

BIBLIOTEKA
PW
SP.
KRAKÓW

34.753

Kranz
Geometria

CY KRANZ

GEOMETRYA POGLĄDOWA

PODRĘCZNIK

NA KLASĘ 2.

GIMNAZYÓW, GIMNAZYÓW REALNYCH
I SZKÓŁ REALNYCH

WYDANIE 2.

CENA 1 K 40 H.

KRAKÓW

1914



J. Dyakowska

IGNACY KRANZ

GEOMETRYA POGLĄDOWA

PODREČZNIK

NA KLASĘ 2.

GIMNAZYÓW, GIMNAZYÓW REALNYCH
I SZKÓŁ REALNYCH

WYDANIE 2.

CENA 1 K 40 H.

KRAKÓW

1914



34.753

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

Symetria utworów geometrycznych.

§ 1.	Plaszczyzny i osie symetrii. Utwory symetryczne	1
§ 2.	Symetralna odcinka	5
§ 3.	Symetralna kąta	6
§ 4.	Własności trójkąta równoramiennego	7

ROZDZIAŁ II.

Kąty, których ramiona są do siebie parami: a) równoległe, b) prostopadłe 13

ROZDZIAŁ III.

Trójkąt.

§ 1. Określenia	18
§ 2. Kąty trójkąta	19
§ 3. Związki między bokami i kątami trójkąta	20

ROZDZIAŁ IV.

Kreślenie trójkątów i ich przystawanie.

§ 1.	Określenia	25
§ 2.	Przypadek I. kroślenia i przystawiania trójkątów	26
§ 3.	» II. » » » »	28
§ 4.	» III. » » » »	29
§ 5.	» IV. » » » »	31

ROZDZIAŁ V.

Czworokąty.

§ 1. Określenia	32
§ 2. Własności równoległoboków	35
§ 3. Własności trapezu i deltoidu; równoległe w trójkacie	37

ROZDZIAŁ VI.

Wielokąty.

	Str.
§ 1. Określenia	42
§ 2. Kąty wielokąta	43
§ 3. Wielokąt wpisany w koło i opisany na kole	45
§ 4. Własności wielokąta umiarowego	45
§ 5. Kreślenie i przystawanie wielokątów	47

ROZDZIAŁ VII.

Graniastosłup. Ostrosłup.

§ 1. Graniastosłup	49
§ 2. Ostrosłup	52

ROZDZIAŁ VIII.

Własności koła.

§ 1. Cięciwa i styczna	56
§ 2. Kąty obwodowe	58
§ 3. Położenie dwu kół względem siebie	60

ROZDZIAŁ IX.

Walec. Stożek. Kula.

§ 1. Walec	64
§ 2. Stożek	66
§ 3. Kula	67



ROZDZIAŁ I.

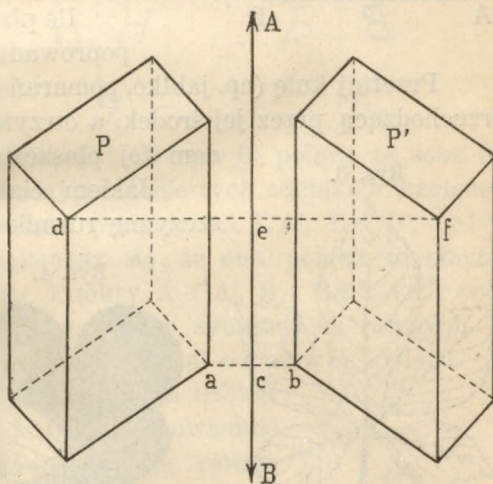
SYMETRYA UTWORÓW GEOMETRYCZNYCH.

§ 1.

Płaszczyzny i osie symetrii. Utwory symetryczne.

1. Dwa jednakowe pudełka zapalek P i P' (rys. 1) postaw na stole po obu stronach deszczuleczki pionowej AB tak, aby odpowiednie punkty obu pudełek np. a i b , d i f znajdowały się w równej od deszczuleczki odległości i aby odległości te tworzyły proste (ab i df prostopadłe do AB ; $ac = bc$, $de = fe$). Tak ustawione dwa pudełka nazywamy ciałami symetrycznymi względem deszczuleczki, deszczuleczkę zaś płaszczyzną symetrii obu pudełek.

Rys. 1.

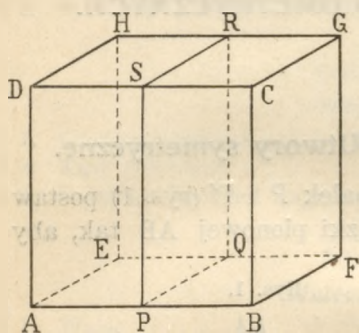


Podobnie przedmiot i jego obraz w zwierciadle płaskim są względem zwierciadła ciałami symetrycznymi; przednie lub tylne koła u wozu są symetryczne względem płaszczyzny, poprowadzonej przez dyszel prostopadłe do osi kół i t. d.

a) Dwa jednakowe kałamarze, b) obie ręce, zwrócone dłońmi ku sobie, umieść po obu stronach np. szyby szklanej tak, aby były ciałami symetrycznymi względem szyby.

2. Gdybyś przez środek czoła, nosa i środek głowy poprowadził płaszczyznę, to zauważyłbyś, że np. lewe oko, ucho i t. d. znajdują się w tej samej odległości od płaszczyzny, co prawe oko, ucho i t. d. i że proste, łączące uszy i inne odpowiednie części głowy, są do tej płaszczyzny prostopadłe.

Rys. 2.



Płaszczyznę tę nazywamy płaszczyzną symetrii głowy, a głowę ciałem symetrycznym względem tej płaszczyzny.

Trzy równoległe do siebie krawędzie sześcianu np. AB, DC i HG (rys. 2) przepołów i przez proste np. PS i RS poprowadź płaszczyznę, a podzielisz sześcian na dwie części względem tej płaszczyzny symetryczne.

Ile płaszczyzn symetrii możesz poprowadzić w sześcianie?

Przetnij kulę (np. jabłko, pomarańczę) dowolną płaszczyzną, przechodzącą przez jej środek, a otrzymasz dwie półkule, względem tej płaszczyzny symetryczne.

Rys. 3.



Jakiem ciałem ze względu na płaszczyznę równika lub południka jest ziemia, uważana za kulę?

Rys. 4.



Rys. 5.



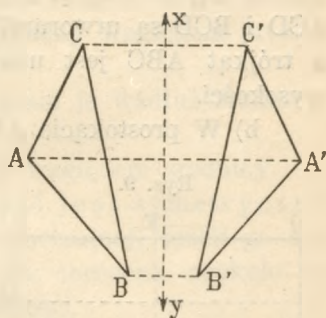
Wskaż płaszczyznę symetrii: liścia (rys. 3), kwiatu (rys. 4), owadu (rys. 5) i t. d.

3. Na kartce papieru narysuj utwór płaski np. trójkąt ABC (rys. 6) i kartkę tę zegnij wzdłuż prostej xy tak, żeby po prawej stronie tego zgięcia odbił się rysunek, sporządzony po lewej stronie prostej xy , a otrzymasz trójkąt $A'B'C'$, zwany trójkątem symetrycznym do trójkąta ABC względem osi xy , nazwanej osią symetrii.

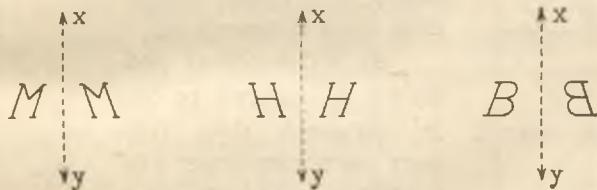
Symetrycznymi względem osi zwiemy zatem takie dwa utwory płaskie, które po obrocie jednego z nich naokoło tej osi o 180° nakrywają się.

Symetrycznymi utworami są np. dwie litery M lub H, litera B i odwrócone B (rys. 7) i t. d.

Rys. 6.



Rys. 7.

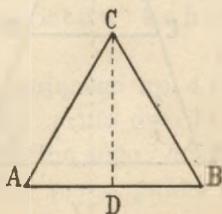


Punkty A i A' , B i B' , C i C' (rys. 6) połącz ze sobą odcinkami AA' , BB' , CC' , zbadaj położenie tych odcinków względem prostej xy i zmierz odległości punktów: A i A' , B i B' , C i C' od osi symetrii, a przekonasz się, że ona połowi te odcinki i jest do nich prostopadła. Punkty A i A' , B i B' , C i C' , położone na prostej po obu stronach osi symetrii w równych od niej odległościach, nazywamy punktami odpowiednimi.

Ponieważ trójkąt ABC nakrywa trójkąt $A'B'C'$, przeto odpowiednie boki i odpowiednie kąty tych dwu trójkątów są sobie równe. Utwory takie nazywamy przystającymi.

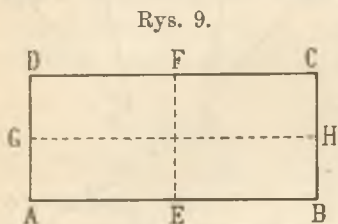
4. a) Na kartce papieru nakreśl trójkąt równoboczny ABC i zapomocą ekierki jego wysokość CD (rys. 8). Trójkąt ten wytnij z papieru, złam go wzdłuż wysokości, a prze-

Rys. 8.



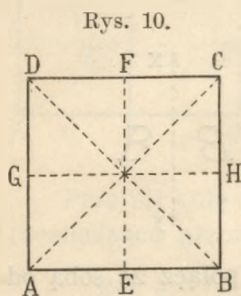
konasz się, że trójkąt ACD nakryje trójkąt BCD. Trójkąty więc ACD i BCD są utworami symetrycznymi względem prostej CD, a trójkąt ABC jest utworem symetrycznym względem swej wysokości.

b) W prostokącie ABCD (rys. 9) nakreśl proste EF i GH, przechodzące przez środki przeciwległych boków, i przekonaj się, że jest on względem nich symetryczny.

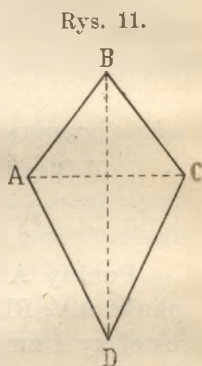


W prostokącie ABCD (rys. 9) nakreśl jeszcze prostą AC, wzdłuż niej złam ten prostokąt i przekonaj się, czy jest on symetryczny względem tej prostej.

c) W kwadracie ABCD (rys. 10) nakreśl: 1) proste, przechodzące przez środki przeciwległych boków, 2) obie przekątne — i zbadaj, czy on jest symetryczny względem tych czterech osi.

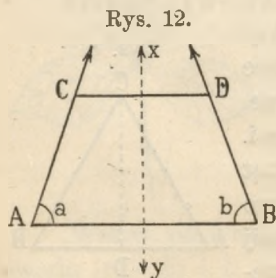


d) Na wspólnej podstawie AC nakreśl po obu jej stronach dwa trójkąty równoramienne: ABC i ADC (rys. 11), złam papier wzdłuż prostej BD, a zobaczysz, że utwór



geometryczny ABCD jest symetryczny względem tej prostej.

Czy utwór ten jest także symetryczny względem prostej AC? Kiedy byłby symetryczny?



e) Z punktów końcowych odcinka AB (rys. 12) nakreśl dwa równe kąty a i b , położone po tej samej stronie tego odcinka, wynoszące np. po 70° , następnie odmierz $AC = BD$ i połącz punkty C i D prostą, a otrzymasz utwór geometryczny ABDC. Gdy utwór ten wytniesz z papieru i złamiesz go wzdłuż prostej xy, przechodzącej przez środki

boków AB i CD, to przekonasz się, że on jest względem niej symetryczny.

Czy utwór ten jest także symetryczny względem prostej łączącej środki boków AC i BD?

f) Wytnij z kartki papieru koło, złam je wzdłuż średnicy, a zobaczysz, że półkola się nakryją.

Koło jest utworem symetrycznym względem średnicy.

Utwór geometryczny płaski jest symetryczny względem prostej (osi symetrii lub symetralnej), jeżeli go ona dzieli na dwie części, z których jedna, obrócona naokoło tej prostej o 180° , nakryje drugą w zupełności.

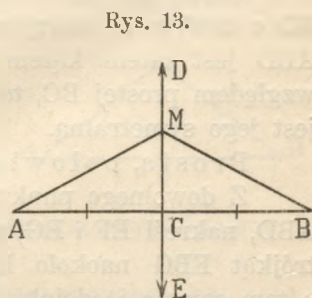
§ 2.

Symetralna odcinka.

1. Nakreśl odcinek AB, mający np. 4 cm długości (rys. 13), a w jego środku prostą DE, prostopadłą do AB. Obróć następnie odcinek AC około prostej DE o 180° , to on nakryje odcinek BC. Odcinek AB jest zatem symetryczny względem prostej DE, to znaczy, że ona jest jego symetralną.

Symetralną odcinka jest prostopadła do odcinka, narysowana w jego środku.

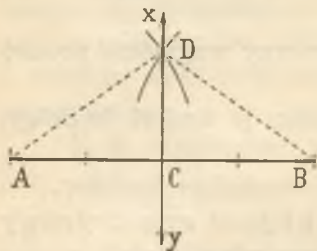
Połącz dowolny punkt M, położony na symetralnej DE, z punktami końcowymi odcinka AB i obróć trójkąt AMC około DE o 180° , to punkty A i B się nakryją (dlaczego?), a tem samem nakryją się AM i BM; zatem $AM = BM$.



Każdy punkt, położony na symetralnej odcinka, jest równo oddalony od punktów końcowych tego odcinka.

2. Z punktów końcowych odcinka AB, mającego np. 4 cm długości (rys. 14), zatocz tą samą rozwartością cyrkla dwa łuki, przecinające się w punkcie D i nakreśl symetralną tego odcinka, a zobaczysz, że symetralna ta przechodzi przez punkt D.

Rys. 14.



Do tego samego dojść możesz i w ten sposób: Po nakerśleniu odcinka AB (rys. 14) i punktu D zegnij papier tak, aby odcinki AC i BC się nakryły, to na zgięciu tem (t. j. na symetralnej odcinka AB) znajdzie się punkt D.

Ponieważ $AD = BD$, przeto możemy powiedzieć:

Jeżeli punkt jakiś jest równo oddalony od punktów końcowych odcinka, to symetralna tego odcinka przez ten punkt przechodzi.

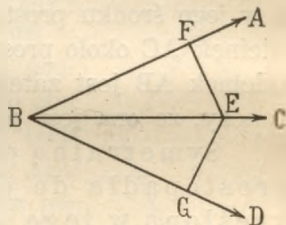
§ 3.

Symetralna kąta.

1. Zapomocą kątomierza nakerśl dwa równe kąty o wspólnym wierzchołku i ramieniu np. ABC i CBD, rys. 15. O prostej BC mówimy, że połowi kąt ABD.

Obróć kąt ABC naokoło ramienia BC o 180° , to on nakryje kąt DBC; kąt ABD jest zatem kątem symetrycznym względem prostej BC, to znaczy, że ona jest jego symetralną.

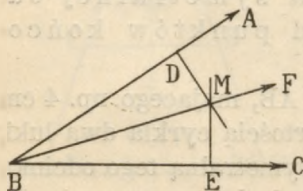
Rys. 15.



Prosta, połowiąca kąt, jest jego symetralną.

Z dowolnego punktu E, położonego na symetralnej kąta ABD, nakerśl EF i EG, prostopadłe do ramion tego kąta, i obróć trójkąt EBG naokoło BE o 180° , to on nakryje trójkąt EBF, a tem samem i odcinki EG i EF się nakryją.

Rys. 16.



Każdy punkt, położony na symetralnej kąta, jest równo oddalony od jego ramion.

2. Na ramionach kąta ABC, mającego np. 36° (rys. 16), odmierz np. $BD = BE$ i zapomocą ekierki nakerśl w punktach D i E prostopadłe do ramion tego kąta. Zapomocą cyrkla mo-

żesz się przekonać, że punkt przecięcia się tych prostopadłych M leży w równej odległości od ramion kąta: $MD = ME$. Jeżeli nakerślisz kąt $ABF = 18^\circ$, to tem samem poprowadzisz symetralną kąta ABC t. j. BF i zobaczysz, że symetralna ta przechodzi przez punkt M .

Do tego samego dojść możesz i w ten sposób: Po wyznaczeniu punktu M wytnij z papieru kąt ABC , złóż papier tak aby ramiona BA i BC się nakryły, a zobaczysz, że na zgięciu BF (t. j. na symetralnej kąta ABC) leży punkt M .

Jeżeli jakiś punkt jest równo oddalony od ramion kąta, to symetralna tego kąta przechodzi przez ten punkt.

§ 4.

Własności trójkąta równoramiennego.

W trójkącie równoramiennym ABC (rys. 17) nakerśł symetralną podstawy AB t. j. DE . Czy prosta ta przechodzi przez wierzchołek trójkąta C ? Dlaczego? Ile stopni wynosi kąt BDC ? Czem więc jest odcinek CD w trójkącie ABC ?

Symetralna podstawy trójkąta równoramiennego jest zarazem jego wysokością.

Trójkąt ACD obróć naokoło CD o 180° , a on nakryje trójkąt BCD .

Jakim utworem geometrycznym jest trójkąt równoramienny? Jaką linią kąta ACB jest odcinek CD ?

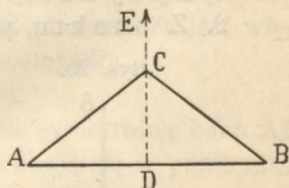
Symetralna podstawy trójkąta równoramiennego jest zarazem symetralną jego kąta wierzchołkowego.

Zestawiając powyższe wywody powiemy:

a) Trójkąt równoramienny jest trójkątem symetrycznym, a osią symetrii jest jego wysokość.

b) Symetralna podstawy trójkąta równoramiennego, symetralna jego kąta wierzchołkowego i wysokość trójkąta są tym samym odcinkiem.

Rys. 17.

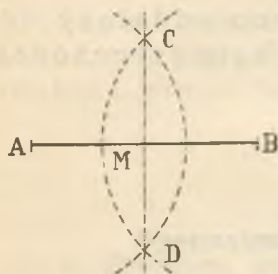


Zadania.

1. a) Nakreślić symetralną danego odcinka.

Aby nakreślić symetralną odcinka AB (rys. 18), potrzeba znaleźć dwa punkty, równo oddalone od punktów końcowych tego odcinka. Jeżeli więc z punktów A i B zatoczysz tym samym promieniem łuki, to ich punkty przecięcia się C i D są równo oddalone od punktów A i B; symetralną więc odcinka

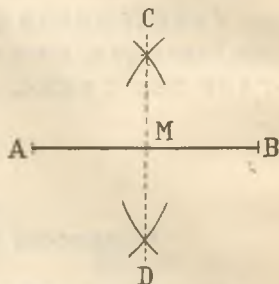
Rys. 18.



AB jest prosta CD, przechodząca przez te dwa punkty.

Zwykle nie zatacza się łuków, uwidoczniomych na rys. 18., tylko ich części, przecinające się jak na rys. 19.

Rys. 19.

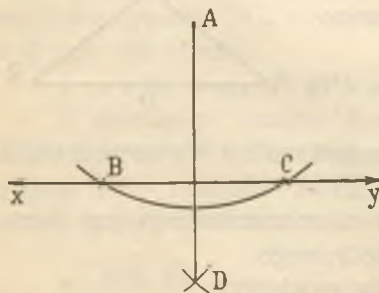


Ponieważ $AM = BM$, przeto rozwiązanie zadania powyższego jest zarazem rozwiązaniem zadania:

b) Dany odcinek przepołowić.

2. Z punktu, położonego obok prostej, nakreślić do niej prostopadłą.

Rys. 20.



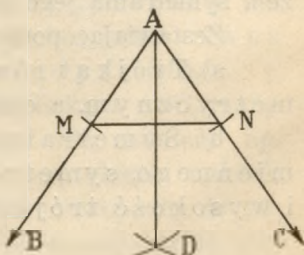
Z punktu A, położonego obok prostej xy (rys. 20), zakreśl dowolnym promieniem łuk, przecinający xy w dwu punktach: B i C, i z punktów tych jakimkolwiek promieniem zatocz łuki, przecinające się w punkcie D. Prosta

AD jest prostopadła do xy (dlaczego?).

3. Nakreślić symetralną danego kąta.

Aby nakreślić symetralną kąta BAC, odmierz na jego ramionach równe odcinki np. AM i AN (rys. 21) i z punktów

Rys. 21.

