

BIBLIOTEKA
PW
SP.
KRAKÓW

34.754

Kronz
Arytmetyka

LEHRANZ

ARYTMETYKA

3

ALGEBRA

CZĘŚĆ II.



34.754

Bożia Dyakowska
I licealna

SPIS RZECZY.

Rozdział I.

Liczby ogólne i ujemne. Działania na tych liczbach.

	Str.
§ 1. Liczby ogólne	1
§ 2. Liczby ujemne	2
§ 3. Dodawanie i odejmowanie liczb algebraicznych	4
§ 4. Potęga, współczynnik, redukcya	7
§ 5. Mnożenie liczb algebraicznych	10
§ 6. Dzielenie liczb algebraicznych	13

Rozdział II.

Wielomiany.

§ 1. Określenia. Porządkowanie wielomianów	17
§ 2. Dodawanie i odejmowanie wielomianów	19
§ 3. Mnożenie wielomianów	23
§ 4. Dzielenie wielomianów	26

Rozdział III.

Podnoszenie liczb do kwadratu i wyciąganie pierwiastka kwadratowego z liczb.

§ 1. Podnoszenie liczb do kwadratu	31
§ 2. Wyciąganie pierwiastka kwadratowego z liczb	34

Rozdział IV.

Ułamki algebraiczne.

§ 1. Określenie ułamka. Rozkładanie liczb na czynniki pierwsze . .	38
§ 2. Upraszczanie ułamków i sprowadzanie ich do wspólnego mianownika	41
§ 3. Dodawanie i odejmowanie ułamków	43
§ 4. Mnożenie ułamków	47
§ 5. Dzielenie ułamków	51

Nazywając α , β , γ kąty wewnętrzne jakiegokolwiek trójkąta, możemy własność tych kątów przedstawić w formie: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Liczby, oznaczone literami, nazywamy liczbami ogólnemi, a naukę o nich arytmetyką ogólną.

Ponieważ liczba ogólna wyraża dowolną ilość jednostek lub części jednostki, przeto można ją zastąpić albo inną liczbą ogólną albo też liczbą szczególną; zastąpienie takie nazywamy podstawieniem.

W wyrażeniu np. $\frac{b \cdot c}{a}$ podstawiając m zamiast c , otrzymamy: $\frac{b \cdot m}{a}$; podobnie w $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$ przyjmując $a = 6$, $b = 10$, $c = 3\cdot5$, otrzymamy: $\frac{6}{10} - \frac{3\cdot5}{10} = \frac{6 - 3\cdot5}{10} = \frac{2\cdot5}{10} = 0\cdot25$.

Arytmetyka ogólna ma tę wyższość nad arytmetyką szczególną, że prawo, wyprowadzone ogólnie, obejmuje wszystkie liczby i że wyraża prawdę matematyczną krótko i przejrzyście.

§ 2.

Liczby ujemne.

Jeżeli odejmiemy np. 5 m od 8 m, otrzymamy różnicę 3 m ($8 - 5 = 3$); odejmując zaś 8 m od 8 m, otrzymamy różnicę zero ($8 - 8 = 0$). Gdybyśmy od 5 m mieli odjąć 8 m, to możemy od 5 m odjąć tylko 5 m, a pozostaną do odjęcia jeszcze 3 m, które w odjemnej nie mają pokrycia. Zaznaczamy to pisząc: $5 - 8 = 5 - 5 - 3 = 0 - 3 = -3$ (po opuszczeniu zera).

Dla przedstawienia takich różnic, w których odjemnik jest większy aniżeli odjemna, wprowadzamy nowe liczby, takie jak np. -3 , i nazywamy je liczbami ujemnemi. W przeciwstawieniu do tego nazywać będziemy różnice, których odjemnik jest mniejszy od odjemnej, np.: $8 - 5 = 3 + 5 - 5 = 3 + +0 = 0 + 3 = +3$, liczbami dodatniemi.

Znaki $+$ (więcej) i $-$ (mniej), stojące przy liczbach dodatnich i ujemnych, nazywamy znakami algebraicznymi tych liczb.

Liczby dodatnie i ujemne nazywamy liczbami względnymi albo algebraicznymi, a naukę o nich algebrą.

Wartość liczby, bez względu na jej znak algebraiczny, nazywamy wartością bezwzględną tej liczby. Tak np. 5 i 8 są wartościami bezwzględnymi liczb algebraicznych: $+5$ i -8 .

Liczby, mające równe wartości bezwzględne, a różniące się tylko znakami, jak np. $+4$ i -4 albo $+c$ i $-c$, nazywamy liczbami wprost przeciwnymi.

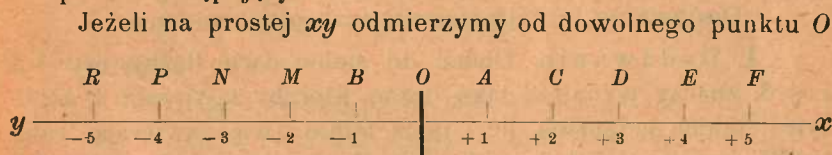
Jeżeli przy odejmowaniu dwu liczb, np. $7-5$, pozostawimy odjemną niezmienioną, a odjemnik będziemy powiększali, to otrzymywać będziemy coraz to mniejsze reszty: $7-5=2$, $7-6=1$, $7-7=0$, $7-8=-1$, $7-9=-2$, $7-10=-3$, i t. d.; zero jest zatem mniejsze od 1, -1 mniejsze od zera, -2 większe od -3 , a mniejsze od -1 .

Liczba ujemna jest mniejsza od zera; z dwu zaś liczb ujemnych ta jest większa, której wartość bezwzględna jest mniejsza.

Znaki algebraiczne: $+$ i $-$, którymi zaopatrzone są liczby, oznaczają przeciwieństwo, jakie zachodzi między temi liczbami.

Np. $+5$ m może oznaczać 5 m, mierzonych od pewnego miejsca na prawo albo w górę, zaś -5 m tę samą ilość metrów, ale mierzonych na lewo albo w dół. Podobnie $+7\frac{1}{2}$ K oznaczać może $7\frac{1}{2}$ K dochodu, zysku lub majątku, podczas gdy $-7\frac{1}{2}$ K wyrażać będzie $7\frac{1}{2}$ K rozchodu, straty lub długu. W podobny sposób oznacza się czas po pewnej epoce i czas przed tą epoką, stopnie ciepła i zimna i t. d.

Obrazowo przedstawić możemy liczby dodatnie i ujemne w sposób następujący:



dwa równe odcinki: $OA=1$ cm, $OB=1$ cm, położone po obu stronach tego punktu, to dla wyrażenia, że jeden z nich leży po prawej, drugi zaś po lewej stronie punktu O , nazwemy pierwszy $+1$ cm, drugi -1 cm.

Jeżeli z punktu O posuniemy się na prawo do punktów:

$A, C, D, E, \dots$, oddalonych od punktu O o 1, 2, 3, 4, ... cm, otrzymamy odcinki: $OA, OC, OD, OE, \dots$, przedstawiające liczby dodatnie: $+1, +2, +3, +4, \dots$; jeżeli zaś z tego samego punktu O posuniemy się o 1, 2, 3, 4, ... cm na lewo, otrzymamy odcinki: $OB, OM, ON, OP, \dots$, które będą przedstawiać liczby ujemne: $-1, -2, -3, -4, \dots$

Jednostkę $+1$, zapomocą której mierzymy odcinki, położone po prawej stronie punktu O , nazywamy jednostką dodatnią, jednostkę zaś -1 , służącą do mierzenia odcinków, położonych po przeciwnej stronie punktu O , nazywamy jednostką ujemną.

Liczby dodatnie są to liczby, utworzone z jednostek dodatnich; liczby zaś ujemne są to liczby, utworzone w ten sam sposób z jednostek ujemnych.

Jeżeli, wychodząc z punktu O , posuniemy się na prawo np. o 3 cm t. j. do D , a stąd w tym samym kierunku, co poprzednio (a więc na prawo), o 2 cm, to, znajdując się w punkcie F , jesteśmy oddaleni od p. O o 5 cm na prawo, co zaznaczamy: $+3 + 2 = +5$. W ten sam sposób odczytamy na rysunku, że $-3 - 2 = -5$. Jeżeli natomiast posuniemy się od p. O o 5 cm na prawo t. j. do F , a stąd na lewo o 7 cm, to znajdziemy się w punkcie M , oddaleni od O o 2 cm na lewo czyli, że $+5 - 7 = -2$. Podobnie $-5 + 7 = +2$.

Na rysunku odczytać łatwo, że np. $+5 - 5 = 0$ albo ogólnie $+a - a = 0$, t. z. Dwie liczby wprost przeciwne znoszą się.

§ 3.

Dodawanie i odejmowanie liczb algebraicznych.

1. Dodawanie. Dodać do siebie dwie liczby, np. $+5$ i $+3$, znaczy wynaleźć taką liczbę, któraby zawierała w sobie tyle i takich jednostek, ile i jakie tamte dwie zawierają. Taką liczbą będzie $+5 + 3$ czyli $+8$. Postępowanie to wyrażamy w ten sposób, że ujmujemy każdy składnik w nawias () dla oznaczenia, że znak algebraiczny należy do liczby, a między nawiasami piszemy znak dodawania.

A zatem: $(+5) + (+3) = +5 + 3 = +8$. Podobnie znajdziemy:

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8,$$

$$(+5) + (-3) = +5 - 3 = +2,$$

$$(-5) + (+3) = -5 + 3 = -2.$$

Ogólnie możemy napisać:

$$(+a) + (+b) = +a + b,$$

$$(-a) + (-b) = -a - b,$$

$$(+a) + (-b) = +a - b,$$

$$(-a) + (+b) = -a + b.$$

Mając wyznaczyć sumę kilku liczb, np. $+a$, $-b$, $+c$, dodajemy do siebie naprzód dwie: $(+a) + (-b) = +a - b$, a do otrzymanej sumy trzecią liczbę: $(+a - b) + (+c) = +a - b + c$; a zatem: $(+a) + (-b) + (+c) = +a - b + c$.

Liczby algebraiczne dodaje się do siebie w ten sposób, że się je stawia obok siebie z ich znakami.

2. Odejmowanie Odjąć od liczby np. $(+5)$ drugą np. $(+2)$ znaczy znaleźć trzecią liczbę, którąby, dodana do drugiej, dała pierwszą jako sumę. Taką liczbą jest tu $(+3)$, gdyż $(+2) + (+3) = +5$. A zatem: $(+5) - (+2) = +3$. Do tego samego wyniku możemy także dojść zapomocą dodawania. Jeżeli bowiem do $(+5)$ dodamy (-2) , otrzymamy: $(+5) + (-2) = +5 - 2 = +3$.

Z tego wynika, że:

$$(+5) - (+2) = (+5) + (-2) = +5 - 2 = +3.$$

Podobnie wyprowadzimy, że:

$$(+5) - (-2) = (+5) + (+2) = +5 + 2 = +7,$$

$$(-5) - (+2) = (-5) + (-2) = -5 - 2 = -7,$$

$$(-5) - (-2) = (-5) + (+2) = -5 + 2 = -3.$$

Ogólnie:

$$(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = +a - b,$$

$$(+a) - (-b) = (+a) + (+b) = +a + b,$$

$$(-a) - (+b) = (-a) + (-b) = -a - b,$$

$$(-a) - (-b) = (-a) + (+b) = -a + b.$$

Liczby algebraiczne odejmuje się od siebie, że obok odjemnej z tym samym znakiem umieszcza się odjemnik ze znakiem przeciwnym.

Mając wyznaczyć różnicę kilku liczb, np. $+a$, $+b$, $-c$, odejmuje się od siebie naprzód dwie liczby, a od tej różnicy trzecią: $(+a) - (+b) = (+a) + (-b) = +a - b$, $(+a - b) - (-c) = (+a - b) + (+c) = +a - b + c$.

A zatem:

$$(+a) - (+b) - (-c) = +a - b + c.$$

Zadania.

1. $(+25) + (+42) = ?$
2. $(-35) + (-21) = ?$
3. $(-50) + (+34) = ?$
4. $(-47) + (-163) = ?$
5. $(+35) + (+27) + (-42) = ?$
6. $(-49) + (-11) + (-60) = ?$
7. $(+2.5) + (-3.4) + (-7.2) = ?$
8. $(+\frac{1}{3}) + (-\frac{5}{6}) + (-\frac{2}{6}) = ?$
9. $(+0.73) + (-1.2) + (+0.03) + (+0.5) + (-7.69) = ?$
10. $(-0.5) + (-\frac{5}{11}) + (+2\frac{3}{4}) = ?$
11. $(+1.02) + (-0.479) + (-6.2) = ?$
12. $(+3\frac{1}{4}) + (+7\frac{1}{3}) + (-3\frac{1}{6}) + (+5\frac{3}{4}) + (-2\frac{1}{2}) = ?$
13. Obliczyć sumę liczb:
a) $+6$, -2 , $-3\frac{2}{3}$, $+2\frac{1}{2}$; b) -4.5 , $+3.05$, $-\frac{3}{4}$, $+2.2$.
14. Obliczyć sumę liczb:
a) $+a$, $-b$, $-c$; b) $-a$, $-b$, $+c$, $-d$, przyjmując:
a) $a = 5$, $b = -4$, $c = -2\frac{1}{2}$; b) $a = -1$, $b = +3$, $c = +\frac{3}{4}$, $d = -0.5$.
15. $(+5) - (-10) = ?$
16. $(+7\frac{1}{2}) - (+14) = ?$
17. $(-\frac{2}{7}) - (-\frac{5}{14}) = ?$
18. $(-9.35) - (+0.7) = ?$
19. $(-12\frac{1}{8}) - (-17.5) = ?$
20. $(+7\frac{3}{4}) - (-3\frac{5}{8}) = ?$
21. a) $(+5.05) - (-4.95) = ?$ b) $(-42.6) - (-8.692) = ?$
22. $(+10) + (-12) - (+5) - (-18) - (+8) = ?$
23. $(+353) - (+412) + (+84) - (-830) = ?$
24. $(-2.17) + (-1.76) - (-8.052) - (+5.06) = ?$
25. $(-13\frac{5}{10}) + (-9\frac{1}{18}) - (+8\frac{7}{12}) + (-2\frac{1}{6}) = ?$
26. $(+\frac{5}{21}) + (-12\frac{3}{14}) - (-9\frac{3}{18}) + (+8\frac{5}{7}) = ?$
27. $(+a) + (-b) - (-c) = ?$ Sprawdzić wynik, przyjmując:
 $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$.
28. $(+x) - (-y) + (-z) - (-u) = ?$ Sprawdzić wynik, podstawiając: $x = \frac{1}{2}$, $y = 2\frac{3}{4}$, $z = 1$, $u = 3\frac{5}{6}$.

29. Ile zaoszczędzi z rocznego dochodu 5320 K ten, kto wydaje 4125 K rocznie? (Zapomocą dodawania i odejmowania).

30. Państwo zachodnio-rzymskie upadło w 1229 lat po założeniu państwa rzymskiego. Kiedy to nastąpiło, jeżeli państwo rzymskie założono w roku 753 przed Chrystusem?

31. Kupiec zyskał na jednym towarze 453·6 K, na drugim stracił 145·35 K, a na trzecim zyskał 205·4 K. Ile K zyskał na tych trzech towarach?

32. O godzinie 2. po południu wskazywał termometr 8 stopni ciepła, a do godziny 8. wieczór spadł o 14 stopni. Jaką temperaturę pokazuje o godzinie 8. wieczór?

33. Termometr wskazywał rano 7° zimna, w południe 2° ciepła, a wieczorem 4° zimna. Obliczyć średnią tych trzech temperatur.

34. Balon wzniósł się do wysokości 550 m; potem opadł o 355 m, a następnie podniósł się o 200 m. a) W jakiej wysokości znajduje się balon? b) ile m przebył?

35. Miejscowość A leży o 136 m wyżej, aniżeli B, B o 25 m wyżej, aniżeli C, C zaś o 87 m niżej, niż D. O ile m wyżej położona jest miejscowość A, aniżeli D?

§ 4.

Potęga, współczynnik, redukcya.

1. Jeżeli w iloczynie pojawia się jeden i ten sam czynnik np. 4 razy: $a \cdot a \cdot a \cdot a$, natenczas piszemy go tylko raz, a obok niego u góry umieszczamy z prawej strony liczbę, która wskazuje, ile razy ten czynnik pojawia się w iloczynie. Zamiast więc pisać: $a \cdot a \cdot a \cdot a$, piszemy a^4 i wyrażenie to a^4 nazywamy potęgą.

Liczbę a , występującą w iloczynie jako czynnik, nazywamy zasadą potęgową; liczbę zaś 4, która wyraża, ile razy zasada potęgowa pojawia się jako czynnik, wykładnikiem potęgowym. Potęgę a^4 czytamy: » a do czwartej (potęgi)«.

Pierwszą potęgą liczby np. a jest sama ta liczba t. j. $a^1 = a$, wykładnika 1 nie pisze się, tylko się go domyśla. Drugą po-

tęgę liczby a t. j. a^2 nazywamy kwadratem, trzecią t. j. a^3 sześcianiem liczby a .

2. Jeżeli w sumie dwu lub więcej liczb pojawia się jeden i ten sam składnik np. 4 razy: $a + a + a + a$, natenczas piszemy go tylko raz, a przed nim kładziemy liczbę, która wskazuje, ile razy ten składnik pojawia się w sumie. Np. zamiast $a + a + a + a$ piszemy $4a$, $b^3 + b^3 = 2b^3$; podobnie $(-c^2) + (-c^2) + (-c^2) = 3(-c^2)$ albo $-3c^2$, rozumiejąc, że znak — odnosi się do liczby c^2 .

Liczbę, występującą jako składnik, nazywamy liczbą główną, liczbę zaś, wyrażającą, ile razy liczba główna występuje jako składnik, współczynnikiem liczby głównej. Np. a , b^3 , $-c^2$ są liczbami głównymi wyrażeń: $4a$, $2b^3$, $-3c^2$, zaś 4, 2, 3 współczynnikami liczb: a , b^3 , $-c^2$.

Współczynnikiem może być także i liczba ogólna, np. $ma = a + a + a + a + \dots (m \text{ razy})$.

Wyrażenia, mające tę samą liczbę główną, a różniące się między sobą tylko współczynnikami, nazywamy podobnemi albo równoimiennemi. Np. $2a^3$ i $5a^3$ albo ma^2 , $-na^2$ są wyrażeniami podobnemi; wyrażenia zaś $-4a$ i $7a^2$ albo ma^5 i ma^4 są różnoimiennemi.

3. Mając kilka wyrażeń podobnych dodać do siebie lub od siebie odjąć, możemy sumę lub różnicę wyrazić jedną liczbą czyli wyrażenia te zredukować albo zebrać. Np.

$$\begin{aligned} (+5a) + (+2a) &= +5a + 2a = \boxed{+a + a + a + a + a} + \boxed{+a + a} = \\ &= +7a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-5a) - (+2a) &= -5a - 2a = \boxed{-a - a - a - a - a} \boxed{-a - a} = \\ &= -7a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-5a) + (+2a) &= -5a + 2a = \boxed{-a - a - a - a - a} + \boxed{+a + a} = \\ &= -a - a - a = -3a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+5a) - (+2a) &= +5a - 2a = \boxed{+a + a + a + a + a} \boxed{-a - a} = \\ &= +a + a + a = +3a. \end{aligned}$$

A zatem:

$$+5a + 2a = +7a,$$

$$-5a - 2a = -7a,$$

$$+5a - 2a = +3a,$$

$$-5a + 2a = -3a.$$

Liczby podobne, o tych samych znakach, tak się redukuje, że przed liczbą główną umieszcza się sumę współczynników, a wynik zaopatruje znakiem wspólnym.

Liczby podobne, o różnych znakach, tak się redukuje, że przed liczbą główną umieszcza się różnicę, uzyskaną przez odjęcie współczynnika mniejszego od większego, a wynik zaopatruje znakiem liczby bezwzględnie większej.

Zadania.

1. Zredukować następujące wyrażenia:

$$a) +7a^2 + 3a^2,$$

$$b) -4m - 3m,$$

$$c) +20b^3 - 12b^3,$$

$$d) -13x + 10x,$$

$$e) 0.5a + 1.5a,$$

$$f) -2\frac{3}{5}a^3 - \frac{4}{5}a^3,$$

$$g) x + 2x + 3x + 4x,$$

$$h) \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}a + \frac{3}{4}a + a,$$

$$i) +12b - 5b + 2b - 9b,$$

$$k) -2c^2 + 2.5c^2 - 0.3c^2 - 0.05c^2.$$

2. Zredukować i obliczyć wartość liczebną następujących wyrażen:

$$a) 10a + 5a + 4a,$$

przyjmując $a = 1$;

$$b) 4\frac{1}{2}a^2 + 3\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2,$$

» $a = 5$;

$$c) 7b + 3b - 4b,$$

» $b = 0.5$;

$$d) -0.5c^3 + \frac{1}{2}c^3 + 9c^3,$$

» $c = \frac{1}{3}$;

$$e) +2.4m^2 - 6.4m^2 + 2.6m^2,$$

» $m = 1\frac{1}{2}$.

$$3. (+3a) + (-7a) + (+5a) = ?$$

$$4. (+2.7x^2) + (+3.5x^2) + (-6.3x^2) = ?$$

$$5. (-\frac{1}{6}b) + (-\frac{2}{3}b) + (+4\frac{1}{2}b) = ?$$

$$6. (+2x) - (+x) = ?$$

$$7. (-5a) - (+4a) = ?$$

$$8. (+7a^2) - (-9a^2) = ?$$

$$9. (-3a^3) - (-8a^3) = ?$$

$$10. (+3m) + (-5m) - (-4m) = ? \text{ (próba, przyjmując } m = 2.5).$$

$$11. (-4x) + (-2x) - (-x) + (+9x) = ?$$

$$12. (+1.4c^2) + (+2.6c^2) - (-1.5c^2) - (+5.3c^2) = ? \text{ (próba, } c = \frac{1}{2}).$$

$$13. (-2\frac{2}{3}a^3) - (+14a^3) - (-10a^3) + (+6\frac{1}{2}a^3) = ?$$

$$14. (-11a) + (-9b) + (+5b) + (+20a) = ?$$

$$15. (+2x^3) - (+3x^2) + (-6x^3) + (+4x^2) = ? \text{ (próba, podstawiając } x=2).$$

$$16. (+2\cdot7a^2) - (+1\cdot3b^2) - (+1\cdot5a^2) + (+2\cdot5b^2) - (+3a^2) + (+6b^2) = ?$$

$$17. (+3x) + (+6y) - (-6x) + (+4y) - (-6y) + (+4x) = ? \text{ (próba, przyjmując } x=1, y=2).$$

$$18. (+1\frac{1}{3}a) + (-5\cdot8b) - (-16b) + (+14c) - (+3\frac{2}{3}a) - (-6c) = ?$$

$$19. (-3a^3) + (+5a^2) - (-3a) - (-4a^2) + (+8a) - (-6a^3) = ? \text{ (próba, przyjmując } a=\frac{2}{3}).$$

$$20. (-5\frac{1}{2}a^2) + (+7\frac{1}{3}b^2) + (-3\cdot5c^2) - (-10\cdot5a^2) + (+6\frac{5}{8}b^2) - (+4\frac{2}{5}c^2) = ? \text{ (próba, przyjmując } b=a, c=a).$$

§ 5.

Mnożenie liczb algebraicznych.

1. Mnożąc liczbę np. 3 przez 4, otrzymamy iloczyn 12. Do tego iloczynu dochodzimy w ten sposób, że mnożną 3 stawiamy 4 razy jako składnik:

$$12 = 3 + 3 + 3 + 3;$$

a ponieważ mnożnik 4 jest sumą czterech jednostek:

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

przeto możemy powiedzieć, że iloczyn 12 powstał z mnożnej 3 w taki sam sposób, w jaki powstał mnożnik 4 z jednostki.

Mnożyć zatem jedną liczbę przez drugą znaczy utworzyć z mnożnej nową liczbę w ten sam sposób, w jaki mnożnik powstał z jednostki.

Mając mnożyć np. $(+3)$ przez (-4) , zauważmy, że mnożnik (-4) powstał z jednostki dodatniej $(+1)$ w ten sposób, żeśmy ją zastąpili przez (-1) , tj. $-1 - 1 - 1 - 1 = -4$. Tworząc iloczyn w taki sam sposób z mnożnej $(+3)$, t. j. zastępując $(+3)$ przez (-3) , otrzymamy:

$$-3 - 3 - 3 - 3 = -12.$$

A zatem $(+3)(-4) = -12$. W ten sam sposób wyprowadzimy, że:

$$(-3)(+4) = -12,$$

$$(+3)(+4) = +12,$$

$$(-3)(-4) = +12.$$

Dwie liczby algebraiczne mnoży się, mnożąc ich wartości bezwzględne i zaopatrując otrzymany iloczyn znakiem dodatnim, jeżeli mnożna i mnożnik mają te same znaki, znakiem zaś ujemnym, jeżeli mają znaki przeciwne.

2. Iloczyn liczb bezwzględnych ogólnych np. b^2 , x^3 albo liczby szczególnej i ogólnej np. 5, a^3 , zaznacza się w ten sposób, że się umieszcza czynniki jeden obok drugiego bez żadnego znaku w alfabetycznym porządku liter, liczbę zaś szczególną przed liczbą ogólną. Iloczynem więc liczb b^2 , x^3 jest b^2x^3 , liczb zaś 5, a^3 jest $5a^3$.

Ponieważ $n.a = na$, przeto i naodwrot $na = n.a$. Uważając a za liczbę główną, n za jej współczynnik, możemy powiedzieć:

Wyrażenie, utworzone ze współczynnika i liczby głównej, jest iloczynem tych dwu liczb.

Rozumując podobnie jak przy liczbach szczególnych, znajdziemy: $(+a)(+b) = +ab$, $(-a)(-b) = +ab$,
 $(+a)(-b) = -ab$, $(-a)(+b) = -ab$.

3. Mnożyć przez siebie można właściwie tylko dwie liczby. Jeżeli więc wypadnie mnożyć przez siebie kilka liczb np. a , b , c , to tworzymy naprzód iloczyn dwu liczb np. ab , a następnie iloczyn tej nowej liczby i liczby trzeciej. A zatem: $a.b.c = (ab)c$.

Ponieważ wartość iloczynu nie zależy od porządku jego czynników ¹⁾, przeto $a.b.c = (ab)c = (ac)b = (bc)a = a(bc)$ i t. d.

Biorąc pod uwagę $(ab)c = (ac)b = (bc)a$, widzimy, że:

Iloczyn mnoży się przez liczbę, mnożąc przez nią którykolwiek z jego czynników — i to w dowolnym porządku.

Podobnie $a(bc) = (ab)c = (ac)b$, t. z.:

Liczbę mnoży się przez iloczyn, mnożąc ją

¹⁾ Zob. Część I. str. 29. ust. 3.

przez jeden czynnik, a otrzymany iloczyn przez drugi czynnik — i to w dowolnym porządku.

Ponieważ np. $3a = 3 \cdot a$, $5b^2 = 5 \cdot b^2$, przeto $3a \cdot 5b^2 = = [(3a)5]b^2 = (15a)b^2 = 15ab^2$; a zatem: $3a \cdot 5b^2 = 15ab^2$.

Liczby, zawierające w sobie współczynniki i liczby główne, mnożymy przez siebie w ten sposób, że obok iloczynu, utworzonego z ich współczynników, umieszczamy z prawej strony liczby główne w alfabetycznym porządku.

4. Sprowadzając mnożenie kilku liczb algebraicznych do mnożenia dwu takich liczb, otrzymamy:

$$(+a)(+b)(+c) = (+ab)(+c) = +abc,$$

$$(+a)(-b)(-c) = (-ab)(-c) = +abc,$$

$$(-a)(-b)(-c) = (+ab)(-c) = -abc.$$

Iloczyn kilku liczb algebraicznych jest dodatni, jeżeli czynniki są dodatnie lub jeżeli ilość czynników ujemnych jest parzysta; ujemny zaś, jeżeli ilość czynników ujemnych jest nieparzysta.

5. Iloczyn liczb ogólnych można przedstawić w prostszej formie, jeżeli czynniki są potęgami tej samej zasady. Np.

$$a^4 \cdot a^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{7} = a^7 = a^{4+3}, \text{ t. z.}$$

Iloczyn potęg o tej samej zasadzie jest potęgą o zasadzie tej samej, a o wykładniku, równym sumie wykładników podanych czynników.

Zadania.

1. $(+12)(+8) = ?$
2. $(+4\frac{2}{3})(-4) = ?$
3. $(-7\frac{5}{6})(+6) = ?$
4. $(-2\frac{2}{3})(-1\frac{3}{4}) = ?$
5. $(+5a)(-2b) = ?$
6. $(-8b)(+1\frac{5}{6}c) = ?$
7. $(-\frac{1}{2}m)(-\frac{2}{3}n) = ?$
8. $(+0\frac{5}{6}a)(+4b) = ?$
9. $(+7a)(-4a^2) = ?$
10. $(-6b^3)(0\frac{1}{4}b^2) = ?$
11. $(-12c^2x)(-15b^2) = ?$
12. $(+3\frac{3}{4}ab^2)(-0\frac{2}{3}c^3x^2) = ?$
13. $(-ab^2c^3)(+2a^3bx^2) = ?$
14. $(-2\frac{1}{2}a^2b^3)(-0\frac{4}{5}a^3b^2) = ?$
15. $(+2a)^2 = (+2a)(+2a) = ?$
16. $a(-5b^2)^2 = ?$
17. $b(-\frac{1}{2}a^2b^3)^2 = ?$
17. $(+7)(+4)(+1) = ?$
18. $(+9)(+3)(-5) = ?$
19. $(-4)(+3)(-6) = ?$
20. $(-4)(+3)(-2)(-1) = ?$
21. $(-5)(-1)(-2)(+3)(-4) = ?$

22. $(-\frac{2}{3})(-\frac{3}{5})(-\frac{1}{2})=?$ 23. $(-1\frac{1}{2})(+2\frac{2}{3})(-\frac{1}{2})=?$
 24. $(+2\frac{1}{2})(-3\frac{1}{3})(+1\frac{1}{3})=?$ 25. $(-0.25)(-0.4)(+3.2)=?$
 26. $(-\frac{1}{5})(-1\frac{1}{4})(-7)=?$ 27. $(+4a)(+9b)(+2c)=?$
 28. $(-5a^2)(+3a)(-2a^3)=?$
 29. $(+6a^2b)(-0.5b^2x)(-1.2ax^2)=?$
 30. $(-a^3y^2)(+2\frac{1}{2}b^2y^3)(+8aby)=?$
 31. $(+\frac{1}{2}m)(-9n^2)(-0.3p^3)=?$
 32. $(-\frac{4}{5}x^2yz^3)(-\frac{5}{6}xy^3z)(-1\frac{1}{5}x^3y^2z^2)=?$
 33. $(+5a)^3=(+5a)(+5a)(+5a)=?$
 34. $a)(-3b^2)^3=?$ $b)(-1\frac{1}{2}xy^2)^3=?$
 35. $(+\frac{3}{4})(+\frac{1}{3})(-15)(-2\frac{2}{5})=?$
 36. $(+2a^3b)(-\frac{1}{3}a^2b^2)(-\frac{3}{4}ab^3)(+0.8)=?$
 37. $(-2x^3y^3)(-0.5a^2x)(+6cy^2)(-4\frac{1}{3}a^2c^3x)=?$
 38. $(+5)(-3)(-2)+(-5)(+3)(+2)=?$
 39. $(-\frac{1}{2})(+0.8)(-5\frac{3}{4})- (+2)(-\frac{3}{7})(-2\frac{1}{3})=?$
 40. $(+12a^2b^3)(-\frac{3}{4}a^3b^2)+(-7a^3b^4)(+2a^2b)=?$
 41. $(-8a^2b^3c)(-0.5ab^2c)-(+1\frac{1}{2}ab^2c^2)(-0.6a^2bc^2)=?$
 42. $(-5\frac{1}{5}x^2y)(-\frac{1}{13}a^2y^2)(-5ax)-(-1.8a^3x)(+3x^2y^3)=?$
 43. Obliczyć wartość liczebną iloczynu:
 a) $(+5a^2b)(+2ab^2)$, jeżeli $a=2$, $b=-2$;
 b) $(2\frac{1}{2}ax^3)(-\frac{1}{6}ax^2)$, » $x=-1$;
 c) $(-\frac{3}{4}a^2c)(-2b^3)$, » $a=+1$, $b=-2$, $c=+4$;
 d) $(+2a^2b^3)(-ab)(+5a^3b^2)$, jeżeli $a=+1$, $b=-1$;
 e) $(-10b)(+0.3a^2b)(-0.9ab^3)$, » $a=-2$, $b=+1$.

§ 6.

Dzielenie liczb algebraicznych.

1. Dzielić jakąś liczbę (np. $+15$) przez drugą (np. $+5$) znaczy wynaleźć liczbę trzecią, którąby, pomnożona przez tę drugą, dała na iloczyn pierwszą. Taką liczbą jest tu $+3$, ponieważ $(+3)(+5)=+15$.

A zatem: $(+15):(+5)=+3$. Podobnie znajdziemy:
 $(+15):(-5)=-3$,
 $(-15):(+5)=-3$,
 $(-15):(-5)=+3$.

Liczby algebraiczne dzieli się przez siebie, dzieląc ich wartości bezwzględne i zaopatrując

iloraz znakiem dodatnim, jeżeli dzielna i dzielnik mają znaki te same; znakiem zaś ujemnym, jeżeli dzielna i dzielnik mają znaki przeciwne.

Iloraz dwu liczb ogólnych bezwzględnych przedstawia się w postaci ułamka, którego licznikiem jest dzielna a mianownikiem dzielnik. Np. $a:b = \frac{a}{b}$.

Stosując wyprowadzone powyżej prawo do liczb ogólnych, otrzymamy:

$$(+a):(+b) = +\frac{a}{b}, \quad (+a):(-b) = -\frac{a}{b},$$

$$(-a):(+b) = -\frac{a}{b}, \quad (-a):(-b) = +\frac{a}{b}.$$

2. Z pojęcia dzielenia wynika, że:

1^o) $a:a=1$.

Liczba, podzielona przez siebie samą, daje iloraz 1.

2^o) $a:1=a$.

Liczba, podzielona przez jednostkę, nie zmienia się.

3^o) $0:a=0$.

Zero, podzielone przez liczbę, różną od zera, daje iloraz zero.

4^o) $(a.b):b=a$.

Dzieląc iloczyn dwu liczb przez jedną z nich, otrzymujemy drugą w ilorazie.

5^o) Jeżeli podzielimy np. 21 przez 7, a następnie pomnożymy uzyskany iloraz przez 7, otrzymamy pierwotną liczbę 21 t. j. $(21:7).7=21$; ogólnie $(a:b)b=a$. Ponieważ podług

4^o) $(a.b):b=a$, przeto

$$a=(a.b):b=(a:b)b.$$

Liczba się nie zmienia, jeżeli ją przez drugą liczbę pomnożymy i podzielimy — i to w dowolnym porządku.

6^o) Jeżeli podzielimy np. 72 przez 3, otrzymamy iloraz 24. Wyrażając dzielną 72 jako iloczyn dwu czynników np. 12.6 i dzieląc jeden z czynników tego iloczynu przez dzielnik 3, drugi zaś pozostawiając niezmieniony, otrzymamy: $72:3=(12.6):3=4.6=24$ albo $72:3=(12.6):3=12.2=24$.

Ogólnie $(a \cdot b) : c = (a : c) b = a (b : c)$.

Iloczyn dwu (lub kilku) liczb dzielimy przez pewną liczbę w ten sposób, że dzielimy przez tę liczbę tylko jeden z czynników.

7^o) Jeżeli podzielimy np. 48 przez 12, otrzymamy iloraz 4. Do tego samego wyniku dojdziemy, jeżeli 48 podzielimy przez jeden czynnik dzielnika a otrzymany iloraz przez czynnik drugi t. j. $48 : 12 = (48 : 3) : 4 = 16 : 4 = 4$ albo $48 : 12 = (48 : 4) : 3 = 12 : 3 = 4$.

A zatem:

$$a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b.$$

Liczbę dzielimy przez iloczyn, dzieląc ją przez jeden czynnik, a otrzymany iloraz przez drugi czynnik — i to w dowolnym porządku.

Na podstawie prawd 6^o) i 7^o) wykonywamy dzielenie wyrażeń algebraicznych, gdy dzielna i dzielnik zawierają w sobie liczby szczególne i ogólne. Np. $35 a^3 b : 7 = (35 : 7) a^3 b = 5 a^3 b$;

$$12 a^2 : 3 b^3 = (12 a^2 : 3) : b^3 = \{(12 : 3) a^2\} : b^3 = 4 a^2 : b^3 = 4 \frac{a^2}{b^3}, \text{ t. z.}$$

Liczby, zawierające w sobie współczynniki i liczby ogólne, dzielimy przez siebie w ten sposób, że iloraz, uzyskany przez podzielenie współczynnika dzielnej przez współczynnik dzielnika, stawiamy jako współczynnik ilorazu liczb głównych.

3. Jeżeli liczby ogólne są potęgami tej samej zasady, to ich iloraz można przedstawić w prostszej formie. Np.

$a^5 : a^2 = a^3$, bo $a^2 \cdot a^3 = a^5$; a ponieważ $3 = 5 - 2$, przeto:

$$a^5 : a^2 = a^3 = a^{5-2}.$$

$$\text{Podobnie } a^4 b^3 : a^2 b = a^2 b^2 = a^{4-2} b^{3-1}.$$

Iloraz potęg o tej samej zasadzie jest potęgą, której zasadą jest wspólna zasada dzielnej i dzielnika, wykładnikiem zaś różnica, uzyskana przez odjęcie wykładnika dzielnika od wykładnika dzielnej.

Zadania.

1. $(+54) : (+9) = ?$

2. $(+15) : (+25) = ?$

3. $(-24) : (-8) = ?$

4. $(-4) : (-14) = ?$

5. $(+18) : (-24) = ?$
6. $(+27) : (-9) = ?$
7. $(-3.6) : (+1.2) = ?$
8. $(-6.8) : (+0.4) = ?$
9. $(+7\frac{1}{3}) : (-5\frac{1}{2}) = ?$
10. $(-18) : (-\frac{1}{4}) = ?$
11. $(-2\frac{1}{4}) : (+\frac{1}{2}\frac{5}{2}) = ?$
12. $(+2.25) : (-\frac{3}{8}) = ?$
13. $(-4x) : (+4) = ?$
14. $(+8ab) : (-2a) = ?$
15. $(-6cx^2) : (-cx) = ?$
16. $(+8a^7) : (+6a^4) = ?$
17. $(-15a^2b^5) : (+3ab^4) = ?$
18. $(+9ab^2c^3x) : (-27ab^2c) = ?$
19. $(-28m^7n^3) : (+7m^2n^3) = ?$
20. $(-0.6x^5y^5) : (-2.2x^2y^3) = ?$
21. $(+\frac{3}{4}a^2b^2c^3) : (-12a^2c^2) = ?$
22. $(-1\frac{1}{2}c^5x^7y^5) : (-15c^3x^5y^5) = ?$
23. $[(-8.5)(+1\frac{1}{34})] : (-1\frac{2}{3}) = ?$
- +24. $[(-18a^3b^2)(+2a^2b^3)] : (-6a^4b^2) = ?$
25. $[(+2.5) : (+\frac{1}{4})](-0.5) = ?$
- +26. $[(-\frac{1}{2}x^3y^2) : (+x^2y)](+\frac{2}{3}xy^2) = ?$
27. $[(+18\frac{1}{3}) : (-2\frac{1}{6})] : (-1\frac{2}{3}) = ?$
- +28. $[(-0.25a^5b^4c^3) : (-\frac{1}{2}a^2bc^3)] : (-0.4a) = ?$
29. $[(+0.96a^7b^8)(-2c^5d^6)] : [(-6a^3)(-b^3c^3d^4)] = ?$
30. $[(+12a^3x^{10}y^2)(-5a^2z^5)] : [(-0.6a^4x^7z^2)(+10y)] = ?$
31. $(-4) : (+0.2) + (+0.5) : (-0.2) + (-42.5) : (-2) = ?$
32. $(+\frac{1}{2}) : (+2) - (-2) : (-\frac{1}{2}) + (-3\frac{1}{5}) : (-4) = ?$
- +33. $(-32x^6) : (+8x^4) + (+10x^5) : (-5x^3) +$
 $+(-12x^2) : (-2) = ?$
- +34. $(-4a^3x^4) : (+\frac{1}{2}ax^3) - (+\frac{1}{2}a^2b^2x) : (-\frac{1}{4}b^2) +$
 $+(-2.4a)(-5ax) = ?$
- +35. $(+32a^4b^2c) : (+4a^2b) + (+27a^{10}b^6c^4) : (-9a^8b^5c^3) -$
 $-(-3ab)(-2ac) = ?$
36. $(-2a^2c^3)(-ab^2) - (+8a^7b^8c^9) : (+4a^4b^4c^6) -$
 $-(+\frac{1}{2}a^5b^4) : (-2a^3b^2) = ?$
37. Obliczyć wartość ilorazu:
 - a) $(+45a^3) : (+9a^2)$, podstawiając $a = +2$;
 - b) $(-0.5a^4b) : (-\frac{1}{2}a^3)$, podstawiając $a = +2$, $b = -3$;
 - c) $(-12a^3b^2) : (+4a^2b)$, przyjmując $a = +1$, $b = +1$;
 - d) $(+18a^2x^2y^3) : (-6axy^2)$, przyjmując $y = x$;
 - e) $(-1\frac{1}{2}a^5x^6y^7) : (-0.2a^3x^3y^2)$, podstawiając $a = +\frac{1}{2}$,
 $x = +2$, $y = -1$.

