

SPRAWOZDANIE

DYREKCYI

C. K. WYŻSZEGO GIMNAZYUM REALNEGO

IMIENIA FRANCISZKA JÓZEFA

w Drohobyczu

za rok szkolny

1888.



W GRÓDKU.

NAKŁADEM FUNDUSZU NAUKOWEGO.

Z drukarni J. Czałńskiego.

1888.



T R E Ś Ć.

1. O własnościach współczynników dwumianowych. przez Bazylego Sanata.
2. Wiadomości szkolne, przez Dyrektora.



O własnościach współczynników dwumianowych.

(Uiber die Eigenschaften der Binomial-Coefficienten.)

Ogólnym wyobraźnikiem współczynników dwumianowych jest wyraz $\binom{n}{r}$ czyli $(n)r$. Ostatniego sposobu pisania współczynników dwumianowych t. j. $(n)r$ używamy wtedy, gdy n jest ułamkiem.

W obu przypadkach wymawiamy: n nad r albo według drugich z n po r . Symbol ten przedstawia ułamek, którego tak licznik jako też mianownik z r czynników się składa. Czynniki licznika począwszy od n maleją, czynniki zaś mianownika począwszy od 1 rosną w naturalnym porządku. Po tej uwadze otrzymujemy zasadnicze równanie:

$$\binom{n}{r} = \frac{n (n-1) (n-2) (n-3) \dots [n-(r-2)]}{1. 2. 3. \dots r} \quad 1)$$

napisane w tak zwanej rozwiniętej formie, którą zwykle wyrażamy pojęcie współczynników dwumianowych. Własności tych współczynników stanowią przedmiot niniejszej rozprawy, przy której korzystałem z dzieł: Żmórki, Schloemilcha i Ettingshausena.

Wyobraźnik $\binom{n}{r}$ nazywa się jeszcze: r tą podzieloną malejącą silną z n . Nieoddzielnym jego towarzyszem zwłaszcza w rozwiniętej formie jest silnia z r czyli symbol $r!$, którego własności przedstawił Żmórko równaniami:

$$\begin{array}{ll} \alpha) & 0! = 1! = 1 \\ \beta) & r! = 1. 2. 3. 4. \dots (r-1) r \\ \gamma) & (-r)! = \frac{\infty}{(-1)^{r-1} (r-1)!} \end{array} \quad \left| \quad 2) \right.$$

Uwzględniając równanie 2) $\beta)$ możemy zasadnicze równanie 1) napisać w formie:

$$\binom{n}{r} = \frac{n (n-1) (n-2) (n-3) \dots [n-(r-1)]}{r!}.$$

Pomnóżmy licznik i mianownik tego równania iloczynem: $(n-r)(n-r-1)(n-r-2) \dots 2 \cdot 1$ t. j. przez $(n-r)!$ a otrzymamy:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1) \dots [n-(r-1)] \cdot (n-r)(n-r-1) \dots 2 \cdot 1}{r! (n-r)!}$$

czyli z uwagi na równanie 2) β :

$$3) \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

Dla $n = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu$ zaś $r = \alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu$ otrzymujemy z ostatniej relacji wyobraźniki:

$$\binom{n}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha! (n-\alpha)!}, \quad \binom{n-\alpha}{\beta} = \frac{(n-\alpha)!}{\beta! (n-\alpha-\beta)!},$$

$$\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma} = \frac{(n-\alpha-\beta)!}{\gamma! (n-\alpha-\beta-\gamma)!}, \quad \dots \quad \binom{\lambda+\mu}{\lambda} = \frac{(\lambda+\mu)!}{\lambda! \mu!}$$

których iloczyn darzy nas relacją:

$$4) \quad \binom{n}{\alpha} \binom{n-\alpha}{\beta} \binom{n-\alpha-\beta}{\gamma} \dots \binom{\lambda+\mu}{\lambda} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \gamma! \dots \lambda! \mu!}$$

Położmy w tem samem równaniu $n=r, s, t, \dots, v$ równocześnie zaś $r=s, t, u, \dots, w$ a otrzymamy:

$$\binom{r}{s} = \frac{r!}{s! (r-s)!}, \quad \binom{s}{t} = \frac{s!}{t! (s-t)!}, \quad \binom{t}{u} = \frac{t!}{u! (t-u)!},$$

$$\dots \dots \dots \binom{v}{w} = \frac{v!}{w! (v-w)!},$$

z czego okazuje się, że:

$$5) \quad \binom{r}{s} \binom{s}{t} \binom{t}{u} \dots \binom{v}{w} = \frac{r!}{(r-s)! (s-t)! (t-u)! \dots (v-w)! w!}$$

Przedstawmy wyobraźnik $\binom{n}{n-r}$ w rozwiniętej formie i pomnóżmy licznik i mianownik prawej strony równania iloczynem $r(r-1)(r-2) \dots 2 \cdot 1 = r!$ a będzie:

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (r+1) \cdot r \cdot (r-1) \dots 2 \cdot 1}{(n-r)! r!} \quad \text{t. j.}$$

$$6) \quad \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

Zestawiwszy równanie 3) z równaniem 6) zauważymy, że:

$$7) \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

Po uwzględnieniu równania 2) otrzymujemy z tej relacji szczególów:

$$8) \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \text{ dla } r = n$$

$$9) \quad \binom{n}{-s} = \binom{n}{n+s} = 0, \text{ dla } r = -s$$

$$10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \binom{m+r}{r} = \binom{m+r}{m} = \frac{(m+r)!}{r! m!} \text{ dla } n = m+r: \quad \text{albo:} \\ (m+r)! = \binom{m+r}{m} m! r! = \binom{m+r}{r} m! r! \end{array} \right.$$

Dla $r=0, m, 2m, 3m, \dots, (n-1)m$ wyłaniają się z ostatniego równania relacje:

$$\begin{aligned} m! &= \binom{m}{m} m! = \binom{m}{m} [m!]^1, & (2m)! &= \binom{2m}{m} m! m! = \binom{2m}{m} \binom{m}{m} [m!]^2, \\ (3m)! &= \binom{3m}{m} m! (2m)! = \binom{3m}{m} \binom{2m}{m} \binom{m}{m} [m!]^3 & \dots \dots \dots \\ (nm)! &= \binom{nm}{m} \binom{(n-1)m}{m} \binom{(n-2)m}{m} \dots \dots \binom{2m}{m} \binom{m}{m} [m!]^n \end{aligned}$$

z których ostatnia przedstawia wartość silni iloczynu, wyrażoną iloczynem współczynników dwumianowych i przybiera jeszcze kształt:

$$\binom{nm}{m} \binom{(n-1)m}{m} \binom{(n-2)m}{m} \dots \binom{3m}{m} \binom{2m}{m} \binom{m}{m} = \frac{(nm)!}{[m!]^n} \quad (11)$$

Dla ujemnego n przybiera wyobraźnik $\binom{n}{r}$ formę:

$$\begin{aligned} \binom{-n}{r} &= \frac{-n \cdot (-n-1) \cdot (-n-2) \cdot \dots \cdot (-n-r+1)}{r!} \text{ albo} \\ &= (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+r-1)}{r!} \text{ albo} \\ &= (-1)^r \frac{(n+r-1)(n+r-2) \dots (n+1)n}{r!} \text{ t. j.} \end{aligned}$$

$$\binom{n}{r} = (-1)^r \binom{n+r-1}{r} \text{ albo } (-1)^r \binom{-n}{r} = \binom{n+r-1}{r} \quad (12)$$

z czego okazuje się, że współczynniki dwumianowe z ujemnymi liczbami górnymi dają się zamienić na współczynniki dwumianowe z dodatnimi liczbami górnymi i na odwrót. Szczegółowe wartości tego równania są:

$$\begin{aligned} \alpha) \binom{-n}{0} &= 1 & \beta) \binom{-n}{n} &= (-1)^n \binom{2n-1}{n} \\ \gamma) \binom{-1}{r} &= (-1)^r & \delta) \binom{m}{r} &= (-1)^r \binom{r-m-1}{r} \end{aligned}$$

Położmy w przedostatnim równaniu $\gamma)$ za r wartości: $r, r+1, r+2, r+3, \dots, r+2s$ i dodajmy otrzymane wyniki, a wyłonią się na sumę równania:

$$\binom{-1}{r} + \binom{-1}{r+1} + \binom{-1}{r+2} + \dots + \binom{-1}{r+2s} = (-1)^r \quad (13)$$

względnie:

$$\binom{-1}{r} + \binom{-1}{r+1} + \binom{-1}{r+2} + \binom{-1}{r+3} + \dots + \binom{-1}{r+2s-1} = 0, \quad (14)$$

których szczegółowe wartości są:

$$\begin{aligned} \binom{-1}{0} + \binom{-1}{1} + \binom{-1}{2} + \dots + \binom{-1}{2s} &= 1, \\ \binom{-1}{0} + \binom{-1}{1} + \binom{-1}{2} + \dots + \binom{-1}{2s-1} &= 0. \end{aligned}$$

Z tego samego równania 12) $\gamma)$ otrzymamy:

$$\binom{-1}{r} - \binom{-1}{r+1} + \binom{-1}{r+2} - \dots + (-1)^p \binom{-1}{r+p} = (-1)^r (p+1) \quad (15)$$

na algebraiczną sumę, gdy tylko za r położymy kolejno wartości:

$r, r+1, r+2, \dots, r+p$ i co drugi otrzymamy wynik z przeciwnym weźmiemy znakiem.

Uzyskane równania 13), 14) i 15) nadają się do wprowadzenia nowej formy, którą później często posługiwać się będę. Mam tu na myśli znak sumowania Σ , przy którym umieszczę u góry ilość zmienną u dołu zaś jej granice, między którymi takowa wszystkie możliwe liczby całe szeregu naturalnego przybrać może. Znak ten oznacza sumę, którą otrzymamy, gdy w wyrazie po znaku Σ umieszczonym zamiast zmiennej podstawimy wszystkie granicami wyznaczone liczby i tym sposobem otrzymane wyrazy zesumujemy. Mamy tedy zamiast poprzedzających następujące równania:

$$\sum_{0,2s}^v \binom{-1}{r+v} = (-1)^r, \quad \sum_{0,2s-1}^v \binom{-1}{r+v} = 0$$

$$\sum_{0,p}^v (-1)^v \binom{-1}{r+v} = (-1)^r (p+1).$$

których szczegółowe wartości są:

$$\sum_{0,2s}^v \binom{-1}{v} = 1, \quad \sum_{0,2s-1}^v \binom{-1}{v} = 0$$

$$\sum_{0,p}^v (-1)^v \binom{-1}{v} = (p+1).$$

Dla ujemnego n i r otrzymujemy wyobraznik $\binom{-n}{-r}$, którego znaczenie z równania 12) wyprowadzić się daje. Położymy we wspomnianem równaniu $r = -m$ a otrzymamy:

$$\binom{-n}{-m} = (-1)^m \binom{n-m-1}{-m}.$$

Wartość wyobraznika lewą stroną równania przedstawionego zależy od wartości górnej liczby a mianowicie:

Jak długo $n \geq m+1$ można zawsze położyć $n-m-1 = s$: mamy tedy:

$$\binom{-n}{-m} = (-1)^m \binom{s}{-m} \text{ czyli z uwagi na równanie 9)}$$

$$16) \quad \binom{-n}{-m} = 0 \text{ dla } n < m+1.$$

Dla $n < m+1$ jest $n-m-1 = -s$ można przeto napisać równanie:

$$\binom{-n}{-m} = (-1)^m \binom{-s}{-m}$$

które ze względu na równanie 3) przybiera kształt:

$$\binom{-n}{-m} = (-1)^m \frac{(-s)!}{(-m)!(m-s)!} \text{ czyli:}$$

$$17) \quad \binom{-n}{-m} = (-1)^{m+n-1} \cdot \frac{\infty}{\infty} \frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!} \text{ dla } n < m+1,$$

jeśli tylko uwzględnimy równanie 1) i s przez n i m wyrazimy.

Położmy w naszym wyobraźniku $\binom{n}{r}$ raz $n = \frac{m}{s}$ drugi raz $n = -\frac{m}{s}$ a otrzymamy według równania 1):

$$\left(\frac{m}{s}\right)_r = \frac{\frac{m}{s} \left(\frac{m}{s} - 1\right) \left(\frac{m}{s} - 2\right) \cdots \left[\frac{m}{s} - (r-1)\right]}{r!} \quad (18)$$

$$= \frac{m (m-s) (m-2s) \dots [m-(r-1)s]}{s^r \cdot r!};$$

$$\left(-\frac{m}{s}\right)_r = \frac{-\frac{m}{s} \left(-\frac{m}{s} - 1\right) \left(-\frac{m}{s} - 2\right) \cdots \left[-\frac{m}{s} - (r-1)\right]}{r!} \quad (19)$$

$$= \frac{(-1)^r \cdot \frac{m}{s} \left(\frac{m}{s} + 1\right) \left(\frac{m}{s} + 2\right) \cdots \left(\frac{m}{s} + r - 1\right)}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^r \cdot m (m+s) (m+2s) \dots [m+(r-1)s]}{s^r \cdot r!}$$

Szczególne przypadki tych równań są:

$$\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^r} \cdot \frac{1 \cdot (1-s) (1-2s) \dots [1-(r-1)s]}{r!}$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{s^r} \cdot \frac{1 \cdot (s-1) (2s-1) \dots [(r-1)s-1]}{r!},$$

$$\left(-\frac{1}{s}\right)_r = \frac{(-1)^r}{s^r} \cdot \frac{1 \cdot (s+1) (2s+1) (3s+1) \dots [(r-1)s+1]}{r!},$$

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)_r = \frac{(2n+1) (2n-1) (2n-3) \dots (2n-2r+3)}{2^r \cdot r!},$$

$$\left(-\frac{2n+1}{2}\right)_r = \frac{(-1)^r}{2^r} \cdot \frac{(2n+1) (2n+3) \dots (2n+2r-1)}{r!},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_r = (-1)^{r-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2r-2)_{2r}} = (-1)^{r-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2r} \cdot \frac{1}{2r-1},$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)_r = (-1)^r \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2r},$$

które wyłaniają się z powyższych równań dla $m=1$ względnie dla $m=2n+1$, $s=2$.

Na szczególniejszą uwagę zasługuje równanie dla $\left(\frac{2n+1}{2}\right)_r$ które łatwym sposobem przekształcić się daje. Mnożąc bowiem licznik i mianownik iloczynem $2n (2n-2) (2n-4) \dots (2n-2r+4) = 2^{r-1} n (n-1) (n-2) \dots (n-r+2)$ otrzymujemy:

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)_r = \frac{(2n+1) 2n (2n-1) (2n-2) \dots (2n-2r+4) (2n-2r+3)}{2^r \cdot r! 2^{r-1} \cdot n (n-1) (n-2) \dots (n-r+2)}$$

$$= \frac{(2n+1) 2n (2n-1) \dots (2n-2r+3)}{2^{2r-1} \cdot r! n (n-1) (n-2) \dots n-r+2}$$

$$= \frac{(2n+1) 2n (2n-1) \dots (2n-2r+3)}{2^{2r-1} \cdot r! n (n-1) \dots (n-r+2)} \cdot \frac{(n-r+1)!}{(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(2n+1) 2n (2n-1) \dots (2n-2r+3)}{2^{2r-1} \cdot r!} \cdot \frac{(n-r+1)!}{n!}$$

$$= \frac{(2n+1) 2n (2n-1) \dots (2n-2r+3)}{2^{2r-1} \cdot r!} \cdot \frac{(2r-1)!}{(2r-1)!} \cdot \frac{(n-r+1)!}{n!}$$

$$= \frac{(2n+1) 2n (2n-1) \dots (2n-2r+3)}{(2r-1)!} \cdot \frac{(2r-1)! (n-r+1)!}{r! n! 2^{2r-1}} \quad \text{t. j.}$$

$$20) \quad \left(\frac{2n+1}{2}\right)_r = \binom{2n+1}{2r-1} \frac{(2r-1)! (n-r+1)!}{r! n! 2^{2r-1}}$$

Uwzględniając równanie 10):

$$(m+r)! = \binom{m+r}{r} r! m!$$

które dla $m=r$ przybiera formę:

$$(2r)! = \binom{2r}{r} r! r! \quad \text{albo} \quad \frac{(2r)!}{r! r!} = \binom{2r}{r}$$

można równanie 20) przedstawić w formie:

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)_r = \binom{2n+1}{2r-1} \binom{2r-1}{r-1} \frac{(r-1)! (n-r+1)!}{n! 2^{2r-1}}$$

potrzeba tylko za $(2r-1)$ położyć $(r+r-1)$ i zastosować powyższe prawo. Szczegółowe wartości tego równania, jako też równania 20) są:

$$21) \text{ a } \quad \left(\frac{2r+1}{2}\right)_r = \binom{2r}{r} \frac{2r+1}{2^{2r}} \quad / \quad \left(\frac{2r-1}{2}\right)_r = \binom{2r}{r} \cdot \frac{1}{2^{2r}}$$

które otrzymamy położywszy $n=r$ względnie $n=r-1$.

Uwolniwszy ostatnie równanie od ułamka $\frac{1}{2^{2r}}$ i napisawszy lewą stronę równania w rozwiniętej formie otrzymujemy:

$$21) \text{ b } \quad \binom{2r}{r} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2r} \cdot 2^{2r}$$

równanie, które nie jest niczem innym, jak tylko odmienną formą twierdzenia Lagrange'a.

Uzyskane równanie:

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)_r = \frac{(2n+1) 2n (2n-1) \dots (2n-2r+3)}{2^{2r-1} \cdot r! n (n-1) (n-2) \dots (n-r+2)}$$

przeistacza się po rozdzieleniu iloczynu licznika i mianownika na dwie części w następujące:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2n+1}{2}\right)_r &= \frac{(2n+1) 2n (2n-1) \dots (2n-r+2)}{r!} \cdot \frac{(2n-r+1)(2n-r) \dots (2n-2r+3)}{2^{2r-1} \cdot n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)} \\ &= \binom{2n+1}{r} \frac{(2n-r+1)(2n-r) \dots (2n-2r+3)}{2^{2r-1} \cdot n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)} \cdot \frac{(2n-2r+2)! (n-r+1)!}{(2n-2r+2)! (n-r+2)!} \\ &= \binom{2n+1}{r} \frac{(2n-r+1)(2n-r) \dots (2n-2r+3)(2n-2r+2)!}{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)(n-r+1)!} \cdot \frac{(n-r+1)!}{(2n-2r+2)! 2^{2r-1}} \end{aligned}$$

$$22) \quad \text{t. j.} \quad \left(\frac{2n+1}{2}\right)_r = \binom{2n+1}{r} \cdot \frac{(2n-r+1)! (n-r+1)!}{n! (2n-2r+2)! 2^{2r-1}}$$

które po zastosowaniu do silni $(2n-r+1)!$ i $(2n-2r+2)!$ uwagi przy równaniu 20) przytoczonej przybiera kształt:

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)_r = \binom{2n+1}{r} \binom{2n-r+1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{2n-2r+2}{n-r+1}} \cdot \frac{1}{2^{2r-1}} \quad \text{albo:}$$

$$23) \quad \left(\frac{2n+1}{2}\right)_r \binom{2n-2r+2}{n-r+1} \cdot 2^{2r-1} = \binom{2n+1}{r} \binom{2n-r+1}{n}$$

Na mocy 9) dowiadujemy się z równania 22), że

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)_{-r} = 0$$

co dla $n = \frac{2m-s}{2s}$ i $n = \frac{-2m-s}{2s}$ przybiera formę:

$$\left(\frac{m}{s}\right)_{-r} = 0 \text{ i } \left(\frac{-m}{s}\right)_{-r} = 0 \text{ dla } \frac{m}{s} > r+1 \quad (24)$$

Dla $n=r$ względnie $n=r-1$ otrzymujemy z tego samego równania szczególne:

$$\left(\frac{2r+1}{2}\right)_r = \left(\frac{2r+1}{r}\right) \frac{r+1}{2^{2r}}; \quad \left(\frac{2r-1}{2}\right)_r = \left(\frac{2r-1}{r}\right) \frac{1}{2^{2r-1}} = \left(\frac{2r-1}{r-1}\right) \cdot \frac{1}{2^{2r-1}} \quad (25)$$

których porównanie z równaniem 21) a) darzy nas relacją:

$$\left(\frac{2r}{r}\right) = 2 \left(\frac{2r-1}{r}\right) = 2 \left(\frac{2r-1}{r-1}\right). \quad (26)$$

Rozdzielmy prawą stronę równania 1) na dwa czynniki a mianowicie:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (r-1) \cdot r}$$

to zauważymy, że:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n-r+1}{r} \text{ albo } \binom{n}{r-1} = \binom{n}{r} \frac{r}{n-r+1} \quad (27)$$

Dodając do tego równania obustronnie $\binom{n}{r-1}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \binom{n}{r-1} \frac{n-r+1}{r} + \binom{n}{r-1} \\ &= \binom{n}{r-1} \left[\frac{n-r+1}{r} + 1 \right] = \binom{n}{r-1} \cdot \frac{n+1}{r} \\ &= \frac{n+1}{r} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)}{(r-1)!} \text{ t. j.} \\ \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \binom{n+1}{r} \end{aligned} \quad (28)$$

W ten sam sposób uzyskamy:

$$\binom{-n}{r} + \binom{-n}{r-1} = \binom{-n+1}{r},$$

$$\left(\frac{m}{s}\right)_r + \left(\frac{m}{s}\right)_{r-1} = \left(\frac{m}{s} + 1\right)_r, \quad \left(\frac{-m}{s}\right)_r + \left(\frac{-m}{s}\right)_{r-1} = \left(\frac{-m}{s} + 1\right)_r$$

z czego okazuje się, że równanie 28) jest prawdziwem dla wszystkich całych i ułamkowych wartości liczby n .

Z przytoczonego równania 28) wypływają następujące:

A) Dla $n=m, m+1, m+2, \dots, p$ i $r+1$ zamiast r :

$$\binom{m}{r+1} + \binom{m}{r} = \binom{m+1}{r+1}; \quad \binom{m+1}{r+1} + \binom{m+1}{r} = \binom{m+2}{r+1};$$

$$\binom{m+2}{r+1} + \binom{m+2}{r} = \binom{m+3}{r+1}; \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\binom{p-1}{r+1} + \binom{p-1}{r} = \binom{p}{r+1}; \quad \binom{p}{r+1} + \binom{p}{r} = \binom{p+1}{r+1},$$

których suma darzy nas relacją:

$$29) \left\{ \begin{array}{l} \binom{m}{r+1} + \binom{m}{r} + \binom{m+1}{r} + \binom{m+2}{r} + \dots + \binom{p-1}{r} + \binom{p}{r} = \binom{p+1}{r+1} \\ \text{albo} \\ \binom{m}{r} + \binom{m+1}{r} + \binom{m+2}{r} + \dots + \binom{p-1}{r} + \binom{p}{r} = \binom{p+1}{r+1} - \binom{m}{r+1} \\ \text{t. j. } \sum_{v=0}^p \binom{m+v}{r} = \binom{m+p+1}{r+1} - \binom{m}{r+1} \end{array} \right.$$

Dla $r=m$ otrzymujemy z ostatniej relacji:

$$30) \left\{ \begin{array}{l} \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \dots + \binom{m+s}{m} = \binom{m+s+1}{m+1} \text{ albo} \\ \sum_{v=0}^s \binom{m+v}{m} = \binom{m+s+1}{m+1} \end{array} \right.$$

Rozwinąwszy każdy człon równania 29) według wzoru 3) i pomnożywszy obie strony otrzymanego równania przez $r!$ otrzymujemy:

$$31) \quad \frac{m!}{(m-r)!} + \frac{(m+1)!}{(m-r+1)!} + \frac{(m+2)!}{(m-r+2)!} + \dots + \frac{p!}{(p-r)!} = \frac{(p+1)!}{(r+1)(p-r)!} - \frac{m!}{(r+1)(m-r-1)!}$$

B) Dla $n=m, m+1, m+2, \dots, p$ zaś $r, r+1, r+2, \dots, s$ zamiast r :

$$\begin{array}{ll} \binom{m}{r} + \binom{m}{r-1} = \binom{m+1}{r}; & \binom{m+1}{r+1} + \binom{m+1}{r} = \binom{m+2}{r+1}; \\ \binom{m+2}{r+2} + \binom{m+2}{r+1} = \binom{m+3}{r+2}; & \vdots \\ \binom{p-1}{s-1} + \binom{p-1}{s-2} = \binom{p}{s-1}; & \binom{p}{s} + \binom{p}{s-1} = \binom{p+1}{s} \end{array}$$

których sumę przedstawia równanie:

$$32) \left\{ \begin{array}{l} \binom{m}{r-1} + \binom{m}{r} + \binom{m+1}{r+1} + \binom{m+2}{r+2} + \dots + \binom{p-1}{s-1} + \binom{p}{s} = \binom{p+1}{s} \\ \text{albo;} \\ \binom{m}{r} + \binom{m+1}{r+1} + \binom{m+2}{r+2} + \dots + \binom{p-1}{s-1} + \binom{p}{s} = \binom{p+1}{s+1} - \binom{m}{r-1} \\ \text{t. j. } \sum_{v=0}^p \binom{m+v}{r+v} = \binom{m+p+1}{r+p} - \binom{m}{r-1} \end{array} \right.$$

Przytoczone równanie otrzymamy wprost z równania 29) jeśli tylko do każdego wyobraźnika zastosujemy prawo wypowiedziane równaniem 7) i położymy r zamiast $m-r$.

Dla $r=0$ przeistacza się ostatnie równanie w następujące:

$$33) \left\{ \begin{array}{l} \binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \dots + \binom{p}{s} = \binom{p+1}{s+1} \text{ czyli} \\ \binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \dots + \binom{m+s}{s} = \binom{m+s+1}{s+1} \\ \text{t. j. } \sum_{v=0}^s \binom{m+v}{v} = \binom{m+s+1}{s+1} \end{array} \right.$$

$$36) \sum_{0,n}^v \binom{n}{v} = 2^n \quad \text{czyli} \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

które zwykle ze wzoru Newtona uzyskujemy, a Ettingshausen przedstawił w formie:

$$\sum_0^v \binom{n}{v} = 2^n$$

gdzie drugą dolną granicą jest: ∞ a nie dowolna liczba cała.

Równanie 36) przeistacza się w następujące:

$$\frac{1}{n!} \left[\frac{1}{0!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \dots + \frac{1}{0!} \right] = 2^n \quad \text{albo}$$

$$\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} + \dots + \frac{1}{0!} = \frac{1}{n!} \cdot 2^n$$

jeśli tylko każdy jego człon zastąpimy wartością równaniem 3) wyznaczoną i $n!$ przed nawias wyjmiemy.