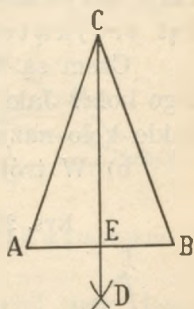


M i N zakreśl jakimkolwiek promieniem łuki, przecinające się w punkcie D. Prosta AD, symetralna podstawy trójkąta równoramiennego AMN, jest zarazem symetralną kąta wierzchołkowego BAC.

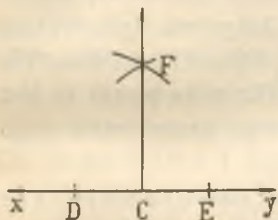
4. Zapomocą cyrkla i linealu nakreślić wysokość trójkąta równoramiennego.

Gdy w trójkącie równoramiennym ABC (rys. 22) z punktów końcowych podstawy A i B zakreślisz dowolnym promieniem dwa łuki, przecinające się w punkcie D, a następnie połączysz punkty C i D prostą, otrzymasz żadaną wysokość CE (dlaczego?).

Rys. 22.



Rys. 23.



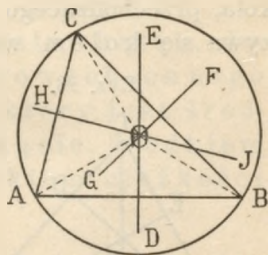
5. Z punktu, położonego na prostej, nakreślić (cyrklem) do niej prostopadłą.

Gdy z punktu C, położonego na prostej xy, odmierzysz $CD = CE$ (rys. 23), a z punktów D i E zatoczysz dowolnym promieniem dwa łuki, przecinające się w punkcie F, to prosta FC jest symetralną odcinka DE (dlaczego?), jest więc do prostej xy prostopadłą.

6. Osobliwe punkty trójkąta.

a) W trójkącie ABC (rys. 24) nakreśl symetralną boku AB i symetralną boku BC. Symetralne te przecinają się w punkcie O. Ponieważ punkt ten leży na symetralnej odcinka AB, przeto jest on równo oddalony od punktów A i B, t. j. $AO = BO$; podobnie $BO = CO$, ponieważ punkt O leży na symetralnej odcinka BC. Skoro $AO = BO$ i $BO = CO$, przeto także $AO = CO$; a że punkt O leży w równej odległości od punktów końcowych boku AC, przeto symetralna tego boku przechodzi przez ten punkt.

Rys. 24.



Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od wierzchołków trójkąta.

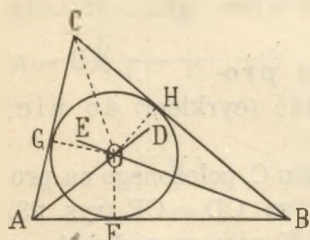
Punkt ten nazywamy pierwszym osobliwym punktem trójkąta.

Ponieważ $OA = OB = OC$, przeto odcinki te są promieniami koła, przechodzącego przez wierzchołki trójkąta. Koło takie nazywamy kołem opisanem na trójkącie, a trójkąt trójkątem wpisanym w koło.

Czem są boki trójkąta wpisanego w koło w stosunku do tego koła? Jaki trójkąt nazywamy trójkątem wpisanym w koło? Jakie koło nazywamy kołem opisanem na trójkącie?

b) W trójkącie ABC nakreśl symetralne dwu jego kątów, np. BAC i ABC (rys. 25); symetralne te:

Rys. 25.



AD i BE przecinają się w punkcie O. Ponieważ punkt ten leży na symetralnej kąta BAC, przeto jest on równo oddalony od ramion AB i AC, t. j. $OF = OG$; podobnie $OF = OH$, ponieważ punkt O leży na symetralnej kąta ABC. Skoro $OF = OG$ i $OF = OH$, przeto i $OG = OH$; a że punkt O jest

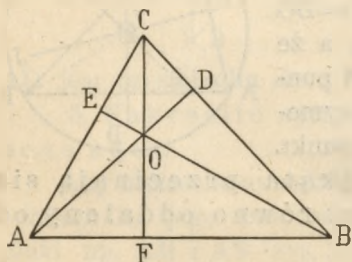
równy oddalony od ramion kąta ACB, przeto symetralna tego kąta przez ten punkt przechodzi.

Symetralne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od boków tego trójkąta.

Punkt ten nazywamy drugim osobliwym punktem trójkąta.

Ponieważ $OF = OG = OH$, przeto proste te są promieniami koła, przechodzącego przez punkty F, G i H. Koło takie nazywa się kołem wpisanem w trójkąt, a trójkąt trójkątem opisanym na kole.

Rys. 26.



Czem są boki trójkąta opisanego na kole w stosunku do tego koła? Jaki trójkąt nazywamy trójkątem opisanym na kole? Jakie koło nazywa się kołem wpisanem w trójkąt?

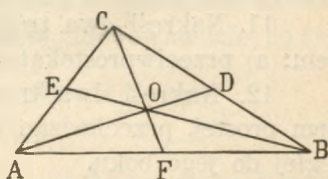
c) W dowolnym trójkącie ABC (rys. 26) nakreśl trzy wysokości:

AD, BE i CF, to zobaczysz, że one przecinają się w jednym punkcie O.

Punkt ten nazywa się trzecim osobliwym punktem trójkąta.

d) Środki boków dowolnego trójkąta ABC (rys. 27) połącz odcinkami z przeciwległymi wierzchołkami, a otrzymasz trzy proste: FC, DA i EB, zwane dośrodkowymi trójkąta. Dośrodkowe te przecinają się w jednym punkcie O.

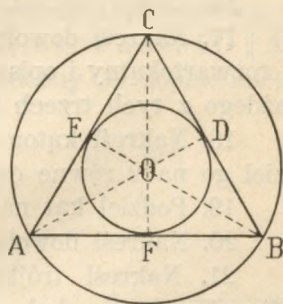
Rys. 27.



Jest to czwarty osobliwy punkt trójkąta, zwany środkiem ciężkości trójkąta.

7. W trójkącie równobocznym ABC nakreśl trzy jego wysokości AD, BE i CF (rys. 28). Uważając ten trójkąt za równoramienny i biorąc za podstawę raz bok BC, drugi raz AC, trzeci raz AB, możesz powiedzieć (§ 4.):

Rys. 28.



a) Każda wysokość trójkąta równobocznego jest symetralną jego boku i jego kąta.

Ponieważ punkt przecięcia się symetralnych boków trójkąta jest środkiem koła opisanego na trójkącie, punkt przecięcia się symetralnych kątów trójkąta jest środkiem koła wpisanego w trójkąt, wysokość zaś trójkąta równobocznego symetralną jego boku, jego kąta i dośrodkową, przeto:

b) Symetralne boków, symetralne kątów, dośrodkowe i wysokości trójkąta równobocznego przechodzą przez ten sam punkt, który jest środkiem koła opisanego na tym trójkącie, środkiem koła wpisanego w trójkąt i środkiem ciężkości trójkąta.

8. Dwa jednakowe: a) sześciiany, b) piórniki, c) cyrkle i t. p. ustaw tak, aby względem kartki papieru były ciałami symetrycznymi.

9. Wskaż na przedmiotach, znajdujących się w sali szkolnej, płaszczyzny symetrii.

10. Dana jest prosta i odcinek; nakreśl odcinek drugi, któryby z danym odcinkiem leżał symetrycznie względem tej prostej. Ile tu może być przypadków?

11. Nakreśl dwa trójkąty prostokątne, symetryczne względem: a) przeciwprostokątnej, b) przyprostokątnej.

12. Nakreśl dwa trójkąty ostrokątne, symetryczne względem prostej, przechodzącej przez wierzchołek trójkąta i równoległej do jego boku.

13. Nakreśl dwa trójkąty rozwartokątne, symetryczne względem prostej, położonej poza polem trójkąta i równoległej do boku, leżącego naprzeciw kąta rozwartego.

14. Wskaż na książce, kartce papieru i t. p. osie symetrii.

15. Nakreśl w pomniejszeniu odcinek długości: a) 5 m, b) 7 m, c) 4'6 dm i przepołów go.

16. Dany odcinek podziel na: a) 4, b) 8 równych części.

17. Nakreśl dowolny trójkąt: a) ostrokątny, b) prostokątny, c) rozwartokątny i opisz na nim koło. Jakie położenie ma środek każdego z tych trzech kół ze względu na trójkąt?

18. Nakreśl kątomierzem kąt: a) 60° , b) 95° , c) 154° i podziel go na 2 równe części.

19. Podziel kąt na: a) 4, b) 8 równych części.

20. Nakreśl dowolny trójkąt i wpisz weń koło.

21. Nakreśl trójkąt: a) prostokątny, b) równoramienny i 1) opisz na nim koło, 2) wpisz weń koło.

22. Nakreśl trzy wysokości w trójkącie: a) równobocznym, b) równoramiennym, c) różnobocznym, d) ostrokątnym, e) prostokątnym, f) rozwartokątnym i sprawdź, że te trzy wysokości przecinają się w jednym punkcie.

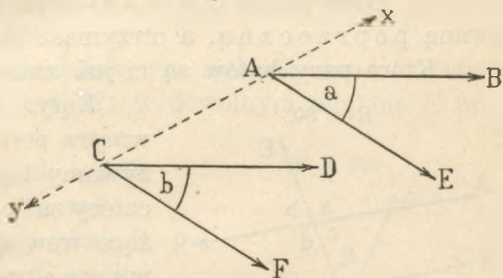
23. Znajdź wszystkie cztery osobliwe punkty w trójkącie: a) rozwartokątnym, b) równoramiennym, c) różnobocznym.

ROZDZIAŁ II.

Kąty, których ramiona są do siebie parami: a) równoległe, b) prostopadłe.

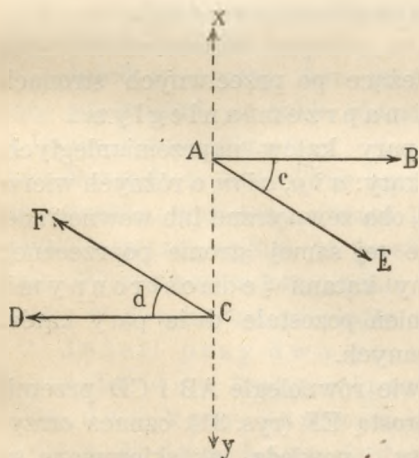
1. a) Z punktów np. A i C nakreśl dwa promienie do siebie równoległe AB i CD (rys. 29 a), następnie równoległe do siebie promienie AE i CF, a otrzymasz dwa kąty a i b , których ramiona są do siebie równoległe i zgodnie skierowane. Gdy kąty te wytniesz z papieru i odpowiednio położysz na sobie, to zobaczysz, że one się nakryją: $\sphericalangle a = b$.

Rys. 29 a.

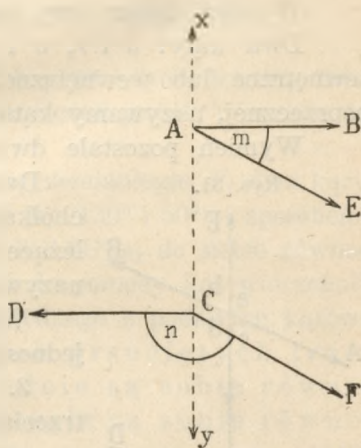


b) Nakreśl dwa kąty c i d (rys. 29 b), których ramiona są do siebie równoległe i przeciwnie skierowane: $CD \parallel AB$, $CF \parallel AE$, a przekonasz się w sposób podobny do poprzedniego, że i te kąty są sobie równe: $\sphericalangle c = d$.

Rys. 29 b.



Rys. 29 c.



c) Nakreśl jeszcze dwa kąty m i n (rys. 29 c), których ramiona są do siebie równoległe i to tak, aby jedna para ramion: AE i CF była zgodnie, a druga: AB i CD przeciwnie skierowana.

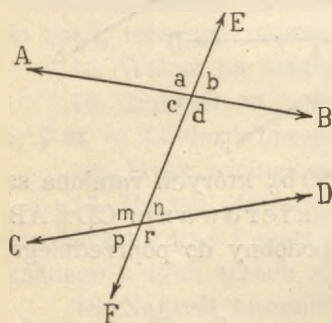
Jeżeli kąt m przysuniesz do kąta n tak, aby ich wierzchołki padły na siebie, a ramię AE leżało na ramieniu CF , wówczas ramiona AB i CD utworzą prostą; zatem $\sphericalangle m + n = 180^\circ$.

Kąty, których równoległe ramiona są parami zgodnie lub przeciwnie skierowane, są sobie równe; kąty zaś, których jedna para ramion jest zgodnie a druga niezgodnie skierowana, wynoszą razem 180° .

2. Dwie proste AB i CD (rys. 30) przetnij trzecią EF , zwaną poprzeczną, a otrzymasz osiem kątów.

Które pary kątów są ci już znane? Wymień je!

Rys. 30.



Kąty: a, b, p i r , położone zewnątrz przeciętych AB i CD , nazywamy kątami zewnętrznymi, cztery zaś pozostałe: c, d, m i n , leżące wewnątrz przeciętych, kątami wewnętrznymi.

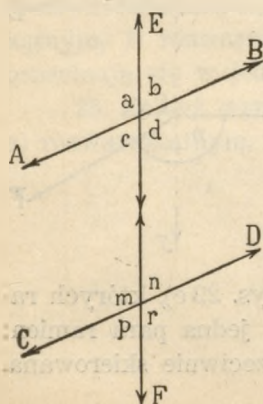
Dwa kąty: a i m o różnych wierzchołkach, jeden zewnętrzny, drugi wewnętrzny, leżące po tej samej stronie poprzecznej, nazywamy kątami odpowiednimi.

Wymień dalsze trzy pary kątów odpowiednich.

Dwa kąty: a i r, c i n o różnych wierzchołkach, oba zewnętrzne lub wewnętrzne, leżące po przeciwnych stronach poprzecznej, nazywamy kątami naprzemianległymi.

Wymień pozostałe dwie pary kątów naprzemianległych.

Rys. 31.



Dwa kąty: a i p, c i m o różnych wierzchołkach, oba zewnętrzne lub wewnętrzne, leżące po tej samej stronie poprzecznej, nazywamy kątami jednostronnymi.

Wymień pozostałe dwie pary kątów jednostronnych.

3. Dwie równoległe AB i CD przetnij trzecią prostą EF (rys. 31), oznacz otrzymane kąty i powiedz, jak skierowane są ramiona kątów odpowiednich, np. a i m , jak kątów naprzemianległych, np. c i n , a jak kątów jednostronnych, np. a i p .

Ponieważ równoległe ramiona każdej pary kątów odpowiednich są zgodnie, każdej pary kątów naprzemianległych przeciwnie skierowane, jedna zaś para ramion kątów jednostronnych jest zgodnie, a druga przeciwnie skierowana, przeto możemy powiedzieć:

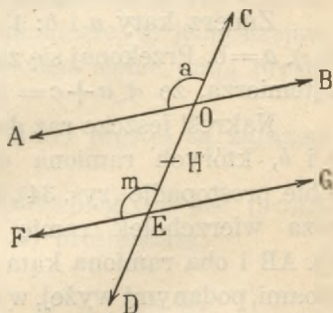
Przy dwu równoległych przeciętych trzecią tak kąty odpowiednie jak i kąty naprzemianległe są parami sobie równe, a każda para kątów jednostronnych wynosi 180° .

4. Na papierze prześwietlającym nakreśl dwie przecinające się proste AB i CD (rys. 32), w dowolnym punkcie E prostej CD odmierz kąt $m = a$ i przedłuż ramię FE poza wierzchołek E.

Rys. 32.

Nazwij parę kątów a i m !

Prostą CD przetnij w punkcie H i przesuwaj ją wraz z linią FG wzdłuż prostej CH, a zobaczysz, że gdy punkt E padnie na punkt O, wówczas i prosta FG padnie na prostą AB. Ponieważ proste AB i FG, przysunięte do siebie bez zmiany ich kierunku, nakrywają się, przeto są one do siebie równoległe ¹⁾.



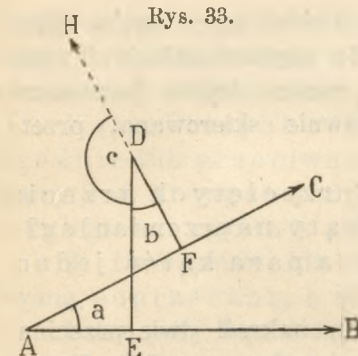
Jeżeli więc przy dwu prostych przeciętych trzecią dwa kąty odpowiednie są sobie równe, wówczas proste przecięte są do siebie równoległe.

Nakreśl: 1) dwa równe kąty naprzemianległe, 2) dwa kąty jednostronne, wynoszące razem 180° (np. 130° i 50°), i sposobem, podanym wyżej, wykaż, że proste AB i FG są do siebie równoległe. W pierwszym przypadku weź do pomocy kąt wierzchołkowy, w drugim kąt przyległy do jednego z podanych kątów.

Jeżeli przy dwu prostych przeciętych trzecią albo dwa kąty odpowiednie są sobie równe, albo dwa kąty naprzemianległe są sobie równe, albo też dwa kąty jednostronne wynoszą 180° , wówczas proste przecięte są do siebie równoległe.

¹⁾ Zob. Geom. na klasę I. str. 20. § 3. ust. 2.

Rys. 33.



5. Nakreśl kąt BAC (rys. 33), następnie z punktu D zapomocą ekiejki poprowadź prostopadłą DE do ramienia AB i prostopadłą DF do AC, a otrzymasz kąt b . Kąt ten wytnij z papieru i połóż go odpowiednio na kącie a , to zobaczysz, że one się nakryją: $\sphericalangle a = b$.

Przedłużwszy DF poza punkt D, otrzymasz kąt c , który tworzy z kątem b kąt półpełny. Ponieważ $\sphericalangle c + b = 180^\circ$, przeto także $\sphericalangle c + a = 180^\circ$.

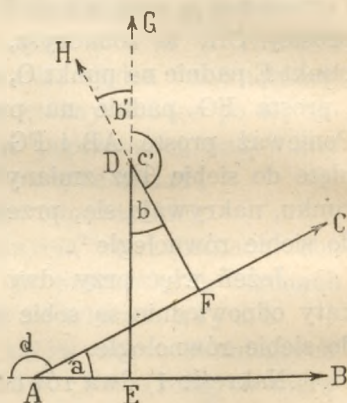
Wykaż to samo przez przyłożenie kąta a do kąta c .

Zmierz kąty a i b : 1) cyrklem, 2) kątomierzem i sprawdź, że $\sphericalangle a = b$. Przekonaj się zapomocą kątomierza, że $\sphericalangle a + c = 180^\circ$.

Nakreśl jeszcze raz dwa kąty: a i b , których ramiona stoją na sobie prostopadle (rys. 34), przedłuż poza wierzchołek ramię kąta a np. AB i oba ramiona kąta b , i sposobami, podanymi wyżej, wykaż, że: $\sphericalangle a = b'$, $\sphericalangle d = c'$, $\sphericalangle a + c' = 180^\circ$, $\sphericalangle d + b' = 180^\circ$.

Kąty, których ramiona są do siebie parami prostopadle, są sobie równe, jeżeli oba kąty są ostre lub rozwarte; a wynoszą 180° , jeżeli jeden kąt jest ostry, a drugi rozwarty.

Rys. 34.



Zadania.

1. Nakreśl dwie proste przecięte trzecią, naznacz jeden z ośmiu kątów literą a i wymień: a) jego kąt wierzchołkowy, b) oba kąty przyległe, c) jego kąt odpowiedni, naprzemianległy i jednostronny.

2. W zadaniu poprzednim kąt $\alpha = 76^\circ$, a jego kąt odpowiedni 125° ; oblicz inne kąty.

3. Nakreśl dwie proste przecięte trzecią, zmierz kątomierzem dwa kąty: a) odpowiednie, b) naprzemianległe, c) jednostronne, a następnie oblicz, ile stopni wynosi każdy z pozostałych sześciu kątów.

4. Jeden z kątów, utworzonych przez dwie równoległe przecięte trzecią, wynosi: a) 39° , b) $68^\circ 16'$, c) $105^\circ 58' 54''$; oblicz pozostałe kąty.

5. Nakreśl dwie równoległe przecięte trzecią, zmierz kątomierzem jeden z kątów i oblicz każdy z siedmiu pozostałych kątów.

