

a więc:

$$F_3 - F_1 = (x^2 + z^2 - B^2) (C^2 - A^2) = 0$$

czyli:

$$x^2 + z^2 = B^2 \quad \text{przeto także} \quad A^2 x^2 + C^2 z^2 = A^2 C^2$$

z czego wypada:

$$x = \pm C \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}}; \quad y = 0; \quad z = \pm A \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}}$$

Cztery punkta przecięcia się koła B z elipsą (CA) w płaszczyźnie XOZ, czyli cztery punkta łączące obie powłoki powierzchni falowej, są jedynie punktami osobliwymi.

Szukajmy rodzaju tej osobliwości. W tym celu musimy utworzyć drugą pochodną równania $f = 0$, za pomocą której oznaczymy szereg płaszczyzn stycznych tworzących stożek styczności o równaniu:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 f}{dx^2} (X-x)^2 + \frac{d^2 f}{dy^2} (Y-y)^2 + \frac{d^2 f}{dz^2} (Z-z)^2 + \\ & + 2 \frac{d^2 f}{dx \cdot dy} (X-x)(Y-y) + 2 \frac{d^2 f}{dx \cdot dz} (X-x)(Z-z) \\ & + 2 \frac{d^2 f}{dy \cdot dz} (Y-y)(Z-z) = 0 \end{aligned}$$

Z równań 25) znajdziemy:

$$\begin{array}{ll} \frac{d^2f}{dx^2} = 8A^2x^2 + 2F_1 & \frac{d^2f}{dydz} = 4yz(B^2 + C^2) \\ \frac{d^2f}{dy^2} = 8B^2y^2 + 2F_2 & \frac{d^2f}{dx dz} = 4xz(A^2 + C^2) \\ \frac{d^2f}{dz^2} = 8C^2z^2 + 2F_3 & \frac{d^2f}{dx dy} = 4xy(A^2 + B^2) \end{array}$$

z kąd za uwzględnieniem warunku:

$$F_1 = 0 \quad y = 0 \quad F_3 = 0$$

otrzymamy następujące wartości:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2f}{dx^2} = 8A^2x^2 \\ \frac{d^2f}{dy^2} = -(B^2 - A^2)(C^2 - B^2) \\ \frac{d^2f}{dz^2} = 8C^2z^2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{d^2f}{dydz} = 0 \\ \frac{d^2f}{dx dz} = 4xz(A^2 + C^2) \\ \frac{d^2f}{dx dy} = 0 \end{array}$$

w których $x = \pm C \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}}$, $y = 0$, $z = \pm A \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}}$
rozumieć należy.

Zrównanie stożka stycznego w punkcie osobliwym (x y z) jawi się przeto w postaci:

$$4A^2x^2(X-x)^2 - (B^2 - A^2)(C^2 - B^2)(Y-y)^2 + 4C^2z^2(Z-z)^2 + 4xz(A^2 + C^2)(X-x)(Z-z) = 0 \quad 28)$$

z której wypływa, że stożek styczny w punkcie osobliwym jest eliptyczny a jedną z jego płaszczyzn głównych, płaszczyzna czterech punktów osobliwych. Płaszczyzna ta przecina stożek w dwóch rodzących, których zrównanie za podstawieniem $Y=0$ w 28) otrzymamy w postaci:

$$[A^2x(X-x) + C^2z(Z-z)][x(X-x) + z(Z-z)] = 0$$

którą spełniają równania:

$$A^2 x (X-x) + C^2 z (Z-z) = A^2 C^2$$

$$x (X-x) + z (Z-z) = B^2$$

Pierwsze przedstawia styczną $t_1 t_1$ do ellipsy (AC), drugie styczną $T_1 T_1$ do koła (B) (Tab. VI. fig. 11.)

Proste styczne w punkcie osobliwym do koła i ellipsy, są więc jednym z głównych przekrojów stożka. Dotykają się one jedną połową zewnętrzną powłoki, drugą wchodzi w wnętrze powierzchni, dotykając się jej powłoki wewnętrznej. Podobnie ma się rzecz z innymi rodzajami. Stożek styczności styka się więc z zewnętrzną powierzchnią swoją jedną połową i to stroną wypukłą takowej; druga połowa wchodzi w wnętrze powierzchni, dotykając się wklęsłą stroną wewnętrznej powierzchni.

Punkta łączące obie powłoki powierzchni falowej, występują przeto jako naroża stożkowate, do których zewnętrzna powierzchnia się zagłębia, wewnętrzna zaostża.

Nasuwa się mimowoli pytanie o początek całkowitego zagłębienia się powierzchni względem owych czterech wielokrotnych punktów. Znajdziemy go na podstawie następującego rozumowania:

Jeżeli przez dwa punkta osobliwe środkowo przeciwległe przesuniemy pęk środkowych płaszczyzn, natenczas każda z takowych przetnie powierzchnię falową w krzywej podwójnej, na której styczna podwójna wyznaczy dwa punkta, jako najwyższe punkta lejkowatości. Ciągłe następstwo tych punktów utworzy krzywą najwyższych punktów, jako górny brzeg lejka.

Niech będzie

$$y = ax + cz$$

zrównanie dowolnej płaszczyzny środkowej, to dla płaszczyzny przez punkta osobliwe

$$x = C \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}} \quad y = 0 \quad z = A \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}}$$

przechodzącej, otrzymamy:

$$0 = a \cdot C \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}} + c A \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}}$$

czyli:

$$\frac{a}{A \sqrt{C^2 - B^2}} = - \frac{c}{C \sqrt{B^2 - A^2}} = k$$

z czego wypada:

$$a = k \cdot A \sqrt{C^2 - B^2} \quad c = -k \cdot C \sqrt{B^2 - A^2}$$

przeto:

$$y = k \cdot (A \sqrt{C^2 - B^2} \cdot x - C \sqrt{B^2 - A^2} \cdot z)$$

będzie zrównaniem płaszczyzny środkowej przez jedną z osi optycznych przechodzącej.

Łącząc to równanie z równaniem powierzchni falowej, otrzymamy na oznaczenie rzutu krzywej przecięcia na płaszczyznę XOZ równanie:

$$F(x, z, k) = 0$$

które połączone ze równaniem

$$\frac{dF(x, z, k)}{dk} = 0$$

wydaże po wyrugowaniu ilości k równanie krzywej obwijającej podwójnie styczne, będącej zarazem rzutem krzywej najwyższych punktów lejkowatości.

Kładąc celem uproszczenia wzorów

$$y = k(A \sqrt{C^2 - B^2} \cdot x - C \sqrt{B^2 - A^2} \cdot z) = k m$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} F(x, z, k) &= (x^2 + z^2 + k^2 m^2)(A^2 x^2 + C^2 z^2 + B^2 k^2 m^2) - \\ &A^2 (B^2 + C^2) x^2 - B^2 (A^2 + C^2) k^2 m^2 - C^2 (A^2 + B^2) z^2 + A^2 B^2 C^2 = 0 \\ \frac{dF(x, z, k)}{dk} &= 2k m^2 [B^2 (x^2 + z^2 + k^2 m^2) + A^2 x^2 + B^2 k^2 m^2 + C^2 z^2 - \\ &- B^2 (A^2 + C^2)] = 0 \end{aligned}$$

a wyrugowawszy ztąd k, dostaniemy:

$$\frac{B^2(A^2 + C^2) + x^2(B^2 - A^2) - z^2(C^2 - B^2)}{2B^2} \\ \frac{B^2(A^2 + C^2) - x^2(B^2 - A^2) + z^2(C^2 - B^2)}{2} \\ \frac{B^2(A^2 + C^2)^2 - x^2(C^2 - A^2)(B^2 - A^2) - z^2(C^2 - A^2)(B^2 - C^2)}{2} \\ + A^2 B^2 C^2 = 0$$

czyli po stosownem uporządkowaniu:

$$[(x\sqrt{B^2 - A^2} + z\sqrt{C^2 - B^2})^2 - B^2(C^2 - A^2)] \cdot \\ [(x\sqrt{B^2 - A^2} - z\sqrt{C^2 - B^2})^2 - B^2(C^2 - A^2)] = 0 \quad 29)$$

otrzymane zrównanie jest wyobraźnikiem dwóch par równoległych prostych odpowiadających czterem punktom osobliwym.

Rzutem krzywej łączącej najwyższe punkta lejkowatości przy każdym z 4 punktów, jest więc linia prosta, co dowodzi, że wspomniana krzywa jest płaską a jej płaszczyzna prostopadłą do płaszczyzny XOZ.

Położenie śladu płaszczyzny uwydatnia na mocy 29) zrównanie:

$$x\sqrt{B^2 - A^2} + z\sqrt{C^2 - B^2} = \pm B\sqrt{C^2 - A^2}$$

albo:

$$ux + wz = 1 \quad 30)$$

jeżeli położymy:

$$u = \pm \frac{1}{B} \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}}; \quad w = \pm \frac{1}{B} \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}}$$

Z wartości współczynników u i w otrzymamy:

$$u^2 = \frac{B^2 - A^2}{B^2(C^2 - A^2)} \quad w^2 = \frac{C^2 - B^2}{B^2(C^2 - A^2)}$$

z czego wypadają wzory:

$$B^2(u^2 + w^2) = 1 \\ A^2 w^2 + C^2 u^2 = 1$$

które dowodzą, że prosta otrzymana jest styczną podwójną do koła (B) i ellipsy (A, C) w przekroju X O Z. (Tab. VI. fig. 12,) ztąd wniosek:

Płaszczyzny przesunięte przez styczne podwójne przekroju X O Z, prostopadłe do płaszczyzny przekroju, dotykają się powierzchni falowej w liniach krzywych, są przeto płaszczyznami osobliwymi.