Dla $n=2r$ względnie $n=2r+1$ przemienia się 36) w następujące:

$$37) \left\{ \begin{array}{l} \binom{2r}{0} + \binom{2r}{1} + \binom{2r}{2} + \dots + \binom{2r}{2r} = 2^{2r} \\ \text{albo: } \sum_{0,2r}^v \binom{2r}{v} = 2^{2r} \text{ względnie:} \\ \binom{2r+1}{0} + \binom{2r+1}{1} + \binom{2r+1}{2} + \dots + \binom{2r+1}{2r+1} = 2^{2r+1} \\ \text{albo: } \sum_{0,2r+1}^v \binom{2r+1}{v} = 2^{2r+1} \end{array} \right.$$

Pomnożmy równania pod C) przytoczone liczbami: $(-1)^0, (-1)^1, (-1)^2, \dots, (-1)^n$, to suma ich przybierze kształt:

$$\binom{n}{s} - \binom{n}{s+1} + \binom{n}{s+2} + \dots + (-1)^m \binom{n}{s+m} = \binom{n-1}{s-1} + (-1)^m \binom{n-1}{s+m}$$

$$38) \quad \text{czyli: } \sum_{0,m}^v \binom{n}{s+v} (-1)^v = \binom{n-1}{s-1} + (-1)^m \binom{n-1}{s+m},$$

którego szczegółowe wartości są:

$$39) \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^m \binom{n}{m} = \sum_{0,m}^v \binom{n}{v} (-1)^v = (-1)^m \binom{n-1}{m-1},$$

$$40) \left\{ \begin{array}{l} \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_{0,n}^v (-1)^v \binom{n}{v} = 0, \\ \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} = \\ = \sum_{0,n-1}^v (-1)^v \binom{n}{v} = (-1)^{n-1} \end{array} \right.$$

Mnożąc równanie 39) przez $(-1)^m$ i pisząc człony otrzymanego iloczynu w odwrotnym porządku otrzymujemy równanie:

$$\left. \begin{aligned} \binom{n}{m} - \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m-2} - \dots + (-1)^m \binom{n}{0} &= \binom{n-1}{m} \\ \text{czyli: } \sum_{0, m}^v (-1)^v \binom{n}{m-v} &= \binom{n-1}{m} \end{aligned} \right\} 41)$$

Ze równań 40) okazuje się dla $n=2r+1$ względnie $n=2r$, że równania:

$$\left. \begin{aligned} \binom{2r+1}{0} - \binom{2r+1}{1} + \binom{2r+1}{2} - \dots + \binom{2r+1}{2r} - \binom{2r+1}{2r+1} &= \sum_{0, 2r+1}^v (-1)^v \binom{2r+1}{v} = 0, \\ \binom{2r+1}{0} - \binom{2r+1}{1} + \binom{2r+1}{2} - \dots + \binom{2r+1}{2r} &= \sum_{0, 2r}^v (-1)^v \binom{2r+1}{v} = 1, \\ \binom{2r}{0} - \binom{2r}{1} + \binom{2r}{2} - \binom{2r}{3} + \dots - \binom{2r}{2r-1} + \binom{2r}{2r} &= \sum_{0, 2r}^v (-1)^v \binom{2r}{v} = 0, \\ \binom{2r}{0} - \binom{2r}{1} + \binom{2r}{2} - \binom{2r}{3} + \dots - \binom{2r}{2r-1} &= \sum_{0, 2r-1}^v (-1)^v \binom{2r}{v} = 1 \end{aligned} \right\} 42)$$

miejsce mieć muszą.

Połączenie tych równań z równaniem 37) za pomocą dodawania względnie odciągania prowadzi do wzorów:

$$\left. \begin{aligned} \binom{2r+1}{0} + \binom{2r+1}{2} + \binom{2r+1}{4} + \dots + \binom{2r+1}{2r} &= \sum_{0, r}^v \binom{2r+1}{2v} = 2^{2r}, \\ \binom{2r}{0} + \binom{2r}{2} + \binom{2r}{4} + \dots + \binom{2r}{2r} &= \sum_{0, r}^v \binom{2r}{2v} = 2^{2r-1} \\ \binom{2r+1}{1} + \binom{2r+1}{3} + \binom{2r+1}{5} + \dots + \binom{2r+1}{2r+1} &= \sum_{0, r}^v \binom{2r+1}{2v+1} = 2^{2r} \\ \binom{2r}{1} + \binom{2r}{3} + \binom{2r}{5} + \dots + \binom{2r}{2r-1} &= \sum_{0, r-1}^v \binom{2r}{2v+1} = 2^{2r-1} \end{aligned} \right\} 43)$$

z których okazuje się, że:

$$\begin{aligned} \binom{2r+1}{0} + \binom{2r+1}{2} + \binom{2r+1}{4} + \dots + \binom{2r+1}{2r} &= \binom{2r+1}{1} + \binom{2r+1}{3} + \\ &+ \binom{2r+1}{5} + \dots + \binom{2r+1}{2r+1} \\ \binom{2r}{0} + \binom{2r}{2} + \binom{2r}{4} + \dots + \binom{2r}{2r} &= \binom{2r}{1} + \binom{2r}{3} + \binom{2r}{5} + \dots + \binom{2r}{2r-1} \\ \text{czyli: } \sum_{0, r}^v \binom{2r+1}{2v} &= \sum_{0, r}^v \binom{2r+1}{2v+1} \\ \sum_{0, r}^v \binom{2r}{2v} &= \sum_{0, r-1}^v \binom{2r}{2v+1} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_{0, r}^v} \right\} 44)$$

W ten sam sposób otrzymamy ze wzorów 35) i 38) dla $m=2r$ następujące równania:

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{s} + \binom{n}{s+2} + \binom{n}{s+4} + \dots + \binom{n}{s+2r} = \\
& = \left[\binom{n-1}{s} + \binom{n-1}{s+1} + \binom{n-1}{s+2} + \dots + \binom{n-1}{s+2r} \right] + \binom{n-1}{s-1}, \\
& \binom{n}{s+1} + \binom{n}{s+3} + \binom{n}{s+5} + \dots + \binom{n}{s+2r-1} = \binom{n-1}{s} + \binom{n-1}{s+1} + \\
& \quad + \binom{n-1}{s+2} + \dots + \binom{n-1}{s+2r-1} \text{ albo:} \\
& \binom{n}{s+1} + \binom{n}{s+3} + \dots + \binom{n}{s+2r+1} = \binom{n-1}{s} + \binom{n-1}{s+1} + \binom{n-1}{s+2} \\
& \quad \dots + \binom{n-1}{s+2r+1} \text{ czyli:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{0,r}^v \binom{n}{s+2v} &= \sum_{0,2r}^v \binom{n-1}{s+v} + \binom{n-1}{s-1}, & \sum_{0,r-1}^v \binom{n}{s+2v+1} &= \sum_{0,2r-1}^v \binom{n-1}{s+v} \\
\text{albo: } \sum_{0,r}^v \binom{n}{s+2v+1} &= \sum_{0,2r}^v \binom{n-1}{s+v} + \binom{n-1}{s+2r+1},
\end{aligned}$$

których porównanie darzy nas relacją:

$$45) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{0,r}^v \binom{n}{s+2v} &= \sum_{0,r}^v \binom{n}{s+2v+1} - \binom{n-1}{s+2r+1} + \binom{n-1}{s-1} \text{ albo:} \\ \sum_{0,r}^v \binom{n}{s+2v} &= \sum_{0,r-1}^v \binom{n}{s+2v+1} + \binom{n-1}{s+2r} + \binom{n-1}{s-1} \end{aligned} \right.$$

Szczegółowo mamy dla $s=0$:

$$46) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{0,r}^v \binom{n}{2v} &= \sum_{0,r}^v \binom{n}{2v+1} - \binom{n-1}{2r+1} \text{ albo} \\ \sum_{0,r}^v \binom{n}{2v} &= \sum_{0,r-1}^v \binom{n}{2v+1} + \binom{n-1}{2r} \end{aligned} \right.$$

Przytoczona relacja wyraża związek między parzystymi a nieparzystymi współczynnikami dwumianowymi. Podobny związek znajdujemy w znakomitem dziele Ettingshausena: »Die combinatorische Analysis, strona 257, podany w formie:«

$$\begin{aligned}
\sum_0^r \binom{n}{2r} + \sum_0^r \binom{n}{2r+1} &= 2^n \text{ i} & \sum_0^r \binom{n}{2r} - \sum_0^r \binom{n}{2r+1} &= 0 \text{ przeto} \\
\sum_0^r \binom{n}{2r} &= \sum_0^r \binom{n}{2r+1} = 2^{n-1}
\end{aligned}$$

Zauważyć jednak należy, że w równaniu 46) przychodzi człon $\binom{n-1}{2r+1}$, który dla całkowitego n i $n < 2r+2$ odpada. W tym przypadku panuje zupełna zgoda między oboma relacjami. Zresztą różnią się one stale o człon $\binom{n-1}{2r+1}$, przez co relacja Ettingshausena jest tylko warunkowo prawdziwą t. j. dla $n < 2r+2$ o czym świadczy jakiegokolwiek szczegółowy przykład.

Położmy w uzyskanych równaniach $n = \frac{2m+1}{2}$ a otrzymamy:

Z równania 29):

$$\left(\frac{2m+1}{2}\right)_r + \left(\frac{2m+3}{2}\right)_r + \left(\frac{2m+5}{2}\right)_r + \dots + \left(\frac{2m+2s+1}{2}\right)_r =$$

$$= \left(\frac{2m+2s+3}{2}\right)_{r+1} - \left(\frac{2m+1}{2}\right)_{r+1}$$

$$\text{czyli: } \sum_{0,s}^v \left(\frac{2m+2v+1}{2}\right)_r = \left(\frac{2m+2s+1}{2}\right)_{r+1} - \left(\frac{2m+1}{2}\right)_{r+1}, \quad (47)$$

które dla $m=0$ przeistacza się w następujące:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_r + \left(\frac{3}{2}\right)_r + \left(\frac{5}{2}\right)_r + \dots + \left(\frac{2s+1}{2}\right)_r = \left(\frac{2s+3}{2}\right)_{r+1} - \left(\frac{1}{2}\right)_{r+1}$$

$$\text{czyli: } \sum_{0,s}^v \left(\frac{2v+1}{2}\right)_r = \left(\frac{2s+3}{2}\right)_{r+1} - \left(\frac{1}{2}\right)_{r+1} \quad (48)$$

Z równania 32):

$$\left(\frac{2m+1}{2}\right)_r + \left(\frac{2m+3}{2}\right)_{r+1} + \left(\frac{2m+5}{2}\right)_{r+2} + \dots + \left(\frac{2m+2s+1}{2}\right)_{r+s} =$$

$$= \left(\frac{2m+2s+3}{2}\right)_{r+1} - \left(\frac{2m+1}{2}\right)_{r-1}$$

$$\text{czyli: } \sum_{0,s}^v \left(\frac{2m+2v+1}{2}\right)_{r+v} = \left(\frac{2m+2s+3}{2}\right)_{r+s} - \left(\frac{2m+1}{2}\right)_{r-1}, \quad (49)$$

którego szczegółowe wartości są:

a) dla $r=0$:

$$\left(\frac{2m+1}{2}\right)_0 + \left(\frac{2m+3}{2}\right)_1 + \left(\frac{2m+5}{2}\right)_2 + \dots + \left(\frac{2m+2s+1}{2}\right)_s = \left(\frac{2m+2s+3}{2}\right)_s$$

$$\text{czyli: } \sum_{0,s}^v \left(\frac{2m+2v+1}{2}\right)_v = \left(\frac{2m+2s+3}{2}\right)_s. \quad (50)$$

β) dla $m=r=0$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)_0 + \left(\frac{3}{2}\right)_1 + \left(\frac{5}{2}\right)_2 + \dots + \left(\frac{2s+1}{2}\right)_s = \sum_{0,s}^v \left(\frac{2v+1}{2}\right)_v = \left(\frac{2s+3}{2}\right)_s \quad (51)$$

γ) dla $m=r-1$:

$$\left(\frac{2r-1}{2}\right)_r + \left(\frac{2r+1}{2}\right)_{r+1} + \left(\frac{2r+3}{2}\right)_{r+2} + \dots + \left(\frac{2r+2s-1}{2}\right)_{r+s} =$$

$$= \sum_{0,s}^v \left(\frac{2r+2v-1}{2}\right)_{r+v} = \left(\frac{2r+2s+1}{2}\right)_{r+s} - \left(\frac{2r-1}{2}\right)_{r-1} \quad (52)$$

Z uwagi na równanie 21a, przybiera ostatnia relacja formę:

$$\left(\frac{2r}{r}\right) \frac{1}{2^{2r}} + \left(\frac{2r+2}{r+1}\right) \frac{1}{2^{2r+2}} + \left(\frac{2r+4}{r+2}\right) \frac{1}{2^{2r+4}} + \dots + \left(\frac{2r+2s}{r+s}\right) \frac{1}{2^{2r+2s}} =$$

$$= \left(\frac{2r+2s+1}{2}\right)_{r+s} - \left(\frac{2r-1}{2}\right)_{r-1}$$

$$\text{czyli: } \sum_{0,s}^v \left(\frac{2r+2v}{r+v}\right) \frac{1}{2^{2r+2v}} = \left(\frac{2r+2s+1}{2}\right)_{r+s} - \left(\frac{2r-1}{2}\right)_{r-1} \quad (53)$$

która po uwzględnieniu równania 26) przeistacza się w następującą:

$$\begin{aligned}
 & \binom{2r-1}{r-1} \cdot \frac{1}{2^{2r-1}} + \binom{2r+1}{r} \cdot \frac{1}{2^{2r+1}} + \binom{2r+3}{r+1} \frac{1}{2^{2r+3}} + \dots + \\
 & + \binom{2r+2s-1}{r+s-1} \frac{1}{2^{2r+2s-1}} = \left(\frac{2r+2s+1}{2} \right)_{r+s} - \left(\frac{2r-1}{2} \right)_{r-1} \\
 54) \quad \text{czyli: } \sum_{0,s}^v \binom{2r+2v-1}{r+v-1} \cdot \frac{1}{2^{2r+2v-1}} &= \left(\frac{2r+2s+1}{2} \right)_{r+s} - \left(\frac{2r-1}{2} \right)_{r-1}
 \end{aligned}$$

Mnożąc ostatnie dwie relacje przez 2^{2r+2s} względnie przez $2^{2r+2s-1}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & \binom{2r}{r} 2^{2s} + \binom{2r+2}{r+1} 2^{2s-2} + \binom{2r+4}{r+2} 2^{2s-4} + \dots + \binom{2r+2s-2}{r+s-1} 2^2 + \\
 & + \binom{2r+2s}{r+s} 2^0 = \left[\left(\frac{2r+2s+1}{2} \right)_{r+s} - \left(\frac{2r-1}{2} \right)_{r-1} \right] 2^{2r+2s}, \\
 & \binom{2r-1}{r-1} 2^{2s} + \binom{2r+1}{r} 2^{2s-2} + \binom{2r+3}{r+1} 2^{2s-4} + \dots + \binom{2r+2s-1}{r+s-1} 2^0 = \\
 & = \left[\left(\frac{2r+2s+1}{2} \right)_{r+s} - \left(\frac{2r-1}{2} \right)_{r-1} \right] 2^{2r+2s-1}
 \end{aligned}$$

$$55) \quad \text{czyli: } \sum_{0,s}^v \binom{2r+2v}{r+v} 2^{2s-2v} = \left[\left(\frac{2r+2s+1}{2} \right)_{r+s} - \left(\frac{2r-1}{2} \right)_{r-1} \right] 2^{2r+2s-1}$$

$$56) \quad \text{względnie: } \sum_{0,s}^v \binom{2r+2v-1}{r+v-1} 2^{2s-2v} = \left[\left(\frac{2r+2s+1}{2} \right)_{r+s} - \left(\frac{2r-1}{2} \right)_{r-1} \right] 2^{2r+2s-1}$$

równania, które dla $r=0$ przybierają kształt:

$$57) \quad \sum_{0,s}^v \binom{2v}{v} 2^{2s-2v} = \left(\frac{2s+1}{2} \right)_s 2^{2s} \quad \text{względnie: } \sum_{0,s}^v \binom{2v-1}{v-1} 2^{2s-2v} = \left(\frac{2s+1}{2} \right)_s 2^{2s-1}$$

Z równania 38):

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{2m+1}{2} \right)_s - \left(\frac{2m+1}{2} \right)_{s+1} + \left(\frac{2m+1}{2} \right)_{s+2} - \dots + (-1)^r \left(\frac{2m+1}{2} \right)_{s+r} = \\
 & = \left(\frac{2m-1}{2} \right)_{s-1} + (-1)^r \left(\frac{2m-1}{2} \right)_{s+r}
 \end{aligned}$$

$$58) \quad \text{czyli: } \sum_{0,1}^v (-1)^v \left(\frac{2m+1}{2} \right)_{s+v} = \left(\frac{2m-1}{2} \right)_{s-1} + (-1)^r \left(\frac{2m-1}{2} \right)_{s+r},$$

którego szczegółowa wartość jest:

$$\left(\frac{2m+1}{2} \right)_0 - \left(\frac{2m+1}{2} \right)_1 + \left(\frac{2m+1}{2} \right)_2 - \dots + (-1)^r \left(\frac{2m+1}{2} \right)_r = (-1)^r \left(\frac{2m-1}{2} \right)_r$$

$$59) \quad \text{czyli: } \sum_{0,1}^v (-1)^v \left(\frac{2m+1}{2} \right)_v = (-1)^r \left(\frac{2m-1}{2} \right)_r$$

Z równania 41):

$$\left(\frac{2m+1}{2} \right)_r - \left(\frac{2m+1}{2} \right)_{r-1} + \left(\frac{2m+1}{2} \right)_{r-2} - \dots + (-1)^r \left(\frac{2m+1}{2} \right)_0 = \left(\frac{2m-1}{2} \right)_r$$

$$60) \quad \text{czyli: } \sum_{0,r}^v (-1)^v \left(\frac{2m+1}{2} \right)_{r-v} = \left(\frac{2m-1}{2} \right)_r$$

Dla $m=0$ okazuje się z ostatniego równania, że:

$$\sum_{0, v}^v (-1)^v \left(\frac{1}{2}\right)_{r-v} = \left(-\frac{1}{2}\right)_r \quad \text{czyli:} \quad (61)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_r - \left(\frac{1}{2}\right)_{r-1} + \left(\frac{1}{2}\right)_{r-2} - \dots \dots (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right)_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)_r.$$

Zdarza się nieraz, że współczynniki dwumianowe zaopatrzone są pewnymi współczynnikami a rozchodzi się o ich sumę.

Przemieńmy w tym celu strony równania 28), połączmy $n-1$ zamiast n i zastosujmy do każdego wyobraźnika prawej strony z osobna prawo wypowiedziane równaniem 28) a otrzymamy:

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \\ &= \binom{n-2}{r-2} + \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r} = \binom{n-2}{r-2} + 2 \binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r} \\ &= \binom{n-3}{r-3} + \binom{n-3}{r-2} + 2 \left[\binom{n-3}{r-2} + \binom{n-3}{r-1} \right] + \binom{n-3}{r-1} + \binom{n-3}{r} \\ &= \binom{n-3}{r-3} + 3 \binom{n-3}{r-2} + 3 \binom{n-3}{r-1} + \binom{n-3}{r} \\ &= \binom{n-4}{r-4} + \binom{n-4}{r-3} + 3 \left[\binom{n-4}{r-3} + \binom{n-4}{r-2} \right] + 3 \left[\binom{n-4}{r-2} + \binom{n-4}{r-1} \right] + \\ &\quad + \binom{n-4}{r-1} + \binom{n-4}{r} \\ &= \binom{n-4}{r-4} + 4 \binom{n-4}{r-3} + 6 \binom{n-4}{r-2} + 4 \binom{n-4}{r-1} + \binom{n-4}{r} \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

albo:

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \binom{1}{0} \binom{n-1}{r-1} + \binom{1}{1} \binom{n-1}{r} \\ &= \binom{2}{0} \binom{n-2}{r-2} + \binom{2}{1} \binom{n-2}{r-1} + \binom{2}{2} \binom{n-2}{r} \\ &= \binom{3}{0} \binom{n-3}{r-3} + \binom{3}{1} \binom{n-3}{r-2} + \binom{3}{2} \binom{n-3}{r-1} + \binom{3}{3} \binom{n-3}{r} \\ &= \binom{4}{0} \binom{n-4}{r-4} + \binom{4}{1} \binom{n-4}{r-3} + \binom{4}{2} \binom{n-4}{r-2} + \binom{4}{3} \binom{n-4}{r-1} + \binom{4}{4} \binom{n-4}{r} \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

z czego okazuje się, że po s krotnem zastosowaniu powyższego prawa wyłania się równanie:

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \binom{s}{0} \binom{n-s}{r-s} + \binom{s}{1} \binom{n-s}{r-s+1} + \binom{s}{2} \binom{n-s}{r-s+2} + \dots \dots + \\ &\quad + \binom{s}{s-1} \binom{n-s}{r-1} + \binom{s}{s} \binom{n-s}{r} \\ &\quad \text{czyli: } \binom{n}{r} = \sum_{0, s}^s \binom{s}{v} \binom{n-s}{r-s+v}, \end{aligned} \quad (62)a$$

które ze względu na równanie 7) także w następującej formie przedstawionem być może:

$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \binom{s}{0} \binom{n-s}{n-r} + \binom{s}{1} \binom{n-s}{n-r-1} + \binom{s}{2} \binom{n-s}{n-r-2} + \dots \dots + \\ &\quad + \binom{s}{s} \binom{n-s}{n-r-s} \end{aligned}$$

$$62) b) \quad \text{czyli: } \binom{n}{r} = \sum_{o,s}^v \binom{s}{v} \binom{n-s}{n-r-v}.$$

Szczegółowo otrzymujemy:

a) dla $s=r$:

$$\binom{n}{r} = \binom{r}{0} \binom{n-r}{0} + \binom{r}{1} \binom{n-r}{1} + \binom{r}{2} \binom{n-r}{2} + \dots + \binom{r}{r-1} \binom{n-r}{r-1} + \binom{r}{r} \binom{n-r}{r}$$

$$63) \quad \text{czyli: } \binom{n}{r} = \sum_{o,r}^v \binom{r}{v} \binom{n-r}{v};$$

β) dla $n-2r=2s$:

$$\begin{aligned} \binom{2r}{r} &= \binom{r}{0} \binom{r}{1} + \binom{r}{1} \binom{r}{1} + \binom{r}{2} \binom{r}{2} + \dots + \binom{r}{r} \binom{r}{r} \\ &= \binom{r}{0}^2 + \binom{r}{1}^2 + \binom{r}{2}^2 + \dots + \binom{r}{r}^2, \end{aligned}$$

$$64) \quad \text{czyli: } \binom{2r}{r} = \sum_{o,r}^v \binom{r}{v}^2,$$

co Lagrange przedstawił w formie:

$$\sum_{o,n}^v \binom{n}{v}^2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot 2^{2n}$$

porównaj równanie 21)b);

γ) dla $n = \frac{2m+1}{2}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2m+1}{2}\right)_r &= \binom{s}{0} \left(\frac{2m-2s+1}{2}\right)_{r-s} + \binom{s}{1} \left(\frac{2m-2s+1}{2}\right)_{r-s+1} + \dots + \\ &+ \binom{s}{s} \left(\frac{2m-2s+1}{2}\right)_r \end{aligned}$$

$$65) \quad \text{czyli: } \left(\frac{2m+1}{2}\right)_r = \sum_{o,s}^v \binom{s}{v} \left(\frac{2m-2s+1}{2}\right)_{r-s+v}$$

Ostatnie równanie przybiera kształt:

a) dla $s=r$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2m+1}{2}\right)_r &= \binom{r}{0} \left(\frac{2m-2r+1}{2}\right)_0 + \binom{r}{1} \left(\frac{2m-2r+1}{2}\right)_1 + \binom{r}{2} \left(\frac{2m-2r+1}{2}\right)_2 + \\ &+ \dots + \binom{r}{r} \left(\frac{2m-2r+1}{2}\right)_r \end{aligned}$$

$$66) \quad \text{czyli: } \left(\frac{2m+1}{2}\right)_r = \sum_{o,r}^v \binom{r}{v} \left(\frac{2m-2r+1}{2}\right)_v;$$

β) dla $r-s=m$:

$$\left(\frac{2m+1}{2}\right)_m = \binom{m}{0} \left(\frac{1}{2}\right)_0 + \binom{m}{1} \left(\frac{1}{2}\right)_1 + \binom{m}{2} \left(\frac{1}{2}\right)_2 + \dots + \binom{m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)_m$$

$$67) \quad \text{czyli: } \left(\frac{2m+1}{2}\right)_m = \sum_{o,m}^v \binom{m}{v} \left(\frac{1}{2}\right)_v;$$

γ) dla $m=n+r$ i $s=r$:

$$\left(\frac{2n+2r+1}{2}\right)_r = \binom{r}{0} \left(\frac{2n+1}{2}\right)_0 + \binom{r}{1} \left(\frac{2n+1}{2}\right)_1 + \binom{r}{2} \left(\frac{2n+1}{2}\right)_2 + \dots + \binom{r}{r} \left(\frac{2n+1}{2}\right)_r$$

$$\text{czyli: } \left(\frac{2m+2r+1}{2}\right)_r = \sum_{v=0}^r \binom{r}{v} \left(\frac{2n+1}{2}\right)_v; \quad (68)$$

d) dla $m = \frac{n}{2} + r$ i $s = r$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+2r+1}{2}\right)_r &= \binom{r}{0} \left(\frac{n+1}{2}\right)_0 + \binom{r}{1} \left(\frac{n+1}{2}\right)_1 + \binom{r}{2} \left(\frac{n+1}{2}\right)_2 + \dots + \\ &\quad + \binom{r}{r} \left(\frac{n+1}{2}\right)_r \\ \text{czyli: } \left(\frac{n+2r+1}{2}\right)_r &= \sum_{v=0}^r \binom{r}{v} \left(\frac{n+1}{2}\right)_v. \end{aligned} \quad (69)$$

Według Zmórki mamy:

$$\begin{aligned} \binom{m+s}{1} &= \binom{m}{0} \binom{s}{1} + \binom{m}{1} \binom{s}{0} \\ \binom{m+s}{2} &= \binom{m}{0} \binom{s}{2} + \binom{m}{1} \binom{s}{1} + \binom{m}{2} \binom{s}{0} \\ \binom{m+s}{3} &= \binom{m}{0} \binom{s}{3} + \binom{m}{1} \binom{s}{2} + \binom{m}{2} \binom{s}{1} + \binom{m}{3} \binom{s}{0} \\ \binom{m+s}{4} &= \binom{m}{0} \binom{s}{4} + \binom{m}{1} \binom{s}{3} + \binom{m}{2} \binom{s}{2} + \binom{m}{3} \binom{s}{1} + \binom{m}{4} \binom{s}{0} \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

z czego okazuje się, że:

$$\begin{aligned} \binom{m+s}{r} &= \binom{m}{0} \binom{s}{r} + \binom{m}{1} \binom{s}{r-1} + \binom{m}{2} \binom{s}{r-2} + \dots + \binom{m}{r} \binom{s}{0} \\ \text{czyli: } \sum_{v=0}^r \binom{m}{v} \binom{s}{r-v} &= \binom{m+s}{r} \end{aligned} \quad (70)$$

Dla $m = \frac{2n+1}{2}$ przeistacza się ostatnie równanie w następujące:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2n+2s+1}{2}\right)_r &= \left(\frac{2n+1}{2}\right)_0 \binom{s}{r} + \left(\frac{2n+1}{2}\right)_1 \binom{s}{r-1} + \left(\frac{2n+1}{2}\right)_2 \binom{s}{r-2} + \\ &\quad + \dots + \left(\frac{2n+1}{2}\right)_r \binom{s}{0} \\ \text{czyli: } \sum_{v=0}^r \left(\frac{2n+1}{2}\right)_v \binom{s}{r-v} &= \left(\frac{2n+2s+1}{2}\right)_r, \end{aligned} \quad (71a)$$

które dla $n=0$ przybiera formę:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)_0 \binom{s}{r} + \left(\frac{1}{2}\right)_1 \binom{s}{r-1} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)_{r-1} \binom{s}{1} + \left(\frac{1}{2}\right)_r \binom{s}{0} &= \left(\frac{2s+1}{2}\right)_r \quad (71b) \\ \text{czyli: } \sum_{v=0}^r \left(\frac{1}{2}\right)_v \binom{s}{r-v} &= \left(\frac{2s+1}{2}\right)_r. \end{aligned}$$

Dla $m = \frac{2n+1}{2}$ zaś $s = \frac{2p+1}{2}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \binom{n+p+1}{r} &= \left(\frac{2n+1}{2}\right)_0 \left(\frac{2p+1}{2}\right)_r + \left(\frac{2n+1}{2}\right)_1 \left(\frac{2p+1}{2}\right)_{r-1} + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{2n+1}{2}\right)_r \left(\frac{2p+1}{2}\right)_0 \end{aligned}$$

$$72)a \quad \text{czyli: } \sum_{0, r}^v \left(\frac{2n+1}{2} \right)_v \left(\frac{2p+1}{2} \right)_{r-v} = \binom{n+p+1}{r}$$