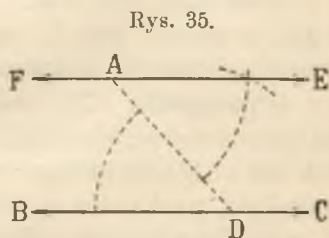
6. Z dwu dowolnych punktów prostej pionowej nakreśl dwa kąty: a) odpowiednie, b) naprzemianległe, c) jednostronne, mające 70° i 110° . Jakie położenie względem siebie mają proste, przecięte pionową?

7. Wykaż, że prostopadłe do tej samej prostej są zarazem do siebie równoległe.

8. Wykaż, że gdy jedna z dwu równoległych jest prostopadłą do trzeciej, to i druga jest do niej prostopadłą.

9. Przez punkt A, położony obok prostej BC (rys. 35), nakreśl równoległą do tej prostej.

Przez punkt A poprowadź dowolną prostą, która przecina BC w punkcie D i nakreśl $\angle DAE = \angle ADB$. Proste FE i BC są do siebie równoległe, gdyż tworzą równe kąty naprzemianległe.



10. Rozwiąż zadanie 9. przy pomocy kątów odpowiednich.

11. Rozwiąż zadanie 9., kreśląc kątomierzem kąty jednostronne.

12. Dane są trzy punkty, które nie leżą na prostej: A, B i C; przez punkt A nakreśl cyrklem równoległą do prostej, przechodzącej przez punkty B i C.

13. W odległości 3 cm nakreśl cyrklem równoległą do danej prostej.

ROZDZIAŁ III.

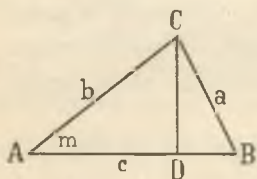
TRÓJKĄT¹⁾.

§ 1.

Określenia.

1. Boki trójkąta naznacza się zwykle albo dwiema literami jego wierzchołków: AB , BC i CA (rys. 36), albo też małą literą wierzchołka, naprzeciw boku położonego: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; kąty zaś trójkąta albo trzema literami (np. $\sphericalangle BAC$), albo literami ich wierzchołków (np. $\sphericalangle A$), albo też literą, umieszczoną między ich ramionami (np. $\sphericalangle m$).

Rys. 36.

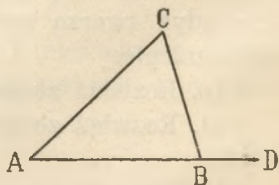


Kąty, np. A i B , położone przy boku trójkąta AB , nazywamy kątami przyległymi do tego boku, kąt zaś C , leżący naprzeciw boku AB , kątem jemu przeciwległym.

Podobnie nazywamy także boki trójkąta. Np. boki AB i AC , tworzące kąt A , są bokami do tego kąta przyległymi, trzeci zaś bok BC , bokiem przeciwległym kątowi A .

Prostopadła (CD), nakreślona z wierzchołka trójkąta (C) na bok przeciwległy (AB), nazywa się wysokością trójkąta, bok zaś (AB), do którego poprowadzono wysokość, podstawą trójkąta.

Rys. 37.



2. Przedłuż bok AB trójkąta ABC poza wierzchołek B (rys. 37), a otrzymasz kąt CBD , zawarty między bokiem trójkąta BC i przedłużeniem boku AB . Kąt taki nazywamy kątem zewnętrznym trójkąta, dla odróżnienia go od kątów między bokami zawartych: A , B i C , które nazywamy kątami wewnętrznymi trójkąta.

¹⁾ Przed rozpoczęciem nauki, zawartej w tym rozdziale, powtórz rzecz, przerobioną w rozdziale VIII. Geometrii dla klasy I.

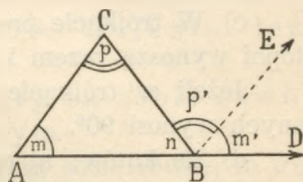
§ 2.

Kąty trójkąta.

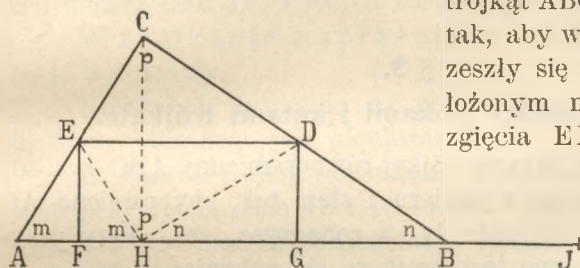
1. Którykolwiek bok trójkąta ABC np. AB (rys. 38) przedłuż poza jego wierzchołek np. B i nakreśl $BE \parallel AC$. Ponieważ AD jest poprzeczną równoległych AC i BE, przeto $\sphericalangle m = m'$, jako kąty odpowiednie; ponieważ i BC jest poprzeczną tych samych dwu równoległych, zatem $\sphericalangle p = p'$, jako kąty naprzemianległe.

Kąty m' , p' i n wynoszą razem 180° , gdyż tworzą kąt półpełny; a ponieważ $\sphericalangle m' = m$, $\sphericalangle p' = p$, przeto także $\sphericalangle m + p + n = 180^\circ$.

Rys. 38.



Rys. 39.



Wytnij z papieru dowolny trójkąt ABC (rys. 39), zagnij go tak, aby wierzchołki: C, B i A zeszły się w punkcie H, położonym na boku AB (linia zgięcia ED, równoległa do AB, połowi wysokość trójkąta), a zobaczysz, że kąty m , p i n , leżące przy punkcie H, tworzą kąt półpełny: $\sphericalangle m + p + n = 180^\circ$.

Suma trzech kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° .

2. Ponieważ kąt zewnętrzny CBD trójkąta ABC (rys. 38) równa się sumie kątów m' i p' a $\sphericalangle m' = m$, $\sphericalangle p' = p$, przeto $\sphericalangle CBD = m + p$.

Wykaż to samo, wyciąwszy kąt $AHD = m + p$ (rys. 39) i położywszy go na kącie CBJ.

Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie dwu kątów wewnętrznych, do niego nieprzyległych.

Który kąt trójkąta jest większy, czy kąt zewnętrzny, czy też wewnętrzny, do niego nieprzyległy?

3. a) Jeden kąt trójkąta wynosi np. 75° , drugi 32° ; ile stopni wynosi kąt trzeci?

Mając dane dwa kąty trójkąta, znajdziemy trzeci, odejmując sumę danych kątów od 180° .

b) W dwu trójkątach ABC i DEF kąty A i D wynoszą np. po 68° , kąty zaś B i E po 35° ; ile stopni wynosi trzeci kąt każdego z tych trójkątów?

Jeżeli dwa kąty dwu trójkątów są sobie równe, to i trzeci kąt są sobie równe.

c) W trójkącie prostokątnym ABC kąt A wynosi 90° ; ile stopni wynoszą razem kąty B i C?

Jeżeli w trójkącie jeden kąt jest prosty, to suma dwu innych wynosi 90° .

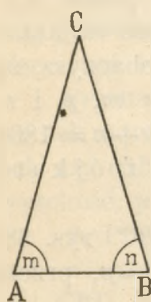
d) Ile kątów: a) prostych, b) rozwartych może zachodzić w trójkącie? Wykaż to rachunkiem i rysunkiem.

W trójkącie mogą być: 1) tylko jeden kąt prosty (i dwa ostre), 2) tylko jeden kąt rozwarty (i dwa ostre).

§ 3.

Związki między bokami i kątami trójkąta.

Rys. 40.



1. Nakreśl trójkąt równoramienny ABC (rys. 40), wytnij go z papieru i złam tak, aby ramiona AC i BC się nakryły, a zobaczysz, że i kąty przy podstawie tego trójkąta się nakryją: $\sphericalangle m = n$.

Kąty przypołożone trójkąta równoramiennego są sobie równe — albo:

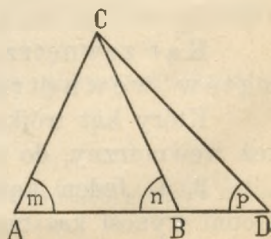
Naprzeciw równych boków trójkąta leżą równe kąty.

2. Ponieważ w trójkącie równobocznym wszystkie boki są sobie równe, a naprzeciw równych boków leżą równe kąty, przeto:

Kąty trójkąta równobocznego są sobie równe i wynoszą po 60° .

3. Przedłuż podstawę trójkąta równoramiennego ABC (rys. 41) i punkt D, położony na tem przedłużeniu, połącz z wierzchołkiem C; następnie zmierz odcinki AC i CD, to przekonasz się, że

Rys. 41.



$CD > CA$. Ponieważ $\sphericalangle n > p$ (jako kąt zewnętrzny trójkąta BCD), przeto także $\sphericalangle m > p$.

Naprzeciw większego boku trójkąta leży większy kąt.

4. Przy odcinku AB (rys. 40) nakreśl dwa równe kąty m i n i przedłuż ich ramiona aż do przecięcia się w punkcie C. Jeżeli ten trójkąt zegniesz tak, aby punkty A i B się nakryły, to i ramiona AC i BC się nakryją.

Naprzeciw równych kątów trójkąta leżą równe boki — albo:

Trójkąt, w którym dwa kąty są sobie równe, jest trójkątem równoramiennym.

Jeżeli w trójkącie wszystkie kąty są sobie równe, to trójkąt jest równoboczny (dlaczego?).

5. Przy odcinku AD (rys. 41) nakreśl dwa nierówne kąty: $\sphericalangle m > p$, przedłuż ich ramiona aż do przecięcia się w punkcie C i zmierz boki DC i AC, a zobaczysz, że $DC > AC$.

W trójkącie naprzeciw większego kąta leży bok większy.

Który bok trójkąta: a) prostokątnego, b) rozwartokątnego jest najdłuższy?

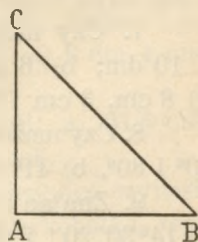
6. Nakreśl trójkąt prostokątny ABC, którego przyprostokątne AB i AC są sobie równe (rys. 42). Co możesz powiedzieć o kątach B i C tego trójkąta? Po ile stopni wynosi każdy z nich?

Ponieważ kąty B i C wynoszą po 45° , dlatego trójkąt, służący do kreślenia kątów prostych¹⁾, nazywamy trójkątem (ekierką) 45-stopniowym (a).

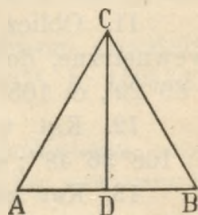
7. W trójkącie równobocznym ABC (rys. 43) nakreśl wysokość CD i powiedz, ile stopni wynosi każdy kąt ostry trójkąta BCD. Jak długa jest przyprostokątnia BD w porównaniu z przeciwprostokątnią BC?

W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątnia jest połową przeciwprosto-

Rys. 42.



Rys. 43.



¹⁾ Zob. Geom. na klasę I. str. 18. rys. 32.

kątni, wynosi jeden kąt ostry 30° , drugi 60° . Z tego powodu trójkąt, przedstawiony w Geom. na kl. I. str. 18. rys. 31., nazywamy trójkątem (ekierką) 30-stopniowym (a).

Zadania.

1. Trzy punkty: K, L i M, nie leżące na prostej, połącz odcinkami i odczytaj wierzchołki, boki i kąty tego trójkąta.

2. Nakreśl dowolny trójkąt, zmierz jego boki i oblicz obwód.

3. Zmierz w trójkącie MNP: a) kąty przyległe do boku NP i kąt, naprzeciw niego leżący, b) boki przyległe do kąta M i bok, naprzeciw niego leżący.

4. Nakreśl trzy kąty zewnętrzne trójkąta ABC, przedłużając kolejno jego boki AB, BC i CA poza wierzchołki B, C i A i wykaż, że suma tych kątów wynosi 360° .

5. Oblicz obwód trójkąta, znając jego boki: a) 8 cm 7 mm, 5 cm 4 mm i 9 cm 6 mm; b) 12 dm 4 cm 6 mm, 13 dm 9 cm 8 mm i 19 dm 7 cm 8 mm.

6. Obwód trójkąta wynosi 19 dm 8 cm, a jego dwa boki: 5 dm 6 cm 8 mm i 7 dm 8 cm 3 mm; oblicz bok trzeci.

7. Czy można nakreślić trójkąt o bokach: a) 5 dm, 7 dm i 10 dm; b) 6 cm, 9 cm i 15 cm; c) 4 cm, 5 cm i 12 cm; d) 8 cm, 3 cm i 4 cm?

8. Czy może być taki trójkąt, którego by kąty wynosiły: a) 50° , 70° i 80° , b) $41^\circ 56'$, $67^\circ 4'$ i 69° , c) $105^\circ 22' 35''$, $16^\circ 37' 25''$ i 48° ?

9. Znając dwa kąty trójkąta: a) 35° i 70° , b) $52^\circ 48'$ i $19^\circ 39'$, c) $14^\circ 30' 20''$ i $63^\circ 52' 57''$, d) $94^\circ 49' 34''$ i $58^\circ 49''$, e) $127^\circ 26'$ i $27^\circ 33''$, oblicz kąt trzeci.

10. Oblicz kąty trójkąta prostokątnego, którego jeden kąt ma: a) 36° , b) $45^\circ 13'$, c) $59^\circ 13' 46''$.

11. Oblicz kąt zewnętrzny trójkąta, znając dwa kąty wewnętrzne, do kąta tego nieprzyległe: a) 49° i 59° , b) $68^\circ 17'$ i $69^\circ 29'$, c) $105^\circ 13' 20''$ i $13^\circ 47' 56''$.

12. Kąt wewnętrzny trójkąta wynosi: a) 97° , b) $37^\circ 59'$, c) $108^\circ 36' 48''$; oblicz przyległy do niego kąt zewnętrzny.

13. Kąt zewnętrzny trójkąta wynosi: a) 86° , b) $96^\circ 23'$, c) $140^\circ 5' 36''$, a kąt wewnętrzny, do niego nieprzyległy: a) $70^\circ 46'$, b) $46^\circ 0' 37''$, c) $97^\circ 25'$; oblicz pozostałe dwa kąty trójkąta.

14. Kąt zewnętrzny trójkąta prostokątnego, powstały przez przedłużenie przeciwprostokątnej, wynosi: a) 135° , b) $125^\circ 35'$, c) $146^\circ 35' 27''$; oblicz kąty ostre tego trójkąta.

15. Kąt ostry trójkąta prostokątnego ABC wynosi: a) 37° , b) $56^\circ 19'$, c) $46^\circ 13' 18''$; oblicz sumę trzech kątów zewnętrznych tego trójkąta, powstałych przez kolejne przedłużenie boków AB, BC i CA poza wierzchołki B, C i A.

16. Dwa kąty wewnętrzne trójkąta ABC wynoszą: a) $\sphericalangle A = 27^\circ 17'$, $\sphericalangle B = 65^\circ$; b) $\sphericalangle B = 38^\circ 56' 46''$, $\sphericalangle C = 98^\circ 13'$; c) $\sphericalangle A = 69^\circ 19' 18''$, $\sphericalangle C = 46^\circ 59' 38''$; oblicz sumę trzech kątów zewnętrznych tego trójkąta, powstałych przez kolejne przedłużenie boków AB, BC i CA poza wierzchołki B, C i A.

17. W trójkącie ABC, w którym a) $\sphericalangle A = 74^\circ$, $\sphericalangle B = 57^\circ$, b) $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 47^\circ 18'$, nakreśl: a) $CD \perp AB$, b) $AD \perp BC$ i oblicz kąty trójkątów: a) ACD i BCD, b) BAD i CAD.

18. Podstawa trójkąta równoramiennego ma: a) 3 m 4 dm, b) 20 dm 8 cm 9 mm, a jedno jego ramię: a) 6 m 7 dm, b) 35 dm 6 cm długości; oblicz obwód trójkąta.

19. Oblicz obwód trójkąta równobocznego, którego bok wynosi: a) 3 m 4 dm, b) 12 dm 6 cm 8 mm.

20. Oblicz ramię trójkąta równoramiennego, znając jego obwód: a) 18 dm 4 cm, b) 35·42 dm i podstawę: a) 8 dm 4 cm, b) 16 dm 5 cm 6 mm.

21. Obwód trójkąta równobocznego wynosi: a) 51·6 cm, b) 4 dm 8 cm, c) 18 m 7 dm 5 cm; oblicz jego bok.

22. Kąt przypodstawny trójkąta równoramiennego wynosi: a) 39° , b) $47^\circ 15'$, c) $70^\circ 29' 46''$; oblicz kąt u wierzchołka tego trójkąta.

23. Kąt u wierzchołka trójkąta równoramiennego wynosi: a) 65° , b) $101^\circ 5'$, c) $52^\circ 29' 36''$; oblicz kąt przypodstawny tego trójkąta.

24. Kąt zewnętrzny trójkąta równoramiennego, powstały przez przedłużenie jego podstawy, wynosi: a) 137° , b) $150^\circ 36'$; oblicz jego kąty wewnętrzne.

25. Przedłuż podstawę trójkąta równoramiennego poza jego wierzchołek, zmierz kątomierzem powstały kąt zewnętrzny i oblicz trzy kąty wewnętrzne tego trójkąta.

26. Przedłuż ramię AC trójkąta równoramiennego ABC

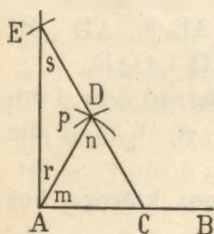
a) poza wierzchołek A, b) poza wierzchołek C, zmierz powstały kąt zewnętrzny i oblicz trzy kąty wewnętrzne tego trójkąta.

27. W trójkącie równoramiennym ABC kąt A wynosi: a) 49° , b) $62^\circ 15'$, c) $70^\circ 5' 12''$. Przedłuż kolejno podstawę AB, ramiona BC i CA poza wierzchołki B, C i A, oblicz każdy z tych trzech kątów zewnętrznych trójkąta i sprawdź, że suma ich wynosi 360° .

28. Nakreśl prostopadłą do odcinka AB (rys. 44) w jego punkcie końcowym A.

Dowolnym promieniem AC zakreśl z punktów A i C łuki, przecinające się w punkcie D, następnie przedłuż odcinek CD poza punkt D i odmierz $DE = DC$. Prosta AE jest prostopadłą do AB.

Rys. 44.



Aby to uzasadnić, poprowadź odcinek AD. W trójkącie równobocznym ACD kąt $m = 60^\circ$ i kąt $n = 60^\circ$; ponieważ kąt p , przyległy do kąta n , wynosi 120° , przeto kąty r i s trójkąta ADE wynoszą razem 60° , a że to są kąty równe (jako kąty przypoławne trójkąta równoramiennego), przeto $\sphericalangle s = 30^\circ$ i $\sphericalangle r = 30^\circ$. Skoro kąty r i m wynoszą razem 90° , przeto $AE \perp AB$.

29. Nakreśl kąt: a) 60° , b) 30° .

a) Nakreśl trójkąt równoboczny, b) przepołów kąt 60° .

30. Nakreśl kąt: a) 120° , b) 150° .

Nakreśl kąt przyległy do kąta: a) 60° , b) 30° .

31. Nakreśl kąt: a) 90° , b) 45° .

32. Podziel kąt prosty na 3 równe części.

Przepołów kąt m na rys. 44.

33. Kąt prosty podziel na 6 równych części.

34. Kąt półpełny podziel na: a) 3, b) 4, c) 6, d) 8 równych części.

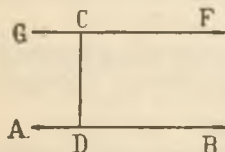
a) Trzecia, b) czwarta część kąta półpełnego wynosi: a) 60° , b) 45° ; w c) i d) przepołów kąty w a) i b).

35. Przez punkt C, położony obok prostej AB (rys. 45), nakreśl do niej równoległą (cyrklem).

a) Nakreśl $CD \perp AB$ i $GF \perp CD$.

b) Zobacz zadanie 9. na str. 17.

Rys. 45.



ROZDZIAŁ IV.

KREŚLENIE TRÓJKĄTÓW I ICH PRZYSTAWANIE.

§ 1.

Określenia.

Trójkąt posiada sześć części składowych: trzy bok i trzy kąty.

Aby zbadać, ile i jakie części składowe należy podać, aby nakreślić trójkąt pewnej wielkości i pewnego kształtu, rozwiąż zadania następujące:

1. a) Nakreśl trójkąt, którego jeden bok ma np. 5 cm długości.