Celem oznaczenia kształtu tych krzywych, obróćmy układ płaszczyzn współrzędnych około osi O Y, tak, żeby oś X była równoległą do stycznej podwójnej, w takim razie będzie nowa płaszczyzna XOY równoległą do jednej pary płaszczyzn osobliwych, a rzut krzywej styczności do niej samej przystający. Kąt a , o który obracać musimy, jest kątem, jaki styczna podwójna z osią OX zawiera. Przeto otrzymamy:

$$\cos a = \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}} = Bw; \sin a = \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}} = Bu$$

Zastosowując wzory transformacyi:

$$x = x \cos a - z \sin a$$

$$z = x \sin a + z \cos a$$

do zrównania powierzchni dostaniemy jej zrównanie przeobrażone na nowy układ w postaci:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + (A^2 u^2 + C^2 w^2)z^2 + 2uw(C^2 - A^2)xz) - x^2 \frac{B^4 + A^2 C^2}{B^2} - y^2 (A^2 + C^2) - z^2 \frac{A^2 C^2 + B^4 (A^2 u^2 + C^2 w^2)}{B^2} - 2uw B^3 (C^2 - A^2)xz + A^2 C^2 = 0$$

z której dla $z=B$ wypada:

$$(x^2 + y^2 + B^2)[x^2 + y^2 + 2 - B(C^2 - A^2)x + B^2(A^2 u^2 + C^2 w^2)] - x^2 \frac{B^4 + A^2 C^2}{B^2} - y^2 (A^2 + C^2) - 2B^3 uw(C^2 - A^2)x - B^4 (A^2 u^2 + C^2 w^2) = 0$$

czyli po wykonaniu działań:

$$x^4 + p^4 + 2x^2p^2 + 2 \frac{\sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}}{B^2} x p^2 + \\ + 2 \frac{\sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}}{B} x^3 + \frac{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}{B^2} x^2 = 0$$

Położmy w tym równaniu:

$$2r = \frac{\sqrt{B^2 - A^2}(C^2 - B^2)}{B^2} \quad (31)$$

natenczas otrzymamy:

$$x^4 + p^4 + 2x^2p^2 + 4rxp^2 + 4rx^3 + 4r^2x^2 = 0$$

$$\text{czyli:} \quad (x^2 + p^2 + 2rx)^2 = 0 \quad (32)$$

Zrównanie otrzymane wyobraża koło o promieniu r , którego obwód styczny jest do osi OY.

Cztery płaszczyzny osobliwie styczne dotykają się przeto powierzchni falowej w kołach o promieniu

$$r = \frac{\sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}}{2B}$$

które są zarazem początkiem czterech wypukłych ostro zakończonych lejków. W figurze 12. tab. VI. wykreślone są kłady owych kół na płaszczyznę XOZ, około stycznych podwójnych a_1b_1 , a_2b_2 , a_3b_3 , a_4b_4 ; w figurach 5, 6, 7 tab. III. i IV. zaś odpowiednie rzuty takowych przedstawiające się jako ellipsy, których osie drogą wykreślną z figury 12. z łatwością oznaczyć się dają.

V.

Do oznaczenia osobliwych płaszczyzn stycznych do powierzchni możemy dojść jeszcze innym ogólniejszym sposobem, podobnym do tego, jakiegośmy przy wyszukiwaniu punktów osobliwych na powierzchni użyli.

Przyjawszy punkt $x y z$ na powierzchni, szukaliśmy tam płaszczyzny stycznej do powierzchni w tym punkcie. Postawmy sobie teraz odwrotne zadanie: Przyjawszy położenie płaszczyzny stycznej, szukajmy jej punktu styczności.

Niech będzie $u x + v y + w z = 1$ równanie płaszczyzny dowolnej, to stałe u, v, w , wyobrażają dla tej płaszczyzny odwrócone wartości z kawałków przez tę płaszczyznę na odpowiednich osiach odciętych, gdyż oznaczając przez m, n, p , odpowiednie odcinki, otrzymamy równanie płaszczyzny w postaci:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$$

przeto:
$$u = \frac{1}{m} \quad v = \frac{1}{n} \quad z = \frac{1}{p}$$

Odcinki te a przeto także ich odwrócone wartości (u, v, w) oznaczają dokładnie i bez dwuznaczności położenie płaszczyzny, podobnie jak odcinki x, y, z , położenie punktu z wszelką ścisłością podają. Ilości u, v, w , nazywają się z tego powodu współrzędnymi płaszczyzny (Ebenecoordinaten). Znając takowe, otrzymamy wprost kawałki odcięte na osiach:

$$m = \frac{1}{u} \quad n = \frac{1}{v} \quad p = \frac{1}{w}$$

jakoteż kąty (a, b, c) , które normalna płaszczyzny z osiami współrzędnymi tworzy oznaczone przez wzory:

$$\cos a = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}; \cos b = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}; \cos c = \frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

Wszystkie punkta $(x y z)$ na tejże płaszczyźnie leżące, muszą spełniać warunek:

$$u x + v y + w z = 1,$$

przeto także jej punkt styczności z powierzchnią, który prócz tego czyni zadość równaniu powierzchni samej.

Jeżeli x, y, z , są współrzędne punktu powierzchni, natenczas współrzędne płaszczyzny stycznej do powierzchni w tym punkcie będą oznaczone przez wzory:

$$u = -\frac{f'(x)}{N}, \quad v = -\frac{f'(y)}{N}, \quad w = -\frac{f'(z)}{N}$$

gdzie

$$f'(x) = \frac{df}{dx}, \quad f'(y) = \frac{df}{dy}, \quad f'(z) = \frac{df}{dz}$$

$$N = xf'(x) + yf'(y) + zf'(z)$$

Dla powierzchni falowej otrzymamy na podstawie wzorów 24), współrzędne u, v, w , płaszczyzny stycznej w danym punkcie x, y, z , w postaci:

$$u = \frac{x[\Lambda^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 + \Lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) - A^2(B^2 + C^2)]}{N} = \frac{x F_1}{N}$$

$$v = \frac{y[\Lambda^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 + B^2(x^2 + y^2 + z^2) - B^2(A^2 + C^2)]}{N} = \frac{y F_2}{N}$$

$$w = \frac{z[\Lambda^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2 + C^2(x^2 + y^2 + z^2) - C^2(A^2 + B^2)]}{N} = \frac{z F_3}{N}$$

gdzie

$$\begin{aligned} N &= x^2 F_1 + y^2 F_2 + z^2 F_3 \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2)(\Lambda^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2) - [A^2(B^2 + C^2)x^2 - \\ &\quad - B^2(A^2 + C^2)y^2 - C^2(A^2 + B^2)z^2] = \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(\Lambda^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2) - A^2 B^2 C^2 \end{aligned} \quad 33)$$

Jeżeli teraz dane są współrzędne (u, v, w) płaszczyzny stycznej a chcemy oznaczyć współrzędne (x, y, z) punktu styczności, musimy tedy rozwiązać powyższe trzy równania pod 33) podane podług niewiadomych x, y, z ; wartości na x, y, z , otrzymane będą tedy funkcjami stałych u, v, w , a wprowadzone w równanie powierzchni

$f(x, y, z) = 0$ dadzą nowe równanie $f(u, v, w) = 0$ któremu współrzędne płaszczyzny zadość czynić muszą, jeżeli takowa ma być do powierzchni styczną.

Otrzymane równanie $f(u, v, w)$ będzie równaniem powierzchni obwiniętej przez płaszczyzny do niej styczne i nazywa się równaniem powierzchni wyrażonem w współrzędnych jej płaszczyzn stycznych, podobnie jak $f(xyz) = 0$ jest równaniem powierzchni, jako miejsca jej punktów i nazywa się równaniem powierzchni danem w współrzędnych jej punktów.

Otrzymamy przeto za pośrednictwem równań 33)

$$f(xyz) = f(uvw)$$

Na oznaczenie kształtu $f(uvw)$ otrzymamy wprzód z 33)

$$\begin{aligned} x &= \frac{u[(B^2 C^2 u^2 + \&) + B^2 C^2 (u^2 + \&) - (B^2 + C^2)]}{N'} = \frac{uF_u}{N'} \\ y &= \frac{v[(B^2 C^2 u^2 + \&) + A^2 C^2 (u^2 + \&) - (A^2 + C^2)]}{N'} = \frac{vF_v}{N'} \\ z &= \frac{w[(B^2 C^2 u^2 + \&) + A^2 B^2 (u^2 + \&) - (A^2 + B^2)]}{N'} = \frac{wF_w}{N'} \end{aligned}$$

gdzie $N' = u^2 F_u + v^2 F_v + w^2 F_w$ 34)

Punkt styczności x, y, z , płaszczyzny (uvw) będzie nieoznaczony, skoro współrzędne płaszczyzny spełniają równocześnie trzy warunki:

$$uF_u = 0 \quad vF_v = 0 \quad wF_w = 0$$

Taka płaszczyzna będzie osobliwą płaszczyzną styczną.

Warunkom powyższym czyni zadość jedna z następujących grup równań:

- 1) $u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0$
- 2) $F_u = 0 \quad F_v = 0 \quad F_w = 0$
- 3) $u = 0 \quad v = 0 \quad F_w = 0$
- 4) $u = 0 \quad F_v = 0 \quad w = 0$

- 5) $F_u=0 \quad v=0 \quad w=0$
- 6) $u=0 \quad F_v=0 \quad F_w=0$
- 7) $F_u=0 \quad v=0 \quad F_w=0$
- 8) $F_u=0 \quad F_v=0 \quad w=0$

Pierwsze równanie cechuje płaszczyznę przecinającą wszystkie trzy osie w nieskończoności, drugie nie daje oznaczonej płaszczyzny, trzecie, czwarte i piąte wyobrażają płaszczyzny równoległe do jednej z płaszczyzn rzutowych, które nie mogą być płaszczyznami stycznymi do powierzchni. Jedynie grupy szósta, siódma i ósma mogą dać osobliwe płaszczyzny styczne. Równania te podają płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzn rzutowych jako płaszczyzny osobliwe. Z tych może tylko płaszczyzna równoległa do osi OY oznaczona grupą 7), wyznaczyć więcej jak jeden punkt styczności czyli być osobliwą styczną.

Z grupy $F_u=0 \quad v=0 \quad F_w=0$ otrzymamy następujące trzy równania:

$$B^2C^2u^2 + A^2B^2w^2 + B^2C^2(u^2 + w^2) - (B^2 + C^2) = 0$$

$$v=0$$

$$B^3C^2u^2 + A^2B^2w^2 + A^2B^3(u^2 + w^2) - (A^2 + B^2) = 0$$

z których wynikają warunki

$$\begin{aligned} B^2(u^2 + w^2) &= 1 \\ C^2u^2 + A^2w^2 &= 1 \\ v &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

które współrzędne (u, v, w) osobliwej płaszczyzny stycznej spełniać muszą.

Warunki te są tożsame z tymi, któreśmy pod 30) na innej drodze otrzymali. Wypowiadają one, że osobliwe płaszczyzny styczne do płaszczyzny XOZ są prostopadłe a ich ślady na płaszczyźnie XOZ wspólne styczne do koła o promieniu B i ellipsy o półosiach C i A.