Kładąc w końcu w tem samym równaniu za m wartość $\frac{m-1}{2}$ zaś $s = \frac{2n-1}{2}$ otrzymujemy:

$$\left(\frac{m-1}{2} \right)_0 \left(\frac{2n-1}{2} \right)_r + \left(\frac{m-1}{2} \right)_1 \left(\frac{2n-1}{2} \right)_{r-1} + \left(\frac{m-1}{2} \right)_2 \left(\frac{2n-1}{2} \right)_{r-2} + \dots + \left(\frac{m-1}{2} \right)_r \left(\frac{2n-1}{2} \right)_0 = \left(\frac{m+2n-2}{2} \right)_r$$

$$72)b \quad \text{czyli: } \sum_{0, r}^v \left(\frac{m-1}{2} \right)_v \left(\frac{2n-1}{2} \right)_{r-v} = \left(\frac{m+2n-2}{2} \right)_r$$

Równanie 27) uwolnione od ułamka przybiera dla $r+1$ zamiast r formę:

$$(n-r) \binom{n}{r} = (r+1) \binom{n}{r+1}$$

z której dla $n=m, m+1, m+2, \dots, m+p$ i równoczesnych wartości dla $r=s-1, s, s+1, \dots, s+p-1$ otrzymujemy równania:

$$(m-s+1) \binom{m}{s-1} = s \binom{m}{s}$$

$$(m-s+1) \binom{m+1}{s} = (s+1) \binom{m+1}{s+1}$$

$$(m-s+1) \binom{m+2}{s+1} = (s+2) \binom{m+2}{s+2}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(m-s+1) \binom{m+p-1}{s+p-2} = (s+p-1) \binom{m+p-1}{s+p-1}$$

$$(m-s+1) \binom{m+p}{s+p-1} = (s+p) \binom{m+p}{s+p}$$

Lewe strony według wzoru 32) zesumowane dają nas relacyą:

$$(m-s+1) \left[\binom{m+p+1}{s+p-1} - \binom{m}{s-2} \right] = s \binom{m}{s} + (s+1) \binom{m+1}{s+1} + (s+2) \binom{m+2}{s+2} + \dots + (s+p) \binom{m+p}{s+p}$$

$$73) \quad \text{czyli: } (m-s+2) \left[\binom{m+p+1}{s+p-1} - \binom{m}{s-2} \right] = \sum_{0, p}^v (s+v) \binom{m+v}{s+v}$$

Szczegółowo otrzymujemy:

a) dla $s=1$:

$$m \binom{m+p+1}{p} = 1 \cdot \binom{m}{1} + 2 \binom{m+1}{2} + 3 \binom{m+2}{3} + \dots + (p+1) \binom{m+p}{p+1}$$

$$74) \quad \text{czyli: } m \binom{m+p+1}{p} = \sum_{0, p}^v (v+1) \binom{m+v}{v+1};$$

$$\beta) \text{ dla } m = \frac{2n+1}{2} :$$

$$\frac{2n-2s+3}{2} \left[\left(\frac{2n+2p+3}{2} \right)_{s+p-1} - \left(\frac{2n+1}{2} \right)_{s-2} \right] = s \left(\frac{2n+1}{2} \right)_s + \\ + (s+1) \left(\frac{2n+3}{2} \right)_{s+1} + \dots + (s+p) \left(\frac{2n+2p+1}{2} \right)_{s+p} \text{ czyli:}$$

$$\sum_{s,p} (s+v) \left(\frac{2n+2v+1}{2} \right)_{s+v} - \frac{2n-2s+3}{2} \left[\left(\frac{2n+2p+3}{2} \right)_{s+p-1} - \left(\frac{2n+1}{2} \right)_{s-2} \right] \quad (75)$$

γ) dla $m = \frac{2n+1}{2}$, $s=1$:

$$\frac{2n+1}{2} \left(\frac{2n+2p+3}{2} \right)_p - 1 \cdot \left(\frac{2n+1}{2} \right)_1 + 2 \left(\frac{2n+3}{2} \right)_2 + \dots + (p+1) \left(\frac{2n+2p+1}{2} \right)_{p+1}$$

czyli: $\sum_{s,p} (v+1) \left(\frac{2n+2v+1}{2} \right)_{v+1} = \frac{2n+1}{2} \left(\frac{2n+2p+3}{2} \right)_p$; (76)

δ) dla $m = \frac{1}{2}$, $s=1$:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2p+3}{2} \right)_p = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)_1 + 2 \left(\frac{3}{2} \right)_2 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)_3 + \dots + (p+1) \left(\frac{2p+1}{2} \right)_{p+1}$$

czyli: $\sum_{s,p} (v+1) \left(\frac{2v+1}{2} \right)_{v+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2p+3}{2} \right)_p$. (77)

Wykonajmy mnożenie po lewej stronie równania i przedstawmy je w formie:

$$n \binom{n}{r} = r \binom{n}{r} + (r+1) \binom{n}{r+1} \text{ albo}$$

$$(n+s) \binom{n}{r} = (r+s) \binom{n}{r} + (r+1) \binom{n}{r+1};$$

z której okazuje się, że:

A) dla $n=p, p+1, p+2, \dots, p+m$:

$$(p+s) \binom{p}{r} = (r+s) \binom{p+1}{r} + (r+1) \binom{p}{r+1}$$

$$(p+s+1) \binom{p+1}{r} = (r+s) \binom{p+1}{r} + (r+1) \binom{p+1}{r+1}$$

$$(p+s+2) \binom{p+2}{r} = (r+s) \binom{p+2}{r} + (r+1) \binom{p+2}{r+1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(p+s+m) \binom{p+m}{r} = (r+s) \binom{p+m}{r} + (r+1) \binom{p+m}{r+1}.$$

Suma tych równań darzy nas relacją:

$$(p+s) \binom{p}{r} + (p+s+1) \binom{p+1}{r} + \dots + (p+s+m) \binom{p+m}{r} = \\ = (r+s) \left[\binom{p+m+1}{r+1} - \binom{p}{r+1} \right] + (r+1) \left[\binom{p+m+1}{r+2} - \binom{p}{r+2} \right]$$

czyli: $\sum_{s,m} (p+s+v) \binom{p+v}{r} = (r+s) \left[\binom{p+m+1}{r+1} - \binom{p}{r+1} \right] + \\ + (r+1) \left[\binom{p+m+1}{r+2} - \binom{p}{r+2} \right],$

z której wypływają szczegółowe:

$\alpha)$ dla $p=r$:

$$(s+r) \binom{r}{r} + (s+r+1) \binom{r+1}{r} + (s+r+2) \binom{r+2}{r} + \dots + \\ + (s+r+m) \binom{r+m}{r} = (r+s) \binom{r+m+1}{r+1} + (r+1) \binom{r+m+1}{r+2}$$

$$79) \quad \text{czyli: } \sum_{0,m}^v (r+s+v) \binom{r+v}{r} = (r+s) \binom{r+m+1}{r+1} + (r+1) \binom{r+m+1}{r+2};$$

$\beta)$ dla $p=r$ i $s=0$:

$$r \binom{r}{r} + (r+1) \binom{r+1}{r} + (r+2) \binom{r+2}{r} + \dots + (r+m) \binom{r+m}{r} = \\ = r \binom{r+m+2}{r+2} + \binom{r+m+1}{r+2}$$

$$80) \quad \text{czyli: } \sum_{0,m}^v (r+v) \binom{r+v}{r} = r \binom{r+m+2}{r+2} + \binom{r+m+1}{r+2};$$

$\gamma)$ dla $p=r$ i $s=1$:

$$(r+1) \binom{r}{r} + (r+2) \binom{r+1}{r} + \dots + (r+m+1) \binom{r+m}{r} = (r+1) \binom{r+m+2}{r+2}$$

$$81) \quad \text{czyli: } \sum_{0,m}^v (r+v+1) \binom{r+v}{r} = (r+1) \binom{r+m+2}{r+2};$$

$\delta)$ dla $p = \frac{2n+1}{2}$ i $s=1$:

$$\frac{2n+3}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{2}\right)_r + \frac{2n+5}{2} \cdot \left(\frac{2n+3}{2}\right)_r + \frac{2n+7}{2} \cdot \left(\frac{2n+5}{2}\right)_r + \dots + \\ + \frac{2n+2m+3}{2} \cdot \left(\frac{2n+2m+1}{2}\right)_r = (r+1) \left[\left(\frac{2n+2m+5}{2}\right)_{r+2} - \left(\frac{2n+3}{2}\right)_{r+2} \right]$$

$$82) \quad \text{czyli: } \sum_{0,m}^v \frac{2n+2v+3}{2} \cdot \left(\frac{2n+2v+1}{2}\right)_r = (r+1) \left[\left(\frac{2n+2m+5}{2}\right)_{r+2} - \left(\frac{2n+3}{2}\right)_{r+2} \right]$$

$\epsilon)$ dla $p = \frac{2n+1}{2}$ zaś $s=0$:

$$\frac{2n+1}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{2}\right)_r + \frac{2n+3}{2} \cdot \left(\frac{2n+3}{2}\right)_r + \frac{2n+5}{2} \cdot \left(\frac{2n+5}{2}\right)_r + \dots + \\ + \frac{2n+2m+1}{2} \cdot \left(\frac{2n+2m+1}{2}\right)_r = r \left[\left(\frac{2n+2m+5}{2}\right)_{r+2} - \left(\frac{2n+3}{2}\right)_{r+2} \right] +$$

$$83) \quad + \left(\frac{2n+2m+3}{2}\right)_{r+2} - \left(\frac{2n+1}{2}\right)_{r+2} = \sum_{0,m}^v \frac{2n+2v+1}{2} \cdot \left(\frac{2n+2v+1}{2}\right)_r$$

$\eta)$ dla $p = \frac{2n+1}{2}$, $s=0$ i $r=1$:

$$\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2n+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2n+5}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n+2m+1}{2}\right)^2 = \\ = \frac{2n+2m+3}{3} \left(\frac{2n+2m+3}{2}\right)_2 - \frac{2n}{3} \left(\frac{2n+1}{2}\right)_2$$

$$84) \quad \text{czyli: } \sum_{0,m}^v \left(\frac{2n+2v+1}{2}\right)^2 = \frac{2n+2m+3}{3} \left(\frac{2n+2m+3}{2}\right)_2 - \frac{2n}{3} \left(\frac{2n+1}{2}\right)_2$$

Gdy dla $n=0$ okazuje się, że:

$$90) \quad n2^n = \sum_{v=0}^n (2v) \binom{n}{v} \quad \text{czyli:}$$

$$n2^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n};$$

b) dla $p=0$, $s=1$, zaś $m=n$:

$$91) \quad (n+1)2^n = \sum_{v=0}^n (2v+1) \binom{n}{v} \quad \text{czyli:}$$

$$(n+1)2^n = \binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + 5\binom{n}{2} + \dots + (2n+1)\binom{n}{n}$$

c) Dla $n=m$, $m+1$, $m+2$, ..., $m+p$ i równocześnie $s=p$, $p-1$, $p-2$, ..., 1 , 0 :

$$(m+p) \binom{m}{r} = (r+p) \binom{m}{r} + (r+1) \binom{m}{r+1}$$

$$(m+p) \binom{m+1}{r} = (r+p-1) \binom{m+1}{r} + (r+1) \binom{m+1}{r+1}$$

$$(m+p) \binom{m+2}{r} = (r+p-2) \binom{m+2}{r} + (r+1) \binom{m+2}{r+1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(m+p) \binom{m+p}{r} = r \binom{m+p}{r} + (r+1) \binom{m+p}{r+1}$$

Lewe strony i drugie wyrazy prawej strony otrzymanych równań tworzą szeregi, które według wzoru 29) zesumować się dają otrzymujemy przeto:

$$(r+p) \binom{m}{r} + (r+p-1) \binom{m+1}{r} + (r+p-2) \binom{m+2}{r} + \dots + r \binom{m+p}{r} =$$

$$= (m+p) \left[\binom{m+p+1}{r+1} - \binom{m}{r+1} \right] - (r+1) \left[\binom{m+p+1}{r+2} - \binom{m}{r+2} \right]$$

jeśli tylko otrzymane wzory sumowe na jedną stronę przeniesiemy. Albo w tej formie:

$$92)a \quad \sum_{v=0}^v (r+p-v) \binom{m+v}{r} = (m+p) \left[\binom{m+p+1}{r+1} - \binom{m}{r+1} \right] -$$

$$- (r+1) \left[\binom{m+p+1}{r+2} - \binom{m}{r+2} \right].$$

Współczynniki dwumianowe klasy r -tej możemy przenieść na jedną stronę i ściągnąć: otrzymamy tedy na sumę powyższych równań relacją:

$$(m-r) \binom{m}{r} + (m-r+1) \binom{m+1}{r} + (m-r+2) \binom{m+2}{r} + \dots +$$

$$+ (m-r+p) \binom{m+p}{r} = (r+1) \left[\binom{m+p+1}{r+2} - \binom{m}{r+2} \right]$$

$$92)b \quad \text{czyli: } \sum_{v=0}^v (m-r+v) \binom{m+v}{r} = (r+1) \left[\binom{m+p+1}{r+2} - \binom{m}{r+2} \right].$$

Szczegółowe przypadki tych dwóch form są:

a) dla $m=r$:

$$(r+p) \binom{r}{r} + (r+p-1) \binom{r+1}{r} + (r+p-2) \binom{r+2}{r} + \dots + r \binom{r+p}{r} = \\ = (r+p) \binom{r+p+1}{r+1} - (r+1) \binom{r+p+1}{r+2}$$

$$\text{czyli: } \sum_{o,p}^v (r+p-v) \binom{r+v}{r} = (r+p) \binom{r+p+1}{r+1} - (r+1) \binom{r+p+1}{r+2}; \quad 93)$$

$$\binom{r+1}{r} + 2 \binom{r+2}{r} + 3 \binom{r+3}{r} + \dots + p \binom{r+p}{r} = (r+1) \binom{r+p+1}{r+2}$$

$$\text{czyli: } \sum_{o,p}^v v \binom{r+v}{r} = (r+1) \binom{r+p+1}{r+2}; \quad 94)$$

$\beta)$ dla $m=p=r$:

$$2r \binom{r}{r} + (2r-1) \binom{r+1}{r} + (2r-2) \binom{r+2}{r} + \dots + r \binom{2r}{r} = \\ = 2r \binom{2r+1}{r+1} - (r+1) \binom{2r+1}{r+2}$$

$$\text{czyli: } \sum_{o,r}^v (2r-v) \binom{r+v}{r} = 2r \binom{2r+1}{r+1} - (r+1) \binom{2r+1}{r+2}; \quad 95)$$

$$\binom{r+1}{r} + 2 \binom{r+2}{r} + 3 \binom{r+3}{r} + \dots + r \binom{2r}{r} = (r+1) \binom{2r+1}{r+2}$$

$$\text{czyli: } \sum_{o,r}^v v \binom{r+v}{r} = (r+1) \binom{2r+1}{r+2}; \quad 96)$$

$\gamma)$ dla $m = \frac{2n+1}{2}$:

$$(r+p) \binom{\frac{2n+1}{2}}{r} + (r+p-1) \binom{\frac{2n+3}{2}}{r} + (r+p-2) \binom{\frac{2n+5}{2}}{r} + \dots + \\ + r \binom{\frac{2n+2p+1}{2}}{r} = \frac{2n+2p+1}{2} \left[\binom{\frac{2n+2p+3}{2}}{r+1} - \binom{\frac{2n+1}{2}}{r+1} \right] - \\ - (r+1) \left[\binom{\frac{2n+2p+3}{2}}{r+2} - \binom{\frac{2n+1}{2}}{r+2} \right] \text{ czyli:}$$

$$\sum_{o,p}^v (r+p-v) \binom{\frac{2n+2v+1}{2}}{r} = \frac{2n+2p+1}{2} \left[\binom{\frac{2n+2p+3}{2}}{r+1} - \binom{\frac{2n+1}{2}}{r+1} \right] - \\ - (r+1) \left[\binom{\frac{2n+2p+3}{2}}{r+2} - \binom{\frac{2n+1}{2}}{r+2} \right]; \quad 97)$$

$$(2n-2r+1) \binom{\frac{2n+1}{2}}{r} + (2n-2r+3) \binom{\frac{2n+3}{2}}{r} + \dots + \\ + (2n-2r+2p+1) \binom{\frac{2n+2p+1}{2}}{r} = (2r+2) \left[\binom{\frac{2n+2p+3}{2}}{r+2} - \binom{\frac{2n+1}{2}}{r+2} \right]$$

$$\text{czyli: } \sum_{o,p}^v (2n-2r+2v+1) \binom{\frac{2n+2v+1}{2}}{r} = \\ = (2r+2) \left[\binom{\frac{2n+2p+3}{2}}{r+2} - \binom{\frac{2n+1}{2}}{r+2} \right]. \quad 98)$$

Otrzymane wyniki z drugiej formy powyższego równania wpływają także z równania 78) dla $s=-r$.

Druga grupa równań wyłania się ze wzoru:

$$(n-r) \binom{n}{r} = (r+1) \binom{n}{r+1}$$

z którego korzystałem przy grupie poprzedniej.

Mnożąc bowiem obie strony przytoczonego równania przez $r!$ otrzymujemy:

$$(n-r) \cdot r! \binom{n}{r} = (r+1)! \binom{n}{r+1}$$

równanie, które dla $r-1$ zamiast r przybiera formę:

$$(n-r+1) (r-1)! \binom{n}{r-1} = r! \binom{n}{r} \quad \text{albo:}$$

$$(n-r)(r-1)! \binom{n}{r-1} + (r-1)! \binom{n}{r-1} = r! \binom{n}{r}.$$

Z ostatniej relacji otrzymujemy dla $r=m, m+1, m+2, \dots$
 $m+s$ równania:

$$(n-m)(m-1)! \binom{n}{m-1} + (m-1)! \binom{n}{m-1} = m! \binom{n}{m}$$

$$(n-m-1) \cdot m! \binom{n}{m} + m! \binom{n}{m} = (m+1)! \binom{n}{m+1}$$

$$(n-m-2)(m+1)! \binom{n}{m+1} + (m+1)! \binom{n}{m+1} = (m+2)! \binom{n}{m+2}$$

.....

$$(n-m-s)(m+s-1)! \binom{n}{m+s-1} + (m+s-1)! \binom{n}{m+s-1} = (m+s)! \binom{n}{m+s},$$

których suma darzy nas relacją:

$$(n-m)(m-1)! \binom{n}{m-1} + (n-m-1)m! \binom{n}{m} + (n-m-2)(m+1)! \binom{n}{m+1} + \dots + (n-m-s)(m+s-1)! \binom{n}{m+s-1} = (m+s)! \binom{n}{m+s} - (m-1)! \binom{n}{m-1}$$

czyli: $\sum_{0,s}^v (n-m-v)(m+v-1)! \binom{n}{m+v-1} = (m+s)! \binom{n}{m+s} -$

$$99) \quad \dots (m-1)! \binom{n}{m-1}.$$

Szczególne wartości tego równania są:

 $\alpha)$ dla $m=1$:

$$\begin{aligned} (n-1) \cdot 0! \binom{n}{0} + (n-2) \cdot 1! \binom{n}{1} + (n-3) \cdot 2! \binom{n}{2} + \cdots + (n-s-1) s! \binom{n}{s} \\ \Rightarrow (s+1)! \binom{n}{s+1} = 1 \end{aligned}$$

$$100) \quad \sum_{v=0}^s (n-v-1)v! \binom{n}{v} = (s+1)! \binom{n}{s+1} - 1;$$

$\beta)$ dla $m=1, s=n-1$:

$$(n-1) \cdot 0! \binom{n}{0} + (n-2) \cdot 1! \binom{n}{1} + \cdots + 1 \cdot (n-2)! \binom{n}{n-2} = n! - 1$$

101) czyli: $\sum_{v=0}^n (n-v-1)v! \binom{n}{v} = n! - 1$;

γ) dla $n = m + r$:

$$r(m-1)! \binom{m+r}{m-r} + (r-1)m! \binom{m+r}{m} + \dots +$$

$$+ (r-s)(m+s-1)! \binom{m+r}{m+s-1} = (m+s)! \binom{m+r}{m+s} - (m-1)! \binom{m+r}{m-1}$$

czyli: $\sum_{0,s}^v (r-v)(m+v-1)! \binom{r+m}{m+v-1} = (m+s)! \binom{m+r}{m+s} - (m-1)! \binom{m+r}{m-1}$; 102)

$$d) \text{ dla } n = m + \frac{2r+1}{2} :$$

$$\frac{1}{2} \left[(2r+1)(m-1)! \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_{m-1} + (2r-1)m! \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_m + \dots \right.$$

$$\left. + (2r-2s+1)(m+s-1)! \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_{m+s-1} \right]$$

$$= (m+s)! \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_{m+s} - (m-1)! \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_{m-1}$$

czyli: $\frac{1}{2} \sum_{0,s}^v (2r-2v+1)(m+v-1)! \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_{m+v-1} =$

$$= (m+s)! \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_{m+s} - (m-1)! \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_{m-1} \quad 103)$$

Przedstawimy wspomniane na początku tej grupy równanie w formie:

$$(n+1) \binom{n}{r} = (r+1) \binom{n+1}{r+1} \text{ czyli:}$$

$$(n+1)r! \binom{n}{r} = (r+1)! \binom{n+1}{r+1} \text{ albo:}$$

$$n \cdot r! \binom{n}{r} + r! \binom{n}{r} = (r+1)! \binom{n+1}{r+1}$$

i zwiększamy równocześnie n i r o: 1, 2, 3, ... s to otrzymamy równania:

$$n \cdot r! \binom{n}{r} + r! \binom{n}{r} = (r+1)! \binom{n+1}{r+1}$$

$$(n+1)(r+1)! \binom{n+1}{r+1} + (r+1)! \binom{n+1}{r+1} = (r+2)! \binom{n+2}{r+2}$$

$$(n+2)(r+2)! \binom{n+2}{r+2} + (r+2)! \binom{n+2}{r+2} = (r+3)! \binom{n+3}{r+3} \quad A)$$

$$\vdots$$

$$(n+s)(r+s)! \binom{n+s}{r+s} + (r+s)! \binom{n+s}{r+s} = (r+s+1)! \binom{n+s+1}{r+s+1},$$

których suma przybiera kształt:

$$n \cdot r! \binom{n}{r} + (n+1)(r+1)! \binom{n+1}{r+1} + (n+2)(r+2)! \binom{n+2}{r+2} + \dots +$$

$$+ (n+s)(r+s)! \binom{n+s}{r+s} = (r+s+1)! \binom{n+s+1}{r+s+1} - r! \binom{n}{r}$$

$$\text{czyli: } \sum_{0,s}^v (n+v)(r+v)! \binom{n+v}{r+v} = \frac{(n+s+1)! - n!}{(n-r)!} \quad 104)$$

$$\text{albo: } \sum_{0,s}^v (n+v)(r+v)! \binom{n+v}{n-r} = \frac{(n+s+1)! - n!}{(n-r)!}$$

Z ostatniego równania otrzymujemy szczegółowe:

$\alpha)$ dla $r=n$:

$$n, n! + (n+1)(n+1)! + (n+2)(n+2)! + \dots + (n+s)(n+s)! = \\ = (n+s+1)! - n!$$

$$\text{albo: } n^2(n-1)! + (n+1)^2 n! + (n+2)^2(n+1)! + \dots + (n+s)^2(n+s-1)! = \\ = (n+s-1)! - n!$$

$$105) \text{ czyli: } \sum_{0,s}^v (n+v)(n+v)! = \sum_{0,s}^v (n+v)^2(n+v-1)! = (n+s-1)! - n!;$$

$$\beta) \text{ dla } n = \frac{2m+1}{2} :$$

$$\frac{1}{2} \left[(2m+1)r! \left(\frac{2m+1}{2} \right)_r + (2m+3)(r+1)! \left(\frac{2m+3}{2} \right)_{r+1} + \dots + \right. \\ \left. + (2m+2s+1)(r+s)! \left(\frac{2m+2s+1}{2} \right)_{r+s} \right] = (r+s+1)! \left(\frac{2m+2s+3}{2} \right)_{r+s+1} - \\ - r! \left(\frac{2m+1}{2} \right)_r$$

$$\text{czyli: } \frac{1}{2} \sum_{0,s}^v (2m+2v+1)(r+v)! \left(\frac{2m+2v+1}{2} \right)_{r+v} =$$

$$106) = (r+s+1)! \left(\frac{2m+2s+3}{2} \right)_{r+s+1} - r! \left(\frac{2m+1}{2} \right)_r;$$

$\gamma)$ dla $r=0$:

$$n \cdot 0! \binom{n}{0} + (n+1) \cdot 1! \binom{n+1}{1} + (n+2) \cdot 2! \binom{n+2}{2} + \dots + (n+s) \cdot s! \binom{n+s}{s} = \\ = (s+1)! \binom{n+s+1}{s+1} - 1$$

$$107) \text{ czyli: } \sum_{0,s}^v (n+v) \cdot v! \binom{n+v}{v} = (s+1)! \binom{n+s+1}{s+1} - 1;$$

$$\delta) \text{ dla } r=0 \text{ zaś } n = \frac{2m+1}{2} :$$

$$\frac{1}{2} \left[(2m+1) \cdot 0! \left(\frac{2m+1}{2} \right)_0 + (2m+3) \cdot 1! \left(\frac{2m+3}{2} \right)_1 + \dots + \right. \\ \left. + (2m+2s+1) \cdot s! \left(\frac{2m+2s+1}{2} \right)_s \right] = (s+1)! \left(\frac{2m+2s+3}{2} \right)_{s+1} - 1$$

$$108) \text{ czyli: } \frac{1}{2} \sum_{0,s}^v (2m+2v+1)v! \left(\frac{2m+2v+1}{2} \right)_v = (s+1)! \left(\frac{2m+2s+3}{2} \right)_{s+1} - 1;$$

$$\epsilon) \text{ dla } r=0, \text{ zaś } n = \frac{1}{2} :$$

$$\frac{1}{2} \left[1 \cdot 0! \left(\frac{1}{2} \right)_0 + 3 \cdot 1! \left(\frac{3}{2} \right)_1 + \dots + (2s+1) s! \left(\frac{2s+1}{2} \right)_s \right] = \\ = (s+1)! \left(\frac{2s+3}{2} \right)_{s+1} - 1$$

$$109) \text{ czyli: } \frac{1}{2} \sum_{0,s}^v (2v+1)v! \left(\frac{2v+1}{2} \right)_v = (s+1)! \left(\frac{2s+3}{2} \right)_{s+1} - 1.$$

Napiszmy przytoczone równania jeszcze raz:

$$\begin{array}{l|l}
 n \cdot r! \binom{n}{r} + r! \binom{n}{r} = (r+1)! \binom{n+1}{r+1} & \binom{n+s}{s} s! \\
 (n+1)(r+1)! \binom{n+1}{r+1} + (r+1)! \binom{n+1}{r+1} = (r+2)! \binom{n+2}{r+2} & \binom{n+s}{s-1} (s-1)! \\
 \vdots & \vdots \\
 (n+s-1)(r+s-1)! \binom{n+s-1}{r+s-1} + (r+s-1)! \binom{n+s-1}{r+s-1} = (r+s)! \binom{n+s}{r+s} & \binom{n+s}{1} 1! \\
 (n+s)(r+s)! \binom{n+s}{r+s} + (r+s)! \binom{n+s}{r+s} = (r+s+1)! \binom{n+s+1}{r+s+1} & \binom{n+s}{0} 0!
 \end{array}$$

i pomnóżmy liczbami obok pionowej kreski umieszczonymi, to otrzymamy na sumę iloczynów wyraz:

$$\begin{aligned}
 & r! \binom{n}{r} s! \binom{n+s}{s} + (r+1)! \binom{n+1}{r+1} (s-1)! \binom{n+s}{s-1} + \dots + \\
 & + (r+s)! \binom{n+s}{r+s} \cdot 0! \binom{n+s}{0} = (r+s+1)! \binom{n+s+1}{r+s+1} - n \cdot r! \binom{n}{r} \binom{n+s}{s} s!, \\
 & \text{czyli: } \sum_{v=0, s}^v (r+v)! \binom{n+v}{r+v} (s-v)! \binom{n+s}{s-v} = (r+s+1)! \binom{n+s+1}{r+s+1} - \\
 & - n \cdot r! \binom{n}{r} s! \binom{n+s}{s} = (r+s+1)! \binom{n+s+1}{r+s+1} - n \cdot r! \binom{n}{r} \binom{n+s}{s} s!, \quad 110)
 \end{aligned}$$

którego szczegółowe wartości są:

$\alpha)$ dla $n = r$:

$$\begin{aligned}
 & r! s! \binom{r+s}{s} + (r+1)! (s-1)! \binom{r+s}{s-1} + \dots + (r+s)! 0! \binom{r+s}{0} = \\
 & = (r+s+1)! - r! (s+1)! \binom{r+s}{s+1} - r! s! \binom{r+s}{s} r
 \end{aligned}$$

$$\text{czyli: } \sum_{v=0, s}^v (r+v)! (s-v)! \binom{r+s}{s-v} = (r+s+1)! - r! (s+1)! \binom{r+s}{s+1} - r! s! \binom{r+s}{s} r, \quad 111)$$

$\beta)$ $n = r = 0$:

$$0! s! \binom{s}{s} + 1! (s-1)! \binom{s}{s-1} + 2! (s-2)! \binom{s}{s-2} + \dots + s! 0! \binom{s}{0} = (s+1)!$$

$$\text{czyli: } \sum_{v=0, s}^v v! (s-v)! \binom{s}{s-v} = (s+1)! \quad 112)$$

W ten sam sposób otrzymamy z równania:

$$(n-1) r! \binom{n}{r} + 2 \cdot r! \binom{n}{r} = (r+1)! \binom{n+1}{r+1}$$

dla: $n, n+1, n+2, \dots, n+s$ i równocześnie $r, r+1, r+2, \dots, r+s$ relacją:

$$\begin{aligned}
 & (n-1) r! \binom{n}{r} 2^s + n (r+1)! \binom{n+1}{r+1} 2^{s-1} + \dots + \\
 & + (n+s-1) (r+s)! \binom{n+s}{r+s} 2^0 = (r+s+1)! \binom{n+s+1}{r+s+1} - r! \binom{n}{r} 2^{s+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{czyli: } \sum_{v=0, s}^v (n+v-1) (r+v)! \binom{n+v}{r+v} 2^{s-v} = (r+s+1)! \binom{n+s+1}{r+s+1} -$$

$$- r! \binom{n}{r} 2^{s+1} \quad 113)$$

jeśli tylko otrzymane równania pomnożymy potęgami: $2^s, 2^{s-1}, 2^{s-2}, \dots, 2^1, 2^0$.