Czy wiesz, gdzie leży trzeci wierzchołek trójkąta?

Ile trójkątów możesz nakreślić na odcinku 5-centymetrowym? Czem różnią się te trójkąty między sobą? Czy wystarcza jeden bok do nakreślenia trójkąta pewnej wielkości i pewnego kształtu?

Trójkąt można wyznaczyć dokładnie, jeżeli się wie, gdzie leżą jego trzy wierzchołki.

b) Nakreśl trójkąt, mając dany jeden jego kąt np. 38° . Zbadaj, podobnie jak poprzednio, czy jeden kąt wyznacza wielkość i kształt trójkąta.

Jedna część składowa trójkąta nie wyznacza ani jego wielkości ani jego kształtu; mówimy, że zadanie jest nieoznaczone.

2. Nakreśl trójkąt, mając podane: a) dwa jego boki np. $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, b) dwa kąty np. $\sphericalangle A = 35^\circ$, $\sphericalangle B = 70^\circ$, c) jeden bok np. $a = 5$ cm i jeden kąt np. $\sphericalangle B = 48^\circ$ i zbadaj, czy dwie części składowe trójkąta wyznaczają go dokładnie.

Dwie części składowe nie wyznaczają dokładnie trójkąta.

3. Weź wreszcie pod uwagę trzy części składowe trójkąta, a mianowicie:

a) trzy kąty,

b) bok i dwa kąty (oba kąty przyległe do danego boku albo jeden kąt przyległy a drugi przeciwległy),

- c) dwa boki i kąt między nimi zawarty,
- d) dwa boki i kąt jednemu z nich przeciwległy,
- e) trzy boki¹⁾.

Ponieważ suma kątów trójkąta wynosi 180° , przeto, mając dane dwa jego kąty, mamy tem samem dany i kąt trzeci. Jeżeli zatem dwa kąty nie wyznaczają dokładnie trójkąta, to nie wyznaczają go także i trzy. Pozostają zatem do rozważenia tylko cztery ostatnie przypadki wyznaczania wielkości i kształtu trójkąta.

§ 2.

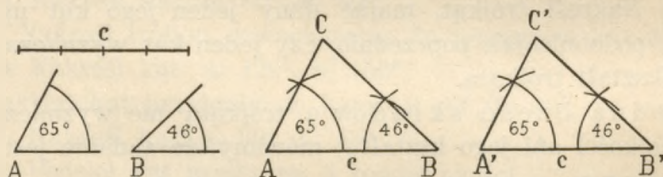
Przypadek pierwszy kreślenia i przystawania trójkątów.

1. Nakreśl trójkąt, mając dane: jeden jego bok $c = 4$ cm i dwa kąty: $A = 65^\circ$, $B = 46^\circ$.

Tu mogą być dwa przypadki: a) oba kąty są przyległe do boku c , b) jeden z kątów jest do boku c przyległy, a drugi jemu przeciwległy.

a) Nakreśl odcinek AB długości 4 cm (rys. 46), a otrzymasz dwa wierzchołki szukanego trójkąta: A i B . Następnie

Rys. 46.



przenieś kąt 65° tak, aby jego wierzchołek padł na punkt A , a odcinek AB był jednym z jego ramion. Podobnie nakreśl kąt ABC , wynoszący 46° , i przedłuż ramiona tych dwu kątów do ich punktu przecięcia się C , który jest trzecim wierzchołkiem trójkąta. W ten sposób wielkość i kształt otrzymanego trójkąta ABC są dokładnie oznaczone.

b) Jeżeli jeden z kątów np. 65° jest przyległy do boku c , a drugi 46° temu bokowi przeciwległy, wówczas, odejmując sumę

¹⁾ Innych zestawień po trzy części składowe trójkąta utworzyć się nie da.

danych kątów t. j. 111° od 180° , otrzymasz kąt trzeci 69° ; mając dany bok c i kąty do niego przyległe 65° i 69° , nakreśl trójkąt w podobny sposób, jak poprzednio.

Jeden bok i dwa kąty wyznaczają dokładnie trójkąt.

2. Jeżeli z tych samych części składowych: c , $\sphericalangle A$ i $\sphericalangle B$ nakreślisz drugi trójkąt $A'B'C'$ (rys. 46), następnie wytniesz z papieru oba trójkąty i położysz jeden na drugim tak, aby bok $A'B'$ nakrył bok AB , wówczas i pozostałe dwa boki i trzy kąty się nakryją, czyli trójkąty te do siebie przystają.

Trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają po jednym boku i po dwa kąty odpowiednio sobie równe. (I. przypadek przystawania trójkątów).

3. Aby trójkąty się nakrywały, muszą mieć wielkość równą i kształt jednaki.

Na oznaczenie, że dwa trójkąty np. ABC i $A'B'C'$ mają tę samą wielkość, używamy znaku $=$, a wyrażenie: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ czytamy: trójkąt ABC jest równy trójkątowi $A'B'C'$.

Na oznaczenie, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają kształt podobny, piszemy: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, t. zn. trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$.

Ponieważ trójkąty do siebie przystające mają i wielkość równą i kształt podobny, przeto piszemy: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, trójkąt ABC przystaje do trójkąta $A'B'C'$.

Zadania.

1. Nakreśl trójkąt, którego jeden bok ma: a) 3 cm, b) 46 mm długości, a kąty przyległe do tego boku wynoszą: a) 60° i 45° , b) 30° i 80° .

2. Nakreśl w pomniejszeniu trójkąt, którego jeden bok wynosi: a) 4,5 m, b) 5 m, kąt zaś do tego boku przyległy: a) 85° , b) 100° , a kąt przeciwległy: a) 60° , b) 35° .

3. Nakreśl trójkąt prostokątny, mając dane:

a) przyprostokątnię długości 35 mm i kąt do niej przyległy 30° ,

b) przyprostokątnię długości 5,5 cm i kąt naprzeciw niej położony 54° ,

- c) przeciwprostokątnię długości 46 mm i kąt 45° ,
 d) przeciwprostokątnię długości 6 cm i kąt 60° (zob. str. 21.
 ust. 7).

4. Nakreśl w pomniejszeniu trójkąt równoboczny, znając jego wysokość: a) 6 m, b) 8·4 m.

5. Nakreśl trójkąt równoramienny, mając dane:

- a) podstawę długości 28 mm i kąt przypośtawny 75° ,
 b) podstawę 30 mm i kąt naprzeciw niej leżący 110° ,
 c) ramię 26 mm i kąt przypośtawny 30° ,
 d) ramię 5·4 cm i kąt naprzeciw podstawy leżący 85° .

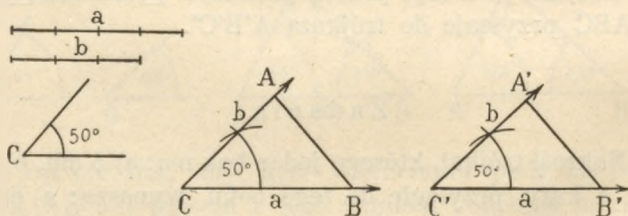
§ 3.

Przypadek drugi kreślenia i przystawania trójkątów.

1. Nakreśl trójkąt, mając dane dwa jego boki: $a = 4$ cm, $b = 3$ cm i kąt $C = 50^\circ$, między tymi bokami zawarty.

Nakreśliwszy kąt $C = 50^\circ$ (rys. 47), otrzymasz jeden wierzchołek trójkąta: C. Na ramionach tego kąta odmierz $CB = a$ i $CA = b$, a uzyskasz dalsze dwa wierzchołki trójkąta: A i B

Rys. 47.



Połączywszy punkty A i B prostą, otrzymasz żądany trójkąt ABC, ponieważ i odcinki a i b i kąt C są jego częściami składowymi.

Dwa boki trójkąta i kąt, między nimi zawarty, wyznaczają dokładnie trójkąt.

2. Jeżeli z tych samych części składowych a , b i $\sphericalangle C$ nakreślisz drugi trójkąt $A'B'C'$ i położysz go na trójkącie ABC tak, aby kąt C' nakrył kąt C, wówczas te dwa trójkąty się nakryją.

Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają po dwa boki i po kącie, między tymi bokami zawartym, odpowiednio sobie równe. (II. przypadek przystawiania trójkątów).

Zadania.

1. Nakreśl trójkąt, mając dane dwa jego boki: a) 5 cm i 7 cm, b) 6·5 cm i 4·6 cm, c) 35 mm i 28 mm i kąt między nimi zawarty: a) 40° , b) 70° , c) 110° .

2. Nakreśl trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne wynoszą: 50 mm i 30 mm. (Co znane nadto?)

3. Nakreśl w pomniejszeniu trójkąt równoramienny, którego ramię wynosi: a) 6 dm, b) 5 m, a kąt u wierzchołka: a) 130° , b) 86° .

4. Nakreśl trójkąt prostokątny równoramienny, którego przyprostokątnia wynosi: a) 3·5 cm, b) 2 cm 4 mm. (Co znane nadto?)

5. Nakreśl trójkąt prostokątny równoramienny, w którym suma obu przyprostokątni wynosi 10·4 cm.

§ 4.

Przypadek trzeci kreślenia i przystawiania trójkątów.

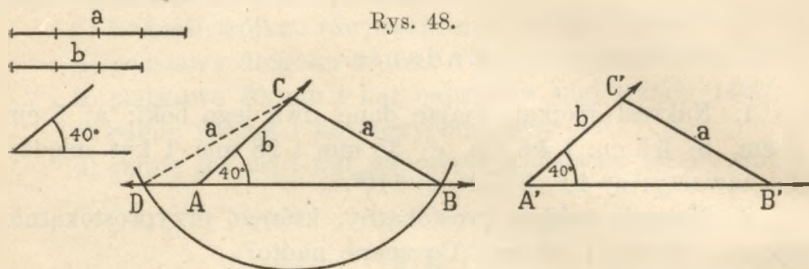
Nakreśl trójkąt, mając dane dwa jego boki: $a=4$ cm, $b=3$ cm i kąt 40° , jednemu z tych boków przeciwległy.

Tu mogą być dwa przypadki: albo a) dany kąt ma leżeć naprzeciw większego, albo b) naprzeciw mniejszego boku.

a) Na ramieniu kąta $A=40^\circ$ odmierz odcinek AC, równy odcinkowi b (rys. 48), a będziesz miał wyznaczone dwa wierzchołki trójkąta: A i C. Aby znaleźć wierzchołek trzeciego, zakresł z punktu C łuk promieniem, równym odcinkowi a ; łuk ten przetnie drugie ramię kąta A i jego przedłużenie w punktach B i D. Połączywszy te dwa punkty z punktem C, otrzymasz dwa trójkąty ABC i ADC, z których tylko pierwszy t. j. ABC

odpowiada warunkom zadania, drugi bowiem trójkąt ACD nie zawiera w sobie kąta 40° .

Dwa boki i kąt, leżący naprzeciw boku większego, wyznaczają dokładnie trójkąt.



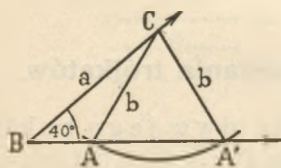
Rys. 48.

Jeżeli z danych części składowych: a , b i 40° nakreślisz drugi trójkąt $A'B'C'$ i położysz go na trójkącie ABC tak, aby kąt A' nakrył kąt A, natenczas oba trójkąty się nakryją.

Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają po dwa boki i po kącie, leżącym naprzeciw boku większego, odpowiednio sobie równe. (III. przypadek przystawiania trójkątów).

b) Jeżeli dany kąt ma leżeć naprzeciw mniejszego boku b ,

Rys. 49.



to nakreśliwszy kąt $B = 40^\circ$ (rys. 49), odmierząc na jego ramieniu odcinek $BC = a$, i postępując podobnie jak w a). Otrzymane dwa trójkąty ABC i $A'BC$ zawierają wprowadzone dane dwa boki i kąt, różniąc się jednak między sobą i wielkością (trójkąt ABC jest częścią trójkąta $A'BC$)

i kształtem (trójkąt jeden jest rozwartokątny, drugi ostrokątny).

Dwa boki i kąt, leżący naprzeciw boku mniejszego, nie wyznaczają dokładnie trójkąta, t. z. z równości takich trzech części składowych trójkątów nie można wnioskować o ich przystawianiu.

Zadania.

1. Nakreśl trójkąt o bokach: a) 2,5 cm i 3,5 cm, b) 2 cm i 3 cm 4 mm i o kącie: a) 75° , b) 100° , leżącym naprzeciw boku większego.

2. Nakreśl trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątnia wynosi: a) 8 cm, b) 5 cm 5 mm, a przyprostokątnia: a) 5 cm, b) 3 cm 5 mm.

3. Nakreśl trójkąt równoramienny, którego ramię wynosi 46 mm, a wysokość 35 mm.

4. Nakreśl trójkąt o bokach 15 m i 25 m i o kącie 80° , leżącym naprzeciw boku mniejszego (użyć podziałki pomniejszonej).

5. Nakreśl trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątnia wynosi 8 cm, a krótsza przyprostokątnia 4 cm. (Jak wielkie są kąty ostre tego trójkąta?).

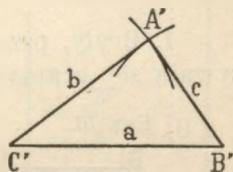
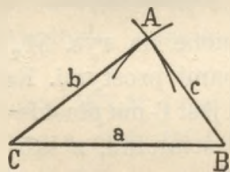
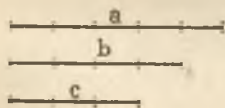
§ 5.

Przypadek czwarty kreślenia i przystawania trójkątów.

1. Nakreśl trójkąt, mając dane trzy jego boki: $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm.

Nakreśl odcinek $CB = a$ (rys. 50), a otrzymasz dwa wierzchołki trójkąta: B i C; następnie zatocz promieniem b łuk z punktu C, a promieniem c łuk z punktu B; punkt przecięcia się tych dwu łuków wyznacza trzeci wierzchołek żądanego trójkąta.

Rys. 50.



Ponieważ suma dwu boków trójkąta jest większa, a ich różnica mniejsza aniżeli bok trzeci, przeto nakreślenie trójkąta z danych trzech odcinków jest tylko wtenczas możliwe, gdy te odcinki odpowiadają tym dwom warunkom.

Trzy boki wyznaczają dokładnie trójkąt.

2. Jeżeli z danych trzech odcinków a , b i c nakreślisz trójkąt $A'B'C'$ i położysz go odpowiednio na trójkącie ABC , to te dwa trójkąty się nakryją.

Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają po trzy boki odpowiednio sobie równe. (IV. przypadek przystawiania trójkątów).

Zadania.

1. Nakreśl trójkąt o bokach: a) 5 cm, 7 cm i 9 cm, b) 2·5 cm, 3·5 cm i 4·5 cm.

2. Nakreśl w pomniejszeniu trójkąt, którego dwa boki wynoszą: a) 60 m i 70 m, b) 12 m i 15 m, a obwód: a) 220 m, b) 45 m.

3. Nakreśl trójkąt równoramienny, którego ramię wynosi: a) 8 cm, b) 9 cm, a podstawa: a) 5 cm, b) 12·5 cm.

4. Nakreśl w pomniejszeniu trójkąt równoramienny, którego podstawa wynosi 10 m, a obwód 30 m.

5. Nakreśl trójkąt równoboczny, którego bok wynosi: a) 15 cm, b) 7·5 cm.

ROZDZIAŁ V.

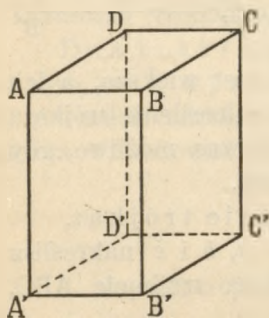
CZWOROKĄTY.

§ 1.

Określenia.

1. Bryły, przedstawione na rys. 51., 52., 53., 54. i 55., nazywają się graniastosłupami prostymi. Każda z nich ograniczo-

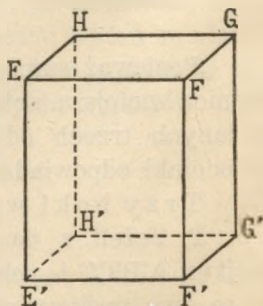
Rys. 51.



na jest 6-ma płaskimi ścianami, z których cztery (przednia, tylna i dwie boczne) są prostokątami.

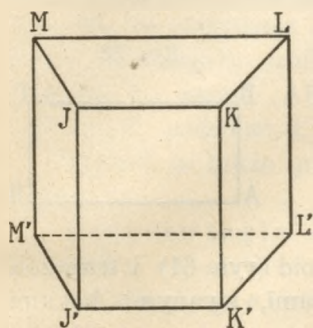
Zmierz górne lub dolne krawędzie graniastosłupa, przedstawionego na rys. 51., a przekonasz

Rys. 52.



się, że one są sobie równe. Gdy jedną przyprostokątnię węgielnicy przyłożysz do krawędzi np. AB, do drugiej zaś przy-

Rys. 53.



prostokątnej tej węgielnicy lineal, a następnie przesuniesz węgielnicę wzdłuż linealu, to przekonasz się, że krawędzie AB i DC są do siebie równoległe; w podobny sposób możesz się przekonać, że kra-

wędź AD jest równoległa do krawędzi BC.

Ścianę (ABCD), ograniczoną czterema równymi sobie odcinkami, z których przeciwległe są do siebie równoległe, nazywamy **rombem**.

Zapomocą linealu i węgielnicy przekonasz się również, że:

2. Krawędzie graniastosłupa, przedstawionego na rys. 52: EF i HG, EH i FG są parami sobie równe i do siebie równoległe.

Ścianę (EFGH), ograniczoną 4-ma odcinkami, z których przeciwległe są sobie równe i do siebie równoległe, nazywamy **romboidem**.

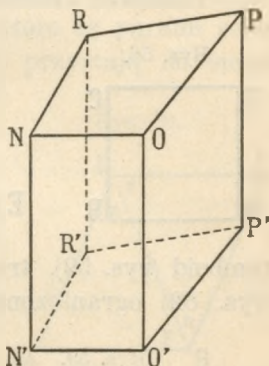
3. Krawędzie ściany JKLM (rys. 53) są różnej długości i dwie z nich JK i ML są do siebie równoległe, pozostałe zaś dwie nierównoległe.

Ściana (JKLM), ograniczona 4-ma odcinkami, z których dwa są do siebie równoległe, nazywa się **trapezem**.

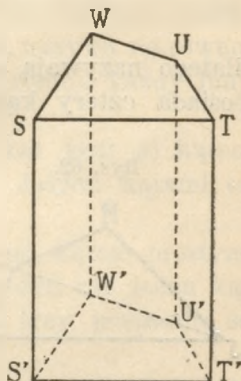
4. Na ścianie NOPR (rys. 54) niema dwu krawędzi do siebie równoległych, natomiast krawędzie NO i NR, OP i PR są parami sobie równe.

Ścianę (NOPR), która ma dwie pary przyległych krawędzi równych, nazywamy **deltoidem**.

Rys. 54.



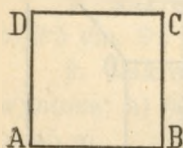
Rys. 55.



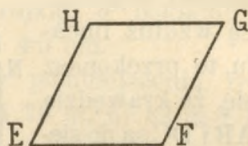
5. Na ścianie STUW (rys. 55) nie spostrzegamy ani krawędzi równych ani do siebie równoległych. Ścianę taką nazywamy trapezoidem.

Ponieważ kwadrat (rys. 56), romb (rys. 57), prostokąt (rys. 58),

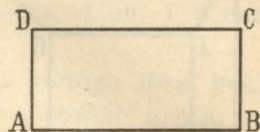
Rys. 56.



Rys. 57.

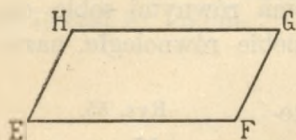


Rys. 58.

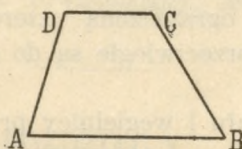


romboid (rys. 59), trapez (rys. 60), deltoid (rys. 61) i trapezoid (rys. 62) ograniczone są 4-ma odcinkami, zwanymi bokami,

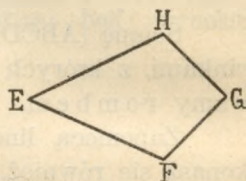
Rys. 59.