ROZDZIAŁ II.

Wielomiany.

§ 1.

Określenia. Porządkowanie wielomianów.

Dodając do siebie kilka liczb algebraicznych, np.

$$(-2a^3) + (+3a^2) + (-4a) + (-3),$$

otrzymamy sumę: $-2a^3 + 3a^2 - 4a - 3$. Sumę tę nazywamy wielomianem, a jego składniki: $-2a^3$, $+3a^2$, $-4a$, -3 , wyrazami wielomianu. Znaku dodatniego pierwszego wyrazu wielomianu nie pisze się.

Naodwrot: $-2a^3 + 3a^2 - 4a - 3 = (-2a^3) + (+3a^2) + (-4a) + (-3)$, t. z.: Wielomian wyrazić możemy w postaci sumy, której składnikami są wyrazy tego wielomianu.

Jeżeli wielomian składa się z dwu wyrazów, np. $5a^2 - 6a$, nazywamy go dwumianem, jeżeli z trzech wyrazów, np. $4x^3 - 2xy + 5y^2$, trójmianem, jeżeli z czterech, czworomianem i t. d.

Każda liczba algebraiczna, np. $-2a^3$, $+3a^2b$, $-5\frac{a}{b}$, nazywa się jednomianem.

W jednomianie, np. $-2a^3$, występuje znak algebraiczny ($-$), współczynnik (2), zasada potęgowa (a) i wykładnik (3). Jeżeli wyrażenie, np. $5a^3$, nie jest zaopatrzone znakiem, domyślamy się znaku $+$, jeżeli nie posiada współczynnika, jak np. a^3 , domyślamy się jednostki ($1a^3$), a jeżeli nie ma wykładnika, jak np. a , domyślamy się również jednostki (a^1). Tak więc a jest jednomianem.

Wielomiany, składające się z potęg tej samej zasady, »porządkujemy«, t. z. piszemy ich wyrazy obok siebie tak, aby wykładniki zasady były coraz mniejsze albo coraz większe. W pierwszym razie wielomian jest uporządkowany malejąco, up. $3a^3 - 2a^2 + 7a + 5$, w drugim rosnąco, np. $5x + 3x^2 - 4x^3 - 7x^4$.

Wielomiany, których wyrazy są potęgami dwu lub więcej zasad, porządkujemy podług jednej zasady; np. wielomian

$2x^3y^2 - 3x^2y - 4xy^3$ jest uporządkowany malejąco podług zasady x .

Mając na wielomianach wykonać jakiekolwiek działanie, należy ująć je w nawias, uporządkować i wyrazy podobne w każdym wielomianie zredukować.

Zadania.

1. Uporządkować podług potęg malejących wielomiany:

a) $2a^4 - 3a - 7 + 2a^2 - 3a^3$,

b) $5 + 4b^5 - b^4 + 3b^2 + b$,

c) $0.2c - 3.5c^3 + 1 - 4.5c^2$,

d) $x^{10} + 2x^4 - 5x^6 - x^2 + x^8$,

e) $y - \frac{1}{2}y^7 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^5$,

f) $3\frac{1}{2}z^3 + 2.5z - 5\frac{1}{2} + z^4$.

2. Uporządkować podług potęg rosnących wielomiany:

a) $4a + 5 - 2a^3 + 3a^2$,

b) $-2b^4 - 3b^2 + 4b - 5 + 2b^3$,

c) $-3x^6 - 2x^2 - 5x^4 + 2$,

d) $\frac{1}{2}c - 2c^3 + 2c^5 - 7\frac{1}{2}c^2$,

e) $0.1y^2 - 1.2y^6 + 2.4y^8 - 6y^4$,

f) $-4.5m^3 - 4\frac{1}{2}m^2 + 2m^4 + \frac{1}{2} + m^5$.

3. Zredukować wyrazy wielomianów:

a) $7x + 3a - 4x - 5a + 3x$,

b) $-5x^2 + 3x + 2x^2 - 4x + 2x^2$,

c) $2\frac{1}{2}a + 0.5a^2 - 4a - 5a^2$,

d) $6a - 3b + 4c - 3\frac{1}{2}a - 9.5c - 2.4b$,

e) $a^2b - 1 + 4ab^2 - 3a^2b + 7 - 5ab^2$,

f) $x^2 - x^3y^2 + 5x^2y^3 - 3x^2y^3 + 2x^2 - 3\frac{1}{2}x^3y^2$.

4. Obliczyć wartość liczebną wielomianów:

a) $a^4 + 2a^3 - 3a^2 + a - 1$, przyjmując $a = 1$,

b) $2b^3 - 5b^2 + 7b - 10$, „ $b = 2$,

c) $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$, „ $a = -1$,

d) $3a^3 - 4a^2b + 6ab^2 - 10b^3$, „ $\underline{a=2, b=-2}$,

e) $ax^2 + ax - a$, „ $\underline{a=6, x=\frac{1}{2}}$,

f) $c^5 - c^4y + c^3y^2 + c^2y^3$, jeżeli $c = -2$, $y = -0.5$.

§ 2.

Dodawanie i odejmowanie wielomianów.

1. Dodawanie.

a) Ponieważ wielomian, np. $a+b-c$, jest sumą algebraiczną wyrazów, z których się składa, przeto $a+b-c = (+a) + (+b) + (-c)$; mając przeto dodać do wielomianu $a+b-c$ liczbę np. $-m$, otrzymamy:

$$(a+b-c) + (-m) = (+a) + (+b) + (-c) + (-m) = \\ = +a + b - c - m.$$

Do wielomianu dodaje się liczbę, dopisując ją do wyrazów wielomianu.

b) Podobnie, mając do liczby np. $-m$ dodać wielomian $a-b+c$, znajdziemy:

$$(-m) + (a-b+c) = (-m) + (+a) + (-b) + (+c) = \\ = -m + a - b + c.$$

Do liczby dodaje się wielomian, dopisując do niej wyrazy wielomianu.

c) Jeżeli do wielomianu, np. $a-b+c$, mamy dodać drugi wielomian, np. $m+p-r$, to postępując jak poprzednio, otrzymamy:

$$(a-b+c) + (m+p-r) = (+a) + (-b) + (+c) + (+m) + \\ + (+p) + (-r) = +a - b + c + m + p - r.$$

Wielomiany dodaje się do siebie, pisząc ich wyrazy obok siebie.

2. Odejmowanie.

Postępując podobnie jak przy dodawaniu, znajdziemy:

$$a) \quad (a-b+c) - (-m) = (+a) + (-b) + (+c) - (-m) = \\ = +a - b + c + m.$$

Od wielomianu odejmuje się liczbę, dopisując ją do wielomianu ze znakiem przeciwnym.

$$b) \quad m - (a-b+c) = m - [(+a) + (-b) + (+c)].$$

Ponieważ od liczby odejmuje się sumę kilku liczb w ten sposób, że się od niej odejmuje naprzód jeden składnik: $m - (+a) = m - a$, od tej różnicy następny składnik: $(m - a) -$

$-(-b) = m - a + b$ i t. d., a więc: $(m - a + b) - (+c) = m - a + b - c$, przeto:

$$m - (a - b + c) = m - a + b - c.$$

Wielomian odejmuje się od liczby, pisząc obok niej wyrazy wielomianu ze znakami przeciwnymi.

$$\begin{aligned} c) \quad (a - b + c) - (m + p - r) &= (a - b + c) - m - p + r = \\ &= a - b + c - m - p + r. \end{aligned}$$

Wielomiany odejmujemy, dopisując do odjemnej wyrazy odjemnika ze znakami przeciwnymi.

3. Jeżeli w sumie lub różnicy znajdują się wyrazy podobne, należy je zredukować.

Aby otrzymać wynik już zredukowany, najdogodniej jest podpisywać wielomiany jeden pod drugim tak, aby wyrazy podobne znajdowały się pod sobą, a potem dopiero wykonywać działanie. Np.

$$\begin{array}{r} a) \quad (a^5 - 3a^4b^2 + 5a^3b^3) + (4a^4b^2 - 7a^3b^3 + b^5) = \\ \hline a^5 - 3a^4b^2 + 5a^3b^3 \\ + 4a^4b^2 - 7a^3b^3 + b^5 \\ \hline a^5 + a^4b^2 - 2a^3b^3 + b^5. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad (5a + 2ax - 3ax^2 - 5ax^3) - (-4a + 7ax + 3ax^2 - 5ax^3) = \\ \hline 5a + 2ax - 3ax^2 - 5ax^3 \\ - 4a + 7ax + 3ax^2 - 5ax^3 \\ + \quad - \quad - \quad + \\ \hline 9a - 5ax - 6ax^2. \end{array}$$

4. Jeżeli np. do b dodać mamy dwumian $(c - d)$, a otrzymaną sumę odjąć np. od a , to zaznaczamy to: $a - [b + (c - d)]$. Podobne znaczenie ma wyrażenie np. $a + \{b - [c - (d - e)]\}$.

Naodwrot: jeżeli wyrażenia, w których przychodzą nawiasy, chcemy przedstawić w prostszej postaci, uwalniamy je od nawiasów, wykonywając kolejno działania, tymi nawiasami wskazane. Np.

$$a - [b + (c - d)] = a - [b + c - d] = a - b - c + d.$$

$$\begin{aligned} \text{Podobnie: } a + \{b - [c - (d - e)]\} &= a + \{b - [c - d + e]\} = \\ &= a + \{b - c + d - e\} = a + b - c + d - e. \end{aligned}$$

Zadania.

1. $2a + (-b + c - d) = ?$
2. $8 + (4 + a) = ?$
3. $(2a + 3b + 4c) + (-3a) = ?$
4. $(4a^2 + 3a) + (-2a^2) = ?$
5. $(+6x^3y) + (-2x^3y + x^2) = ?$
6. $(12a + 3b) + (7a + 14b) = ?$
7. $(7a^2 + 19ab - 5b^2) + (a^2 - 8ab + b^2) = ?$
8. $(a^3 + 2a^2 + a + 1) + (a^2 - 2a - 3) = ?$
9. $(8a + 7b) + (5a - 4b) + (2a - b) = ?$ (sprawdzić, podstawiając $a = 4$, $b = -1$).
10. $(6a^2 + 5ax + 0.4x^2) + (-a^2 - 3ax + x^2) + (7a^2 - ax - 2x^2) = ?$
11. $(4\frac{2}{3}c^3 + 12c^2 + 9c - 5) + (4c - 12c^2 + 9\frac{1}{2}c^3) + (15 - 2\frac{1}{2}c + 5c^2) = ?$
12. $(a + b + c) + (a - b - c) + (-a + b - c) + (-a - b + c) = ?$
13. $3a + [2a + (4a + 2b)] = ?$ (sprawdzić, podstawiając $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$).
14. $(5c^2 + 3c) + [-6c + (-5c + 4c^2)] = ?$ (sprawdzić, podstawiając $c = -1$).
- 15. $\{5a + [7a + (3b - 4a)]\} + [(4b - 2a) - b] = ?$
- 16. $[(3a^2 - 4ax) + (3x^2 + a^2)] + [(5a^2 + 3x^2) + 4ax] = ?$
- 17. $(3x - 4xy + y^2) + \{(2x - 6y^2) + [-4xy + (3x - 2y^2)]\} = ?$
18. $4a^3 + \{\frac{2}{3}a^2 + [\frac{1}{4}a + (\frac{2}{3}a^3 - 11a^2) + 3\frac{3}{4}a] + (2\frac{2}{3}a^3 - 3\frac{1}{3}a^2)\} = ?$
19. $(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}xy) + \{\frac{3}{4}xy + [(\frac{1}{8}x^2 - 9y^2) + (\frac{4}{5}y^2 + \frac{1}{2}xy)]\} = ?$
- 20. $20a - (4a - 2b) = ?$
- 21. $(-9a^2) - (-2a^2 + 6a) = ?$ ($a = -2$).
- 22. $(15x^2 + 3y^3) - (4x^2 - 2y^3) = ?$ ($x = 1$, $y = -2$).
23. $(3a^3 - 2a^2 + a) - (2a^3 - 3a^2 - 4a) = ?$
24. $(6x - 5\frac{1}{3}y + 4\frac{1}{2}z) - (-7x - 2y + 2\frac{1}{3}z) = ?$
25. $(6\frac{1}{8}a - 5\frac{1}{4}ab + 3\frac{1}{8}b) - (4\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{8}ab + 5\frac{1}{2}b) = ?$
26. $(ax - 3ax^2 + 7ax^3) - (3ax + 5ax^2 - 3ax^3) + (2ax + 3ax^2 - 5ax^3) = ?$
27. $(3m^4 + 7m^2n^2 - 2) + (5 - 2m^2n^2 - m^4) - (-3m^4 + 4m^2n^2 + 5) = ?$
28. $(-6x^3 - 7ax^2 - 2a^2x + 3a^3) - (-2x^3 - 5ax^2 - 2a^2x) - (-5a^3 + 2x^3) = ?$

29. $[(4a + 2b) - 2a] - [5a - (3a - b)] = ?$

30. $a - [(3a^2 + 4a + 1) - (5a + 2a^2 - 4)] = ?$

31. $a^3 - \{(a^2 - 2a^3) - [a^3 - (2a^2 - a^3)]\} = ?$

32. $(x^3 - 2x^2 + x) - \{(9x^2 - 2x) - (-3x) - [2x^3 - (4x^2 - 5x)]\} = ?$

33. $(10m + 4n) - \{9n - [7m - (5m - 10n)]\} = ?$

34. $50a^3 - \{40a - [30a^3 - (20a - 10a^2)]\} = ?$

35. $4x - \{[(a - x) + (3a + 7x)] - (8a - 3x)\} = ?$

36. $(c^3 + 7c^2 - 8c) - \{[7c^3 - (9c^2 - c)] - [(6c^3 - 2c^2) + (4c^3 - 2c^2 + 6c)]\} = ?$

37. $(3a^2 - ab + b^2) - \{(2a^2 - 3b) - [(a^2 + ab) - (2a^2 + 2ab)]\} = ?$

38. $(5y^2 - 3y + 7) + \{(-3y^2 - 6y + 3) - (2y^2 - 9y + 4)\} = ?$

39. Obliczyć $x + y + z$ podstawiając: $x = 3b^4 + 7b^2c^2 - 2$,
 $y = b^4 - 2b^2c^2 + 5$, $z = -3b^4 - 4b^2c^2 + 3$.

40. Jeżeli $A = 18x - 43y + 84z$, $B = -7x + 30y + 15z$,
jaką wartość ma $A - B$?

41. Trójmian $3a^5 + 2a^4 + 5a$ jest sumą dwu składników,
z których jeden jest $a^5 + 3a^3 - 8a$; obliczyć drugi składnik.

42. Znaleźć wielomian, który z wielomianem $7a^4 + 5a^3b^2 - 4a^2b^3 - 3ab^4 + b^5$ tworzy sumę $5a^4 + 3a^2b^3 - 3b^5$.

43. Znaleźć odjemnik, mając podaną odjemną $5x^4 - 3x^2 + 3x - 2$ i różnicę $7x^4 + 3x^2 + 5$.

44. Znaleźć odjemną, znając odjemnik $4x^3y^2 - 5x^2y^3 + 2xy^4 - y^5$ i różnicę $-3x^3y^2 + 5x^2y^3 - 2xy^4 + 2y^5$.

45. Od sumy trójmianów: $x^3 - 3x^2 - 1$ i $x^3 - 3x^2 - 3$
odjąć sumę czworomianów: $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ i $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

46. Od różnicy wielomianów: $-x^3 + 3x^2 - 4ax + 8a^2$
i $5a^2 + 3x^2 + 4ax - 3$ odjąć różnicę trójmianów: $2x^2 + 5ax - 7a^2$ i $-8x^2 - 7ax + 9a^2$.

47. Od trójmianu $5a^2b - 3ab^2 + 7b^2$ odjąć $2a^3 + 4a^2b - ab^3 + b^4$, a od różnicy tych dwu wielomianów wielomian $b^4 - 3b^2 + 4ab^2 - 3a^2b$.

48. Obliczyć wyrażenia:

a) $A + (B - C + D)$,

b) $A - (B + C - D)$,

c) $(A + B) - (C + D)$,

d) $(A - B) - (C - D)$,

przyjmując: $A = 3x^2 - 2xy + y^2$, $B = -x^2 + 4xy + 3y^2$,
 $C = 2x^2 - 5xy - y^2$, $D = 4x^2 + 5xy - 3y^2$.

§ 3.

Mnożenie wielomianów.

1. Mnożyć wielomian, np. $a + b - c$, przez jednomian, np. (-3) , znaczy utworzyć iloczyn z mnożnej w taki sposób, w jaki mnożnik powstał z jednostki dodatniej. Biorąc zamiast $+1$ jednostkę ze znakiem przeciwnym t. j. -1 i pisząc ją obok siebie 3 razy, otrzymamy: $-1 - 1 - 1 = -3$. Postępując podobnie z mnożną $a + b - c$, uzyskamy iloczyn

$$\begin{aligned} &= -a - b + c - a - b + c - a - b + c = \\ &= -a - a - a - b - b - b + c + c + c = \\ &= -3a - 3b + 3c. \end{aligned}$$

W podobny sposób znajdziemy: $(a + b - c)m =$
 $= am + bm - cm$.

Wielomian mnoży się przez jednomian, mnożąc każdy wyraz wielomianu przez jednomian i pisząc otrzymane iloczyny (iloczyny częściowe) obok siebie z ich znakami.

2. Jeżeli mamy pomnożyć wielomian, np. $a - b + c$, przez drugi wielomian, np. $m - n$, oznaczmy $m - n$ przez A a otrzymamy: $(a - b + c)(m - n) = (a - b + c)A = aA - bA + cA =$
 $= Aa - Ab + Ac = (m - n)a - (m - n)b + (m - n)c =$
 $= (am - an) - (bm - bn) + (cm - cn) =$
 $= am - an - bm + bn + cm - cn$.

Wielomian mnoży się przez wielomian, mnożąc każdy wyraz jednego wielomianu kolejno przez każdy wyraz drugiego i pisząc częściowe iloczyny obok siebie z ich znakami.

W praktycznem zastosowaniu porządkujemy zwykle tak mnożną jak i mnożnik podług potęg tej samej zasady, częściowe zaś iloczyny podpisujemy tak, aby wyrazy podobne znalazły się pod sobą. Np.

$$\begin{array}{r}
 (3a^3 - 4a^2 + 5a + 1)(2a^2 - 3a + 5) = \\
 6a^5 - 8a^4 + 10a^3 + 2a^2 \\
 - 9a^4 + 12a^3 - 15a^2 - 3a \\
 15a^3 - 20a^2 + 25a + 5 \\
 \hline
 6a^5 - 17a^4 + 37a^3 - 33a^2 + 22a + 5.
 \end{array}$$

3. Jeżeli pomnożymy sumę dwu liczb, np. $a + b$, przez ich różnicę, t. j. $a - b$, otrzymamy:

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

A zatem:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Iloczyn sumy dwu liczb i ich różnicy równa się różnicy kwadratów tych liczb.

$$\text{Naodwrot } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Różnica kwadratów dwu liczb równa się sumie tych liczb, mnożonej przez ich różnicę.

Zadania.

1. $(a - b + c)3 = ?$
2. $(2m - 4n)\frac{3}{2} = ?$
3. $(2x + 4y - 5z)3a = ?$
4. $(2ab - 3ac + 4bc)abc = ?$
5. $(3 + 2x + x^2)\frac{2}{3}x = ?$
6. $(0.5a - 0.02a^2 + a^3)5a^2 = ?$
7. $(3a + 5b)(+3ab) = ?$
8. $(5x^2y - 6a^2y^3)(-2ax^3) = ?$
9. $(-3a)(5x - 4y^2) = ?$
10. $(+9a)(4a - 6b) = ?$
11. $(3a - 5b + 7)(-2a^2) = ?$
12. $(+6ay^3)(5 + 4a - 3a^2) = ?$
13. $(-\frac{2}{3}a^2b^4 + \frac{3}{4}a^3b^3 - \frac{1}{6}a^4b)(-12a^5b^5) = ?$
14. $(0.6x^2 - 10y^2 + 0.01z^2)(+1.5x^2y^2z^2) = ?$
15. $(a^3 - 1\frac{1}{2}a^2 + 3.5a - 1)(-\frac{1}{2}a^4) = ?$
16. $a + 7(a - b) = ?$
17. $b^2 - 5(a^2 + b^2 - c^2) = ?$
18. $(a^2 - bx) - (a^2 - b)x = ?$
19. $2a^4 + (a^2 - 2a + 1)2a^4 = ?$
20. $3ax(5ab - 4ax + 2ay) + (12a^2cx - 6a^2cy) = ?$
- 21. $(6x^2 - 5z^2)(-2xy^2z^3) + 3xy^2(4x^2z - 3z^3) = ?$
- 22. $(-3x^2)(5 - 7x + 6x^2) - (-9x^3 - 4x^2 + x)2x = ?$
- 23. $(4a - 3b + 2c)a + (2a - 3b - 3c)b - (5a + 6b - c)c = ?$
24. $(2ay + 9a^2y)(-2x) + [(4x - 9ax)ay]a^2b^2 = ?$
25. $[(2a + b)x^2 + (a - b)ax]a^2x^2 - (a^2bx^4 - a^4x^3 - a^3bx^3) = ?$

26. $(5x + 8y)(6x + 7y) = ?$
27. $(4a + 3b)(7a - 3b) = ?$
28. $(4x - 3y)(3x + 10y) = ?$
29. $(3a^2 + 5a)(4a^2 + 7a) = ?$
30. $(7a^2 + 2b^2)(2a^2 - 3b^2) = ?$
31. $(3x + 5x^2 + 6x^3)(5 - 2x) = ?$
32. $(4 - b + 5b^2)(2b^2 - 5b - 3) = ?$
33. $(4 + 6x^2 - x)(2x^2 - 3 - 5x) = ?$
34. $(a^3 - 4b^3 + 3ab^2 - 2a^2b)(a^2 - 2ab + 3b^2) = ?$
35. $(9a - 5b)(a + 2b - 3) + (-3a + b + 3)(3a - 5b) = ?$
36. $(y^2 - y + 1)(y + 1) - (y^2 + y - 1)(y - 1) = ?$
37. $(a^2 + 3 - 2a)(3 + a) - (3a^2 + 2a - 4)(2 - a) = ?$
38. $(12a^2 - 6a - 4)(4a^2 + 2a + 1) + (5a^2 + 3a + 1)(2a^2 - a - 1) = ?$
39. $(6x^2 - y^2 + 4z^2)(2x^2 - 5y^2 - 3z^2) - (x^2 - y^2 + z^2)(x^2 + y^2 - z^2) = ?$
40. $(3x + 4y)(3x - 4y) = ?$
41. $(2a^2 - 5a)(2a^2 + 5a) = ?$
42. $(x + a)(x - a) + a^2 = ?$
43. $y^2 - (y + 2)(y - 2) = ?$
44. $(3a^2 - 4c^2)(3a^2 + 4c^2) + (16c^4 - 5a^4) = ?$
45. $(a^2x + b^2y^2)(a^2x - b^2y^2) - (a^4x^2 - 2b^4y^4) = ?$
46. $2cy^2(ax^3 + by^3) - (ax^3 + by^3)(ax^3 - by^3) = ?$
47. $(5a + 3b)(7a + 5b)(3a + 4b) = ?$
48. $(x + 1)(x + 2)(x - 3) = ?$
49. $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1) = ?$
50. $(3x + 5)(2x - 3)(x - 1) - (x + 1)(x - 2)(x - 3) = ?$
51. Sprawdzić zadanie:
 - a) 10. i 11., podstawiając $a = -2$, $b = 5$;
 - b) 17., przyjmując $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$;
 - c) 19., przyjmując $a = -1$.
52. Sprawdzić iloczyn następujących czynników:
 - a) $(2a^3 + a^2 - 2a - 1)(3a^3 + a - 4)$, podstawiając $a = 2$,
 - b) $(m^3 + m^2 + m + 1)(m + 1)$, jeżeli $m = -2$,
 - c) $(a^2 - 3ab + b^2)(a^2 + 3ab - b^2)$, jeżeli $a = \frac{1}{3}$, $b = 3$,
 - d) $(a^3 - 3a^2b + 5ab^2 - 7b^3)(a^2 - 7b^3 + 5ab^2 - 3a^2b)$,
przyjmując $a = -1$, $b = +1$,

e) $(4a + b)(2a - b)(5a + 3b)$, przyjmując $a = -0.5$,
 $b = +0.1$,

f) $4a^2(a - 1)(2a + 1)(1 - a)$, przyjmując $a = \frac{1}{4}$,

g) $(2a - 1)(2a + 1)(4a^2 + 1)$, przyjmując $a = -2$.

§ 4.

Dzielenie wielomianów.

1. Dzieląc iloczyn dwóch liczb, np. $5 \cdot 8 = 40$, przez jeden z czynników, otrzymujemy na iloraz drugi czynnik, $40 : 5 = 8$. Podobnie mając $(a - b + c) \cdot m = am - bm + cm$, otrzymamy:

$(am - bm + cm) : m = a - b + c$. Ponieważ $a = \frac{am}{m}$, $b = \frac{bm}{m}$,

$c = \frac{cm}{m}$, przeto $(am - bm + cm) : m = \frac{am}{m} - \frac{bm}{m} + \frac{cm}{m}$.

Wielomian dzieli się przez jednomian, dzieląc każdy wyraz wielomianu przez jednomian.

Wyznaczając z dzielenia:

$(am - bm + cm) : m = \frac{am}{m} - \frac{bm}{m} + \frac{cm}{m}$ dzielną, otrzymamy:

$am - bm + cm = m \left(\frac{am}{m} - \frac{bm}{m} + \frac{cm}{m} \right) = m(a - b + c)$; podobnie znajdziemy:

$$2x^4 - 6x^3 + 8x^2 = 2x^2 \left(\frac{2x^4}{2x^2} - \frac{6x^3}{2x^2} + \frac{8x^2}{2x^2} \right) = 2x^2(x^2 - 3x + 4);$$

$$\begin{aligned} -3a^3 + 9a^2b - 12ab^2 &= -3a \left(\frac{-3a^3}{-3a} + \frac{9a^2b}{-3a} - \frac{12ab^2}{-3a} \right) = \\ &= -3a(a^2 - 3ab + 4b^2), \text{ t. z.} \end{aligned}$$

Jeżeli wszystkie wyrazy wielomianu zawierają w sobie ten sam czynnik, wówczas »wyłącza się« go przed nawias.

Wyłączanie to polega na tem, że wspólny czynnik umieszcza się przed nawiasem, a w nawiasie ilorazy, otrzymywane z dzielenia wyrazów wielomianu przez wyłączony czynnik. Jeżeli ten czynnik ma znak dodatni, wyrazy, stojące w nawiasie, zatrzymują swoje pierwotne znaki; jeżeli zaś znak ujemny, otrzymują znaki przeciwne.

2. Aby pokazać, jak się dzieli wielomian przez wielomian, utwórzmy iloczyn następujących wielomianów:

$$\begin{array}{rcl}
 (2a^3 - 3a^2 - 4a + 5)(a^2 - 2a + 6) = & & \\
 \hline
 2a^5 - 3a^4 - 4a^3 + 5a^2 & \dots & \text{1. częściowy iloczyn} \\
 -4a^4 + 6a^3 + 8a^2 - 10a & \dots & \text{2. } \quad \text{»} \quad \text{»} \\
 \hline
 12a^3 - 18a^2 - 24a + 30 & \dots & \text{3. } \quad \text{»} \quad \text{»} \\
 \hline
 2a^5 - 7a^4 + 14a^3 - 5a^2 - 34a + 30. & &
 \end{array}$$

Jeżeli iloczyn tych dwu wielomianów podzielimy przez jeden z nich, powinniśmy otrzymać na iloraz drugi wielomian.

A zatem:

$$(2a^5 - 7a^4 + 14a^3 - 5a^2 - 34a + 30) : (2a^3 - 3a^2 - 4a + 5) = \\
 = a^2 - 2a + 6.$$

Do ilorazu $a^2 - 2a + 6$ dojść możemy w sposób następujący:

Jeżeli tak dzielna jak i dzielnik są uporządkowane podług potęg malejących albo rosnących zasady a , to pierwszy wyraz dzielnej ($2a^5$) jest iloczynem pierwszego wyrazu dzielnika ($2a^3$) i pierwszego wyrazu ilorazu (a^2). Dzieląc przeto pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika, otrzymamy pierwszy wyraz ilorazu. Jeżeli dzielnik pomnożymy przez pierwszy wyraz ilorazu, otrzymamy $2a^5 - 3a^4 - 4a^3 + 5a^2$ t. j. 1-szy częściowy iloczyn, który odjęty od dzielnej, pozostawia resztę:

$$-4a^4 + 18a^3 - 10a^2 - 34a + 30.$$

Ponieważ ta reszta jest uporządkowana podobnie jak dzielna i dzielnik, przeto pierwszy jej wyraz jest pierwszym wyrazem 2-go częściowego iloczynu, który powstał z pomnożenia 1. wyrazu mnożnej (tu dzielnika) przez drugi wyraz mnożnika (tu ilorazu). Dzieląc zatem 1. wyraz tej reszty przez 1. wyraz dzielnika, wyznaczymy drugi wyraz ilorazu, który pomnożony przez dzielnik, utworzy 2-gi częściowy iloczyn $-4a^4 + 6a^3 + 8a^2 - 10a$. Ten, odjęty od powyższej reszty, pozostawi nową resztę, z którą postąpić należy tak, jak z poprzednią.

Wzór działania jest następujący:

$$\begin{array}{r}
 (2a^5 - 7a^4 + 14a^3 - 5a^2 - 34a + 30) : (2a^3 - 3a^2 - 4a + 5) = \\
 2a^5 - 3a^4 - 4a^3 + 5a^2 \qquad \qquad \qquad = a^2 - 2a + 6 \\
 \hline
 -4a^4 + 18a^3 - 10a^2 - 34a + 30 \\
 -4a^4 + 6a^3 + 8a^2 - 10a \\
 \hline
 + \qquad - \qquad - \qquad + \\
 \hline
 12a^3 - 18a^2 - 24a + 30 \\
 12a^3 - 18a^2 - 24a + 30 \\
 \hline
 - \qquad + \qquad + \qquad - \\
 \hline
 = \qquad = \qquad = \qquad =
 \end{array}$$

Aby podzielić wielomian przez wielomian, porządkujemy tak dzielną jak i dzielnik podług potęg tej samej zasady i dzielimy pierwszy wyraz dzielnej przez pierwszy wyraz dzielnika. Ilorazem mnożymy dzielnik, a otrzymany iloczyn odejmujemy od dzielnej. Następnie dzielimy 1. wyraz reszty przez 1. wyraz dzielnika; otrzymanym ilorazem mnożymy dzielnik a iloczyn odejmujemy od reszty. Z nową resztą postępujemy podobnie, jak z poprzednią.

Reszty, powstałej przez odejmowanie 1-go częściowego iloczynu od dzielnej, nie pisze się zwykle całej, ale tylko tyle wyrazów, ile ich posiada dzielnik; pozostałe zaś wyrazy dopisuje się do następnych reszt w miarę tworzenia dalszych części ilorazu.

A zatem:

$$\begin{array}{r}
 (2a^5 - 7a^4 + 14a^3 - 5a^2 - 34a + 30) : (2a^3 - 3a^2 - 4a + 5) = \\
 2a^5 - 3a^4 - 4a^3 + 5a^2 \qquad \qquad \qquad = a^2 - 2a + 6 \\
 \hline
 -4a^4 + 18a^3 - 10a^2 - 34a \\
 -4a^4 + 6a^3 + 8a^2 - 10a \\
 \hline
 + \qquad - \qquad - \qquad + \\
 \hline
 12a^3 - 18a^2 - 24a + 30 \\
 12a^3 - 18a^2 - 24a + 30 \\
 \hline
 - \qquad + \qquad + \qquad - \\
 \hline
 = \qquad = \qquad = \qquad =
 \end{array}$$

Jeżeli dzielna i dzielnik zawierają w sobie potęgi różnych zasad, to porządkuje się tak oba wielomiany jak i reszty, otrzy-

mywane z każdorazowego odejmowania, podług potęg jednej z tych zasad. Np.

$$\begin{array}{r}
 (6a^4 - a^3b - 13a^2b^2 + 10ab^3 - 2b^4) : (3a^2 + 4ab - 2b^2) = \\
 6a^2 + 8a^3b - 4a^2b^2 \qquad \qquad \qquad = 2a^2 - 3ab + b^2 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 -9a^3b - 9a^2b^2 + 10ab^3 \\
 -9a^3b - 12a^2b^2 + 6ab^3 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 + \qquad + \qquad - \\
 3a^3b^2 + 4ab^3 - 2b^4 \\
 3a^3b^2 + 4ab^3 - 2b^4 \\
 \hline
 - \qquad - \qquad + \\
 = \qquad = \qquad =
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Jeżeli dzielnik nie mieści się bez reszty w dzielnej np.

$$(a^3 + 2b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2$$

$$\begin{array}{r}
 a^3 + a^2b \\
 \hline
 -a^2b + 2b^3 \\
 -a^2b - ab^2 \\
 \hline
 + \qquad + \\
 ab^2 + 2b^3 \\
 ab^2 + b^3 \\
 \hline
 b^3 \text{ (reszta),}
 \end{array}$$

to podobnie jak przy liczbach szczególnych, np. $30 : 7 = 4 + \frac{2}{7}$, tak i tu przedstawiamy iloraz w postaci liczby całkowitej i ułamka:

$$(a^3 + 2b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2 + \frac{b^3}{a + b}.$$

3. Ponieważ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, przeto:

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \text{ i } (a^2 - b^2) : (a - b) = a + b.$$

Różnica kwadratów dwu wyrazów, podzielona przez ich sumę (różnicę), daje na iloraz różnicę (sumę) tych dwu wyrazów.

Zadania.

1. $(12a^4 - 16a^2 + 8) : (+4) = ?$
2. $(16c^3 + 8c - 4) : (-4) = ?$
3. $(ax - bx + cx) : x = ?$

4. $(8x^4 + 12x^3 - 2x^2) : (-2x^2) = ?$

5. $(-15am + 10bcm - 5mx) : (-5m) = ?$

6. $(32x^2y - 16xy^2) : 4xy = ?$

7. $(2\frac{1}{3}a^3b^2 + 4\frac{1}{2}a^2b^3) : 3a^2b^2 = ?$

8. $(-3.8m^5b^7 - 2\frac{1}{2}m^7b^5) : (-5m^3b^3) = ?$

9. $(a^2b^2c^2 - 6a^2c^2 + \frac{1}{4}a^2c^4) : (-0.5a^2c^2) = ?$

10. $(24a^5b^4x^3 - 16a^3b^2x^2) : 8a^2bx^2 = ?$

11. $(-21c^3m^4 + 63c^4m^5 - 126c^5m^6 - 84c^6m^7) : (+3c^3m^4) = ?$

12. $[(30a^2b^2cd - 20ab^2cd^2) : (-5ab)] : 2cd = ?$

13. $[7a^7 - 21a^5b(a-b) - 7a^4b^3] : (-7a^4) = ?$

14. $\{2a^2[6a^2 - (5a^3 - 4a)]\} : 2a^3 = ?$

15. $[(5a^2 + 2a^3)5x - b^2(10a^2 - 6a^4 + a^5)] : 5a^2 = ?$

16. $[(4x - 3y)(4x + 3y) - 8(2x^2 + 6y^2)] : 3y^2 = ?$

17. W następujących wielomianach wyłączyć wspólny czynnik przed nawias:

a) $a^2 + 2a$,

b) $-2b^2 + 2b$,

c) $-3m^2 - 6m$,

d) $a^3b^2 + 5a^2b^3$,

e) $-\frac{3}{5}a^3x^2z + 3a^2z^3$,

f) $\frac{5}{7}ab^2c^3 - 2\frac{1}{7}a^2bc^2$,

g) $2ab - 4a^2b^2 + 8b^3$,

h) $12a^5b^2 + 8a^4b^3 + 4a^3b^4$,

i) $7ab^2c - 21a^2b^3c^2 + 0.14ab^3c^3$,

k) $x(a+b) + y(a+b)$,

l) $a(m-n) - b(m-n)$,

m) $a(x+y) - b(x+y) + c(x+y)$.

18. $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a+b) = ?$

19. $(9x^2 - 12xy + 4y^2) : (3x - 2y) = ?$

20. $(x^3 + x^2 - 2x - 8) : (x - 2) = ?$

21. $(4a^3 - 16a^2 + 7a + 20) : (2a - 5) = ?$

22. $(x^2 + 2.6x - 1.2) : (x + 3) = ?$

23. $(a^3 - 0.2a^2 + 0.85a + 0.3) : (a + 0.3) = ?$

24. $(3x^2 + 5x + x^3 + 3) : (x + 1) = ?$

25. $(6 - 7y + 4y^2 - y^3) : (2 - y) = ?$

26. $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 + 2ab + b^2) = ?$

27. $(20c^3 - 19c^2 + 12c + 32) : (4c^2 - 7c + 8) = ?$

28. $(5x^5 + 26x^4 - 52x^3 - 23x^2 + 12x + 22) :$

$:(x^2 + 5x - 11) = ?$

29. $(10 - 31x + x^3 - 2x^4 + 7x^2) : (5 - 3x + x^2) = ?$

30. $(6a^2b^2 + 3ab^3 + 5a^3b + b^4 + 3a^4) : (2ab + 3a^2 + b^2) = ?$

$$31. (42a^3x + 19ax^3 - 2x^4 - 50a^2x^2 - 7a^4) : (x^2 + 7a^2 - 7ax) = ?$$

$$32. (a^4 - a^3b^3 + 0.5ab^9 - 0.25b^{12}) : (a^2 - ab^3 + 0.5b^6) = ?$$

$$33. [(a^5 + 4a^4b - 4ab^2 - 16b^3) : (a^2 + 2b)] : (a + 4b) = ?$$

$$34. [(x^5 + 3x^4 - 4x^2 - x + 1) : (x^2 + 2x - 1)] : (x^2 - 1) = ?$$

$$35. (a^5 + 1) : (a + 1) = ?$$

$$36. (1 - a^5) : (1 - a) = ?$$

$$37. (a^6 - x^6) : (a^3 + 2a^2x + 2ax^2 + x^3) = ?$$

$$38. (x^6 + x^3 - x - 1) : (x^4 + x^2 + x + 1) = ?$$

$$39. (x^6 + x^4 - x^3 + x^2 + 1) : (x^2 + x + 1) = ?$$

40. Znaleźć iloraz i resztę z dzielenia następujących wielomianów:

$$a) (a^2 - 2b^2) : (a - b) = ?$$

$$b) (x^2 + xy + y^2) : (x + y) = ?$$

$$c) (3a^2 + 2ab + 6b^2) : (3a + 2b) = ?$$

$$d) (a^8 + b^8) : (a^2 + b^2) = ?$$

$$e) (20x^4 - 51x^3 - 9x^2 + 32x) : (4x^2 - 7x - 8) = ?$$

$$41. (x^2 - y^2) : (x + y) = ?$$

$$42. (x^2 - y^2) : (x - y) = ?$$

$$43. (9x^4 - 4y^4) : (3x^2 + 2y^2) = ?$$

$$44. (81m^4 - 49n^4) : (9m^2 - 7n^2) = ?$$

$$45. (m^2a^2 - n^2b^2) : (ma + nb) = ?$$

$$46. (a^2x^2 - b^2y^2) : (ax - by) = ?$$

$$47. [(a^4r^2 - b^4s^2) : (a^2r + b^2s)] + (a^2r + b^2s) = ?$$

$$48. [(b^4x^2 - c^4y^2) : (b^2x - c^2y)] - (b^2x - c^2y) = ?$$

ROZDZIAŁ III.