Rozwinąwszy współczynniki dwumianowe tego równania według wzoru 3) czyli dla $n=r$ otrzymamy równanie:

$$r(r+1)! 2^s + (r+1)(r+2)! 2^{s-1} + \dots + (r+s)(r+s+1)! 2^0 = (r+s+2)! - (r+1)! 2^{s+1}$$

$$114) \quad \text{czyli: } \sum_{v,s} (r+v)(r+v+1)! 2^{s-v} = (r+s+2)! - (r+1)! 2^{s+1}$$

z którego dla $r=0$ wypływa szczegółowe:

$$1 \cdot 2! 2^{s-1} + 2 \cdot 3! 2^{s-2} + 3 \cdot 4! 2^{s-3} + \dots + s(s+1)! 2^0 = (s+2)! - 1! 2^{s+1}$$

$$115) \quad \text{czyli: } \sum_{v,s} v(v+1)! 2^{s-v} = (s+2)! - 1! 2^{s+1}$$

Równania pod A) przytoczone można przedstawić w formie:

$$\begin{array}{lcl} n \binom{n}{r} + \binom{n}{r} = (r+1) \binom{n+1}{r+1} & (r) \text{ o!} \\ (n+1) \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r+1} = (r+2) \binom{n+2}{r+2} & (r+1) \text{ 1!} \\ B) \quad (n+2) \binom{n+2}{r+2} + \binom{n+2}{r+2} = (r+3) \binom{n+3}{r+3} & (r+2) \text{ 2!} \\ \vdots & \vdots \\ (n+s) \binom{n+s}{r+s} + \binom{n+s}{r+s} = (r+s+1) \binom{n+s+1}{r+s+1} & (r+s) \text{ s!} \end{array}$$

z której po wykonaniu mnożenia liczbami obok pionowej kreski umieszczonymi otrzymujemy na sumę równanie:

$$\begin{aligned} n \binom{n}{r} (r) \text{ o!} + (n+1) \binom{n+1}{r+1} (r+1) \text{ 1!} + \dots + (n+s) \binom{n+s}{r+s} (r+s) \text{ s!} = \\ = (r+s+1) \binom{n+s+1}{r+s+1} (r+s) \text{ s!} - \binom{n}{r} (r) \text{ o!} \end{aligned}$$

$$116) \quad \text{czyli: } \sum_{v,s} (n+v) \binom{n+v}{r+v} (r+v) \text{ v!} = \frac{(n+s+1)! - n!}{r!(n-r)!}$$

Dla $n=r$ przeistacza się ostatecznie równanie w następujące:

$$\begin{aligned} r \binom{r}{r} \text{ o!} + (r+1) \binom{r+1}{r+1} \text{ 1!} + (r+2) \binom{r+2}{r+2} \text{ 2!} + \dots + (r+s) \binom{r+s}{r+s} \text{ s!} = \\ = \frac{(r+s+1)! - r!}{r!} \end{aligned}$$

$$117) \quad \text{czyli: } \sum_{v,s} (r+v) \binom{r+v}{r} \text{ v!} = \frac{(r+s+1)! - r!}{r!}$$

Dodajmy wyrazy stojące po lewej stronie równań pod B) przytoczonych, prawe zaś rozłożmy na dwie części, to otrzymamy dla: $n, n+1, n+2, \dots, n+s$ i równocześnie $r, r+1, r+2, \dots, r+s$ następujące równania:

$$\begin{array}{lcl}
 (n+1) \binom{n}{r} = r \binom{n+1}{r+1} + \binom{n+1}{r+1} & | & \binom{n+s+1}{s} s! \\
 (n+2) \binom{n+1}{r+1} = (r+1) \binom{n+2}{r+2} + \binom{n+2}{r+2} & | & \binom{n+s+1}{s-1} (s-1)! \\
 (n+3) \binom{n+2}{r+2} = (r+2) \binom{n+3}{r+3} + \binom{n+3}{r+3} & | & \binom{n+s+1}{s-2} (s-2)! \quad C) \\
 \vdots & | & \vdots \\
 (n+s+1) \binom{n+s}{r+s} = (r+s) \binom{n+s+1}{r+s+1} + \binom{n+s+1}{r+s+1} & | & \binom{n+s+1}{0} 0!
 \end{array}$$

których suma po wykonaniu mnożenia liczbami obok umieszczonymi darzy nas relacją:

$$\begin{aligned}
 & r \binom{n+1}{r+1} \binom{n+s+1}{s} s! + (r+1) \binom{n+2}{r+2} \binom{n+s+1}{s-1} (s-1)! + \dots + \\
 & + (r+s) \binom{n+s+1}{r+s+1} \binom{n+s+1}{0} 0! = (n+1) \binom{n}{r} \binom{n+s+1}{s} s! - \binom{n+s+1}{r+s+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{czyli: } \sum_{0 \leq v \leq s} (r+v) \binom{n+v+1}{r+v+1} \binom{n+s+1}{s-v} (s-v)! = \frac{(n+s+1)! [(r+s+1)! - r!]}{r! (n-r)! (r+s+1)!} \quad 118)$$

Rozwinąwszy współczynniki dwumianowe otrzymanej relacji według wzoru 3) otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned}
 & \frac{r}{(r+1)!} + \frac{r+1}{(r+2)!} + \frac{r+2}{(r+3)!} + \dots + \frac{r+s}{(r+s+1)!} = \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+s+1)!} \\
 \text{albo:} & \frac{1}{(r+1)(r-1)!} + \frac{1}{(r+2)r!} + \frac{1}{(r+3)(r+1)!} + \dots + \frac{1}{(r+s+1)(r+s-1)!} = \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+s+1)!} \\
 \text{czyli: } \sum_{0 \leq v \leq s} \frac{r+v}{(r+v+1)!} &= \sum_{0 \leq v \leq s} \frac{1}{(r+v+1)(r+v-1)!} = \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+s+1)!} \quad 119)
 \end{aligned}$$

Szczegółowe wartości tego równania są:

a) dla $r=1$:

$$\frac{1}{2 \cdot 0!} + \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{4 \cdot 2!} + \dots + \frac{1}{(s+2) s!} = \frac{(s+2)! - 1!}{(s+2)!}$$

$$\text{czyli: } \sum_{0 \leq v \leq s} \frac{1}{(v+2) v!} = \frac{(s+2)! - 1!}{(s+2)!}; \quad 120)$$

β) dla $s = \infty$:

$$\frac{1}{(r+1)(r-1)!} + \frac{1}{(r+2)r!} + \frac{1}{(r+3)(r+1)!} + \dots \text{inf.} = \frac{1}{r!}$$

$$\text{czyli: } \sum_{0, \infty} \frac{1}{(r+v+1)(r+v-1)!} = \frac{1}{r!}; \quad 121)$$

γ) dla $r=1, s = \infty$:

$$\frac{1}{2 \cdot 0!} + \frac{1}{3 \cdot 1!} + \frac{1}{4 \cdot 2!} + \frac{1}{5 \cdot 3!} + \dots \text{inf.} = 1$$

$$\text{czyli: } \sum_{0, \infty} \frac{1}{(v+2) v!} = 1. \quad 122)$$

Pomnożmy równania pod C) przytoczone kolejno silniami: $(r-1)!, r!, \dots, (r+s-1)!$ a otrzymamy:

$$\begin{array}{l|l} (n+1)(r-1)! \binom{n}{r} = r! \binom{n+1}{r+1} + (r-1)! \binom{n+1}{r+1} & \binom{n+s+1}{s} s! \\ (n+2)r! \binom{n+1}{r+1} = (r+1)! \binom{n+2}{r+2} + r! \binom{n+2}{r+2} & \binom{n+s+1}{s-1} (s-1)! \\ \vdots & \vdots \\ (n+s+1)(r+s-1)! \binom{n+s}{r+s} = (r+s)! \binom{n+s+1}{r+s+1} + (r+s-1)! \binom{n+s+1}{r+s+1} & \binom{n+s+1}{0} 0! \end{array}$$

z czego po wykonaniu mnożenia liczbami obok umieszczonymi okazuje się, że:

$$\begin{aligned} & (r-1)! \binom{n+1}{r+1} \binom{n+s+1}{s} s! + r! \binom{n+2}{r+2} \binom{n+s+1}{s-1} (s-1)! + \dots \\ & + (r+s-1)! \binom{n+s+1}{r+s+1} \binom{n+s+1}{0} 0! = \\ & = (n+1)(r-1)! \binom{n}{r} \binom{n+s+1}{s} s! - (r+s)! \binom{n+s+1}{r+s+1} \\ & \text{czyli: } \sum_{v=0, s}^v (r+v-1)! \binom{n+v+1}{r+v+1} \binom{n+s+1}{s-v} (s-v)! = \\ 123) \quad & = \frac{(n+s+1)!}{(n-r)!} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+s+1} \right]. \end{aligned}$$

Postępując z ostatnim równaniem w ten sam sposób co z równaniem 118), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{(r-1)!}{(r+1)!} + \frac{r!}{(r+2)!} + \frac{(r+1)!}{(r+3)!} + \dots + \frac{(r+s-1)!}{(r+s+1)!} &= \frac{(r-1)!}{r!} - \frac{(r+s)!}{(r+s+1)!} \text{ t.j.} \\ \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(r+1)(r+2)} + \frac{1}{(r+2)(r+3)} + \dots + \frac{1}{(r+s)(r+s+1)} &= \\ &= \frac{1}{r} - \frac{1}{r+s+1} \end{aligned}$$

$$124) \quad \text{czyli: } \sum_{v=0, s}^v \frac{1}{(r+v)(r+v+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+s+1}.$$

Szczegółowo otrzymujemy:

a) dla $s = \infty$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{(r+1)(r+2)} + \frac{1}{(r+2)(r+3)} + \dots + \text{inf.} = \frac{1}{r} \\ 125) \quad \text{czyli: } \sum_{v=0, \infty}^v \frac{1}{(r+v)(r+v+1)} &= \frac{1}{r}; \end{aligned}$$

b) dla $r = 1$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{s+2} \\ 126) \quad \text{czyli: } \sum_{v=0, s}^v \frac{1}{(v+1)(v+2)} &= \frac{s+1}{s+2}; \end{aligned}$$

c) dla $r = 1, s = \infty$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \text{inf.} = 1$$

$$\text{czyli: } \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(v+1)(v+2)} = 1; \quad (127)$$

d) dla $r = \frac{m}{n}$:

$$\frac{1}{m(m+n)} + \frac{1}{(m+n)(m+2n)} + \frac{1}{(m+2n)(m+3n)} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(m+sn)[m+(s+1)n]} = \frac{s+1}{m[m+(s+1)n]};$$

$$\text{czyli: } \sum_{v=0}^s \frac{1}{(m+vn)[m+(v+1)n]} = \frac{s+1}{m[m+(s+1)n]} \quad (128)$$

e) dla $r = \frac{m}{n}$, $s = \infty$:

$$\frac{1}{m(m+n)} + \frac{1}{(m+n)(m+2n)} + \frac{1}{(m+2n)(m+3n)} + \dots \text{inf.} = \frac{1}{mn}$$

$$\text{czyli: } \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(m+vn)[m+(v+1)n]} = \frac{1}{mn}; \quad (129)$$

f) dla $r = \frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(3n+1)} + \dots + \frac{1}{(sn+1)[(s+1)n+1]} =$$

$$= \frac{s+1}{(s+1)n+1}$$

$$\text{czyli: } \sum_{v=0}^s \frac{1}{(vn+1)[(v+1)n+1]} = \frac{s+1}{(s+1)n+1}; \quad (130)$$

g) dla $r = \frac{1}{n}$, $s = \infty$:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(3n+1)} + \dots + \text{inf.} = \frac{1}{n}$$

$$\text{czyli: } \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(vn+1)[(v+1)n+1]} = \frac{1}{n}. \quad (131)$$

Przedstawmy wyobraźniki $\binom{m+r}{r}$ i $\binom{m}{p}$ w rozwiniętej formie i pomnożmy otrzymane równania przez siebie to otrzymamy na iloczyn;

$$\binom{m+r}{r} \binom{m}{p} = \frac{(m+r)(m+r-1)(m+r-2)\dots(m+1) \cdot m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{r! p!}$$

$$= \frac{(m+r)(m+r-1)\dots(m-p+1) \cdot (r+p)(r+p-1)\dots(r+2)(r+1)}{r!(r+1)(r+2)\dots(r+p) p!}$$

$$= \frac{(m+r)(m+r-1)\dots(m-p+1)}{(r+p)!} \cdot \frac{(r+p)(r+p-1)\dots(r+1)}{p!} \quad \text{tj.}$$

$$\binom{m+r}{r} \binom{m}{p} = \binom{m+r}{r+p} \binom{r+p}{p} \quad \text{czyli na mocy 10) } = \binom{m+r}{r+p} \binom{r+p}{r} \quad \text{tj.}$$

równanie, z którego wpływa trzecia grupa równań:

A) Dla $r=n, n+1, n+2, \dots, n+s$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \binom{m+n}{n+p} \binom{n+p}{p} &= \binom{m+n}{n} \binom{m}{p} \\ \binom{m+n+1}{n+p+1} \binom{n+p+1}{p} &= \binom{m+n+1}{n+1} \binom{m}{p} \\ \binom{m+n+2}{n+p+2} \binom{n+p+2}{p} &= \binom{m+n+2}{n+2} \binom{m}{p} \\ &\vdots \\ \binom{m+n+s}{n+p+s} \binom{n+p+s}{p} &= \binom{m+n+s}{n+s} \binom{m}{p} \end{aligned}$$

równania których suma przy pomocy równania 32) przybiera formę:

$$\binom{m+n}{n+p} \binom{n+p}{p} + \binom{m+n+1}{n+p+1} \binom{n+p+1}{p} + \binom{m+n+2}{n+p+2} \binom{n+p+2}{p} + \dots + \binom{m+n+s}{n+p+s} \binom{n+p+s}{p} = \binom{m}{p} \left[\binom{m+n+s+1}{n+s} - \binom{m+n}{n-1} \right]$$

$$132) \text{ czyli: } \sum_{o,s}^v \binom{m+n+v}{n+p+v} \binom{n+p+v}{p} = \binom{m}{p} \left[\binom{m+n+s+1}{n+s} - \binom{m+n}{n-1} \right],$$

której szczegółowe wartości są:

$\alpha)$ dla $n=0$:

$$\binom{m}{p} \binom{p}{p} + \binom{m+1}{p+1} \binom{p+1}{p} + \binom{m+2}{p+2} \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{m+s}{p+s} \binom{p+s}{p} = \binom{m}{p} \binom{m+s+1}{s}$$

$$133)a \quad \text{czyli: } \sum_{o,s}^v \binom{m+v}{p+v} \binom{p+v}{p} = \binom{m}{p} \binom{m+s+1}{s}$$

Na mocy równania 7) przeistacza się ostatnia relacja w następującą:

$$\binom{m}{m-p} \binom{p}{p} + \binom{m+1}{m-p} \binom{p+1}{p} + \binom{m+2}{m-p} \binom{p+2}{p} + \dots + \binom{m+s}{m-p} \binom{p+s}{p} = \binom{m}{p} \binom{m+s+1}{s}$$

$$133)b \quad \text{czyli: } \sum_{o,s}^v \binom{m+v}{m-p} \binom{p+v}{p} = \binom{m}{p} \binom{m+s+1}{s}$$

$$133)c \quad \text{albo: } \sum_{o,s}^v \binom{m+v}{m-p} \binom{p+v}{p} = \binom{m}{p} \binom{m+s+1}{s}$$

$\beta)$ dla $n=0$, zaś $m = \frac{2r+1}{2}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2r+1}{2}\right)_p \binom{p}{p} + \left(\frac{2r+3}{2}\right)_{p+1} \binom{p+1}{p} + \left(\frac{2r+5}{2}\right)_{p+2} \binom{p+2}{p} + \dots \\ + \left(\frac{2r+2s+1}{2}\right)_{p+s} \binom{p+s}{p} = \left(\frac{2r+1}{2}\right)_p \left(\frac{2r+2s+3}{2}\right)_s \end{aligned}$$

$$134) \quad \text{czyli: } \sum_{o,s}^v \left(\frac{2r+2v+1}{2}\right)_{p+v} \binom{p+v}{p} = \left(\frac{2r+1}{2}\right)_p \left(\frac{2r+2s+3}{2}\right)_s$$

B) dla $m=s, s+1, s+2, \dots, s+n$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 & \binom{s+r}{r} \binom{s}{p} \mp \binom{s+r}{p+r} \binom{p+r}{r} \\
 & \binom{s+r+1}{r} \binom{s+1}{p} = \binom{s+r+1}{p+r} \binom{p+r}{r} \\
 & \binom{s+r+2}{r} \binom{s+2}{p} = \binom{s+r+2}{p+r} \binom{p+r}{r} \\
 & \vdots \\
 & \binom{s+r+n}{r} \binom{s+n}{p} = \binom{s+r+n}{p+r} \binom{p+r}{r}
 \end{aligned}$$

równania, których suma darzy nas relacją:

$$\begin{aligned}
 & \binom{s+r}{r} \binom{s}{p} + \binom{s+r+1}{r} \binom{s+1}{p} + \binom{s+r+2}{r} \binom{s+2}{p} + \dots + \\
 & + \binom{s+r+n}{r} \binom{s+n}{p} = \binom{p+r}{r} \left[\binom{s+r+n+1}{p+r+1} - \binom{s+r}{p+r+1} \right] \\
 \text{czyli: } \sum_{0,n}^v \binom{s+r+v}{r} \binom{s+v}{p} &= \binom{p+r}{r} \left[\binom{s+r+n+1}{p+r+1} - \binom{s+r}{p+r+1} \right] \quad 135)
 \end{aligned}$$

Szczegółowe wartości tego równania są:

α) dla $s = p$:

$$\begin{aligned}
 & \binom{p+r}{r} \binom{p}{p} + \binom{p+r+1}{r} \binom{p+1}{p} + \binom{p+r+2}{r} \binom{p+2}{p} + \dots \\
 & + \binom{p+r+n}{r} \binom{p+n}{p} = \binom{p+r+n+1}{p+r+1} \binom{p+r}{r} \\
 \text{czyli: } \sum_{0,n}^v \binom{p+r+v}{r} \binom{p+v}{p} &= \binom{p+r}{r} \binom{p+r+n+1}{p+r+1} \quad 136)
 \end{aligned}$$

β) dla $p = s = r$:

$$\begin{aligned}
 & \binom{2r}{r} \binom{r}{r} + \binom{2r+1}{r} \binom{r+1}{r} + \binom{2r+2}{r} \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{2r+n}{r} \binom{r+n}{r} = \\
 & = \binom{2r}{r} \binom{2r+n+1}{2r+1} \\
 \text{czyli: } \sum_{0,n}^v \binom{2r+v}{r} \binom{r+v}{r} &= \binom{2r}{r} \binom{2r+n+1}{2r+1} \quad 137)
 \end{aligned}$$

γ) dla $s = p = n = r$:

$$\begin{aligned}
 & \binom{2r}{r} \binom{r}{r} + \binom{2r+1}{r} \binom{r+1}{r} + \binom{2r+2}{r} \binom{r+2}{r} + \dots + \binom{3r}{r} \binom{2r}{r} = \\
 & = \binom{2r}{r} \binom{3r+1}{2r+1} \\
 \text{czyli: } \sum_{0,r}^v \binom{2r+v}{r} \binom{r+v}{r} &= \binom{2r}{r} \binom{3r+1}{2r+1} \quad 138)
 \end{aligned}$$

δ) dla $s = \frac{2m+1}{2}$:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_r \left(\frac{2m+1}{2} \right)_p + \left(\frac{2m+2r+3}{2} \right)_r \left(\frac{2m+3}{2} \right)_p + \dots \\
 & + \left(\frac{2m+2r+2n+1}{2} \right)_r \left(\frac{2m+2n+1}{2} \right)_p = \\
 & = \binom{p+r}{r} \left[\left(\frac{2m+2r+2n+3}{2} \right)_{p+r+1} - \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_{p+r+1} \right],
 \end{aligned}$$

$$139) \quad \text{czyli: } \sum_{o,n}^v \left(\frac{2m+2r+2v+1}{2} \right)_r \left(\frac{2m+2v+1}{2} \right)_p = \\ = \binom{p+r}{r} \left[\left(\frac{2m+2r+2n+3}{2} \right)_{p+r+1} - \left(\frac{2m+2r+1}{2} \right)_{p+r+1} \right]$$

ε) dla $s = \frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{2r+1}{2} \right)_r \cdot \left(\frac{1}{2} \right)_p + \left(\frac{2r+3}{2} \right)_r \left(\frac{3}{2} \right)_p + \left(\frac{2r+5}{2} \right)_r \left(\frac{5}{2} \right)_p + \dots \\ + \left(\frac{2r+2n+1}{2} \right)_r \cdot \left(\frac{2n+1}{2} \right)_p = \binom{p+r}{r} \left[\left(\frac{2r+2n+3}{2} \right)_{p+r+1} - \left(\frac{2r+1}{2} \right)_{p+r+1} \right].$$

$$140) \quad \text{czyli: } \sum_{o,n}^v \left(\frac{2r+2v+1}{2} \right)_r \left(\frac{2v+1}{2} \right)_p = \\ = \binom{p+r}{r} \left[\left(\frac{2r+2n+3}{2} \right)_{p+r+1} - \left(\frac{2r+1}{2} \right)_{p+r+1} \right].$$

C) Dla $p=s, s+1, s+2, \dots, s+n$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \binom{m+r}{r+s} \binom{r+s}{s} &= \binom{m+r}{r} \binom{m}{s} \\ \binom{m+r}{r+s+1} \binom{r+s+1}{s+1} &= \binom{m+r}{r} \binom{m}{s+1} \\ \binom{m+r}{r+s+2} \binom{r+s+2}{s+2} &= \binom{m+r}{r} \binom{m}{s+2} \\ &\vdots \\ \binom{m+r}{r+s+n} \binom{r+s+n}{s+n} &= \binom{m+r}{r} \binom{m}{s+n} \end{aligned}$$

równania, które na sumę dają wyraz:

$$\binom{m+r}{r+s} \binom{r+s}{s} + \binom{m+r}{r+s+1} \binom{r+s+1}{s+1} + \binom{m+r}{r+s+2} \binom{r+s+2}{s+2} + \dots \\ + \binom{m+r}{r+s+n} \binom{r+s+n}{s+n} = \binom{m+r}{r} \left[\binom{m}{s} + \binom{m}{s+1} + \binom{m}{s+2} + \dots + \binom{m}{s+n} \right]$$

$$141)a \quad \text{czyli: } \sum_{o,n}^v \binom{m+r}{r+s+v} \binom{r+s+v}{s+v} = \binom{m+r}{r} \sum_{o,n}^v \binom{m}{s+v}$$

albo z uwagi na równanie 7):

$$141)b \quad \text{czyli: } \sum_{o,n}^v \binom{m+r}{r+s+v} \binom{r+s+v}{r} = \binom{m+r}{r} \sum_{o,n}^v \binom{m}{s+v}.$$

Równanie to, mocą równania 36) daje szczegółowe:

α) dla $s=0$, zaś $n=m$:

$$\binom{m+r}{r} \binom{r}{0} + \binom{m+r}{r+1} \binom{r+1}{1} + \binom{m+r}{r+2} \binom{r+2}{2} + \dots + \binom{m+r}{r+m} \binom{r+m}{m} = \\ = \binom{m+r}{r} 2^m$$

$$142) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{czyli: } \sum_{o,m}^v \binom{m+r}{r+v} \binom{r+v}{v} = \binom{m+r}{r} 2^m \\ \text{albo: } \sum_{o,m}^v \binom{m+r}{r+v} \binom{r+v}{r} = \binom{m+r}{r} 2^m \end{array} \right.$$

$\beta)$ dla $s=0$, zaś $n=m=r$:

$$\binom{2r}{r} \binom{r}{0} + \binom{2r}{r+1} \binom{r+1}{1} + \binom{2r}{r+2} \binom{r+2}{2} + \dots + \binom{2r}{2r} \binom{2r}{r} = \binom{2r}{r} 2^r$$

czyli: $\sum_{v=0}^r \binom{2r}{r+v} \binom{r+v}{v} = \binom{2r}{r} 2^r$. (143)

Rozwińmy wyobraźniki dwumianowe $\binom{m}{2r}$ i $\left(\frac{m-2r}{2}\right)_{n-r}$ a otrzymamy według Schloemilcha na iloczyn równanie:

$$\binom{m}{2r} \left(\frac{m-2r}{2}\right)_{n-r} = \frac{m(m-1) \dots (m-2r+1) (m-2r)(m-2r-2) \dots (m-2n+2)}{1.2.3.4 \dots (2r) \quad 2.4.6 \dots (2n-2r)}$$

które łatwym sposobem przekształcić się daje. Rozdzielmy bowiem licznik i mianownik otrzymanego iloczynu na części a mianowicie: licznik na dwa czynniki, w których odciągamy same liczby parzyste albo same nieparzyste, mianownik zaś na 3 o samych liczbach parzystych i nieparzystych, to okaże się, że:

$$\binom{m}{2r} \left(\frac{m-2r}{2}\right)_{n-r} = \frac{m(m-2)(m-4) \dots (m-2n+2)}{1.3.5 \dots (2r-1)} \cdot \frac{(m-1)(m-3) \dots (m-2r+1)}{2.4.6 \dots (2r)} \cdot \frac{1}{2.4 \dots (2n-2r)}$$