Rys. 60.

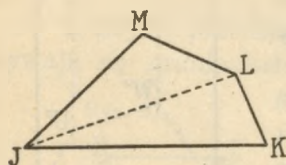


Rys. 61.



dlatego nazywają się czworobokami; a że każdy z nich posiada cztery kąty, dlatego nazywamy je także czworokątami.

Rys. 62.



Ponieważ przeciwległe boki kwadratu, rombu, prostokąta i romboidu są do siebie równoległe, przeto czworoboki te nazywają się równoległobokami.

6. Sumę boków czworokąta nazywamy obwodem, a odcinek, łączący dwa przeciwległe wierzchołki np. J i L (rys. 62), przekątnią czworokąta.

Ile przekątni możesz nakreślić w czworokącie?

Ponieważ przekątnia dzieli czworokąt na dwa trójkąty, a suma kątów wewnętrznych trójkąta wynosi 180° , przeto:

Suma kątów czworokąta wynosi 360° .

§ 2.

Własności równoległoboków.

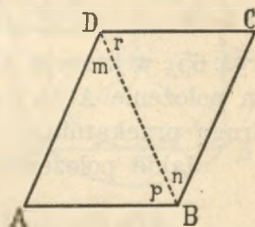
1. Gdy w równoległoboku ABCD narysujesz przekątną BD (rys. 63), to otrzymasz kąty m i n , p i r , które są parami sobie równe (dlaczego?); trójkąty ABD i BCD przystają do siebie (dlaczego?), zatem $AB = DC$, $AD = BC$ i $\sphericalangle A = \sphericalangle C$; podobnie $\sphericalangle D = \sphericalangle B$ (dlaczego?).

Wykaż to także przez nakrycie trójkątów.

Przeciwnie boki równoległoboku są sobie równe — albo:

Równoległe między równoległymi są sobie równe.

Przeciwnie kąty równoległoboku są sobie równe.



Rys. 63.

2. Narysuj równoległobok, którego dwa przyległe boki są sobie równe. Co możesz powiedzieć o bokach tego równoległoboku?

Jeżeli w równoległoboku dwa przyległe boki są sobie równe, natenczas wszystkie jego boki są sobie równe. Równoległobok, którego wszystkie boki są tej samej długości, nazywa się równoległobokiem równobocznym (kwadrat i romb); każdy inny nazywamy różnobocznym.

Narysuj równoległobok, którego jeden kąt jest: a) kątem prostym, b) kątem ostrym lub rozwartym. Jakimi kątami są pozostałe trzy kąty?

Jeżeli jeden z kątów równoległoboku jest kątem prostym, to trzy pozostałe są także kątami prostymi; jeżeli zaś jeden kąt równoległoboku jest inny niż prosty, to i trzy pozostałe są różne od prostego.

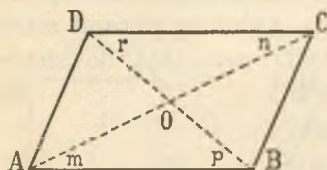
Gdy kąty równoległoboku są proste, to równoległobok taki nazywa się prostokątnym (kwadrat i prostokąt); w przeciwnym razie jest on ukośnokątny.

Powiemy zatem:

kwadrat jest to równoległobok równoboczny i prostokątny;
romb jest to równoległobok równoboczny i ukośnokątny;
prostokąt jest to równoległobok różnoboczny i prostokątny;
romboid jest to równoległobok różnoboczny i ukośnokątny.

3. W równoległoboku ABCD (rys. 64) nakreśl dwie przekątne AC i BD, a otrzymasz trójkąty AOB i DOC do siebie przystające ($AB = DC$, $\sphericalangle m = n$, i $\sphericalangle p = r$). W trójkątach takich na przeciw równych kątów leżą równe boki, zatem: $BO = OD$ i $AO = OC$.

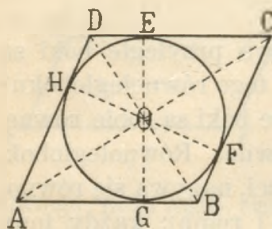
Rys. 64.



Przekątne równoległoboku połowią się wzajemnie.

4. Trójkąt równoramienny ABC (rys. 65), w którym $AB = BC$, obróć naokoło AC o 180° , to zajmie on położenie ACD i powstanie romb ABCD, w którym BD jest drugą przekątnią.

Rys. 65.



Jakie położenie względem siebie mają przekątne rombu? Na jakie części dzieli każda przekątnia kąty rombu? Czem więc są te przekątne?

Jakim utworem geometrycznym jest romb?

Widzimy zatem, że:

a) Przekątne rombu są do siebie prostopadłe.

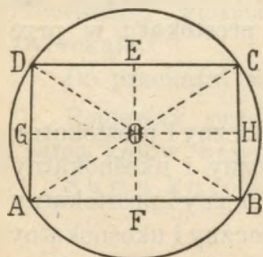
b) Przekątne rombu są symetralnemi kątów, które przecinają.

c) Romb jest utworem symetrycznym, a jego osiami symetrii są przekątne.

Gdy z punktu przecięcia się przekątnej O (rys. 65) poprowadzisz prostopadłe do boków rombu, t. j. OE, OF, OG i OH, to prostopadłe te są sobie równe (punkt O leży na symetralnych kątów tego rombu), są więc promieniami koła wpisanego w romb.

d) W romb można wpisać koło.

Rys. 66.



5. Prostokąt GDEO (rys. 66) obróć naokoło EO o 180° , to zajmie położenie OECH; następnie uczyni to samo z prostokątem GDCH naokoło GH, nadając mu położenie GABH, a otrzymasz prostokąt ABCD.

Prostokąt (ABCD) jest utworem symetrycznym; jego osiami symetrii są symetralne boków.

Ponieważ EF jest symetralną boków DC i AB , przeto $DO = OC$ i $BO = AO$, a tem samem $DB = AC$.

a) Przekątne prostokąta są sobie równe.

b) Na prostokącie można opisać koło.

6. Ponieważ kwadrat (rys. 67) jest szczególnym rombem i prostokątem, przeto:

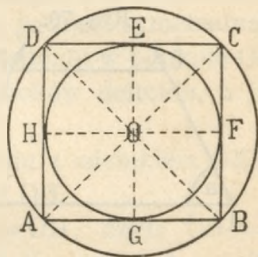
a) Przekątne kwadratu są do siebie prostopadłe i sobie równe.

b) W kwadrat można wpisać koło i na nim je opisać.

c) Kwadrat jest utworem symetrycznym; jego osiami symetrii są symetralne boków i symetralne kątów.

7. Sprawdź własności rombu, prostokąta i kwadratu na modelach, wyciętych z kartonu.

Rys. 67.



§ 3.

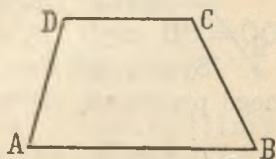
Własności trapezu i deltoidu; równoległe w trójkącie.

1. Nakreśl trapez $ABCD$ (rys. 68) i powiedz, jak nazywają się kąty A i D ze względu na równoległe przecięte poprzeczną. Co wiesz o sumie tych dwu kątów? Rozważ to samo o kątach B i C , a otrzymasz:

$$\sphericalangle D + A = 180^\circ \text{ i } \sphericalangle B + C = 180^\circ.$$

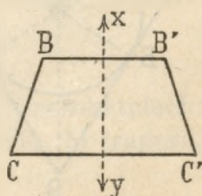
Suma kątów przyległych do każdego z boków nierównoległych trapezu wynosi 180° .

Rys. 68.



2. Nakreśl odcinek BC , nachylony do prostej xy (rys. 69), i sposobem, podanym na str. 12. zad. 10., symetryczny do niego odcinek $B'C'$, to otrzymasz trapez $BCC'B'$, w którym dwa boki nierównoległe są sobie równe; trapez taki nazywa się trapezem równoramiennym, a jego boki równe ramionami. Gdy trapez ten złamiesz wzdłuż prostej xy , zobaczysz, że obie jego części się nakryją.

Rys. 69.

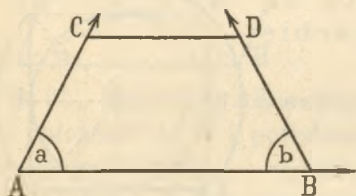


a) Trapez równoramienny jest utworem symetrycznym; jego osią symetrii jest symetralna boków równoległych.

b) W trapezie równoramiennym kąty, leżące przy bokach równoległych, są sobie równe.

3. Z dowolnego punktu B, położonego na ramieniu kąta a (rys. 70), nakreśl kąt b , równy kątowi a , i poprowadź prostą CD, równoległą do AB. Trapez ABDC złoż tak, aby punkty A i B padły na siebie, to zobaczysz, że boki AC i BD się nakryją; trapez więc ABCD jest równoramienny.

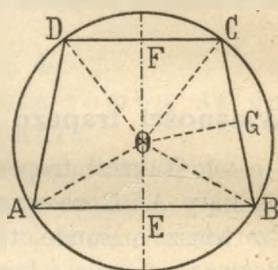
Rys. 70.



Trapez, którego kąty, położone przy boku równoległym, są sobie równe, jest trapezem równoramiennym.

4. Nakreśl oś symetrii trapezu równoramiennego ABCD (rys. 71) i symetralną jego ramienia np. BC. Punkt przecięcia się tych dwu linii O połącz prostymi z wierzchołkami trapezu i powiedz, jak wielki jest odcinek OA w porównaniu z odcinkiem OB; tak samo porównaj odcinki OB i OC, OC i OD.

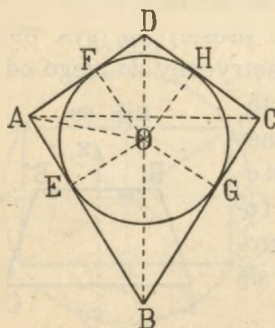
Rys. 71.



Ponieważ $OA = OB$, $OB = OC$, $OC = OD$ czyli $OA = OB = OC = OD$, przeto:

Symetralne dwu boków przyległych trapezu równoramiennego przecinają się w punkcie, równo oddalonym od wierzchołków trapezu.

Rys. 72.



Na trapezie równoramiennym można opisać koło.

5. Dowolny trójkąt ABD (rys. 72) obróć naokoło BD o 180° , to zajmie położenie CBD i powstanie deltoid ABCD.

Które a) boki, b) kąty deltoidu są sobie równe? Czem jest przekątnia BD? Jakie położenie ma ona względem drugiej przekątnej AC?

Ponieważ AC jest odcinkiem symetrycznym względem BD, przeto:

a) Deltoid jest utworem symetrycznym; jego osią symetrii jest przekątnia, łącząca wierzchołki, w których schodzą się równe boki.

b) Przekątnie deltoidu są do siebie prostopadłe.

W deltoidzie ABCD (rys. 72) nakreśl jeszcze symetralną kąta A, która przecina się z osią symetrii deltoidu w punkcie O, z punktu zaś O poprowadź prostopadłe do boków deltoidu, t. j. OE, OF, OH i OG.

Jak wielki jest odcinek OG w porównaniu z odcinkiem OE? Tak samo porównaj odcinki OE i OF, OF i OH.

Ponieważ $OG = OE$, $OE = OF$, $OF = OH$, czyli $OG = OE = OF = OH$, przeto odcinki te są promieniami koła wpisanego w deltoid.

W deltoid można wpisać koło.

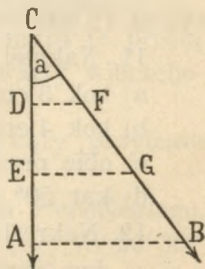
Sprawdź własności deltoidu na modelu, wyciętym z papieru.

6. Na ramionach kąta α (rys. 73) odmierza np. trzy równe odcinki CD, DE i EA i punkt A połącz z dowolnym punktem B, położonym na drugim ramieniu kąta α , a otrzymasz trójkąt ABC. Następnie z punktów D i E nakreśl proste DF i EG, równoległe do boku AB, a otrzymasz punkty F i G. Jeżeli cyrklem zmierzysz odcinki CF, FG i GB, to przekonasz się, że one są sobie równe.

Jeżeli jeden bok trójkąta podzielimy na kilka równych części i nakreślimy z punktów podziału równoległe do boku drugiego, to równoległe te dzielą bok trzeci na tyleż równych części.

Czy odcinki boku CA są równe odcinkom boku CB? W jakim trójkącie są te odcinki sobie równe?

Rys. 73.



Zadania.

1. Powiedz, co wiesz o a) bokach, b) kątach, c) przekątniach:
- 1) kwadratu, 2) prostokąta, 3) rombu, 4) romboidu, 5) trapezu, 6) trapezoidu.

2. Nakreśl kwadrat, którego obwód wynosi 2 dm.

3. W koło o promieniu 40 mm wpisz kwadrat.

4. Na kole o promieniu 35 mm opisz kwadrat.

5. Nakreśl kwadrat o przekątnej 36 mm.

W kole, zatoczonym promieniem 18 mm, nakreśl dwie średnice, do siebie prostopadłe.

6. Dwa boki przyległe prostokąta wynoszą 35 mm i 25 mm; nakreśl ten prostokąt a następnie kwadrat, którego obwód jest równy obwodowi danego prostokąta.

7. Opisz koło na prostokącie, którego dwa boki wynoszą 40 mm i 24 mm.

8. Jeden bok prostokąta wynosi 22 mm, przekątnia 31 mm; nakreśl ten prostokąt.

9. Nakreśl prostokąt, znając jego przekątnię o długości 30 mm i kąt 60° , zawarty między przekątniami.

10. Nakreśl prostokąt, którego bok wynosi 16 mm, promień zaś koła opisanego na tym prostokącie 10 mm.

Nakreśl trójkąt prostokątny, którego jedna przyprostokątnia wynosi 16 mm, przeciwprostokątnia 20 mm.

11. Nakreśl romb, mając dane:

a) bok 3 cm i kąt 120° ;

b) bok 4 cm i przekątnię 3 cm;

c) obie przekątnie 6 cm i 4,8 cm;

d) kąt 50° i promień koła w romb wpisane 3 cm.

12. Nakreśl romboid, mając dane:

a) dwa jego boki 26 mm i 40 mm i kąt między nimi zawarty 35° ;

b) dwa boki 24 mm i 30 mm, oraz przekątnię 38 mm;

c) bok 25 mm i obie przekątnie 22 mm i 35 mm;

d) obie przekątnie 34 mm i 44 mm i kąt, między niemi zawarty, 60° .

13. Nakreśl trapez, mając dany jeden jego bok równoległy a , dwa boki nierównoległe b i c i kąt, między bokami a i b zawarty, 78° .

Na ramionach kąta $A = 78^\circ$ (rys. 74) odmierza: $AB = a$, $AC = b$ i z punktu C poprowadź równoległą do AB. Zakreślwszy z punktu B łuk promieniem c , otrzymasz dwa punkty

D i D', które, połączone z punktem B, wyznaczają czwarty bok trapezów: ABDC i ABD'C.

• Jeżeli bok c jest dłuższy aniżeli odległość obu boków równoległych trapezu, otrzymasz dwa trapezy; gdy równa się tej odległości, jeden trapez; a gdy jest od niej mniejszy, trapezu wyznaczyć nie można.

14. Nakreśl trapez, którego boki równoległe wynoszą 5·2 cm i 4 cm, jeden z boków nierównoległych 3·5 cm, a kąt, zawarty między bokiem ostatnim i większym bokiem równoległym, 80° .

15. Nakreśl trapez, mając dane:

a) dwa jego boki równoległe: 6 cm i 2 cm oraz dwa nierównoległe: 5 cm i 3 cm.

Nakreśl odcinek $AB = 6$ cm, a otrzymasz dwa wierzchołki trapezu; na odcinku tym odmierz $BC = 4$ cm i z punktów B i C zatocz łuki promieniami 5 cm i 3 cm, a otrzymasz trzeci wierzchołek trapezu D. Poprowadziwszy jeszcze z punktu D prostą DE równoległą do AB i $AE \parallel CD$, uzyskasz czwarty wierzchołek trapezu E.

b) dwa boki równoległe: 4·5 cm i 2·8 cm i kąty przyległe do dłuższego boku równoległego: 60° i 40° .

16. Dwa kąty trapezu, przyległe do boku równoległego, wynoszą: a) 63° i 96° , b) $120^\circ 10' 45''$ i $86^\circ 35'$, c) $78^\circ 25' 30''$ i $87^\circ 25' 19''$; oblicz pozostałe kąty tego trapezu.

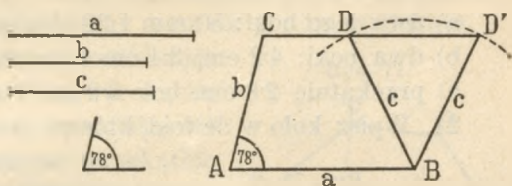
17. Nakreśl trapez równoramienny, mając dane:

a) dwa jego boki równoległe: 6·2 cm, 3·4 cm i ramię 4·4 cm;
b) dwa boki równoległe: 3·2 cm, 2·4 cm i kąt 100° ;
c) dwa boki równoległe: 40 mm, 25 mm i wysokość 30 mm;
d) dłuższy bok równoległy 5 cm, ramię 3·6 cm oraz kąt 120° ;
e) krótszy bok równoległy 30 mm, ramię 36 mm i wysokość 28 mm.

18. Jeden kąt trapezu równoramiennego wynosi: a) $57^\circ 17' 45''$, b) $143^\circ 15' 33''$; oblicz inne kąty tego trapezu.

19. Opisz koło na trapezie równoramiennym, którego boki równoległe wynoszą: 54 mm i 40 mm, a ramię 20 mm.

Rys. 74.



20. Nakreśl deltoid, mając dane:

a) dwa jego boki: 50 mm i 30 mm oraz oś symetrii 70 mm;

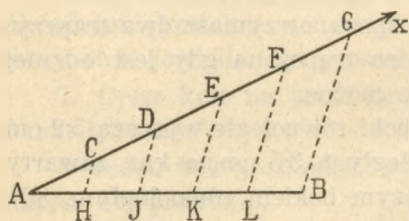
b) dwa boki: 4·2 cm, 3·4 cm i przekątnię 3·5 cm;

c) przekątnię 2·8 cm, bok 3·2 cm i oś symetrii 4·5 cm.

21. Wpisz koło w deltoid, którego przekątnia wynosi 30 mm,

oś symetrii 50 mm i kąt, zawarty między przekątnią i jednym bokiem, 25° .

Rys. 75.



22. Odcinek AB podziel na:

a) 5, b) 6, c) 9 równych części.

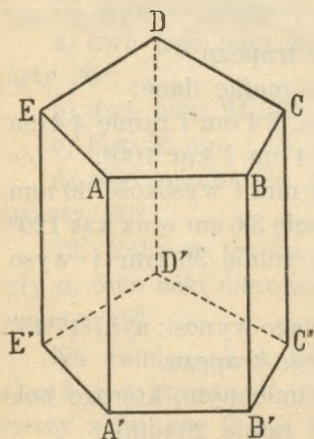
Z końca odcinka AB nakreśl prostą Ax (rys. 75), nachyloną do AB pod dowolnym kątem, następnie odmierz na tej

prostej, począwszy od punktu A, 5 równych odcinków dowolnej długości: AC, CD, ... FG. Połączywszy punkty G i B prostą, poprowadź z punktów F, E, ... C równoległe do BG, a te podzielą odcinek AB na 5 równych części. Przekonaj się o tem zapomocą cyrkla.

ROZDZIAŁ VI.

WIEŁOKĄTY.

Rys. 76.



§ 1.

Określenia.

1. Ściana górna (dolna) graniastosłupa prostego, przedstawionego na rysunku 76., ograniczona jest 5-ma krawędziami. Ścianę taką nazywamy pięciokątem. Podobnie część płaszczyzny, ograniczoną 6-ma, 7-ma i t.d. odcinkami, nazywamy sześćcio-, siedmio- ... wielokątem.

Nakreśl dowolny 5-ciokąt, 6-ciokąt i wymień jego wierzchołki, boki i kąty.

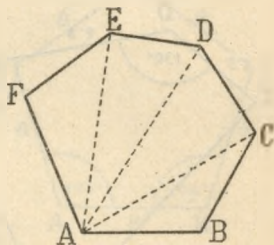
2. Odcinek np. AC (rys. 77), łączący dwa niesąsiednie wierzchołki wielokąta, nazywamy przekątnią wielokąta.