Ze równań 35) otrzymamy spółrzedne czterech osobliwych płaszczyzn w postaci:

$$u = \pm \frac{1}{B} \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}}; \quad v = 0; \quad w = \pm \frac{1}{B} \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}}$$

a ich odcinki na osiach współrzędnych OX, OY, OZ,

$$m = \frac{1}{u} = B \sqrt{\frac{C^2 - A^2}{B^2 - A^2}}$$

$$n = \frac{1}{v} = \infty$$

$$p = \frac{1}{w} = B \sqrt{\frac{C^2 - A^2}{C^2 - B^2}}$$

Miedzy spółrzednymi (xyz) osobliwych punktów a spółrzednymi (uvw) osobliwych płaszczyzn stycznych zachodzą przeto relacje:

$$x = BC.u \quad y = AC.v = 0, \quad z = AB.w$$

Oznaczenie krzywej styczności powierzchni z płaszczyzną osobliwą może się odbyć za pomocą spółrzednych płaszczyzny w podobny sposób, jak oznaczenie stożka styczności w punkcie osobliwym za pomocą spółrzednych punktu. W tym celu otrzymamy za wprowadzeniem spółrzednych u, v, w, płaszczyzny stycznej w równanie powierzchni nowe równanie:

$$f(uvw) = (u^2 + v^2 + w^2)(B^2 C^2 u^2 + A^2 C^2 v^2 + A^2 B^2 w^2) - [(B^2 + C^2)u^2 + (A^2 + C^2)v^2 + (A^2 + B^2)w^2] + 1 = 0$$

które określa warunek, jakie spółrzedne płaszczyzn stycznych do powierzchni falowej spełniać muszą. Wyobraża ono przeto powierzchnię przez płaszczyzny styczne obwiniętą i nazywa się dlatego równaniem powierzchni falowej współrzędnych jej płaszczyzn.

Zrównanie powyższe nadaje się do dyskusyi zarówno dobrze jak zrównanie $f(xyz) = 0$.

Punkt styczności dowolnej płaszczyzny (uvw) oznaczony będzie przez zrównanie:

$$\frac{df}{du} u + \frac{df}{dv} v + \frac{df}{dw} w = N'$$

z którego wynikają jego spółrzedne:

$$x = \frac{f'(u)}{N'}, \quad y = \frac{f'(v)}{N'}, \quad z = \frac{f'(w)}{N'}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} f'(u) &= 2u[(B^2C^2u^2 + \&) + B^2C^3(u^2 + \&) - (B^2 + C^2)] = 2uF_u \\ f'(v) &= 2v[(B^2C^2u^2 + \&) + A^2C^2(u^2 + \&) - (A^2 + C^2)] = 2vF_v \quad 36) \\ f'(w) &= 2w[(B^2C^2u^2 + \&) + A^2B^2(u^2 + \&) - (A^2 + B^2)] = 2wF_w \\ N' &= u^2F_u + v^2F_v + w^2F_w = \\ &= 2(u^2 + v^2 + w^2)(B^2C^3u^3 + A^2C^2v^2 + A^2B^2w^2) - \\ &\quad - [(B^2 + C^2)u^2 + (A^2 + C^2)v^2 + (A^2 + B^2)w^2] = \\ &= (u^2 + v^2 + w^2)(B^2C^3u^2 + A^2C^3v^2 + A^2B^2w^2) - 1 \end{aligned}$$

Spółrzedne w ten sposób otrzymane muszą być oczywiście identyczne z wartościami pod 34) otrzymanymi.

Krzywa styczności osobliwej płaszczyzny z powierzchnią będzie miała zrównanie:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2f}{du^2}(U-u)^2 + \frac{d^2f}{dv^2}(V-v)^2 + \frac{d^2f}{dw^2}(W-w)^2 + \\ &+ 2\frac{df}{du\,dv}(U-u)(V-v) + 2\frac{df}{du\,dw}(U-u)(W-w) + \\ &+ 2\frac{df}{dv\,dw}(V-v)(W-w) = 0 \end{aligned}$$

gdzie U, V, W wyobrażają spółrzedne zmienne, a u, v, w spółrzedne stałe pewnej osobliwej płaszczyzny.

Na podstawie 36) otrzymamy uwzględniając warunek:

$$F_u = 0, \quad v = 0 \quad F_w = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{du^2} &= 4B^2 C^2 u^2 \\ \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dv^2} &= -\frac{1}{B^2} (B^2 - A^2) (C^2 - B^2) \\ \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dw^2} &= 4A^2 B^2 w^2 \end{aligned} \right| \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dv dw} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{du dw} &= 2(A^2 + C^2) B^2 u w \\ \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{du dv} &= 0 \end{aligned}$$

gdzie:

$$u = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}} \quad v = 0 \quad w = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}}$$

rozumieć należy.

Wprowadzając powyższe wartości w ogólne równanie krzywej stycznej, otrzymamy równanie:

$$4B^2 C^2 u^2 (U - u)^2 - \frac{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}{B^2} V^2 + \\ + 4A^2 B^2 w^2 (W - w)^2 + 4(A^2 + C^2) B^2 u w (U - u)(W - w) = 0 \quad 37)$$

które dowodzi, że krzywa styczna jest krzywą drugiego stopnia i to ellipsą, której jedna oś jest osi OY równoległą, a druga w płaszczyznę XOZ wpada. Rzeczywiste wielkości tych osi oznaczmy najwygodniej za pomocą rzutu tej krzywej na płaszczyznę XOY; kładąc $W = 0$, otrzymamy równanie rzutu w postaci:

$$4B^2 C^2 u^2 (U - u)^2 - \frac{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}{B^2} V^2 + \\ + 4B^2 A^2 w^4 - 4(A^2 + C^2) B^2 u w^2 (U - u) = 0 \quad 38)$$

gdzie U, V wyrażają spółrzędne stycznych do rzutu. Za podstawieniem $U = 0$ otrzymamy:

$$4B^2 C^2 u^4 - \frac{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}{B^2} V^2 + 4B^2 A^2 w^4 + \\ + 4(A^2 + C^2) B^2 u^2 w^2 = 0$$

a ztąd:

$$V^2 = \frac{4B^4 (C^2 u^2 + A^2 w^2) (u^2 + w^2)}{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)} \quad \text{czyli}$$

$$V^2 = \frac{4B^2}{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}$$

Pierwiastek V jest współrzedną stycznej do rzutu, a z powodu $U=0$ równoległej do osi OX . Odwrócona wartość tego pierwiastka będzie przeto wyobrażać długość przez tę styczną na osi OY odciętą, która oczywiście równać się musi półosi b rzutu' do OY równoległej, a zatem także półosi b krzywej styczności. W skutek tego otrzymamy długość powyższej półosi:

$$b = \frac{\sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}}{2B}$$

Wartość drugiej półosi rzutu, otrzymamy w podobny sposób z zrównania 38). Za podstawieniem $V=0$ dostaniemy:

$$B^2 C^2 u^2 (U-u)^2 + B^2 A^2 w^4 - (A^2 + C^2) B^2 u w^2 (U-u) = 0$$

z czego wypada:

$$B^2 C^2 u^2 U^2 - (B^2 + C^2) u U + 1 = 0$$

gdzie U oznacza spółrzedne stycznych do rzutu a równoległych do osi OY , przeto zarazem odwrócone wartości z kawałków przez te styczne na osi OX odciętych. Wedle powyższego wzoru istnieją dwie takie wartości, których różnica będzie długością drugiej osi rzutu wpadającej w oś OX .

Kładąc $m = \frac{1}{U}$ otrzymamy

$$m^2 - (B^2 + C^2) u m + B^2 C^2 u^2 = 0$$

z czego wypada:

$$\begin{aligned} m &= \frac{(B^2 + C^2)u}{2} \pm \sqrt{\frac{(B^2 + C^2)^2 u^2 - 4B^2 C^2 u^2}{4}} = \\ &= \frac{B^2 + C^2}{2} \cdot u \pm \frac{(C^2 - B^2)u}{2} \end{aligned}$$

przeto:

$$m_1 = C^2 u, \quad m_2 = B^2 u$$

Oznaczmy długość szukanej osi przez $2a$, natenczas będzie:

$$2a = m_1 - m_2 = u(C^2 - B^2)$$

przeto:

$$a = \frac{(C^2 - B^2)u}{2} = \frac{C^2 - B^2}{2B} \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - A^2}}$$

Długość otrzymana $2a$ jest ale rzutem na oś OY tej osi krzywej styczności, która w podwójną styczną wpada a w figurze 12) przez $a_1 b_1$ jest oznaczoną. Oznaczmy ją przez $2a$, a kąt nachylenia podwójnej stycznej względem osi OX przez l , tedy będzie:

$$a = a_1 \cos l$$

z kądem ze względu że

$$\cos l = \frac{w}{\sqrt{u^2 + w^2}} = B w = \sqrt{\frac{C^2 - B^2}{C^2 - A^2}}$$

wypada:

$$a = a_1 \sqrt{\frac{C^2 - A^2}{C^2 - B^2}} = \frac{C^2 - B^2}{2B} \sqrt{\frac{B^2 - A^2}{C^2 - B^2}}$$

czyli:

$$a = \frac{1}{2B} \sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}$$

Z tego wynika, że $a = b$; krzywa styczności płaszczyzny osobiwej z powierzchnią falową jest więc elipsą równoosiową czyli kołem o promieniu:

$$r = \frac{1}{2B} \sqrt{(B^2 - A^2)(C^2 - B^2)}$$

Łącząc punkta każdej z czterech krzywych styczności ze środkiem powierzchni, otrzymamy dwa stożki drugiego stopnia, z których każdy po dwa koła styczności

po przeciwniej stronie środka na swej pobocznej mieści. Każdy z tych stożków ma oczywiście płaszczyznę XOZ za płaszczyznę główną, a płaszczyzny równoległe do jednej pary płaszczyzn osobliwych za płaszczyzny przekrojów kołowych. Płaszczyzny drugiego szeregu przekrojów kołowych jako też inne dwie płaszczyzny główne, są do płaszczyzny XOZ prostopadłe.

VI.