Pomnóżmy teraz licznik i mianownik iloczynem:

$$(2r+1) (2r+3) \dots (2n-3) (2n-1)$$

a otrzymamy równanie:

$$\binom{m}{2r} \left(\frac{m-2r}{2}\right)_{n-r} = \frac{m(m-2) \dots (m-2n+2)}{1.3.5 \dots (2n-1)} \cdot \frac{(m-1)(m-3) \dots (m-2r+1)}{2.4.6 \dots (2r)} \cdot \frac{(2n-1)(2n-3) \dots (2r+1)}{2.4.6 \dots (2n-2r)}$$

Pierwszy czynnik prawej strony jest od r niezależny, możemy przeto dla skrócenia położyć:

$$\frac{m(m-2)(m-4) \dots (m-2n+2)}{1.3 \dots (2r+1)(2r+3) \dots (2n-1)} = k.$$

Drugi czynnik z uwagi na równanie 18) nie przedstawia nic innego jak $\left(\frac{m-1}{2}\right)_r$. Trzeci czynnik można jeszcze dalej przekształcić pisząc go w formie:

$$\frac{(2n-1) [(2n-1)-2] [(2n-1)-4] \dots [(2n-1) - (2n-2r-2)]}{2.4.6 \dots (2n-2r)}$$

w której łatwo dopatrzeć się współczynnika dwumianowego:

$$\left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-r}.$$

Mamy tedy relacją:

$$\binom{m}{2r} \left(\frac{m-2r}{2}\right)_{n-r} = k \left(\frac{m-1}{2}\right)_r \left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-r}$$

z której dla $r=0, 1, 2, 3 \dots n$ wypływają następujące:

$$\begin{aligned}
\binom{m}{0} \left(\frac{m}{2}\right)_n &= k \left(\frac{m-1}{2}\right)_0 \left(\frac{2n-1}{2}\right)_n \\
\binom{m}{2} \left(\frac{m-2}{2}\right)_{n-1} &= k \left(\frac{m-1}{2}\right)_1 \left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-1} \\
\binom{m}{4} \left(\frac{m-4}{2}\right)_{n-2} &= k \left(\frac{m-1}{2}\right)_2 \left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-2} \\
&\vdots \\
\binom{m}{2n} \left(\frac{m-2n}{2}\right)_0 &= k \left(\frac{m-1}{2}\right)_n \left(\frac{2n-1}{2}\right)_0
\end{aligned}$$

Suma tych relacji daje nam równanie:

$$\sum_{0,n}^v \binom{m}{2v} \left(\frac{m-2v}{2}\right)_{n-v} = k \sum_{0,n}^v \left(\frac{m-1}{2}\right)_v \left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-v}$$

w którym prawa strona według wzoru 72)b zesumowana daje: $\left(\frac{m+2n-2}{2}\right)_n$; mamy przeto:

$$\sum_{0,n}^v \binom{m}{2v} \left(\frac{m-2v}{2}\right)_{n-v} = \frac{m(m-2)(m-4) \dots (m-2n+2)}{1.3.5 \dots (2n-1)} \cdot \left(\frac{m+2n-2}{2}\right)_n$$

Rozwińmy w końcu współczynnik dwumianowy $\left(\frac{m+2n-2}{2}\right)_n$ i połączmy go ze współczynnikiem k w jeden iloczyn a otrzymamy równanie:

$$144) \sum_{0,n}^v \binom{m}{2v} \left(\frac{m-2v}{2}\right)_{n-v} = \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2) \dots [m^2-(2n-2)^2]}{1.2.3 \dots (2n)}$$

czyli:

$$\begin{aligned}
&\binom{m}{0} \left(\frac{m}{2}\right)_n + \binom{m}{2} \left(\frac{m-2}{2}\right)_{n-1} + \binom{m}{4} \left(\frac{m-4}{2}\right)_{n-2} + \dots + \binom{m}{2n} \left(\frac{m-2n}{2}\right)_0 \\
&= \frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2) \dots [m^2-(2n-2)^2]}{1.2.3.4 \dots (2n)}
\end{aligned}$$

W ten sam sposób wyłania się ze współczynników dwumianowych $\binom{m}{2r+1}$ i $\left(\frac{m-2r-1}{2}\right)_{n-r}$ równanie:

$$\begin{aligned}
&\binom{m}{2r+1} \left(\frac{m-2r-1}{2}\right)_{n-r} = \\
&= \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-2r) \cdot (m-2r-1)(m-2r-3) \dots (m-2n+1)}{1.2.3 \dots (2r+1) \cdot 2.4.6 \dots (2n-2r)}
\end{aligned}$$

z którego drogą poprzednio wskazaną dochodzimy do wzoru:

$$\binom{m}{2r+1} \left(\frac{m-2r-1}{2}\right)_{n-r} = k_1 \left(\frac{m-2}{2}\right) \left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-r} \text{ względnie:}$$

$$\sum_{0,n}^v \binom{m}{2v+1} \left(\frac{m-2v-1}{2}\right)_{n-v} = k_1 \sum_{0,n}^v \left(\frac{m-2}{2}\right)_v \left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-v}$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{m(m-1)(m-3) \dots (m-2n+1)}{1.3.5 \dots (2n+1)}$$

A że :

$$\sum_{0,n}^v \left(\frac{m-2}{2}\right)_v \left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-v} = \left(\frac{m+2n-1}{2}\right)_n \\ = \frac{(m+2n-1)(m+2n-3) \dots (m+3)(m+1)}{2.4.6 \dots (2n)}$$

otrzymujemy przeto równanie:

$$\sum_{0,n}^v \binom{m}{2v+1} \left(\frac{m-2v-1}{2}\right)_{n-v} = \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2) \dots [m^2-(2n-1)^2]}{1.2.3.4 \dots (2n+1)} \quad 145)$$

czyli:

$$\binom{m}{1} \left(\frac{m-1}{2}\right)_n + \binom{m}{3} \left(\frac{m-3}{2}\right)_{n-1} + \binom{m}{5} \left(\frac{m-5}{2}\right)_{n-2} + \dots \\ + \binom{m}{2n+1} \left(\frac{m-2n-1}{2}\right)_0 = \frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2) \dots [m^2-(2n-1)^2]}{1.2.3 \dots (2n+1)}$$

Tą samą drogą dochodzimy z relacji:

$$\binom{m}{2r} \left(\frac{m-2r-1}{2}\right)_{n-r} = \frac{(m-1)(m-3) \dots (m-2n+1)}{1.3.5 \dots (2n-1)} \cdot \binom{m}{2}_r \left(\frac{2n-1}{2}\right)_{n-r}$$

i:

$$\binom{m}{2r+1} \left(\frac{m-2r-2}{2}\right)_{n-1} = \frac{m(m-2)(m-4) \dots (m-2n)}{1.3.5 \dots (2n+1)} \cdot \binom{m-1}{2}_r \left(\frac{2n+1}{2}\right)_{n-r}$$

do wzorów:

$$\sum_{0,n}^v \binom{m}{2v} \left(\frac{m-2v-1}{2}\right)_{n-v} = \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2) \dots [m^2-(2n-1)^2]}{1.2.3 \dots (2n)} \quad 146)$$

czyli:

$$\binom{m}{0} \left(\frac{m-1}{2}\right)_n + \binom{m}{2} \left(\frac{m-3}{2}\right)_{n-1} + \binom{m}{4} \left(\frac{m-5}{2}\right)_{n-2} + \dots \\ + \binom{m}{2n} \left(\frac{m-2n-1}{2}\right)_0 = \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2) \dots [m^2-(2n-1)^2]}{1.2.3 \dots (2n)}$$

i:

$$\sum_{0,n}^v \binom{m}{2v+1} \left(\frac{m-2v-2}{2}\right)_{n-v} = \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2) \dots [m^2-(2n)^2]}{1.2.3 \dots (2n+1)} \quad 147)$$

$$\text{czyli: } \binom{m}{1} \left(\frac{m-2}{2}\right)_n + \binom{m}{3} \left(\frac{m-4}{2}\right)_{n-1} + \dots + \binom{m}{2n+1} \left(\frac{m-2n-2}{2}\right)_0 \\ = \frac{m(m^2-2^2)(m^2-4^2) \dots [m^2-(2n)^2]}{1.2.3 \dots (2n+1)}$$

Do tej samej grupy zaliczyć należy równania, które wyprowadza Ettingshausen w dziele: Die combinatorische Analysis str. 245—249.

Weźmy w tym celu równanie:

$$(n-r) \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r}$$

raz niezmienione a drugi raz położmy: $n = w - 1$, $n = \frac{r-f}{2}$, po-

mnóżmy pierwsze równanie przez $(\frac{r-f}{2})_{w-1}$ drugie zaś (wypływające z pierwszego dla powyższych wartości) przez $(\frac{n}{r})$, to otrzymamy na sumę iloczynów wyraz:

$$\left[n - (2w + f - 2) \right] \binom{n}{r} \left(\frac{r-f}{2} \right)_{w-1} = n \binom{n-1}{r} \left(\frac{r-f}{2} \right)_{w-1} + 2w \binom{n}{r} \left(\frac{r-f}{2} \right)_w$$

z którego dla $r=0, 1, 2, 3, \dots, n$ otrzymujemy relacją:

$$\left[n - (2w + f - 2) \right] \sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v-f}{2} \right)_{w-1} = n \sum_{0,n} \binom{n-1}{v} \left(\frac{v-f}{2} \right)_{w-1} + 2w \sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v-f}{2} \right)_w$$

$$\text{czyli: } \sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v-f}{2} \right)_w = \frac{n - (2w + f - 2)}{2w} \sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v-f}{2} \right)_{w-1} - \frac{n}{2w} \sum_{0,n} \binom{n-1}{v} \left(\frac{v-f}{2} \right)_{w-1}$$

Szczegółowe wartości tej relacji są:

$\alpha)$ dla $f=0$ zaś $w=1, 2, 3, \dots, m$:

$$\sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v}{2} \right)_1 = \frac{n}{2} \cdot 2^n - \frac{n}{2} \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-2} = \frac{n}{n-1} \binom{n-1}{1} \cdot 2^{n-2};$$

$$\sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v}{2} \right)_2 = \frac{n-2}{4} \cdot \sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v}{2} \right)_1 - \frac{n}{4} \sum_{0,n} \binom{n-1}{v} \left(\frac{v}{2} \right)_1$$

$$= \frac{n-2}{4} \cdot n \cdot 2^{n-2} - \frac{n}{4} \cdot (n-1) \cdot 2^{n-3} = \frac{n}{2} (n-3) \cdot 2^{n-4}$$

$$= \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{n-3}{1} \cdot 2^{n-4} = \frac{n}{n-2} \binom{n-2}{2} 2^{n-4};$$

$$\sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v}{2} \right)_3 = \frac{n-4}{6} \cdot \sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v}{2} \right)_2 - \frac{n}{6} \cdot \sum_{0,n} \binom{n-1}{v} \left(\frac{v}{2} \right)_2$$

$$= \frac{n-4}{6} \cdot \frac{n}{2} (n-3) 2^{n-4} - \frac{n}{6} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot (n-4) 2^{n-5}$$

$$= \frac{n}{2} \cdot (n-4) 2^{n-5} \left(\frac{2n-6}{6} - \frac{n-1}{6} \right) = \frac{n}{6} \cdot (n-4) (n-5) 2^{n-6}$$

$$= \frac{n}{n-3} \binom{n-3}{3} 2^{n-6};$$

etc.

z czego okazuje się, że:

$$148) \quad \sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v}{2} \right)_m = \frac{n}{n-m} \binom{n-m}{m} 2^{n-2m}$$

$\beta)$ dla $f=1$ i tych samych wartości dla w :

$$\sum_{0,n} \binom{n}{v} \left(\frac{v-1}{2} \right)_1 = \frac{n-1}{2} \cdot 2^n - \frac{n}{2} \cdot 2^{n-1} = (n-2) \cdot 2^{n-2} = \binom{n-2}{1} 2^{n-2};$$

$$\sum_{0,n}^v \binom{n}{v} \left(\frac{v-1}{2}\right)_2 = \frac{n-3}{4} (n-2) 2^{n-2} - \frac{n}{4} (n-3) 2^{n-3} \\ = \frac{(n-3)(n-4)}{2} \cdot 2^{n-4} = \binom{n-3}{2} 2^{n-4};$$

$$\sum_{0,n}^v \binom{n}{v} \left(\frac{v-1}{2}\right)_3 = \frac{n-5}{6} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2} \cdot 2^{n-4} - \frac{n}{6} \cdot \frac{(n-4)(n-5)}{2} \cdot 2^{n-5} \\ = \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{6} \cdot 2^{n-6} = \binom{n-4}{3} 2^{n-6}$$

etc.

$$\text{t. j.: } \sum_{0,n}^v \binom{n}{v} \left(\frac{v-1}{2}\right)_m = \binom{n-m-1}{m} 2^{n-2m} \quad (149)$$

Przedstawimy równanie D) w formie:

$$\left[n - (2r+1) \right] \binom{n}{2r+1} = n \binom{n-1}{2r+1} \text{ i} \\ (r-v+1) \binom{r}{r-v+1} = v \binom{r}{r-v},$$

pomnożmy pierwszą przez $\binom{r}{r-v+1}$, drugą zaś przez $2 \binom{n}{2r+1}$, to otrzymamy po dodaniu relację:

$$(n-2v+1) \binom{n}{2r+1} \binom{r}{r-v+1} = n \binom{n-1}{2r+1} \binom{r}{r-v+1} + 2v \binom{n}{2r+1} \binom{r}{r-v}$$

z której sposobem poprzednio wskazanym dochodzimy do wzoru:

$$\sum_{0,n}^r \binom{n}{2r+1} \binom{r}{r-v} = \binom{n-v-1}{v} 2^{n-2v-1} \quad (150)$$

Tak samo otrzymamy z równania:

$$(n-2r) \binom{n}{2r} = n \binom{n-1}{2r} \text{ i} \\ (r-v+1) \binom{r}{r-v+1} = v \binom{r}{r-v}$$

relacją:

$$(n-2v+2) \binom{n}{2r} \binom{r}{r-v+1} = n \binom{n-1}{2r} \binom{r}{r-v+1} + 2v \binom{n}{2r} \binom{r}{r-v}$$

z której wypływa równanie:

$$\sum_{0,n}^r \binom{n}{2r} \binom{r}{r-v} = \binom{n-v}{v} 2^{n-2v-1} \quad (151)$$

Niektóre jeszcze własności współczynników dwumianowych jakoteż ich zastosowanie okażą się później.

W Drohobyczu 15. kwietnia 1888.

Bazyli Świąt.



Wiadomości szkolne.

A. Skład grona nauczycieli

przy końcu roku szkolnego 1888.

1. *Wojciech Biesiadzki*, dyrektor gimnazjum, zastępca przewodniczącego Rady szkolnej okręgowej, uczył języka greckiego w kl. VI. — 5 godzin tygodniowo.
2. *Ks. Aleksy Toroński*, (w VIII. randze) profesor religii dla uczniów obrz. grec. kat., exhortator, kanonik tyt., radca konsystoryalny, członek rady miejskiej i powiatowej, zastępca przewodniczącego Rady szkolnej miejscowej, uczył religii we wszystkich ośmiu klasach i jęz. rusk. w kl. V., razem 18 godz. tyg.
3. *Ks. Andrzej Drązek*, (w VIII. randze) profesor religii dla uczniów obrz. rzym kat. i exhortator, kanonik tyt., uczył religii we wszystkich ośmiu klasach, — razem 16 godzin tyg.
4. *Tomasz Gawenda*, profesor, doktor filozofii, członek rady miejskiej, uczył geografii i historii w kl. III. i IV.; jęz. niemieckiego w kl. IV. i VII. propedeutyki filozoficznej w kl. VII. i VIII.; razem 19 godzin tygodniowo; także historii krajowej jako przedmiotu nadobowiązkowego w kl. III. i IV., przez 2 godz. tygodniowo.
5. *Antoni Pazdrowski*, profesor, zawiadowca gabinetu fizykalnego, uczył matematyki w kl. IV., V. i VII.; fizyki w kl. IV. i VII., razem 19 godz. tygod.
6. *Ignacy Hoszowski*, profesor, członek Rady powiatowej, uczył języka łacińskiego w kl. V. i VI., greckiego w kl. V. — razem 17 godz. tyg.
7. *Sebastyan Polak*, profesor, zawiadowca czytelnicy polskiej i ruskiej dla młodzieży, uczył języka greckiego w kl. IV., polskiego w kl. IV., VI., VII. i VIII. — razem 16 godzin tyg.
8. *Włodzimierz Paślawski*, profesor, uczył języka łacińskiego i polsk. w kl. III., ruskiego w kl. IV., VI., VII. i VIII. — razem 17 godzin tygodniowo.
9. *Zygmunt Kunstmann*, profesor, zawiadowca niemieckiej czytelnicy dla młodzieży, uczył jęz. niemieckiego w kl. Ia., III., VI. i VIII. — razem 18 godzin tygod.
10. *Antoni Stefanowicz*, profesor, uczył rysunków wolnорęcznych w kl. Ia., Ib., II., III. i IV. — razem 20 godzin tygod., oprócz tego rysunków geometrycznych jako przedmiotu nadobowiązkowego przez 3 godziny tygod.

11. *Ludomir Sykutowski*, nauczyciel, zawiadowca gabinetu przyrodniczego, uczył historii naturalnej w kl. Ia., Ib., II., III., V. i VI., matematyki w kl. Ib. i II. — razem 18 godz. tyg.
12. *Karol Kobierski*, nauczyciel, uczył jęz. łacińskiego w kl. VIII, greckiego w kl. VII. i VIII., polskiego w kl. V. — razem 17 godzin tygod.
13. *Antoni Pado*, nauczyciel, uczył jęz. łacińskiego w kl. Ib. i VII., polskiego w Ib. — razem 16 godzin tygodniowo.
14. *Kasper Algierski*, egzam. zastępca nauczyciela, uczył geografii w kl. Ia. i Ib.; geogr. i historii w V.—VIII. — razem 19 godzin tygodniowo; prócz tego historii krajowej jako przedmiotu nadobowiązkowego w kl. VI. i VII., przez 2 godziny tygodniowo.
15. *Bazyli Sanat*, egzam. zastępca nauczyciela, uczył matematyki w kl. Ia., III. i VIII., fizyki w kl. VIII., jęz. rusk. w kl. I., II. i III. — razem 17 godzin tygodniowo.
16. *Kazimierz Grünberg*, zastępca nauczyciela, uczył języka niemieckiego w kl. Ib., II. V.; historii i geografii w kl. II. — razem 19 godzin tygod.
17. *Antoni Olberek*, zastępca nauczyciela, uczył języka łacińskiego i polskiego w klasie Ia., greckiego w kl. III. — razem 16 godzin tygodniowo.
18. *Piotr Rzepnijski*, zastępca nauczyciela, uczył języka łac. w kl. II. i IV., polskiego w kl., II. — razem 17 godz. tyg.
19. *Joachim Blumenblatt*, poboczny nauczyciel religii mojżeszowej, udzielał tego przedmiotu w 8 oddziałach przez 8 godz. tyg.
20. *Maurycy Klugmann*, poboczny nauczyciel jęz. francuskiego udzielał tego przedmiotu w 3 oddziałach przez 6 godz. tyg.
21. *Bazyli Stojatowski*, nauczyciel szkoły ludowej, uczył gimnastyki w 6 oddziałach przez 6 godzin tyg.

B. Rozkład nauk.

I. Klasa.

Gospodarze: w Ia. *Antoni Olberek*, w Ib. *Antoni Pado*.

Religia 2 godziny tygodniowo. Katechizm katolicki.

Język łaciński 8 godzin tyg. — Nauka o prawidłowych formach, ważniejsze prepozycje i konjunktę, najpotrzebniejsze prawidła ze składni, ćwiczenia w tłumaczeniu z jęz. łacińskiego na polski i odwrotnie. Od listopada począwszy co tydzień kompozycya przez $\frac{1}{2}$ godz., a 1 lub 2 krótkie ćwiczenia domowe.

Język polski 3 godz. tyg. — Nauka o formach imion i o zdaniu pojedynczóm w połączeniu z interpunkcją; najważniejsze zasady z głosowni przy odmianie imion: czytanie z Wypisów i opowiadanie, uczenie się na pamięć cenniejszych ustępów. Co 14 dni wypracowanie domowe lub szkolne; prócz tego 2 dyktaty co miesiąc w I. półr.

- Język ruski 2 godz. tyg. — Materiał naukowy taki sam jak w jęz. polskim.
- Język niemiecki 6 godz. tyg. — Odmiana imion i słów w połączeniu z najpotrzebniejszymi prawidłami składni, szyku i rzędu; czytanie i tłómaczenie z języka niemieckiego na polski i odwrotnie. Co miesiąc 3 zadania szkolne i 1 dyktat, co 6 tygodni domowe; w wrześniu i październiku po 2 dyktaty i po 2 zadania szkolne; w 2 półr. nie ma dyktatów.
- Geografia 3 godz. tyg. — Pojęcia wstępne z geografii fizycznój i matematycznój, oro- hydro- i topografia: główne pojęcia z geografii politycznój. Rysowanie map na tablicy i papierze.
- Matematyka 3 godzin tygod. — Naprzemian arytm. i geom. Z arytmetyki: cztery działania liczbami całkowitymi i dziesiętnymi, mianowanymi i niemianowanymi, sposoby skracañ rachunkowych, podzielność liczb i działania ułamkami zwyczajnymi i dziesiętnymi. Z geometryi: nauka o liniach, kątach, trójkątach aż do przystawiania. Co miesiąc zadanie szkolne, na każdą lekcją zadanie domowe.
- Historja naturalna 2 godzin tyg. W I. półr. Ssawce i mięczaki; w II. półr. zwierzęta bezkręgowce.
- Rysunki wolnорęczne 4 godzin tyg. — Rysowanie prostokreslnych utworów geometrycznych z wolnój ręki, mianowicie: linii prostych, kątów, trójkątów, czworokątów i wielokątów na podstawie rysunku nauczyciela na tablicy. Prócz tego teoretyczne objaśnianie kształtów i bryłowości ciał przy pomocy okazów i modelów. Początki ornamentu płaskiego. Ćwiczenia uczniów z pamięci.

II. Klasa.

Gospodarz: *Piotr Rzepnijski.*

- Religia 2 godzin tyg. — Historia biblijna starego zakonu.
- Język łaciński 8 godz. tyg. — Powtórzenie odmian prawidłowych, nauka o formach nieprawidłowych; główne prawidła ze składni, accus. cum inf., abl. abs., tłómaczenie zdań łacińskich na język polski i odwrotnie. Co miesiąc 3 kompozycye przez $\frac{1}{2}$ godz. i 1 wyprac. domowe.
- Język polski 3 godz. — Powtórzenie i dokończenie nauki o imieniu, nauka o słowie z uwzględnieniem głosowni; nauka o zdaniu złożoném w głównych zarysach w połączeniu z interpunkcją. Czytanie ustępów z Wypisów, opowiadanie, uczenie się na pamięć. Zadania piśmienne co 2 tyg.
- Język ruski 2 godz. tyg. — Materiał naukowy taki sam jak w języku polskim.
- Język niemiecki 5 godz. tyg. — Powtórzenie czasowników, przyimek, przysłówek, spójnik, wykrzyknik, o szyku w zdaniu główném i w zdaniu poboczném; tłómaczenie ustępów niemieckich i polskich, konwersacya w krótkich zdaniach; wy-

głaszanie ustępów memorowanych. Zadania piśmienne 4 miesięcznie, t. j. 3 szkolne i 1 domowe.

Geografia i historia 4 godziny tyg. — Geografia fizyczna i polityczna Azji i Afryki; pionowy i poziomy układ i hydrografia Europy; szczegółowa geografia południowych i zachodnich państw Europy. Historia starożytna przez 2 godz. tyg.

Matematyka 3 godz. tyg. — Z arytmetyki; skrócone mnożenie i dzielenie, stosunki, proporcje, reguła trzech pojedyncza, nauka o miarach, wagach i monetach, rachunek procentowy. Z geometrii, przystawianie trójkątów, koło, czworobok, wielobok. Zadania piśmienne jak w kl. I.

Historia naturalna 2 godz. tyg. — W I. półroczu ptaki, gady, płazy, ryby; w II. półr. botanika.

Rysunki wolnорęczne 4 godz. tyg. — Ornament geometryczny; zasady perspektywy i rysowanie przestrzennych geometrycznych utworów z wolnej ręki według prawideł perspektywy z modeli druczanych i drewnianych.

III. Klasa.

Gospodarz: *Włodzimierz Pastawski.*

Religia 2 godz. tyg. — Historia biblijna nowego zakonu.

Język łaciński 6 godz. tyg. — Z gramatyki: składnia zgody i rzędu, nauka o prepozycjach, czasach i trybach aż do coniunct. w zdaniach pobocznych; tłómaczenie ustępów polskich na język łaciński. — Z Corneliusa Neposa czytano żywoty: Milcyadesa, Temistoklesa, Pelopidasa, Cymona, Arystydesa, Lysandra i Hannibala. Miesięcznie 2 kompozycje, a co 3 tygodnie 1 wypracowanie domowe.

Język grecki 5 godz. tyg. — Odmiana imion i czasowników aż do źródłosłowu perfecti; ćwiczenia z języka greckiego na polski i odwrotnie. W II. półroczu co miesiąc 1 zadanie domowe i 1 szkolne.

Język polski 3 godz. tyg. — Z gramatyki: nieodmienne części mowy, nauka o zdaniu pojedynczym, składnia zgody i rzędu, pisownia. Czytanie Wypisów, opowiadanie, uczenie się na pamięć, deklamacya. Co 14 dni zadanie domowe lub szkolne.

Język ruski 2 godz. tyg. — Materiał naukowy taki sam, jak w języku polskim.

Język niemiecki 4 godz. tyg. — Z gramatyki: składnia zgody i rzędu, powtarzanie partyj przerobionych w kl. I. i II. Czytanie, tłómaczenie, uczenie się na pamięć, konwersacya. Zadania piśmienne trzy miesięcznie, naprzemiennie domowe lub szkolne.

Historia 1 godz. tyg. Dzieje średniowieczne. — **Geografia** 2 godz. tyg. — Szczegółowa geografia Europy środkowej, wschodniej i północnej z wykluczeniem monarchii austriacko-węgierskiej; geografia Ameryki i Australii.

Matematyka 3 godz. tyg. — Z arytmetyki: skrócone działania na ułamkach dziesiętnych przybliżonych; cztery działania na liczbach całych i ułamkach algebraicznych. Wynoszenie do 2. i 3. pierwiastka. Zastosowanie skróconego dzielenia przy wyznaczeniu pierwiastka. Kombinacje. — Z geometryi: Wymiar długości i powierzchni, ważniejsze przemiany i podział figur. Twierdzenie Pitagorasa i jego liczne zastosowania. Najważniejsze wypadki podobieństwa figur geometrycznych. Konstrukcja i opisanie elipsy, paraboli i hiperboli. — Wypracowania jak w kl. I.

Przyrodnicze nauki 2 godz. tyg. — W I. półr. mineralogia, w II. półr. fizyka; nauka o własnościach ciał i o cieple, chemia nieorganiczna i organiczna szczegółowo.

Rysunki wolnорęczne 4 godz. tyg. — Ćwiczenia w rysowaniu ornamentów płaskich według rysunku nauczyciela na tablicy i wzorów kolorowych z szczególnem uwzględnieniem wzorów greckich i rzymskich; nauka o stylu ornamentów i dalsze ćwiczenia w perspektywie.

IV. Klasa.

Gospodarz: *Sebastyan Polak.*

Religia 2 godzin tyg. — Nauka liturgii.