Podnoszenie liczb do kwadratu i wyciąganie pierwiastka kwadratowego z liczb.

§ 1.

Podnoszenie liczb do kwadratu.

1. Ponieważ $x^2 = x \cdot x$, przeto także

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Podobnie:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

A zatem: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$

Dwumian podnosi się do kwadratu, tworząc kwadrat pierwszego wyrazu, podwójny iloczyn obu wyrazów i kwadrat drugiego wyrazu i dodając do siebie te trzy wyrażenia.

2. Na podstawie tego prawa znajdziemy:

$$34^2 = (30 + 4)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 4 + 4^2 \text{ albo}$$

<u>34² =</u>		<u>34² =</u>
30 ² = 900	alboteż, po opu-	3 ² = 9
2 · 30 · 4 = 240	szczeniu zera	2 · 3 · 4 = 24
<u>4² = 16</u>	w dziesiątkach:	<u>4² = 16</u>
1156		1156

Jeżeli liczba jest więcej niż dwucyfrowa, np. 749, to wyrażając ją jako sumę dwu składników, z których jeden jest cyfrą jednostek, otrzymamy: $749^2 = (740 + 9)^2 = 740^2 + 2 \cdot 740 \cdot 9 + 9^2$; a ponieważ $740^2 = (700 + 40)^2 = 700^2 + 2 \cdot 700 \cdot 40 + 40^2$, przeto $749^2 = 700^2 + 2 \cdot 700 \cdot 40 + 40^2 + 2 \cdot 740 \cdot 9 + 9^2$, czyli

<u>749² =</u>		<u>749² =</u>
700 ² = 490000	albo, po opu-	7 ² = 49
2 · 700 · 40 = 56000	szczeniu zer	2 · 7 · 4 = 56
40 ² = 1600	w setkach i dzie-	4 ² = 16
2 · 740 · 9 = 13320	siątkach:	2 · 74 · 9 = 1332
<u>9² = 81</u>		<u>9² = 81</u>
561001		561001

Liczbę szczególną podnosimy do kwadratu, tworząc kwadrat najwyższej cyfry, z każdej zaś następnej cyfry dwie części, a mianowicie: podwójny iloczyn poprzedzającej liczby (nie cyfry!) przez tę cyfrę i kwadrat tej cyfry. Tak otrzymane liczby podpisujemy pod sobą, wysuwając każdą następną o jedno miejsce ku prawej stronie i dodajemy.

3. Ponieważ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, przeto:

Ułamek tak się podnosi do kwadratu, że się tak licznik jak i mianownik podnosi do kwadratu.

Aby wyprowadzić, jak się podnosi do kwadratu liczbę dziesiętną, np. 4·23, napiszmy ją w kształcie ułamka zwyczajnego, a otrzymamy:

$$4\cdot23^2 = \left(\frac{423}{100}\right)^2 = \frac{423^2}{10000} = \frac{178929}{10000} = 17\cdot8929.$$

Podobnie znajdziemy: $0\cdot035^2 = 0\cdot001225$.

Liczbę dziesiętną podnosi się do kwadratu tak, jak liczbę całkowitą, bez względu na kropkę dziesiętną, a dopiero w otrzymanym wyniku oddziela się dwa razy tyle miejsc na dziesiętne, ile ich było w liczbie dziesiętnej.

Zadania.

1. $(a+c)^2=?$ 2. $(x-y)^2=?$ 3. $(3a+2b)^2=?$
4. $(4m-5n)^2=?$ 5. $(ax+by)^2=?$ 6. $(mx-ny)^2=?$
7. $(-5a+2b)^2=?$ 8. $(-4x-7y)^2=?$
9. $(2a^2b+3ab^2)^2=?$ 10. $(7a^2x^2-9a^2x^3)^2=?$
11. $(8x^2y^2-2x^2z^2)^2=?$ 12. $(-3a^2b^3+6a^3b^2)^2=?$
13. $(5ab^2x+9a^3by)^2=?$ 14. $(-4a^2bm^3-3a^3b^2m)^2=?$
15. $(12a^2b^2c^3+10a^3b^2c^2)^2=?$
16. $(ab^2x^3-a^2bx)^2=?$

Podnieść do kwadratu następujące liczby:

- | | | | |
|-----------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------|
| 17. a) 38, | b) 47, | c) 63, | d) 96. |
| 18. a) 23, | b) 75, | c) 49, | d) 88. |
| 19. a) 318, | b) 479, | c) 531, | d) 847. |
| 20. a) 283, | b) 504, | c) 850, | d) 609. |
| 21. a) 1346, | b) 3178, | c) 4737, | d) 8163. |
| 22. a) 4153, | b) 2035, | c) 9008, | d) 3060. |
| 23. a) 23415, | b) 32041, | c) 42500, | d) 50601. |
| 24. a) 80113, | b) 70024, | c) 60003, | d) 92008. |
| 25. a) $\frac{1}{3}$, | b) $\frac{11}{12}$, | c) $\frac{12}{13}$, | d) $\frac{13}{18}$. |
| 26. a) $\frac{184}{1000}$, | b) $\frac{253}{348}$, | c) $\frac{305}{412}$, | d) $\frac{1002}{1101}$. |
| 27. a) $2\frac{1}{4}$, | b) $3\frac{3}{4}$, | c) $10\frac{2}{3}$, | d) $50\frac{4}{5}$. |
| 28. a) $66\frac{2}{3}$, | b) $33\frac{2}{3}$, | c) $90\frac{5}{6}$, | d) $101\frac{1}{4}$. |
| 29. a) 1·3, | b) 0·27, | c) 15·2, | d) 6·23. |
| 30. a) 0·526, | b) 0·403, | c) 1·307, | d) 15·06. |
| 31. a) 0·0321, | b) 15·315, | c) 9·1105, | d) 0·000271. |

32. Bok kwadratu wynosi: a) 375 m, b) 0·672 m, c) 35·42 m; obliczyć jego pole.

33. Pole kwadratu jest równe sumie pól dwu kwadratów, których boki wynoszą: 41·5 dm i 50·25 dm. Obliczyć to pole.

34. Mając podane boki dwu kwadratów: 54·6 dm i 36·6 dm, obliczyć pole trzeciego kwadratu, które jest różnicą pól podanych kwadratów.

§ 2.

Wyciąganie pierwiastka kwadratowego z liczb.

1. Podnosząc liczbę np. 7 do kwadratu, otrzymujemy 49, t. j. $7^2 = 49$.

Naodwrót, gdybyśmy chcieli wyznaczyć liczbę, któraby, podniesiona do kwadratu, dała liczbę podaną np. 144, to wyznaczenie takiej liczby nazywamy wyciąganiem pierwiastka kwadratowego z liczby 144. Działanie to oznaczamy: $\sqrt{144} = 12$, czytając: »drugi pierwiastek z liczby 144«. Liczba 144 nazywa się liczbą pierwiastkowaną, 12 pierwiastkiem kwadratowym liczby 144, znak zaś $\sqrt{}$ znakiem pierwiastkowym; powstał on z litery r, zaczynającej wyraz »radix« = »pierwiastek«.

Wyciągać pierwiastek kwadratowy z danej liczby znaczy wynaleźć taką liczbę, która, podniesiona do kwadratu, daje liczbę podaną.

2. Aby wyprowadzić, jak się wyciąga pierwiastek kwadratowy z liczby danej, utwórzmy kwadrat liczby np. 76.

$76^2 = (70 + 6)^2 =$	Dzieląc liczbę 5776, zaczynając od
$70^2 =$	prawej strony, na grupy dwucyfrowe,
$2 \cdot 70 \cdot 6 =$	otrzymamy tyle grup, ile cyfr ma podana
$6^2 =$	liczba, przyczem pierwsza grupa — liczo-
5776	na od strony lewej — może być dwucy-
	frową, jak w powyższym przykładzie 57 76

lub jednocyfrową, jak np. $25^2 = 625$. Ponieważ kwadrat dziesiątki (7) ma po prawej stronie dwa zera (4900), przeto jest on zawarty w pierwszej grupie; aby więc wyznaczyć cyfrę dziesiątek, szukamy liczby, któraby, podniesiona do kwadratu, dała liczbę tej grupy t. j. 57 albo liczbę nieco mniejszą od 57. Taką

liczbą jest 7, bo $7^2=49$. Odejmując 49 od 57 i dopisując do reszty drugą grupę, otrzymamy 876.

Wzór działania

$$\begin{array}{r} \sqrt{57 \overline{76}} = 76 \\ 7^2 \dots 49 \\ \hline 876 : 140 \\ 876 : 14 \\ \hline 146.6 \dots 876 \\ \hline = \end{array}$$

W liczbie 876 zawarty jest podwójny iloczyn dziesiątek przez jednostki i kwadrat jednostek; dzieląc więc 876 przez podwójny iloczyn dziesiątek: $2 \cdot 70 = 140$ czyli $876 : 140$ albo $876 : 14$, otrzymamy na iloraz 6 jednostek. Jeżeli utworzymy części składowe kwadratu, pochodzące od cyfry jednostek, a mianowicie $2 \cdot 70 \cdot 6 + 6^2 = (2 \cdot 70 + 6) \cdot 6 = 146 \cdot 6$, zobaczymy, że su-

mę ich otrzymać można w ten sposób, że się do dzielnika 14 dopisuje cyfrę jednostek (6) i tak powstałą liczbę mnoży przez tę cyfrę. Iloczyn odjęty od 876 da resztę zero.

Podobnie postępujemy przy liczbach, które się składają z więcej aniżeli dwu grup. Np.

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{11 \overline{90} \overline{25}} = 345 & \text{albo} & \sqrt{11 \overline{90} \overline{25}} = 345 \\ 3^2 \dots & 9 & 9 \\ \hline & 290 : 6 & 290 : 64.4 \\ 64.4.. & 256 & 256 \\ \hline & 3425 : 68 & 3425 : 685.5 \\ 685.5.. & 3425 & 3425 \\ \hline & = & = \end{array}$$

Aby wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby, dzielimy ją od prawej strony na grupy dwucyfrowe. Następnie wyznaczamy taką liczbę, której kwadrat równa się liczbie 1-ej grupy lub jest od niej nieco mniejszy. Jestto pierwsza cyfra pierwiastka. Kwadrat tej liczby odejmujemy od liczby 1-ej grupy. Do reszty dopisujemy następną grupę, w niej oddzielamy najniższą cyfrę, a pozostałą liczbę dzielimy przez podwójną znaną cyfrę pierwiastka. Otrzymana na iloraz liczba całkowita jest drugą cyfrą pierwiastka. Drugą cyfrę pierwiastka dopisujemy do dzielnika, mnożymy tak utworzoną liczbę przez tę samą cyfrę a iloczyn odejmujemy

od powyższej liczby. Do reszty dopisujemy następną grupę i dzieląc ją, po odkreśleniu najniższej cyfry, przez podwójną liczbę, utworzoną z wyznaczonych cyfr pierwiastka, postępujemy dalej w podobny sposób, co poprzednio.

3. Ponieważ liczbę dziesiętną podnosi się do kwadratu tak, jak liczbę całkowitą, przeto i nawzajem: z liczby dziesiętnej tak się wyciąga pierwiastek kwadratowy, jak z liczby całkowitej. Wszelako dzieląc ją na grupy dwucyfrowe, należy po-

$$\begin{array}{r} \sqrt{45 \cdot 42 \cdot 76} = 6.74 \\ 36 \\ \hline 942 : 127.7 \\ 889 \\ \hline 5376 : 1344.4 \\ 5376 \\ \hline = \end{array}$$

dział ten zaczynać od znaku dziesiętnego i iść ku lewej stronie w części całkowitej, a ku prawej w części dziesiętnej. Brakujące miejsca można uzupełnić zerami, ale tylko przy liczbie dziesiętnej zupełnej.

Jeżeli przy wyciąganiu pierwiastka kwadratowego pozostaje reszta, wówczas liczba pierwiastkowana nie jest pełnym kwadratem liczby całkowitej lub ułamka skończonego. W tym przypadku oblicza się pierwiastek na pewną ilość miejsc dziesiętnych. Np.

$$\begin{array}{r} \sqrt{258} = \sqrt{2 \cdot 58 \cdot 00 \cdot 00} = 16.06... \\ 1 \\ \hline 158 : 26.6 \\ 156 \\ \hline 200 : 32 \\ 2000 : 3206.6 \\ 19236 \\ \hline 764 \end{array}$$

4. Jeżeli mamy wyznaczyć drugi pierwiastek z ułamka zwyczajnego np. $\sqrt{\frac{25}{64}}$, to nim będzie $\frac{5}{8}$, gdyż $\left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$, a ponie-

waż $5 = \sqrt{25}$, $8 = \sqrt{64}$, przeto $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8}$.

$$\text{Podobnie: } \sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

Ułamek zwyczajny pierwiastkuje się, pierwiastkując jego licznik i mianownik.

Jeżeli mianownik ułamka nie jest zupełnym kwadratem liczby całkowitej, np. $\sqrt{\frac{5}{6}}$, wówczas doprowadzamy ułamek przed rozpoczęciem rachunku, przez pomnożenie licznika i mianownika przez tę samą liczbę, do takiej formy, aby jego mianownik był drugą potęgą liczby całkowitej. A zatem:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{5}{6}} &= \sqrt{\frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 6}} = \sqrt{\frac{30}{36}} = \frac{\sqrt{30}}{6}. \text{ Podobnie } \sqrt{2\frac{7}{24}} = \sqrt{\frac{55}{24}} = \sqrt{\frac{55}{4 \cdot 6}} = \\ &= \sqrt{\frac{55 \cdot 6}{4 \cdot 36}} = \sqrt{\frac{330}{144}} = \frac{\sqrt{330}}{12}.\end{aligned}$$

Zadania.

1. $\sqrt{169} = ?$ 2. $\sqrt{784} = ?$ 3. $\sqrt{841} = ?$
4. $\sqrt{1225} = ?$ 5. $\sqrt{1521} = ?$ 6. $\sqrt{6084} = ?$
7. $\sqrt{15129} = ?$ 8. $\sqrt{11881} = ?$ 9. $\sqrt{39601} = ?$
10. $\sqrt{207936} = ?$ 11. $\sqrt{173056} = ?$ 12. $\sqrt{348100} = ?$
13. $\sqrt{476100} = ?$ 14. $\sqrt{4726276} = ?$
15. $\sqrt{19201924} = ?$ 16. $\sqrt{4124961} = ?$
17. $\sqrt{3825936} = ?$ 18. $\sqrt{4318084} = ?$
19. $\sqrt{31843449} = ?$ 20. $\sqrt{76825225} = ?$
21. $\sqrt{1369} = ?$ 22. $\sqrt{576081} = ?$
23. $\sqrt{3370896} = ?$ 24. $\sqrt{7317025} = ?$
25. $\sqrt{0.2209} = ?$ 26. $\sqrt{0.013639} = ?$
27. $\sqrt{0.00056644} = ?$ 28. $\sqrt{0.01} = ?$
29. $\sqrt{0.0001} = ?$ 30. $\sqrt{0.000001} = ?$
31. Obliczyć na trzy miejsca dziesiętne:
 - a) $\sqrt{96} = ?$
 - b) $\sqrt{101} = ?$ c) $\sqrt{7.65} = ?$ d) $\sqrt{0.056} = ?$
 - e) $\sqrt{\frac{13}{8}} = ?$ f) $\sqrt{1\frac{3}{4}} = ?$ g) $\sqrt{2} = ?$
 - h) $\sqrt{3} = ?$ i) $\sqrt{5} = ?$ k) $\sqrt{17} = ?$
32. $\sqrt{\frac{64}{81}} = ?$ 33. $\sqrt{\frac{576}{625}} = ?$ 34. $\sqrt{\frac{676}{1681}} = ?$

$$\checkmark 35. \sqrt{\frac{289}{441}} = ? \quad \checkmark 36. \sqrt{\frac{1369}{5329}} = ? \quad \checkmark 37. \sqrt{\frac{6561}{12321}} = ?$$

$$+ 38. \sqrt{\frac{65536}{110224}} = ? \quad 39. \sqrt{\frac{178929}{797449}} = ? \quad \checkmark 40. \sqrt{3\frac{1}{5}} = ?$$

$$\checkmark 41. \sqrt{5\frac{4}{9}} = ? \quad \checkmark 42. \sqrt{8\frac{1}{6}} = ? \quad + 43. \sqrt{506\frac{1}{4}} = ?$$

$$44. \sqrt{6\frac{219}{625}} = ? \quad 45. \sqrt{522\frac{109}{225}} = ? \quad + 46. \sqrt{25\frac{1}{7}} = ?$$

$$\checkmark 47. \sqrt{7\frac{5}{18}} = ? \quad + 48. a) \sqrt{51\frac{5}{63}} = ? \quad \checkmark b) \sqrt{15\frac{1}{32}} = ?$$

49. Pole kwadratu wynosi 420·25 m; obliczyć jego bok.

— 50. Przyprostokątnia trójkąta prostokątnego = 350 dm, przeciwprostokątnia 370 dm; obliczyć drugą przyprostokątnię.

— 51. Jak długa powinna być drabina, sięgająca do muru 7·42 m wysokiego, jeżeli jej odstęp od muru wynosi na poziomie 3·68 m?

52. Jak długi musi być bok kwadratu, aby jego pole było tak wielkie, jak pola dwu kwadratów, których boki wynoszą 3·07 m i 4·95 m?

53. Obliczyć wysokość trójkąta równobocznego, którego bok ma 0·9 m długości.

ROZDZIAŁ IV.

Ułamki algebraiczne¹⁾.

§ 1.

Określenie ułamka. Rozkładanie liczb na czynniki pierwsze.

1. Jeżeli jednostkę, np. jeden metr, podzielimy na b równych części, to jedną taką część oznaczamy $\frac{1}{b}$, dwie takie części $\frac{2}{b}$, a takich części $\frac{a}{b}$. Wyrażenie $\frac{a}{b}$ nazywamy ułam-

¹⁾ W rozdziale tym należy przypomnieć uczniom rzecz, przerobioną w Części I. Rozdz. XI.

kiem ogólnym i czytamy » a z mianownikiem b « albo » a b -tych«.

Ułamek $\frac{a}{b}$ oznacza, że jednostkę, np. metr¹⁾, podzielono na b równych części i wzięto a takich części; iloraz zaś $a:b$ wyraża, że a metrów podzielić należy na b równych części i wziąć jedną taką część. Ponieważ każda b -ta część metra jest a razy mniejsza niż każda b -ta część a metrów, przeto $\frac{a}{b}$ metra oznacza to samo, co b -ta część a metrów czyli, że $\frac{a}{b} = a:b$ i nawzajem $a:b = \frac{a}{b}$.

Z tego powodu można każde wskazane dzielenie jakichkolwiek dwu liczb, czyto jednomianów, czy też wielomianów, uważać za ułamek. Ułamek taki nazywa się ułamkiem algebraicznym. Ułamki np. $\frac{a}{b}$, $\frac{a^3}{3b}$, $\frac{2a}{a^2+b}$, $\frac{a-b}{a+b}$ i t. d. są ułamkami algebraicznymi.

Jeżeli w ułamku $\frac{a}{b}$ jest $a < b$, to ułamek nazywa się właściwym, jeżeli $a > b$, ułamek jest niewłaściwy, a jeżeli $a = b$ albo $a = m \cdot b$ (licznik jest wielokrotnością mianownika), ułamek nazywa się pozornym.

2. Liczby ogólne takie, jak np. a , $a+b$, a^2-b i t. d., które są podzielne tylko przez siebie i przez jednostkę, nazywamy liczbami pierwszymi, każda zaś inna liczba, jak np. $2a$, mx , a^2 , $5a^2b^3$ itd., nazywa się liczbą złożoną.

Liczbę złożoną można rozłożyć na czynniki pierwsze; np.

$$a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad 3ab^2 = 3 \cdot a \cdot b \cdot b,$$

$$350a^3b^2x = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot x.$$

Jednomian rozkłada się na czynniki pierwsze, pisząc obok czynników współczynnika każdą literę tyle razy jako czynnik, ile jednostek ma wykładnik.

W jaki sposób rozkłada się wielomian na czynniki pierwsze, nie można podać ogólnych prawideł; w następujących jednak trzech przypadkach postępuje się w ten sposób:

1) Objasnić rysunkiem!

1^o) Jeżeli w wielomianie znajduje się wspólny czynnik, wyłącza się go przed nawias. Np.

$$2ax - ab = a(2x - b), \quad 20x^4 - 16x^3 + 12x^2 = \\ = 4x^2(5x^2 - 4x + 3) = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x(5x^2 - 4x + 3).$$

2^o) Jeżeli wyrażenie jest trójmianem kształtu $a^2 + 2ab + b^2$ albo $a^2 - 2ab + b^2$, wówczas składa się z dwu równych czynników $(a + b)(a + b)$ albo $(a - b)(a - b)$. Np.

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 = (3a + 2b)(3a + 2b), \\ 25x^2 - 40xy + 16y^2 = (5x - 4y)(5x - 4y).$$

3^o) Jeżeli wyrażenie jest dwumianem kształtu $a^2 - b^2$, wówczas jest iloczynem sumy i różnicy liczb a i b . Np.

$$9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2 = (3x + 4y)(3y - 4y).$$

3. Najmniejszą wspólną wielokrotność liczb ogólnych i wyrażeń algebraicznych znajduje się w ten sam sposób, w jaki dla liczb szczególnych.

Zadania.

1. Rozłożyć na czynniki pierwsze następujące jednomiany:

$$\begin{array}{llll} a) 18ab, & b) 36x^2, & c) 76a^3, & d) 66ab^2, \\ e) 52x^2y^2, & f) 48a^2b^3, & g) 70a^3b^2, & h) 120a^2x^3y^4. \end{array}$$

2. Rozłożyć na czynniki pierwsze wielomiany:

$$\begin{array}{ll} a) 30a - 70b, & b) 18ab - 15ac, \\ c) 9c^2 + 24cx, & d) 18a^2 - 48ab, \\ e) 2x^4 - 4x^3 + 6x^2, & f) 18 + 12a - 6a^2, \\ g) 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 25xy^4, & h) axy^2 + bx^2y - cx^2y^2, \\ i) a^3b^2m^3 - a^2b^2m^2 - a^4b^3m^3, & \\ \times k) a^2 + 2a + 1, & \times l) x^2 - 2x + 1, \\ \text{---} m) 2y^2 + 4yz + 2z^2, & \text{---} n) 6x^2 - 12x + 6, \\ \times o) 9a^2 + 12a + 4, & \times p) b^2 - 10b + 25, \\ \text{---} r) 2a^2 - 12ab + 18b^2, & s) 4a^2 - 9b^2, \\ t) 9x^2 - 1, & u) 25a^2 - 16b^2, \\ v) 6x^2 - 54y^2, & \text{---} w) 90a^2 - 160b^3, \\ x) 12a^3b^3 - 48ab^5, & y) 24c^4x^2 - 54c^2x^4. \end{array}$$

3. Znaleźć najmniejszą wspólną wielokrotność jednomianów:

$$\begin{array}{ll} a) a \text{ i } b, & b) 2a \text{ i } 4b, \\ c) a^2 \text{ i } b, & d) 3a^2 \text{ i } 6b^2, \end{array}$$

- e) $6x^3y$ i $8xy^2$, f) a , b i c ,
 g) a , $2a^2$ i $3ab$, h) a^2 , $6a^2b$ i $3a^3b$,
 i) $6axy$, $10ax^2y$ i $5a^2y^2$, k) c , $3c^2$, $6c^3$ i $12c^4$,
 l) a , $2a^2$, b^2 , $4a^3$ i $6b^3$,
 m) $8ax^2y$, $10a^2xy^2$ i $16a^2x^2y^2$.

4. Znaleźć najmniejszą wspólną wielokrotność wielomianów:

- a) $a+b$ i $a^2+2ab+b^2$, b) $x-y$ i $x^2-2xy+y^2$,
 c) $c+a$ i c^2-a^2 , d) $m-n$ i m^2-n^2 ,
 e) $x+2$ i $x-2$, f) $a+1$, $a-1$ i a^2-1 ,
 g) $m+n$, $m-n$ i m^2-n^2 ,
 h) $2x+1$, $2x-1$ i $4x^2-1$,
 i) $a+3$, $5(a-3)$ i $20(a^2-9)$,
 k) $2a+4$, $3a-6$ i $6a^2-24$,
 l) $a+1$, $a-1$ i $a+2$,
 m) $5a-5$, $4a-8$ i $20a+20$.

§ 2.

Upraszczanie ułamków i sprowadzanie ich do wspólnego mianownika.

Z określenia ułamka wynika, że np. $\frac{3}{4}$ i $\frac{6}{8}$ przedstawiają te same wartości czyli, że $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2}$; naodwrot $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{6 \cdot 2}{8 \cdot 2}$.

Ogólnie: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}$, $\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$,

t. z. (Wyraż to prawo słowami!).

Np. a) $\frac{3a}{4b} = \frac{3a \cdot 5b^2}{4b \cdot 5b^2} = \frac{15ab^2}{20b^3}$,

b) $\frac{12a^2b^3}{20a^5c^2} = \frac{12a^2b^3 : 4a^2}{20a^5c^2 : 4a^2} = \frac{3b^3}{5a^3c^2}$,

c) $\frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b) \cdot (a+b)}{(a+b) \cdot (a+b)} = \frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$,

d) $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2} = \frac{(a^2-b^2) : (a-b)}{(a-b)^2 : (a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$.

Dzielenie licznika i mianownika danego ułamka przez tę samą liczbę nazywamy upraszczaniem, mnożenie zaś rozszerzaniem ułamka.

Aby ułamki, np. $\frac{a}{m}$, $\frac{b}{mx}$, $\frac{c}{m^2x^2}$, sprowadzić do wspólnego mianownika, wyznaczamy najmniejszą wspólną wielokrotność ich mianowników (m^2x^2). Jeżeli w ułamku $\frac{a}{m}$ położymy mianownik m^2x^2 zamiast m , powiększamy mianownik danego ułamka tyle razy, ile razy m mieści się w m^2x^2 ; aby więc wartość ułamka się nie zmieniła, należy i licznik m razy powiększyć. W ten sposób otrzymamy: $\frac{a}{m} = \frac{amx^2}{m^2x^2}$, $\frac{b}{mx} = \frac{bmx}{m^2x^2}$.

Zadania.

A) Uprościć następujące ułamki:

1. $\frac{ab^2}{a^3bx}$
2. $\frac{3az^2}{6a^2z}$
3. $\frac{15abx^2}{40bcx^3}$
4. $\frac{30a^2b^2c}{35a^2b^3c^2}$
5. $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{2ab}$
6. $\frac{a^2b - 2ab^2}{a^4 - 4a^2b^2}$
7. $\frac{2a+b}{4a^2 + 4ab + b^2}$
8. $\frac{3x-y}{9x^2 - 6xy + y^2}$
9. $\frac{4x^2 - 9y^2}{(2x+3y)^2}$
10. $\frac{1+x^2}{1-x^4}$
11. $\frac{a^2 - 6a + 9}{a^2 - 9}$
12. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$
13. $\frac{12x^3y^3 + 6x^2y^4}{8x^4y^2 + 4x^3y^3}$
14. $\frac{2c(x-y)}{10c^3m(x^2 - y^2)}$
15. $\frac{a^2 + ab - ac}{ab + b^2 - bc}$

B) Sprowadzić do wspólnego mianownika następujące ułamki:

16. a) $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{b}{d}$; b) $\frac{a}{3}, \frac{b}{5}, \frac{c}{4}$
17. a) $\frac{5ab}{21cd}, \frac{2a}{7c}$; b) $\frac{2x}{5a^2}, \frac{3y}{15a^2b}$
18. a) $\frac{a+bc}{m}, \frac{bm-a}{c}$; b) $\frac{b+c}{x}, \frac{a+b}{y}$
19. $\frac{2}{a}, \frac{3}{2a^2}, \frac{5}{6a^3}$ 20. $\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}, \frac{1}{mn}$

$$21. \frac{2x}{5a^2}, \frac{3y^2}{15b^2}, \frac{8xy}{a^2b^2}. \quad 22. \frac{x}{9a^2b}, \frac{y}{6ab^2}, \frac{z}{3ac^2}.$$

$$23. \frac{1}{x}, \frac{4a}{3x^2}, \frac{3b}{4x^2y^2}, \frac{1}{5xy}.$$

$$24. \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}. \quad 25. \frac{2a^2-b}{a+2b^2}, \frac{2a^2+b}{a-2b^2}.$$

$$26. \frac{1}{1+m}, \frac{1}{1-m}, \frac{1}{1-m^2}.$$

$$27. a, \frac{b^2}{x+a}, \frac{a^2b}{x^2+2ax+a^2}.$$

$$28. c, \frac{a}{x-c}, \frac{a^2c}{x^2-2cx+c^2}.$$

$$29. \frac{3}{1-2x}, \frac{1}{1+2x}, \frac{20x-4}{1-4x^2}.$$

$$30. \frac{a+2b}{a-2b}, 2, \frac{a-2b}{a+2b}.$$

$$31. \frac{1+x}{1-x}, 1, \frac{1+x+x^2}{1-x^2}. \quad 32. \frac{1+a}{1-a}, 2, \frac{1+a^2}{1-a^2}.$$

§ 3.

Dodawanie i odejmowanie ułamków.

1. Ponieważ np. $\frac{5}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5+2}{9}$ i sposobem tym dodajemy ułamki o jakichkolwiek licznikach i jakichkolwiek równych mianownikach, przeto możemy napisać:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

$$\text{Podobnie także: } \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

t. z. (Wyraż prawo słowami!).

2. Wyrażenie, złożone z części całkowitej i ułamka, jak np. $a + \frac{b}{c}$, lub $a - \frac{b}{c}$, nazywamy liczbą mieszaną. Aby takie dwie liczby dodać lub odjąć, musimy je sprowadzić do takiej postaci, aby były ułamkami o tych samych mianowni-

kach. A ponieważ liczba a się nie zmienia, jeżeli ją przez tę samą liczbę c pomnożymy i podzielimy, przeto:

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c};$$

podobnie:
$$a - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac - b}{c}.$$

Przy liczbach szczególnych wyrażamy liczbę mieszaną w ten sposób, że ułamek stawiamy obok liczby całkowitej bez znaku, np. $2\frac{3}{4}$ znaczy $2 + \frac{3}{4}$; przy liczbach zaś ogólnych znak $+$ lub $-$ wyraźnie zaznaczyć potrzeba, gdyż postawienie ułamka obok liczby całkowitej bez znaku oznacza mnożenie tych dwu liczb, np. $a\frac{b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$.

3. Aby dodać lub odjąć ułamki o różnych mianownikach, należy je sprowadzić do wspólnego mianownika, np.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an + bm}{mn}; \text{ tak samo } \frac{a}{m} - \frac{b}{n} = \frac{an - bm}{mn}.$$

Zadania.

1. $\frac{a+b}{c} + \frac{a-b}{c} = ?$
2. $\frac{a+b}{m} + \frac{2a-3b}{m} = ?$
3. $\frac{2a}{7} + \frac{5a}{7} + \frac{4a}{7} = ?$
4. $\frac{a+b+c}{3} + \frac{a-b}{3} + \frac{a-c}{3} = ?$
5. $\frac{a^2+a+1}{5} + \frac{3a^2-4a-5}{5} + \frac{a^2-6a+9}{5} = ?$
6. $\frac{(x+z)^2}{xz} + \frac{(x-z)^2}{xz} + \frac{(x+z)(x-z)}{xz} = ?$
7. $\frac{(x+3)(x+7)}{3} + \frac{(x-2)(x-9)}{3} + \frac{x-2x^2}{3} = ?$
8. $\frac{5x-2a}{5a} + \frac{2x-4a}{5a} + \frac{11a-3x}{5a} = ?$
9. $\frac{a^2-b}{a-b} + \frac{a-b^2}{a-b} + \frac{b-a}{a-b} = ?$
10. $\frac{10a-4b}{a+b} + \frac{6b-13a}{a+b} + \frac{4a-b}{a+b} = ?$
11. $\frac{x-a}{x+y-z} + \frac{y-2z}{x+y-z} + \frac{z+a}{x+y-z} = ?$

$$12. \frac{a+b}{c} - \frac{a-b}{c} = ? \quad 13. \frac{3m-4n}{a} - \frac{m-5n}{a} = ?$$

$$14. \frac{5x+2a}{4} - \frac{2x-a}{4} = ? \quad 15. \frac{5a}{9} + \frac{12a}{9} - \frac{10a}{9} = ?$$

$$16. \frac{4a+3}{x+1} - \frac{3a-4}{x+1} = ? \quad 17. \frac{(a+b)^2}{a-b} - \frac{(a-b)^2}{a-b} = ?$$

$$18. \frac{18(a-b)}{24} - \frac{20(2a-3b)}{24} + \frac{21(a-2b)}{24} = ?$$

$$19. \frac{a+b-c}{x} + \frac{a-b+c}{x} - \frac{b+c-a}{x} = ?$$

$$20. \frac{5(4a-b)}{a-b} + \frac{2(2a+3b)}{a-b} - \frac{4a+9b}{a-b} = ?$$

$$21. \frac{a(a+b)}{a^2+b^2} - \frac{b(a-b)}{a^2+b^2} + \frac{(a+b)(a-b)}{a^2+b^2} = ?$$

$$22. \frac{5x-y}{x+y+z} + \frac{3y+4z}{x+y+z} + \frac{4x-5y+3z}{x+y+z} = ?$$

$$23. \frac{2(a+b+c)}{a+b-c} - \frac{4(a+b)-c}{a+b-c} + \frac{3(a+b)-4c}{a+b-c} = ?$$

$$24. a) 2a + \frac{3ab}{a+b} = ? \quad b) 1 + \frac{1+x}{1-x} = ?$$

$$25. a) x - \frac{x-y}{3} = ? \quad b) 1 - \frac{1-x}{1+x} = ?$$

$$26. a) x - y + \frac{y^2}{x+y} = ? \quad b) x + y - \frac{x^2+y^2}{x+y} = ?$$

$$27. a) m + \frac{mn}{m-n} = ? \quad b) -m + \frac{m^2}{m-n} = ?$$

$$28. a) \frac{(a+b)^2}{4ab} - 1 = ? \quad b) \frac{(a-b)^2}{4ab} + 1 = ?$$

$$29. a) \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = ? \quad b) \frac{x}{a^2} - \frac{1}{a} = ?$$

$$30. a) \frac{a}{cx} + \frac{b}{cy} = ? \quad b) \frac{m}{a^2y} - \frac{n}{ay^2} = ?$$

$$31. \frac{9x}{8a} + \frac{7x}{32a} + \frac{x}{2a} = ? \quad 32. \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = ?$$

$$33. \frac{x-y}{xy} + \frac{z-x}{xz} + \frac{y-z}{yz} = ?$$

$$34. \frac{a}{x^3} + \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x} + 1 = ? \quad 35. \frac{a}{b^2c} + \frac{b}{ac^2} + \frac{c}{a^2b} = ?$$

$$36. \frac{11a}{12} - \frac{17a}{18} + \frac{5a}{24} = ?$$

$$37. \frac{2a-3x}{5} - \frac{6a-3x}{4} + \frac{5x-7a}{10} - \frac{2x-5a}{2} = ?$$

$$38. \frac{a+4b}{10} - \frac{2(a-3b)}{15} - \frac{11(a+b)}{20} = ?$$

$$39. \frac{3(m-n)}{4} - \frac{5(2m-3n)}{6} + \frac{7(m-2n)}{8} = ?$$

$$40. \left(\frac{x^2}{12} + \frac{2x}{3} + 1 \right) - \left(\frac{x^2}{18} - \frac{x+1}{3} \right) = ?$$

$$41. \left(\frac{2a^2}{3} - \frac{3ax}{4} + \frac{x^2}{6} \right) - \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{ax}{3} - \frac{3x^2}{4} \right) = ?$$

$$42. a) \frac{a}{b} + \frac{a-b}{a+b} = ? \quad b) \frac{x+y}{x} - \frac{x}{x-y} = ?$$

$$43. a) \frac{x-2y}{2x-3y} + \frac{2x}{3y} = ? \quad b) \frac{5m}{9n} - \frac{7n-6m}{2n-9m} = ?$$

$$44. a) \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = ? \quad b) \frac{3x-2y}{3x+2y} - \frac{3x+2y}{3x-2y} = ?$$

$$45. \frac{3x-6y}{x+y} + \frac{7x-8y}{x-y} - \frac{5x-6y}{x-y} - \frac{4x-5y}{x+y} = ?$$

$$46. \frac{1-x}{1+x} + \frac{1+x}{1-x} - \frac{1+x^2}{1-x^2} = ?$$

$$47. \frac{a-1}{a+1} + \left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 + 1 = ?$$

$$48. \frac{a+1}{a-1} + \frac{a^2+2a}{a^2-1} + 1 - \frac{3a}{a+1} = ?$$

$$49. \frac{4x}{x+2} - \frac{1}{3} + \frac{x+2}{3x-6} = ?$$

$$50. \frac{3}{1+3x} - \frac{1}{1-3x} + \frac{15x-1}{1-9x^2} = ?$$

$$51. \frac{1}{3-3a^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{1-a} = ?$$

$$52. \frac{3+2x}{x-2} - \frac{3x-2}{x+2} - \frac{10+17x-3x^2}{x^2-4} = ?$$

$$53. \frac{c}{3a} + \frac{ac}{3a^2 - c^2} + \frac{c^3}{3a(3a^2 - c^2)} = ?$$

$$54. \frac{a^2}{b(a+b)} - \frac{b^2}{a(a-b)} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = ?$$

$$55. \frac{2x}{x-1} + \frac{3x+1}{x+1} - \frac{4x-3}{x-2} = ?$$

$$56. \frac{2}{2a-1} - \frac{5}{3a+1} + \frac{4}{2a-2} = ?$$

§ 4.

Mnożenie ułamków.

1. Jeżeli przy mnożeniu ułamka przez liczbę całkowitą, np. $\frac{5}{21} \times 3 = \frac{5 \times 3}{21}$, oznaczmy liczby szczególne liczbami ogólnymi, otrzymamy:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b},$$

t. z. (Wyrazić prawo słowami!)

Jeżeli mianownik ułamka jest podzielny przez licznik, np. $\frac{5}{21} \times 3$, wówczas $\frac{5}{21} \times 3 = \frac{5}{21:3}$. Ogólnie wyrażamy ten sposób postępowania:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b:c},$$

t. z. (Wyrazić prawo słowami!)

2. Podobnie, stosując znaki ogólne przy mnożeniu liczby całkowitej przez ułamek, np. $4 \times \frac{3}{7} = \frac{4 \times 3}{7}$, otrzymamy:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c},$$

t. z. (Wyrazić prawo słowami!)

3. Sposób mnożenia dwu ułamków przez siebie, np. $\frac{3}{8} \times \frac{7}{9} = \frac{3 \times 7}{8 \times 9}$, wyrazimy w liczbach ogólnych:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

t. z. (Prawo wyrazić słowami!)

Jeżeli iloczyn dwu ułamków równa się jednostce, np. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} =$
 $= \frac{ab}{ab} = 1$, to jeden z nich jest odwrotnością drugiego. Uła-
mek więc $\frac{b}{a}$ jest odwrotnością ułamka $\frac{a}{b}$ i naodwrot.