Kształt powierzchni falowej byłby tedy na podstawie poprzednich ustępów pod względem najważniejszych własności przekrojów i krzywizny powierzchni w zupełności zbadany. Co się tyczy krzywych płaskich na powierzchni, to dają się prócz tego za uwzględnieniem osobliwości powierzchni z łatwością wysnuć następujące prawidła:

Płaszczyzna, która nie przecina żadnego z lejkowatych zagłębień powierzchni, daje krzywe bez osobliwych punktów i bez osobliwych stycznych. Są to zwykle jedna lub dwie oddzielne krzywe zamknięte nie wyposażone osobliwościami. Jedna z tych krzywych, mianowicie wewnętrzna sprowadzić się może do punktu odosobnionego.

Płaszczyzna, która przecina wprowadzie brzeg jednego z lejków, ale nie przechodzi przez żaden z punktów osobliwych powierzchni przecina powierzchnię w ogólności w dwóch oddzielnych krzywych, z których zewnętrzna posiada jedną, dwie lub cztery osobliwe styczne, zależnie od tego, ile z czterech kół styczności przecina. Wewnętrzna niema tych osobliwości i sprowadza się częstokroć do punktu odosobnionego.

Płaszczyzna, która przechodzi przez jeden punkt

osobliwy powierzchni, przecina powierzchnię w krzywej, dla której ten punkt będzie także punktem osobliwym, i to punktem podwójnym, to jest punktem przecięcia dwóch gałęzi krzywej, jeżeli płaszczyzna przecinająca zarazem stożek stycznej w dwóch rodzajach przecina; punktem zwrotu, jeżeli płaszczyzna jest jedną z płaszczyzn do powyższego stożka stycznych, albo wreszcie punktem odosobnionym, jeżeli płaszczyzna przecinająca prócz wierzchołka, nie ma z tym stożkiem wspólnego.

W figurach 5, 6 i 7, w których wykreślone są przekroje powierzchni falowej płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn współrzędnych, występują już niektóre z powyższych osobliwości, inne dadzą się bez rachunku z łatwością za pomocą powyższych figur wykreślić.

Z krzywych o podwójnej krzywiznie leżących na powierzchni zasługują przedewszystkiem na uwagę stożkowe sferyczne i ellipsoidalne, o których w ustępie III. była mowa. Zrobiliśmy tamże uwagę, że wspomniane krzywe widocznie pod kątem prostym się przecinają. Że tak jest w istocie, wynika z następującego dowodu.

Krzywe sferyczne i ellipsoidalne mieszczą się na dwóch szeregach współśrodkowych stożków oznaczonych równaniami:

$$\frac{A^2 x^2}{r^2 - A^2} + \frac{A^2 y^2}{r^2 - B^2} + \frac{C^2 z^2}{r^2 - C^2} = 0$$

$$\frac{A^2 x^2}{R^2 - A^2} + \frac{B^2 y^2}{R^2 - B^2} + \frac{C^2 z^2}{R^2 - C^2} = 0$$

gdzie ze względu na 22)

$$R^2 = \frac{A^2 B^2 C^2}{A^2 x^2 + B^2 y^2 + C^2 z^2} = \frac{A^2 B^2 C^2}{E^2}$$

Uwzględniając tę relację, otrzymamy równanie drugiego szeregu stożków w postaci:

$$E^2 - B^2 C^2 + E^2 - A^2 C^2 + E^2 - A^2 B^2 = 0$$

Płaszczyzny styczne do dwóch stożków przez punkt (x'y'z') powierzchni falowej przechodzących, będą miały równania:

$$\frac{A^2 x x'}{r^2 - A^2} + \frac{B^2 y y'}{r^2 - B^2} + \frac{C^2 z z'}{r^2 - C^2} = 0$$

$$\frac{x x'}{E^2 - B^2 C^2} + \frac{y y'}{E^2 - A^2 C^2} + \frac{z z'}{E^2 - A^2 B^2} = 0$$

z których na oznaczenie ich nachylenia otrzymamy:

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{A^2 x'^2}{(r^2 - A^2)(E^2 - B^2 C^2)} + \frac{B^2 y'^2}{(r^2 - B^2)(E^2 - A^2 C^2)} + \\ &+ \frac{C^2 z'^2}{(r^2 - C^2)(E^2 - A^2 B^2)} = \frac{A^2(B^2 + C^2) - A^4 - B^2 C^2}{B^2} + \\ &+ \frac{B^2(A^2 + C^2) - B^4 - A^2 C^2}{A^2} + \frac{C^2(A^2 + B^2) - C^4 - A^2 B^2}{C^2} = \\ &= \frac{A^2(B^2 - C^2) + B^2(C^2 - A^2) + C^2(A^2 - B^2)}{(A^2 - B^2)(B^2 - C^2)(C^2 - A^2)} = 0 \end{aligned}$$

czyli $a = 90^\circ$ co dowodzi, że owe dwa szeregi stożków w rodzących pod kątem prostym się przecinają.

Ponieważ styczna do krzywej sferycznej w punkcie M jest prostopadłą na promień sfery czyli na krawędź przecięcia się obydwóch stożków, przeto jest także prostopadłą na drugi stożek, więc na styczną do krzywej eliipsoidalnej, co było właśnie do udowodnienia.

VII.

Szczególne gatunki powierzchni falowej otrzymamy przyjmując dwie ze stałych $A < B < C$ jako równe. I tak dostaniemy ze zrównania 1) dla $A = B$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - B^2)[B^2(x^2 + y^2) + C^2z^2 - B^2C^2] = 0 \quad 39)$$

kulę i ellipsoidę obrotową skróconą styczną w końcach wspólnej osi obrotu OZ; dla $B = C$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - B^2)[A^2x^2 + B^2(y^2 + z^2) - A^2B^2] = 0 \quad 40)$$

kulę i ellipsoidę obrotową wydłużoną styczną w końcach wspólnej osi OX.

Nareszcie przyjmując $A = B = C$ otrzymamy zrównanie:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - A^2)^2 = 0$$

powierzchnia falowa sprowadza się w tym wypadku do powierzchni kuli czyli raczej do dwóch kul równych do siebie przylegających. Powierzchnia obrotowa, której południkiem jest ellipsa do koła w końcu osi styczną, i kula, są przeto szczególnymi odmianami powierzchni falowej. Uwzględniając że

$$A^2 = b^2 + c^2, \quad B^2 = a^2 + c^2, \quad C^2 = a^2 + b^2$$

otrzymamy dla $A = B = C$ także $a = b = c$ co prowadzi do następujących prawideł:

Wierzchołki stożków stycznych do ellipsoidy obrotowej (aac) a posiadających w jednym z głównych przekrojów dwie prostopadłe rodzące mieszczą się na powierzchni obrotowej złożonej z kuli i ellipsoidy obrotowej.

Wierzchołki stożków tego rodzaju stycznych do kuli o promieniu r mieszczą się na powierzchni kuli o promieniu $r\sqrt{2}$ czyli na powierzchni kuli zakreślonej promieniem równym przekątnej kwadratu z długości r zbudowanego



[1878 r. II]

II.

Wiadomości szkolne

podane przez zastępcę Dyrektora

MIECZYŚŁAWA JAMRÓGIEWICZA.





Statystyka zakładu.

I.

Skład grona nauczycielskiego.

Posada dyrektora nie obsadzona.

1. Jamrógiewicz Mieczysław, profesor, zastępca dyrektora; uczył matematyki i fizyki w klasie VII. — 9 godzin.
2. Fangor Erazm, profesor; zamianowany inspektorem okręgowym w Drohobyczu.
3. Ks. Wojnar Franciszek, profesor, katecheta rz. kat.; uczył religii we wszystkich klasach. — 14 godz.
4. Dziewoński Józef, profesor, uczył rysunków odręcznych w klasie IV, V, VI i VII; kaligrafii w kl. II i III. — 20 g.
5. Bobin Romuald Artur, nauczyciel; uczył języka polskiego w kl. III, IV, V, VI i VII. — 15 godz.
6. German Ludomił, nauczyciel; uczył języka niemieckiego, historii powszechnej i geografii w kl. VI i VII. — 16. godz.
7. Hoff Bogdan, nauczyciel; przydzielony do szkoły realnej krakowskiej.
8. Bryk Kazimierz nauczyciel; uczył matematyki w kl. II i V, fizyki w kl. III, IV i VI. — 18 godz.
9. Panek Jędrzej, nauczyciel; uczył języka polskiego w kl. Ia, Ib, i II; historii naturalnej w kl. Ia i Ib. — 17 godz.
10. Dziwiński Placyd, nauczyciel; uczył matematyki w kl. IV i VI i wykreślnej geometryi w kl. IV, V, VI i VII — 20 g.

11. Rębacz Michał, nauczyciel; uczył matematyki w kl. III i wykresłej geometryi w kl. Ia, Ib, II i III. — 19 godz.
12. Kobak Jan, egzaminowany zastępca nauczyciela; uczył języka niemieckiego w kl. Ia i Ib, historyi i geografii w kl. II. III. — 19 godz.
13. Jaworski Józef, zastępca nauczyciela; uczył matematyki w kl. Ia i Ib, historyi naturalnej w kl. II, V, VI i VII. — 19 godz.
14. Dzięrzyński Franciszek, zastępca nauczyciela; uczył języka niemieckiego w kl. II. i III. — 11. godz.
15. Balawelder Walenty, zastępca nauczyciela; uczył języka niemieckiego w kl. IV, kaligrafii w kl. Ia i Ib. — 9 godz.
16. Bandrowski Stanisław, zastępca nauczyciela; uczył chemii w kl. IV, V, VI i VII i rysunków odręcznych w kl. II. III. — 19 godz.
17. Mrawinczyc Bronisław, zastępca nauczyciela; uczył języka niemieckiego w kl. V, historyi w kl. IV i V, geografii w kl. Ia, Ib, IV i V. — 19 godz.
18. Ks. Gmitryk Hilary, zastępca katechety; uczył religii gr. kat. we wszystkich klasach — 7 godz.
19. Janelli Franciszek, asystent rysunków geometrycznych.

Nauczyciele przedmiotów nadobowiązkowych.

German Ludomił, Kobak Jan i Mrawinczyc Bronisław, uczyli historyi kraju rodzinnego.

Bandrowski Stanisław, prowadził ćwiczenia w laboratorium chemicznem.

Baumgarten Jakób, uczył religii Mojżeszowej.

Kwiatkowski Józef, uczył języka francuskiego.

Sawertal Wacław, uczył muzyki.