Ile przekątni możesz nakreślić z jednego wierzchołka: a) w czworokącie, b) w pięciokącie, c) w sześciokącie? Na ile trójkątów dzieli te przekątnie dany wielokąt? Porównaj ilość: a) przekątni, b) trójkątów z ilością boków wielokąta.

Ilość wszystkich przekątni, które można nakreślić z jednego wierzchołka wielokąta, jest o trzy mniejsza niż ilość boków wielokąta.

Ilość trójkątów, na które można podzielić wielokąt przekątniami, poprowadzonymi z jednego wierzchołka, jest o dwa mniejsza aniżeli ilość jego boków.

Rys. 77.



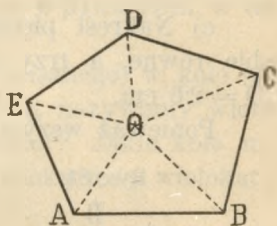
§ 2.

Kąty wielokąta.

1. Dowolny punkt O, położony między bokami wielokąta ABCDE (rys. 78), połącz ze wszystkimi wierzchołkami tego wielokąta, a otrzymasz tyle trójkątów, ile boków ma wielokąt.

Ile stopni wynoszą wszystkie kąty tych trójkątów? — Tyle razy po 180° , ile boków ma wielokąt. — Ile stopni wynoszą te kąty oprócz tych, których wierzchołki leżą w punkcie O, czyli: ile stopni wynoszą wszystkie kąty wielokąta?

Rys. 78.



Suma kątów wielokąta wynosi tyle razy po 180° , ile boków ma wielokąt, mniej 360° .

Na podstawie tego suma kątów wynosi:

w trójkącie: $3 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$,

w czworokącie: $4 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ$,

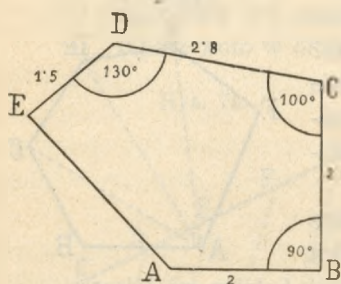
w pięciokącie: $5 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 900^\circ - 360^\circ = 540^\circ$,

w sześciokącie: $6 \cdot 180^\circ - 360^\circ = 1080^\circ - 360^\circ = 720^\circ$ i t. d.

ogólnie: w n -kącie: $n \cdot 180^\circ - 360^\circ$.

2. a) Nakreśl pięciokąt ABCDE, znając jego boki: $AB=2$ cm, $BC=2.5$ cm, $CD=2.8$ cm, $DE=1.5$ cm i kąty: $B=90^\circ$, $C=100^\circ$, $D=130^\circ$.

Rys. 79.

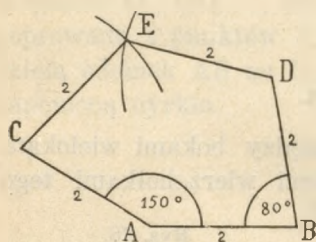


Narysuj kąt 90° (rys. 79) i odmierz na jego ramionach: $AB=2$ cm, $BC=2.5$ cm, a otrzymasz trzy wierzchołki pięciokąta. Po nakreśleniu kąta $C=100^\circ$ i odmierzeniu odcinka $CD=2.8$ cm narysuj jeszcze kąt $D=130^\circ$ i odmierz $DE=1.5$ cm, a otrzymasz dalsze dwa wierzchołki pięciokąta.

Zbadaj kątomierzem, ile stopni wynosi kąt A, a ile kąt E.

b) Nakreśl pięciokąt, którego wszystkie boki wynoszą po 2 cm, kąt $A=150^\circ$, kąt $B=80^\circ$.

Rys. 80.



Rysunek 80. uwidocznia sposób kreślenia pięciokąta.

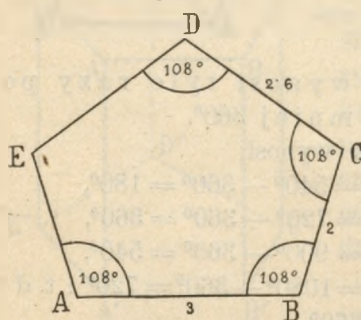
Zbadaj kątomierzem, ile stopni wynosi kąt C, ile kąt D, a ile kąt E.

Wielokąt, którego wszystkie boki są sobie równe, a kąty nierówne, nazywa się wielokątem równobocznym.

c) Nakreśl pięciokąt ABCDE, którego wszystkie kąty są sobie równe, a trzy boki wynoszą: $AB=3$ cm, $BC=2$ cm, $CD=2.6$ cm.

Ponieważ wszystkie kąty pięciokąta są sobie równe, przeto każdy z nich wynosi: $540^\circ:5=108^\circ$.

Rys. 81.



Sposób kreślenia pięciokąta uwidocznia rysunek 81.

Przekonaj się zapomocą cyrkla (kątomierza), że kąt E wynosi także 108° .

Wielokąt, którego wszystkie kąty są sobie równe, a boki nierówne, nazywamy wielokątem równokątnym.

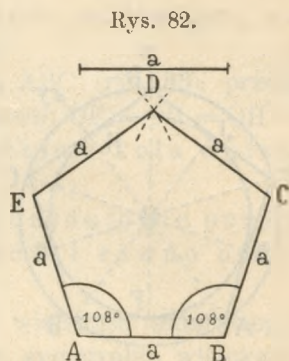
Ile stopni wynosi kąt równo-

kątnego: a) trójkąta, b) czworokąta, c) sześciokąta i t. d.?

d) Nakreśl pięciokąt, którego wszystkie boki wynoszą po a jednostek i wszystkie kąty są sobie równe.

Sposób kreślenia uwidocznia rys. 82.

Wielokąt, którego i wszystkie boki i wszystkie kąty są sobie równe, nazywamy wielokątem umiadowym. Każdy inny wielokąt jest nieumiadowy.



§ 3.

Wielokąt wpisany w koło i opisany na kole.

1. Obwód koła podziel na kilka części i połącz punkty podziału cięciwami¹⁾, a otrzymasz wielokąt, który się nazywa wielokątem wpisanym w koło, koło zaś kołem opisanym na wielokącie.

2. Punkty podziału koła połącz z jego środkiem i nakreśl w nich styczne koła¹⁾, to one (dostatecznie przedłużone) przetną się kolejno i utworzą wielokąt, który nazywamy wielokątem opisanym na kole, koło zaś kołem wpisanym w ten wielokąt.

Czem są boki wielokąta wpisanego (opisanego) w koło (na kole) w stosunku do tego koła? Jaki wielokąt nazywamy wielokątem wpisanym (opisanym) w koło (na kole)? Jakie koło nazywamy kołem opisanym (wpisanym) na wielokącie (w wielokąt)?

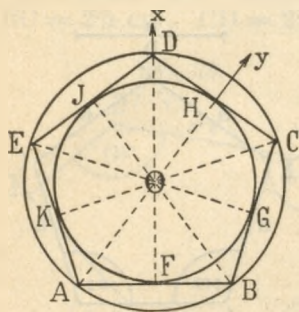
§ 4.

Własności wielokąta umiadowego.

1. Nakreśl np. w pięciokącie umiadowym ABCDE (rys. 83) symetralną boku AB, t. j. Fx i obróć naokoło niej część pięciokąta, położoną po lewej stronie tej symetralnej tak, aby odcinki

¹⁾ Objasnić to rysunkiem.

Rys. 83.



AF i BF się nakryły. Ponieważ kąt wielokąta A jest równy kątowi B, przeto bok AE padnie na bok BC i boki te jako równe nakryją się. Ponieważ kąty E i C są sobie równe, przeto bok ED pójdzie wzdłuż boku CD, a że te dwa boki są sobie równe, przeto i one się nakryją. Punkt D leży więc na symetralnej Fx czyli, że symetralna boku AB przechodzi przez wierzchołek pięciokąta D.

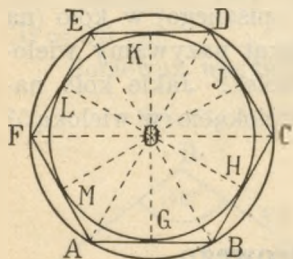
Symetralna boku wielokąta umiarowego jest osią symetrii tego wielokąta.

2. W pięciokącie umiarowym (rys. 83) nakreśl symetralną kąta np. BAE, t. j. Ay i obróć czworokąt ABCH naokoło Ay o 180° . Ponieważ kąt BAH = EAH, przeto bok AB padnie wzdłuż boku AE; a że te dwa boki są sobie równe, to punkt B padnie na punkt E. Ponieważ $\angle B = E$ i $BC = ED$, przeto punkt C padnie na punkt D i CH nakryje DH.

Symetralna kąta w wielokącie umiarowym jest osią symetrii tego wielokąta.

Jeżeli wielokąt ma nieparzystą liczbę boków (rys. 83), to symetralna boku jest zarazem symetralną jego kąta przeciwległego i naodwrot; jeżeli natomiast liczba boków wielokąta jest parzysta (rys. 84),

Rys. 84.



to każda para przeciwległych boków i każda para przeciwległych kątów ma tę samą symetralną. W obu więc przypadkach ma wielokąt umiarywy tyle osi symetrii, ile ma boków.

3. Symetralna FD boku AB (rys. 83) i symetralna GE boku BC przecinają się w punkcie G, który jest równo oddalony od punktów A, B i C (dlaczego?). Ponieważ punkty C i E położone są symetrycznie względem osi FD, przeto $OC = OE$; a że podobnie leżą punkty A i D względem osi symetrii GE, przeto także $AO = DO$; zatem: $AO = BO = CO = DO = EO$,

t. z. punkt O jest środkiem koła opisanego na wielokącie umiarowym.

Ponieważ OB jest symetralną kąta ABC (rys. 83), przeto $OF = OG$; tak samo $OG = OH$ i t. d.; zatem: $OF = OG = OH = OJ = OK$, t. z. punkt O jest środkiem koła wpisanego w wielokąt umiarowy.

W wielokącie umiarowym znajduje się punkt, równo oddalony od wierzchołków i równo oddalony od boków wielokąta.

Punkt ten nazywa się środkiem wielokąta umiarowego; położenie jego wyznaczają dwie dowolne symetralne wielokąta.

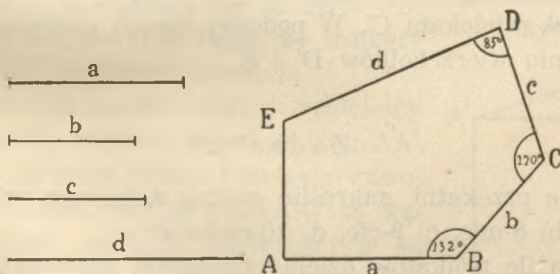
§ 5.

Kreślenie i przystawanie wielokątów.

1. Nakreśl pięciokąt, mając dane cztery jego boki: a , b , c i d i kąty, między tymi bokami zawarte: 132° , 120° i 85° .

Na ramionach kąta 132° (rys. 85) odmierz $AB = a$ i $BC = b$, następnie nakreśl kąt $BCD = 120^\circ$ i odmierz $CD = c$. Nakre-

Rys. 85.



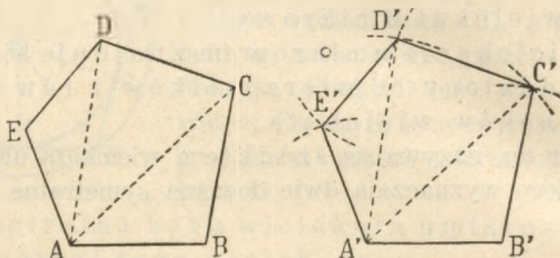
śliwszy jeszcze przy wierzchołku D kąt 85° i odmierzywszy $DE = d$, połącz punkty E i A prostą, a otrzymasz szukany pięciokąt $ABCDE$.

2. Nakreśl wielokąt przystający do danego wielokąta.

a) Podziel wielokąt $ABCDE$ (rys. 86) przekątnymi, poprowadzonymi z jednego wierzchołka np. A , na trójkąty ABC , CAD i AED . Nakreśliwszy $A'B' = AB$ i zatoczywszy promie-

niami AC i BC łuki z punktów A' i B', otrzymasz trzeci wierzchołek C' trójkąta A'B'C', który przystaje do trójkąta ABC. W podobny sposób kreśli się trójkąty A'C'D' i A'D'E'.

Rys. 86.



Wielokąty A'B'C'D'E' i ABCDE, położone na sobie, nakryją się, gdyż składają się z trójkątów do siebie przystających.

Wielokąty przystają do siebie, jeżeli przekątniami, nakreślonymi z odpowiadających sobie wierzchołków, dają się rozłożyć na trójkąty, parami do siebie przystające.

W praktycznem zastosowaniu nie dzieli się wielokąta przekątniami na trójkąty, lecz odmierzywszy $A'B' = AB$, zatacza się łuki długością BC i odległością AC, przez co wyznacza się wierzchołek wielokąta C'. W podobny sposób postępuje się przy wyznaczaniu wierzchołków D' i E'.

Zadania.

1. Ile przekątni nakreślić można z jednego wierzchołka:
a) 7-mio, b) 8-mio, c) 9-cio, d) 10-ciokąta?

2. Na ile trójkątów dzielią przekątnie, poprowadzone z jednego wierzchołka: a) siedmiokąt, b) ośmiokąt, c) dziewięciokąt, d) dziesięciokąt?

3. Oblicz sumę wszystkich kątów: a) 7-mio, b) 8-mio, c) 9-cio, d) 10-ciokąta.

4. Nakreśl sześciokąt, w którym boki 22 mm, 37 mm, 18 mm, 25 mm i 40 mm długości tworzą z sobą kąty: 125° , 100° , 130° i 90° .

5. Nakreśl sześciokąt równoboczny ABCDEF, znając jego

obwód: 12 cm i trzy kąty: $A = 130^\circ$, $B = 140^\circ$ i $C = 90^\circ$. Zbadaj kątomierzem, ile stopni wynosi kąt D, ile kąt E, a ile kąt F.

6. Nakreśl sześciokąt równokątny ABCDEF, którego boki wynoszą: $AB = 3$ cm, $BC = 2.5$ cm, $CD = 2.8$ cm, $DE = 1.5$ cm. Ile cm wynosi bok EF? Przekonaj się zapomocą kątomierza, że kąty E i F wynoszą także po 120° .

7. Nakreśl umiarowy sześciokąt, którego bok wynosi 3 cm.

8. Bok umiarowego: a) pięciokąta, b) sześciokąta wynosi 4 cm. Nakreśl koło opisane na tym wielokącie i koło w ten wielokąt wpisane.

ROZDZIAŁ VII.

GRANIASTOSŁUP. OSTROSŁUP.

§ 1.

Graniastosłup.

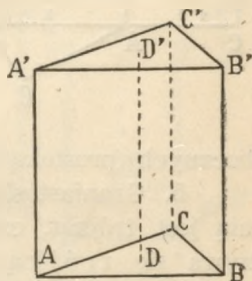
1. Bryła, przedstawiona na rysunku 87., nazywa się prostym graniastosłupem trójkątnym. Zmierz krawędzie tego graniastosłupa, a przekonasz się, że $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ i $CA = C'A'$ czyli, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ do siebie przystają.

Zapomocą lineалу (nitki) i węgielnicy przekonasz się również, że krawędzie: AA' , BB' i CC' są sobie równe i że kąty czworokątów $ABB'A'$, $BCC'B'$ i $CAA'C'$ są kątami prostymi czyli, że czworokąty te są prostokątami.

Ponieważ krawędzie AA' , BB' i CC' są sobie równe i stoją na płaszczyznach trójkątów ABC i $A'B'C'$ prostopadle, przeto płaszczyzny te są do siebie równoległe.

2. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ nazywamy podstawami albo dnami (dno górne i dolne), każdy z prostokątów ścianą boczną, a sumę ścian bocznych powierzchnią boczną graniastosłupa.

Rys. 87.



Proste, w których przecinają się ściany boczne z podstawami, nazywamy krawędziami przypodstawnemi, linie zaś przecięcia się ścian bocznych krawędziami bocznemi.

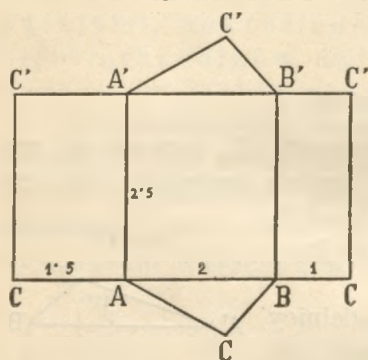
Wszystkie krawędzie boczne są do siebie równoległe (dlaczego?) i sobie równe.

Z dowolnego punktu jednej podstawy poprowadź prostopadłą do podstawy drugiej np. DD' . Odległość obu podstaw od siebie nazywamy wysokością graniastosłupa. Ponieważ każda krawędź boczna graniastosłupa jest do podstawy prostopadła, przeto jest ona zarazem jego wysokością.

3. Nakreśl siatkę prostego graniastosłupa trójkątnego, mając dane trzy jego krawędzie przypodstawne: 2 cm, 1,5 cm, 1 cm i krawędź boczną: 2,5 cm.

Siatka ta (rys. 88) składa się z trzech prostokątów $ABB'A'$, $BCC'B'$ i $AA'C'C$ i dwu przystających do siebie trójkątów: ABC i $A'B'C'$.

Rys. 88.



4. Gdy z graniastosłupami, przedstawionymi na rys. 51., 52., 53., 54. i 55., str. 32. i 33. i na rys. 76., str. 42., postąpisz podobnie jak w ust. 1., przekonasz się, że podstawy każdego z nich są wielokątami do siebie przystającymi i że płaszczyzny tych wielokątów są do siebie równoległe; nadto, że każdy z nich posiada tyle ścian

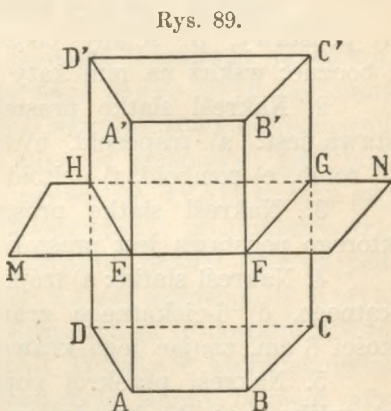
bocznych (prostokątów), ile podstawa ma boków.

5. Graniastosłupy nazywać będziemy od podstawy: jeżeli nią jest trójkąt, czworokąt, 5-ciokąt i t. d., graniastosłup nazywa się trójkątny, czworokątny ... wielokątny; gdy podstawą graniastosłupa czworokątnego jest trapezoid, trapez, deltoid, nazywać będziemy taki graniastosłup graniastosłupem trapezoidowym, trapezowym, deltoidowym.

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt umiaryowy, nazywa się graniastosłupem umiaryowym. Ściany boczne takiego graniastosłupa są prostokątami do siebie przystającymi.

Gdy podstawą prostego graniastosłupa jest równoległobok, to graniastosłup ten nazywamy także równoległościaniem prostym, gdy prostokąt lub kwadrat — prostopadłościaniem. Prostopadłościan, którego wszystkie krawędzie są sobie równe, jest sześcianiem.

6. Prosty graniastosłup, np. trapezoidowy, przetnij płaszczyzną MN, równoległą do płaszczyzny podstawy ABCD (rys. 89), to otrzymasz przekrój poprzeczny EFGH. Zmierz boki i kąty tego przekroju, a przekonasz się, że on przystaje do obu podstaw.



Praktycznie możesz się o tem przekonać w inny sposób: graniastosłup odcięty postaw ścianą EFGH na papierze i ścianę tę dokładnie obrysuj; gdy rysunek ten wytniesz z papieru i położysz odpowiednio na dno górne lub dolne danego graniastosłupa, to ono w zupełności rysunek ten nakryje.

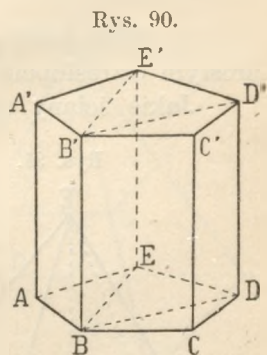
Graniastosłup prosty przetnij płaszczyzną, przechodzącą przez dwie nie sąsiednie krawędzie boczne np. BB' i EE' (rys. 90), to otrzymasz jako przekrój czworokąt BB'E'E, który nazywamy przekrojem przekątnym.

Zmierz boki i kąty czworokąta BB'E'E i powiedz, co to za czworokąt?