Jeżeli liczba całkowita i mianownik ułamka, alboważ li-
cznik jednego ułamka i mianownik drugiego, mają wspólny
podzielnik, wówczas należy te dwie liczby przed wykonaniem
mnożenia podzielić przez ten wspólny podzielnik, a rachunek
przez to znacznie się uprości. Np.

$$\frac{3a}{20b} \cdot 4b^4 = \frac{3a}{5} \cdot b = \frac{3ab}{5}, \quad \frac{3a^2}{10b} \cdot \frac{8b^2}{9a^2c} = \frac{1}{10b} \cdot \frac{8b^2}{3c} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{4b}{3c} = \frac{4b}{15c}.$$

4. Liczby mieszane zamienia się przed wykonaniem mno-
żenia na ułamek alboważ mnoży się je jako dwumiany. Np.

$$a) \left(a + \frac{b}{c}\right) m = \frac{ac + b}{c} \cdot m = \frac{acm + bm}{c}$$

$$\text{albo } \left(a + \frac{b}{c}\right) m = am + \frac{bm}{c} = \frac{acm + bm}{c}.$$

$$b) \left(a + \frac{b}{c}\right) \left(m + \frac{n}{p}\right) = \frac{ac + b}{c} \cdot \frac{mp + n}{p} = \frac{(ac + b)(mp + n)}{cp}$$

$$\text{albo } \left(a + \frac{b}{c}\right) \left(m + \frac{n}{p}\right) = am + \frac{bm}{c} + \frac{an}{p} + \frac{bn}{cp} =$$

$$= \frac{acmp + bmp + acn + bn}{cp}.$$

Zadania.

$$1. a) \frac{2a}{3b} \cdot 5a = ? \quad b) \frac{0.5m}{3r} \cdot 6r^2 = ? \quad c) \frac{4c}{7x^2} \cdot 2.5ax = ?$$

$$2. a) \frac{3a^2}{x^3} \cdot 5ax^5 = ? \quad b) \frac{25b^2}{36c^3y} \cdot 0.4ac^2 = ?$$

$$c) \frac{4ab^3}{25x^2z} \cdot 10bxz^2 = ? \quad d) \frac{6.5m^2p}{4.9a^3b^2} \cdot 1.4a^4bp^2 = ?$$

3. a) $x \cdot \frac{8y}{9} = ?$ b) $0.6x^3 \cdot \frac{10}{3x^2} = ?$ c) $ab \cdot \frac{c}{2ab^2} = ?$

4. a) $2b^3 \cdot \frac{3}{4ab} = ?$ b) $7x^2y^2 \cdot \frac{a^3}{14x^3y} = ?$

c) $7.2mn^3 \cdot \frac{m^2}{3.6n^2y} = ?$ d) $2\frac{3}{4}a^2b^3 \cdot \frac{8x}{a^3b} = ?$

5. a) $\frac{a^2}{b^2} \cdot b^2 = ?$ b) $5x^3y^3 \cdot \frac{2ab^3}{5x^3y^3} = ?$ c) $\left(\frac{a}{3} + \frac{b}{4}\right) 12 = ?$ —

6. a) $\frac{3a}{5c} \cdot \frac{4b}{7d} = ?$ b) $\frac{5a^2}{3b^3} \cdot \frac{2a}{3b} = ?$ c) $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right) \cdot \frac{5}{6} = ?$ —

7. a) $\frac{12x}{13y} \cdot \frac{39y^2}{64x^2} = ?$ b) $\frac{3a^2b}{8xy^2} \cdot \frac{4xy}{9ab} = ?$ c) $\frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a} = ?$ ✓

8. a) $\left(-\frac{3a}{c}\right) 4ac = ?$ b) $2a^2m^3 \left(-\frac{3c}{8am^4}\right) = ?$

c) $\left(-\frac{5a^3}{21b^2c^2}\right) (-7b^4c) = ?$ d) $\left(-\frac{x^2y^3}{4.8a^2}\right) 2.4a^5x = ?$

9. a) $(-2xy) \left(-\frac{5ax^2}{10y^2}\right) = ?$ b) $\frac{3ab}{4bc-6c^2} (-6ac) = ?$

— c) $28(a-b) \cdot \frac{a+b}{7} = ?$ d) $\left(-\frac{3a^2}{5b^2}\right) (-10a^2b^2) = ?$

10. a) $\left(-\frac{5x^3}{6y^3}\right) \cdot \frac{2y^2}{3x^2} = ?$ b) $\frac{33m^3}{4a^3x^3} \left(-\frac{6a^4x^2}{11my^2}\right) = ?$

c) $\left(-\frac{22a^2c^3}{21b^2z^2}\right) \left(-\frac{7b^3z}{11a^2c^2}\right) = ?$

11. a) $\frac{2x}{3y} \cdot \frac{5mx}{6ny} \cdot \frac{3y^2}{4m^2x} = ?$ b) $\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^3}{c^3} \cdot \frac{c^4}{a^4} = ?$

c) $\left(-\frac{4a^2}{5n^2}\right) \left(-\frac{3b^3}{4a^4}\right) \frac{10a^3n^3}{9b^2} = ?$

12. a) $\left(-\frac{3ac}{5b^2d}\right) (-6ab) \left(-\frac{15bd^2}{9a^2c}\right) = ?$

b) $2\frac{1}{3}a^2b^2 \left(-\frac{3m^2x}{14a^4b^3}\right) \left(-\frac{2a}{m^3x^4}\right) = ?$

13. a) $\left(\frac{2a}{3c} + \frac{5a}{6c}\right) 3c = ?$ b) $\left(\frac{4x}{9y} - \frac{5x}{3y}\right) (-9y) = ?$

14. a) $\left(\frac{5x}{6} - \frac{7y}{8} + \frac{9z}{10}\right) 60xyz = ?$ b) $abc \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) = ?$

$$15. a) \left(\frac{2z^3}{3a^3} + \frac{5z^2}{6a^2} + \frac{7z}{9a} \right) 6a^2 = ?$$

$$b) 12b^2 \left(\frac{x^4}{3y^4} - \frac{3x^3}{3y^3} + \frac{x^2}{6y^2} \right) = ?$$

$$16. \left(\frac{2}{3} - \frac{5x}{6} + \frac{x}{4} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \right) = ?$$

$$17. \left(\frac{a}{4b} - \frac{b}{5a} + 1 \right) \left(\frac{a}{3b} - \frac{b}{3a} \right) = ?$$

$$18. \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \right) \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{4} + \frac{c}{6} \right) = ?$$

$$19. a) \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-b}{c} = ?$$

$$b) \frac{b+c}{m^2} \cdot \frac{m^3}{b-c} = ?$$

$$20. a) \frac{3a+2b}{5a-5} \cdot \frac{3a-b}{5a+2b} = ?$$

$$b) \frac{2a-b}{2a+b} \cdot \frac{3a+b}{a+b} = ?$$

$$21. a) (2a+1) \frac{a-1}{a+1} = ?$$

$$b) \left(1 + \frac{1-z}{1+z} \right) (1+z) = ?$$

$$22. a) \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-b}{a^2} = ?$$

$$b) \frac{x-a}{y-b} \cdot \frac{x+a}{y+b} = ?$$

$$c) \frac{2c+1}{c-1} \cdot \frac{2c-1}{c+1} = ?$$

$$d) \frac{3a+2b}{a-2b} \cdot \frac{3a-2b}{a+2b} = ?$$

$$23. a) \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{a} = ?$$

$$b) \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = ?$$

$$24. a) \left(1 + \frac{1}{x} \right) \left(1 - \frac{1}{x} \right) = ? \quad b) \left(1 + \frac{a+b}{a-b} \right) \left(1 - \frac{a-b}{a+b} \right) = ?$$

$$25. \left(2 + \frac{a+2c}{a-c} \right) \left(\frac{a+2c}{a+c} - 2 \right) = ?$$

$$26. \frac{1-x^2}{4+x-3x^2} \left(3 + \frac{1}{1-x} \right) = ?$$

$$27. a) \left(1 - \frac{1}{a} \right) (a^2+a+1) = ? \quad b) \left(a+b - \frac{a^2+b^2}{a+b} \right) (a+b) = ?$$

$$28. \left(\frac{x+a}{x} - \frac{2x}{x-a} \right) \frac{x-a}{x^2+a^2} = ?$$

$$29. \left(\frac{x^2+z^2}{x^3+x^2} - \frac{1}{x+1} \right) (x+1) = ?$$

$$30. \left(1 + \frac{a}{b} \right) \left(1 - \frac{b}{a} \right) \frac{ab}{a-b} = ?$$

$$31. \frac{c+z}{c-z} \cdot \frac{c^2-z^2}{c^2+2cz+z^2} \cdot \frac{c-z}{c+z} = ?$$

$$32. \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{1}{x-y} = ?$$

$$33. \left(a + \frac{ab-2}{a-b}\right) \left(a - \frac{ab-2}{a+b}\right) \cdot \frac{a-b}{a^4-4} = ?$$

§ 5.

Dzielenie ułamków.

1. Stosując prawo, podług którego dzieli się ułamek przez liczbę całkowitą, np. $\frac{3}{8} : 4 = \frac{3}{8 \times 4}$, do liczb ogólnych, otrzymamy:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c},$$

t. z. (Wyrazić prawo słowami!)

Jeżeli licznik ułamka jest podzielny przez liczbę całkowitą, np. $\frac{12}{18} : 4$, wówczas $\frac{12}{18} : 4 = \frac{12 : 4}{18}$; ogólnie:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a : c}{b},$$

t. z. (Wyrazić prawo słowami!)

2. Prawo dzielenia liczby całkowitej przez ułamek, np. $5 : \frac{3}{4} = 5 \times \frac{4}{3}$, wyrazimy ogólnie:

$$a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b},$$

t. z. (Wyrazić prawo słowami!)

3. Sposób postępowania przy dzieleniu dwu ułamków przez siebie, np. $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$, wyrazimy:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

t. z. (Wyrazić prawo słowami!)

Jeżeli licznik dzielnej jest podzielny przez licznik dzielnika, a mianownik dzielnej przez mianownik dzielnika, np. $\frac{15}{28} : \frac{3}{4}$, wówczas $\frac{15}{28} : \frac{3}{4} = \frac{15 : 3}{28 : 4}$; a zatem ogólnie:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d},$$

t. z. (Wyrazić prawo słowami!)

4. Liczby mieszane zamienia się przed wykonaniem dzielenia na ułamki; jeżeli jednak dzielna jest podzielna przez dzielnik, można je dzielić jako wielomiany.

Np. a) $\left(a + \frac{b}{c}\right) : m = \frac{ac + b}{c} : m = \frac{ac + b}{cm},$

$$a : \left(b + \frac{c}{d}\right) = a : \frac{bd + c}{d} = \frac{ad}{bd + c},$$

$$\left(a - \frac{b}{c}\right) : \left(m + \frac{p}{r}\right) = \frac{ac - b}{c} : \frac{mr + p}{r} = \frac{(ac - b)r}{(mr + p)c};$$

b) $\left(a^4 + \frac{a^2}{b}\right) : a^2 = a^2 + \frac{1}{b},$

$$\left(a^2 - \frac{b^2}{c^2}\right) : \left(a + \frac{b}{c}\right) = a - \frac{b}{c}.$$

Zadania.

1. a) $\frac{5a}{6} : a = ?$ b) $\frac{x^3}{a} : x^2 = ?$ c) $\frac{4a^5}{3x} : 2a^3 = ?$

2. a) $\left(-\frac{4a}{7c}\right) : 4 = ?$ b) $\frac{6c^2}{5m} : (-3c) = ?$

3. a) $\frac{2m}{7} : c = ?$ b) $\frac{11ab}{c} : 4d = ?$ c) $\frac{6ax^2}{5y^2} : 5y^2 = ?$

4. a) $\frac{45x^2}{8} : (-30xy) = ?$ b) $\left(-\frac{16a^2b^3}{13}\right) : 5ab^4c = ?$

c) $\left(-\frac{2 \cdot 5a^5z}{2}\right) : (-10a^2y^4z^3) = ?$

5. a) $ab : \frac{m}{c} = ?$ b) $6a^2 : \frac{6a^2}{5cx} = ?$ c) $7b^2c : \frac{bc^3}{a} = ?$

6. a) $30a^2c : \left(-\frac{5a}{6c}\right) = ?$ b) $(-20x^2y^2) : \left(-\frac{5ax^4}{3by}\right) = ?$

7. a) $\frac{13a}{14c} : \frac{14m}{15n} = ?$ b) $\frac{2a^2}{7b^2} : \frac{a^3}{14c} = ?$

c) $\frac{3}{16a^2b^2} : \frac{5}{4ab} = ?$ d) $\frac{49a^2b^3}{25c^3y^2} : \frac{7a^2b^2}{5cy^2} = ?$

8. a) $\frac{a^3b^2}{c^4d^5} : \frac{a^2b}{c^2d} = ?$ b) $\frac{9x^4}{16y^3} : \frac{3x^2}{4y} = ?$

$$9. a) \frac{21 a m^2}{34 b^2 x} : \left(-\frac{7 m}{17 b^2}\right) = ? \quad b) \left(-\frac{3 a x}{5 b y}\right) : \left(-\frac{9 a^2 x^2}{2 b^2 y^2}\right) = ?$$

$$10. a) \frac{4(a-b)}{m} : (a-b) = ? \quad b) \frac{4a+8b}{c} : (a+2b) = ?$$

$$11. a) \left(a^2 - \frac{a^2}{a+1}\right) : a^2 = ? \quad b) \left(x + \frac{xy}{x-y}\right) : 4x = ?$$

$$12. a) \left(1 + \frac{x}{y}\right) : 2(x+y) = ? \quad b) \left(\frac{12 a^2}{25 b^2} + \frac{8 a}{5 b}\right) : 4 a = ?$$

$$13. a) 2 a : \left(1 + \frac{b}{a}\right) = ? \quad b) (1-m) : \left(m - \frac{m^2}{1+m}\right) = ?$$

$$14. a) \left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{a}{c}\right) : \frac{a}{c} = ? \quad b) \left(\frac{16 x^2}{55 z^2} - \frac{8 x}{11 z}\right) : \frac{8 x}{11 z} = ?$$

$$15. \left(\frac{3 x^2}{4 y} - \frac{9 x^2}{10 y^2} + \frac{x}{5 y^3}\right) : \left(-\frac{3 x}{5 y}\right) = ?$$

$$16. \frac{16 a^4 b^4 - 8 a^3 b^3 + 4 a^2 b^2}{5 x^3 y^6 + 10 x^2 y^4 - 5 x y^2} : \frac{4 a^2 b^2}{5 x y^2} = ?$$

$$17. a) \frac{1}{a} : \frac{a-2}{a^2} = ? \quad b) \left(x + \frac{x}{2}\right) : \left(x - \frac{x}{3}\right) = ?$$

$$18. a) \left(1 + \frac{a}{x}\right) : \left(1 - \frac{a}{x}\right) = ? \quad b) \left(\frac{x^2}{c} - c\right) : \left(\frac{x^2}{c} + c\right) = ?$$

$$19. a) \frac{6(c+d)}{25 x^2} : \frac{c+d}{5 x} = ? \quad b) \frac{3 m + 6 n}{4 a - 8 b} : \frac{m + 2 n}{a - 2 b} = ?$$

$$20. a) \frac{a^2 - b^2}{2 a b} : \frac{a-b}{2} = ? \quad b) \frac{c^2 - d^2}{x^2 - y^2} : \frac{c+d}{x-y} = ?$$

$$21. a) \frac{4 x^2 - 9 y^2}{x + 2 y} : \frac{2 x + 3 y}{x + 2 y} = ?$$

$$b) \frac{25 a^2 - 49 c^2}{3 a - 4 c} : \frac{5 a - 7 c}{3 a - 4 c} = ?$$

$$22. a) \frac{x^2 - y^2}{2 x y} : \left(1 + \frac{y}{x}\right) = ? \quad b) \left(\frac{m^2}{r^2} - 1\right) : \left(1 + \frac{r}{m}\right) = ?$$

$$23. a) \left(a^2 - \frac{1}{4}\right) : \left(a + \frac{1}{2}\right) = ?$$

$$b) \left(\frac{a^2 + c^2}{c} - 2 c\right) : \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) = ?$$

$$24. \left(\frac{x-1}{x+1} - 1\right) : \left(\frac{x+1}{x-1} + 1\right) = ?$$

$$25. \left(\frac{a^2}{9} - \frac{b^2}{4}\right) : \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right) = ?$$

$$26. \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} \right) : \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) = ?$$

$$27. \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + 1 \right) : \left(1 + \frac{2}{x-1} \right) = ?$$

$$28. \left(\frac{a^2+b}{a^2} - \frac{a+b^2}{b^2} \right) : \frac{b-a}{ab} = ?$$

$$29. \left(\frac{x+z}{x-z} + \frac{x-z}{x+z} \right) : \frac{x^2+z^2}{x-z} = ?$$

$$30. \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a^2-b^2} \right) : \frac{2ab}{a^2-b^2} = ?$$

$$31. \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{a-c} \right) : \left(\frac{1}{a-c} - \frac{1}{a+c} \right) = ?$$

$$32. \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right) : \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) = ?$$

$$33. \left(\frac{ax}{a-x} + x \right) : \left(3x + \frac{ax}{a-x} \right) - \left(\frac{ax}{a-x} + 2a \right) : \left(\frac{ax}{a-x} + 4a \right) = ?$$

ROZDZIAŁ V.

Liczby niedokładne.

§ 1.

Określenie liczb niedokładnych.

Bardzo często otrzymujemy z rachunku liczby, których miejsca najniższe nie mają znaczenia w praktycznem zastosowaniu. Np. Jeżeli za 100 kg towaru płaci się 845·74 K, to za 1 kg należy zapłacić 8·4574 K. Ponieważ ani 7 tysięcznych ani 4 dziesięciotysięcznych korony nie można zapłacić monetą, przeto dwie ostatnie cyfry tej liczby nie mają praktycznego znaczenia i mówimy, że cena 1 kg wynosi 8·45 K.

Cena ta jest niedokładna, a niedokładność wynosi 8·4574 K — 8·45 K = 0·0074 K. Ponieważ 0·0074 < 0·01, przeto, biorąc 8·45 K zamiast 8·4574 K, popełniamy błąd, mniejszy niż 0·01 K.

Liczbę 8·45 K, która przedstawia cenę 1 kg niezupełnie dokładnie, lecz tylko w przybliżeniu, nazywamy liczbą niezu-

pełną albo wartością przybliżoną (przybliżeniem) liczby 8·4574 K.

Gdybyśmy zamiast 8·4574 K wzięli 8·46 K, wzięlibyśmy za wiele, popełniając błąd $8·46\text{ K} - 8·4574\text{ K} = 0·0026\text{ K}$, mniejszy od 0·01 K. Błąd pierwszy 0·0074 K jest większy od 0·005 K t. j. od połowy setnej części korony ($0·005 = 0·01 : 2$), drugi zaś 0·0026 K jest mniejszy od 0·005 K; wartość więc przybliżona 8·46 K jest bliższa liczby pierwotnej 8·4574 K, aniżeli wartość przybliżona 8·45 K.

Podobnie zbliża się przybliżenie np. 7·25 więcej do wartości liczby 7·2513, aniżeli przybliżenie 7·26, albowiem $0·0013 < 0·005$.

Z tego widzimy, że jeżeli pierwsza z opuszczonych cyfr liczby podanej jest 5 lub większa od 5, należy ostatnią z cyfr zatrzymanych na wartość przybliżoną powiększyć o jednostkę, czyli należy wziąć tak zwaną poprawkę; w przeciwnym razie pozostawia się ostatnią cyfrę niezmienną.

Podobnie, jak liczby dziesiętne, możemy i liczby całkowite wyrażać w przybliżeniu. Np. wartości przybliżone liczb: 48 321 i 57 684, wyrażone w setkach, są: 48 300 i 57 700.

Zadania.

1. Wyrazić w przybliżeniu następujące liczby:

a) 0·213,	1·4563,	3·16	do 1 dziesiątnej;
b) 3·4132,	0·25631,	17·4152	do 2 dziesiąt.;
c) 0·20914,	3·19255,	76·5128	do 3 dziesiąt.;
d) 0·342,	1·4556,	3·4756	w dziesiątych;
e) 1·2432,	0·6547,	7·6179	w setnych;
f) 5·31204,	7·04356,	0·16789	w tysięcznych;
g) 38 451,	4 375,	534 892	w dziesiątkach;
h) 62 540,	13 489,	67 984·532	w setkach;
i) 1 964 215,	21 748 924,	31 245 121	w milionach.

2. Mila austriacka ma 7·585936 km; wyrazić ją: a) w metrach, b) w decymetrach (w całkowitych).

3. Stopa austriacka ma 0·316081 m; wyrazić ją: a) w cm, b) w mm. (na 2 m. dz.).

4. Metr ma 3·555 stóp polskich; wyrazić go w calach (na 2 m. dz.; stopa = 12 cali).

5. 69 742·5 K wyrazić: *a*) w tysiącach, *b*) w dziesiątkach.
6. Łokieć polski ma 595·5 mm; wyrazić go: *a*) w dm, *b*) w cm. (1 m. dz.).
7. Mórg krakowski ma 59·943 a; wyrazić go: *a*) w m², *b*) w ha (1 m. dz.).
8. Korzec lwowski ma 123·003 litrów; wyrazić go w hl.
9. Funt litewski ma 374·658 gramów; wyrazić go w hg.
10. Ludność Galicyi wynosiła w 1900 roku 7 315 939 osób; wyrazić tę ludność w tysiącach.
11. Ile milionów kilometrów kwadratowych ma w przybliżeniu: *a*) Azja (44 183 382 km²), *b*) Europa (9 690 843 km²), *c*) Afryka (29 817 042 km²), *d*) Ameryka (39 295 060 km²), *e*) Australia (8 955 231 km²), *f*) kraje podbiegunowe (4 486 564 km²), a ile cała powierzchnia ziemi?
12. Kraków ma obecnie 44 973 mężczyzn a 46 350 kobiet; ile setek: *a*) mężczyzn, *b*) kobiet ma Kraków?
13. Ile tysięcy: *a*) Polaków (120 631 osób), *b*) Rusinów (15 159 osób), *c*) Niemców (20 409 osób) ma w przybliżeniu Lwów?
14. Ile dziesiątek tysięcy ludności ma w przybliżeniu: *a*) Galicya (7 317 023 osób), *b*) Lwów (159 877 osób), *c*) Kraków (91 323 osób)?

§ 2.

Dodawanie i odejmowanie liczb niedokładnych.

Liczby niedokładne, zawierające tę samą ilość cyfr dziesiętnych, dodaje się i odejmuje tak, jak liczby dokładne. Jeżeli zaś liczby niedokładne nie zawierają tej samej ilości cyfr, należy je wprzód skrócić tak, aby każda z nich zawierała tę samą ilość cyfr.

$$\begin{aligned} \text{Np. } a) \quad & 4\cdot2739\dots + 0\cdot531\dots + 5\cdot4 + 9\cdot2\bar{6} = \\ & = 4\cdot274 + 0\cdot531 + 5\cdot4 + 9\cdot263 = 19\cdot468, \end{aligned}$$

$$b) \quad 27\cdot912\dots - 18\cdot36452 = 27\cdot912 - 18\cdot365 = 9\cdot547.$$

Zadania.

1. $0\cdot923\dots + 3\cdot61\dots + 2\cdot7426\dots + 1\cdot451\dots = ?$
2. $63\cdot26\dots - 10\cdot257\dots - 25\cdot4\dots = ?$

3. $5\cdot46 + 12\cdot173... - 9\cdot327 + 0\cdot42... = ?$

4. $2\cdot72 + 0\cdot321... + 1\cdot5412... - \frac{1}{3} - 0\cdot1 = ?$

5. $\frac{5}{7} + 17\cdot4 - 0\cdot293 = ?$

6. $7\ 312\ 425 + 692\ 389 + 8\ 149\ 956 = ?$ (w tysiącach).

7. $1\ 642\ 598\ 473 - 41\ 592\ 768 = ?$ (w milionach).

8. Oliczyć sumę: $\frac{2}{11} + \frac{7}{9} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ (w 3 m. dzies.).

9. Obliczyć różnicę: a) $\frac{5}{36} - \frac{7}{96}$, b) $\frac{7}{63} - \frac{5}{91}$, c) $\frac{1}{111} - \frac{1}{148}$ w liczbach dziesiętnych (na 4 m. dz.).

10. Obliczyć sumę: $2\cdot47\text{ kg} + 3\cdot8496\text{ kg} + 4\cdot7249... \text{ kg} + 12\cdot534... \text{ kg}$ w dg (w całkowitych).

11. Łokieć toruński ma $569\cdot5\text{ mm}$, lwowski $593\cdot93\text{ mm}$; obliczyć różnicę tych dwu miar w cm (w całkowitych).

12. Korzec krakowski ma $120\cdot084\text{ l}$, gdański $51\cdot693\text{ l}$; obliczyć różnicę obu miar w del (w całkowitych).

13. Ile setek tysięcy mieszkańców więcej ma Rosya ($130\ 850\ 236$ osób) aniżeli Japonia ($46\ 450\ 911$ osób)?

14. Języka polskiego używa w życiu codziennem w Galicyi $3\ 989\ 538$ osób, ruskiego $3\ 084\ 212$ osób, niemieckiego $201\ 846$ osób. Ile tysięcy więcej osób mówi po polsku aniżeli po rusku i po niemiecku?

§ 3.

Mnożenie skrócone.

A) Liczby dokładne.

1. Jeżeli np. metr sukna kosztuje $12\cdot45\text{ K}$, to za $35\cdot79\text{ m}$ trzeba zapłacić $445\cdot5855\text{ K}$ czyli w przybliżeniu $445\cdot59\text{ K}$.

Mnożąc $12\cdot45\cdot35\cdot79$,

	12 45	35 79
	112 05	
	871 5	
	6225	
	3735	
	445 58	55

wyznaczamy niepotrzebnie części dziesięciotysięczne iloczynu, które się opuszcza, i części tysięczne, z których bierze się tylko poprawkę. Aby już w częściowych iloczynach opuszczać te czę-

ści, które w iloczynie nie są potrzebne, stosuje się tak zwane mnożenie skrócone.

Ponieważ w przykładzie podanym najniższa cyfra iloczynu ma wyrażać setne, przeto mnożenie przez cyfrę 9 należy zacząć od cyfry jednostek mnożnej (2); setne bowiem pomno-

żone przez jednostki dają na iloczyn setne ($0.01 \cdot 1 = 0.01$). Ponieważ jednak 4 dziesiąte mnożnej i 9 setnych mnożnika dają na iloczyn 36 tysięcznych czyli w przybliżeniu 4 setne, przeto te 4 setne, jako t. z. »poprawkę«, należy dodać do powyższych 18 setnych.

Podobnie zaczniemy mnożenie przez cyfrę dziesiątych (7) mnożnika od cyfry dziesiątych (4) mnożnej — gdyż $0.1 \cdot 0.1 = 0.01$ — a z iloczynu, otrzymanego z pomnożenia 5-ciu setnych mnożnej przez 7 dziesiątych mnożnika, weźmiemy poprawkę 4. Z tego samego powodu zaczniemy mnożenie przez cyfrę jednostek (5) mnożnika od cyfry dziesiątych (5) mnożnej, a mnożenie dziesiątek mnożnika (3) od setnych mnożnej (0).

Aby ten rachunek najdogodniej przeprowadzić, umieszczamy cyfry mnożnika pod cyframi mnożnej tak, aby iloczyny cyfr, pod sobą stojących, były setnemi. Nastąpi to wtenczas, jeżeli jednostki mnożnika umieścimy pod tą cyfrą mnożnej, która ma zajmować najniższe miejsce w iloczynie, inne zaś cyfry w odwrotnym porządku t. j. tak, aby cyfry jednostek rzędu wyższego stały po prawej, a rzędu niższego po lewej stronie jednostek mnożnika.

Podpisawszy w ten sposób mnożnik pod mnożną, zaczynamy mnożenie od cyfr pod sobą stojących, przechodząc kolejno do coraz to wyższych cyfr mnożnej; częściowe zaś iloczyny umieszczamy pod sobą tak, aby cyfry najniższych jednostek znajdowały się w jednym rzędzie pionowym.

Jeżeli mnożnik, umieszczony pod mnożną w sposób powyżej wskazany, ma z prawej lub lewej strony więcej cyfr aniżeli mnożna, to wypełnia się puste miejsca mnożnej zerami.

Postępując w ten sposób, otrzymamy:

$$12.45 \times 35.79 =$$

$$12.450$$

$$9753$$

$$37350$$

$$6225$$

$$872$$

$$112$$

$$445.59$$

Mówimy:

$$3 \times 0 = 0, 3 \times 5 = 15, \text{ i t. d.}$$

$$5 \times 0 = 0 \text{ (poprawka), } 5 \times 5 = 25, \text{ i t. d.}$$

$$7 \times 5 = 35, 4 \text{ popr.; } 7 \times 4 = 28 + 4 = 32, \text{ i t. d.}$$

$$9 \times 4 = 36, 4 \text{ popr.; } 9 \times 2 = 18 + 4 = 22, \text{ i t. d.}$$

2. Podobnie mnożymy przez siebie liczby całkowite, jeżeli na iloczyn chcemy otrzymać tylko początkowe wyższe jednostki. Np. Chcąc wyrazić iloczyn liczb: 2431 i 254 w setkach, otrzymamy: $2431 \times 254 = 2431$

$$\begin{array}{r} 452 \\ 4862 \\ 1216 \\ 97 \\ \hline 6175 \text{ setek.} \end{array}$$

B) Liczby niedokładne.

Mając wyznaczyć iloczyn dwu liczb niedokładnych, np. $2.39....$ i $6.248....$, weźmy za mnożnik raz jeden czynnik, drugi raz drugi czynnik: a) $2.39... \times 6.248...$, b) $6.248... \times 2.39...$

Ponieważ iloczyn cyfry, stojącej na najwyższym miejscu w mnożniku i cyfry, zajmującej najniższe miejsce w mnożnej, wyraża w a) setne, w b) tysięczne, przeto iloczyn liczb niedokładnych można wyznaczyć w a) na dwa, w b) na trzy miejsca dziesiętne. A zatem:

a) $2.39.... \times 6.248...$ $\begin{array}{r} 2.39.... \\ 8426 \\ \hline 1434 \\ 48 \\ 9 \\ 2 \\ \hline 14.93 \end{array}$	b) $6.248... \times 2.39...$ $\begin{array}{r} 6.248... \\ ...932 \\ \hline 12496 \\ 1874 \\ 562 \\ ? \\ ? \\ \hline 14.932 \end{array}$
--	--

W iloczynie 14.93 jest z powodu 1-go częściowego iloczynu tylko cyfra setnych niepewna, w iloczynie zaś 14.932 jest nie tylko cyfra tysięcznych niepewna, ale nadto niewiadomo, czy, z powodu niemożliwości utworzenia 4-go i 5-go częściowego iloczynu, nie odnosi się ta niepewność i do miejsc setnych i dziesiętnych.

Z tego powodu bierzemy przy mnożeniu liczb niedokładnych liczbę dokładniejszą za mnożnik, w otrzymanym zaś

iloczynnie opuszczamy cyfrę, stojącą na najniższem miejscu, jako niepewną, biorąc z niej poprawkę; a zatem:

$$2\cdot39\ldots \times 6\cdot248\ldots = 14\cdot93 = 14\cdot9\ldots$$

Przykłady:

$$1^o) 2\cdot504\ldots \times 32\cdot1274\ldots$$

$$\begin{array}{r} 472\ 123 \\ \hline 7\ 512 \\ 501 \\ 25 \\ 5 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$80\cdot44 = 80\cdot4\ldots$$

$$2^o) 0\cdot83054\ldots \times 57\cdot326\ldots$$

$$\begin{array}{r} 62375 \\ \hline 4\ 15270 \\ 58138 \\ 2492 \\ 166 \\ 50 \\ \hline \end{array}$$

$$47\cdot6116 = 47\cdot612\ldots$$

$$3^o) 4\cdot9627\ldots \times 0\cdot1482$$

$$\begin{array}{r} 2841 \\ \hline 49627 \\ 19851 \\ 3970 \\ 99 \\ \hline \end{array}$$

$$0\cdot73547 = 0\cdot7355\ldots$$

$$4^o) 27\cdot35\ldots \times 0\cdot6\dot{3}$$

$$\begin{array}{r} 636\ 36 \\ \hline 164\ 10 \\ 8\ 21 \\ 1\ 64 \\ 8 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

$$17\cdot404 = 17\cdot40\ldots$$

Zadania.

1. Obliczyć iloczyny:

a) $317\cdot5634 \times 8$ (2 miejs. dzies.),

b) $0\cdot9437 \times 70$ (3 miejs. dzies.),

c) $12\cdot0421 \times 500$ (w całkowitych),

d) $26\cdot289 \times 0\cdot9$ (2 miejs. dzies.),

e) $4\cdot05278 \times 0\cdot07$ (3 miejs. dzies.),

f) $0\cdot2375 \times 1\cdot253$ (2 miejs. dzies.),

g) $16\cdot7594 \times 27\cdot4168$ (1 miejs. dzies.),

~~h)~~ $9\cdot0356 \times 8\cdot75$ (3 miejs. dzies.),

i) $31\cdot4729 \times 10\cdot6735$ (2 miejs. dzies.),

k) $0\cdot90342 \times 132\cdot54$ (1 miejs. dzies.),

l) $3\cdot178 \times 0\cdot4951 \times 6\cdot372$ (2 miejs. dzies.),

m) $4\cdot782 \times 19\cdot75 \times 0\cdot9145$ (3 miejs. dzies.),

n) $91\cdot0324 \times 5\cdot679 \times 0\cdot17345$ (4 miejs. dzies.),

2. $78\cdot345 \times 5\cdot87 + 43\cdot2001 \times 13\cdot4 = ?$ (2 miejs. dzies.).
3. $13\cdot045 \times 121\cdot6 + 305\cdot4 \times 2\cdot045 = ?$ (3 miejs. dzies.).
4. $120\cdot1324 \times 15\cdot84 - 3\cdot4712 \times 24\cdot3156 = ?$ (2 miejs. dzies.).
5. $63\cdot0254 \times 131\cdot425 - 143\cdot501 \times 8\cdot89 = ?$ (3 miejs. dzies.).
6. a) $239 \times 435 = ?$ (w dziesiątkach),
b) $3\,102 \times 317 = ?$ (w setkach),
c) $31\,4257 \times 1\,632 = ?$ (w tysiącach),
d) $431\,506 \times 21\,753 = ?$ (w milionach).
7. a) $0\cdot15 \times 2\cdot7 = ?$ (4 miejs. dzies.),
b) $7\cdot3 \times 0\cdot5162 = ?$ (3 miejs. dzies.),
c) $16\cdot472 \times 25\cdot356 = ?$ (3 miejs. dzies.),
d) $2\cdot032 \times 7\cdot6 = ?$ (4 miejs. dzies.),
e) $51\cdot17 \times 121\cdot056 = ?$ (3 miejs. dzies.).
8. a) $0\cdot234 \dots \times 1\cdot73 \dots = ?$ b) $15\cdot24 \dots \times 0\cdot694 \dots = ?$
c) $3\cdot27 \times 4\cdot293 \dots = ?$ d) $0\cdot0732 \dots \times 165 = ?$
e) $927 \times 13\cdot263 \dots = ?$ f) $7\frac{1}{3} \times 66\cdot2 \dots = ?$
g) $3\cdot24 \times 0\cdot92614 \dots \times 0\cdot237 \dots = ?$
h) $7\cdot13 \dots \times 7\cdot13 \dots \times 7\cdot13 \dots = ?$
i) $4\cdot389 \times 17\cdot64 \dots \times 13\cdot6 \dots = ?$

9. Sto metrów sukna kosztuje 565·79 K; ile się zapłaci za 13·25 m? (2 miejs. dzies.).

10. Ile zapłacić trzeba za 41·28 ha pola, jeżeli za ha płaci się 325·36 K? (2 miejs. dzies.).

11. Metr ma 3·1637496 stóp; ile stóp ma: a) 20·548 m, b) 345 m, c) 251·2 m? (3 miejs. dzies.).

12. Móg ma 57·54642 a; ile a ma 75·246458 morgów? (3 miejs. dzies.).

13. Średnia odległość księżyca od ziemi wynosi 60·2778 promieni ziemskich; ile to jest km, jeżeli promień ziemi ma 6377·399 km? (2 miejs. dzies.).

14. Promień ziemi wynosi 6377·399 km; ile km ma średnica słońca, która jest 108·72 razy większa niż średnica ziemi? (2 miejs. dzies.).

15. Stopień równika ma 15 mil geogr. a mila geogr. 7·4204 km. Obliczyć długość równika: a) w metrach, b) w km.

16. Równik ziemski wynosi 5400 mil geogr. Ile to jest km, jeżeli mila geogr. = 7·4204 km? (w całkowitych).

17. Kupiono 56·342 kg kawy po 3·67 K i 25·472 kg herbaty po 13·35 K; o ile K więcej zapłacono za herbatę aniżeli za kawę? (2 miejs. dzies.).

18. Bok kwadratu wynosi 125·042 m; obliczyć jego pole (3 miejs. dzies.).

19. Promień koła = 5·4632 m; obliczyć: a) obwód, b) pole tego koła (3 miejs. dzies.).

20. Podstawa prostokąta wynosi 63·256 m, wysokość 21·405 m; obliczyć pole tego prostokąta (1 miejs. dzies.).

21. Obliczyć pole trójkąta, którego podstawa wynosi 5·764 m a wysokość 10·459 m (3 miejs. dzies.).

§ 4.

Dzielenie skrócone.

A) Liczby dokładne. Jeżeli, mając dzielić przez siebie dwie liczby, np. 24·9387 przez 9·21652, chcemy otrzymać w ilorazie tylko pewną ilość początkowych cyfr, to sposób obliczenia takiego ilorazu przybliżonego nazywamy dzieleniem skróconem.

Aby obliczyć iloraz powyższych dwu liczb, np. na 3 miejsca dziesiętne, wyznaczamy naprzód, z ilu cyfr składać się będzie przybliżony iloraz. Ponieważ z podzielenia części całkowitych przez siebie, ($24 : 9 = 2$), otrzymamy jedną cyfrę w ilorazie, a miejsce dziesiętne ma być trzy, przeto iloraz przybliżony będzie 4-ro cyfrowy.

Do wyznaczenia czterech cyfr ilorazu potrzeba tylko 4-ech najwyższych cyfr dzielnika i tyle cyfr dzielnej, aby w liczbie, utworzonej z tych cyfr, mieścił się skrócony dzielnik. Z tego powodu odkreślamy tak w dzielnej jak i w dzielniku resztę

24·9387	: 9·21652	= 2	niepotrzebnych cyfr; dzieląc zaś 24938
18 433			przez 9216, otrzymamy pierwszą cyfrę
6 505	: 921 6	= 7	ilorazu (2). Cyfrą tą mnożymy dzielnik,
6 451			do iloczynu dodajemy poprawkę (1),
54	: 921	= 0	uzyskaną z pomnożenia tej cyfry przez
54	: 92	= 5	najwyższą z opuszczonych cyfr dziel-
46			nika (5) i odejmujemy od dzielnej. Na-
8			stępnie odkreślamy najniższą cyfrę

dzielnika, przez pozostałą liczbę (921) dzielimy resztę 6505 a z wyznaczoną drugą cyfrą ilorazu postępujemy podobnie, jak z poprzednią. Postępowanie to stosujemy dopóty, dopóki nie wykreślimy wszystkich cyfr dzielnika.

Wzór działania jest następujący:

$$\begin{array}{r} 24938 \underline{7} : 9 \ 2 \ 1 \ 6 \underline{52} = 2705 \\ 6505 \\ \hline 54 \\ \hline 8 \end{array}$$

Jeżeli dzielnikiem jest ułamek dziesiętny, np. $12:31425 : 0.07514$ (2 miejs. dzies.), to chcąc wyznaczyć ilość cyfr całkowitych ilorazu, mnożymy dzielną i dzielnik przez taką jednostkę wyższego rzędu (tu przez 100), aby część całkowita dzielnika posiadała przynajmniej jedną cyfrę znaczącą; a zatem $1231.425 : 7.514$. Z tych dwu liczb łatwo odczytać, że iloraz składać się będzie z trzech cyfr całkowitych.

Gdyby część całkowita dzielnika nie mieściła się w pierwszej cyfrze dzielnej lub w liczbie, utworzonej z jej początkowych cyfr, np. $3:42795 : 61.235$ (4 miejs. dzies.), wówczas należy zostawić w dzielniku tyle cyfr, ile cyfr znaczących ma mieć iloraz. W powyższym przykładzie otrzymamy zero całkowitych i zero dziesiątych; skrócone więc dzielenie należy wykonać na 3 miejsca, t. j.:

$$\begin{array}{r} 3427 \underline{95} : 61 \ 2 \underline{35} = 0.0559 \\ 365 \\ \hline 59 \\ \hline 4 \end{array}$$

2. Chcąc otrzymać iloraz przybliżony liczb całkowitych, t. z. iloraz, wyrażony zapomocą początkowych wyższych jednostek, postępujemy podobnie, jak przy dzieleniu liczb dziesiętnych.