Przysiecki Antoni, uczył śpiewu.

Krzepkowski W., uczył gimnastyki.

Gospodarze klas.

Kobak Jan w kl. Ia.

Panek Jędrzej w kl. Ib.

Dziurzyński Franciszek w kl. II.
Rębacz Michał w kl. III.
Balawelder Walenty w kl. IV.
Bryk Kazimierz w kl. V.
German Ludomił w kl. VI.
Bobin Romuald Artur w kl. VII.

II.

Srodki naukowe.

1. Biblioteka.

Zawiadowca: Romuald A. Bobin.

a) Biblioteka dla nauczycieli pomnożyła się w roku bieżącym o 53 dzieł w 119 tomach i 118 programów. Liczy zatem z końcem roku 630 dzieł w 1121 tomach, wliczając w to 306 broszur i programów szkolnych.

Ze środków naukowych nabyto między innemi następujące dzieła:

Brehm. Thierleben (51 zeszytów). Estreicher. Bibliografia polska t. IV. Grubbe. Geogr. Charakterbilder. Guhl u. Kohner. Das Leben der Griechen und Römer. Hann-Hochstätter. Allgemeine Erdkunde. Hückel. Rys pedagogiki. Kluck. Dykeyonarz roślinny (3 t.) Kunzek. Astronomie. Kutzner. Geogr. Bilder. Leunis. Mineralogie. Lelewel. Wykład dziejów powszechnych (2 t.) Leśniewski. Historia naturalna (3 t.) Museum der neuesten Reisebeschreibungen (19 t.) Olewiński. Stenografia. Petermann. Geogr. Mitteilungen 1877. Pütz. Geschichte des Alterthums, Vergleichende Erdbeschreibung. Vogler. Meth. Schule der Naturgeschichte (2 t.) Zabłocki. Dzieła (2 t.) Zdanowicz. Rys dziejów literatury polskiej t. IV. Otrzymano w darze: Od W. Ministerium Oświecenia: Vaterländisches Ehrenbuch; od Niewiadomskiego z kl. VII: Gorzkowski. O rusińskiej i polskiej szlachcie; od Łomińskiego z kl. IV: Orzechowski. Kroniki.

Pism peryodycznych prenumerowano 7: Verordnungsblatt

d. Ministeriums für Kultus u. Unterricht. Petermann. Geogr. Mitteilungen. Naturforscher. Annalen der Physik u. Chemie. Przegląd krytyczny. Szkoła. Zeitschrift für d. Realschulwesen.

b) **Czytelnia dla młodzieży** wzrosła w tym roku o 32 tomów; ogółem liczy 712 książek.

Z funduszków szkolnych nabyto: Bojesen. Starożytności greckie i rzymskie (2 t.) X. Czartoryski. Żywot J. U. Niemcewicza. Macó. Historia Kęsa Chleba. Neumann. Kalista. W. Pol. Dzieła. (t. 8—10). Sawczyński. Franklin Waszyngton. Shakespeare's Werke (9 t.) Verne. Chancellor.

Darami przyczynili się do pomnożenia tego zbioru: Dobrzański, Lisowski, Mahl, Poznalski z kl. I; Mark z kl. II; Niewiadomski Z., Krzanowski. Semenjuk z kl. III; Merak, Uryniak z kl. VI; Borkowski, Reder z kl. VII; G. Niewiadomski, słuchacz techniki.

Książki wypożyczano do domu — od Października do Maja — dwa razy w tygodniu: w sobotę po nauce szkolnej uczniom klas niższych; w Niedzielę po nabożeństwie uczniom klas wyższych.

c) **Biblioteka dla ubogich uczniów** liczy 305 tomów.

W bieżącym roku zakupiono: Bączalski. Arytmetyka. Beltinger. Geografia (3 ex.) Egger. Deutsches Lesebuch (3 ex.) Janota. Wypisy niemieckie. (7 ex.) Klun. Geografia powszechna. Kunzek-Staneczki. Fizyka. Jandaurek. Deutsches Lesebuch. Szaraniewicz. Statystyka (2 ex.) Welter. Dzieje (2 ex.). Wypisy polskie t. I. Otrzymano od wydawców: Egger. Deutsches Lesebuch (2 ex.) Staneczki. Fizyka. Bączalski. Początki geometrii. Wierzbicki. Geometria wykreslna. Benoni. Rys geografii i historii. Sokołowski. Historia starożytna. Prócz tego ofiarowali: Koln z kl. II. jedną książkę, Kornmann z kl. IV. (1), Reder z kl. VII (3), Rydel z kl. VII (6), Zucker z kl. VII. (2).

2) **Zbiór geograficzny.**

Zawiadowca: Ludomił German.

W bieżącym roku zakupiono z funduszków szkolnych:

1) Mapę Jarosławia z okolicą (litogr.)

2) B. Kozenn. Palestyna (dwa exemplarze.)

3) „ „ Wschodnia i zachodnia półkula.

4) L. Schiaparelli & C. E. Mayr. Nuova Carta generale del Regno d' Italia.

5) Antoni Doleżal: Galicya i Bukowina.

6) K. von Czoernigg. Ethnographische Karte der öst. ung. Monarchie.

7) dto. (mały format).

Nadto odkopiowali uczniowie zakładu 5 map ściennych, które wysłano na wystawę krajową we Lwowie w r. 1877 a po zamknięciu tejże przechowano w zbiorach zakładu; mianowicie:

1. Azya, kopia z mapy F. Handtkiego (Roman Dzieślewski z kl. VI.)

2. Afryka, kopia z mapy F. Handtkiego (Teofil Dujanowicz z kl. VI)

3. Europa w drugiej połowie X. w., kopia z mapy Bretschneidera (Jan Reder z kl. VII.)

4. Europa w czasie wojen krzyżowych, kopia z mapy Bretschneidera (Adam Treter z kl. VII.)

5. Europa w czasie trzydziestoletniej wojny, kopia z mapy Bretschneidera (Adam Godziński z kl. V.)

Natomiast wykreślono z inwentarza 8 map ściennych uszkodzonych i do użytku szkolnego nie przydatnych na mocy rozp. Wys. Rady szkolnej krajowej z 23. Lutego 1877 l. 11132.

Z końcem roku szkolnego posiada zakład:

1. Globusy	2
2. Telluryum	1
3. Map ściennych	55
4. Atlasów	6

3. Gabinet do rysunków odręcznych.

Zawiadowca: Józef Dziewoński.

Zakupiono w roku bieżącym:

I. Storek. Ministerial Vorlagen XI,

A. Andel. Das polychrome Flachornament, zeszyt 1 i 2, nadto 10 ram do rozwieszania wzorów.

4. Gabinet fizykalny.

Zawiadowca: Kazimierz Bryk.

W bieżącym roku zakupiono u Steflitschka w Wiedniu:

1) Wielokrążek różnicowy, 2) sygnał akordowy, 3) przyrząd do okazania ruchów drgających, 4) mikroskop złożony, 5) lunetę otwartą t. j. modele lunet astronomicznej, terestrycznej i Galileusza, 6) zwierciadło Fresnela, 7) dwie tablice do analizy spectralnej, 8) przyrząd spectralny, 9) Newtona pierścienie, 10) sextant, 11) telegraf Morsee'go, 12) Jneli — i Declinatorium, 13) elektrofor z kauczuku, 14) motor elektryczny do rurek Geislerowskich, 15) para telefonów z drutem 50 metrów długości, 16) warsztat stolarski i tokarnię z przyrządami.

W laboratorium fizykalnym pracowało 6 uczniów pod kierownictwem Mieczysława Jamrógiewicza.

5) Gabinet chemiczny.

Zawiaadowca: Stanisław Bandrowski.

W roku bieżącym przybyło:

a) chemikaliów	.	.	.	.	.	7
b) rysunków tablic technologicznych.	.	.	.	.	.	2

w darze otrzymał gabinet:

a) model przyrządu Natterera do zgęszczania gazów.	.	.	.	.	.	6
b) okazów technologicznych	.	.	.	.	.	6

W laboratorium chemicznym pracowało 24 uczniów w 2 oddziałach po 2 godziny tygodniowo.

6) Gabinet do rysunków geometrycznych.

Zawiaadowca: Placyd Dziwiński.

a) Modele naukowe. Do 18 modeli drewnianych, 12 pobielanych i 24 drutowych przybyły w ciągu roku

1. modele geometrii wykreslonej zakupione u Schrödera w Darmstacie ze środków naukowych;
2. modele przez uczniów klasy 4, 5, 6 i 7, wykonane, między innymi: Płaszczyzny równoległe (Rożański 4) proste równonachylone do płaszczyzny (Czerwiński 4), rzuty prostej (Godziński 5), kłady prostej (De Laveaux 5), ślady płaszczyzn (Godziński, De Laveaux) przesuwanie płaszczyzn (Malinowski 5), zręby dachu (Dujanowicz, Uryniak 6), hyperboloida obrotowa (Angermann 7), eliptyczna (Lhotsky 7), paraboloida hiperboliczna (Rozborski, Merak 7), konoid kołowy (Weiss, Zucker 7).

b) Wzory rysunkowe. W ciągu roku nabyto plany katastralne miasta Jarosławia i okolicy arkuszy 16 i zatrzymano lepsze prace uczniów.

c) Przybory rysunkowe i miernicze. W ciągu roku sprawiono ze środków naukowych dwa pudła na rysunki, 6 trasyrek, stolik do szkicowania z podziałką i 10 ram szklonych na wzory.

Uczniowie klasy 4 wykonali w pracowni szkolnej 3 stoliki do szkicowania (Czaprański, Rożański, Czermiński) 2 węgielnice Radwan, Rożański), śrutwę (Rożański), i pantograf (Czermiński).

6) Gabinet historyi naturalnej.

Zawiadowca: Józef Jaworski.

W roku szkolnym 1878 zakupiono dla nauki zoologii:
30 okazów w spiritusie
12 okazów suchych,
6 tablic jako dalszy ciąg z atlasu zoologicznego: Ad. Lehmann & H. Leutemann.

Do mineralogii.

250 modeli krystalograficznych z drzewa.

Na mocy rozporządzenia Wys. Rady szkolnej krajowej z d. 23. Listopada 1877 l. 11132 wykreślono 25 pozycyj z inwentarza i z powodu zużycia wydzielono z gabinetu.

III.

Temata

do prac piśmiennych.

A) W języku polskim.

W klasie V.