Poprowadź wszystkie przekroje przekątne z naroża B; ile ich otrzymasz?

Nakreśl przekroje przekątne prostego graniastosłupa a) czworokątnego, b) 6-ciokątnego. Na ile graniastosłupów trójkątnych rozpadnie się ten graniastosłup?

7. Siatkę prostego graniastosłupa czworo- pięcio- sześć- ... wielokątnego kreśli się w podobny sposób jak siatkę prostego graniastosłupa trójkątnego: składa się ona z dwu wielokątów do siebie przystających i tylu prostokątów, ile boków ma wielokąt.



Zadania.

1. Nakreśl dowolny graniastosłup prosty i wymień jego:
a) podstawy, b) ściany boczne, c) krawędzie przypodstawne i boczne; wskaż na nim kąty dwuścienne.

2. Nakreśl siatkę prostego graniastosłupa, którego podstawą jest: a) trapezoid, b) trapez, c) trapez równoramienny, d) romb, e) romboid, f) deltoid.

3. Nakreśl siatkę prostopadłościanu o wysokości 5 cm, którego podstawą jest prostokąt o bokach: 4 cm i 2,5 cm.

4. Nakreśl siatkę: a) trójkątnego, b) czworokątnego, c) 5-cio-
kątnego, d) 6-ciokątnego graniastosłupa umiarowego o wy-
sokości 6 cm, znając jego krawędź przypodstawną: 2,5 cm.

5. Nakreśl przekrój poprzeczny prostego graniastosłupa:
a) trójkątnego, b) kwadratowego, c) prostokątnego, d) rombo-
wego, e) romboidowego, f) trapezowego, g) deltoidowego.

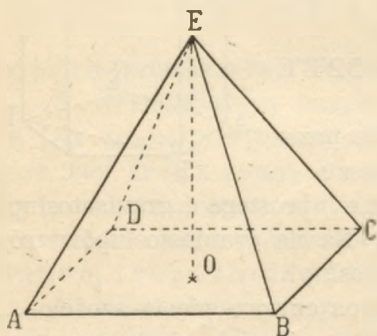
§ 2.

Ostrosłup.

1. Bryła, którą mamy przed sobą (rys. 91), nazywa się prostym ostrosłupem prostokątnym.

Jakie ściany ograniczają tę bryłę? Wymień kilka ciał, mających postać ostrosłupów.

Rys. 91.



Prostokąt ABCD nazywa się podstawą, każdy z trójkątów ścianą boczną, wszystkie trójkąty razem powierzchnią boczną ostrosłupa. Wspólny wierzchołek ścian bocznych nazywamy wierzchołkiem ostrosłupa.

Krawędzie: AE, BE, CE i DE, w których przecinają się ściany boczne, nazywamy, podobnie jak

przy graniastosłupie, krawędziami bocznymi; krawędzie zaś: AB, BC, CD i DA, w których przecina się podstawa

ze ścianami bocznymi, krawędziami przypodstawnymi ostrosłupa.

Prostopadła EO, poprowadzona z wierzchołka ostrosłupa do jego podstawy, nazywa się wysokością ostrosłupa.

Zmierz krawędzie boczne prostego ostrosłupa prostokątnego, to przekonasz się, że one są sobie równe czyli, że ściany boczne ostrosłupa prostokątnego są trójkątami równoramiennymi.

2. Ostrosłup nazywać będziemy od podstawy: gdy podstawą jest trójkąt, ostrosłup nazywa się trójkątny, gdy czworokąt — czworokątny (kwadratowy, prostokątny, trapezowy równoramienny) i t. d. Ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt umiadowy, nazywa się ostrosłupem umiadowym. Ściany boczne takiego ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi, do siebie przystającymi. Wysokość któregośkolwiek z tych trójkątów nazywa się wysokością ściany bocznej albo wysokością boczną ostrosłupa.

Umiadowy ostrosłup trójkątny, którego wszystkie krawędzie są sobie równe, zowie się czworościanem.

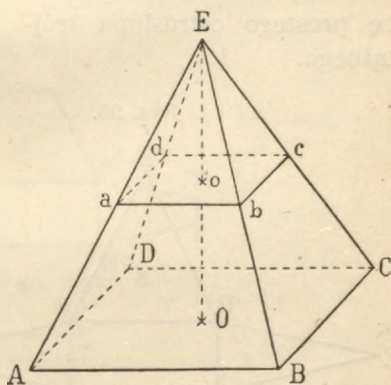
Ile krawędzi i ile ścian ma czworościan? Czem są ściany czworościanu?

3. Gdy ostrosłup prosty przetniesz płaszczyzną równoległą do podstawy, otrzymasz przekrój poprzeczny (rys. 92), który jest wielokątem o tej samej ilości boków, co podstawa; wielokąt ten jest tem mniejszy, im bliżej wierzchołka ostrosłupa przecięcie to uskuteczniłeś.

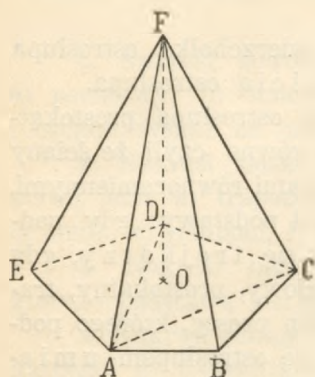
Przecinając prosty ostrosłup płaszczyzną, równoległą do podstawy, dzielisz go na dwie części; jedna z nich: ABCDabcd nazywa się prostym ostrosłupem ściętym, druga: Eabcd ostrosłupem uzupełniającym albo odciętym.

Zmierz krawędzie boczne prostego ostrosłupa ściętego, a przekonasz się, że jego ściany boczne są trapezami równoramiennymi.

Rys. 92.



Rys. 93.



Odległość obu podstaw ostrosłupa ściętego Oo nazywamy jego wysokością.

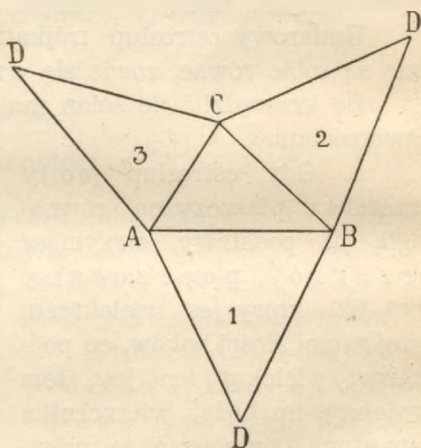
Gdy ostrosłup prosty $FABCDE$ (rys. 93) przetniesz płaszczyzną, przechodzącą przez jego dwie niesąsiednie krawędzie boczne, np. FA i FC , otrzymasz w przekroju trójkąt FAC , który nazywamy przekrojem przekątnym ostrosłupa.

Jakim trójkątem jest przekrój FAC ? Ile przekrojów przekątnych można poprowadzić z naroża A ?

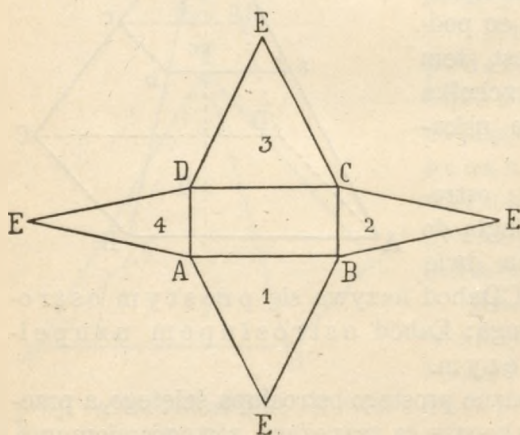
Na ile ostrosłupów trójkątnych można rozłożyć dany ostrosłup? Co możesz powiedzieć o wysokościach tych ostrosłupów?

4. Na bokach jakiegokolwiek trójkąta ABC (rys. 94) narysuj trzy trójkąty równoramienne o tych samych ramionach, to otrzymasz siatkę prostego ostrosłupa trójkątnego.

Rys. 94.



Rys. 95.



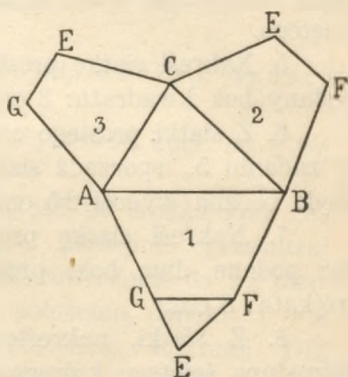
Podobnie narysuj siatkę prostego ostrosłupa prostokątnego, przedstawioną na rysunku 95.

Gdy siatkę taką wytniesz z papieru, a następnie trójkąty: 1, 2 i 3 (1, 2, 3 i 4)

obróćisz naokoło boków: AB, BC i CA (AB, BC, CD i DA) tak, że wierzchołki D (E) tych trójkątów padną na siebie, otrzymasz prosty ostrosłup trójkątny (prostokątny).

Na bokach rombu narysuj 4 trójkąty równoramienne, do siebie przystające, i przekonaj się, czy z tych pięciu utworów płaskich da się złożyć ostrosłup? Na jakich: a) czworokątach, b) wielokątach można zbudować ostrosłup prosty?

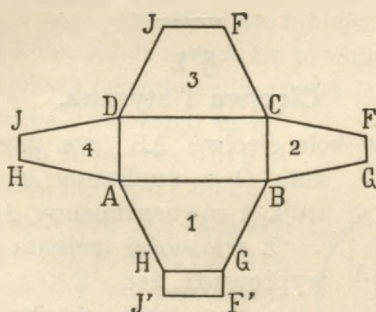
Rys. 96.



5. Nakreśl siatkę prostego ostrosłupa trójkątnego (rys. 94) i zetnij trójkąty równoramienne: 1, 2, 3 w ten sposób, aby ramiona trójkątów odciętych były sobie równe (rys. 96). Gdy na jednym z trapezów równoramiennych np. na ABFG narysujesz trójkąt EFG, którego boki GE i EF są równe bokom trapezów: GE i EF, otrzymasz siatkę prostego ostrosłupa ściętego trójkątnego.

W podobny sposób narysowana jest siatka prostokątnego ostrosłupa ściętego (rys. 97).

Rys. 97.



Zadania.

1. Nakreśl dowolny ostrosłup prosty i wymień jego: a) podstawę, b) ściany boczne, c) krawędzie przypodstawne i d) krawędzie boczne; wskaż na nim kąty dwuścienne.

2. Nakreśl przekrój poprzeczny prostego ostrosłupa:
a) trójkątnego, b) prostokątnego, c) kwadratowego, d) trapezowego równoramiennego.

3. Nakreśl przekroje przekątne prostego ostrosłupa:
a) czworokątnego, b) 6-ciokątnego.

4. Nakreśl siatkę umiarowego czworoscianu, którego krawędź wynosi: a) 4 cm, b) 5·5 cm, a następnie siatkę ostrosłupa ściętego.

5. Nakreśl siatkę prostego ostrosłupa kwadratowego, mając podany bok kwadratu: 3 cm i ramię trójkąta: 5 cm.

6. Z siatki prostego ostrosłupa kwadratowego, nakreślonej w zadaniu 5., sporządź siatkę ostrosłupa ściętego, którego krawędź boczna wynosi 2·5 cm.

7. Nakreśl siatkę prostego ostrosłupa prostokątnego, mając podane dwa boki prostokąta: 5 cm i 2 cm, oraz ramię trójkąta: 6 cm.

8. Z siatki, nakreślonej w zadaniu 7., sporządź siatkę ostrosłupa ściętego, którego krawędzie boczne wynoszą po 4 cm.

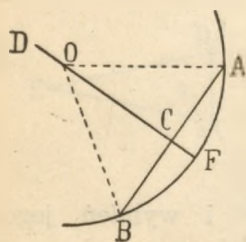
ROZDZIAŁ VIII. WŁASNOŚCI KOŁA.

§ 1.

Cięciwa i styczna.

1. Nakreśl w kole cięciwę AB (rys. 98) i połącz środek koła O z punktami A i B, a otrzymasz trójkąt równoramienny AOB.

Rys. 98.



Z własności trójkąta równoramiennego wyprowadź, że:

a) Symetralna cięciwy przechodzi przez środek koła,

b) symetralna kąta środkowego jest symetralną cięciwy i łuku,

c) prostopadła ze środka koła do cięciwy jest symetralną kąta środkowego i cięciwy.

2. Nakreśl cięciwę AB, równą promieniowi koła (rys. 99), i połącz jej punkty końcowe ze środkiem koła, a otrzymasz trójkąt ABO.

Jaki to trójkąt? Ile stopni wynosi kąt AOB? Jaką jest on częścią kąta pełnego?

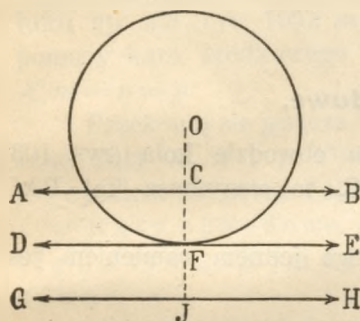
Ponieważ do równych kątów środkowych należą równe łuki, przeto:

Cięciwa, równa promieniowi, odcina szóstą część obwodu koła.

Zapomocą takiej cięciwy dzieli się obwód koła na 6 równych części.

3. Nakreśl sieczną AB i jej odległość od środka koła OC

Rys. 100.



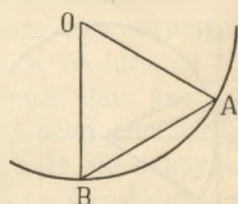
(rys. 100), następnie przesuwaj prostą AB równolegle do jej pierwotnego położenia, dopóki: 1) nie zajmie położenia stycznej DE, 2) nie przejdzie poza obwód koła w położenie GH. Ponieważ odległość OC jest mniejsza, a odległość OJ większa aniżeli promień OF, przeto możesz powiedzieć:

Jeżeli odległość prostej od środka koła jest mniejsza od promienia, prosta ta jest sieczną koła, jeżeli równa się promieniowi, jest styczną, jeżeli zaś jest większa od promienia, prosta leży poza kołem.

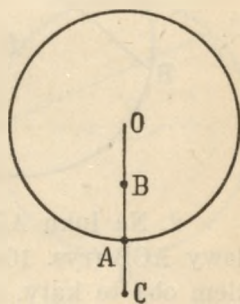
4. Dowolny punkt C, położony za kołem, połącz ze środkiem koła (rys. 101), to zobaczysz, że odcinek CO jest większy aniżeli promień; odcinek zaś BO, łączący środek koła z punktem B, położonym wewnątrz koła, jest mniejszy od promienia. Zatem: $OC > OA$; $OB < OA$ — to znaczy:

Jeżeli punkt znajduje się poza kołem, to odległość tego punktu od środka koła jest większa od promienia, jeżeli zaś wewnątrz koła, wówczas odległość ta jest mniejsza od promienia.

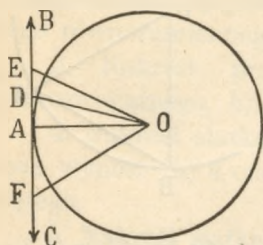
Rys. 99.



Rys. 101.



Rys. 102.



5. W punkcie końcowym promienia AO , t. j. w A (rys. 102) nakreśl prostą BC do tego promienia i połącz dowolne jej punkty D , E i F ze środkiem koła.

W trójkątach: AOD , AOE , AOF czem jest bok AO , a czem boki DO , EO i FO ? Który z tych boków jest najkrótszy?

Ponieważ proste: DO , EO i FO są dłuższe aniżeli promień AO , przeto punkty D , E i F leżą poza obwodem koła. Prosta BC ma zatem z linią kołową tylko jeden punkt wspólny A , czyli jest styczną koła.

Prostopadła do promienia, nakreślona w jego punkcie, położonym na obwodzie koła, jest styczną koła.

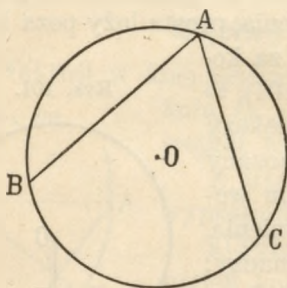
§ 2.

Kąty obwodowe.

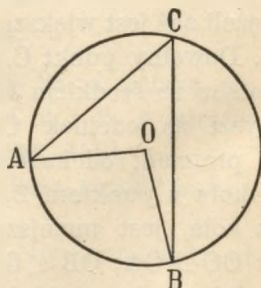
1. Z punktu A , położonego na obwodzie koła (rys. 103), nakreśl dwie cięciwy np. AB i AC , to otrzymasz kąt BAC , zwany kątem obwodowym.

Nakreśl kąt obwodowy, którego jednym ramieniem jest średnica koła.

Rys. 103.



Rys. 104.



2. Na łuku AB nakreśl kąt środkowy AOB i kąt obwodowy ACB (rys. 104), następnie zmierz a) kątomierzem, b) cyrklem oba te kąty, a przekonasz się, że kąt środkowy AOB jest dwa razy tak wielki jak kąt obwodowy ACB .

O tem samem możesz się przekonać i w ten sposób:

W kole lub dwu równych kołach odmierz dwa równe łuki; na jednym z nich nakreśl kąt środkowy, a na drugim kąt obwodowy. Kąty te wytnij z papieru, następnie złam kąt środkowy tak, aby jego ramiona leżały na sobie i połóż odpowiednio na kącie obwodowym, a zobaczysz, że oba kąty się nakryją.

Kąt obwodowy jest połową kąta środkowego, opartego na łuku tej samej wielkości w tem samem kole lub w kołach równych.

Przekonaj się jeszcze o tem, nakreśliwszy kąt obwodowy tak, aby wierzchołek kąta środkowego leżał: a) na jego ramieniu, b) poza jego polem.

3. Nakreśl kilka kątów obwodowych, opierających się na tym samym łuku np. AB (rys. 105): m , n , p i przy pomocy kąta środkowego r wykaż, że $m = n = p$.

Przekonaj się jeszcze o tem, a) mierząc kąty m , n i p 1^o) kątomierzem, 2^o) cyrklem, b) przez nakrycie.

Kąty obwodowe, opierające się na tym samym łuku, są sobie równe.

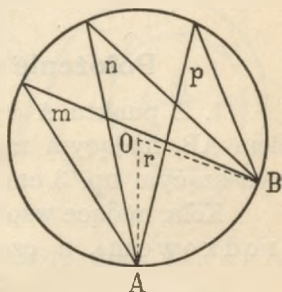
Co możesz powiedzieć o kątach obwodowych, wspierających się na dwu łukach równej wielkości w dwu równych kołach?

4. Końce średnicy AB (rys. 106) połącz prostymi z dowolnym punktem, położonym na obwodzie koła np. z punktem C , a otrzymasz kąt obwodowy ACB . Kąt obwodowy, którego ramiona opierają się na końcach średnicy, nazywamy kątem na średnicy albo kątem w półkolu.

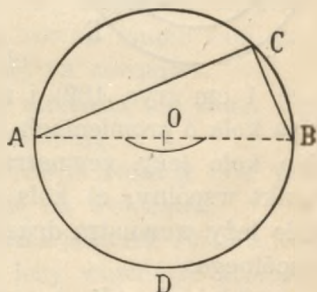
Na którym łuku opiera się kąt ACB ? Który jeszcze kąt opiera się na tym samym łuku? Ile stopni wynosi kąt środkowy AOB , a ile kąt obwodowy ACB ?

Kąt w półkolu jest kątem prostym.

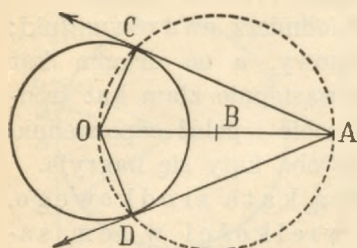
Rys. 105.



Rys. 106.



Rys. 107.



5. Zadanie. Z punktu A, położonego poza kołem (rys. 107), nakreśl styczną do tego koła.

Punkt A połącz ze środkiem koła prostą AO i ze środka B tego odcinka zatocz promieniem AB drugie koło, które przetnie koło dane w punktach C i D. Połączysz punkty C i D z punktami A i O, otrzymasz kąty proste ACO i ADO (kąty na średnicy OA); a że OC i OD są promieniami danego koła, przeto AC i AD są jego stycznymi.

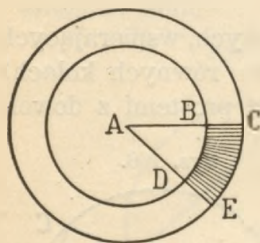
§ 3.