Np. Aby wyrazić iloraz liczb: 17 042 724 i 324 w tysiącach, zauważmy, że dzieląc te dwie liczby przez siebie, otrzymalibyśmy iloraz pięciocyfrowy. Ponieważ z tych 5-ciu cyfr chcemy wyznaczyć tylko dwie najwyższe, przeto skrócone dzielenie należy wykonać na dwa miejsca. A zatem:

$$\begin{array}{r} 170 \underline{42724} : 32 \underline{4} = 52 \text{ tysiące.} \\ 8 \\ \hline 2 \end{array}$$

B) Liczby niedokładne. Aby wyznaczyć iloraz dwu liczb, z których jedna albo obie są liczbami niedokładnymi, wykonywamy skrócone dzielenie na tyle miejsc, ile ich wyznaczyć pozwala liczba mniej dokładna. Np.

a) $91:483 \dots : 16:24 \dots$

$$\begin{array}{r} 91:48 \underline{3} : 1 \ 6 : 2 \ 4 = 5:633 \dots \\ 1028 \\ 54 \\ 5 \end{array}$$

b) $27:0:326 \dots = 270 : 3:26 \dots$

$$\begin{array}{r} 2700 : 3 : 2 \ 6 = 82:8 \dots \\ 92 \\ 27 \\ 1 \end{array}$$

c) $14:82 \dots : 6:248$

$$\begin{array}{r} 14:82 : 6 : 2 \ 4, \underline{8} = 2:37 \dots \\ 232 \\ 45 \\ 2 \end{array}$$

d) $8:364 \dots : 11:2$

$$\begin{array}{r} 8:364 : 1 \ 1 : 2 \ 0 = 0:7468 \dots \\ 524 \\ 76 \\ 9 \\ 0 \end{array}$$

W zadaniu a) można wyznaczyć cztery, w b) trzy cyfry ilorazu, ponieważ liczba mniej dokładna składa się w a) z 4-ch, w b) z 3-ch cyfr; w c) jest iloraz 3 cyfrowy, gdyż w 4-ro cyfrowej dzielnej mieści się tylko liczba, utworzona z najwyższych 3 cyfr dzielnika; w d) należy dzielnik uzupełnić zerem, ponieważ z 4-ro cyfrowej dzielnej można wyznaczyć 4 cyfry dziesiętne ilorazu.

Zadania.

1. Obliczyć ilorazy:

a) $7:15 : 3:26$ (2 m. dzies.),

b) $24:845 : 9:21456$ (3 m. dzies.),

c) $12:4387 : 5:61$ (3 m. dzies.),

d) $642 : 7:315$ (2 m. dzies.),

e) $584:3271 : 5:073$ (4 m. dzies.),

f) $7 : 10:479$ (4 m. dzies.),

g) $20:7842 : 0:564$ (3 m. dzies.),

h) $0:08937 : 0:0059$ (2 m. dzies.),

i) $1:0529 : 0:24148$ (3 m. dzies.),

k) $0:562 : 3:81$ (4 m. dzies.),

z l) 1·2374 : 51·2463 (5 m. dzies.),
m) 0·006154 : 8·7125 (5 m. dzies.).

2. Wyznaczyć ilorazy liczb:

- a) 41 235 : 201 w dziesiątkach,
- b) 6 342 509 : 4 325 w setkach,
- c) 501 832 746 : 6 142 w tysiącach,
- d) 21 004 563 201 : 3 015 w milionach.

- 3. a) 0·54 : 2·36 (5 m. dzies.), b) 7·2 : 8·435 (3 m. dzies.),
- c) 12·74 : 0·76 (3 m. dzies.), d) 6·423 : 2·672 (4 m. dzies.),
- e) 24·54 : 0·632 (5 m. dzies.), f) 0·623 : 8·412 (5 m. dzies.).

4. Ułamki $\frac{5}{13}$ i $\frac{8}{45}$ zamienić na dziesiętne i podzielić pierwszy przez drugi na 4 miejsca dziesiętne.

- 5. a) 7·421 ... : 5·109 ... = ? b) 0·4323 ... : 6·27 ... = ?
- c) 470 ... : 3·14159 ... = ? d) 0·45 : 3·87 ... = ?
- e) 0·03631 ... : 12·4 = ? f) 0·7349 ... : 1 $\frac{4}{13}$ = ?

6. Za 24·39 m sukna zapłacono 160·24 K; po czemu płacono metr? (2 m. dzies.).

7. Za 53·76 kg towaru zapłacono 27·42 K; ile K płacono za 1 kg? (2 m. dzies.).

8. Wyrazić 35·45 mil w km, wiedząc, że 1 km = 0·131823 mili (3 m. dzies.).

9. Ile kg uczyni 64·56 funtów, jeżeli kg = 1·78552 funta? (4 m. dzies.).

10. W koronówce znajduje się 4·175 g czystego srebra; ile koronówek otrzyma się z kilograma srebra? (1 m. dzies.).

11. Ile dukatów waży 25 dkg, jeżeli waga jednego dukata wynosi 3·49 g? (w liczbach całkowitych).

12. Z kg złota wybija się 164 dwudziestokoronówek; ile gramów złota znajduje się w 20-koronówce? (3 m. dzies.).

13. W roku 1900 miała monarchia austriacko-węgierska 47 118 167 mieszkańców na przestrzeni 67 591 200 ha; ile mieszkańców przypada średnio na 1 ha? (w liczbach całkowitych).

14. Galicya ma 78 493 km² powierzchni i 7 317 023 mieszkańców, Śląsk 5 147 km² i 680 422 mieszkańców, Czechy 51 948 km² i 6 318 697 mieszkańców, Bukowina 10 442 km² i 730 195 mieszkańców. Ile mieszkańców przypada średnio w każdym kraju na 1 km²? (1 m. dzies.).

15. W monarchii austriacko-węgierskiej, mającej 675 912 km², było w 1900 roku 11 301 481 Niemców, 5 955 230 Czechów, 4 259 160 Polaków, 3 750 350 Rusinów. Ile mieszkańców każdej z tych czterech narodowości przypada średnio na 1 km²? (1 m. dzies.).

16. Pole prostokąta ma 3·57 m², szerokość 0·875 m; obliczyć długość prostokąta. (2 m. dzies.).

17. Podstawa trójkąta wynosi 6·49 m, pole 15·956 m²; obliczyć wysokość trójkąta. (3 m. dzies.).

18. Obwód koła wynosi 17·6954 m; obliczyć promień. ($\pi = 3·14159$; 2 m. dzies.).

19. Pole umiadowego sześcioboku ma 634·59725 m², bok 15·425 m; obliczyć odległość boku sześcioboku od jego środka. (2 m. dzies.).

20. Pole trapezu wynosi 140·5624 m² a dwa jego boki równoległe: 12·456 m i 34·244 m. Obliczyć wysokość trapezu. (2 m. dzies.).

ROZDZIAŁ VI.

Równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

§ 1.

Określenia.

Dwa równe sobie wyrażenia algebraiczne, np. $a + b$ i $b + a$ albo $x + 3$ i 5 (jeżeli przez x rozumiemy 2), połączone znakiem równości: $a + b = b + a$ albo $x + 3 = 5$, nazywamy równaniem.

Wyrażenie, stojące po lewej stronie znaku równości, nazywamy stroną lewą albo pierwszą, po prawej stronie prawą albo drugą stroną równania; składniki obu stron równania nazywamy wyrazami równania.

Jeżeli w równaniu np. $(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ podstawimy za x dowolną liczbę, np. $x = 1$, każda jego strona przedstawi wartość -3 ; za podstawieniem $x = \frac{1}{2}$, przedstawi wartość $-\frac{15}{4}$ i t. d. czyli: przy jakiegokolwiek wartości, podstawionej za x , obie strony równania będą sobie równe.

Równanie, którego obie strony są sobie równe przy jakiegokolwiek wartości, podstawionej za liczbę ogólną, nazywamy równaniem tożsamościowym, identycznym albo także równością.

Takimi równaniami identycznymi, zwanymi zwykle wzorami, wyrażamy ogólne własności liczb, np. $a \cdot b = b \cdot a$ albo $a + b + c = a + c + b$, znaczymy sposoby działań matematycznych np. $(a + b)c = ac + bc$ albo $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ i wypowiadamy prawdy matematyczne, np. powierzchnia kwadratu jest drugą potęgą jego boku: $p = a^2$ i t. d.

W równaniu np. $x+3=5$ albo $a^2=36$ obie strony są sobie równe tylko pod pewnym warunkiem, a mianowicie, jeżeli przez x rozumiemy 2, a przez a liczbę 6 lub -6 ; dlatego równania takie nazywamy warunkowymi albo krótko równaniami.

Równanie warunkowe jest to takie równanie, którego obie strony są sobie równe tylko dla pewnej (pewnych) wartości, podstawionej (podstawionych) za liczbę ogólną.

Wartość, która podstawiona za niewiadomą czyni obie strony równania sobie równe, czyli która sprawdza równanie, nazywamy pierwiastkiem równania.

Wyznaczenie pierwiastków równania nazywamy rozwiązaniem równania, a wykazanie, że pewna liczba jest pierwiastkiem równania, sprawdzeniem równania.

W równaniu występują ilości wiadome, które znaczymy liczbami szczególnymi lub początkowymi literami alfabetu, np. $a, b, c, \dots$, i liczby niewiadome, które oznaczamy końcowymi literami alfabetu, np. $x, y, z, \dots$.

Co do ilości niewiadomych są równania:

1^o) o jednej niewiadomej, np. $4x+7=5$, $2x+5=$
 $=3x-2$, $x^2+3x=10$;

2^o) o dwu niewiadomych, np. $3x-5y=7$, ax^2-
 $-bx+cy=d$;

3^o) o więcej niewiadomych, np. $x+y+z=13$,
 $2x-3y+4z+5u=25$ i t. d.

W równaniu np. $2x+3=9-4x$ występuje niewiadoma w pierwszej potędze, w równaniu $y^2+ay=b$ w potędze 1-ej i 2-ej, a w równaniu $2xy^2+x^2y^3=30$ występuje pierwszy wyraz potędze 3-ej, drugi w 5-ej.

Najwyższą potęgę niewiadomej, a jeżeli ich jest więcej, największą sumę wykładników potęg, występujących w jednym wyrazie, nazywamy stopniem równania.

Co do stopnia rozróżniamy równania stopnia pierwszego, drugiego, trzeciego itd.

Np. równania:

1^o) $2x+3=5$, $4x-7y=11$ są stopnia pierwszego;

2^o) $x^2 - 3x = 4$, $2x + xy = 5$ stopnia drugiego;

3^o) $x^3 + 2x^2 + 5x = 36$, $x^2y + y^2 + x - 1 = 0$ stopnia trzeciego.

§ 2.

Przekształcanie równań.

Przekształcić równanie znaczy zamienić je na inne o tym samym pierwiastku.

Przekształcanie równań polega na następujących prawdach:

1^o) Jeżeli do obu stron równania np. $4x - 6 = 2x + 4$, mającego pierwiastek 5, dodamy dowolną liczbę, np. 10, otrzymamy równanie: $4x - 6 + 10 = 2x + 4 + 10$ czyli $4x + 4 = 2x + 14$, którego pierwiastkiem jest także 5.

Gdybyśmy od obu stron równania $4x - 6 = 2x + 4$ odjęli tę samą liczbę, np. 2·5, otrzymalibyśmy równanie $4x - 8 = 2x - 2$ o tym samym pierwiastku 5.

Pierwiastek równania nie zmieni się, jeżeli do obu stron równania dodamy lub od obu jego stron odejmiemy tę samą liczbę.

Dodając do obu stron równania np. $4x - 6 = 2x + 4$ liczbę 6 lub odejmując od obu jego stron np. $2x$, otrzymamy: $4x = 2x + 4 + 6$, $4x - 6 - 2x = 4$.

Każdy wyraz równania można przenieść z jednej strony na drugą z przeciwnym znakiem.

Jeżeli w równaniu np. $2x + b = x + b + c$ przeniesiemy b na stronę prawą, otrzymamy $2x = x + b + c - b$ czyli $2x = x + c$, t. z.

Jeżeli po obu stronach równania znajduje się ta sama liczba, zaopatrzona tym samym znakiem, można ją w obu stronach równania opuścić.

2^o) Jeżeli obie strony równania np. $\frac{7x}{3} = 14$, mającego pierwiastek 6, pomnożymy przez 3, otrzymamy: $7x = 42$; jeżeli zaś podzielimy podane równanie przez 7, otrzymamy: $\frac{x}{3} = 2$. Ponieważ te trzy równania mają ten sam pierwiastek 6, przeto:

Pierwiastek równania nie zmieni się, jeżeli obie strony równania pomnożymy albo podzielimy przez tę samą liczbę (różną od zera).

Zapomocą mnożenia obu stron równania przez tę samą liczbę uwalniamy równanie od ułamków. Np. Mnożąc równanie $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{6} = 1 + \frac{x}{8}$ przez najmn. wsp. wielokrotność mianowników (24), otrzymamy: $12x - 6x - 4x = 24 + 3x$. Do tego samego wyniku dochodzimy także w ten sposób, że wyrazy równania sprowadzamy do wspólnego mianownika a następnie mnożymy równanie przez ten mianownik. A zatem:

$$\frac{12x - 6x - 4x}{24} = \frac{24 + 3x}{24}, \quad 12x - 6x - 4x = 24 + 3x.$$

Podobnie, mnożąc obie strony równania przez -1 , możemy w równaniu zmienić znaki wszystkich wyrazów na przeciwnie. Np. Zamiast równania $-3x + 5 = -7$ możemy napisać: $3x - 5 = 7$.

Zapomocą dzielenia obu stron równania przez tę samą liczbę uwalniamy niewiadomy wyraz równania od współczynnika i wyrażamy równanie liczbami mniejszemi. Np. Dzieląc równanie: a) $(m+n)x = c$ przez $m+n$, b) $3x + 15 = 6x$ przez 3, otrzymamy: a) $x = \frac{c}{m+n}$, b) $x + 5 = 2x$.

3º) Jeżeli obie strony równania np. $\sqrt{x-1} = 3$ podniemiemy do potęgi drugiej, otrzymamy równanie $x - 1 = 9$ o tym samym pierwiastku 10, co poprzednie. Podobnie otrzymamy z $\sqrt[3]{2x} = 4$ równanie $2x = 64$ o tym samym pierwiastku 32.

Pierwiastek równania nie zmieni się, jeżeli obie strony równania podniemiemy do tej samej potęgi.

Na podstawie tej prawdy uwalniamy niewiadomą, stojącą pod znakiem pierwiastkowym, od tego znaku; należy tylko poprzednio nadać taki kształt równaniu, aby pierwiastek znajdował się sam na jednej stronie równania. Np.

$$7 + \sqrt{4x^2 + 12x - 31} = 2x, \quad \sqrt{4x^2 + 12x - 31} = 2x - 7, \\ 4x^2 + 12x - 31 = 4x^2 - 28x + 49.$$

4°) Jeżeli z obu stron równania np. $4x^2=100$ wyciągniemy drugi pierwiastek, otrzymamy równanie $2x=10$, które ma ten sam pierwiastek 5, co poprzednie równanie.

Pierwiastek równania nie zmieni się, jeżeli z obu stron równania wyciągniemy ten sam pierwiastek.

Zapomocą pierwiastkowania uwalniamy niewiadomą od wykładnika potęgowego. Np. $x^2=64$, $x=\sqrt{64}$, $x=\pm 8$.

§ 3.

Porządkowanie i rozwiązywanie równań.

Najprostszy kształt równania stopnia pierwszego o jednej niewiadomej jest: $ax=b$, gdzie a i b są liczbami znanymi.

Sprowadzanie równania do tego kształtu nazywamy porządkowaniem równania.

Chcąc uporządkować równanie, należy niewiadomą uwolnić: 1°) od nawiasów, wykonując wskazane nawiasami działanie; 2°) od ułamków, mnożąc obie strony przez najmn. wspólną wielokrotność mianowników; 3°) od pierwiastków, podnosząc obie strony równania do tej samej potęgi; 4°) przenieść wyrazy niewiadome na jedną a wiadome na drugą stronę równania i zredukować wyrazy podobne.

Jeżeli równanie ma już kształt $ax=b$, to rozwiązujemy je, dzieląc obie jego strony przez współczynnik niewiadomej, przez co otrzymamy $x=\frac{b}{a}$ jako ogólną postać pierwiastka.

Zadania.

1. $x+14=27$.
2. $x-12=6$.
3. $15-x=12$.
4. $4=5-x$.
5. $x+\frac{2}{3}=4\frac{1}{3}$.
6. $x-\frac{1}{2}=6\frac{1}{2}$.
7. $3x+7=16$.
8. $5x-7=8$.
9. $3-4x=1$.
10. $20=2x+16$.
11. $3x+0.6=18.6$.
12. $2y-0.4=5$.
13. $5z-7=3z+7$.
14. $0.1x+0.09=0.11x-0.01$.
15. $y-3+2y-4=14$.
16. $5z+2z-6+21=4z+30$.
17. $12x-9-8x+1=0$.
18. $0.1y+3.4-2.5y=4-2.6y$.
19. $2.25x-3.7=0.8x-1.2-1.05x$.
20. $y^2-4y=y^2+y-25$.
21. $3z^2+2+z=5+3z^2$.

22. $2ax + 3a = 3ax - 2a$. 23. $5ay - 2ab = 4ab + 3ay$.
 — 24. $2az - a - c^2 = az + a - c^2$. 25. $b + 3x - 2a = x - b$.
 — 26. $2ay - a = 2a^2 - y$. — 27. $ax = c - bx$.
 — 28. $a + bx = b + ax$. — 29. $ax + b^2 = a^2 - bx$.
-
30. $(x + 1) + (x - 2) + (3x + 4) = 18$.
 — 31. $(20 - x) - (5 - x) = x - (20 - 4x)$.
 32. $z - (3 - 2z) = (z - 1) - 8$.
 33. $(3y - 5) + 17 = 2y - (9 - 8y)$.
 — 34. $9 + (4x - 0.5) - (5.3 - 4x) = 6x + 1.6$.
 35. $z - \{2 - 5(z - 3)\} = z - 2$.
 — 36. $20 + \{23 - (11 - y)\} = 38$. 37. $2 + \{8 - (7 - x)\} = 9$.
 — 38. $3 - [2 + \{4 - (5 + x)\}] = 6$.
 — 39. $10.3 - \{(2x + 0.05) - (x - 1.2) + x\} = 1.05$.
 40. $3(x + 1) = x + 7$. 41. $3z + 2(2z - 1) = 19$.
 42. $5y - 5(2y - 5) = 23$. 43. $2.5(2x - 1) + 2 = 5(2x + 1.9)$.
 44. $5(18 - x) - 8x = 9 + 0.5x$.
 45. $y + 2(3y - 4) = 4 - 17y$.
 — 46. $21 - 25(0.4x + 0.2) = 2x - 8$.
 47. $10(7x + 9) - (6x + 7)12 + 9 = 3x$.
 — 48. $(z - 3) - 5(3z - 2) = 3(2z - 1)$.
 49. $22(x + 1) + 3(x - 7) = 5(x + 9)$.
 50. $y + \{3(y - 2) - 5\} = 3y - 1$.
 51. $(x - 5) - \{4(x - 1) - 3\} = 5(x - 4)$.
 52. $2\{2(2 - x) - x\} - x = x - 16$.
 — 53. $8(x - 0.1) - \{10(3x - 0.02) - 5(3x + 0.02) - 8x\} = 0.5$.
 — 54. $2\{5(3x + 4) + 3\} + 3 = 79$.
 55. $y - [3y - 4\{2(3y - 8) + 5\}] = 0$.
 — 56. $2x - 3[2x - 3\{2x - 3(2x - 3)\}] = 1$.
 57. $(x + 7)(x - 3) = (x - 5)(x - 15)$.
 — 58. $y^2 - (y - 1)(y - 2) = 7$.
 — 59. $(x + 2)(x - 2) = x^2 + x + 2$.
 60. $(z + 4)(3 + z) - 6 = (z + 2)(z + 7)$.
 61. $(x - 4)(x - 5) + 2x = (x - 5)(x - 3) + 10$.
 — 62. $(0.2x - 1.1)(1.2 + 0.1x) = (0.1x - 0.2)(0.2x + 11.5)$.
 63. $(x + 1)(x - 2) + x(3x - 4) = 2x(2x - 5)$.
 64. $3x - 3x(3x + 5) + 15 = 4 - (9x + 1)(x - 1)$.

65. $(3x+1)^2 + (4x+3)^2 = 25x^2$.
 66. $(x+3)^2 - x(x+4) + (2-x)3 = 20$.
 67. $(x+5)^2 - (4-x)^2 = 21x$.
 68. $2x^2 - 29 = 5(2x-1)^2 - 2(3x+1)^2$.
 69. $(x+1):6 = x:5$. 70. $(20x-7):(1+6x) = 3:4$.
 71. $(6x-1):2 = (8x+3):7$. 72. $(x+1):(x-1) = (x+3):x$.
 73. $(x+2):x = (x+1):(x-2)$.
 74. $(4x+5):(2x+3) = (2x-3):(x+7)$.
 75. $2a - (x-b) = a$.
 76. $(5x+2b) - (3a-b) = 2x$.
 77. $(ax-2a) + (ax+bx) = bx$.
 78. $a(x-b) - b(x-a) + 2b = 2a$.
 79. $3(a-x) + 5a = 3c + 5(c+x)$.
 80. $4(3a-2z) = 2c - 5(z-2c)$.
 81. $a^2(a-x) + abx = b^2(x-b)$.
 82. $(a+x)(4a+3x) = (a-x)(2a-3x)$.
 83. $(a+x)^2 + (a-x)^2 = 2x^2 + 4ax$.
 84. $(x+3a)^2 - (x-2a)^2 = 15a^2$.
 85. $(x+a):3 = (x-a):1$.
 86. $(a-x):(x-b) = a:b$.
 87. $(2a-x):(b+x) = x:(b-x)$.

-
88. $\frac{x}{3} + 4 = 12$. 89. $\frac{y}{16} = \frac{3}{4}$. 90. $\frac{3x}{5} + 7 = 16$.
 91. $7 = \frac{5x}{6} - 3$. 92. $z = 3 + \frac{z}{2}$. 93. $z - \frac{z}{3} = 2$.
 94. $5x - 28 = \frac{8x}{3}$. 95. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 26$.
 96. $\frac{x}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. 97. $2 - \frac{3y}{4} = \frac{1}{2} - \frac{5y}{6}$.
 98. $\frac{3z}{4} + \frac{2z}{3} = 7\frac{1}{12}$. 99. $\frac{5y}{6} - \frac{3y}{8} = 3\frac{2}{3}$.
 100. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = x + 1$.
 101. $x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = \frac{7x}{8} + 49$.

- 102. $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} + \frac{x}{3} - \frac{x}{6} = 13$. 103. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{8} = x - \frac{1}{8}$.
 — 104. $2\frac{1}{4}y - 20 = 3\frac{1}{4}y - 24$. 105. $7\frac{1}{2}z - 5\frac{1}{3} = 3\frac{1}{4}z + 3\frac{1}{6}$.
 106. $\frac{7}{x} - \frac{3}{4} = 2 - \frac{4}{x}$. — 107. $\frac{2}{x} + 1\frac{1}{2} + \frac{5}{x} = 3 - \frac{1}{2x}$.
 — 108. $\frac{1}{x} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12x} = \frac{8}{9}$. 109. $\frac{15}{y} - \frac{13}{4y} + \frac{16}{3y} = 5\frac{25}{36}$.
 — 110. $7\left(\frac{3x}{4} - 1\right) = 98$. 111. $\frac{3(5-x)}{4} = 1\frac{1}{2}$.
 112. $\frac{7-3(x-5)}{5} = 4$. 113. $\frac{11-x}{2} + 5x = 19$.
 — 114. $5y - \frac{3y}{5} + 2(y-1) = 2(3y+1)$.
 115. $3(4z+5) + \frac{10z+43}{8} = 6z + 4(2z+5)$.
 116. $\frac{2x+1}{2} = \frac{7x+5}{8}$. 117. $\frac{4y-5}{3} + \frac{5y+2}{12} = y$.
 118. $\frac{x+1}{2} - \frac{3-7x}{10} = 1 - \frac{7-3x}{5}$.
 119. $\frac{5x}{7} + \frac{9x-5}{14} = \frac{9x-7}{2}$.
 120. $\frac{x}{2} + \frac{x-4}{3} - \frac{x-6}{4} = x+1$.
 121. $\frac{2x-1}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{3x+7}{10}$.
 122. $\frac{5x-6}{4} - \frac{2x-1}{2} - \frac{x-1}{10} = 0$.
 123. $\frac{z+3}{12} + \frac{5z-33}{36} - \frac{48-z}{9} = \frac{z-17}{4}$.
 124. $\frac{3(23-x)}{4} - 5 = \frac{7x+9}{3}$.
 — 125. $\frac{9+x}{9} + \frac{4(2+x)}{5} - \frac{x-6}{6} = 17$.
 — 126. $\frac{1}{2}(5y+1) - \frac{1}{3}(4y+5) = \frac{1}{4}(3y-1) - \frac{1}{10}(3y+2)$.
 127. $\frac{1}{3}(4x+1) - \frac{1}{4}(3x+1) + 1 = \frac{1}{5}x$.
 128. $\frac{1}{8}(5x+3\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}(5x+5\frac{1}{4})$.
 — 129. $\frac{1}{3}(7x-3\frac{1}{4}) - \frac{1}{4}(5x-2\frac{1}{6}) = 0$.

$$130. \frac{x}{8} - \frac{x-2}{5} + \frac{x}{10} - 2 \cdot 2 + \frac{x-12}{20} = \frac{32-x}{40}.$$

$$131. \frac{2(x+4)}{3} - \frac{10(2x+5)}{9} + 5 \cdot 5 = \frac{x-3}{2}.$$

$$132. \left(22 - \frac{5x}{4}\right) + \left(\frac{2x}{9} + \frac{2}{3}\right) = x - \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{9}\right).$$

$$133. \frac{4x-5}{6} - \left(\frac{x+0.5}{4} - \frac{2x-3}{3}\right) = \frac{5(x+0.1)}{12}.$$

$$134. \frac{4}{x} + \frac{4}{9} = \frac{3}{x} + \frac{1}{2}.$$

$$135. \frac{17}{x} + \frac{1}{3} - \frac{15}{2x} = 3\frac{1}{2}.$$

$$136. \frac{3}{x} + \frac{5}{2x} - \frac{4}{3x} = \frac{4}{x} + \frac{1}{12}. \quad 137. \frac{7-4z}{5z} - \frac{3z-5}{2z} = 1.6.$$

$$138. \frac{4+y}{4y} - \frac{4-y}{y^2} = \frac{1}{4}.$$

$$139. \frac{x-1}{x} - \frac{x-3}{3x} + \frac{x+4}{4x} = 1.$$

$$140. \frac{x}{a} - b = c.$$

$$141. a - \frac{x}{b} = c.$$

$$142. \frac{5y}{a} - 1 = \frac{3y}{a} + 1.$$

$$143. x + \frac{x}{a} = 1 + \frac{1}{a}.$$

$$144. (a+b) - \frac{(a+b)x}{c} + \frac{x}{c} = 1.$$

$$145. \frac{a^2}{x} - \frac{b^2}{x} = a + b.$$

$$146. \frac{a-b}{x} = a - \frac{a+b}{x}.$$

$$147. \frac{5a}{x} - 3 = \frac{2(a-x)}{x}.$$

$$148. \frac{a^2+x^2}{ax} - \frac{x}{a} = b.$$

$$149. \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = a + b.$$

$$150. \frac{a-x}{b} = \frac{x+b}{a}.$$

$$151. \frac{x-a}{a} - 2 = \frac{x-b}{b} - 1.$$

$$152. \frac{x-c}{a} - \frac{x+a}{c} + 2 = 0.$$

$$153. \frac{az-b^2}{a} - \frac{a(b-z)}{b} + \frac{b^2}{a} = a.$$

$$154. \frac{2x-a}{b} - \frac{b-2x}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}.$$

$$155. \frac{a}{b} - \frac{a^2}{bx} + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{ax} = 1.$$

$$156. \frac{b(a^2-x)}{ax} - \frac{a(x-b^2)}{bx} = \frac{a^2-b^2}{ab}.$$

$$157. \frac{b+c}{bcx} + \frac{a+c}{acx} - \frac{a+b}{abx} = \frac{2}{c}.$$

$$158. \frac{4}{x+1} = 1. \quad 159. \frac{10}{x-1} = 2. \quad 160. \frac{2-x}{x-1} = 2.$$

$$161. \frac{7}{2x+3} = 1. \quad 162. \frac{x+5}{x-5} = 3. \quad 163. \frac{3x-7}{3(x-4)} = 1\frac{1}{3}.$$

$$164. \frac{2\{21-(2x-7)\}}{2x-7} = 1\frac{9}{11}. \quad 165. \frac{15}{1-3x} + \frac{13}{1-3x} = 4.$$

$$166. \frac{17x-5}{3\{20-(17-5x)\}} = \frac{1}{2}. \quad 167. \frac{1}{x+2} + \frac{7}{3(x+2)} = \frac{2}{3}.$$

$$168. \frac{(8-3x)^2}{1-x} + 16(1-x) = \frac{(9-5x)^2}{1-x}.$$

$$169. \frac{5x}{2(x-1)} - \frac{5x}{3(x-1)} = 1. \quad 170. \frac{1}{3(x-7)} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2(x-7)}.$$

$$171. \frac{x+4}{x-1} + \frac{4}{3} = \frac{2x+3}{3x-3}. \quad 172. \frac{3x+1}{x+2} - \frac{5x+2}{2x+4} = \frac{2}{3}.$$

$$173. \frac{3x}{x+5} - \frac{x+5}{x} = 2.$$

$$174. \frac{x-4}{x-5} = \frac{x-1}{x-3}.$$

$$175. \frac{2x-1}{x+3} = \frac{6(x-2)}{3x+1}.$$

$$176. \frac{x-7}{x-5} + \frac{x+6}{x+1} = 2.$$

$$177. \frac{8x-3}{2x-1} - \frac{3x+4}{x+1} = 1.$$

$$178. \frac{3}{x-7} + \frac{1}{x-9} = \frac{4}{x-8}.$$

$$179. \frac{5x+1}{x-1} - \frac{x-9}{x+1} = 4.$$

$$180. \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x^2-1} = 1.$$

$$181. \frac{3}{x-1} - \frac{5}{x+1} = \frac{4}{x^2-1}.$$

$$182. \frac{12}{x^2-9} + \frac{7}{x+3} + \frac{8}{x-3} = 0.$$

$$183. \frac{4x-3}{2x+1} - \frac{2(2x^2-5)}{(2x+1)^2} = 1.$$

184. $\frac{ax}{a-b} = 1+x.$ 185. $\frac{a}{b+x} = \frac{b}{a}.$
186. $\frac{a+x}{a-x} = \frac{a+b}{a-b}.$ 187. $\frac{z}{a+b} = \frac{b+z}{a}.$
188. $\frac{2y}{a+y} - \frac{a+y}{y} = 1.$ 189. $\frac{z}{a+b} + \frac{z}{a-b} = 2a.$
190. $\frac{y}{a-b} - \frac{y}{a+b} = 2b.$ 191. $\frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b} = \frac{2a}{a-b}.$
192. $\frac{x+a}{x-b} + \frac{x+b}{x-a} = 2.$ 193. $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = 2.$
194. $\frac{az}{a+c} + \frac{cz}{a-c} = \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}.$
195. $\frac{a+x}{a-x} - \frac{a-x}{a+x} = \frac{4a}{a^2-x^2}.$
196. $\frac{z+a}{z+b} - \frac{z-a}{z-b} = \frac{a^2-b^2}{z^2-b^2}.$
197. $\frac{y^2}{y^2-a^2} - \frac{y+a}{y-a} + \frac{a}{y+a} = 0.$
198. $\frac{a(x+a)}{x+b} + \frac{b(x+a)}{x+b} = 2(a+b).$
199. $\frac{y-2a}{y+2a} + \frac{y-4a}{y-3a} = 2.$ 200. $\frac{5a+6z}{a+z} - \frac{z+3a}{z-3a} = 5.$
201. $\sqrt{2x} = 2^1).$ 202. $3\sqrt{x} = 4.$ 203. $\sqrt{x+9} = 5.$
204. $\sqrt{x-3} = 2.$ 205. $\sqrt{5x-4} = 6.$
206. $6\sqrt{x+4} = 18.$ 207. $3\sqrt{4y+1} = 5.$

¹⁾ Wyrażenie, np. $\sqrt{3}$, $\sqrt{2x}$ i t. d., w którym liczba pierwiastkowana nie jest zupełnym kwadratem liczby całkowitej lub ułamka skończonego, nazywamy niewymiernem, a równanie, zawierające niewiadomą w wyrażeniu niewymiernem, np. $\sqrt{2x} = 2$, równaniem niewymiernem.

Pierwiastek równania niewymiernego spełnia równanie tylko pod pewnymi warunkami. Np. Pierwiastkiem równania $\sqrt{2x} = 2$ jest 2. Sprawdzając to równanie, otrzymamy: $\sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = \pm 2$, gdyż $(+2)^2 = 4$ i $(-2)^2 = 4$. Z tego widzimy, że wyznaczony pierwiastek spełnia równanie tylko wówczas, jeżeli wyrażenie niewierne $\sqrt{2x}$ zaopatrzymy znakiem $+$; przy użyciu drugiego znaku, wartość 2 już nie spełnia równania.

208. $\sqrt[5]{2z+15}=1$. 209. $1+\sqrt{3x-2}=2$.
 210. $\sqrt{7x-20}-3=3$. 211. $\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}$.
 212. $\sqrt{9y-2}-\sqrt{8y+1}=0$.
 213. $5\sqrt{z+7}-7\sqrt{z-17}=0$.
 214. $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}}=\frac{2}{3}$. 215. $\sqrt{x^2+9}=9-x$.
 216. $\sqrt{x^2+3x+12}=x+2$.
 217. $\sqrt{x^2-2x+9}=x+1$.
 218. $\sqrt{x^2+2x+17}-x=3$.
 219. $2x=\frac{3}{4}+\sqrt{4x^2-\frac{15}{16}}$. 220. $\sqrt{x-3a^2}=a$.
 221. $\sqrt{x+9a^2}-5a=0$. 222. $\sqrt{x+4ab}=a+b$.
 223. $a=b+\sqrt{x-2ab}$. 224. $x=\sqrt{x^2-a^2}+b$.
 225. $\sqrt[3]{2x-3}=3$. 226. $\sqrt[3]{5y+2}-3=0$.
 227. $\sqrt[3]{x+1}=3$. 228. $\sqrt[3]{x-a^3}=2a$.
 229. $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$.
 230. $\sqrt[3]{x+3ab(a+b)+b^3}=a+b$.

Odpowiedzi.

- | | | | |
|---------------------|------------|-----------------------|----------|
| 1. 13. | 2. 18. | 3. 3. | 4. 1. |
| 5. $3\frac{2}{3}$. | 6. 7. | 7. 3. | 8. 3. |
| 9. 0.5. | 10. 2. | 11. 6. | 12. 2.7. |
| 13. 7. | 14. 10. | 15. 7. | 16. 5. |
| 17. 2. | 18. 3. | 19. 1. | 20. 5. |
| 21. 3. | 22. 5. | 23. $3b$. | 24. 2. |
| 25. $a-b$. | 26. a . | 27. $\frac{c}{a+b}$. | 28. 1. |
| 29. $a-b$. | 30. 3. | 31. 7. | 32. — 3. |
| 33. 3. | 34. — 0.8. | 35. 3. | 36. 6. |
| 37. 6. | 38. 4. | 39. 4. | 40. 2. |

41. 3.	42. 0.4.	43. —2.	44. 6.
45. $\frac{1}{2}$.	46. 2.	47. 3.	48. $\frac{1}{2}$.
49. 2.2.	50. 10.	51. $2\frac{3}{4}$.	52. 3.
53. 1.	54. 1.	55. 2.	56. 2.
57. 4.	58. 3.	59. —6.	
60. —4.	61. 5.	62. 1.	
63. $\frac{2}{5}$.	64. $\frac{1}{2}$.	65. — $\frac{1}{3}$.	66. —5.
67. 3.	68. 1.	69. 5.	70. $\frac{1}{2}$.
71. $\frac{1}{2}$.	72. 3.	73. —4.	74. — $\frac{4}{3}$.
75. $a+b$.	76. $a-b$.	77. 1.	78. 2.
79. $a-c$.	80. $4(a-c)$.	81. $a+b$.	82. — $\frac{a}{6}$.
83. $\frac{a}{2}$.	84. a .	85. $2a$.	86. $\frac{2ab}{a+b}$.
87. $\frac{ab}{a+b}$.	88. 24.	89. 12.	90. 15.
91. 12.	92. 6.	93. 3.	94. 12.
95. 24.	96. $\frac{2}{3}$.	97. —18.	98. 5.
99. 8.	100. 4.	101. 24.	102. 60.
103. 1.	104. 4.	105. 2.	106. 4.
107. 5.	108. $\frac{3}{4}$.	109. 3.	110. 20.
111. 3.	112. $\frac{2}{3}$.	113. 3.	114. 10.
115. $\frac{1}{2}$.	116. 1.	117. 2.	118. —1.
119. 1.	120. —2.	121. $2\frac{3}{5}$.	122. 6.
123. 21.	124. 3.	125. 18.	126. 1.
127. 5.	128. 2.4.	129. $\frac{1}{2}$.	130. 32.
131. 2.	132. 12.	133. 3.	134. 18.
135. 3.	136. 2.	137. 1.	138. 2.
139. 12.	140. $a(b+c)$.	141. $b(a-c)$.	142. a .
143. 1.	144. c .	145. $a-b$.	146. 2.
147. $3a$.	148. $\frac{a}{b}$.	149. ab .	150. $a-b$.
151. $\frac{ab}{b-a}$.	152. $c-a$.	153. $\frac{2ab}{a+b}$.	154. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$.
155. $a+b$.	156. b^2 .	157. 1.	158. 3.
159. 6.	160. $1\frac{1}{3}$.	161. 2.	162. 10.
163. 9.	164. 9.	165. —2.	166. 1.
167. 3.	168. 0.1.	169. 6.	170. 8.

171. — 1.	172. — 8.	173. — $1\frac{1}{4}$.	174. 7.
175. 5.	176. 9.	177. 2.	178. 10.
179. $\frac{1}{4}$.	180. — $\frac{1}{8}$.	181. 2.	182. — 1.
183. 1.	184. $\frac{a-b}{b}$.	185. $\frac{a^2-b^2}{b}$.	186. b .
187. $-(a+b)$.	188. $-\frac{a}{3}$.	189. a^2-b^2 .	190. a^2-b^2 .
191. $a+b$.	192. $\frac{a+b}{2}$.	193. $\frac{2ab}{a+b}$.	194. 1.
195. 1.	196. $\frac{a+b}{2}$.	197. $-2a$.	198. $a-2b$.
199. $2a$.	200. $-\frac{3a}{7}$.	201. 2.	202. $\frac{1}{9}$.
203. 16.	204. 7.	205. 8.	206. 5.
207. $\frac{4}{9}$.	208. 5.	209. 1.	210. 8.
211. 5.	212. 3.	213. 42.	214. 5.
215. 4.	216. 8.	217. 2.	218. 2.
219. $\frac{1}{2}$.	220. $4a^2$.	221. $16a^2$.	222. $(a-b)^2$.
223. a^2+b^2 .	224. $\frac{a^2+b^2}{2b}$.	225. 15.	226. 5.
227. 8.	228. $9a^3$.	229. 7.	230. a^3 .

§ 4.

Układanie zadań w równania.

Przykład 1. Wyznaczyć liczbę, której czterokrotność, pomniejszona o 15, jest równa 25.

Jeżeli szukaną liczbę nazwiemy x , to jej 4 krotność będzie $4x$; wyrażając, że ta 4 krotność, pomniejszona o 15, jest równa 25, otrzymamy: $4x - 15 = 25$; stąd $x = 10$.

Aby dane zadanie ułożyć w równanie, należy oznaczyć liczbę szukaną np. przez x i wykonać na niej wskazane w zadaniu działania; w ten sposób otrzyma się dwa wyrażenia, które, podług warunków zadania, połączone znakiem równości, utworzą równanie.

Po rozwiązaniu ułożonego równania należy sprawdzić, czy odpowiedź na pytanie, postawione w zadaniu, sprawdza to

zadanie (nie równanie!). A zatem: 4 krotnością 10-u jest 40, 40 pomniejszone o 15 jest równe 25.

Przykład 2. Jeżeli pewną liczbę pomnożę przez 2, do iloczynu dodam 3, sumę podzielę przez 5, a od ilorazu odejmę 2, otrzymam resztę 1. Co to za liczba?

Niewiadoma z , iloczyn $2z$, suma $2z+3$, iloraz $\frac{2z+3}{5}$, reszta $\frac{2z+3}{5} - 2$ równa 1, tj. $\frac{2z+3}{5} - 2 = 1$; stąd $z = 6$.

Sprawdzić zadanie!

Przykład 3. Ktoś zapytany, ile ma lat, odpowiada: za 14 lat będę miał dwa razy tyle lat, ile ich miałem przed 18 laty. Ile lat ma ta osoba?

Obecnie ma osoba x lat, za 14 lat będzie miała $x+14$ lat a przed 18 laty miała $x-18$ lat; ponieważ $x+14$ jest 2 razy tak wielkie, jak $x-18$, przeto $x+14 = 2(x-18)$; stąd $x = 50$. Sprawdzić zadanie!

Bardzo często jest tak zadanie ułożone, że niewiadomej, zawartej w pytaniu, wprost obliczyć nie można albowiem obliczenie to byłoby zbyt zawiłe. W takim przypadku należy się zastanowić, którą ilość, zachodzącą w zadaniu, najkorzystniej obrać za niewiadomą, aby co do niej ułożyć zadanie w równanie.