1. Jakiej porze, życia ludzkiego najwięcej odpowiada jesień.
2. Opisać powrót z wakacyi.
3. Często mała iskierka wielki pożar wznieca.

4. Jak cię widzą, tak cię piszą.
5. O grzeczności. (Podług „Pana Tadeusza.”)
6. Stałość — upor.
7. Gerwazy i Protazy.
8. Jak rozumieć przysłowie: „Nie ma złego, coby na dobre nie wyszło.”
9. Korzyści polowania.
10. Co było powodem upadku greckiej niepodległości.
11. Żelazo a złoto.
12. Znaczenie nauki gimnastyki.
13. Z jakich powodów człowiek zabija zwierzęta.
14. Życie ludzkie podobne do biegu rzeki.
15. Obraz zarożumiałego ucznia.
16. Charakter Konrada Wallenroda.
17. O ile winniśmy unikać w języku naszym wyrazów obcych.
18. Przyczyny zawziętych wojen Rzymian z Kartagińczykami.

Bobin.

W klasie VI.

1. Przyczyny upadku państwa zachodnio-rzymskiego.
2. Znaczenie i stanowisko Mikołaja Reja z Nagłowic w literaturze polskiej.
3. Charakterystyka samoluba.
4. O korzyściach podróżowania.
5. Stypendya i bursy.
6. Osnowa trenu J. Kochanowskiego p. t. „Tren albo ten.”
7. Czy słusznie nadają niektórzy historycy Bolesławowi Chrobremu przydomek „Wielki.”
8. Jaki wpływ wywiera na człowieka wiara w nieśmiertelność duszy?

9. Kiedy czytanie książek może być szkodliwem?
10. Skutki wojen krzyżowych.
11. Jan Kochanowski i Szymonowicz.
12. Dlaczego uczymy się obcych języków?
13. Samotność a towarzystwo.
14. Obmowa.
15. Charakterystyka Kazimierza Wielkiego.
16. Kwiaty i nadzieje.
17. „Suknia grunt!” (Satyra).

Bobin.

W klasie VII.

1. Jakie korzyści przynoszą wystawy dzieł przemysłu i sztuk pięknych?
2. Zasługi Stan. Konarskiego około oświaty w Polsce.
3. Rozwinąć myśl zawartą w czterowierszu „Dziadów:”
Bo słuchajcie i zważcie u siebie,
Że według bożego rozkazu,
Kto nie doznał goryczy ni razu,
Ten nie dozna słodyczy i w niebie.
4. Wpływ teatru na literaturę i oświatę.
5. Dziejowe znaczenie odsieczy wiedeńskiej.
6. „...Świętym ten na ziemi
Kto umiał przyjaźń zabrać ze świętymi.”
Konrad Wallenrod.
7. Mowa przeciw zbytkom.
8. Korzyści nauk przyrodzonych.
9. „Nauką i pieniędzmi drudzy się bogacą,
Mądrość musisz sam z siebie własną dobyć pracą.”
A. Mickiewicz.
10. Osnowa „Maryi” Małczewskiego i charakterystyka głównych osób tego poematu.

11. „Minęły czasy szczęśliw'ej prostoty,
Trzeba się uczyć, upłynął wiek złoty.“
Ig. Krasicki.
12. Jakie korzyści przynosi nam nauka dziejów literatury ojczystej?
13. Rozmyślania przy wyborze stanu.
14. Czem się różni epoka narodowa literatury polskiej od poprzedniej?
15. Charakter Jacka Soplicy.
16. Znaczenie dróg handlowych (z szczególném uwzględnieniem Galicyi).

Bobin.

B) W języku niemieckim.

W klasie V.

1. Bete und arbeite.
2. Nutzen der Berge.
3. Ideengang im Gedichte: „Der Graf von Habsburg“, v. Schiller.
4. Lenz und Herbst — Jugend und Alter.
5. Euch, ihr Götter gehört der Kaufmann! Güter zu suchen
Geht er, doch an sein Schiff knüpfet das Gute sich an!“,
Schiller.
6. Ideengang im Gedichte: „Der Kampf mit dem Drachen“ v. Schiller.
7. Winterfreuden und Winterleiden.
8. Um schlecht zu leben, schwer zu sterben
Sucht man sich Güter zu erwerben.“
9. Leonidas in Thermopylae.

10. Des Campeadors letzter Ritt (nach einer spanischen Romanze).
11. Kulturbild von Hindostan.
12. Gedanken in der Neujahrsnacht.
13. Nutzen der Eisenbahnen.
14. Ideengang im Gedichte: „Der wilde Jäger“ v. Bürger.
15. Die Erziehung in Sparta.
16. Geburtsort, Heimat, Vaterland.

German.

17. Die edelsten Freuden des Jünglings.
18. Grundzüge der ältesten römischen Verfassung und der servianischen Reformen.
19. „Nicht der ist auf der Welt verwaist,
„Dem Vater und Mutter gestorben,
„Sondern der für Herz und Geist
„Keine Lieb' und kein Wissen erworben.“
20. Indiens Handelsverhältnisse im Alterthume.
21. Gedanken und Empfindungen bei dem Anblicke der Blumen im Frühlinge.
22. Welche Umstände beförderten bei den Phönikern Schifffahrt und Handel.
23. Wie kommt es, dass beim Zunehmen der Cultur die Gastfreundschaft abzunehmen pflegt.
24. Der Jahrmarkt einer kleinen Stadt.
25. Kindliche Liebe und Dankbarkeit.
26. Einige Charakterzüge Hannibals.
27. Warum fühlen wir uns in der freien Natur gewöhnlich so frisch und fröhlich?
28. „Von der Stirne heiss
„Rinnen muss der Schweiss

„Soll das Werk den Meister loben,
„Doch der Segen kommt von oben.“

Schiller.

29. Grundzüge des römischen Charakters.

Mrawińczye.

W klasie VI.

1. Wirf keinen Stein in den Brunnen, woraus du getrunken (ein arabisches Sprichwort).
2. Vergleichung der pyrenäischen und apeneischen Halbinsel in Bezug auf horizontale und verticale Gliederung.
3. Das Wesen der Mythe (am „Erlkönig“ nachzuweisen.).
4. Warum war für die Griechen und Römer die Verbannung eine ungleich härtere Strafe, als sie bei den Völkern der Jetztzeit ist?
5. Einleitung zu Goethe's: „Hermann und Dorothea.“
6. „Im Fleiss kann dich die Biene meistern,
„In der Geschicklichkeit ein Wurm dein Lehrer sein,
„Dein Wissen teilst du mit vorgezog'nen Geistern —
„Die Kunst, o Mensch, hast du allein!“
7. Folgen des Teilungstractates von Verdun.
8. Wie nähren sich die Pflanzen?
9. Die Erzeugung des Stahls.
10. Der Baum im Haushalte der Natur.
11. (Zur Auswahl) Charakteristik des Apothekers, des Pfarrers, des Löwenwirtes, Hermanns oder des Richters aus Goethe's „Hermann u. Dorothea.“
12. „Vieles wünscht sich der Mensch und doch bedarf er nur wenig,
„Denn die Tage sind kurz und beschränkt der Sterblichen Schicksal.“

Goethe.

13. Was veranlasste Mortimers Bekehrung zur kath. Kirche?
Maria Stuart I. 6.
14. „Das Alte stürzt, es ändert sich die Zeit,
„Und neues Leben blüht aus den Ruinen.
15. Es sind die charakteristischen Kennzeichen des Gebirgssystems der Alpen in systematischer Darstellung anzugeben.
16. Das Rittertum und die ritterliche Poesie im Mittelalter.
17. Maria Stuart und Elisabeth. Charakterschilderungen.
Maria Stuart III. 4.
18. Die Cultur führt zur Teilung der Arbeit.
German.

W klasie VII.

1. Wie kommt es, dass die Verdienste grosser Männer von der Nachwelt meist wichtiger, als von der Mitwelt gewürdigt werden?
2. Welche äusseren Umstände trugen zur Machthöhe Österreichs zur Zeit seiner grössten Ausdehnung bei?
3. Der Dampf als Sklave und Sklavenbefreier.
4. „Hoffnung und Mässigung! Euch verehr' ich auf einem Altare,
„Jene nur wecket die Kraft, die nur sichert den Sieg!“
5. Werner Stauffacher und seine Gemahlin Gertrud. Charakterschilderungen nach Schiller (Willh. Tell. I. 2.)
6. „Im ewigen Wechsel wiegt ein Wohl das Weh
„Und schnelle Leiden unsere Freuden auf!“
7. Gedankengang im Dialog: „Kriton v. Plato.“
8. Kulturhistorische Bedeutung der Donau für die österreichisch-ungarische Monarchie.

9. Die Eigenschaften eines romantischen Epos sind am Oberon nachzuweisen.
10. Die Zuckerfabrikation.
11. Lob des Ackerbaues.
12. Tell und Johann Parricida. (Wilh. Tell. V. 1.)
13. Was fordert Fichte in seinen „Reden an die deutsche Nation“ von dem studirenden Jüngling?
14. Die Lage Österreichs nach dem Tode Kaiser Karl VI.
15. „Von des Lebens Gütern allen
„Ist der Rum das schönste doch —
„Wenn der Leib in Staub zerfallen,
„Lebt der grosse Name noch!“
16. Rede an die Mitschüler beim Verlassen der Anstalt.
German.

Temata do piśmiennego egzaminu dojrzałości.

1. Z języka polskiego: Karol Wielki i Alfred Wielki.
(Charakterystyka porównawcza.)
2. Z języka niemieckiego: a) Wyp. pol. dla k'as niższych T. II. Likurg i Spartanie (str. 109.)
b) Mozart Wyp. na IV. kl. „Spanien“ (str. 6.)
3. Z matematyki: a] $2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x - 1 = 0$
b] Miasto A leży pod $26^{\circ}48'$ północnej szerokości a $64^{\circ}25'$ wschodniej długości, — miasto B pod $18^{\circ}24'$ południowej szerokości a $115^{\circ}57'$ wschodniej długości.
Jak wielką jest odległość tych miast od siebie i która godzina w mieście A i B w chwili, gdy w Paryżu jest właśnie godzina 12. w południe. (Południk Paryżki przyjmujemy za południk zero.)
c] Osoba A. składa przez 5 lat z początkiem ka-

żdego roku po 200 złr. na 4^{01}_0 złożony; osoba B wkłada w ten sam sposób takie same raty przez ten sam czas na 10^0_0 procentu pojedyn-
czego.