Język łaciński 6 godz. tyg. — Z gramatyki: powtórzenie nauki o czasach i trybach i dalszy ciąg i o imionach czasownikowych. Prozodya, o hexametrze i distychu. Ćwiczenia w tłumaczeniu z języka polskiego na łaciński. Czytano z *Comment. Caesaris de bello Gall. lib. I., II., Ovidius: Metamph. Quattuor aetates describuntur i Deucalion et Pyrrha.* Zadania piśmienne miesięcznie 2 kompozycje, a 1 domowe zadanie co 3 tyg.

Język grecki 4 godz. tyg. — Źródłosłów perfecti i aor. pass. czasowników na *ω*, verba na *υ*, i formy nieprawidłowe. Tłumaczenie z języka greckiego na polski i odwrotnie. Zadania piśmienne jak w kl. III.

Język polski 3 godz. tyg. — Z gramatyki: O czasach, trybach, bezokoliczniku; dokładna nauka o zdaniu złożonem, o szyku, pisownia i interpunkcja szczegółowo, o wierszowaniu; praktycznie ważniejsze zasady stylistyki, główne rodzaje stylu. Czytanie ustępów z Wypisów, opowiadanie, uczenie się na pamięć, deklamacja. Zadania piśmienne jak w kl. III.

Język ruski 2 godz. tyg. — Materiał naukowy taki, jak w języku polskim.

Język niemiecki 4 godz. tyg. — Z gramatyki: powtórzenie i uzupełnienie składni, słoworód. Czytanie, tłumaczenie, konwersacja i wygłaszanie memorowanych z Wypisów ustępów. Zadania piśmienne dwa miesięcznie.

Historia i geografia 4 godz. tyg. — W I. półr. historia nowożytna z szczególnem uwzględnieniem monarchii Austr.

Węg.; w II. półroczu szczegółowa geografia monarchii Austro-węgierskiej.

Matematyka 3 godz. tyg. — Z arytmetyki: Reguła trzech złożona, rachunek składanego procentu, rachunek spółki, łańcuchowy i mieszanin, zrównania 1 stopnia o jednej i o kilku niewiadomych. Z geometryi: stereometrya. Zadania piśmienne jak w kl. III.

Fizyka 3 godz. tyg. — Mechanika, Magnetyzm. Elektryczność, Akustyka, Optyka i ciepło promieniste.

Rysunki wolnoręczne 4 godz. tyg. — Rysowanie ornamentów plastycznych i trudniejszych wzorów ornamentalnych, rysowanie członków architektonicznych z modeli, ćwiczenia w rysowaniu z pamięci i dalszy ciąg perspektywy.

V. Klasa.

Gospodarz: *Ignacy Hoszowski.*

Religia 2 godz. tyg. — Dogmatyka ogólna.

Język łaciński 6 godz. tyg. — Z gramatyki: powtórzenie i uzupełnienie składni zgody i rzędu, o czasach i trybach do §. 237, tłumaczenie ustępów polskich na język łaciński. Czytano Liwiusza ks. I. 1—40 i XXII. Owid. *Metamorph.* X. 1—77; VIII. 611—724; III. 511—733; V. 294—437; *Fasti*: II. 195—242, II. 475—532, *Trist.* I. 3. IV. 10. Miesięcznie wypracowanie domowe i szkolne.

Język grecki 5 godz. tyg. — Z gramatyki: składnia aż do zaimka; tłumaczenie odpowiednich ustępów z jęz. polskiego na język grecki. Z *Chrestomatyi* Xenofonta czytano: z *Cyropedyi* I., *Anab.* I., III., V. Homera *Iliady* ks. I. i V. 1—200. Co miesiąc jedno zadanie.

Język polski 3 godz. tyg. Etymologia, czytanie celniejszych ustępów z staropolskich pomników w połączeniu z uwagami gramatycznymi; a z literatury XVI. wieku do Kromera. Lektura: Wiesław, Brodzińskiego i Stare wrota, Syrokomli. Co miesiąc jedno zadanie.

Język ruski 2 godz. tyg. — Czytano i objaśniano pomniki cerkiewno-słowiańskie X., XI. i XII. w., z *Chrestomatyi* Ogonskiego a mianowicie: *Договоры съ Греками*, *Проповиди митрополита Иларіона*, *Правда руска*; ustępy z kroniki Nestora *Летопись Кіевска: Мономаха* *Начение дѣтѣмъ*. Obok lektury uczono form starosłowiańskich i składni tego języka. Co miesiąc jedno zadanie.

Język niemiecki 4 godz. tyg. — Czytanie ustępów z Wypisów niemieckich z stosowném objaśnieniem gramatyczném, stylistyczném i estetycznym; opowiadanie; wygłaszanie celniejszych ustępów memorowanych. Co 2 tyg. zadanie domowe lub szkolne.

Historia i geografia 3 godz. tyg. — Dzieje starożytne aż do zdobycia Italii przez Rzymian, z poglądem na religią, sztukę i literaturę; odpowiednie działy z geografii.

- Matematyka** 4 godz. tyg. — Z algebry: cztery działania liczbami algebraicznymi, system liczbowy, podzielność liczb, ułamki proste i dziesiętne, liczby ujemne, proporcye. Zrównania 1. stopnia z jedną i z kilku niewiadomymi. Z geometryi: planimetrya. Co miesiąc zadanie szkolne, liczne ćwiczenia domowe.
- Historia naturalna** 2 godz. tyg. — W I. półr. mineralogia w połączeniu z geognozyą; w II. półroczu botanika systematyczna w połączeniu z paleontologią i geografią roślin

VI. Klasa.

Gospodarz: *Zygmunt Kunstmann.*

- Religia** 2 godz. tyg. — Dogmatyka szczegółowa.
- Język łaciński** 6 godz. tyg. — Z gramatyki: dalszy ciąg składni aż do supinum; tłumaczenie ustępów polskich na język łaciński. Czytano Sallustii Jugurtha; Vergilii *Aeneid*, lib. I., II. Ecl. I. Georg. II. 136—176. II. 458—540; wygłaszanie na pamięć celniejszych ustępów czytanych; Cicer. oratio I. in Catilinam. Zadania piśmienne jak w kl. V.
- Język grecki** 5 godz. tyg. — Z gramatyki: nauka składni aż do infinitywu; tłumaczenie ustępów polskich na język grecki. Czytano Xenoph. Memor. III. 5, 1—28 i Herkules na rozstajnej drodze, z Homera Iliady ks. III., VI., XVII., XVIII. 1—457, Herodot. lib. VIII., XIX. Wypracowania piśmienne jak w kl. V.
- Język polski** 3 godz. tyg. — Czytanie celniejszych ustępów z autorów złotego wieku literatury polskiej i okresu panegiryczno-makaronicznego z uwzględnieniem biografii autorów. Lekt. pryw. Kazania sejmowe P. Skargi. Zadania piśmienne jak w kl. V.
- Język ruski** 2. godz. tyg. — Czytano i objaśniano podług czyt. Ogonowskiego pamiętniki XIII., XIV., XV., XVI., XVII., XVIII. w. Слово о полку Игоревѣ. Pieśni ludowe podług czyt. Barwińskiego cz. I. — Zadania jak w kl. V.
- Język niemiecki** 5 godz. tyg. — Czytanie, objaśnianie i wygłaszanie ustępów w Wypisów Jandaurka t. II. opowiadanie, konwersacya. Zadanie piśmienne jak w kl. V.
- Historia i geografia** 3 godz. tyg. — Dzieje Rzymian od zdobycia Italii i dzieje średniowieczne z ustawicznem uwzględnieniem geografii odnośnych krajów.
- Matematyka** 3 godz. tyg. — Z algebry: o potęgach, pierwiastkach i logarytmach. Zrównania 2. stopnia o jednej niewiadomej i ich zastosowanie do geometryi: stereometrya i trygonometrya prostokreślna. Zadania piśmienne jak w kl. V.
- Historia naturalna** 2 godz. tyg. — Zoologia systematyczna w połączeniu z paleontologią i geograf. rozszerzenie zwierząt.



VII. Klasa.

Gospodarz: *dr. Tomasz Gawenda.*

Religia 2 godz. tyg. — Etyka katolicka.

Język łaciński 5 godz. tyg. — Z gramatyki: Właściwości języka łacińskiego w połączeniu z ćwiczeniami gramatyczno-stylistycznymi. Lektura: Vergilius Aeneid. ks. VI., VIII.; Ciceronis oratio. De imp. Cu. Pompei; oratio pro Milone; De officiis; Wypracowanie piśmienne jak w kl. V.

Język grecki 4 godz. tyg. — Z gramatyki: infinitivus, participium, atrakeya, przeczenia, zdania pytajne; tłumaczenie odpowiednich ustępów z języka polskiego na język grecki. Lektura: Demostenesa mowy przeciw Filipowi. Filip. I., II. i III. Homeri Odys. V., VI., IX., XI. Zadania piśmienne jak w kl. V.

Język polski 3 godz. tyg. — Czytanie cenniejszych ustępów z autorów XVIII. i XIX. wieku w połączeniu z historyczno-literackimi i estetycznymi uwagami. Rozpoczęto okres romantyczny. Czytano i objaśniano. Lektura pryw.: Barbara Radziwiłłówna, A. Felińskiego. Zadania piśmienne jak w kl. V.

Język ruski 2 godz. tyg. — Czytano i objaśniano ustępy z autorów; Kotlarewskiego, Kwitki, Artymowskiego, Szaszkiewicza, Wagilewicza, Kostomarowa. Metlińskiego, Mogilnickiego, Ustyjanowicza, Szewczenka i Guszalewicza, podług Czytanki Barwińskiego t. II. Zadania jak w kl. V.

Język niemiecki 4 godz. tyg. — Czytanie i objaśnianie cenniejszych ustępów z Wypisów Harwota t. I. Prócz tego czytano i rozbierano: Schillera Jungfrau von Orleans, Lessinga Minna von Barnhelm. Emilie Galotti. Zadania piśmienne co 3. tyg.

Historia i geografia 3 godz. tyg. — Historia nowożytna z uwzględnieniem geografii Ameryki.

Matematyka 3 godz. tyg. — Z arytmetyki: zrównania kwadratowe o dwóch niewiadomych i zrównania wyższych stopni, które się dadzą sprowadzić do kwadratowych. O szeregach; rachunek procentu składanego i rent; ułamki ciągłe; zrównania diofantyczne 1. stopnia, nauka o kombinacyach z zastosowaniem; wzór Newtona.

Geometria: Ćwiczenia w rozwiązywaniu trygonometrycznych zadań i geometria analityczna w płaszczyźnie. Wypracowania jak w kl. I.

Fizyka 3 godz. tyg. — Mechanika, nauka o cieple, chemia.

Logika 2 godz. tyg. — Logika formalna.

VIII. Klasa.

Gospodarz: *Karol Kobierski.*

Religia 2 godz. tyg. — Historia kościelna.

Język łaciński 5 godz. tyg. — Ćwiczenia gramatyczno-stylistyczne. Czytano z Horacego Carmin I. 1, 3, 4, 7, 11, 31.

24, 28; II. 2, 6, 13, 14, 17, 16, 20; III. 8, 24, 13, 29, 30; IV. 2, 3, 8, 7, 9, 12. Epod. 1, 2, 13, 16; Sat. I. 1, 6, 9; II. 6. Tacit. Germania 1—27; Tacit. Histor. I. Zadania piśmienne jak w klasie V.

Język grecki 5 godz. tyg. — Z gramatyki: Partykuły. Czytano Sofoklesa tragedya: Aias, Platona: Apologia i Eutyphron. Wypracowania piśmienne jak w kl. V.

Język polski 3 godz. tyg. — Czytanie celniejszych ustępów z autorów XIX. wieku w połączeniu z estetycznymi i historyczno-literackimi uwagami. W całości zaś Mickiewicza: Sonety krymskie, Pan Tadeusz, Konrad Wallenrod, Grażyna. Lektura pryw., Śluby panieńskie, A. Fredry, Maleczewskiego, Marya. Zadania piśmienne jak w kl. V.

Język rurski 3 godz. tyg. — Czytano i objaśniano ustępy z autorów: Hlibowa, Storożenki Didyckiego, M. Wowczka. Konińskiego i Kulisza poezje i rozprawy, Naumowicza, Ilnickiego, Szaraniewicza, Ogorowskiego, Zharskiego, Fedkowicza i Worobkiewicza podług czyt. Barwińskiego cz. III. Zadania piśmienne jak w kl. V.

Język niemiecki 4 godz. tyg. — Czytano i objaśniano estetycznie według tomu 2. wypisów Harwota: Göthego Hermann und Dorothea i ustępy z jego autobiografii: z Schillera trilogia Wallenstein i Wilhelm Tell; dalej; Rücker, Uhland, Platen i Julius Caesar Shakespeare'a. Prócz tego przeprowadzono analityczno-estetyczny rozbiór wszelkich rodzajów poezyi tak lirycznej, jakoteż opisowej i dramatycznej. Wypracowania piśmienne jak w kl. V.

Historya i geografia 3 godz. tyg. — Historya i statystyka monarchii Austriacko-Węgierskiej; powtórzenie główniejszych partyj z hist. grec. i rzym.

Matematyka 2 godz. tyg. — Powtórzenie, uporządkowanie i zastosowanie na przykładach całego materiału naukowego. Co miesiąc zadanie szkolne.

Fizyka 3 godz. tyg. — Elektryczność, magnetyzm, falowanie, akustyka i optyka do interferencyi; główne zasady astronomii.

Psychologia 2 godz. tyg. — Psychologia empiryczna.

C. Przedmioty nauki nadobowiązkowej przy końcu

2. półroczu r. s. 1888.

Język francuski w 3 oddziałach po 2 godziny tyg. W I. oddziale uczono wymawiania wyrazów, dalej form prawidłowych, imion i czasowników. Na każdą lekcję zadania domowe, co miesiąc dwa extemporalia. Na naukę uczęszczało przy końcu 1. półroczu 24 uczniów. — W II. oddziale uczono nieforemności wszystkich części mowy, znaczenia i używania czasów

i trybu łączącego, jakoteż galicyzmów. Zadania jak w I. oddziale. Na naukę uczęszczało 9 uczniów. W III. oddziale uczono składni rządu, użycia trybu bezokolicznego i imiesłowów; prowadzono konwersacyą na podstawie lektury: Charles XII. Zadania jak w I. oddziale. Na naukę uczęszczało 4 uczniów — razem we wszystkich trzech oddziałach 37 uczniów. Używano gramatyki i wypisów Świtkowskiego. — Remuneracya nauczyciela wynosiła 220 złr. rocznie.

Historya krajowa w 4 oddziałach dla uczniów III., IV., VI., VII. kl. po jednej godzinie tygodniowo. Mianowicie uczono w III. kl. sposobem biograficznym od najdawniejszych zabytków historycznych aż do r. 1492, na naukę uczęszczało 34 uczniów. W IV. klasie tak samo od r. 1495 do r. 1815; na naukę uczęszczało 26 uczniów. W VI. kl. uczono na podstawie chronologii systematycznego rozwoju dziejów krajowych od początków historycznych do r. 1492 z uwzględnieniem równoczesnych stosunków państw sąsiednich; na naukę uczęszczało 25 ucz. W VII. kl. tak samo od r. 1492 do 1815 na naukę uczęszczało 14 uczniów — razem we wszystkich oddziałach 108 uczniów. Remuneracya nauczycieli wynosiła 180 złr. rocznie.

Rysunki geometryczne przez 3 godz. tyg. w 2 oddziałach. Uczniowie II. klasy należeli do oddziału I. i przerabiali zadania wykreślne, polegające na nauce o przemianie i dzieleniu figur prostokreślnych, o kole, sieciach bryłowych i liniach ślimakowych. — Uczniowie klasy III., IV., V. i VI., należeli do oddziału II. i rysowali łuki architektoniczne, profile gzymsów greckich i gotyckich, konstrukcyje okien gotyckich, trudniejsze ornamenta geometryczne nawodzone kolorami. Zdolniejsi wykonywali cieniowane rysunki rzutowe już to z modeli drewnianych i gipsowych, już to z dobranych stósownie wzorów. — Na naukę uczęszczało 54 uczniów. — Remuneracya nauczyciela wynosiła rocznie 120 złr. w. a.

Kaligrafia w 2 oddziałach przez 2 godz. tyg. — Na naukę uczęszczało 74 uczniów. — Remuneracya roczna nauczyciela wynosiła 84 złr. w. a.

Gimnastyka w 6 oddziałach przez 6 godz. tyg. — Na naukę uczęszczało 140 uczniów. — Remuneracya roczna nauczyciela wynosiła 200 złr. w. a.

Spiewu nie uczono dla braku kwalifikowanego nauczyciela.

D. Wykaz książek

w tutejszém gimnazyum w roku szkolnym 1888 używanych.

Religia. W I. klasie Katechizm Schustera tłómaczony dla uczniów obrz. łac. przez ks. Zielińskiego; dla uczniów obrz. gr. kat. Chrystyjańsko-katolickij

katechizm przez ks. Torońskiego. W II. klasie: Dzieje starego zakonu ks. Dąbrowskiego, i Исторія біблі ст. зав. ks. Torońskiego ч. I. W III. klasie: Dzieje nowego zakonu ks. Dąbrowskiego i Исторія біблійна нов. зав. написавъ Б. И. ч. II W IV. klasie: Liturgika ks. Władysława Jachimowskiego i Литургиа ks. Torońskiego. W V. klasie: Introdukcya do pisma św. ks. Władysława Jachimowskiego i Учебникъ каг. религіи після А. Ваплера написавъ Целешъ. W VI. klasie: Nauka wiary w szczególności, ks. Władysława Jachimowskiego i Вѣроученіе частное Пелеша. W VII. klasie: Etyka katolicka ks. Soleckiego i Учебникъ христ. катол. етики — після Др. Ваплера передоливъ В. Шюрко. W VIII. klasie: Historia kościelna ks. Władysława Jachimowskiego i Исторія церковная Ваплера w opracowaniu ruskiem przez Stefanowicza.

Język łaciński. A) Gramatyka w I. — VIII. kl. dr. Z. Samolewicza, B) Ćwiczenia: w I. i II. kl. dr. Z. Samolewicza, w III. kl. Jerzykowskiego, część I. wyd. 2. w IV. kl. Jerzykowskiego część II. wyd. 2. w V. i VI. Trzaskowskiego część I. wyd. 2. w VII. i VIII. Próchnickiego, C) Autorowie: w kl. III. Zywoty Corn. Neposa wyd. Jerzykowskiego: kl. IV. Caesar de bello Gallico wyd. Frammera; w V. kl. Livius wyd. Zingerlego i Ovidius wyd. Sedlmayera; w VI. kl. Sallustius wyd. Linkera i Vergilius wyd. Hoffmanna lub Eichlera: w VII. kl. Vergilius wyd. Hoffmana lub Eichlera i Cicero wyd. Teubnera lub Weidmanna; w VIII. kl. Horatius wyd. Grysara i Tacitus wyd. Jahna lub Müllera.

Język grecki. A) Gramatyka we wszystkich klasach Curtiusa w tłumaczeniu Samolewicza i Sternala wyd. 3. Ćwiczenia Schenkla oprac. przez Z. Samolewicza wyd. 4. B) Autorowie: w V. kl. Chrestomatya z Xenofonta Schenkla tłum. Borzemskiego, Homera Illiada wyd. Hoheggera; w VI. kl. Homera Illiada wyd. Hoheggera; Herodot wyd. Wilhelma; w VII. kl. Demostenes wyd. Paulego lub Wotkego w VIII. kl. Sofokles wyd. Teubnera lub Schuberta, Plato wyd. Jahna lub Krala.

Język polski. A) Gramatyka w całym gimnazjum A. Małeckiego wyd. 6. B) Wypisy w I. klasie tom I. wyd. 4. w II. kl. tom II. wydanie 4. w III. kl. tom III. wyd. 4. w IV. kl. tom IV. wyd. 2. w V. i VI. kl. Wypisy Mecherzyńskiego t. I. w VII. i VIII. kl. Wypisy Mecherzyńskiego t. II.

Język ruski. A) Gramatyka Osadey wyd. 2. w całym gimnazjum; B) Wypisy: w I. i II. kl. Romańczuka, Czytanka część I. i II. wydanie 2. III. i IV. Czytanki Partyckiego, w V. Chrestomatya Ogonowskiego; w VI. kl. Czytanka Barwińskiego tom I., w VII. kl. Czytanka Barwińskiego tom II., w VIII. kl. Czytanka Barwińskiego tom III.

Język niemiecki. A) Gramatyka w kl. I. i II. dr. J. Molina wyd. 2. III. — IV. Schobera-Rebena przerobiona przez dr. Germana część II. wyd. 4; B) Wypisy w I. i II. dr. J. Molina wyd. 2. w kl. III. Hamerskiego część I.; w kl. IV. Ha-

merskiego część II.; w kl. V. i VI. Jandaureka i Hamerskiego; w kl. VII. Harwota dla wyższego gimnazyum tom I. i II., w kl. VIII. Harwota tom II.

Geografia i Historia. W I. kl. geografia Benoniego i Tatomira wyd. 3.; w II. kl. geografia Baranowskiego i Dziedzickiego wyd. 3.; historia powszechna Weltera w przekładzie Sawczyńskiego część I. wyd. 4.; w III. kl. geografia jak w kl. II., historia Weltera-Sawczyńskiego część III. wyd. 4.; Weltera-Sawczyńskiego Dzieje nowożytne, wyd. 4 Statystyka monarchii austr. węg. przez Dra Iz. Szaraniewicza; wyd. 3.: w V—VII. kl. historia Gindelego w przekł. Markiewicza; w VIII. kl. Tomka Dzieje monarchii Austriacko-Węgierskiej, w przekładzie Markiewicza; Statystyka Dra Iz. Szaraniewicza. Atlas Kozena we wszystkich klasach, Kieperta lub Putzgera w II. i V. klasie.

Matematyka. W I. i II. kl. Arytmetyka dr. Wł. Zajęzkowskiego, geometrya Moenika w przekładzie G. Maryniaka część I. wyd. 5; w III. kl. Arytmetyka Mocnika w przekładzie Grzybowskiego, geometrya Mocnika w przekładzie G. Maryniaka, część II. wyd. 2; w IV. kl. Arytmetyka Mocnika w przekładzie Bączalskiego, Geometrya jak w kl. III., w całym wyższém gimnazyum algebra i geometrya Mocnika w przekładzie Staneckiego; logarytmy Wierzbickiego.

Historia naturalna. W I. i II. kl. Zoologia Nowickiego w II. kl. botanika Rostańskiego, w III. mineralogia Łomnickiego, w V. kl. botanika Rostańskiego; mineralogia Łomnickiego; w VI. kl. zoologia dla klas wyższych dr. Nowickiego.

Fizyka. W III., IV., VII., i VIII. kl. Soleckiego, Chemia Freunda. **Propedeutyka filozofii.** W VII. kl. Logika Dr. Kremera; w VIII. klasie psychologia Dra Crügera w przekładzie Sawczyńskiego.

E. Tematy do wypracowań piśmiennych.

a) w języku polskim.

W V. klasie.

1. Lipa (opis) dom. 2. Urywek z Psalterza Floryańskiego (na str. 6. Wypisów Mecherzyńskiego t. 1.) oddać w dzisiejszej polszczyźnie. 3. Jaki mamy pożytek z ognia? domw. 4. Wojna Rzymian z Fidenatami i Wejentami (na podstawie Liwiusa) szkol. 5. Charakter Szeligi (na podstawie gawędy L. Kondratowicza „Stare wrota”) domw. 6. Bitwa pod Salaminą domw. 7. Co popełniło Krzysztofa Szeligę do zdrady (na podstawie Kondratowicza „Stare wrota”) szkol. 8. O zasługach Peryklesa około rzeczypospolitej ateńskiej, domw. 9. Treść dramatu J. Kochanowskiego „Odprawa posłów greckich” szkol. 10. W jaki sposób odżywiają się rośliny? domw. 11. W jaki sposób przyszło do ustanowienia trybunału ludowego w Rzymie? szkolne.

W VI. klasie.

1. Życie a podróż (porównanie) domw. 2. Jakie powody winny nas skłaniać do uczenia się historii ojczystej (na podstawie przedmowy do kroniki Marcina Bielskiego) szkol. 3. Młodość a wiosna (porównanie) domw. 4. Treść i tok myśli w mowie Adherbala do senatu rzymskiego (Sallustius Jugurtha) szkol. 5. Jakie miały znaczenie dla świata greckiego igrzyska olimpijskie? domw. 6. Jakim zmianom uległa Europa wskutek wędrówek narodów? domw. 7. Skreślić charakter Achillesa na podstawie pieśni Homera czytanych w szkole, szkol. 8. Znaczenie roślin w przyrodzie i życiu ludzkim, domw. 9. Jakie rodzaje wymowy uprawiano w Polsce w wieku XVI. i jakie były warunki ich rozwoju? szkol. 10. Wskazać skutki nieporządku w życiu ucznia; (domowe). 11. Jakie były następstwa burzy, która Eneasza zagnała na wybrzeża Libyi? (na podstawie 1. ks. Eneidy) szkolne.

W VII. klasie.

1. Objasnić twierdzenie Jana Kochanowskiego; „Zawsze trwalszy owoc doweju niż siły,” domw. 2. Jakimi argumentami stara się Ciceró przekonać o konieczności wyboru Pompejusza na naczelnego wodza w wojnie z Mitrydatesem? szkol. 3. Rozwinąć myśl dwuwiersza:

„Bogaetwo ducha, to mi prawdziwy skarb życia!

„W wszystkim innem zmartwienia więcej niż użycia,” domw.

4. Powód do pierwszej mowy Demostenesa przeciw Filipowi i treść tejże, szkolne. 5. Treść i dążność satyry Ig. Krasieckiego p. t. „Graecze,” domw. 6. Kiedy Rzym większą okazał siłę, w chwilach powodzenia czy klęsk? domw. 7. Treść i dążność trzeciej mowy Demostenesa przeciw Filipowi, szkol. 8. Objasnić wiersz Miaskowskiego:

„Nie ten ci żeglarz, co płynie po wodzie

„Nie poruszonyj nie wiatrem w pogodzie,

„Ale kto wały, gdy biją najciężej

Wiosłem zwycięży” domw.

9. Tok myśli i dążność wiersza Niemcewicza: „Elegia na cmentarzu wiejskim” szkol. 10. Wskazać szkodliwe skutki wpływające dla ucznia z używania gotowych tłumaczeń przy czytaniu autorów klasycznych, (domw.) 11. Jak Wergiliusz przedstawia świat umarłych? (na podstawie ks. VI. Eneidy) szkolne.

W VIII. klasie.

1. *Τῆς ἀρετῆς ἀθάνατος ἡ τιμή*, domw. 2. Tok myśli i idea ody horacyusowskiej! „Maecenas atavis,” szkol. 3. Wskazać najważniejsze zmiany, jakim uległa władza konsulów rzymskich, domw. 4. Bohaterskość Grażyny w poemacie Adama Mickiewicza, szkol. 5. Wskazać związek ballady „Alpuhara” z treścią Konrada Wallenroda. 6. Stosunek Horacyusza do Mecenasa i Augusta (na podstawie czytanych w szkole utworów jego lirycznych), domw. 7. Charakterystyka Sędziego w „Panu Tadeuszu” szkol. 8. Porównać rządy Peryklesa w Atenach z rządami Augusta w Rzymie, domw. 9. Charakterystyka Tadeusza w „Panu Tadeuszu” A. Mickiewicza, szkol.

b) W języku ruskim.

W V. klasie.