Przykład 4. Mianownik pewnego ułamka jest o 3 większy niż jego licznik. Jeżeli tak do licznika jak i do mianownika dodamy po 6, ułamek przedstawi wartość $\frac{10}{13}$. Co to za ułamek?

Przyjmując licznik szukanego ułamka za niewiadomą, otrzymamy: licznik x , mianownik $x+3$, szukany ułamek $\frac{x}{x+3}$. Po dodaniu 6 do licznika i do mianownika dostaniemy ułamek $\frac{x+6}{(x+3)+6}$, który $= \frac{10}{13}$ czyli $\frac{x+6}{(x+3)+6} = \frac{10}{13}$; $x = 4$. Ułamek szukany jest przeto $\frac{4}{7}$. Sprawdzić zadanie!

Przykład 5. Za 560 K kupiono 100 m sukna w dwu gatunkach: po 8 K i 5 K za metr. Ile było metrów sukna każdego gatunku?

Jednego gatunku było x metrów, drugiego $100 - x$. Za 1-szy gatunek zapłacono 8 x K, za drugi $(100 - x)5$ K a za

oba gatunki $8x + (100 - x)5$ K; jest przeto $8x + (100 - x)5 = 560$; $x = 20$.

Odpowiedź: 20 m po 8 K a 80 m po 5 K.

Sprawdzić zadanie!

Przykład 6. Jaki kapitał, wypożyczony na 5%, urósł z dochodem za 6 lat do sumy 4420 K?

Kapitał x , dochód $\frac{x \cdot 5 \cdot 6}{100}$, kapitał wraz z dochodem ma wartość 4420 K t. j. $x + \frac{x \cdot 5 \cdot 6}{100} = 4420$; $x = 3400$ K.

Sprawdzić zadanie!

Przykład 7. Kupiec zakupił towaru za 9600 K, płatnych po 2 mies. 15 dniach; ile zapłaci gotówką, jeżeli mu przyznano $3\frac{1}{2}\%$ eskontu¹⁾?

Gotówka x , eskont $\frac{9600 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 21}{100 \cdot 12}$, zatem $x + \frac{9600 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 21}{100 \cdot 12} = 9600$; $x = 9530$ K. ✕

Przykład 8. Ile litrów wina po 1.72 K zmieszać trzeba z 30 l po 1.96 K, aby otrzymać litr po 1.8 K?

Mieszając oba gatunki wina, otrzyma się $x + 30$ l wina średniego gatunku, które kosztować powinno tyle, ile kosztowały oba gatunki zmieszane, a zatem: $(x + 30)1.8 = 1.72x + 30 \cdot 1.96$; $x = 60$ l.

Przykład 9. Ile gramów czystego srebra trzeba stopić z 264 g srebra próby 750, aby otrzymać srebro próby 850²⁾?

W 1000 g srebra próby 750 jest 750 g czystego srebra, w 1 g tego stopu jest 0.75 g srebra, a w 264 g jest $264 \cdot 0.75$ g srebra. Jeżeli stopimy x g czystego srebra z 264 g srebra próby 750, to stop próby 850 będzie ważył $x + 264$ g i zawierał $(x + 264)0.85$ g srebra; a ponieważ stop ma w sobie tyle srebra, ile zawierały jego składniki przed stopieniem, przeto:

$$x + 264 \cdot 0.75 = (x + 264)0.85; \quad x = 176 \text{ g.}$$

Przykład 10. Za posłańcem pieszym, przebywającym 3.5 km w godzinie, wysłano w 8 godzin później konnego posłańca,

¹⁾ Zob. Część I. str. 161. B.

²⁾ Zob. Część I. str. 54. 1).

który przebywa w godzinie 9·1 km. Za ile godzin dopędzi jeździec posłańca pieszego?

Jeździec jest w drodze x godzin, pieszy $x+8$ godzin; droga, przebyta przez pierwszego, wynosi $9·1x$ km, a przez drugiego $(x+8)3·5$ km; zatem $9·1x = (x+8)3·5$; $x=5$ godzin.

Przykład 11. Jeden robotnik podejmuje się wykonać pewną pracę w 3 miesiącach, drugi w 5 miesiącach. W ilu miesiącach wykonają tę pracę obaj robotnicy razem?

Jeżeli obaj robotnicy ukończą tę pracę po x miesiącach, to w jednym miesiącu wykonają x -tą część $\left(\frac{1}{x}\right)$ całej roboty.

A ponieważ jeden robotnik, pracując sam, wykona w miesiącu 3-cią część, drugi zaś 5-tą część całej roboty, przeto obaj wykonają razem $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ całej roboty, co $= \frac{1}{x}$. A zatem: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$; $x=1\frac{7}{8}$ mies.

Zadania.

1. Znaleźć liczbę, która powiększona o 12 daje sumę 30. 18.
2. Jaką liczbę trzeba pomniejszyć o 25, aby otrzymać 12·5? 37·5.
3. Jeżeli od $4\frac{3}{8}$ odejmę pewną liczbę, otrzymam $1\frac{4}{8}$. Jaka to liczba? $2\frac{4}{8}$.
4. Gdy pewną liczbę pomnożę przez 5 i do iloczynu dodam 2, otrzymam 3. Co to za liczba? 0·2.
5. Gdy pewną liczbę pomnożę raz przez 3, drugi raz przez 5, to suma tych iloczynów będzie 16. Wyznaczyć tę liczbę. 2.
6. Znaleźć liczbę, której czwarta część, odjęta od 12, daje resztę 5. 28.
7. Jeżeli od pewnej liczby odejmę jej $\frac{2}{3}$ części, otrzymam 18. Co to za liczba? 30.
8. Wyznaczyć liczbę, która podzielona przez 7 daje iloraz 3 a resztę 4. 25.
9. Przez jaką liczbę trzeba podzielić 74, aby otrzymać iloraz 8 a resztę 2? 9.
10. Połowa i trzecia część pewnej liczby dają sumę 50. Co to za liczba? 60.

11. Jeżeli do pewnej liczby dodam jej połowę, następnie jej 3-cią i 4-tą część, otrzymam 100. Co to za liczba? 48.

12. Gdy pewną liczbę pomnożę przez 15, do iloczynu dodam 20, sumę podzielę przez 4 a od ilorazu odejmę 14, otrzymam trzy razy tak wielką liczbę. Obliczyć tę liczbę. 12.

13. Gdybym miał jeszcze 2 razy tyle koron, ile ich mam, a nadto jeszcze 40 K, miałbym 5 razy tyle K, ile ich posiadam. Ile mam K? 20.

14. Do jakiej liczby trzeba raz dodać 4, drugi raz odjąć 4, aby w ten sposób powstałe liczby tworzyły stosunek 3:2? 20.

15. Jaką liczbę trzeba raz dodać do 32, drugi raz odjąć od 32, aby te nowe liczby tworzyły stosunek 5:3? 8.

16. Gdy do licznika i do mianownika ułamka $\frac{7}{8}$ dodam pewną liczbę, otrzymam $\frac{5}{6}$. Co to za liczba? 3.

17. Jaką liczbę trzeba odjąć od licznika i od mianownika ułamka $\frac{11}{17}$, aby otrzymać $\frac{3}{11}$? 5.

18. Jaką liczbę trzeba odjąć od licznika, a dodać do mianownika ułamka $\frac{13}{22}$, aby otrzymać $\frac{1}{8}$? 8.

19. Gdy pewien ułamek powiększę o 4, otrzymam liczbę $6\frac{1}{3}$ razy tak wielką, jak ten ułamek. Co to za ułamek? $\frac{3}{4}$.

20. Jaki ułamek trzeba odjąć od 2, aby otrzymać liczbę $1\frac{2}{3}$ razy tak wielką, jak ten ułamek? $\frac{5}{6}$.

21. Jeżeli pewną liczbę pomniejszę o $3\frac{3}{4}$, to piąta część różnicy będzie równa ósmej części tej liczby. Wyznaczyć tę liczbę. 10.

22. Znaleźć liczbę, której pięciokrotna wartość, powiększona o 5, jest o 7 mniejsza od jej 7-krotnej wartości. 6.

23. Wyznaczyć liczbę, której trzecia część jest o 8 większa od jej siódmej części. 42.

24. Suma 3-ej i 5-ej części pewnej liczby jest o 2 mniejsza niż suma jej połowy i 6-ej części. Co to za liczba? 15.

25. Gdy pewną liczbę powiększę o 7, to ósma część tej sumy będzie o 1 większa aniżeli szоста część tej liczby, pomniejszonej o 7. Co to za liczba? 25.

26. Gdy pewną liczbę pomniejszę o 3, otrzymaną różnicę podzielę przez 4, a do ilorazu dodam 17, otrzymam liczbę o 3 mniejszą od trzykrotnej liczby szukanej. Jaka to liczba? 7.

27. Liczba dwucyfrowa ma na miejscu jednostek cyfrę 5. Jeżeli przestawię tę cyfrę z cyfrą dziesiątek, otrzymam nową liczbę, która jest $1\frac{1}{5}$ razy tak wielka, jak dana liczba. Wyznaczyć tę liczbę. (Jeżeli x jest cyfrą dziesiątek, to $1\frac{1}{5}(10x + 5) = 50 + x$; $x = 4$). 45.

28. Liczba dwucyfrowa ma na miejscu dziesiątek cyfrę 2; jeżeli zmienimy miejsca tych dwu cyfr, otrzymamy liczbę, która z daną tworzy stosunek 7:4. Co to za liczba? 24.

29. Liczba dwucyfrowa ma dwa razy tyle dziesiątek, co jednostek. Jeżeli cyfry tej liczby przestawimy, otrzymamy liczbę o 36 mniejszą aniżeli liczba podana. Wyznaczyć tę liczbę. 84.

30. Uczeń zapytany, ile ma lat, odpowiedział: »Po 10 latach będę miał dwa razy tyle lat, ile ich miałem przed 4 laty«. Ile lat ma uczeń? 18.

31. Ojciec ma 52 lat, syn 20; przed ilu laty był ojciec 5 razy starszy od syna? 12.

32. Ojciec ma 40 lat, starszy syn 16, młodszy 3; po ilu latach będą mieli obaj synowie tyle lat, co ojciec? 21.

33. A ma 52 lat, B 22, C 16; przed ilu laty miał A dwa razy tyle lat, co B i C razem? 8.

34. Ojciec ma 50 lat, najstarszy z jego trzech synów 20. Przed ilu laty był wiek ojca dwa razy większy od sumy lat jego synów, jeżeli różnica ich wieku wynosi 5 lat? 8.

35. W dwu pokojach znajduje się równa ilość osób. Gdyby z jednego pokoju przeszły 4 osoby do drugiego, to w drugim pokoju byłoby 2 razy tyle osób, co w pierwszym. Ile osób jest w każdym pokoju? 12.

36. W towarzystwie było dwa razy tylu mężczyzn, co kobiet; po odejściu sześciu mężczyzn i sześciu kobiet, pozostało jeszcze 3 razy tylu mężczyzn, co kobiet. Ilu mężczyzn i ile kobiet było na początku? 24 i 12.

37. Sumę 960 K rozdzielić między 3 osoby tak, aby pierwsza otrzymała 3 razy a druga 2 razy tyle, co trzecia. Ile K otrzyma każda z nich? 480, 320 i 160.

38. Ojciec pozostawił trzem synom 90 000 K, którymi mają się podzielić w ten sposób, aby każdy młodszy syn otrzymał o 800 K więcej niż starszy. Ile K otrzyma każdy z nich? $x = 29\,200$ (najstarszy).

39. W pewnej klasie otrzymała ósma część uczniów stopień celujący, $\frac{3}{4}$ stopień pierwszy, a 6-u uczniów stopień drugi. Jaki był wynik klasyfikacji? Stopień celuj. 6, pierwszy 36.

— 40. Uczeń zapytany, ilu uczniów jest w jego klasie, odpowiedział: »Połowa liczby moich kolegów jest o 8 większa niż suma 6-ej i 9-ej części liczby kolegów«. Ilu uczniów jest w tej klasie? 36

— 41. Jeżeli w pewnej klasie umieszczę po pięciu uczniów w jednej ławce, braknie mi dla czterech miejsc; jeżeli ich zaś umieszczę po sześciu, będzie siedziało w jednej ławce tylko czterech. Ilu uczniów liczy ta klasa? Ławek 6, uczniów 34.

42. Handlarz zboża kupił za trzecią część pieniędzy, które miał przy sobie, pszenicy, za czwartą część jęczmienia, za piątą część żyta, a za 130 K owsa. Ile K zapłacił za każdy gatunek zboża? 200, 150 i 120.

— 43. W jednym dniu zjadłem połowę jabłek, które miałem i pół jabłka, w drugim połowę reszty i pół jabłka, a gdy trzeciego dnia zjadł połowę nowej reszty i pół jabłka, zostało mi tylko jedno jabłko. Ile jabłek miałem? 15.

44. Z pieniędzy, które miałem przy sobie, wydałem naprzód połowę, następnie 5-tą część reszty, a potem $\frac{3}{4}$ tego, co mi zostało. Ile pieniędzy miałem, jeżeli mam jeszcze 10 K? 100 K.

— 45. Po skończonym 6-tym roku życia uczęszczałem przez 12-tą część lat mego wieku do szkoły ludowej, przez $\frac{2}{16}$ do gimnazjum; 15-tą część lat poświęciłem studiom uniwersyteckim a 30-tą praktyce zawodowej. Ile mam lat, jeżeli po praktyce pełnię obowiązki służbowe 35 lat? 60.

46. Do pasterza, pasącego pewną ilość owiec, rzekł przechodzień: »Daj mi połowę swoich stu owiec«. Na to pasterz: »Gdybym miał jeszcze tyle owiec, ile ich mam, i do tego połowę i czwartą część tego, co mam i gdybym ciebie za owcę policzył, miałbym dopiero sto owiec«. Ile owiec pasł pasterz? 36.

2 47. Zacny Pitagorasi! ty muz ulubieńcze,
Co kształcisz i oświecasz umysły młodzieńcze,
Ilu też uczniów muzom w twym domu się chowa?
Powiem ci Polikracie: Patrz, oto połowa
Wzniosłą matematyką ćwiczy umysł młody,
Część czwarta pragnie wnikać w tajniki przyrody,

Siódma część uczy się milczeć; dolicz trzy kobiety,
Tylu ja uczniów wiodę do laurowej mety. 28.

48. Liczbę 50 podzielić na takie dwie części, aby jedna
była o 6 większa aniżeli druga. 28 i 22.

49. Liczbę 90 rozłożyć na takie dwie części, aby podwójna
część pierwsza była połową części drugiej. 18 i 72.

50. Podzielić 100 na dwie części w stosunku 2 : 3. 40 i 60.

51. Między dwie osoby rozdzielono 505 K tak, że jedna
otrzymała o 25 K więcej niż druga. Ile K otrzymała każda
z nich? 265 i 240.

52. Ojciec i syn mają razem 60 lat. Ile lat ma ojciec a ile
syn, jeżeli ojciec jest 5 razy starszy od syna? 50 i 10.

53. W ogrodzie chowają się króliki i bażanty. Ile jest
królików a ile bażantów, jeżeli mają razem 36 głów a 100
nóg? 14 i 22.

54. Osoby A i B mają razem 450 K. Gdyby osoba A dała
osobie B 13 K, miałyby jeszcze 2 razy tyle K, co B. Ile koron
ma każda z tych dwu osób? 313 i 137.

55. W dwu kieszeniach mam 444 K. Gdybym przełożył
z jednej kieszeni do drugiej 37 h, miałbym w drugiej 3 razy
tyle koron, ile w pierwszej. Ile koron mam w każdej kie-
szeni? 148 i 296.

56. Za każde wypracowanie bez pomyłek otrzymywał
uczeń od rodziców koronę, a za każde z pomyłkami zwracał
im 10 h. Po 12-tym zadaniu pozostało uczniowi z otrzymana-
nych nagród 32 K. Ile było zadań bez pomyłek, a ile z po-
myłkami? 4 i 8.

57. Licznik i mianownik ułamka wynoszą razem 16. Je-
żeli licznik powiększymy, a mianownik pomniejszymy o 2, otrzy-
mamy odwrotność tego ułamka. Co to za ułamek? $\frac{7}{9}$.

58. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 8. Jeżeli cyfry
tej liczby przestawimy, otrzymamy liczbę o 10 większą niż
podwójna liczba podana. Obliczyć tę liczbę.

Jeżeli x jest cyfrą jednostek, otrzymamy: $2[(8 - x)10 + x] +$
 $+ 10 = 10x + (8 - x)$; $x = 6$; liczba = 26.

59. W towarzystwie 20-tu osób, złożonem z mężczyzn i kobiet, zebrano składkę 149 K; każdy mężczyzna dawał po 8 K, kobieta po 7 K. Ilu mężczyzn i ile kobiet było w tem towarzystwie? 9 i 11.

60. Mam 14 K 20 h; między niemi 2 razy tyle 10-halerzówek, co dwuhalerzówek a 3 razy tyle 20-halerzówek, co 10-halerzówek. Ile mam dwu-, dziesięcio- i dwudziesto halerzówek? 10, 20 i 60.

61. Za 400 K kupiono dwojakiego gatunku sukna: po 8 K i $7\frac{1}{2}$ K za metr. Ile kupiono metrów każdego gatunku, jeżeli tańszego wzięto o 12 m więcej niż droższego? 20 i 32.

62. Kupiec sprowadził za 432 K 50 kg herbaty w dwu gatunkach: po 10 K i 8 K za kg. Ile było kg każdego gatunku? 16 i 34.

63. Handlarz miał gęsi i owiec razem 100 sztuk. Wymieniwszy gęsi za owce, a mianowicie każde 32 gęsi za 3 owce, miał 42 owce. Ile gęsi i owiec miał przed wymianą? 64 i 36.

64. Jaką kwotę umieścić należy na procencie pojedynczym 5%, aby po 2 latach otrzymać z odsetkami 1 320 K? 1 200 K.

65. Jaki kapitał, oddany na $4\frac{1}{2}\%$, urośnie z odsetkami po 3 latach i 4 miesiącach do 828 K? 720 K.

66. Jaki kapitał, oddany na $4\frac{1}{2}\%$, przyniesie te same odsetki, co 2700 K na 4%? 2 400 K.

67. Dwa równe kapitały przyniosły po 5 latach 9000 K odsetek. Co to za kapitały, jeżeli jeden z nich był oddany na $3\frac{1}{2}\%$, drugi na 4%? 24 000 K.

68. Na ile % oddano kapitał 6000 K, jeżeli po 3 latach przyniósł 900 K odsetek? 5.

69. Na ile % oddano kapitał 3 320 K, jeżeli wraz z odsetkami za 5 lat urósł do sumy 3 984 K? 4.

70. Kapitały 2 800 K i 3 600 K przyniosły po 6 latach 1 404 K odsetek. Jeżeli drugi kapitał był oddany na 3%, na ile % oddano pierwszy? $4\frac{1}{2}$.

71. Ktoś wypożyczył 3 200 K na 4%, 2 800 K na 5% i 4 000 K na $4\frac{1}{2}\%$. Na ile % musiałby wypożyczyć te trzy kapitały, aby mieć te same roczne odsetki? 4.48.

72. Na ile $\%$ trzeba oddać kapitał, aby z odsetkami po 20 latach się podwoił? 5.

73. Po jakim czasie przyniesie kapitał 3000 K, umieszczony na $3\frac{3}{4}\%$, 1125 K odsetek? 10 lat.

74. W ilu latach przyniesie kapitał, oddany na 5% , te same odsetki, co po $8\frac{1}{2}$ latach na $4\frac{1}{2}\%$? $7\frac{1}{2}$.

75. Wypożyczono 6000 K na $3\frac{1}{2}\%$, a w 3 lata później 7000 K na 5% . Po ilu latach zrównają się odsetki tych dwu kapitałów? $4\frac{1}{2}$.

76. Kapitał 7000 K przyniósł po pewnym czasie 3920 K odsetek. Przez połowę tego czasu pozostawał ten kapitał na procencie 5% , przez trzecią część na $4\frac{1}{2}\%$, a przez resztę czasu na 4% . Jak długo procentował się ten kapitał? 12 lat.

77. Jeżeli pewną liczbę pomniejszą o 24, to reszta będzie 70% tej liczby. Co to za liczba? 80.

78. Gdy 7% pewnej liczby powiększą o 36, otrzymam 12% tej liczby. Co to za liczba? 720.

79. Sprzedano towar za 483 K z zyskiem 15% . Obliczyć cenę zakupu tego towaru. 420 K.

80. Kupiec sprzedał towar za 1020 K, ze stratą $6\frac{1}{4}\%$. Obliczyć cenę zakupu towaru. 1088 K.

81. Kupiec sprowadził towaru za 1248 K z terminem 10-o miesięcznym. Ile zapłaci gotówką, licząc 6% rabatu? ¹⁾ 1185.6 K.

82. Dług, płatny po 4 latach, spłacono gotówką 1600 K, po strąceniu 288 K eskontu. Ile $\%$ wynosił eskont? ²⁾ $4\frac{1}{2}$.

83. Dług 2562 K, płatny po $1\frac{1}{2}$ roku, umorzyłem sumą 2400 K. Ile $\%$ wynosił eskont? $4\frac{1}{2}$.

84. Po jakim czasie miał być spłacony dług 2915 K, umorzony sumą 2650 K, przy 6% eskoncie? 1 rok 8 mies.

85. Po jakim czasie miała być spłacona suma 7320 K, jeżeli 4% eskont wynosił 120 K? 5 mies.

86. Za pobrane towary zapłacił kupiec 625.92 K. Ile $\%$ policzono mu eskontu, jeżeli po 6 miesiącach miał zapłacić 640 K? 4.4.

¹⁾ Zob. Część I. str. 141. ²⁾

²⁾ Zob. Część I. Rozdz. XVI.

87. Od jakiej kwoty potrącono za 2 miesiące przy $4\frac{3}{4}\%$ -ym rocznym eskoncie 28·5 K? 3 600 K.

88. Weksel na 360 K, płatny po 4 miesiącach, spłaciłem gotówką 345 K. Ile $\%$ wynosił eskont? $12\frac{1}{2}$.

89. Dług, płatny 31. grudnia, spłaciłem z końcem lutego tego samego roku sumą 4440 K, z potrąceniem 5% eskontu. Obliczyć ten dług. 4 625 K.

90. Kupiec zmieszał dwa gatunki wina: po 80 K i 96 K za hl. Ile ma wziąć hl jednego a ile drugiego gatunku, aby otrzymać 16 hl po 84 K za hl? 12 i 4.

91. Ile kg kawy po 2·4 K za kg trzeba zmieszać z 30 kg po 2·8 K, aby otrzymać kawę po 2·5 K za kg? 90.

92. Ile wody trzeba dolać do 1 hl octu, który kosztuje 56 K, aby cenę litra zniżyć o 6 h? (cena wody = 0) 12 l.

93. Zmieszano $3\frac{1}{2}$ kg herbaty po cenie 8·4 K z $2\frac{1}{2}$ kg herbaty poprzedniejszego gatunku i otrzymano herbatę po cenie 6 K. W jakiej cenie był gatunek poprzedniejszy? 2·64 K.

94. Stopiono 21 g złota próby 920 z 2 g miedzi; obliczyć próbę aliażu. 840.

95. Ile g miedzi trzeba stopić z 75 g złota próby 920 i 75 g złota próby 840, aby otrzymać złoto próby 750? 26.

96. Ile g miedzi dodać trzeba do 150 g złota próby 800, aby otrzymać złoto próby 750? 10.

97. Ile złota próby 900 i miedzi trzeba stopić, aby otrzymać 360 g złota próby 550? 220 g i 140 g.

98. Ile czystego złota trzeba stopić z 0·5 kg złota próby 745, aby otrzymać złoto próby 800? 137·5 g.

99. Złotnik chce zrobić srebrny krzyż próby 750, ważący 1·2 kg. Ile ma dodać miedzi do srebra próby 800? 75 g.

100. Za posłańcem, idącym 48 km dziennie, wysłano dwa dni później drugiego; ile km dziennie musi iść drugi posłaniec, aby pierwszego w 8 dniach dopędził? 60.

101. Posłanica, który już uszedł 13 km, ma dopędzić drugi w 9 godzinach. Ile km w godzinie musi przebyć, jeżeli pierwszy robi w tym czasie 5 km? $6\frac{1}{3}$.

102. Z dworca kolejowego wychodzą równocześnie dwa pociągi w kierunkach przeciwnych; pierwszy jedzie z prędkością 42 km, drugi 32·5 km na godzinę. Po jakim czasie przebędą oba pociągi 298 km? 4 godz.

103. Ze stacyi A do stacyi B jedzie pociąg kolei żelaznej $4\frac{1}{2}$ godzin; gdyby prędkość zwiększył o $9\frac{1}{2}$ km na godzinę, przebyłby tę drogę w $3\frac{1}{3}$ godzinach. Obliczyć prędkość pociągu i odległość stacyi od siebie. 28 km i 126 km.

104. Z dwu miejsc, oddalonych od siebie o 60 km, wychodzą równocześnie naprzeciw siebie dwaj posłańcy; pierwszy przebyłby całą drogę w 12, drugi w 15 godzinach. Po ilu godzinach się zejdą? $6\frac{2}{3}$.

105. Z miejsca A dąży posłaniec przez miejsce B ku C po torze prostym z prędkością 100 m na minutę. Równocześnie wychodzi z B ku C drugi posłaniec, przebywając 4·8 km w godzinie. Kiedy spotkają się w C, jeżeli odległość AB wynosi 2·4 km? Po 2 godz.

106. Dwa ciała, oddalone od siebie o 4·44 km, dążą ku sobie po prostej i spotykają się po 80 sekundach. Ile km przebyło każde z nich, jeżeli pierwsze przebywa w sekundzie 4·5 m więcej niż drugie? 2·4 i 2·04.

107. Z dwu miejsc A i B, oddalonych od siebie o 15 km, wyruszają równocześnie naprzeciw siebie dwa ciała; jedno z nich przebywa w minucie 260 m, drugie 240 m. Kiedy i gdzie się spotkają? Po $\frac{1}{2}$ godz. w odległości 7·8 km od A.

108. O godzinie 5-tej min. 55 wysłano gońca, który robi $11\frac{1}{4}$ km w godzinie, a za nim o godzinie $7\frac{1}{4}$ drugiego, który przebywa 15 km w godzinie. Kiedy go dogoni? 4 godz.

109. Z dwu miejsc, oddalonych od siebie o 9 km, wychodzą równocześnie naprzeciw siebie dwa ciała, z których jedno przebywa w minucie 8 m więcej niż drugie. Ile m przebywa w minucie każde z nich, jeżeli po godzinie wynosi ich odległość 300 m? 68·5 i 76·5.

110. W jakim czasie ukończą dwaj robotnicy pewną robotę, jeżeli jeden z nich ukończyłby ją w 10, drugi w 15 godzinach? 6 godz.

111. Jeden robotnik ukończyłby pewną robotę w 12 godzinach, a pracując z drugim, w 4 godzinach. W jakim czasie ukończyłby drugi robotnik tę robotę? 6 godz.

112. Osoba A spożyłaby pewną żywność w $2\frac{1}{2}$ miesiącach, B w 2 miesiącach. Na jaki czas wystarczy ta żywność dla obu osób? $1\frac{1}{3}$ mies.

113. Staw ma trzy rury do odpływu wody. Pierwszą rurą wypróżnić można staw w 4 godzinach, drugą w 12, a trzecią w 24 godzinach. W ilu godzinach wypróżni się staw po otwarciu trzech rur? $2\frac{2}{3}$.

114. Zbiornik można wypróżnić jedną rurą w godzinie, a napełnić go drugą w 48 minutach. W jakim czasie napełni się zbiornik, gdy obie rury otworzymy? 4 godz.

115. Jedną rurą napełni się zbiornik wodą w 14 godzinach, drugą w 21 godzinach a trzecią w 28 godz. W jakim czasie napełni się ten zbiornik wodą, jeżeli otworzymy: a) 1-ą i 2-ą rurą, b) 1-ą i 3-ą, c) 2-ą i 3-ą, d) wszystkie 3 rury razem?
a) $8\frac{2}{3}$, b) $9\frac{1}{3}$, c) 12, d) $6\frac{8}{13}$ godz.

116. Kąty ostre trójkąta prostokątnego tworzą stosunek 2:7. Obliczyć te kąty. 20° i 70° .

117. Obliczyć kąty ostre trójkąta prostokątnego, których różnica wynosi 31° . $60^\circ 30'$ i $29^\circ 30'$.

118. Jeden z dwu kątów wewnętrznych trójkąta, które leżą naprzeciw kąta zewnętrznego $135^\circ 15'$, jest dwa razy tak wielki, jak drugi. Obliczyć kąty trójkąta. $45^\circ 5'$, $90^\circ 10'$, $44^\circ 45'$.

119. Obliczyć kąt trójkąta, który jest dwa razy tak wielki, jak suma dwu innych kątów. 120° .

120. Jeden kąt trójkąta ma 24° , a drugi jest 3 razy tak wielki, jak trzeci. Obliczyć 3-ci kąt trójkąta. 39° .

121. Jeden kąt trójkąta jest 2 razy większy od drugiego, a o 20° mniejszy od trzeciego. Obliczyć ten kąt. 64° .

122. Jedna przyprostokątnia trójkąta prostokątnego wynosi 6 dm, druga zaś jest o 2 dm krótsza od przeciwprostokątnej. Obliczyć drugą przyprostokątnię. 8 dm.

123. Obwód prostokąta ma 28 m, dwa zaś jego przyległe boki tworzą stosunek 2:5. Obliczyć te boki. 4 m i 10 m.

124. Podstawa prostokąta wynosi 14 m. Jeżeli tak podstawę jak i wysokość powiększą o 6 m, to powiększą pole tego prostokąta o 180 m^2 . Obliczyć wysokość. 10 m.

125. Obwód trójkąta prostokątnego wynosi 120 m, jedna przyprostokątnia 40 m. Obliczyć boki trójkąta. 30, 40, 50 m.

126. Wyznaczyć taki kwadrat, którego pole powiększy się o 56 dm^2 , jeżeli każdy z jego boków przedłużymy o 4 dm. Bok = 5 m.

127. Obliczyć bok kwadratu, którego pole zmniejszy się o 180 dm^2 , jeżeli jego obwód zmniejszymy o 24 dm. 18 dm.

128. Jeżeli krawędź sześcianu powiększymy o 5 dm, to jego powierzchnię powiększymy o 1050 dm^2 . Obliczyć krawędź sześcianu. 15 dm.

ROZDZIAŁ VII.

Równania stopnia pierwszego z wielu niewiadomymi.

§ 1.

Równania nieoznaczone i oznaczone.

1. Jeżeli w równaniu stopnia pierwszego o dwu niewiadomych np. $2x + 3y = 7$ podstawimy $x = 1$, otrzymamy $y = \frac{5}{3}$. Obie te wartości sprawdzają dane równanie, są więc jego pierwiastkami. Podstawiając $x = 2$, otrzymamy $y = 1$; podobnie dla $x = -\frac{1}{2}$ jest $y = \frac{8}{3}$ i t. d. Każda para wartości, uzyskanych w ten sposób na niewiadome, sprawdza podane równanie.

Ponieważ na jedną z tych niewiadomych możemy podstawiać nieskończenie wielką ilość wartości i do każdej z tych wartości należy pewna, oznaczona wartość na drugą niewiadomą, przeto równanie takie ma nieskończenie wielką ilość par pierwiastków.

Równanie, którego ilość pierwiastków jest nieoznaczona (gdyż ich jest nieskończenie wielka ilość), nazywamy równaniem nieoznaczonym.

2. Jeżeli mamy dwa równania 1-go stopnia o dwu niewiadomych np. $4x + 3y = 11$ i $2x + 3y = 7$, to odejmując 2-gie równanie od 1-go, otrzymamy $2x = 4$, a z tego $x = 2$. Podstawiając wartość na x w którekolwiek z podanych dwu równań, znajdziemy $y = 1$. Wartości $x = 2$ i $y = 1$ sprawdzają oba równania, są więc ich pierwiastkami; każda inna para wartości, przyjęta za niewiadome, nie sprawdzi podanych równań.

Dwa równania stopnia 1-go o dwu niewiadomych, które posiadają tylko jedną parę pierwiastków, nazywamy równaniami oznaczonemi i mówimy o nich, że tworzą układ równań.

Jeżeli weźmiemy pod uwagę dwa równania np. $2x + 3y = 7$ i $4x + 6y = 14$, to widzimy, że drugie równanie powstało z pierwszego przez pomnożenie obu jego stron przez 2 i że każde z nieskończenie wielu rozwiązań 1-go równania sprawdza 2-gie równanie. Takie więc dwa równania nie tworzą układu równań.

Podobnie równania np. $2x + 3y = 7$ i $2x + 3y = 9$, wyrażające sprzeczność, a mianowicie, że to samo wyrażenie $2x + 3y$ raz ma wartość 7, drugi raz 9, nie tworzą układu równań.

A zatem: Dwa równania stopnia 1-go o dwu niewiadomych tworzą układ równań, jeżeli 1^o) jedno z nich nie jest wielokrotnością drugiego, 2^o) nie są ze sobą sprzeczne.

Zajmować się będziemy układem równań o dwu i trzech niewiadomych.

§ 2.

Rozwiązywanie równań stopnia 1-go z wielu niewiadomymi.

A) Aby rozwiązać dwa równania z dwiema niewiadomymi, należy je tak przekształcić, aby z nich otrzymać jedno równanie z jedną niewiadomą. Takie postępowanie nazywamy rugowaniem niewiadomej z podanych równań. Poznamy trzy sposoby rugowania.

1. Metoda porównania.

Mając układ równań np. $3x - 4y = 10$ i $2x + 5y = 22$, przenieśmy wyrazy, zawierające np. niewiadomą y , na prawe

strony równań i uwolnijmy niewiadomą x od współczynników, a otrzymamy:

$$x = \frac{10 + 4y}{3} \text{ i } x = \frac{22 - 5y}{2}.$$

Skoro x wyraża w obu równaniach tę samą liczbę, przeto prawe strony tych równań przedstawiają te same wartości t. j. $\frac{10 + 4y}{3} = \frac{22 - 5y}{2}$; otrzymaliśmy przeto z dwu równań jedno, którego niewiadomą $y = 2$. Podstawiając tę wartość do któregośkolwiek z dwu podanych równań, dostaniemy $x = 6$.

Wartości: $x = 6$, $y = 2$ sprawdzają podany układ równań, ($3 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 10$ i $2 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 22$), są więc ich pierwiastkami.

Ten sposób rugowania niewiadomej nazywamy metodą porównania. Metoda ta polega na tem, że z obu równań wyznaczamy wartości na jedną i tę samą niewiadomą i łączymy ze sobą te dwie wartości znakiem równania, przez co otrzymujemy jedno równanie z jedną niewiadomą. Podstawiając następnie pierwiastek tego równania do któregośkolwiek z podanych dwu równań, obliczamy 2-gą niewiadomą.

2. Metoda podstawienia.

Mając podany układ dwu równań np. $3x - 4y = 10$ i $2x + 5y = 22$, wyznaczmy np. x z pierwszego równania: $x = \frac{10 + 4y}{3}$. Ponieważ x przedstawia w obu równaniach tę samą liczbę, przeto jego wartość musi sprawdzać i drugie równanie; otrzymamy przeto $2 \cdot \frac{10 + 4y}{3} + 5y = 22$, a stąd $y = 2$. Wartość ta, podstawiona do któregośkolwiek z podanych równań, pozwoli obliczyć drugą niewiadomą.

Ten sposób rugowania niewiadomej nazywamy metodą podstawienia. Polega ona na tem, że z jednego z podanych równań wyznaczamy wartość na którąkolwiek niewiadomą i wartość tę podstawiamy do drugiego równania.

3. Metoda równych współczynników.

Mając podane dwa równania, np. $3x - 4y = 10$ i $2x + 5y = 22$, przekształćmy je tak, aby współczynniki np. przy y były w obu równaniach te same. W tym celu pomnożmy 1-sze

równanie przez 5, 2-gie przez 4, a otrzymamy: $15x - 20y = 50$, $8x + 20y = 88$. Dodając do siebie te dwa równania, dostaniemy: $23x = 138$; $x = 6$.

Podstawiając wartość za x do jednego z podanych równań, obliczymy: $y = 2$.

Niewiadomą y możemy także obliczyć podobnie jak x , jeżeli 1-sze równanie pomnożymy przez 2, drugie przez 3 i te dwa równania od siebie odejmiemy.

$$\begin{array}{r} 6x - 8y = 20 \\ - \quad + \quad - \\ 6x + 15y = 66 \\ \hline 23y = 46 \\ y = 2. \end{array}$$

Ten sposób rugowania niewiadomej nazywamy metodą równych współczynników. Metoda ta polega na tem, że każde z równań mnożymy kolejno przez współczynnik rugowanej niewiadomej drugiego równania i tak przekształcone równania dodajemy do siebie lub od siebie odejmujemy według tego, czy współczynniki równe mają znaki przeciwne czy te same.

Jeżeli współczynniki rugowanej niewiadomej mają wspólny dzielnik, wówczas mnożymy dane równania przez liczby niewspółmierne, uzyskane z dzielenia tych współczynników przez ich najw. wsp. dzielnik. Np.

$$\begin{array}{r} 16x + 15y = 47 \quad | \quad 12 \quad 3 \\ 12x - 25y = -1 \quad | \quad 16 \quad 4 \\ \hline 48x + 45y = 141 \\ 48x - 100y = -4 \\ - \quad + \quad + \\ \hline 145y = 145; y = 1. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16x + 15y = 47 \quad | \quad 25 \quad 5 \\ 12x - 25y = -1 \quad | \quad 15 \quad 3 \\ \hline 80x + 75y = 235 \\ 36x - 75y = -3 \\ \hline 116x = 232; x = 2. \end{array}$$

Każdą z tych trzech metod stosujemy do równań uporządkowanych. Są jednak równania, np.

$$\begin{array}{l} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3 \\ \frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4, \end{array}$$

których porządkowanie byłoby zbyt ciężkie, a nawet szkodliwe, gdyż otrzymalibyśmy takie dwa równania, którychbyśmy rozwiązać nie umieli.

W tym przypadku rugujemy niewiadome trzecią metodą bez poprzedniego uporządkowania.

$$\left. \begin{array}{r} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3 \\ 15 \frac{4}{x} - \frac{4}{y} = 4 \end{array} \right\} 2$$

$$\left. \begin{array}{r} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3 \\ 30 \frac{8}{x} - \frac{8}{y} = 8 \end{array} \right\} +$$

$$\frac{33}{x} = 11$$

$$\frac{3}{x} = 1; x = 3.$$

$$\left. \begin{array}{r} \frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3 \\ 15 \frac{4}{x} - \frac{4}{y} = 4 \end{array} \right\} 5$$

$$\left. \begin{array}{r} 15 \frac{40}{x} + \frac{40}{y} = 15 \\ 15 \frac{4}{x} - \frac{4}{y} = 4 \end{array} \right\} -$$

$$\begin{array}{r} - \\ + \\ - \end{array} \quad \frac{44}{y} = 11$$

$$\frac{4}{y} = 1; y = 4.$$

B) Jeżeli mamy podany układ 3 równań z trzema niewiadomymi, np.

$$2x - 3y + 4z = 4,$$

$$3x + y - 5z = 6,$$

$$4x - 2y + 3z = 11,$$

to stosując jedną z trzech metod rugowania, sprowadzamy te 3 równania do 2 równań z 2 niewiadomymi a następnie te 2 równania do jednego z jedną niewiadomą.

1. metoda. Jeżeli z podanych równań wyznaczymy jedną niewiadomą, np.

$$x = \frac{4 + 3y - 4z}{2}, \quad x = \frac{6 - y + 5z}{3}, \quad x = \frac{11 + 2y - 3z}{4}$$

i zrównamy np. wyrażenie pierwsze z wyrażeniem drugim a to z trzecim, otrzymamy dwa równania:

$$\frac{4 + 3y - 4z}{2} = \frac{6 - y + 5z}{3}, \quad \text{czyli:} \quad y - 2z = 0,$$

$$\frac{6 - y + 5z}{3} = \frac{11 + 2y - 3z}{4} \quad 10y - 29z = -9,$$

które rozwiązać umiemy. Z nich znajdziemy: $z = 1$, $y = 2$ a po podstawieniu tych wartości w którekolwiek z danych równań otrzymamy: $x = 3$.