Która z tych osób otrzyma więcej kapitału i prowizyi po upływie 12 lat licząc od dnia, w którym pierwszą ratę włożono?

- 4) Z geometryi wykreślnej: a) Dany jest kąt w przestrzeni: wykreślić dwie płaszczyzny, dla których ten kąt będzie kątem wzajemnego nachylenia.

Konstrukcyę wykonać w rzutach ortogonalnych i w perspektywie wolnej.

- b) Zbudować walec obrotowy mając dane trzy proste rodzące.
c) Ostrosłup przeciąć dowolną płaszczyzną i oznaczyć cień odcinka na tę płaszczyznę rzucony.

IV.

Wynik egzaminu dojrzałości.

Zgłosiło się do egzaminu uczniów publicznych	31
externistów	2
Odstąpiło w ciągu egzaminu piśmiennego uczniów publ.	2
Składało egzamin uczniów	31
a) Uznano dojrzałymi z odznaczeniem	2
b) „ dojrzałymi	20
c) przeznaczono do powtórnego egzaminu	
z 1 przedmiotu	6
d) Cofnięto na rok	2
e) „ bez terminu	1

Świadectwo dojrzałości otrzymali:

- | | |
|--|--|
| 1. Angermann Klandyusz. | 12. Nawrocki Seweryn. |
| 2. Czermiński Felix. | 13. Rydel Jan. |
| 3. Dryliński Wicenty. | 14. Titz Władysław. |
| 4. Eustachiewicz August
[z odznaczeniem.] | 15. Treter Adam. |
| 5. Górski Józef. | 16. Ueberall Edward. |
| 6. Gembarowicz Teofil. | 17. Wasilkowski Włodz. |
| 7. Kaszuba Stanisław. | 18. Weiss Adolf. |
| 8. Katz Marek. | 19. Wowkonowicz Fran. |
| 9. Kondrat Teodor. | 20. Zahradnik Wacław. |
| 10. Lhotsky Tytus. | 21. Zucker Henryk
[z odznaczeniem.] |
| 11. Nagelstein Maurycy. | 22. Drzymuchowski W. |

V.

Historia zakładu.

Rok szkolny 1877 — 8 rozpoczął się dnia 1. Września uroczystem nabożeństwem z wezwaniem Ducha św., poczem odbywały się egzamina wstępne z uczniami po raz pierwszy do szkoły wstępującymi. Ponieważ liczba uczniów klasy II. i III. nie przekroczyła maximum, przeto na rozkaz Wysockiej Rady szkolnej krajowej zwinięto oddziały równorzędne w tych klasach.

W roku tym poniósł zakład dotkliwą stratę przez zgon nieodżałowanego dyrektora swego ś. p. Wojciecha Kornickiego, który pozostał się z tym światem dnia 1. Września 1877 r.

Uczniowie tutejszego zakładu odnieśli na ramionach zwłoki nieboszczyka na miejsce wiecznego spoczynku, a smutnemu obrzędowi towarzyszyli oprócz rodziny nieboszczyka, w smutku pograżeni nauczyciele i uczniowie szkoły realnej, nauczyciele i młodzież szkoły ludowej męskiej i żeńskiej, jakoteż wszystkie władze i korporacje i liczny zastęp publiczności, u której niebo-

szezyk miłość i uszanowanie był sobie zjednał. — Cześć jego pamięci!

Wysoka Rada szkolna krajowa przeniosła zastępcę nauczyciela Koncera Franciszka w tym samym charakterze do szkoły realnej w Tarnopolu. Wys. c. k. Ministerstwo wyznań i oświecenia rozp. z dnia 31. Lipca 1877 L. 11041 zamianowało zastępcę nauczyciela Eustachego Lewickiego rzeczywistym nauczycielem szkoły realnej w Stanisławowie; a rozporządzeniem z dnia 7. Września 1877 L. 14458 przeniosło rzeczywistego nauczyciela Lwa Lemocha do szkoły realnej w Stryju, przeznaczając na miejsce tegoż rzeczywistego nauczyciela szkoły realnej Krakowskiej Kazimierza Bryka.

Wysokie c. k. Ministerstwo wyznań i oświecenia zamianowało zastępcę nauczyciela szkoły realnej Krakowskiej Michała Rębacza rzeczywistym nauczycielem przy tutejszym zakładzie, a Wysoka Rada szkolna kraj. zasilila siły nauczycielskie tutejszego zakładu przeniesieniem egzaminowanego zastępy nauczyciela Jana Kobaka ze szkoły realnej w Tarnopolu.

Rozporządzeniem z dnia 12. Września 1877 L. 8167 zatwierdziła Wys. Rada szkolna krajowa nauczyciela Mieczysława Jamrógiewicza stale w zawodzie nauczycielskim, nadając mu tytuł c. k. profesora, a rozporządzeniem z dnia 10. Lutego 1877 L. 1073 przeznaczyła Bronisława Mrawińczyca na zastępcę nauczyciela w miejsce c. k. profesora Erazma Fangora, zamianowanego rozporządzeniem Wys. c. k. Ministerstwa wyzn. i ośw. z dnia 9. Stycznia 1878 L. 16298 inspektorem szkół ludowych dla okręgu Drohobyckiego.

Kandydata stanu nauczycielskiego Franciszka Janellego zamianowała Wys. Rada szkolna kraj. asystentem rysunków geometrycznych.

W ciągu roku zwiedzał Wielmożny Pan Antoni Czarkowski c. k. inspektor szkół średnich zakład trzykrotnie, zaś w czasie od 5. do 9. Czerwca przewodniczył egzaminowi dojrzałości.

W roku tym zaprowadzono za zezwoleniem Wys. Rady szkolnej krajowej naukę gimnastyki pokojowej i na przyrządach.

VI.

Ważniejsze rozporządzenia Władz szkolnych w roku szkolnym 1877—8.

1. Wysokie c. k. Ministerstwo wyznań i oświecenia normuje rozp. z dnia 15. Grudnia 1877 święta „Bożego narodzenia.“
2. Wysoka Rada szkolna kraj. zalicza rozp. z dnia 5. Maja 1878 L. 2047 książki p. t. „Przykłady i wzory z najcelniejszych poetów i prozaików polskich zebrane przez Dr. Karola Mecherzyńskiego“ Tomów 2 wydanie drugie powiększone. Kraków 1877, w poczet książek szkolnych.
3. Wysokie c. k. Ministerstwo wyznań i oświecenia wydaje rozp. z dnia 7. Maja 1878 L. 5416 nowe przepisy dotyczące się egzaminów wstępnych do klasy I. szkół średnich.

VII.

Bursa im. Kopernika.

Stowarzyszenie to i w tym roku, podobnie jak w latach poprzednich starało się przyjść w pomoc ubogiej młodzieży, uczęszczającej do szkół publicznych w Jarosławiu i utrzymywało we własnym domu, zaopatrzonym teraz także w przybory gimnastyczne, 17 uczniów, (z tych 9 ze szkoły realnej) a nadto zaopatrywało innych uczniów w pożywienie, odzież, książki i t. d. Szczegółowy wykaz czynności tudzież rachunek z zebranych funduszków przedłoży Stowarzyszenie w osobném sprawozdaniu. Prezesem Stowarzyszenia jest J. W. Stefan hr. Zamojski, wiceprezesem, W. Edward Micewski. W skład Wydziału wchodzi z grona nauczycieli szkoły realnej: Józef Dziewoński, jako zastępca dyrektora, ks. Franciszek Wojnar jako gospodarz, Ludomił German jako sekretarz, Romuald Bobin jako kassyer i Jędrzej Panek. Prócz nich należą do Wydziału pp. Jan Dimmel, adjunkt c. k. starostwa jako dyrektor, Karol Bartoszewski c. k. notaryusz i burmistrz miasta, Władysław Łucki, adjunkt c. k. sądu powia-

towego, Maksymilian Kozłowski, dyrektor szkoły normalnej, Chaim Bernstein kupiec, Władysław Grabowski, koncypient adw. i Gustaw Adolf Weiss obywatel miasta Jarosławia.

VIII.

Statystyka uczniów.

I.

W klasie	Uczniów publicz.		Wypadek klasyfikacyi przy końcu II. półroczu					
	Z początkiem roku szkolnego	Z końcem roku szkolnego	Stopień celujący	Stopień pierwszy	Stopień drugi	Stopień trzeci	Poprawki po wak.	Nieklasyfikowanych
Ia.	35	31	4	18	—	4	5	—
Ib.	33	29	4	18	—	4	3	—
II.	54	45	3	21	2	7	11	1
III.	53	49	1	31	1	6	10	—
IV.	49	46	6	25	—	9	5	1
V.	41	33	4	10	2	4	13	—
VI.	35	29	6	15	1	4	3	—
VII.	34	34	2	24	2	4	2	—

Razem wpisanych uczniów z początkiem roku szk.	334
„ „ „ z końcem „ „	296

2. Wykaz uczniów

a. podług narodowości:

Polaków	.	.	303
Rusinów	.	.	27
Czechów	.	.	3
Niemiec	.	.	1
			334

b) podług wyznania:

Rzymsko-kat. wyzn.	217
Greeko " "	27
Augsburgskiej konfessyi	2
Starozakonnych	88
334	

3. Wiek uczniów.

Urodzonych w r.	1855	2
"	"	1856 2
"	"	1857 8
"	"	1858 14
"	"	1859 33
"	"	1860 27
"	"	1861 50

Urodzonych w r.	1862	33
"	"	1863 52
"	"	1864 43
"	"	1865 33
"	"	1866 19
"	"	1867 8

4. Czesne i stypendya.

Czesne w ciągu całego roku wynosiło	2163	złr.	50	ct.
Taksy wstępne	170	"	10	"
Datki młodzieży na bibliotekę	253	"	10	"

Stypendya pobierali następujący uczniowie:

1. Koziak Mateusz	z klasy I.	w kwocie	60	złr.	—	ct.
2. Hermann Julian	" III.	"	50	"	—	"
3. Brodziński Adolf	" IV.	"	100	"	—	"
4. Czermiński Kazim.	" IV.	"	157	"	—	"
5. Polakiewicz Włodz.	" IV.	"	100	"	—	"
6. Różański Bronisław	" IV.	"	157	"	—	"
7. Blicharski Józef	" V.	"	84	"	—	"

do przeniesienia 708 złr. — ct.

			z przeniesienia	708	złr.	—	ct.
8. Herman Maryan	"	V.	"	150	"	—	"
9. Krzeczkowski Józef	"	V.	"	70	"	—	"
10. Szabakiewicz Dom.	"	V.	"	54	"	50	"
11. Wiech Michał	"	V.	"	54	"	50	"
12. Kornblau Adolf	"	VI.	"	150	"	—	"
13. Uryniak Jan	"	VI.	"	157	"	50	"
14. Czermiński Szczęsny	"	VII.	"	175	"	50	"
15. Eustachiewicz Aug.	"	VII.	"	157	"	50	"
16. Zucker Henryk	"	VII.	"	52	"	60	"
Suma stypendyów				1730	złr.	10	ct.