1. Описанє занятій селянина въ часѣ жнивѣ. 2. Значенє договорѣвъ Олега и Нгоря зъ Греками. (шкѣльне). 3. О будѣляхъ у старинныхъ Египтянѣ. 4. Що постановляе Правда руска на убійство, побите и крадѣжъ? (шкѣльне). 5. Вліанє зими на занятя людѣй. 6. „Лѣность всему мати, оже умѣть то забудеть, а егоже не умѣть, тому ся не научить“ (Поученє Волод. Моном.). 7. Якъ описує Данило Паломникъ рѣку Юрданъ? (шкѣльне). 8. Пословицу: „Такъ свѣтъ платитъ“ пояснити примѣрами зъ исторіи грецкои. 9. Характеръ Святослава послѣ Нестора, (шкѣльне). 10. Якѣ розрывки суть для ученика найбѣдповѣднѣйшѣ? 11. Оповѣсти ослѣплєнє князя Василька послѣ Нестора, (шкѣльне).

W VI. klasie.

1. Засвѣтъ и живо образъ житя подекого. 2. Значенія памятника зъ XIII. вѣка „Слово Данила Заточника.“ 3. Обьемъ дѣятельности трибунѣвъ римскнхъ, и ихъ значенє въ борбѣ плебейѣвъ зъ патриціями. 4. Що спріяло розвоєви письменности рускои въ XVI. в.? (шкѣльне). 5. Зима и старѣсть, порѣвнанє. 6. Значенє пословицѣ „Безъ муки нема науки.“ 7. Шкѣльництво на Руси въ XVII. вѣцѣ, (послѣ лектуры). 8. Причины упадку римскои республики. 9. Характеристика Игоря Святославича. Послѣ лектуры, (шкѣльне). 10. Весна и молодѣсть. Порѣвнанє. 11. Розбрати и пояснити думу народну: „Про Марусю Богуславку.“

W VII. klasie.

1. Кажда пригода до мудрости дорога. 2. Значенє Котляревского въ розвоє письменности рускои. 3. Розвоє и значенє рыцарства въ середнихъ вѣкахъ. 4. Идея драмы Квитки Основяненка „Щира любовь,“ (шкѣльне). 5. Грѣшъ сєтъ добрымъ слугою, але злымъ паномъ. 6. Чи и о скѣлко выливають горы и рѣвинны на успѣоблєнє и житѣ човѣка? 7. Щасный и нещасный. Порѣвнанє на основѣ поємы Шашкевича „Нещасный,“ (шкѣльне). 8. Политика Филиппа II. взглядомъ Греціѣ. На основѣ бесѣдъ олімпійскихъ. 9. Содержанє и значенє баллады Костомарова „Братъ зъ сестрою,“ (шкѣльне). 10. Значенє середного моря въ середновѣчныхъ и новожитныхъ часахъ. 11. Характеръ Продана въ повѣсти Устимовича „Месть Верховниці,“ (шкѣльне).

W VIII. klasie.

1. Яке значенє мають выставки промысловѣи для индустріѣ краю? 2. Яке значенє могутъ мати записки Стороженка въ литературѣ? 3. Якѣй впливъ на односинѣ людскости зробили одкрытія XV. вѣка? 4. Якѣи характеры виводить Марко Вовчокъ въ оповѣданю „Институтка? (шкѣльне). 5. Основа и значенє пословицѣ: „Не все золото, що ся свѣтитъ.“ 6. Вилнѣвъ подорожей на образованє човѣка. 7. Чи справедливи суть замѣти Кулѣша дѣлани Котляревскому в. листѣ III. зъ хутора? (шкѣльне). 8. Цезарь и Наполеонъ I. Историчне порѣвнанє. 9. Якѣи гадки переймають молодця укѣнѣчающого гимназію? (шкѣльне).

c) W języku niemieckim.

W V. klasie.

1. Eine Uebersetzung, szkol. 2. Schilderung der Ferien, domw. 3. Inhaltsangabe des Gellert'schen Gedichtes „Damokles,“ szkol. 4. Die Erziehung der Jugend bei den Griechen (nach der Schullektüre), domw. 5. Welche Umstände begünstigten bei den Phöniziern Schiffahrt und Handel? szkol. 6. Eine Uebersetzung, domw. 7. Der Taucher (Inhaltsangabe), szkol. 8. Welchen Nutzen gewährt uns das Pferd? domw. 9. „Des Lebens ungemischte Freude, ward keinem Irdischen zu Theil“ (nach Schillers „Der Ring des Polykrates“), szkol. 10. Ueber den Nutzen der Eisenbahnen, domw. 11. Alkibiades, Charakteristik, szkol. 12. Der Winter, seine Freuden und Leiden, domw. 13. Beschreibung eines Gewitters, szkol. 14. Nutzen und Würde des Ackerbaues, domw. 15. Edle That eines jungen Landmädchens (Johanna Sebus), szkol. 16. Eine Uebersetzung, domw. 17. Die Sage von der Gründung Roms, szkol. 18. Meine Tagsbeschäftigung in Form eines Briefes an den Freund, domw. 19. Kurze Lebensskizze Gutenberg's, szkol. 20. Das menschliche Leben und die vier Jahreszeiten (Parallele), domw. 21. Hannibals Zug über die Alpen, szkolne.

W VI. klasie.

1. Der Schatzgräber von Gothe, szkol. 2. Die Grösse des Columbus, dom. 3. Die Treue die ist doch kein leerer Wahn, szkol. 4. Wer kein Geld hat, ist arm; wer nur Geld hat, ist ärmer, domw. 5. Siegfrieds Tod, szkol. 6. Gedankengang des Gedichtes von Lenau „Der Postillon,“ domw. 7. Das Mutterauge, szkol. 8. Eine Wintergegend, domw. 9. Der Weihnachtsabend (Eine Winterlandschaft,) (domw.) 10. Eine Uebersetzung. 11. Der Mensch gegenüber den Naturkräften szkol. 12. Ueber den Thierdienst, domw. 13. Schilderung einiger chinesischen Sitten und Gebräuche (nach der Schullektüre), szkol. 14. Sittenschilderung Roms zur Zeit Jugurthas in Hinblick auf seinen Ausspruch: „O urbem venalem et mature perituram, si emptorem inveneris!“ domw. 15. Coriolanus vor dem Weltgericht (auf Grund der Schullektüre), domw. 16. Eine Uebersetzung aus dem Polnischen, szkol. 17. Eine Feuersbrunst (Beschreibung nach Schiller's Lied von der Glocke), domw. 18. Eine Uebersetzung aus dem Polnischen, szkol. 19. Der Mönch von Heisterbach von Müller, prosaisch nachzuerzählen, szkol. 20. Warum ist die Buchdruckerkunst ein Hebel der menschlichen Cultur? domw. 21. Harmosan von Platen, Gedankengang und Grundidee, szkolne.

W VII. klasie.

1. Bedeutung der Entdeckung Amerikas, domw. 2. Rudigers Charakter im Niebelungenliede, szkol. 3. Frauengestalten im Niebelungenliede in Gudrun, dom. 4. Bedeutung individueller Merkmale auf Grund der logischen Unterriechtes, dom. 5. Es ist die Bedeutung des Sprichwortes: „Kleider machen Leute, ins richtige Licht zu stellen,“ szkol. 6. Welche Mittel schützen uns am sichersten vor Armut. 7. Hüons Abenteuer bis zu seiner Zusammenkunft mit Scherasmin, (Nach Wieland's Oberon), szkol. 8. Zweck und Inhaltsangabe der II. philippischen Rede, szkol. 9. Durch welche Mittel gelang es Philipp von Macedonien der Freiheit

der Griechen ein Ende zu machen? domw. 10. Durch welche Umstände wurde der Umschwung der Handlung im Lessing's Minna von Barnhelm herbeigeführt? szkol. 11. Inhaltsangabe des Dramas „Odprawa posłów“ von Niemcewicz, domw. 12. Ueberschwemmungen und ihre Folgen, domw. 13. Einfluss Frankreichs auf die politischen und socialen Zustände Europas zur Zeit Ludwig XIV., domw. 14. Wie ist das Verhalten Johannas während der Krönungsscene zu erklären? (Nach dem gelesenen Drama von Schiller „Jungfrau von Orleans“), szkolne.

W VIII. klasie.

1. Des Apothekers und des Wirthes Lebensanschauung auf Grund des I. Gesanges des idyllischen Epos v. Goethe Hermann und Dorothea, szkol. 2. Die Bedeutung der Ströme für die Cultur, szkol. 3. Weisslingens Treubruch in Goethes Götz, szkol. 4. „Wo rohe Kräfte sinulos walten,

„Da lässt sich kein Gebild gestalten.“ Schiller, domw. 5. Das

Locale in Goethes Hermann und Dorothea. szkol. 6. „Wer auf dem Sinne beharrt, der bildet die Welt sich,“ domw. 7. Tells Apfelschuss nach Schiller's „Wilhelm Tell,“ szkol. 8. Das Tragische in Wallenstein's Vertrauensseligkeit dem finsternen Verrate Buttlers gegenüber. (Nach Schiller's Wallenstein 3. Th.), szkol. 9.

„Mit des Geschickes Mächten

Ist kein ew'ger Bund zu flechten“ (Chrie), domw. 10. Welche Vorzüge scheinen die Thiere vor den Menschen erhalten zu haben? szkol. 11.

„Sitz' obenan zu Tische,

Die Ehre ziemt dem Gast

Was ich vermag, erfrische

Dich nach des Tages Last,“ Uhland, domw. 12. Roland Schildträger. Romanze von Uhland (Gedankengang), szkol. 13. Mark Antons Redekünste (Nach Jul. Caesar von Shakespeare), domw. 14.

Sich im Spiegel zu beschauen

Kann den Affen nur erbauen:

Wirke! nur in seinen Werken

Kann der Mensch sich selbst bemerken, szkolne.

F. Zbiory naukowe.

1. Biblioteka nauczycielska obejmuje obecnie 874 tomów, 2956 zeszytów, 112 ilustracyj, 44 map, 9 atlasów i 1 globus.

W bieżącym roku szkolnym przybyły następujące ważniejsze dzieła:

- a) przez kupno: Maryniak, Geometrya poglądowa dla klas niższych, część 1. i 2. Rutowski T., Rocznik statystyki Galicyi. — Małecki A., Gramatyka jęz. pol. szkolna, wyd. 7. — Zajączkowski W., Początki arytmetyki na I. i II. kl. — Mecherzyński K., Przykłady i wzory tom I. — O. Partycki, Ruskie czytanki dla III. i IV. kl. — Adelung, Versuch eines vollständigen grammatisch-kritischen Wörterbuches der hochdeutschen Mundart. —

J. Molin, Ćwiczenia niemieckie dla kl. I. i II. — J. Molin, Gramatyka języka niemieckiego. — Leixner Otto, Deutsche illustrierte Literaturgeschichte. — Z. Sawczyński, Weltera Dzieje powszechne, część 1. — I. Müller, Handbuch der classischen Alterthumswissenschaft. — Encyklopedia wychowawcza, tom IV. — Verordnungsblatt für den Dienstbereich des Ministeriums für Cultus und Unterricht z r. 1888. — Ciceronis Cato Maior, von G. Lahmeyer. — A. Weinhold, Physikalische Demonstrationen. — N. Jagić, Archiv für slavische Philologie, tom VI. — Gretschel und Bornemann, Jahrbuch der Erfindungen, tom 23. — F. A. Weber, Erklärendes Handbuch der Fremdwörter und Abkürzungen. — A. Vogel, Systematische Encyklopädie der Pädagogik. — Ciceronis De amicitia, von Lahmeyer. — Własnymi sylami, powiśt' W. Gilern. — Wszechrwiat, tygodnik poświęcony naukom przyrodniczemu z r. 1888. — M. Arct, Słowniczek wyrazów obcych używanych w mowie polskiej. — S. Siedlecki, Platona Laches, Apologia, Kryton, Gorgias, Protagoras i Eutyfron. — Bat'ki i dity, powiśt' Turgeniewa. — Przewodnik bibliograficzny z r. 1888. — Mittheilungen der k. k. geograph. Gesellschaft in Wien z r. 1888. — Die österreichisch-ungarische Monarchie in Wort und Bild. — Biblioteka Warszawska z r. 1888. — Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien z r. 1888. — Kwartalnik historyczny, rocznik I. z r. 1887. — Politische Wandkarte von Russland, R. Kiepert. — Zeitschrift für die österr. Gymnasien z r. 1888. — L. Sowiński, Wspomnienia szkolne. — Homera Iliada w tłum. Popiela.

- b) z darowizny: A. Netoliczka, Geschichte des k. k. 9. Linien-Infanterie-Regiments. — A. Novák, Erinnerungen an das Leben und die Thaten des Feldmarschalls Radetzky. — M. Jamrógiwicz, Geometria poglądowa dla użytku w klasach niższych szkół średnich. — A. Dumas, Wspólnik garbarza. — Muzeum, czasopismo Towarzystwa nauczycieli szkół wyższych z r. 1886. — A. Miekiewicza Dzieła, wydanie zupełne, przez dzieci autora dokonane. — Anzeiger der kais. Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, Jahrgang 1884—1887, i Philologisch-Historische Classe, Jahrgang 1884—1887. — Przewodnik naukowy i literacki, dodatek do Gazety lwowskiej z r. 1887. — Ćwiczenia łacińskie dla kl. IV., ułożył Fr. Próchnicki.

2. Biblioteka dla młodzieży obejmuje obecnie 1064 tomów, mianowicie 494 w języku polskim, 123 w języku ruskim, 447 w języku niemieckim.

W r. s. 1888 przybyły następujące:

- a) przez kupno: E. Zorjan, Z kryżackich bojów. — A. Zipper, Siedm cudów świata i podróż do Olimpi. — W. Satkie, O wodzie, urywek z geologii. — A. Zipper, Kurzer Abriss, zugleich Repetitorium der deutschen Literaturgeschichte. — Iwan z Berlöh

Pód Żurawnom, opowiadanie. — Iwan z Berlôh, Zołotyj kre-
styk, opowiadanie. — A. Zipper, Mitologia Greków i Rzymian
dla młodzieży. — S. Zahajkiewicz, Dwie baśnie. — J. Starkel,
W szarej godzinie, trzy powiastki. — A. Rohal, Tadeusz Ko-
ściuszko. — K. F. Becker, Oblężenie Troi. — H. Parasiewicz,
Budowa, życie i pielęgnowanie ciała ludzkiego. I. Boczyliński,
Bojesena Starożytności rzymskie i Starożytności greckie. —
I. C. Andriä, Heroen. Griechische Heldensagen für die Jugend. —
Iwan z Berlôh, Semen Syrotiuk, opowiadanie. — L. Stacke,
Erzählungen aus der römischen Geschichte in biographischer
Form. — W. O. von Horn, Zwei Ausbrüche des Vesuv. —
J. I. Kraszewski, Metamorfozy. — M. Gawalewicz, Ostatnie
dni Pompei. — Schubert, Der ungleiche Sohn und der gleich-
artige Enkel; Der Krüppel von Rottenstein. — W. O. von
Horn, Die Belagerung von Wien. — Miesięcznik galicyjskiego
Towarzystwa ochrony zwierząt, z r. 1886 i 1887. — J. Verne,
Reise um den Mond. — J. Verne, Reise nach dem Mittelpunkt
der Erde. — Poetyczni twory Stefana Rudańskoho (w wybo-
rze). — Hałycki obrazki I. Franka, seria persza. — J. Korze-
niowski, Wędrówki oryginała. — Pierwiastki dziejów ojczystych
w ich organicznym rozwoju, S. Żarański. — Nabob, A. Dodeta
powist' z paryskoho żytia. — Verne J., Reise um die Erde
in 80 Tagen. — Umlaut F., Wanderungen durch die öster-
ungar. Monarchie. — Zamieć w stepach, p. E. Tarczę (Grabow-
skiego). — P. Kraków, Powieści z dziejów naszych.

b) z darowizny: Lessing, Abhandlungen über die Fabel. — Die
deutsche Heldensage. — F. Schiller, Die Räuber. — Gothe,
Egmont. — H. J. von Collin, Regulus, eine Tragödie. — F.
Schiller, Wallenstein. — A. Mickiewicza poczye w 4 tomach.
W ciągu roku szkolnego 1887/8 przeczytało 157 uczniów książ-
zek polskich i ruskich 1182, a 131 uczniów 577 książek niemieckich.

3. Księgozbiór dla ubogich uczniów obejmuje obecnie 764 książ-
zek szkolnych, używanych w tutejszem gimnazjum, oprócz wielu,
które już wyszły z użytku szkolnego. Powiększył się zatem ten księ-
gozbiór w roku szkolnym 1888 o 105 książek; mianowicie kupiono
56 książek, otrzymano w darze 49.

Zawiadowcą tego księgozbioru był prof. S. Polak.

4 Gabinet fizykałny posiada obecnie 350 przyrządów, 62 przy-
borów do chemii i 37 narzędzi.

W tym roku zakupiono: wagę sprężynową, model dzwonu nur-
kowego, kolój odśrodkową, model zegaru wahadłowego, papierowy
model balonu Montgolfiera, aerodynamiczny paradoxon, piszczałkę
szklanną, hygroskop Saussure'a, deklinatorium i inklinatorium na
wspólnej podstawie baterią Grenet'a o 12 elementach, konduktor
Coulomba, przyrząd Pohla.

5. Gabinet historyi naturalnej posiada obecnie 1225 okazów
zoologicznych, 911 mineralogicznych, 866 botanicznych, 124 modeli
krytalograficznych, 231 ilustracyj.

W tym roku zakupiono: 8 okazów zoologicznych, do botaniki zaś 4 modele z papierowej masy i 2 preparaty mikroskopiczne.

Z darów przybyło: czaszka dzika, 3 okazy ptaków wypchanych, zbiór nasion 21 gatunków roślin uprawnych.

6. Do nauki rysunków posiada zakład obecnie 1246 wzorów, 9 wzorów ściennych, 116 modeli, 10 przyrządów, 64 przyborów, 22 książek, 85 zeszytów.

W tym roku zakupiono: 6 dużych brył (sześcian wydrążony, graniastosłup pełny i wydrążony, walec wydrążony, półkula wydrążona, wnek z podstawą i zakończeniem): Z modeli drutowe (ruchomy podwójny kwadrat i ruchome podwójne koło); seryą V. Wzorów przemysłu domowego; Kurs rysunków wolnoręcznych przez Fellnera i Steigla.

G. Fundusze

na zakupienie zbiorów naukowych.

a) datki uczniów na zbiory naukowe	314 złr. — ct.
b) taksy wstępne od 84 uczniów	176 „ 40 „
c) taksy za duplikaty świadectw szkolnych	25 „ — „
razem:	515 złr. 40 ct.

H. Fundusze

na wsparcie ubogich uczniów:

1. Z fundacyi ś. p. Rozalii Jachniewiczówny, wynoszącej w nominalnej wartości kwotę 400 złr. m. k., a przeznaczonej na zakupno książek szkolnych dla biednych uczniów, użyto odsetek na zakupno i oprawę 18 książek szkolnych.

2. Na wsparcie ubogich uczniów bez różnicy wyznania religijnego wpłynęły na ręce dyrekcji w r. s. 1888 następujące datki:

Od WP. Lindenbauma Maurycego	20 złr.
„ „ Samuelego Mendla	5 „
„ „ Kunstmanna Zygmunta	3 „
„ „ Kreisberga Józefa	1 „ 90 ct..
Zostało z r. s. 1887	8 „ 60 „

Wpłynęło razem 38 złr. 50 ct.

Tę kwotę użyto:

a) na uzupełnienie opłaty szkolnej dla 12 uczniów	31 złr. — ct
b) na jednorazowe zapomogi dla uczniów	5 „ — „

Wydano więc razem 36 złr. — ct.

Pozostało na rok następujący 2 złr. 50 ct.

Wszystkim wyżej wymienionym Dobrodziejom składa dyrekcya w imieniu ubogiej młodzieży szkolnej najszczerze podziękowanie.

3. Z datków, wrzucanych do puszek przez Profesorów i uczniów po exhortach i po nauce religii mojżeszowej wpłynęło:

w I. półr. 1887/8 . . . 11 złr. 66 $\frac{1}{2}$ ct. a. w.

w II. półr. — . . . 12 „ 86 $\frac{1}{2}$ „ „

razem 28 złr. 53 ct. a. w.

Mianowicie wpłynęło w r. s. 1887/8:

a) z exhort polskich . . . 17 złr. 34 $\frac{1}{2}$ ct. a. w.

b) z „ ruskich . . . 8 „ 89 $\frac{1}{2}$ „ „

c) z lekcij religii mojżeszowej . . . 2 „ 29 „ „

razem 28 złr. 53 ct. a. w.

z r. s. 1887 zostało . . . 23 „ 11 $\frac{1}{2}$ „ „

Było więc razem 51 złr. 64 $\frac{1}{2}$ ct. a. w.

Datków tych użyto:

a) na zakupienie i oprawę książek . . . 50 złr. 45 ct. a. w.

b) na jednorazowe zapomogi . . . — „ — „ „

wydano razem 50 złr. 45 ct. a. w.

Zostaje na rok następny . . . 1 złr. 19 $\frac{1}{2}$ ct.

4. Stypendya wynosiły w całym roku szkolnym 514 złr 95 ct. a. w. a pobierało je 5 uczniów, mianowicie:

a) z fundacyi ks. Samuela Głowińskiego w rocznej kwocie 157 złr. 50 ct. a. w. uczeń kl. VIII. Czajkowski Roman.

b) z fundacyi ks. Szczęsnego Skibińskiego, w rocznej kwocie 85 złr. a. w. uczeń klasy VII. Kopacz Jan.

c) z fundacyi ks. Emiliana Kossaka za rok szkolny 1886 i 1887 w rocznej kwocie 90 złr. 95 ct. a. w. uczeń klasy VI. Maciurak Bazyli; a w rocznej kwocie 31 złr. 50 ct. a. w. uczeń klasy Ia. Kobryn Piotr.

d) z nadwyżek kar dochodowych, w rocznej kwocie 150 złr. a. w. uczeń klasy VII. Kotowicz Teodor.

I. Statystyka uczniów.

	W k l a s i e									Razem
	Ia	Ib	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
I. Frekwencja w ogólności,										
1. Przy końcu roku szkolnego 1886/7 było	31	33	49	35	34	25	18	20	11	256
2. <i>Publicznych uczniów</i> na początku roku szkolnego 1887/8	41	41	58	47	28	30	25	18	19	307
3. Przyjęto w ciągu I. półrocza 1887/8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4. Między nimi było:										
1. Z innych zakładów a) z promocją	32	34	—	—	2	2	2	1	—	73
b) repetentów	—	—	2	1	1	—	—	1	—	5
2. Z tutejszego zakładu a) z promocją	—	—	44	38	23	24	19	15	19	182
b) repetentów	9	7	12	8	2	4	4	1	—	47
5. ustąpiło w ciągu I. półrocza 1887/8	2	2	2	—	—	2	—	2	—	10

	W k l a s i e									Razem
	Ia	Ib	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
6. Pozostało przy końcu I. półrocza	39	39	56	47	28	28	25	16	19	297
7. Przyjęto w ciągu II. półrocza 1888	—	1	—	1	—	2	1	1	—	6 ²
8. Ustąpiło w ciągu II. półrocza	5	8	5	5	2	4	1	4	—	34
9. Pozostało przy końcu II. półr. 1888	34	32	51	43	26	26	25	13	19	269
10. Prywatnych uczniów było w I półr. 1887/8.	—	1	—	—	—	1	—	—	—	2
11. Prywatnych uczniów było w II. półr. 1888	—	—	—	2	—	—	—	—	—	2
2. Frekwencja przy końcu II. półrocza według miejsca urodzenia uczniów										
a. z Drohobycza i drohobyckiego pow.	26	17	37	28	20	22	21	7	13	191
b. z innych powiatów Galicyi	8	13	13	15	6	4	4	6	6	75
c. z Rosyi, Morawii, Czech	—	2	1	—	—	—	—	—	—	3
3. Według miejsca pobytu rodziców.										
a. z Drohobycza było uczniów	21	16	35	26	23	18	19	8	16	182
b. z drohobyckiego powiatu	8	11	11	12	1	6	5	3	1	58
c. z samborskiego	2	2	—	1	—	1	1	—	—	7
d. z stryjskiego	1	1	—	1	1	—	—	—	—	4
e. z rudeckiego	—	—	2	—	1	—	—	—	—	3
f. z turezańskiego	1	—	—	1	—	—	—	—	—	2
g. z innych powiatów Galicyi	1	2	3	2	—	1	—	2	2	13
4 Według wyznania religijnego.										
a. Rzymsko-katol. wyznania	11	6	22	14	7	4	6	4	6	80
b. Grecko-katol. wyznania	9	10	11	11	5	6	7	5	1	65
c. Ewangelików, helweckiego wyzn.	—	1	—	1	—	—	—	—	—	2
d. Mojżeszowego wyznania	14	15	18	17	14	16	12	4	12	122
5. Według języka ojczystego.										
a. Polski język za ojczysty uznało	25	22	40	32	21	20	18	8	18	204
b. Ruski język za ojczysty uznało	9	10	11	11	5	6	7	5	1	65
c. Niemiecki język za ojczysty uznało	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6. Według wieku uczniów.										
11 lat miało	7	9	2	—	—	—	—	—	—	18
12 " "	8	8	5	2	—	—	—	—	—	23
13 " "	10	9	13	8	—	—	—	—	—	40
14 " "	5	3	15	9	6	2	—	—	—	40
15 " "	2	2	8	7	8	3	1	—	—	31
16 " "	2	1	7	9	6	4	4	—	—	33
17 " "	—	—	—	3	1	5	5	—	2	16
18 " "	—	—	1	3	3	3	4	5	1	20
19 " "	—	—	—	1	2	7	6	2	6	24
20 " "	—	—	—	1	—	2	3	2	7	15
21 " "	—	—	—	—	—	—	1	4	1	6
22 " "	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2
23 " "	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1
7. Klasyfikacya										
a) z końcem roku szk. 1888.										
celujący stopień otrzymało	1	3	3	1	—	2	1	1	5	17
pierwszy " "	17	17	30	24 ²	15	16	15	6	14	154 ²
drugi " "	3	5	3	9	5	—	1	—	—	26
trzeci " "	10	5	3	2	3	3	1	—	—	27
do poprawczego egzaminu przeznaczono	3	2	12	7	3	5	7	6	—	45
nie klasyfikowano	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
razem	34	32	51	43	26	26	25	13	19	269 ²

	W k l a s i e									Razem
	Ia	Ib	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
b) <i>odnośnie do r. s. 1887.</i>										
do poprawczego examinu										
przeznaczono	10	8	13	12	8	4	2	7	—	64
zdało poprawczy exami . .	7	5	11	9	7	4	2	7	—	52
nie zdało poprawczego exa-										
minu	3	3	2	3	1	—	—	—	—	12
c) <i>ostateczny zatem wynik</i>										
<i>klasyfikacji za II. półr.</i>										
<i>r. s. 1887.</i>										
celujący stopień otrzymało	3	—	2	—	—	—	1	2	1	9
pierwszy " " " "	21 ¹	21	36	23	31 ¹	19	15	17 ¹	10	193 ³
drugi " " " "	5	7	5	7	3	2	1 ¹	1	—	31 ¹
trzeci " " " "	2	5	6	5	—	4	1 ¹	—	—	23 ¹
razem	31 ¹	33	49	35	34 ¹	25	18 ²	20 ¹	11	256 ⁵

8. Opłata szkolna.

a) Płaciło całą opłatę szk.										
w I. półr.	39	39 ¹	26	23	17	15 ¹	11	8	10	188 ²
Płaciło całą opłatę szkolną										
w II. półr.	19	15	17	19 ²	18	11	14	8	11	132 ²
b) Od połowy było uwol-										
nionych w I. półr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Od połowy było uwolnio-										
nych w II. półr.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
c) Od całej opłaty było										
uwolnionych w I. półr.	—	—	30	24	11	14	14	9	9	111
Od całej opłaty było uwol-										
nionych w II. półr.	16	18	35	24	8	17	12	7	8	145

złr. austr. wal.

d) Opłata szkolna wyno-										
siła w I. półr.	585	600	390	345	255	240	165	120	150	2850 —
Opłta szkolna wynosiła w										
w II. półr.	285	225	255	315	270	165	210	120	165	2010 —
razem										4860 —
e) Taxy wstępne wynosiły	67-20	73-50	4-20	6-30	6-30	6-30	6-30	6-30	—	176-40
f) Datki na zbiory naukowe	41—	42—	58—	49—	28—	32—	26—	19—	19—	314—
g) Taxy za wydane dupli-										
katy świadectw	—	—	—	—	—	—	—	—	—	25—
razem										515-40

9. Frekwencya przy końcu II. półrocza.

a) <i>na przedmioty wzglę-</i>										
<i>dnie obowiązkowe.</i>										
Na naukę języka ruskiego										
uczęszczało	10	14	14	11	5	7	7	5	1	74
b) <i>na przedmioty nadobo-</i>										
<i>wiązkowe.</i>										
na naukę historii kraju										
rodzinnego	—	—	—	43	26	—	25	14	—	108
na naukę języka francusk.	—	—	9	2	6	9	4	1	4	35
" " rysunków geome-										
trycznych	—	—	23	17	3	7	3	1	—	54
na naukę kaligrafii . . .	17	20	16	12	9	—	—	—	—	74
" " gimnastyki	29	22	27	20	14	11	11	3	3	140

U C Z N I Ó W

Co do stanu rodziców było między publicznymi uczniami przy końcu II. półr.

synów	księży grecko-katol.	15
"	lekarzy i adwokatów	4
"	urzędników publicznych	28
"	urzędników prywatnych	18
"	właścicieli i dzierżawców większych posiadłości	10
"	właścicieli realności	19
"	kapitalistów, przemysłowców i kupców większych	30
"	przemysłowców i kupców mniejszych	41
"	nauczycieli ludowych	5
"	rzemieślników	32
"	włościan i rolników	28
"	osób prywatnych	3
"	sług publicznych i prywatnych	13
"	zarobniaków dziennych	5
sierót	bez ojca	18
razem		269

K. Examin dojrzałości.

Do examinu zgłosiło się 19 publicznych abiturjentów i 2 externistów.