2 metoda. Wyznaczając wartość np. na y z 2-go równania: $y=6-3x+5z$ i podstawiając ją do innych dwu równań, dostaniemy równania:

$$\begin{aligned} 2x-3(6-3x+5z)+4z &= 4, & \text{czyli:} & & x-z &= 2, \\ 4x-2(6-3x+5z)+3z &= 11, & & & 10x-7z &= 23, \end{aligned}$$

z których obliczymy: $x=3, z=1$ a z wyrażenia na y znajdziemy: $y=2$.

3 metoda. Aby wyrugować np. x , zastosujmy metodę równych współczynników np. do 1-go i 2-go równania a następnie do 1-go i 3-go a otrzymamy:

$$\begin{array}{rcl} 2x-3y+4z=4, & | & 3 \\ 3x+y-5z=6, & | & 2 \\ \hline 6x-9y+12z=12, & & \\ - & + & - \\ 6x+2y-10z=12 & & \\ \hline 11y-22z=0, & y-2z=0 & \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x-3y+4z=4, & | & 2 \\ 4x-2y+3z=11, & | & \\ \hline 4x-6y+8z=8, & & \\ - & + & - \\ 4x-2y+3z=11 & & \\ \hline 4y-5z=3. & & \end{array}$$

Z ostatnich dwu równań: $y-2z=0$ i $4y-5z=3$ znajdziemy: $y=2, z=1$ a z któregokolwiek z 3 danych równań obliczymy $x=3$.

Zadania.

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1. $2x+3y=36,$
$x=3y.$ | 2. $5x-2y=3,$
$y=2x.$ |
| 3. $3x+5y=52,$
$x=y+4.$ | 4. $x+5y=25,$
$x=3y+1.$ |
| 5. $2x+3y=5,$
$y=x-5.$ | 6. $x+2y=4,$
$x+y=3.$ |
| 7. $3x-7y=5,$
$x-y=3.$ | 8. $5y-7x=4,$
$2x-y=1.$ |
| 9. $x+4y=14,$
$3x+y=9.$ | 10. $7y-6x=10,$
$y+2x=10.$ |
| 11. $x+y=18,$
$x-y=2.$ | 12. $y-x=1,$
$y-2x=-3.$ |
| 13. $x+2y=2,$
$x-y=0.5.$ | 14. $7x-2y=12,$
$3x+2y=8.$ |
| 15. $2x+y=3,$
$4x+5y=12.$ | 16. $9x+2y=4,$
$3x+10y=6.$ |

17. $15x + 8y = 7,$
 $5x + 2y = 2.$
18. $3x + 4y = 4,$
 $12x - 6y = 5.$
19. $16x - 9y = 62,$
 $12x - 5y = 50.$
20. $10x + y = 8,$
 $24x + 26y = 31.$
21. $6x + 5y = 29,$
 $3x + 7y = 19.$
22. $5x + 6y = 76,$
 $6x - 5y = 18.$
23. $10x - 7y = 1,$
 $7x - 5y = 0.$
24. $8x + 7y = 23,$
 $11x - 10y = 12.$
25. $5x - 7y = 12,$
 $25x + 28y + 3 = 0.$
26. $4x + 5y = 12,$
 $2x - 3y = 3.8.$
27. $9x + 8y = 2.5,$
 $2x + 9y = 2.$
28. $0.6x - 1.5y = 0.3,$
 $1.3x + 0.5y = 4.4.$
29. $1.2x + 0.5y = 0.7,$
 $1.6x + 2y = 1.2.$
30. $2.7x + 2.6y = 8.8,$
 $0.9x + 2.2y = 4.4.$
31. $3(x - 2) = 2(y + 1),$
 $4(x + 1) + 3(y - 4) = 14.$
32. $3(x - 3y) - 2(3y - 1) = 0,$
 $4(x - 3y) + 3(3y - 1) = 0.$
33. $5(x - 2y) - (x - y) + 24 = 0,$
 $11(2x + 3y) + (2x - y) = 200.$
34. $7x + 3\{y - 2(x + 1)\} = 10,$
 $x - 2\{5y - 3(x - 8)\} = 2.$
35. $xy - (x + 3)(y - 3) = 15,$
 $2(x - 5) + 3(y + 1) = 22.$
36. $3.5x - 2.4(y + 2) + 2.4 = 0,$
 $2y - 5.5 = 5(x - 2.5).$
37. $x : y = 4 : 3,$
 $(x - 6) : (y - 8) = 2 : 1.$
38. $2(x + 0.8) : (y - 0.5) = 5 : 1,$
 $(x - 1.4) : (y + 1) = 4 : 5.$
39. $(x + y) : (y - x) = 17 : 1,$
 $(x + y) : (1 - y) = 17 : 3.$
40. $(x + 1) : (x - 2) = (y + 1) : (y - 3),$
 $(x - 1) : (x + 1) = (y - 1) : (y + 2).$
-
41. $x + y = 2a,$
 $y = 5a - 2x.$
42. $x - y = 4a,$
 $x = 2(a + y).$
43. $7x - 2y = a,$
 $y = 2x + a.$
44. $9x + 2y = 5a,$
 $2x = y + 4a.$

45. $5x - 2y = 5a - 2b$,
 $3x + 4y = 3a + 4b$.
47. $x + y = 2a$,
 $7x - y = 2(3a + 4b)$.
49. $x + y = 2a$,
 $x - y = 2b$.
51. $ax + by = 2ab$,
 $ax - by = 0$.
53. $x - y = 2b$,
 $ax - by = a^2 + b^2$.
55. $ax + by = a^2 + b^2$,
 $a(x - a) - 2b(y - b) = 0$.
46. $2x + 3y = 4a + 9b$,
 $5x - 6y = 2(5a - 9b)$.
48. $x + 3y = a(b + 3c)$,
 $2x - y = a(2b - c)$.
50. $x + y = 3(a + b)$,
 $x - y = a - b$.
52. $x + ay = a^2$,
 $x - by = b^2$.
54. $ax - by = a^2 + b^2$,
 $bx + ay = a^2 + b^2$.
56. $ax - (a + b)y + ab = 0$,
 $bx + (a - b)y = a^2$.

57. $x + 2y = 22$,
 $\frac{x}{3} = 3y$.
59. $\frac{x}{3} = y - 1$,
 $\frac{2x}{5} + \frac{y}{3} = 8$.
61. $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 11$,
 $\frac{3x}{8} - \frac{2y}{7} + 1 = 0$.
63. $\frac{x-5}{2} + \frac{y-6}{3} = 2$,
 $\frac{2x}{7} + \frac{y}{9} = 3$.
65. $\frac{3x-2y}{4} - \frac{2x+3y}{12} = 1$,
 $\frac{7x+2y}{10} - \frac{11x-4y}{25} = 6$.
66. $\frac{x}{6} + \frac{2(10-y)}{3} = \frac{5y}{6} - \frac{4y-19}{3}$,
 $\frac{x+5y}{6} + 5 = \frac{2y+21}{3}$.
58. $x - y = 2$,
 $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 4$.
60. $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$,
 $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 9$.
62. $\frac{3x}{4} - \frac{y}{3} = 2$,
 $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 4$.
64. $\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 4$,
 $\frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{3} = 1$.

$$67. \frac{3x}{4} + \frac{4y}{5} = 24,$$

$$(7x - 6y) : 22 = (24x - 25y) : 9.$$

$$68. \frac{3x - 2y}{5} + \frac{5x - 3y}{3} = x + 1,$$

$$\frac{2x - 3y}{3} + \frac{4x - 3y}{2} = y + 1.$$

$$69. \frac{x}{y} = \frac{1}{2},$$

$$4x + 3y = 10.$$

$$71. \frac{2x + y}{x + 2y} = \frac{5}{7},$$

$$\frac{6x - y}{x + 3} = \frac{3}{4}.$$

$$73. \frac{4x + 5y + 5}{x + 3y + 6} = 2,$$

$$\frac{5x - 2y + 1}{2x + y - 8} = 4.$$

$$70. \frac{x}{2y - x} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{y - 1}{3y - 4x} = \frac{3}{4}.$$

$$72. \frac{x + 2}{3} - \frac{y - 3}{4} = 3,$$

$$\frac{3}{x + 2} = \frac{1}{y - 3}.$$

$$74. \frac{0.1x - y + 0.1}{x + 10y - 6} = 0.2,$$

$$\frac{1.2x - 20y + 8}{2x - 5y + 4.5} = 0.75.$$

$$75. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}.$$

$$77. \frac{15}{x} + \frac{16}{y} = 13,$$

$$\frac{9}{x} - \frac{4}{y} = 1.$$

$$79. \frac{x}{4} - \frac{6}{y} = -9,$$

$$\frac{x}{6} + \frac{4}{y} = 10.$$

$$81. \frac{4x}{9} - \frac{1}{5y} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{x}{9} + \frac{7}{10y} = \frac{23}{6}.$$

$$76. \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 24,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10.$$

$$78. \frac{8}{x} + \frac{9}{y} = 5,$$

$$\frac{40}{x} - \frac{21}{y} = 3.$$

$$80. 2y = \frac{36}{x} = 20,$$

$$7y - \frac{63}{x} = 49.$$

$$82. \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{y - 2} = 0,$$

$$\frac{3}{x - 1} - \frac{4}{y - 2} = \frac{21}{6}.$$

$$83. \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+1} = \frac{9}{10},$$

$$\frac{5}{x+2} - \frac{2}{y+1} = 1.$$

$$84. \frac{4}{x+1} + \frac{3}{y-1} = 1.6,$$

$$\frac{6}{x+1} - \frac{5}{y-1} = 0.5.$$

$$85. x - y = a - b,$$

$$\frac{x-a}{a} + \frac{y-a}{b} = 2.$$

$$87. \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

$$\frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} = 0.$$

$$89. \frac{x+1}{y} = a,$$

$$\frac{y+1}{x} = b.$$

$$91. \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b},$$

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}.$$

$$93. \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = a^2 + b^2,$$

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{y} = a^2 - b^2.$$

$$86. \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1,$$

$$ax - by = a^2.$$

$$88. \frac{x-1}{a} = \frac{1-y}{b},$$

$$\frac{x+y}{a^2+b^2} = \frac{x-y}{a^2-b^2}.$$

$$90. \frac{x+y+1}{x-y+1} = \frac{a+1}{a-1},$$

$$\frac{x+y+1}{x-y-1} = \frac{1+b}{1-b}.$$

$$92. \frac{a}{x} - \frac{b}{y} = a - b,$$

$$\frac{b}{x} + \frac{a}{y} = a + b.$$

$$94. \frac{a}{x+a} + \frac{b}{y+b} = a + b,$$

$$\frac{a}{x+a} - \frac{b}{y+b} = a - b.$$

$$95. \frac{a+b}{x} + \frac{a-b}{y} = \frac{a^2 + 2ab - b^2}{ab},$$

$$\frac{a+b}{x} - \frac{a-b}{y} = \frac{a^2 + b^2}{ab}.$$

29 (96.) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{y-b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{y-b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

$$\begin{aligned} 97. \quad x+y &= 7, \\ x+z &= 10, \\ y+z &= 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 99. \quad x+y &= 7, \\ y+z &= 8, \\ 2z-x &= 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 101. \quad x+y+z &= 14, \\ x+y-z &= 10, \\ x-y+z &= 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 103. \quad x+y &= 5+z, \\ y+z &= 9+x, \\ z+x &= 7+y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 105. \quad 0.2x+1.3y+0.4z &= 20, \\ 0.6x+0.7y+0.2z &= 13, \\ 0.8x+0.9y+z &= 28. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 106. \quad x:y &= 3:2, \\ y:z &= 1:3, \\ x+y+z &= 22. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 108.^1) \quad x:y:z &= 2:3:4, \\ 5x+2y &= 5z-8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 110. \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{7} + \frac{z}{5} &= 8, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} &= 16, \\ \frac{x}{6} + \frac{2y}{7} - \frac{z}{3} &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 112. \quad \frac{x+1}{y+1} &= 2, \\ \frac{y+2}{z+1} &= 1, \\ \frac{z+3}{x+1} &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 98. \quad x-y &= 1, \\ x+z &= 4, \\ z-y &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 100. \quad x+2y+3z &= 4\frac{1}{2}, \\ 3z-y &= 1\frac{1}{2}, \\ 2y-z &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 102. \quad 2x+y+z &= 7, \\ x+2y+z &= 8, \\ x+y+2z &= 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 104. \quad 4x+3y-5z &= 7, \\ 5x-4y+2z &= 3, \\ 3x+2y-4z &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 107. \quad (x+y):z &= 2:1, \\ (x+z):y &= 17:4, \\ x+y+z &= 126. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 109.^1) \quad x:y:z &= 6:4:3, \\ 4x+3y+4z &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 111. \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} &= 9, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{8} + \frac{z}{5} &= 6, \\ 2x-y+z &= 14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 113. \quad \frac{x+y}{z-3} &= 6, \\ \frac{x+z}{y-4} &= 4, \\ \frac{y+z}{x-3} &= 2. \end{aligned}$$

¹⁾ Zamiast proporcji $x:y:z=a:b:c$ możemy napisać: $x:y=a:b$ i $y:z=b:c$.

$$114. \frac{x-1}{3} + \frac{y-1}{5} = 4,$$

$$\frac{x+1}{4} + \frac{z-1}{3} = 6,$$

$$\frac{y+1}{3} - \frac{z-3}{5} = 2.$$

$$115. \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{3} = 6,$$

$$\frac{x+z}{3} - \frac{y-z}{2} = 1,$$

$$x - y + z = 2.$$

$$116. \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2,$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 3,$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 9.$$

$$118. \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{2}{a},$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{b},$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{c}.$$

$$117. \frac{1}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z} = 3,$$

$$\frac{3}{x} + \frac{9}{y} + \frac{10}{z} = 7,$$

$$\frac{18}{x} + \frac{15}{y} - \frac{16}{z} = 10.$$

Odpowiedzi.

1. $x=12, y=4.$

3. $x=9, y=5.$

5. $x=4, y=-1.$

7. $x=4, y=1.$

9. $x=2, y=3.$

11. $x=10, y=8.$

13. $x=1, y=0.5.$

15. $x=\frac{1}{2}, y=2.$

17. $x=0.2, y=0.5.$

19. $x=5, y=2.$

21. $x=4, y=1.$

23. $x=5, y=7.$

25. $x=1, y=-1.$

27. $x=0.1, y=0.2.$

29. $x=0.5, y=0.2.$

2. $x=3, y=6.$

4. $x=10, y=3.$

6. $x=2, y=1.$

8. $x=3, y=5.$

10. $x=3, y=4.$

12. $x=4, y=5.$

14. $x=2, y=1.$

16. $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}.$

18. $x=\frac{2}{3}, y=\frac{1}{2}.$

20. $x=0.75, y=0.5.$

22. $x=8, y=6.$

24. $x=2, y=1.$

26. $x=2.5, y=0.4.$

28. $x=3, y=1.$

30. $x=2.2, y=1.1.$

$$31. x=4, y=2.$$

$$33. x=3, y=4.$$

$$35. x=7, y=5.$$

$$37. x=20, y=15.$$

$$39. x=\frac{2}{3}, y=\frac{3}{4}.$$

$$41. x=3a, y=-a.$$

$$43. x=a, y=3a.$$

$$45. x=a, y=b.$$

$$47. x=a+b, y=a-b.$$

$$49. x=a+b, y=a-b.$$

$$51. x=b, y=a.$$

$$53. x=a+b, y=a-b.$$

$$55. x=a, y=b.$$

$$57. x=18, y=2.$$

$$59. x=15, y=6.$$

$$61. x=24, y=35.$$

$$63. x=7, y=9.$$

$$65. x=12, y=8.$$

$$67. x=16, y=15.$$

$$69. x=1, y=2.$$

$$71. x=1, y=3.$$

$$73. x=5, y=3.$$

$$75. x=2, y=3.$$

$$77. x=3, y=2.$$

$$79. x=12, y=0.5.$$

$$81. x=3, y=\frac{1}{5}.$$

$$83. x=0.5, y=1.$$

$$85. x=2a, y=a+b.$$

$$87. x=a, y=b.$$

$$89. x=\frac{a+1}{ab-1}, y=\frac{b+1}{ab-1}.$$

$$91. x=\frac{a}{a-b}, y=\frac{b}{a+b}.$$

$$32. x=1, y=\frac{1}{3}.$$

$$34. x=10, y=2.$$

$$36. x=2.4, y=2.5.$$

$$38. x=4.2, y=2.5.$$

$$40. x=5, y=7.$$

$$42. x=6a, y=2a.$$

$$44. x=a, y=-2a.$$

$$46. x=2a, y=3b.$$

$$48. x=ab, y=ac.$$

$$50. x=2a+b, y=a+2b.$$

$$52. x=ab, y=a-b.$$

$$54. x=a+b, y=a-b.$$

$$56. x=a, y=a.$$

$$58. x=12, y=10.$$

$$60. x=15, y=8.$$

$$62. x=4, y=3.$$

$$64. x=15, y=1.8.$$

$$66. x=5, y=7.$$

$$68. x=3, y=2.$$

$$70. x=2, y=4.$$

$$72. x=10, y=7.$$

$$74. x=10, y=0.1.$$

$$76. x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{4}.$$

$$78. x=4, y=3.$$

$$80. x=9, y=8.$$

$$82. x=\frac{4}{7}, y=1\frac{4}{7}.$$

$$84. x=3, y=6.$$

$$86. x=a, y=0.$$

$$88. x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{a}.$$

$$90. x=\frac{a+1}{ab-1}, y=\frac{b+1}{ab-1}.$$

$$92. x=1, y=1.$$

93. $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$. 94. $x = 1 - a, y = 1 - b$.
 95. $x = b, y = a$. 96. $x = 2a, y = 2b$.
 97. $x = 2, y = 5, z = 8$. 98. $x = 2, y = 1, z = 2$.
 99. $x = 5, y = 2, z = 6$. 100. $x = 1\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{2}{3}$.
 101. $x = 8, y = 4, z = 2$. 102. $x = 1, y = 2, z = 3$.
 103. $x = 6, y = 7, z = 8$. 104. $x = 3, y = 5, z = 4$.
 105. $x = 5, y = 10, z = 15$. 106. $x = 6, y = 4, z = 12$.
 107. $x = 60, y = 24, z = 42$. 108. $x = 4, y = 6, z = 8$.
 109. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{4}$. 110. $x = 12, y = 14, z = 15$.
 111. $x = 6, y = 8, z = 10$. 112. $x = 5, y = 2, z = 3$.
 113. $x = 10, y = 8, z = 6$. 114. $x = 7, y = 11, z = 13$.
 115. $x = 4, y = 4, z = 2$. 116. $x = \frac{1}{7}, y = \frac{1}{5}, z = \frac{1}{2}$.
 117. $x = 2, y = 3, z = 4$.
 118. $x = \frac{bc}{b+c}, y = \frac{ac}{a+c}, z = \frac{ab}{a+b}$.

§ 3.

Układanie zadań w równania.

Przy układaniu zadań w równania o kilku niewiadomych postępujemy w podobny sposób, co przy układaniu zadań w równania o jednej niewiadomej. Z warunków, podanych w zadaniu, należy ułożyć tyle równań, ile jest niewiadomych, równania te rozwiązać, a następnie sprawdzić, czy odpowiedź czyni zadość wszystkim warunkom zadania.

Przykład 1. Suma dwu liczb wynosi 15, podwójna ich różnica 10. Jakie to liczby?

Jeżeli jedną liczbą jest x , drugą y , to: $x + y = 15$ i $2(x - y) = 10$; $x = 10, y = 5$.

Sprawdzenie. Suma obu liczb wynosi: $10 + 5$ czyli 15, różnica $= 5$, a podwójna różnica 10.

Zadania o dwu niewiadomych dadzą się często przez odpowiednie ustawienie rozwiązać jako zadania z jedną niewiadomą.

Jeżeli w powyższym przykładzie jest x jedną liczbą, to drugą jest $15 - x$, a z drugiego warunku zadania otrzymamy: $(15 - x)2 = 10$; $x = 10$.

Przykład 2. Ojciec, zapytany o wiek dwojga dzieci, odpowiedział: »Przed dwoma laty miało starsze dziecko dwa razy tyle lat, co młodsze, a po dwu latach będzie wiek jednego dziecka tworzył z wiekiem drugiego stosunek 4:3«. Ile lat ma jedno, a ile drugie dziecko?

a) Jeżeli starsze ma obecnie x lat a młodsze y , to przed dwoma laty miały te dzieci: $x - 2$ i $y - 2$ lat; że zaś wiek jednego był dwa razy większy niż drugiego, przeto: $x - 2 = 2(y - 2)$. Podobnie znajdziemy stosunek wieku tych dzieci po dwu latach: $(x + 2) : (y + 2) = 4 : 3$. Z tych dwu równań otrzymamy: $x = 6$, $y = 4$.

b) Jeżeli przed dwoma laty miało młodsze dziecko x lat, to starsze miało wtenczas $2x$ lat. Dzisiaj mają: $x + 2$ i $2x + 2$ lat, a po dwu latach będą miały: $x + 4$ i $2x + 4$ lat. Mamy zatem: $(2x + 4) : (x + 4) = 4 : 3$; $x = 2$. Młodsze dziecko miało przed dwoma laty 2 lata, starsze dwa razy tyle t. j. 4 lata; dziś ma młodsze 4 lata, starsze 6 lat.

Przykład 3. Jeżeli do licznika i do mianownika pewnego ułamka dodamy 7, otrzymamy $\frac{2}{3}$, jeżeli zaś od licznika i od mianownika odejmiemy 11, otrzymamy $\frac{1}{6}$. Co to za ułamek?

Niech licznik szukanego ułamka będzie x , mianownik y , to: $\frac{x+7}{y+7} = \frac{2}{3}$ i $\frac{x-11}{y-11} = \frac{1}{6}$; $x = 13$, $y = 23$; ułamek $= \frac{13}{23}$.

Sprawdzić zadanie!

Przykład 4. Za 7 kg towaru gorszego gatunku i 11 kg gatunku lepszego zapłaciłem 44 K. Gdybym był wziął 11 kg gorszego gatunku a 7 kg lepszego, byłbym zapłacił za gorszy gatunek o 6 K więcej niż za lepszy. Po ile K płaciłem za kg każdego z tych dwu gatunków?

Jeżeli szukane ceny naznaczymy x i y , otrzymamy: $7x + 11y = 44$ i $11x = 7y + 6$; $x = 2$ K, $y = 6$ K. Sprawdzić zadanie!

Przykład 5. Dwa kapitały, wynoszące razem 7 000 K, urosły wraz z odsetkami do 8 040 K. Jakie to były kapitały, jeżeli

jeden z nich pozostawał na 5% przez 4 lata, drugi na 4% przez 3 lata?

Jeżeli jeden kapitał jest x a drugi y , to $x+y=7000$.

Odsetki od tych kapitałów wynoszą: $\frac{x \cdot 4 \cdot 5}{100}$ i $\frac{y \cdot 4 \cdot 3}{100}$, kapitały

zaś z odsetkami: $x + \frac{20x}{100}$ i $y + \frac{12y}{100}$; a że suma tych dwu wyrażeń wynosi 8040 K, przeto:

$$x + \frac{20x}{100} + y + \frac{12y}{100} = 8040.$$

Z tych dwu równań otrzymamy: $x=2500$ K, $y=4500$ K.

a) Sprawdzić zadanie, b) rozwiązać je przy pomocy jednej niewiadomej!

Przykład 6. Złotnik ma dwa gatunki srebra. Jeżeli 5 g pierwszego gatunku stopi z 8 g drugiego, otrzyma srebro próby 820; jeżeli zaś stopi 3 g pierwszego z 10 g drugiego, otrzyma srebro próby 860. Obliczyć próbę srebra obu gatunków.

Jeżeli zawartość czystego srebra w 1-ym gatunku wynosi x gramów a w drugim y gramów, to oba gatunki srebra zawierają $5x+8y$ gramów czystego srebra; a że stop ma 13 gramów próby 820 czyli $13 \cdot 0 \cdot 820^1)$ g czystego srebra, przeto $5x+8y=13 \cdot 0 \cdot 82$. Podobnie otrzymamy dla drugiego aliażu: $3x+10y=13 \cdot 0 \cdot 86$, a z obu tych równań obliczymy: $x=0 \cdot 66$, $y=0 \cdot 92$. Złotnik ma przeto srebro próby 660 i 920.

Przykład 7. Woda, dopływając dwiema rurami, napełni pewien zbiornik w 4 godzinach. W jakim czasie napełni wodą ten zbiornik każda rura z osobna, jeżeli w 5 godzinach dopływa jedną rurą tyle wody do zbiornika, ile drugą w 3 godzinach?

Jedna rura napełni zbiornik wodą w x godz., druga w y godz.; w godzinie wypełni pierwsza rura x -tą część zbiornika, druga y -tą część, obie $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ zbiornika. Ponieważ obie rury, razem otwarte, wypełnią w godzinie $\frac{1}{4}$ zbiornika, przeto: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$, a ponieważ ilości wody, dostarczonej w godzinie

¹⁾ W 1000 g jest czystego srebra 820 g, w 1 g ... 0.820 g.

przez te 2 rury, tworzą stosunek $\frac{1}{5} : \frac{1}{3}$ czyli 3:5, zatem: $\frac{1}{x} : \frac{1}{y} = 3:5$. Otrzymujemy więc 2 równania: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ i $\frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 0$, z których obliczymy: $x = 10\frac{2}{3}$ godz., $y = 6\frac{2}{3}$ godz.

Przykład 8. Z dwu miejsc, oddalonych od siebie o 45 km, wyszli równocześnie dwaj posłańcy w tym samym kierunku. Ile km przebywał każdy z nich w godzinie, jeżeli spotkali się po 18 godzinach, a drogi, przebyte przez nich w każdej godzinie, tworzyły stosunek 9:4?

Jeżeli jeden posłaniec przebywał w godzinie x km, drugi y km, to $18x - 18y = 45$ i $x:y = 9:4$. Z tych dwu równań znajdziemy: $x = 4\frac{1}{2}$ km, $y = 2$ km.

Przykład 9. Jeden bok trójkąta, którego obwód wynosi 48 dm, jest o 5 dm mniejszy od drugiego a o 7 dm od trzeciego. Obliczyć boki trójkąta.

Jeżeli najmniejszy bok ma x dm, drugi y dm, trzeci z dm, to: $x + 5 = y$, $x + 7 = z$, $x + y + z = 48$; $x = 12$ dm, $y = 17$ dm, $z = 19$ dm.

Zadania.

1. Suma dwu liczb wynosi 56. Jakie to są liczby, jeżeli jedna z nich jest trzy razy większa niż druga? 14 i 42.

2. Znaleźć dwie liczby, których suma równa się 100 a różnica 30. 65 i 35.

3. Połowa sumy dwu liczb wynosi 14 a podwójna ich różnica 12. Jakie to liczby? 17 i 11.

4. Dwie liczby, różniące się między sobą o 8, tworzą stosunek 3:4. Jakie to liczby? 24 i 32.

5. Dwie liczby tworzą stosunek 4:5; jeżeli zaś każdą z nich powiększymy o 8, utworzą stosunek 5:6. Znaleźć te liczby. 32 i 40.

6. Dwie liczby tworzą stosunek 4:5. Jeżeli do mniejszej dodam 12 a od większej odejmę 12, otrzymam stosunek odwrotny. Jakie to liczby? 48 i 60.

7. Jeżeli do 5 dodam jedną liczbę a do 8 drugą, otrzymam dwie sumy, które tworzą stosunek 2:3; jeżeli zaś pierwszą liczbę odejmę od 5 a drugą od 8, to różnice utworzą stosunek 1:2. Jakie to liczby? 3 i 4.

8. Jedną liczbą jest o 10 mniejsza aniżeli potrójna druga, suma zaś tych dwu liczb tworzy z ich różnicą stosunek 11:3. Jakie to liczby? 14 i 8.

9. Znaleźć dwie liczby, których suma i iloraz wynoszą po 9. 8·1 i 0·9.

10. Jeżeli pewną liczbę powiększymy o 5, otrzymamy połowę drugiej liczby; jeżeli zaś drugą zwiększymy o 10, otrzymamy 4-krotność pierwszej. Co to za liczby? 10 i 30.

11. Jeżeli pewną liczbę podzielę przez 6 i do ilorazu dodam drugą liczbę, otrzymam sumę 15; jeżeli zaś pierwszą liczbę podzielę przez 14 a drugą przez 2, otrzymam jako sumę ilorazów liczbę o jednostkę mniejszą aniżeli druga liczba. Jakie to są liczby? 42 i 8.

12. Pewna liczba jest 3 razy tak wielka, jak 5-ta część drugiej, druga zaś jest o 5 mniejsza aniżeli podwójna pierwsza. Znaleźć te liczby. 15 i 25.

13. Jeżeli jedną liczbę podzielę przez drugą, otrzymam iloraz 5 i resztę 5; jeżeli zaś podzielę pierwszą z nich, zwiększoną o 9, przez drugą, zwiększoną o jednostkę, otrzymam iloraz 6. Jakie to liczby? 45 i 8.

14. Dwie liczby różnią się między sobą o 1. Jeżeli większą z nich podzielę przez 5 a mniejszą przez 6, otrzymam ilorazy, różniące się między sobą o 1. Jakie to liczby? 25 i 24.

15. Suma dwu liczb wynosi 66; jeżeli większą z nich podzielimy przez mniejszą, otrzymamy iloraz 8 i resztę 3. Jakie to liczby? 59 i 7.

16. Liczbę 87 rozłożyć na takie dwa składniki, aby większy z nich, podzielony przez mniejszy, dał iloraz 3 i resztę 3. 66 i 21.

17. Liczbę 52 rozłożyć na takie dwa składniki, aby 5-ta część jednego składnika była równa 8-ej części drugiego. 20 i 32.

18. Mianownik pewnego ułamka jest o 17 większy aniżeli licznik; jeżeli do licznika i do mianownika dodamy po 14, otrzymamy ułamek $\frac{1}{2}$. Jaki to ułamek? $\frac{3}{20}$.

19. Jeżeli od licznika pewnego ułamka odejmę 1, otrzymam $\frac{1}{4}$, jeżeli zaś do jego mianownika dodam 1, otrzymam $\frac{1}{4}$. Jaki to ułamek? $\frac{1}{16}$.

20. Jeżeli do licznika pewnego ułamka dodam 1, otrzy-

mam $\frac{1}{2}$, jeżeli zaś do mianownika dodam 1, otrzymam $\frac{1}{3}$.
Jaki to ułamek? $\frac{3}{8}$

21. Powiększając tak licznik jak i mianownik pewnego ułamka o 5, otrzymam $\frac{5}{7}$, pomniejszając zaś je kolejno o 3, otrzymam $\frac{1}{3}$. Jaki to ułamek? $\frac{5}{9}$

22. Jeżeli licznik pewnego ułamka pomnożę przez 2 a do mianownika dodam 2, otrzymam $\frac{1}{2}$; jeżeli zaś mianownik tego ułamka pomnożę przez 2 a do licznika dodam 2, otrzymam $\frac{1}{4}$.
Jaki to ułamek? $\frac{3}{10}$

23. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 9; jeżeli od tej liczby odejmę liczbę tę samą, odwrotnie napisaną, otrzymam 45. Jaka to liczba? $x + y = 9$, $(10y + x) - (10x + y) = 45$. 72.

24. Jeżeli do liczby dwucyfrowej dodamy 4 krotność jej jednostek, otrzymamy 70; jeżeli zaś od niej odejmiemy 36, otrzymamy liczbę pierwotną, odwrotnie napisaną. Jaka to liczba? 62.

25. Przed 7 laty była jedna osoba 4 razy starsza niż druga, a po 7 latach będzie od niej tylko 2 razy starsza. Ile lat ma każda z tych dwu osób? 35 i 14.

26. Osoba A ma dzisiaj 3 razy tyle lat, co B, a po 10 latach będzie miała tylko 2 razy tyle lat, co B. Ile lat ma osoba A, a ile B? 30 i 10.

27. Przed 3 laty tworzyły lata dwu chłopców stosunek 3:4, a przed rokiem stosunek 4:5. Ile lat ma każdy chłopiec? 9 i 11.

28. Dwaj bracia mają razem 42 lat. Ile lat ma każdy z nich, jeżeli przed 10 laty był jeden z nich 10 razy starszy od drugiego? 30 i 12.

29. Ojciec ma 2 razy tyle lat, co jego dwaj synowie. Przed 2 laty miał ojciec 4 razy tyle lat, co starszy syn, a przed 4 laty 6 razy tyle, co młodszy. Ile lat ma ojciec, a ile każdy syn?

I-szy syn x lat, 2-gi y lat, ojciec $2(x + y)$ lat. 58, 16 i 13.

30. Dziewczynka zapytana, ile ma rodzeństwa, odpowiada: »Mam tylu braci, ile siostr«; brat jej zaś dodaje: »A ja mam dwa razy tyle siostr, co braci«. Ilu chłopców i ile dziewcząt było w tej rodzinie? 3 i 4.

31. Dwie osoby mają razem 250 K; gdyby jedna z nich

dała drugiej 25 K, miałyby równą ilość koron. Ile K ma każda z nich? 150 i 100.

32. A rzekł do B: »Daj mi 4 K, a będę miał tyle K, co ty«; B na to: »Daj mi 5 K, a będę miał 2 razy tyle K, co ty«. Ile K miał A, a ile B? 23 i 31.

33. A rzekł do B: »Gdybyś mi dał $\frac{3}{4}$ swoich pieniędzy, miałbym 100 K«; B na to: »A jabym miał 100 K, gdybyś mi dał tylko połowę swoich pieniędzy«. Ile K miał A, a ile B? 40 i 80.

34. Przekupka sprzedawała kopę jabłek dwojakiemu gatunkowi za 2 K 14 h; za jeden gatunek brała po 3 h, a za drugi po 4 h za sztukę. Ile sprzedawała jabłek tańszych, a ile droższych? 26 i 34.

35. Kupiec sprzedał 8 m tańszego sukna i 12 m droższego za 123·2 K, drugim razem sprzedał 8 m droższego i 12 m tańszego za 116·8 K. Po ile K sprzedawał metr każdego gatunku? 5·2 i 6·8.

36. Kupiłem 5 l wina w dwu gatunkach: jedno po 1·5 K, drugie po 2·2 K za litr i zapłaciłem za nie 9·32 K. Ile kupiłem litrów wina każdego gatunku? 2·4 i 2·6.

37. Za 8 kg kawy i 15 kg cukru zapłaciłem 33·2 K, a za 5 kg kawy i 9 kg cukru tego samego gatunku 20·45 K. Po ile płaciłem kawę, a po ile cukier? 2·65 K i 0·8 K za kg.

38. Dałem służącemu 44·6 K, aby kupił 4 kg cukru i 9 kg kawy; on jednak kupił 9 kg cukru i 4 kg kawy i przyniósł resztę 19 K. Po ile płacił cukier, a po ile kawę? 0·8 K i 4·6 K za kg.

39. Na podwórzu jest dwa razy tyle kur, co w kojcu; gdyby 5 kur wyszło z kojca, byłoby na podwórzu 3 razy tyle kur, co w kojcu. Ile kur jest w kojcu, a ile na podwórzu? 20 i 40.

40. W dwu pokojach znajduje się 30 osób. Gdyby 6 osób przeszło z jednego pokoju do drugiego, byłoby w drugim 2 razy tyle osób, co w pierwszym. Ile osób jest w każdym pokoju? 16 i 14.

41. W towarzystwie, liczącem 88 osób, tworzyła liczba mężczyzn z liczbą kobiet stosunek 5:6. Ilu było mężczyzn, a ile kobiet? 40 i 48.

42. W dwu klasach było z początkiem roku szkolnego 80 uczniów. Gdy w ciągu roku przybyło do jednej klasy 2 uczniów, a z drugiej wystąpiło 10, była liczba uczniów w obu klasach ta sama. Ilu uczniów było w każdej klasie na początku roku szkolnego? 34 i 46.

43. W ogrodzie były jabłonie i śliwy: śliw 46 więcej, niż jabłoni. W zimie zmarzło 7 jabłoni i 4-ta część śliw, wskutek czego pozostało tylko 80 drzew. Ile jabłoni, a ile śliw było przed zimą? 30 i 76.

44. W 6 dniach zarobiło 10 mężczyzn i tyle kobiet 252 K; innym razem zarobiło 4 mężczyzn i 8 kobiet w 5 dniach 118 K. Jaki był dzienny zarobek mężczyzny, a jaki kobiety? 2·5 K i 1·7 K.

45. Dwaj robotnicy otrzymali za 10 dni pracy 110 K. Jaki był dzienny zarobek każdego z nich, jeżeli jeden zarabiał w 5 dniach tyle, ile drugi w 6 dniach?

$$10x + 10y = 110; 5x = 6y. \quad 6 \text{ K i } 5 \text{ K.}$$

46. Kupiec ma dwie beczki wina. Gdyby z pierwszej odlał 40 l a z drugiej 80 l, pozostałaby w obu beczkach równa ilość wina; gdyby zaś odlał z pierwszej beczki 80 l a z drugiej 40 l, zostałoby w drugiej 2 razy tyle wina, co w pierwszej. Ile l wina jest w każdej beczce? 160 i 200.

47. Dwa kapitały, wynoszące razem 6 000 K, przyniosły w roku 275 K odsetek. Jakie to były kapitały, jeżeli jeden z nich był oddany na 4% a drugi na 5%? 2 500 K i 3 500 K.

48. Dwa kapitały, z których jeden był o 1 020 K większy od drugiego, przyniosły w roku równe odsetki. Jakie to były kapitały, jeżeli większy z nich pozostawał na $3\frac{1}{2}\%$ a mniejszy na 5%? 3 400 K i 2 380 K.

49. Osoba A umieściła swój kapitał na 4%, osoba zaś B, mająca 240 K mniej aniżeli A, na 5%. Ile K posiada osoba A a ile osoba B, jeżeli roczne odsetki obu kapitałów są sobie równe? 1 200 K i 960 K.

50. Pewna osoba włożyła w dwa przedsiębiorstwa 70 000 K i zarobiła na jednym z nich $4\frac{1}{2}\%$, na drugim $5\frac{1}{2}\%$. Ile K włożyła ta osoba w jedno, a ile w drugie przedsiębiorstwo, jeżeli

zysk z pierwszego przedsiębiorstwa był o 150 K większy aniżeli z drugiego? 40 000 K i 30 000 K.

51. Dwie osoby A i B mają razem 6 650 K. Gdyby osoba A miała 300 K mniej, a B 300 K więcej, aniżeli posiadają, to majątek osoby B byłby 90-tym % majątku osoby A. Ile K posiada każda z tych dwu osób? A 3 800 K, B 2 850 K.

52. Gdyby osoba A wydała ze swoich pieniędzy 12%, miałyby o 100 K mniej niż B; gdyby zaś A dołożyła do tego, co ma, 15% swoich pieniędzy, miałyby o 440 K więcej niż B. Ile K ma A a ile B? 2 000 K i 1 860 K.

53. Oddając 1 000 K na $x\%$ a 1 200 K na $y\%$, otrzymam 100 K rocznych odsetek; oddając zaś pierwszą sumę na $y\%$ a drugą na $x\%$, otrzymam 98 K rocznych odsetek. Obliczyć te procenta. $x=4\%$, $y=5\%$

54. Roczne odsetki pewnego kapitału wynoszą 126 K; gdyby procent podwyższono o $\frac{1}{2}$, wynosiłyby roczne odsetki 21 K więcej. Obliczyć kapitał i procent. 4 200 K i 3%.

55. Kapitał, oddany na 5%, wzrósł po pewnym czasie do 750 K; ten sam kapitał, oddany na 6%, wzrósłby w tym samym czasie do sumy 800 K. Obliczyć kapitał i czas. 500 K i 10 lat.

56. Jeżeli zmieszam 3 l wina jednego gatunku z 7 l wina drugiego gatunku, otrzymam wino po 4 K za litr; jeżeli zaś zmieszam 7 l pierwszego wina z 3 l drugiego, wypadnie litr po 4·8 K. Ile K kosztuje litr wina każdego gatunku? 5·4 i 3·4.

57. Kupiec ma dwa gatunki herbaty: po 15 K i po 17·5 K za kg; ile kg ma wziąć z każdego gatunku, aby otrzymać 20 kg po 16 K? 12 i 8.

58. Mamy dwa gatunki wina: po 80 K i po 96 K za hl. Ile hl trzeba wziąć z każdego gatunku, aby otrzymać 10 hl po 84 K? 7·5 i 2·5.

59. W jakim stosunku trzeba mieszać spirytus 50-cio i 70-cio procentowy, aby otrzymać 40 l spirytusu 64-ro procentowego? 12 l i 28 l.

→ 60. Jeżeli zmieszam 2 l lepszego wina z 5 l gorszego, otrzymam wino po $2\frac{1}{2}$ K za litr; jeżeli zaś zmieszam 4 l le-

pszego z 3 l gorszego, otrzymam wino po 3 K za litr. Obliczyć cenę litra obu gatunków wina. 3·75 K i 2 K.