Położenie dwu kół względem siebie.

1. Z punktu A (rys. 108) nakreśl dwa koła: jedno promieniem AB, mającym np. 2 cm długości, drugie promieniem AC, wynoszącym np. 3 cm.

Koła, mające wspólny środek, nazywamy kołami współśrodkowymi, a część płaszczyzny, ograniczoną obwodami dwu kół współśrodkowych, pierścieniem kołowym. Różnica promieni kół współśrodkowych (BC) nazywa się szerokością pierścienia.

Rys. 108.



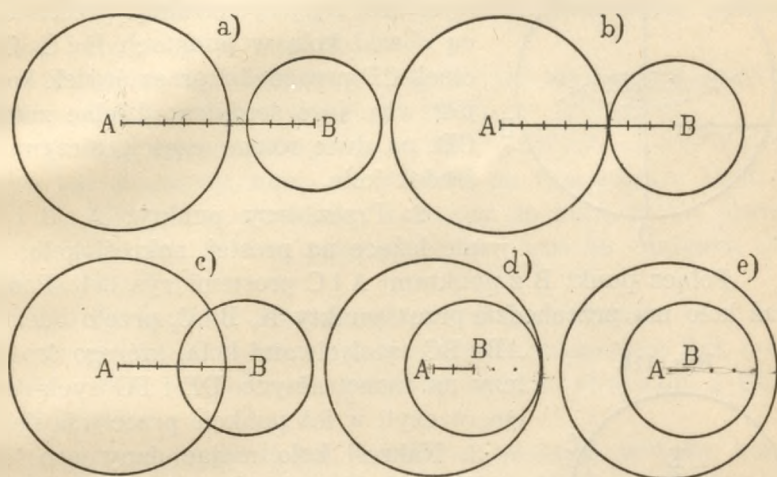
Część pierścienia np. BCED, odciętą dwoma promieniami koła, nazywamy wycinkiem pierścienia.

2. Gdy nakreślisz odcinek AB długości: a) 9 cm, b) 8 cm, c) 6 cm, d) 2 cm i e) 1 cm (rys. 109) i z jego punktów końcowych zatoczysz dwa koła o promieniach 5 cm i 3 cm, to spostrzeżesz, że: a) jedno koło leży zewnątrz drugiego, b) i d) koła mają jeden punkt wspólny, c) koła mają dwa punkty wspólne, e) jedno koło leży wewnątrz drugiego, ale nie ma z nim żadnego punktu wspólnego.

Odcinek AB, łączący środki dwu kół, nazywamy dośrodkową.

O kołach, które mają tylko jeden punkt wspólny, mówimy, że się stykają. Jeżeli jedno koło leży zewnątrz drugiego (rys. 109 *b*), koła stykają się na zewnątrz; jeżeli zaś je-

Rys. 109.



dno koło leży wewnątrz drugiego (rys. 109 *d*), koła stykają się na wewnątrz.

O kołach, które mają dwa punkty wspólne (rys. 109 *c*), mówimy, że się przecinają.

Porównaj długości dośrodkowych i promieni obu kół, a przekonasz się, że:

a) Jeżeli dośrodkowa (9 cm) jest większa niż suma obu promieni (5 cm + 3 cm), to jedno koło leży zewnątrz drugiego.

b) Jeżeli dośrodkowa (8 cm) jest równa sumie obu promieni (5 cm + 3 cm), to koła stykają się na zewnątrz.

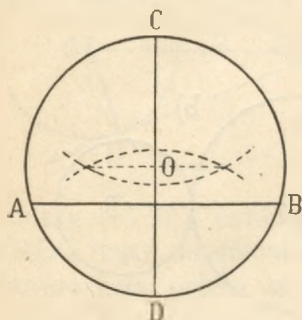
c) Jeżeli dośrodkowa (6 cm) jest mniejsza niż suma obu promieni (5 cm + 3 cm), to koła się przecinają.

d) Jeżeli dośrodkowa (2 cm) jest równa różnicy obu promieni (5 cm — 3 cm), to koła stykają się na wewnątrz.

e) Jeżeli dośrodkowa (1 cm) jest mniejsza niż różnica obu promieni (5 cm — 3 cm), to koło jedno leży wewnątrz drugiego i nie ma z nim żadnego punktu wspólnego.

Zadania.

Rys. 110.



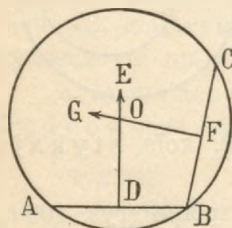
1. Znajdź środek koła, mając dany jego obwód.

Nakreśl dowolną cięciwę np. AB (rys. 110) i jej symetralną, przecinającą obwód koła w punktach D i C. Odcinek CD przechodzi przez środek koła, jest więc jego średnicą; dzieląc zatem CD na dwie równe części, otrzymasz środek koła.

2. Przez trzy punkty: A, B i C, nie leżące na prostej, nakreśl koło.

Połącz punkt B z punktami A i C prostymi (rys. 111). Ponieważ koło ma przechodzić przez punkty A, B i C, przeto odcinki AB i BC są cięciwami koła, którego środek leży na symetralnych DE i FG tych dwu cięciw czyli w ich punkcie przecięcia się O.

Rys. 111.



3. Nakreśl koło, mając dany jego łuk.

Nakreśl dwie dowolne (nie równoległe) cięciwy i postąp podobnie jak w zadaniu poprzednim.

4. Dany łuk podziel na dwie równe części.

Połowi się przynależny kąt środkowy.

5. Obwód koła podziel na: a) 2, b) 4, c) 8 równych części.

Kreśli się w: a) średnicę, b) dwie prostopadłe do siebie średnice, c) połowi się łuki otrzymane w b).

6. Obwód koła podziel na: a) 6, b) 3, c) 12 równych części.

a) Zob. str. 57. ust. 2.; b) przy podziale w a) uwzględnij tylko co drugi punkt; c) przepołów łuki otrzymane w b).

7. Obwód koła podziel na: a) 5, b) 9 równych części.

Zapomocą kątomierza nakreśl kąt środkowy: a) $360^\circ : 5 = 72^\circ$, b) $360^\circ : 9 = 40^\circ$, a następnie przenieś na obwodzie koła łuk, odcięty ramionami tego kąta.

8. Na odcinku AB o długości 6 cm leżą dwa punkty C i D w odległości 2 cm i 4 cm od punktu A. Nakreśl koło z punktu A promieniem AD i powiedz, jakie położenie mają punkty B i C względem tego koła.

9. Nakreśl koło promieniem 4 cm i proste w odległości:
a) 2 cm, b) 4 cm, c) 6 cm od środka koła. Nazwij te proste.

10. Nakreśl koło promieniem 3 cm i jego styczną.

11. Z danego punktu zakresł koło, któreby się stykało z daną prostą.

12. Promieniem 3·5 cm nakreśl koło, któreby się stykało z daną prostą AB w punkcie C.

13. Oblicz kąt obwodowy, wspierający się na tym samym łuku, co kąt środkowy: a) 54° , b) $76^\circ 53'$, c) $127^\circ 11' 70''$.

14. Kąt obwodowy wynosi: a) 26° , b) $35^\circ 25'$, c) $104^\circ 5' 20''$; oblicz kąt środkowy, który się wspiera na tym samym łuku.

15. Oblicz kąt obwodowy, należący do łuku, który równa się: a) czwartej, b) dwu piątym, c) dwu trzecim częściom obwodu koła.

16. Na odcinku AB nakreśl trójkąt prostokątny.

Ze środka O odcinka AB nakreśl promieniem AO koło i połącz dowolny punkt C, położony na jego obwodzie, z punktami A i B.

Ponieważ punkt B jest dowolnym punktem obwodu koła, przeto na odcinku AB możesz nakreślić bardzo wiele trójkątów prostokątnych (zadanie nieoznaczone).

17. Nakreśl dwa koła współśrodkowe o promieniach 1·5 cm i 2·4 cm i oblicz szerokość pierścienia.

18. Nakreśl dwa koła współśrodkowe, gdy szerokość pierścienia wynosi 1·5 cm, a promień koła a) mniejszego 4·5 cm, b) większego 5·9 cm.

19. Nakreśl dwa koła, mając dane:

a) dośrodkową 4·1 cm, promienie 2·1 cm i 1·4 cm;

b) » 3·4 » » 2 » i 1·4 »

c) » 2·5 » » 1·4 » i 1·6 »

d) » 2 » » 4·2 » i 1·7 »

e) » 2·4 » » 3 » i 0·6 »

f) » 0·6 » » 3·5 » i 2·6 »

g) » 0 » » 2·9 » i 2·2 »

20. Znajdź punkt, oddalony o 2 cm od końców odcinka 3 cm długiego. (Z końców odcinka zakresł dwa koła promieniem 2 cm).

21. Odcinek AB ma 3·5 cm długości. Znajdź punkt, oddalony od punktu A o 2 cm, a od punktu B o 3 cm. (Zob. zadanie 20.).

22. Nakreśl dwa koła równe o promieniach 20 mm, mając daną długość dośrodkowej: a) 55 mm, b) 40 mm, c) 36 mm.

23. Promienie dwu kół wynoszą 5·4 cm i 4·4 cm; jak wielka musi być dośrodkowa, aby koła te stykały się: a) na zewnątrz, b) na wewnątrz?

24. Promieniem 16 mm nakreśl trzy koła, któreby się stykały na zewnątrz.

Nakreśl trójkąt równoboczny o boku 32 mm i z jego wierzchołków zatocz koła promieniem 16 mm.

25. Nakreśl koło promieniem 32 mm, a następnie dwa równe koła, któreby się stykały ze sobą na zewnątrz, a z danym kołem na wewnątrz.

26. Nakreśl koło promieniem 3 cm, a następnie dwa koła o promieniach 4 cm i 3·5 cm, któreby przechodziły przez środek koła pierwszego.

ROZDZIAŁ IX.

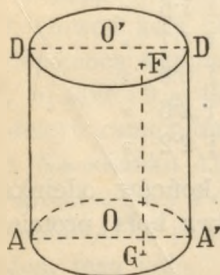
WALEC. STOŻEK. KULA.

§ 1.

Walec.

1. Bryła, przedstawiona na rys. 112., nazywa się kołowym walcem prostym; bryła ta ograniczona jest dwoma kołami, zwanymi podstawami lub dnami (dno górne, dolne) i powierzchnią krzywą, którą nazywamy poboczną walca.

Rys. 112.



Słupy (kolumny) budowlane, telegraficzne, tramwajowe, kamienie młyńskie, wálki do roztaczania ciasta i t. p. mają postać walca.

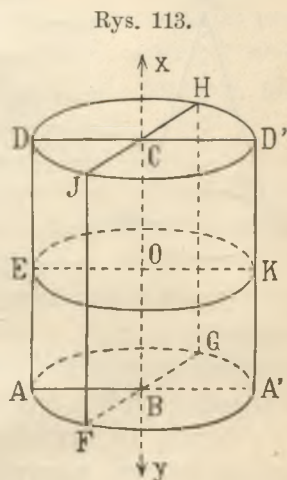
Gdy walec prosty ustawisz dnem na papierze i dno to obrysujesz, to zobaczysz, że

drugie dno walca w zupełności rysunek ten nakryje. Podstawy (dna) walca są więc kołami do siebie przystającymi.

Do pobocznic walca prostego, postawionego na stole, przykładaj pion i mierz długość nitki od jednego dna do drugiego, a przekonasz się, że długości te są sobie równe; płaszczyzny obu kół są zatem do siebie równoległe.

Z dowolnego punktu jednego dna np. F nakreśl prostopadłą na dno drugie, a otrzymasz odcinek FG , który nazywa się wysokością walca.

2. Jeżeli drut kształtu prostokąta $ABCD$, przytwierdzony do pręta xy (rys. 113), osadzisz na osi wirownicy i wirownicę tę wprawisz w ruch, to boki tego prostokąta: AB i DC opiszą dna, bok AD pobocznice walca, a prostokąt walec prosty. Prosta xy , przechodzącą przez środki obu kół, nazywamy osią walca.



3. Gdy walec przetniesz płaszczyzną, równoległą do podstawy (rys. 113), i przekrój ten obrysujesz, to przekonasz się, że jest on kołem, przystającym do dna walca. Przekrój ten nazywa się przekrojem poprzecznym walca.

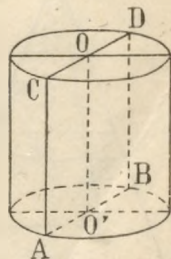
Przetnij walec prosty (rys. 113) płaszczyzną, przechodzącą przez jego oś, a otrzymasz przekrój $FGHJ$. Zbadaj, jakim utworem jest ten przekrój. — Prostokątem. — Przekrój taki nazywamy przekrojem osiowym walca.

Rys. 114.

Krawędź np. FJ , w której przecina się przekrój osiowy z poboczną walca, zowiemy bokiem walca.

Bok walca prostego jest równy wysokości tego walca.

Walec prosty, którego przekrój osiowy jest kwadratem (rys. 114), nazywa się walcem równobocznym. Średnica więc podstawy takiego walca jest równa jego bokowi i wysokości.

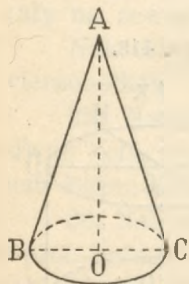


§ 2.

Stożek.

1. Bryłę, przedstawioną na rysunku 115., ograniczoną kołem i powierzchnią krzywą, nazywamy kołowym stożkiem prostym. Koło nazywa się podstawą (dnem), powierzchnia krzywa poboczną, a naroże (A) wierzchołkiem stożka.

Rys. 115.



Głowa cukru, igła, sopel lodu i t. p. mają kształt stożka.

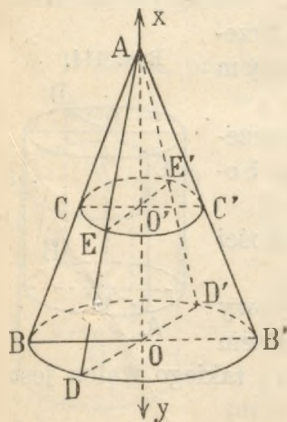
Zapomocą nitki lub linealu możesz przekonać się, że wierzchołek stożka prostego jest równo oddalony od każdego punktu, położonego na obwodzie dna.

Odcinek (AO), nakreślony z wierzchołka stożka prostopadłe do podstawy, nazywa się wysokością stożka.

2. Jeżeli drut kształtu trójkąta prostokątnego AOB (rys. 116) wprawisz w ruch naokoło prostej xy (zob. str. 65. ust. 2.); to przyprostokątnia BO opisze podstawę, przeciwprostokątnia AB poboczną stożka prostego, a trójkąt stożek prosty.

Prostą xy, przechodzącą przez wierzchołek stożka i środek jego podstawy, nazywamy osią stożka. Wysokość stożka prostego (AO) jest odcinkiem jego osi.

Rys. 116.



3. Przekrój stożka, równoległy do podstawy, nazywa się przekrojem poprzecznym stożka.

Jeżeli trójkąt AOB (rys. 116) obrócisz naokoło osi xy o 360° , to punkt C, położony na przeciwprostokątnej tego trójkąta, opisze koło, które jest przekrojem poprzecznym stożka ABB'. Przekrój więc poprzeczny stożka jest kołem.

Jeżeli przez oś stożka prostego (rys. 116) poprowadzisz dowolną płaszczyznę, to przetniesz jego poboczną w odcinkach AD i AD', podstawę zaś w odcinku DD'. Taki przekrój stożka nazywamy

przekrojem osiowym, a odcinki AD i AD' bokami stożka prostego.

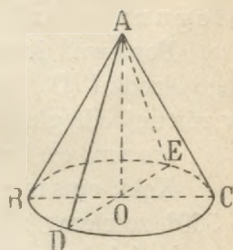
Przekrój osiowy stożka prostego jest trójkątem równoramiennym (dlaczego?).

Stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym (rys. 117), nazywa się stożkiem równobocznym. Średnica więc podstawy stożka równobocznego jest równa jego bokowi.

4. Jeżeli stożek przetniesz płaszczyzną, równoległą do podstawy (rys. 116), podzielisz go na dwie części. Jedną z nich: $BB'C'C$, zawartą między kołami: BDB' i CEC' , których płaszczyzny są do siebie równoległe, nazywamy stożkiem ściętym, drugą: ACC' stożkiem uzupełniającym albo odciętym. Koła, ograniczające stożek ścięty, nazywają się podstawami albo dnami (dno większe i mniejsze), a ich odległość od siebie (OO') wysokością prostego stożka ściętego. Powierzchnia krzywa, zawarta między dnami stożka ściętego, nazywa się jego poboczną.

Przekrój osiowy prostego stożka ściętego $DEE'D'$ (rys. 116) jest trapezem równoramiennym (dlaczego?).

Rys. 117.



§ 3.

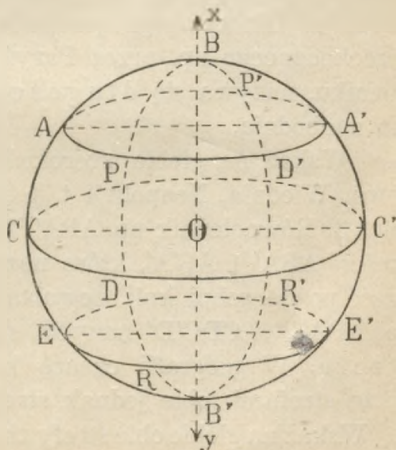
K u l a.

Rys. 118.

1. Jeżeli drut kształtu koła BCA' (rys. 118) wprowadzimy w ruch naokoło osi xy , przechodzącej przez środek tego koła (zob. str. 65. ust. 2.), to opisze on powierzchnię krzywą, zwaną powierzchnią kulistą; część przestrzeni, ograniczoną tą powierzchnią, nazywamy kulą.

Wymień kilka przedmiotów, mających postać kuli.

Prostą xy , naokoło której obracaliśmy koło, nazywamy



osią, a jej punkty B i B', położone na obwodzie tego koła, biegunami kuli.

Ponieważ każdy punkt koła BCA' jest równo oddalony od jego środka (O), przeto każdy punkt na powierzchni kuli leży w równej odległości od tego punktu, zwanego środkiem kuli.

Promienie więc (średnice) kuli są sobie równe.

Koło, opisane przez punkt np. A podczas obrotu koła BCA' o 360° , zwiemy równoleżnikiem. Równoleżnik (CDC'), którego środek jest zarazem środkiem kuli, nazywa się równikiem.

Wskaż na globie równik, równoleżnik Krakowa, Rzymu i t. p.

Każdorazowe położenie koła BCA' podczas jego obrotu naokoło osi xy o 180° , np. położenie BPB'P', nazywamy południkiem kuli. Południki więc są to koła, przechodzące przez oba bieguny.

Wskaż na globie południk Krakowa, Paryża, Rzymu i t. p.

2. Ponieważ przez punkt np. P, położony na powierzchni kuli, poprowadzić można jeden równoleżnik APA'P' i jeden południk BPB'P', przeto położenie punktu na powierzchni kuli, np. na ziemi, wyznaczamy zapomocą równoleżnika i południka. W tym celu dzielimy równik na 360 stopni łukowych i przez każdy punkt podziału prowadzimy południk. Podobnie dzielimy ćwiartkę południka na 90° łukowych i w odstępach jednostopniowych prowadzimy równoleżniki. Odległość danej miejscowości od równika, np. miejscowości P, zmierzona na południku tej miejscowości, jest jej szerokością geograficzną północną albo południową; odległość zaś południka tej miejscowości od tak zwanego południka głównego, t. z. od południka, przechodzącego np. przez Paryż lub Greenwich, zmierzona na równiku, nazywa się długością geograficzną wschodnią lub zachodnią.

Wskaż na globie szerokość i długość geograficzną: Krakowa, Wiednia, Neapolu i t. p.

3. Równoleżnik np. APA'P' dzieli powierzchnię kuli na dwie części: ABA' i AB'A', które nazywamy czaszami kulistemi. Część powierzchni kuli, zawarta między dwoma równoleżnikami np. APA'P' i CDC'D' nazywa się pasem sferycznym albo strefą. W geografii czasie kuliste: BAA' i EB'E' nazywają także strefami; obie jednak strefy zimne są czaszami kulistemi.

Wskaż na globie obie strefy zimne, umiarkowane i strefę gorącą.