Zagadnienia do piśmiennego examinu były następujące:

1) z języka łacińskiego na polski: Vergil. Aen. VII. 152—195.

2) z języka polskiego na łaciński przełożyć z części I. wyd. 5. Weltera Dziejów, str. 189. ustęp: „Bitwa pod Herakleą“ od słów: Rzymianie wyszli... do słów: do obozu epirockiego.

3) z języka greckiego na polski przełożyć Platona Laches roz. 2.

4) z języka polskiego: „Jaki wpływ wywarły wojny perskie na rozwój ducha helleńskiego?“

5) z języka niemieckiego: Warum ist das Ringen Roms mit Carthago eine der herrlichsten Episoden in der Geschichte der alten Völker?

6) z języka ruskiego: Concordia parvae res crescunt, discordia maximae dilabuntur.

7) z matematyki: a) Rozwiązać równanie:

$$a^x - b^{x+2} = b^{x+1} - a^{x-1}$$

albo

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{\frac{3x-2x}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} &= 2 \\ x^2 - 8 &= 2x(2y-3) \end{aligned} \right.$$

albo

$$\left\{ \begin{aligned} x - y &= a(1 + xy) \\ x + y &= b\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+y^2} \end{aligned} \right.$$

b) Dwie osoby rozpoczęły równocześnie oszczędzać pieniądze. W tym celu daje osoba A cały swój majątek, wynoszący 9000 złr. a. w. na procent składany 4⁰/₀; osoba zaś B nie posiada żadnego majątku, lecz oszczędza ze swjej pensyi 900 złr. a. w. każdego roku i oddaje takowe na procent składany 5⁰/₀. — W jakim czasie obie osoby będą posiadały jednakowy majątek?

c) Na jakiej części powierzchni ziemi może być widziana świecąca kula, wyrzucona na szerokiem morzu pionowo do góry, jeśli początkowa jej chyżość $c = 400$ m. na sekundę, a załamania promieni światła i oporu powietrza nie bierzemy w rachubę?

Ustny examin odbył się pod przewodnictwem c. k. Dyrektora wyższej szkoły realnej w Krakowie, WP. Marcelego Studzińskiego w dniach 19. 20. 21. i 23. lipca r. 1888.

13 abiturjentów publicznych zostało uznanych za dojrzałych i 1 externistę; 3 abiturjentom pozwolono zgłosić się do poprawczego egzaminu z jednego przedmiotu po wakacyach; 3 abiturjentów publicznych i 1 externistę reprobowano na 1 rok.

Chlubne świadectwo dojrzałości otrzymali: 1. Bühn Józef, 2. Cięglewicz Stefan, 3. Czajkowski Roman, 4. Reiter Abraham.

Świadectwo dojrzałości otrzymali: Allerhand Michał, Bieńczewski Antoni, Gartenberg Abraham, Goldberg Efraim, Górka Ignacy, Oberländer Salamon, Reiter Eisig, Ruhrberg Súsze, Wiesenberg Jónasz, Ziembowski Leon.

Z powyższych publicznych abiturjentów ukończyło studia gimnazyalne w 8 latach — 10, w 9 latach — 6, w 10 latach — 3; z externistów ukończył studia gimnazyalne 1 w 8 latach, drugi zaś sześć klas i 1. półr. VII. klasy w 6¹/₂ latach.

L. Kronika zakładu.

I. Zmiany w gronie nauczycielskiem:

1. Reskryptem z d. 26. lipca 1887. l. 501. doniosło Wys. Prezydium c. k. Rady sz. kr., że J. E. P. Minister W. i O. reskryptem z d. 9. lipca 1887. l. 11.248. zamianował tutejszego c. k. profesora *Michała Żukiewicza* nauczycielem filologii klasycznej w c. k. gimnazjum przemyskiem, a zastępcę nauczyciela c. k. gimnazjum złoczowskiego *Antoniego Padę* rzeczywistym nauczycielem filologii klasycznej w tutejszém gimnazjum.

2. Reskryptem z d. 5. sierpnia 1887. l. 10.626. poruciła Wys. c. k. Rada sz. kr. naukę języka transyńskiego w tutejszém gimnazjum *Maurycemu Klugmannowi*.

3. Reskryptem z d. 7. września 1887. l. 604. uwolniło Wys. Prezydium c. k. Rady sz. kr. tutejszego zastępcę nauczyciela *Emila Urbaniczkiego* od służby nauczycielskiej, a przeniósło do tutejszego zakładu zastępcę nauczyciela gimnazjum II. we Lwowie *Kazimierza Grünberga*.

4. Reskryptem z d. 20. września 1887. l. 13.213. zatwierdziła Wys. c. k. Rada sz. kr. nauczyciela *Antoniego Stefanowicza* w zawodzie nauczycielskim i nadała mu tytuł c. k. profesora.

5. Reskryptem z d. 6. listopada 1887. l. 723. doniosło Wys. Prezydium c. k. Rady sz. kr., że według reskryptu Wys. c. k. Ministerstwa W. i O. z d. 27. października 1887. l. 21.476. Jego Ces. i król. Apostolska Mość raczył Najwyższém postanowieniem z d. 23. października 1887. najmiłościwiej zamianować profesora tutejszego zakładu *Seweryna Arzta* dyrektorem gimnazjum państwowego w Wadowicach.

6. Tymże reskryptem przeniosło Wys. Prezydium do tutejszego zakładu examinowanego zastępcę nauczyciela c. k. gimnazjum Franciszka Józefa we Lwowie *Kaspra Algierskiego*.

7. Reskryptem z d. 20. listopada 1887. l. 17.055. przeniosła Wys. c. k. Rada sz. kr. z c. k. gimnazjum sądeckiego zastępcę nauczyciela *Antoniego Olberka* do tutejszego zakładu na miejsce zastępcy nauczyciela *Józefa Pawłowskiego*, zmarłego d. 13. listopada 1887.

11. Rok szkolny 1887/8. rozpoczął się d. 3. września 1887. uroczystém nabożeństwem, odprawioném w kościele parafialnym dla uczniów obydwóch obrządków katolickich.

W dniach 16. i 18. lipca i 1. i 2. września 1887. odbywał się examin wstępny z uczniami, do I. klasy po raz pierwszy zapisanymi. Na 73 uczniów nowych zostało 7 przy examinie wstępnym reprobowanych; przyjęto zaś do kl. I. 66 uczniów nowych, a 16 repentów.

W ogóle przyjęto w tym roku szkolnym 313 uczniów publicznych i 2 prywatnych; w porównaniu zatem z r. sz. 1887. o 3 uczniów publicznych więcej.

W d. 4. października 1887. jako w dniu Imienin Najj. Pana brała młodzież gimnazjalna wraz z gronem nauczycielskiém, po wysłuchaniu odpowiednich exhort, udział w uroczystych nabożeństwach, na Jego intencją odprawionych; podobnie w d. 19. listopada 1887. jako w dniu Imienin Najj. Pani.

Również brała młodzież gimnazjalna udział w nabożeństwach żałobnych, d. 4. maja 1887. za spokój duszy Najj. Cesarzowej Maryi Anny, a d. 28. czerwca 1887. za spokój duszy Najj. Cesarza Ferdynanda I. w kościele i cerkwi odprawionych.

Do spowiedzi i do komunii św. przystępowała katolicka młodzież gimnazjalna 3 razy w r. s. 1888; a oprócz tego przyjęła młodzież obrz. łac. św. Sakrament Bierzmowania podczas kanonicznej wizyty J. O. ks. Biskupa Dra Łukasza Soleckiego d. 28. czerwca.

Dnia 29. maja 1888. zrobiła młodzież gimnazjalna wraz z gronem nauczycielskiém wspólną wycieczkę do pobliskiego lasu, gdzie przepędziła wesoło kilka godzin na zabawach jej wiekowi odpowiednich.

Pierwsze półroczcie zakończono 30. stycznia, drugie rozpoczęto 3. lutego 1888. — Rok szkolny zakończono wyjątkowo za pozwoleniem Wys. Rady sz. kr. d. 14. lipca 1888. dziękczynném nabożeństwem w cerkwi parafialnej i rozdaniem świadectw szkolnych.

Stan zdrowia młodzieży szkolnej był w tym roku w ogóle zadowolający.

Przez śmierć postradał zakład d. 13. listopada 1887. exami-
nowanego zastępcę nauczyciela Józefa Pawłowskiego, odznaczającego
się niestrudzoną gorliwością w urzędowaniu, a wielką uprzejmością
w obcowaniu.

M. Ważniejsze rozporządzenia.

Wys. c. k. Rada sz. kr. zaliczyła w poczet książek dozwo-
lonych do użytku szkolnego, lub poleciła do biblioteki następujące
książki :

1. Weltera Dzieje powszechne, przełożył Z. Sawczyński część,
I. wyd. 5., rozp. z d. 20. lipca 1887. l. 8822.
2. Kurzer Abriss der deutschen Literaturgeschichte, von dr.
A. Zipper; rozp. z d. 31. lipca 1887. l. 9108.
3. Hanoeh L'naar, Historya biblijna wraz z zasadami religii
mojżeszowej, opracował Izydor Plauer; rozp. z d. 28. sierpnia 1887.
l. 12.493.
4. C. Taciti opera, vol. I. Ab excessu divi Augusti, recensuit
J. Müller, i Herodots Perserkriege I. Theil 2. Auflage, von Dr. N.
Hintner; rozp. z d. 23. września 1887. l. 12.006.
5. C. J. Caesaris Commentarii de bello Gallico. rec. J. Pram-
mer; T. Livii Ab urbe condita lib. I. II. XXI. XXII. — ed. A.
Zingerle; P. Ovidii Nasonis carmina selecta; ed. II. St. Sedlmayer;
rozp. z d. 23. września 1887. l. 10.812.
6. Platonis Apologia et Crito, Protagoras; ed. J. Král; P.
Vergilii Maronis carmina selecta, ed. Ed. Eichler; rozp. z d. 21.
września 1887. l. 9228.
7. Istoryja biblijna staroho zawita, napysaw A. Toroński;
rozp. z d. 29. października 1887. l. 15.918.
8. Przykłady do tłumaczenia z jęz. łac. na pol. i z pol. na
łac.; na klasę II., ułożył dr. Z. Samolewicz, wyd. 3: rozp. z d. 8.
listopada 1887. l. 15.675.
9. M. T. Ciceronis orationes selectae: Pro T. Annio Milone,
Pro Q. Ligario, Pro rege Deiotaro, ed. H. Nohl. — Homeri Odys-
seae epitome ed. Pauly-Wotke; rozp. z d. 23. grudnia 1887. l. 16.866.
10. Graeser's Schulausgaben classischer Werke, herausgegeben
von Prof. I. Neubauer rozp. z d. 28. grudnia 1887. l. 1994.
11. Die Ernährung des Menschen und seine Nahrungs- und
Genussmittel, F. Strohmeyer; rozp. z d. 18. lutego 1888. l. 16.572.
12. Mitologia dla młodzieży, dr. L. German; rozp. z d. 31.
stycznia 1888. l. 570.
13. Początki arytmetyki i algebry, zastosował do użytku szkół
średnich Wład. Zajączkowski, część 2. na III. i IV. klasę.
14. Ćwiczenia łacińskie dla klasy IV., ułożył Fr. Próchniecki.
15. Zasady zoologii, napisał August Wrześniowski.

Wys. Prezydium c. k. Rady sz. kr. ustanawia reskrytem z d. 10. lipca 1887. l. 236. termin, w przeciągu którego kandydaci stanu nauczycielskiego, posiadający zupełną kwalifikacyą nauczycielską, mogą wnosić do Wys. Sady sz. kr. podania o prenotacyą.

Reskrytem z d. 15. września 1887. l. 9422. ogłosiła Wys. c. k. Rada sz. kr. reskrypt J. E. P. Ministra W. i O. z d. 1. lipca 1887. l. 13.276. względem metody uczenia języka łacińskiego i greckiego.

Reskrytem z d. 20. września 1887. l. 617. ogłosiło Wys. Prezydium c. k. Rady szk. kr. reskrypt Wys. c. k. Ministerstwa W. i O. z d. 28. sierpnia 1887. l. 16.402., jak postępować należy przy examinowaniu uczniów spokrewnionych z członkami grona nauczycielskiego i będących u nich na staneyi.

Reskrytem z d. 25. października 1887. l. 15.616. przypomina Wys. c. k. Rada sz. kr., że żaden uczeń nie może być uwolniony od opłaty szkolnej na podstawie świadectwa, uzyskanego w charakterze prywatysty.

Reskrytem z d. 24. listopada 1887. l. 17.230. przypomina Wys. c. k. Rada sz. kr., że examin poprawczy z jednego przedmiotu jest możliwy tylko przy pierwszym examinie dojrzałości, i że po raz trzeci można składać examin dojrzałości tylko za zezwoleniem Wys. c. k. Ministerstwa W. i O.

Reskrytem z d. 23. grudnia 1887. l. 769. ogłasza Wys. Prezydium c. k. Rady sz. kr. rozporządzenie J. E. P. Ministra W. i O. względem urlopowania dyrektorów i profesorów szkół średnich, wybranych do Rady państwowej.

Reskrytem z d. 24. grudnia 1885. l. 28.679. przypomina Wys. c. k. Rada sz. kr. dyrekcyom, że przy nauce dziejów powszechnych traktować należy w odpowiednich rozmiarach także historią Polski.

Reskrytem z d. 28. grudnia 1887. l. 17.951. ogłasza Wys. c. k. Rada sz. kr. reskrypt Wys. c. k. Ministerstwa W. i O. względem usunięcia z użytku szkolnego i z bibliotek szkolnych dla uczniów książek, drobnym drukiem drukowanych.

N. K l a s y f i k a c y a u c z n i ó w

za II. półrocze 1888.

KLASA I. A.

Stopień celujący:

Makuch Jan.

Stopień pierwszy:

Ambach Abraham

Badecki Józef

Bickel Leisor

Brzeziński Roman

Cymbrykiewicz Józef

Händel Markus

Kobyłecki Jan

Lachowicz Kazimierz

Lewiński Grzegorz

Pohorecki Jan

Rudnicki Edmund

Schreiner Jakób

Segal Arnold
 Sternbach Mayleeh
 Westwalewicz Maryan
 Zacharyasiewicz Antoni
 Stopień drugi otrzymało . . . 3
 Stopień trzeci 10
 Do poprawczego egzaminu przeznaczone uczniów 3

KLASA I. B.

Stopień celujący:

Ilnicki Zenobiusz
 Polak Tadeusz
 Rappaport Naftali

Stopień pierwszy:

Erdmann Dawid
 Gottlieb Izaak
 Grünzweig Saul
 Henefeld Pinkas
 Kornhaber Jonas
 Korolewicz Michał
 Liebermann Pinkas
 Polak Szymon
 Powroźnicki Jarosław
 Przystaszewski Wiktor
 Rudawski Innocenty
 Sieliecki Roman
 Stauffer Henryk
 Stria Bolesław
 Szczepański Władysław
 Wasilewski Zygmunt
 Wiesenberg (Hoendel) Leisor
 Do poprawczego egzaminu przeznaczono uczniów 2
 Stopień drugi otrzymało . . . 5
 Stopień trzeci 5

KLASA II.

Stopień celujący:

Diaków Teodor
 Jachno Jakób
 Medyński Władysław

Stopień pierwszy:

Blaustein Hersz
 Boulangé Jan

Dynysiewicz Maryan
 Erdheim Jakób
 Felsen Jakób
 Friedberg Juliusz
 Gartenberg Dawid
 Iwanusiów Mikołaj
 Kawecki Zygmunt
 Kleinberg Sische

Kobyłecki Jan
 Krysko Antoni
 Kutschera Franciszek
 Lachowicz Jan
 Lachowicz Kazimierz
 Langrock Gedalin
 Łopuszański Juliusz
 Michał Bazyli
 Momot Mikołaj
 Rappaport Juliusz
 Schönbach Izaak
 Sikora Jan
 Sobolski Karol
 Stramer Bernard
 Suchestów Benjamin
 Świtalski Roman
 Trzaskowski Antoni
 Weinreb Salamon
 Wiesenberg Hermann
 Żupnik Jakób

Stopień drugi otrzymało . . . 3
 Stopień trzeci 3
 Do poprawczego egzaminu przeznaczono uczniów 12

KLASA III.

Stopień celujący:

Głąb Jan

Stopień pierwszy:

Aberbach Mechel
 Ausländer Selig
 Baumgarten Mordche
 Bernfeld Natan
 Bittner Franciszek
 Gelehrter Albert
 Gliński Kazimierz
 Hoszowski Ignacy
 Kusznir Stefan

Łobos Wiktor
 Mosiak Mikołaj
 Ortyński Hipolit
 Piechna Stanisław
 Przestaszewski Antoni Czesław
 Rosenberg Dawid
 Rudawski Miron
 Schneider Józef
 Schwarz Jan
 Siokało Julian
 Stauffer Adolf
 Turteltaub Chaim
 Waluch Jan
 Wityk Szymon
 Wolski Ludwik

Do poprawczego examinu prze-
 znaczono uczniów . . . 7
 Stopień drugi otrzymało . . . 9
 Stopień trzeci 2

KLASA IV.

Stopień pierwszy :

Frey Izrael
 Grodzki Zdzisław
 Huczyński Karol
 Hutowicz Dymitr
 Kleinberg Abel
 Kobierski Władysław
 Kryśko Grzegorz
 Liebermann Samuel
 Liss Izaak
 Niemców Adolf
 Rappaport Abraham
 Sternbach Dawid
 Swaryczewski Józef
 Tiegermann Mojżesz
 Wittenberski Bolesław

Do examinu poprawczego prze-
 znaczono uczniów . . . 3
 Stopień drugi otrzymało . . . 5
 Stopień trzeci 3

KLASA V.

Stopień celujący :

Blumenfeld Leon
 Wiesenberg Wolf

Stopień pierwszy :

Bleicher Selig
 Czajkowski Jan
 Friedberg Wilhelm
 Gottlieb Majer
 Janicki Eligiusz
 Kobryn Teodor
 Liebermann Arnold
 Löwenkopf Izaak
 Rappaport Józef
 Rosenwiesen Juda
 Rappaport Mojżesz
 Rosenzweig Samuel
 Schneider Samuel
 Świtalski Mieczysław
 Schechner Mechel
 Sternbach Abraham

Do examinu poprawczego przezna-
 czono uczniów 10
 Stopień trzeci otrzymało . . . 3

KLASA VI.

Stopień celujący :

Hoendel Anszel

Stopień pierwszy :

Brings Joel
 Hoendel Henig
 Gawenda Stanisław
 Ilnicki Włodzimierz
 Iwaniw Antoni
 Kwaśniewski Marcelli
 Lauterbach Jakób
 Lauterbach Fewel
 Lieberman Józef
 Lustig Hermann
 Ortyński Filaret
 Rudnicki Antoni
 Solczak Franciszek
 Sussmann Feiweł
 Wolski Henryk

Do examinu poprawczego przezna-
 czono uczniów 7
 Stopień drugi otrzymał . . . 1
 Stopień trzeci 1

KLASA VII.

Stopień celujący:

Kopacz Jan

Stopień pierwszy:

Borowy Michał

Jesyp Włodzimierz

Kotowicz Teodor

Lindenbaum Izajasz

Rubin Hersch

Spitzmann Leib

Do egzaminu poprawczego prze-

znaczono uczniów . . . 6

KLASA VIII.

Stopień celujący:

Bühn Józef

Cieglewicz Stefan

Czajkowski Roman

Reiter Abraham

Stopień pierwszy:

Allerhand Michał

Bergwerk Aron

Bieńczykowski Antoni

Gartenberg Abraham

Goldberg Efroim

Górka Ignacy

Nord Marek

Oberländer Salamon

Ruhrberg Süsse

Sternbach Dawid

Wagner Jan

Wiesenberg Hersz

Wiesenberg Jonasz

Wolski Florian

O. Ogłoszenie

dotyczące przyszedłego roku szkolnego.

Wpisy uczniów na rok szkolny 1889. odbędą się dnia 29. 30. i 31. sierpnia w kancelaryi gimnazyalnej od 8—12 przed i od 3—5 po południu. Późniejsze zgłaszania nie będą podług okoliczności uwzględniane.

Każdy uczeń obowiązany jest przynieść do wpisu należyte wypełnione nacyonale, świadectwo z ostatniego półrocza i datek na bibliotekę w kwocie 1 złr., oprócz tego każdy nowo wstępujący do zakładu metrykę chrztu lub urodzenia i takse wstępną w kwocie 2 złr. 10 ct. Wszyscy uczniowie wstępujący do I. klasy muszą się poddać egzaminowi wstępnemu, który się 15. i 16. lipca i 1. i 2. września z religii, języka polskiego, niemieckiego i arytmetyki, podług wymagań w IV. klasie szkoły ludowej stawianych odbyć, — poczem dopiero ostateczne przyjęcie do zakładu nastąpi. W razie niezłożenia egzaminu wstępnego zostaną taksa wstępna i datek na bibliotekę zwrócone.

Uczniowie przychodzący z innych zakładów do klas wyższych, winni przynieść świadectwo z ostatniego półrocza, opatrzone uwolnieniem z zakładu, w którym ostatnie półrocze przepędzili.

Rok szkolny 1889. rozpocznie się dnia 3. września wezwaniem św. Duchy w kościele parafialnym o 8. godzinie rano. W dniach 1. i 2. września odbędą się egzamina poprawcze ze wszystkich klas.

Opłata szkolna wynosi za każde półrocze 15 złr. i powinna być w pierwszych sześciu tygodniach każdego półrocza złożona. O postępach i zachowaniu się uczniów mogą rodzice w niedzielę między godziną 10. a 12. zasięgnąć wiadomości w kancelaryi gimnazyalnej; rodziców zamiejscowych zawiadomiamy się pisemnie o złem zachowaniu się lub niepomysłnych postępkach uczniów.

Uczeń chcący uczęszczać na naukę któregośkolwiek z przedmiotów nadobowiązkowych winien wykazać się przyzwoleniem rodziców lub ich zastępców, a przyjeżdżając na naukę obowiązany jest uczęszczać na lekcje regularnie i oddawać się jej z należyłą pilnością. — Opuszczanie lekcji i zaniedbywanie się w przedmiocie wpływa niekorzystnie na ogólną cenzurę z pilności.

Обвѣщеніе дотычаче будущаго школьнаго року.

Внесы учениковъ на будущій школьный рокъ побудутся дня 29. 30. и 31. Серпня, въ канцеляріи гимназ. въдѣ 8—12. передъ и въдѣ .—5. по полудни. Познійшія зголошенія, побѣля обстановъ, не будутъ уваженны.

Каждый ученикъ повиненъ до внесу принести належито выповнено націонале, свѣдоцтво зъ послѣдняго пѣвоча и датокъ на библіотеку въ квотѣ 1 злр. кромѣ того, каждый нововступавшій до закладу, метрику крещенія або уродженія и такеу вступну въ квотѣ 2. злр. 10 кр. Всѣ ученики, до I. класу вступавши, дожныи поддати ся испытову вступному, который въ дняхъ 15. и 16. Липця и 1. и 2. Вересня зъ религіѣ, языка польскаго, нѣмецкаго и аритметики, побѣля вымаганъ въ IV. класѣ школъ народныхъ ставляныхъ, побудутся — почѣмъ ажъ остаточное принате до закладу наступитъ. Въ случаю неособатія при испытѣ вступнымъ, такеа вступна и датокъ на библіотеку звернутя.

Ученики приходячи зъ иншихъ звѣдѣнь до класъ высшихъ дожныи принести свѣдоцтво зъ послѣдняго пѣвоча, заосмотрене увольненемъ зъ закладу, въ котромъ послѣдние пѣвоче перевели.

Рокъ школьный 1889. розпочне ся дня 3. Вересня возвансмъ св. Духа въ лат. костелѣ нараѣальнымъ о 8. годикъ рано. Въ дняхъ 1. и 2. Вересня по полудни побудутъ ся испыты поправчи зъ всѣхъ класъ.

Оплата школьна выносить за кожде пѣвоче 15. злр. и повинна бути въ первыхъ шестіохъ тыжняхъ каждого пѣвоча зложена.

О постунахъ и захованю учениковъ могутъ родичѣ въ недѣлю межн 10.

12. годиною засягати вѣдомости въ дирекціи гимназіальной; родичей замѣсывыхъ заведомлися о вѣдѣ захованю або о вкористномъ поступѣ учениковъ нислѣменно.

Ученикъ хотячий брати удѣлъ въ которѣмбудъ зъ предметѣ обовязковыхъ повиненъ выказати ся призволенсмъ родичей або ихъ заступниковъ и принятыи на науку, обовязанныи посѣщати лекціи правильно и занимати ся предметомъ прилѣжно. Опущане лекцій и занедбане предмета, выливас вкористно на загальну цензуру зъ пильности

Drohobycz, dnia 15. lipca 1888.

Wojciech Biesiadzki,
dyrektor gimnazjum.

WIERSZ
na pamiątkę 40-letniego jubileuszu
panowania
CESARZA FRANCISZKA JÓZEFA I.

Radosne płyną w całym kraju wieści,
Hymn Bogu śpiewa świątyni naszych dzwon,
Bo dzisiaj lat już minęło czterdzieści,
Odkąd Habsburgów objął Cesarz tron.

Gdy jęczą, giną obcych państw poddani,
Bo ponad prawo sterczy gwałtu dłoń,
My tu Cesarza kochając - kochani
Jak wdzięczna dziatwa tulimy się doń.

Szlachetny Władca nad swój tron wspaniałą
Dla swych poddanych raczył sztandar wznieść,
Sztandar, którego hasłem pełnem chwały:
„Uczuciom ludów i ich mowie cześć!”

Dlatego więc dziś w Polsce i na Rusi
Wznosi się w niebo dziękczynienia głos,
Bo każdy, nawet wróg nam przyznać musi,
Że błogosławion ludów Austrii los.

Szczęśliwe dziś serce nadzieją się pieści,
Że Cesarzowi i ludom Bóg rad,
I że w miłości swój jeszcze czterdzieści
Wśród wdzięcznych dzieci da mu władać lat.

M. S.