X.

Wypadek klasyfikacyi.

Klasa Ia.

- *) 1. Blatt Hersz
- *) 2. Mahl Hilel
- *) 3. Szumski Jerzy
- *) 4. Bińkowski Kazim.
- 5. Kubetz Alexander
- 6. Stawarski Antoni
- 7. Kosturkiewicz Adolf
- 8. Wagner Leopold
- 9. Rysiakiewicz Józef
- 10. Kondratowicz Alfred
- 11. Morawiecki Stan.
- 12. Brosz Karol

- 13. Puszką Jędrzej
- 14. Mili Antoni
- 15. Dampf Mendel
- 16. Protaszewicz Adam
- 17. Łańcucki Franciszek
- 18. Baumfeld Ignacy
- 19. Kozłowski Stanisław
- 20. Juhr Mojżesz
- 21. Rauch Henryk
- 22. Silbermann Izaak.

Do egzam. poprawczego przeznaczono 5 uczniów, 4 uczniów utrzymało stopień trzeci.

Uczniowie oznaczeni gwiazdką, otrzymali stopień pierwszy z „odznaczeniem.”

Klasa Ib.

- *) 1. Koziak Mateusz
 - *) 2. Sobolewski Zygm.
 - *) 3. Kolb Edward
 - *) 4. Krieger Izaak
 - 5. Dobrzański Baltaz.
 - 6. Salpeter Mojżesz
 - 7. Janiczek Egydyusz
 - 8. Bigus Teofil
 - 9. Spiegel Chaim
 - 10. Rothstein Leon
 - 11. Stephan Emanuel
 - 12. Schenker Karol
 - 13. Mili Ignacy
 - 14. Lisiewicz Antoni
 - 15. Lisowski Szymon
 - 16. Kosiński Franciszek
 - 17. Bejgert Maciej
 - 18. Margules Chaim
 - 19. Herodyński Stan.
 - 20. Jungwirth Israel
 - 21. Kunaszewski Adam
 - 22. Strycharczyk Kasper
- Do egzaminu poprawczego przeznaczono 3 uczniów; 4 otrzymało stopień trzeci.

Klasa II.

- *) 1. Bochniak Jan
- *) 2. Laub Gedeon
- *) 3. Gotlieb Aron

- 4. Przewoźniczek Fr.
 - 5. Hirschmann Samuel
 - 6. Spanier Maurycy
 - 8. Peczek Karol
 - 9. Niewiadomski Jakób
 - 10. Kubicki Adam
 - 11. Schmalzbach Leon
 - 12. Gosiczewski Wiktor
 - 13. Skibiński Hipolit
 - 14. Schneebaum Abr.
 - 15. Seligman Jan
 - 16. Rutkowski Wład.
 - 17. Fiskus Elias
 - 18. Katter Benjamin
 - 19. Jastrzębski Kazim.
 - 20. Mark Wilhelm
 - 21. Juśkiewicz Franc.
 - 22. Kinda Antoni
 - 23. Szkolnicki Antoni
 - 24. Rosiner Joachim
- Do egzaminu poprawczego przeznaczono 11 uczniów; 2 uczniów otrzymało stopień drugi, 7 uczniów st. trzeci.

Klasa III.

- *) 1. Stephan Józef
- 2. Trnka Teodor.
- 3. Opolski Józef
- 4. Jaworski Antoni
- 5. Gryziecki Józef

6. Katz Izaak
7. Birn Hersch
8. Krzanowski Walery
9. Elster Alexander
10. Silberstein Leon
11. Runge Romuald
12. Birn Izaak
13. Rosińkiewicz Kazim.
14. Franz Józef
15. Brandmann Leib
16. Gerhard Edward
17. Przedrzymirski Alex.
18. Kaufmann Karol
19. Zieliński Antoni
20. Rauch Edmund
21. Besen Henryk
22. Kupeczakiewicz Sz.
23. Szkolnicki Jan
24. Grüner Leon
25. Niedenthal Romuald
26. Wachtel Jukel
27. Hofstätter Alexander
28. Żebrowski Wacław
29. Witkowski Maryan
30. Bajan Felicyan
31. Przysiecki Kazim.
32. Międlicki Adam

Przeznaczono do egzaminu poprawczego 10 uczniów; 1 uczeń otrzymał stopień drugi; 6 uczniów stopień trzeci.

Klasa IV.

- *) 1. Rózański Bronisław
 - *) 2. Wibiral Karol
 - *) 3. Sachsenhaus Maur.
 - *) 4. Czaprański Kazim.
 - *) 5. Pfeffer Simche
 - *) 6. Hirschmann Simche
 7. Langbank Mayer
 8. Veltze Józef
 9. Polakiewicz Włodz.
 10. Skrzyszowski Tad.
 11. Biegański Antoni
 12. Błocki Stanisław
 13. Andrusikiewicz R.
 14. Szeremet Stanisław
 15. Friedmann Aron
 16. Błocki Witold
 17. Czermiński Kazim.
 18. Kortyna Piotr
 19. Wroński Karol
 20. Reichard Alexander
 21. Łomiński Tadeusz
 22. Radwan Jan
 23. Danielewicz Konst:
- Do egzaminu poprawczego
5 uczniów; 9 uczniów otrzy-
mało stopień trzeci.

Klasa V.

- *) 1. Godziński Andrzej
- *) 2. Krzeczkowski Józef

- *) 3. Hermann Maryan
- *) 4. Błachowski Władysł.
- 5. Krupicki Kazimierz
- 6. Rachlewicz Wit.
- 7. Fitowski Piotr
- 8. Kolkiewicz Stan.
- 9. Szabakiewicz Dom.
- 10. Karpiński Andrzej
- 11. Wiech Michał
- 12. Jawornik Kazim.
- 13. Keller Józef
- 14. De Laveaux Kazim.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 13 uczniów; 2 uczniów otrzymało stopień drugi, 4 uczniów st. trzeci.

Klasa VI.

- *) 1. Sobolewski Ludwik
- *) 2. Blatt Gerson
- *) 3. Faszowicz Tadeusz
- *) 4. Dzieślewski Roman
- *) 5. Baumgarten Józef
- *) 6. Uryniak Jan
- 7. Nycz Stanisław
- 8. Biliński Zdzisław
- 9. Męciński Jan
- 10. Dujanowicz Teofil
- 11. Lerner Szymon
- 12. Balicki Karol
- 13. Ornstein Jakób
- 14. Lewandowski Mik.

- 15. Ruebenbauer Stan.
- 16. Skrzyszowski Alex.
- 17. Kinda Roman
- 18. Januszkiewicz Wład.
- 19. Zeitleben Jan
- 20. Niewiadomski Maciej
- 21. Ueberall Hersch.

Do egzaminu poprawczego przeznaczono 3 uczniów; 1 uczeń otrzymał stopień drugi, 4 uczniów st. trzeci.

Klasa VII.

- *) 1. Eustachiewicz Aug.
- *) 2. Zucker Hersch
- 3. Treter Adam
- 4. Gemborowicz Teofil
- 5. Zahradnik Wacław
- 6. Augermann Kland.
- 7. Nagelstein Maurycy
- 8. Ueberal Edward
- 9. Kondrat Teodor
- 10. Kaszuba Stanisław
- 11. Katz Marek
- 12. Weiss Adolf
- 13. Czermiński Feliks
- 14. Nawrocki Seweryn
- 15. Rydel Jan
- 16. Titz Władysław
- 17. Chandler Teodor
- 18. Wowkonowicz Franc.

19. Skawiński Leon
20. Górski Józef
21. Wasilkowski Włodz.
22. Reder Jan
23. Dryliński Wincenty
24. Lhotsky Tytus

25. Borkowski Stanisław
 26. Gaweł Stanisław
- Do egzaminu poprawczego przeznaczono 2 uczniów; 2 uczniów otrzymało stopień drugi, 4 uczniów stopień trzeci.

X.

Do wiadomości rodziców i opiekunów.

Rok szkolny 1879 rozpocznie się dnia 1. Września 1878 r. Wpisy uczniów odbywać się będą 28, 29, 30 i 31 Sierpnia od 8. do 12. rano i od 3. do 6 wieczór. Uczniowie starający się o przyjęcie do zakładu, mają zgłosić się w towarzystwie swych rodziców lub opiekunów w kancelaryi Dyrekeji szkoły, a ci obowiązani są w razie, gdy zamiejscowi synów swych u osób obcych umieszczają, postarać się przy wpisie o zezwolenie dyrektora zakładu na wybor mieszkania. Każdy uczeń powinien przedłożyć świadectwo z ostatniego półroczu, a ci, którzy po raz pierwszy do zakładu wstępują, prócz tego metrykę chrztu lub urodzenia, dekret uwolnienia od opłaty szkolnej, jeżeli uwolnieni byli, i złożyć takse wstępną w kwocie 2 złr. 10 ct. Nadto wybierane będą przy wpisie dobrowolne datki na bibliotekę i zbiory naukowe zakładu. W tych samych dniach odbywać się będą także egzamina poprawcze i wstępne z wyjątkiem wstępnych do klasy pierwszej. Egzamina wstępne do klasy pierwszej odbywać się będą w dniach 2. i 3. Września. Uczniowie wstępujący do klasy pierwszej mają przynieść z sobą przybory do pisania i czytanekę polską i niemiecką, jakich w szkole ludowej używali. Uczniowie, którzy od opłaty szkolnej nie są uwolnieni, mają takową w miesiącu Wrześniu złożyć, inaczej na mocy rozp. Wys. Rady szk. kr. z dnia 23. Sierpnia 1872 r. L. 5540 z końcem Września bezwzględnie z zakładu wydalonymi by zostali.