61. Woda morska zawiera w sobie 5% soli. Ile kg wody morskiej należy zmieszać z czystą wodą, aby otrzymać 120 kg wody, zawierającej 2% soli? 48.

62. Mam złoto próby 820 i próby 950. Po ile g muszę wziąć z każdego gatunku złota, aby otrzymać 117 g złota próby 870? 72 i 45.

63. Ze złota próby 650 i próby 900 ma złotnik otrzymać 10 kg złota próby 800; ile kg ma wziąć z obu gatunków? 4 i 6.

64. Złotnik ma zrobić srebrny serwis, ważący 6 kg, próby 750; posiada jednak tylko srebro próby 840 i 540. Ile kg ma wziąć z każdego srebra? $4\frac{1}{2}$ i $1\frac{1}{2}$.

65. Ile potrzeba stopić czystego srebra i srebra próby 800, aby otrzymać $8\frac{3}{4}$ kg srebra próby 920? $5\frac{1}{4}$ kg i $3\frac{1}{2}$ kg.

66. Głos, rozchodząc się w kierunku wiatru, przebył 336 m w sekundzie, idąc zaś naprzeciw wiatru, 330 m w sekundzie. Obliczyć chyżość głosu i wiatru. 333 m i 3 m.

67. Z dwu posłańców, wychodzących równocześnie z jednego miejsca w przeciwnych kierunkach, jeden przebywa dziennie o 5 km więcej aniżeli drugi. Jaką drogę przebywa dziennie każdy z nich, jeżeli po 8 dniach są od siebie oddaleni o 680 km? 45 km i 40 km.

68. Jedno ciało przebywa w 5 godzinach 20 km więcej aniżeli drugie. Jaką drogę przebywa każde z nich w godzinie, jeżeli ich prędkości tworzą stosunek 3:2? 12 km i 8 km.

69. Dwa ciała wychodzą równocześnie z jednego miejsca, poruszając się ruchem jednostajnym. Gdyby szły w tym samym kierunku, byłyby oddalone od siebie po 10 sekundach o 10 m; gdyby zaś poruszały się w przeciwnych kierunkach, wynosiłaby ich odległość po tym samym czasie 60 m. Z jaką prędkością poruszają się te ciała? $3\frac{1}{2}$ m i $2\frac{1}{2}$ m.

70. Z dwóch dworców kolei żelaznej, oddalonych od siebie o 120 km, wyjeżdżają równocześnie dwa pociągi w tym samym kierunku i po $4\frac{1}{2}$ godzinach jeden dopędza drugi. Gdyby te pociągi zdążyły naprzeciw siebie, spotkałyby się już

po godzinie i 20 minutach. Z jaką prędkością jadą te pociągi? $58\frac{1}{3}$ km i $31\frac{2}{3}$ km w godzinie.

71. Dwa pociągi kolei żelaznej, oddalone od siebie o 108 km, spotykają się, pędząc ku sobie, po 40 minutach. Gdyby jeden pociąg wyszedł ze stacji o 10 minut wcześniej aniżeli drugi, spotkałby go po 45 minutach. Ile km przebywa każdy z tych pociągów w minucie? Każdy po 135 km.

72. Z dwu miast, oddalonych od siebie o 54 km, wychodzą naprzeciw siebie dwaj podróżni. Gdyby jeden z nich wyszedł o 3 godziny wcześniej niż drugi, spotkałby go po 10 godzinach; gdyby zaś wyszedł o 3 godziny później niż drugi, spotkałby go po 8 godzinach. Ile km przebywa każdy z nich w godzinie? 4 i 2.

73. W dwu beczkach jest 351 l wina; jeżeli z jednej wezmę 6-tą część jej zawartości a z drugiej 3-cią część, pozostanie w obu beczkach równa ilość wina. Ile l wina jest w każdej beczce? 156 i 195.

74. Staw o pojemności $26\,000\text{ m}^3$ może być napełniony wodą dwoma spustami. Jeżeli jednym spustem dopływa woda przez 4 godziny a drugim przez 6 godzin, napełni się staw wodą po brzegi; jeżeli zaś dopływa woda jednym spustem przez kwadrans a drugim przez 2 godziny, będzie tylko 4-ta część stawu napełniona wodą. Ile m^3 wody dopływa w godzinie każdym spustem? 2000 i 3000.

75. Do zbiornika, o pojemności 450 m^3 , może dopływać woda dwiema rurami. Jeżeli pierwszą rurą dopływać będzie woda przez 3 minuty a drugą przez minutę, będzie w zbiorniku 40 m^3 wody; jeżeli zaś pierwsza rura będzie otwarta przez minutę a druga przez 7 minut, będzie w zbiorniku 60 m^3 wody. Ile m^3 wody dopływa w minucie każdą rurą i w jakim czasie napełni się cały zbiornik, jeżeli obie rury będą otwarte? 11 m^3 i 7 m^3 , 25 minut.

76. Dwaj murarze mają wystawić mur. Pracując razem, potrzebowaliby do tego 12 dni; jeżeli zaś jeden z nich robić będzie przez 2 a drugi przez 3 dni, wystawią tylko 5-tą

część muru. W ilu dniach wystawiłby ten mur każdy murarz z osobna? 20 i 30.

77. Dwaj robotnicy wykonaliby pewną robotę w $8\frac{1}{4}$ dniach. Po dwu dniach pracy odszedł jeden robotnik, a po następnych dwu dniach drugi; obaj wykonali trzecią część roboty. W ilu dniach ukończyłby całą robotę każdy z tych dwu robotników? 15 i 20.

78. Dwie rury napełnią wodą pewien zbiornik w 24 minutach; to samo nastąpi, jeżeli jedną z nich dopływać będzie woda przez 20 minut a drugą przez 27 minut. W jakim czasie wypełniłaby zbiornik wodą każda rura z osobna? 42 min. i 56 min.

79. A i B mają ukończyć pewną robotę w 15 dniach. Po 8 dniach pracy odchodzi B, wskutek czego potrzebuje A jeszcze 12 dni do wykończenia tej roboty. W ilu dniach zrobiłby tę robotę A, a w ilu B? 25 $\frac{1}{2}$ i 36.

80. Wysokość trójkąta dzieli podstawę 183 dm długą na dwa odcinki, różniące się między sobą o 57 dm. Jakie to są odcinki? 120 dm i 63 dm.

81. Jeden kąt trójkąta wynosi $61^{\circ}27'34''$, różnica zaś dwu innych kątów $34^{\circ}24'50''$. Obliczyć te kąty. $76^{\circ}28'38''$ i $42^{\circ}3'48''$.

82. Kąt zewnętrzny trójkąta wynosi $103^{\circ}35'$, różnica zaś dwu kątów wewnętrznych, temu kątowi przeciwległych, $9^{\circ}5'$. Obliczyć kąty trójkąta. $47^{\circ}15'$, $56^{\circ}20'$ i $76^{\circ}25'$.

83. Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 27 dm, podstawa zaś jest o 6 dm krótsza od ramienia. Obliczyć boki trójkąta. 11 dm i 5 dm.

84. Jeden bok prostokąta jest 2 razy tak wielki, jak bok przyległy, obwód zaś ma 30 dm długości. Obliczyć boki tego prostokąta. 5 dm i 10 dm.

85. Obwód prostokąta wynosi 16 m; jeżeli podstawę prostokąta podwoimy a wysokość potroimy, zwiększymy jego obwód o 22 m. Obliczyć boki prostokąta. 3 m i 5 m.

86. Jeden bok prostokąta wynosi 4 dm, suma zaś drugiego boku i przekątnej 8 dm. Obliczyć drugi bok i przekątnię. 3 dm i 5 dm.

87. Jeden odcinek jest o decymetr dłuższy aniżeli drugi; kwadrat zaś, nakreślony na pierwszym odcinku, jest o 27 dm^2 większy aniżeli kwadrat, nakreślony na drugim odcinku. Wyznaczyć te odcinki. 14 dm i 13 dm.

88. Wyznaczyć takie trzy liczby, aby suma 1-ej i 2-ej wynosiła 12, drugiej i trzeciej 6 a pierwszej i trzeciej 10. 8, 4 i 2.

89. Wyznaczyć takie trzy liczby, aby suma dwu, dodana do podwójnej trzeciej, dała kolejno liczby: 50, 60 i 70. 25, 15 i 5.

90. Liczbę 257 rozłożyć na takie trzy składniki, aby jeden z nich, powiększony o 3, równał się potrójnemu drugiemu i zarazem był równy trzeciej części trzeciego składnika. 57, 20 i 180.

91. Suma trzech liczb wynosi 80. Jeżeli jedną z nich podzielę przez drugą, a następnie drugą przez trzecią, otrzymam w obu razach iloraz 3 i resztę 3. Co to za liczby? 57, 18 i 5.

92. Liczbę 96 rozłożyć na takie trzy składniki, aby jeden z nich, podzielony przez drugi, dał iloraz 2 a resztę 3 i aby drugi, podzielony przez 3, dał iloraz 4 a resztę 5. 61, 29 i 6.

93. Suma trzech liczb wynosi 92. Jeżeli jedną z nich podzielę przez drugą, otrzymam iloraz 5 i resztę 3; jeżeli zaś trzecią podzielę przez drugą, otrzymam ten sam iloraz, co poprzednio i resztę 1. Co to za liczby? 43, 8 i 41.

94. Trzy liczby tworzą stosunek $1:2:3$; jeżeli sumę tych liczb podzielę przez 4, otrzymam iloraz 21. Jakie to liczby? 14, 28 i 42.

95. Suma cyfr liczby 3 cyfrowej wynosi 10, suma zaś cyfr setek i dziesiątek jest o 4 większa niż cyfra jednostek. Jeżeli od tej liczby odejmę 198, następstwo cyfr się odwróci. Jaka to liczba? 523.

96. Trzy osoby rozdzieliły między siebie 315 K w ten sposób, że osoba trzecia wzięła 5 razy tyle, co pierwsza, a 2 razy tyle, co pierwsza i druga razem. Ile K otrzymała każda osoba? 42, 63 i 210.

97. Trzej wspólnicy włożyli w przedsiębiorstwo 6000 K. Jeden z nich włożył 3 razy tyle, co drugi, trzeci zaś połowę

tęgo, co pierwszy i drugi. Ile K włożył w to przedsiębiorstwo każdy z nich? 3000, 1000 i 2000.

98. Ojciec jest o 5 lat starszy od matki, matka o 25 lat starsza od syna, wszyscy zaś troje mają razem 91 lat. Ile lat ma ojciec, ile matka a ile syn? 42, 37 i 12.

99. Między 3 osoby rozdzielono pewną kwotę w ten sposób, że osoba B otrzymała o 20 K mniej niż A, a o 20 K więcej niż C; cała kwota była o 100 K większa od tej, którą otrzymała osoba A. Ile K otrzymała każda osoba? 80, 60 i 40.

100. Trzy kapitały, wynoszące razem 20 000 K, przyniosły 730 K rocznych odsetek. Jeden z nich był oddany na 3%, drugi na $3\frac{1}{2}\%$ a trzeci na 4%. Odsetki drugiego kapitału były o 90 K większe niż pierwszego. Obliczyć te kapitały.

4000 K, 6000 K i 10 000 K.

101. Zbiornik można napełnić trzema rurami: pierwszą i drugą w 12 minutach, drugą i trzecią w 4 minutach a trzecią i pierwszą w $4\frac{2}{3}$ minutach. W ilu minutach napełni zbiornik każda rura z osobna? 30, 20 i 5.

102. Do uporządkowania ogrodu zgłosiło się trzech ogrodników. A i B uporządkowaliby go w 12 dniach, A i C w 15 dniach, zaś B i C w 20 dniach. W ilu dniach uporządkowałby ten ogród każdy ogrodnik z osobna? 20, 30 i 60.

103. Trzej robotnicy A, B i C wykonaliby pewną robotę w 3 dniach, A i B w 4 dniach, B i C w 5 dniach. W ilu dniach ukończyłby tę robotę każdy z nich? 7 $\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{3}$ i 12.

104. Kąty trójkąta tworzą stosunek 3:4:5. Obliczyć te kąty. 45°, 60° i 75°.

105. Jeden kąt trójkąta jest o 10° mniejszy od drugiego, a ten o 7° większy niż trzeciego. Co to za kąty?

55°40', 65°40' i 58°40'.

106. Suma pierwszego i drugiego boku trójkąta wynosi 12 dm, drugiego i trzeciego 15 dm, trzeciego i pierwszego 17 dm. Obliczyć te boki. 7 dm, 5 dm i 10 dm.

107. Najkrótszy bok trójkąta jest o 20 dm mniejszy od drugiego a o 35 dm od trzeciego; obwód zaś trójkąta wynosi 130 dm. Obliczyć boki trójkąta. 25 dm, 45 dm i 60 dm.

ROZDZIAŁ VIII.

Podnoszenie liczb do sześciianu i wyciąganie sześciennego pierwiastka z liczb.

§ 1.

Podnoszenie liczb do sześciianu.

1. Ponieważ $x^3 = x^2 \cdot x$, przeto także

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

podobnie: $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = \\ = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

Zestawiając te dwa wzory, otrzymamy:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Sześciian dwumianu składa się: 1^o) z sześciianu pierwszego wyrazu; 2^o) z potrójnego iloczynu kwadratu pierwszego wyrazu przez drugi wyraz; 3^o) z potrójnego iloczynu pierwszego wyrazu przez kwadrat wyrazu drugiego i 4^o) z sześciianu wyrazu drugiego.

2. Na podstawie tego prawa znajdziemy: $26^3 = (20+6)^3 = \\ = 20^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 6 + 3 \cdot 20 \cdot 6^2 + 6^3$ albo:

$26^3 =$	alboteż, po	$26^3 =$
$20^3 = 8\ 000$	opuszczeniu	$2^3 = 8$
$3 \cdot 20^2 \cdot 6 = 7\ 200$	zera	$3 \cdot 2^2 \cdot 6 = 72$
$3 \cdot 20 \cdot 6^2 = 2\ 160$	w dziesiątkach:	$3 \cdot 2 \cdot 6^2 = 216$
$6^3 = 216$		$6^3 = 216$
17576		17576

Jeżeli liczba jest więcej niż dwucyfrowa np. 421, to wyrażając ją jako sumę dwu składników, z których jeden jest cyfrą jednostek, otrzymamy: $421^3 = (420+1)^3 = 420^3 + 3 \cdot 420^2 \cdot 1 + \\ + 3 \cdot 420 \cdot 1^2 + 1^3$; a ponieważ $420^3 = (400+20)^3 = 400^3 + \\ + 3 \cdot 400^2 \cdot 20 + 3 \cdot 400 \cdot 20^2 + 20^3$, przeto

$421^3 =$		albo,	$421^3 =$
$400^3 =$	64 000 000	po opuszcze-	$4^3 = 64$
$3 \cdot 400^2 \cdot 20 =$	9 600 000	niu zer	$3 \cdot 4^2 \cdot 2 = 96$
$3 \cdot 400 \cdot 20^2 =$	480 000	w setkach	$3 \cdot 4 \cdot 2^3 = 48$
$20^3 =$	8 000	i dzie-	$2^3 = 8$
$3 \cdot 420^2 \cdot 1 =$	529 200	siątkach:	$3 \cdot 42^2 \cdot 1 = 5292$
$3 \cdot 420 \cdot 1^2 =$	1 260		$3 \cdot 42 \cdot 1^2 = 126$
$1^3 =$	1		$1^3 = 1$
	<u>74 618 461</u>		<u>74618461</u>

Sześcian liczby szczególnej obliczamy, tworząc sześcian najwyższej cyfry, z każdej zaś następnej cyfry 3 części, a mianowicie: 1^o) potrójny iloczyn kwadratu poprzedzającej liczby (nie cyfry!) przez tę cyfrę, 2^o) potrójny iloczyn poprzedzającej liczby przez kwadrat tej cyfry i 3^o) sześcian tej cyfry. Tak otrzymane części składowe podpisujemy pod sobą, wysuwając każdą następną o jedno miejsce ku prawej stronie i dodajemy.

3. Ponieważ $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$, przeto:

Ułamek tak się podnosi do sześcianu, że się tak licznik jak i mianownik podnosi do sześcianu.

Jeżeli mamy podnieść do sześcianu liczbę dziesiętną, np. $5 \cdot 2^3$, to pisząc ją w kształcie ułamka zwyczajnego, otrzymamy:

$$5 \cdot 2^3 = \left(\frac{52}{10}\right)^3 = \frac{52^3}{1000} = \frac{140\,608}{1000} = 140 \cdot 608.$$

Liczbę dziesiętną podnosi się do sześcianu tak jak liczbę całkowitą, bez względu na kropkę dziesiętną, a w otrzymanym wyniku oddziela się trzy razy tyle miejsc na dziesiętne, ile ich było w liczbie dziesiętnej.

Zadania.

- $(a + c)^3 = ?$
- $(x - y)^3 = ?$
- $(2a + b)^3 = ?$
- $(b - 4c)^3 = ?$
- $(3a + 2b)^3 = ?$
- $(4x - 3y)^3 = ?$
- $(-2a + 3b)^3 = ?$
- $(-3a - 5b)^3 = ?$
- $(ax + by)^3 = ?$
- $(cx - dy)^3 = ?$

11. $(a b^2 x + a^2 b x)^3 = ?$ 12. $(3 a^2 b + 2 a b^2)^3 = ?$
 13. $(4 a^3 x^2 - 5 a^2 x^3)^3 = ?$ 14. $(-5 a^3 b^2 x + 3 a^2 b^3 x)^3 = ?$
 15. $(-a^2 b^2 x^2 - a^3 b^3 x^3)^3 = ?$

16. Obliczyć sześciany liczb: 1, 2, 3, 12 i zapamiętać je!

Podnieść do sześcianu następujące liczby:

17. a) 27, b) 48, c) 61, d) 85.
 18. a) 35, b) 54, c) 70, d) 90.
 19. a) 127, b) 241, c) 542, d) 758.
 20. a) 138, b) 233, c) 329, d) 483.
 21. a) 103, b) 250, c) 500, d) 809.
 22. a) 1 243, b) 3 215, c) 5 112, d) 6 221.
 23. a) 4 101, b) 1 023, c) 2 003, d) 3 100.
 24. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{5}{6}$, c) $\frac{3}{8}$, d) $\frac{7}{9}$.
 25. a) $\frac{11}{25}$, b) $\frac{13}{17}$, c) $\frac{19}{28}$, d) $\frac{27}{91}$.
 26. a) $\frac{111}{215}$, b) $\frac{253}{431}$, c) $\frac{205}{254}$, d) $\frac{310}{607}$.
 27. a) $1\frac{1}{2}$, b) $3\frac{1}{3}$, c) $5\frac{3}{4}$, d) $6\frac{5}{8}$.
 28. a) $1\frac{1}{8}$, b) $10\frac{3}{4}$, c) $2\frac{4}{11}$, d) $90\frac{7}{8}$.
 29. a) 3·2, b) 5·1, c) 7·6, d) 9·9.
 30. a) 0·15, b) 0·69, c) 0·77, d) 0·82.
 31. a) 0·012, b) 0·034, c) 0·065, d) 0·089.
 32. a) 5·43, b) 12·4, c) 35·6, d) 7·46.
 33. a) 4·06, b) 70·5, c) 0·317, d) 0·408.
 34. a) 3·245, b) 63·21, c) 141·5, d) 21·57.
 35. a) 2·042, b) 5·003, c) 2·401, d) 320·5.
 36. a) 0·5123, b) 0·03124, c) 0·02021, d) 0·00502.

37. Obliczyć objętość sześcianu, którego krawędź wynosi 20·3 dm.

38. Objętość sześcianu jest sumą objętości dwu innych sześcianów o krawędziach 15·4 dm i 10·4 dm. Znaleźć tę objętość.

39. Sześcian o krawędzi 21·5 cm obcięto tak, że krawędzie wynoszą tylko po 14·5 cm; o ile zmniejszyła się objętość sześcianu?

40. Promień kuli ma 213 m długości; jak wielka jest jej objętość?

§ 2.

Wyciąganie pierwiastka sześciennego z liczb.

1. Podnosząc np. 12 do potęgi trzeciej, otrzymujemy 1728, t. j. $12^3 = 1728$.

Naodwrot, gdybyśmy mieli wyznaczyć liczbę, któraby, podniesiona do trzeciej potęgi, dała 1728, to wyznaczenie takiej liczby nazywamy wyciąganiem pierwiastka trzeciego albo pierwiastka sześciennego z liczby 1728. Działanie to oznaczamy: $\sqrt[3]{1728} = 12$.

Wyciągać sześcienny pierwiastek z podanej liczby znaczy wynaleźć taką liczbę, której sześcian jest równy liczbie podanej.

2. Aby wyprowadzić, jak się wyciąga 3-ci pierwiastek z liczby, utwórzmy sześcian np. liczby 47.

$$\begin{array}{rcl} 47^3 & = & (40 + 7)^3 = \\ 40^3 & = & 64\,000 \\ 3 \cdot 40^2 \cdot 7 & = & 33\,600 \\ 3 \cdot 40 \cdot 7^2 & = & 5\,880 \\ 7^3 & = & 343 \\ & & \hline & & 103\,823 \end{array}$$

w powyższym przykładzie 103 823 albo dwu- albo też jedno- cyfrowa, jak np. $24^3 = 13\,824$, $12^3 = 1\,728$.

Dzieląc liczbę 103 823, począwszy od prawej strony, na grupy trzycyfrowe, otrzymamy tyle grup, ile cyfr miała zasada potęgowa (47), przyczem pierwsza grupa, liczona od lewej strony, może być trzycyfrowa, jak

$$\begin{array}{rcl} & \sqrt[3]{103\,823} & = 40 + 7 \\ 40^3 \dots & 64\,000 & \\ & 39\,823 : 3 \cdot 40^2 = 4\,800 & (64\,000), \text{ przeto jest on} \\ 3 \cdot 40^2 \cdot 7 \dots & 33\,600 & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} + \text{zawarty w pierwszej} \\ 3 \cdot 40 \cdot 7^2 \dots & 5\,880 & \text{grupie; aby więc wy-} \\ 7^3 \dots & 343 & \text{znaczyć cyfrę dziesiątek,} \\ & \hline & = \text{szukamy liczby, któraby} \end{array}$$

Ponieważ sześcian dziesiątki (4) ma po prawej stronie 3 zera (64 000), przeto jest on zawarty w pierwszej grupie; aby więc wyznaczyć cyfrę dziesiątek, szukamy liczby, któraby

podniesiona do sześcianu dała liczbę tej grupy t. j. 103 albo liczbę nieco mniejszą od 103. Taką liczbą jest 4, bo $4^3 = 64$. Odejmując 64 od 103 i dopisując do reszty drugą grupę albo,

ze względu na to, że 4 oznacza dziesiątki, 64 000 od podanej liczby 103 823, otrzymamy 39 823.

W liczbie 39 823 jest zawarty: 1^o) potrójny iloczyn kwadratu dziesiątek przez jednostki, 2^o) potrójny iloczyn dziesiątek przez kwadrat jednostek i 3^o) sześcian jednostek; dzieląc więc 39 823 przez $3 \cdot 40^2$ czyli 39 823: 4800 albo 39823:48, otrzymamy na iloraz 7 jednostek. Jeżeli utworzymy części składowe sześcianu, pochodzące od cyfry jednostek, a mianowicie: $3 \cdot 40^2 \cdot 7 + 3 \cdot 40 \cdot 7^2 + 7^3$ czyli: 33 600 + 5 880 + 343 i odejmiemy sumę tych 3 liczb od 39 823, otrzymamy resztę zero.

Opuszczając przy dziesiątce (4) zera, otrzymamy wzór działania:

$$\sqrt[3]{103\,823} = 47$$

$$4^3 \dots 64$$

$$398\,23 : 3 \cdot 4^2 = 48$$

$$3 \cdot 4^2 \cdot 7 \dots 336$$

$$3 \cdot 4 \cdot 7^2 \dots 588$$

$$7^3 \dots 343$$

=

+

z którego odczytujemy:
Aby po wyznaczeniu cyfry dziesiątek znaleźć cyfrę jednostek, odkreśla się w reszcie 39 823 dwie najniższe cyfry a pozostałą liczbę 398 dzieli przez potrójny kwadrat cyfry dziesiątek ($3 \cdot 4^2 = 48$). Następnie tworzy się czę-

ści składowe sześcianu, pochodzące od cyfry jednostek, podpisuje się je pod sobą, występując o jedno miejsce na prawo, i odejmuje sumę tych składników od 39 823.

Podobnie postępujemy przy liczbach, które się składają z więcej niż dwu grup, np.

$$\sqrt[3]{42\,508\,549} = 349$$

$$3^3 \dots$$

$$27$$

$$155\,08 : 3 \cdot 3^2 = 27$$

$$3 \cdot 3^2 \cdot 4 \dots 108$$

$$3 \cdot 3 \cdot 4^2 \dots 144$$

$$4^3 \dots 64$$

+

$$32045\,49 : 3 \cdot 34^2 = 3468$$

$$3 \cdot 34^2 \cdot 9 \dots 31212$$

$$3 \cdot 34 \cdot 9^2 \dots 8262$$

$$9^3 \dots 729$$

+

=

przyczem należy nadmienić, że przy wyznaczaniu 3-ej, 4-tej itd. cyfry pierwiastka dzielimy resztę, po odkreśleniu dwu naj-

niższych cyfr, przez potrójny kwadrat liczby, utworzonej z wyznaczonych cyfr pierwiastka.

Aby wyciągnąć sześcienny pierwiastek z liczby, dzielimy ją od prawej strony na grupy trzy-cyfrowe. Następnie wyznaczamy taką liczbę, której sześcian równa się liczbie 1-ej grupy (liczonej od lewej strony) lub jest od niej nieco mniejszy; jestto pierwsza cyfra pierwiastka. Sześcian tej liczby odejmujemy od liczby 1-ej grupy, do reszty dopisujemy następną grupę, oddzielamy dwie najniższe cyfry, a pozostałą liczbę dzielimy przez potrójny kwadrat wyznaczonej cyfry pierwiastka. Liczba całkowita ilorazu jest następną cyfrą pierwiastka. Utworzywszy części składowe sześcianu, pochodzące od 2-ej cyfry pierwiastka, podpisujemy je pod sobą, występując o jedno miejsce na prawo, sumę zaś tych składników odejmujemy od powyższej liczby. Do reszty dopisujemy następną grupę, odkreślamy dwie najniższe cyfry i dzieląc pozostałą liczbę przez potrójny kwadrat liczby, utworzonej z wyznaczonych cyfr pierwiastka, postępujemy dalej podobnie jak poprzednio.

3. Ponieważ liczbę dziesiętną podnosi się do sześcianu tak jak liczbę całkowitą, przeto i nawzajem: z liczby dziesiętnej tak się wyciąga 3-ci pierwiastek jak z liczby całkowitej. Wszelako, dzieląc ją na grupy 3-cyfrowe, należy podział ten zaczynać od znaku dziesiętnego i iść ku lewej stronie w części całkowitej, a ku prawej w części dziesiętnej.

Np.	$\begin{array}{r} 3 \\ \sqrt[3]{8 \, 365 \, 427} = 20 \cdot 3 \\ 2^3 \dots \quad 8 \\ \hline 3 \, 65 : 3 \cdot 2^2 = 12 \\ 3 \cdot 2^2 \cdot 0 \dots \quad 0 \\ 3 \cdot 2 \cdot 0^2 \dots \quad 0 \\ 0^3 \dots \quad 0 \\ \hline 365427 : 3 \cdot 20^2 = 1200 \\ 3 \cdot 20^2 \cdot 3 \dots \quad 3600 \\ 3 \cdot 20 \cdot 3^2 \dots \quad 540 \\ 3^3 \dots \quad 27 \\ \hline \end{array}$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \div$
-----	--	--

Jeżeli przy wyciąganiu sześciennego pierwiastka pozostaje reszta, wówczas liczba pierwiastkowana nie jest zupełnym sześcianem liczby całkowitej lub ułamka skończonego. W tym przypadku oblicza się 3-ci pierwiastek na pewną ilość miejsc dziesiętnych. Np.

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{10 \cdot 000 \cdot 000} = 2.15 \\ 2^3 \dots 8 \\ \hline 20 \ 00 : 3 \cdot 2^2 = 12 \\ 3 \cdot 2^2 \cdot 1 \dots 12 \\ 3 \cdot 2 \cdot 1^2 \dots 6 \\ 1^3 \dots 1 \\ \hline 7390 \ 00 : 3 \cdot 21^2 = 1323 \\ 3 \cdot 21^2 \cdot 5 \dots 6615 \\ 3 \cdot 21 \cdot 5^2 \dots 1575 \\ 5^3 \dots 125 \\ \hline 61625 \end{array}$$

4. Jeżeli mamy wyznaczyć 3-ci pierwiastek z ułamka zwyczajnego np. $\sqrt[3]{\frac{64}{125}}$, to będzie nim ułamek $\frac{4}{5}$,

$$\text{gdyż } \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}; \text{ a że } 4 = \sqrt[3]{64}, 5 = \sqrt[3]{125}, \text{ przeto } \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}. \text{ Podobnie: } \sqrt[3]{2\frac{93}{125}} = \sqrt[3]{\frac{343}{125}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}.$$

Z ułamka zwyczajnego tak się wyciąga pierwiastek sześcienny, że wyciągamy go tak z licznika jak i z mianownika.

Jeżeli mianownik ułamka nie jest zupełnym sześcianem liczby całkowitej np. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$, wówczas przed rozpoczęciem rachunku sprowadzamy ułamek do takiej formy, aby jego mianownik był sześcianem liczby całkowitej albowiem zamieniamy go na ułamek dziesiętny.

A zatem:

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 9}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3} = \frac{2.62}{3} = 0.873,$$

$$\text{albo: } \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{0.666\ 666\ 667} = 0.873.$$

Zadania.

1. $\sqrt[3]{6859} = ?$
2. $\sqrt[3]{12167} = ?$
3. $\sqrt[3]{79507} = ?$
4. $\sqrt[3]{140608} = ?$
5. $\sqrt[3]{421875} = ?$
6. $\sqrt[3]{389017} = ?$
7. $\sqrt[3]{884736} = ?$
8. $\sqrt[3]{154854153} = ?$
9. $\sqrt[3]{54439939} = ?$
10. $\sqrt[3]{42508549} = ?$
11. $\sqrt[3]{763551944} = ?$
12. $\sqrt[3]{281011375} = ?$
13. $\sqrt[3]{731432701} = ?$
14. $\sqrt[3]{223648543} = ?$
15. $\sqrt[3]{481890304} = ?$
16. $\sqrt[3]{788889024} = ?$
17. $\sqrt[3]{0.001} = ?$
18. $\sqrt[3]{0.027} = ?$
19. $\sqrt[3]{0.000008} = ?$
20. $\sqrt[3]{0.216} = ?$
21. $\sqrt[3]{0.000125} = ?$
22. $\sqrt[3]{79.507} = ?$
23. $\sqrt[3]{0.042875} = ?$
24. $\sqrt[3]{636\ 056} = ?$
25. $\sqrt[3]{609.800192} = ?$
26. $\sqrt[3]{0.082312875} = ?$
27. $\sqrt[3]{1906.624} = ?$
28. $\sqrt[3]{2.449456192} = ?$
29. $\sqrt[3]{15419.656169} = ?$
30. $\sqrt[3]{\frac{27}{216}} = ?$
31. $\sqrt[3]{\frac{343}{2197}} = ?$
32. $\sqrt[3]{\frac{3375}{4096}} = ?$
33. $\sqrt[3]{\frac{729}{1331}} = ?$
34. $\sqrt[3]{\frac{79507}{2460375}} = ?$
35. $\sqrt[3]{\frac{12906}{9261}} = ?$
36. $\sqrt[3]{3\frac{10}{729}} = ?$
37. a) $\sqrt[3]{9\frac{298}{729}} = ?$ b) $\sqrt[3]{6\frac{74326}{9507}} = ?$
38. a) $\sqrt[3]{35} = ?$ b) $\sqrt[3]{8.539} = ?$ c) $\sqrt[3]{0.8037} = ?$ (2 m. dz.)
39. a) $\sqrt[3]{100} = ?$ b) $\sqrt[3]{0.72} = ?$ c) $\sqrt[3]{0.0125} = ?$ (3 m. dz.)
40. a) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = ?$ b) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = ?$ c) $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = ?$ (2 m. dz.)
41. a) $\sqrt[3]{1\frac{1}{3}} = ?$ b) $\sqrt[3]{3\frac{4}{5}} = ?$ c) $\sqrt[3]{7\frac{8}{9}} = ?$ (3 m. dz.)

42. Obliczyć krawędź sześcianu, którego objętość wynosi 29 791 m³.

43. Jaką krawędź musi mieć sześcian, aby jego objętość była tak wielka, jak objętość dwu sześcianów o krawędziach 1·5 dm i 2·5 dm? (2 m. dzies.).

ROZDZIAŁ IX.

Równania dwumienne stopnia drugiego i trzeciego.

Równanie, np. $2x^2 - 72 = 0$, w którym oprócz wyrazu, zawierającego kwadrat niewiadomej, występuje tylko wyraz wiadomy, nazywamy równaniem kwadratowym dwumiennem. Podobnie nazywamy równanie, np. $4x^3 = 500$, które składa się z wyrazu, zawierającego sześcian niewiadomej, i wyrazu wiadomego, równaniem dwumiennem trzeciego stopnia.

Przenosząc w równaniu $2x^2 - 72 = 0$ wyraz wiadomy na drugą stronę i dzieląc obie strony przez współczynnik niewiadomej, otrzymamy: $x^2 = 36$; stąd $x = \pm\sqrt{36}$ czyli $x = \pm 6$, gdyż $(\pm 6)^2 = 36$.

Podobnie obliczamy niewiadomą równania 3-go stopnia: $4x^3 = 500$, $x^3 = 125$; $x = 5$.

Zadania.

- | | |
|---|---|
| 1. $x^2 - 9 = 40$. | 2. $(x + 4)(x - 4) = 48$. |
| 3. $2x^2 + 0·5 = 13$. | 4. $121 : x^2 = 441$. |
| 5. $4x^2 = 1$. | 6. $7x^2 - 105903 = 0$. |
| 7. $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} = 2\frac{2}{3}$. | 8. $\frac{x-a}{x+a} = \frac{b-a}{b+x}$. |
| 9. $\sqrt{3x^2 - 26} = 7$. | 10. $2\sqrt{5x^2 + 16} = 3\sqrt{7x^2 - 12}$. |
| 11. $\frac{x^2}{2} - 2a^2 = \frac{b^2}{2} + 2ab$. | 12. $\frac{x^2}{4} + 2ab = a^2 + b^2$. |
| 13. $4x^2 + b^2 = 5b^2 - 4a^2$. | 14. $3(x^2 + a^2) = 7a^2$. |
| 15. $3a : x = x : 3b$. | 16. $a = \sqrt{x^2 - (\frac{1}{2}x)^2}$. |
| 17. $p = x^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. | 18. $p = \pi x^2$. |
| 19. $a = 4\pi x^2$. | 20. $c = 6\pi x^2$. |

21. $x^3 - 729 = 0$.

22. $5x^3 - 625 = 0$.

23. $27x^3 = 8$.

24. $3x^3 = \frac{8}{9}$.

25. $x^3 + 3a^2b + b^3 = a^3 + 3ab^2$.

26. $8x^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3$.

27. $v = \frac{4}{3}\pi x^3$.

28. $v = 2\pi x^3$.

29. $v = \frac{1}{3}\pi\sqrt{3}x^3$.

30. $v = \frac{1}{12}\sqrt{2}x^3$.

31. Wyznaczyć liczbę, której kwadrat wynosi 2·25. $\pm 1\cdot5$.

32. Znaleźć liczbę, która, pomnożona przez swą czwartą część, da iloczyn 156·25. ± 25 .

33. Jeżeli 81 podzielę przez pewną liczbę, otrzymam na iloraz tę samą liczbę. Jaka to liczba? ± 9 .

34. Jeżeli pewną liczbę powiększę o jej odwrotność, otrzymam tę samą liczbę pomnożoną przez 10. Jaka to liczba? $\pm \frac{1}{3}$.

35. Gdy pomnożę trzecią część pewnej liczby przez jej połowę, otrzymam 24. Co to za liczba? ± 12 .

36. Kupiłem pewną ilość jabłek, płacąc za każde tyle halerzy, ile ich kupiłem. Ile jabłek kupiłem, jeżeli zapłacił 1·69 K? 13.

37. W towarzystwie, złożonem z 2 razy tylu mężczyzn co kobiet, zebrano składkę 500 K. Każdy mężczyzna dał po tyle K, ilu było mężczyzn, a każda kobieta po tyle K, ile było kobiet. Ilu mężczyzn i ile kobiet było w tem towarzystwie? 20 i 10.

38. Jeżeli jeden bok kwadratu powiększymy o 3 m, a drugi pomniejszymy o 3 m, otrzymamy prostokąt o powierzchni 27 m². Jak wielki jest bok kwadratu? 6 m.

39. Pole kwadratu ma 288 cm²; ile cm ma przekątnia tego kwadratu? 24.

40. Podstawa prostokąta wynosi 54 dm, wysokość 24 dm; obliczyć bok kwadratu, który ma z tym prostokątem równe pole. 36 dm.

41. Kwadrat o powierzchni 128 m² zamienić na prostokąt, którego podstawa jest 2 razy tak długa jak wysokość. Obliczyć boki tego prostokąta. 8 m i 16 m.

42. Powierzchnia sześcianu wynosi 162·24 m²; obliczyć jego krawędź. 5·2 dm.

43. Powierzchnia koła wynosi 78·5 cm²; obliczyć promień ($\pi = 3\cdot14$). 5 cm.

44. Obliczyć promień walca równobocznego, którego powierzchnia wynosi $381\cdot51 \text{ dm}^2$ ($\pi=3\cdot14$). $4\cdot5 \text{ dm}$.

45. Powierzchnia stożka równobocznego wynosi $54\cdot2592 \text{ m}^2$; obliczyć promień podstawy ($\pi=3\cdot14$). $2\cdot4 \text{ m}$.

46. Powierzchnia kuli wynosi $28\cdot26 \text{ cm}^2$; obliczyć promień ($\pi=3\cdot14$). $1\cdot5 \text{ cm}$.

47. Obliczyć wysokość trójkąta równobocznego, którego bok $= a$. $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$.

48. Wysokość trójkąta równobocznego jest c ; znaleźć bok. $\frac{2}{3} c \sqrt{3}$.

49. Czwarta część objętości sześcianu wynosi 432 m^3 ; obliczyć krawędź sześcianu. 12 m .

50. Jak wielka jest krawędź sześcianu, który ma tę samą objętość, co walcowate naczynie o podstawie 250 cm^2 a wysokości 4 cm ? 1 dm .

51. Objętość walca równobocznego ma $169\cdot56 \text{ m}^3$; obliczyć promień walca ($\pi=3\cdot14$). 3 m .

52. Znaleźć promień stożka równobocznego, którego objętość wynosi $6111\cdot225 \text{ dm}^3$ ($\pi=3\cdot14$, $\sqrt{3}=1\cdot73$). 15 dm .

53. Obliczyć promień kuli, której objętość wynosi $0\cdot11304 \text{ m}^3$ ($\pi=3\cdot14$). $0\cdot3 \text{ m}$.

ROZDZIAŁ X.

Reguła trzech złożona.

Jeżeli mamy podane po dwie liczby dwu lub więcej gatunków liczb od siebie zależnych, a tylko jedną liczbę gatunku trzeciego lub następnego, to sposób obliczania drugiej liczby tego gatunku nazywamy regułą trzech złożoną.

Zadania z reguły trzech złożonej można rozwiązywać za pomocą wnioskowania, jak to okażemy na następujących przykładach:

Przykład 1. Do wykopania rowu potrzebowało 12 robotników, pracując po 10 godzin dziennie, 24 dni; w ilu dniach wykonałoby tę samą robotę 15 robotników, przy 12 godzinnej dziennej pracy?

Założenie: 12 robot. 10 godz. 24 dni

Pytanie: 15 » 12 » x »

Rozwiąz.: 12 rob. po 10 godz. dzien. ... 24 dni,
 1 » » 10 » » ... 24.12 »
 1 » » 1 » » ... 24.12.10 »
 15 » » 1 » » ... $\frac{24 \cdot 12 \cdot 10}{15}$ »
 15 » » 12 » » ... $\frac{24 \cdot 12 \cdot 10}{15 \cdot 12} = 16$ dni.

Powyższy sposób pisania upraszcza się zwykle w ten sposób, że się pisze w liczniku liczbę gatunku, którego nie-
 wiadomej szukamy i te liczby, przez które mamy ją mnożyć,
 w mianowniku zaś liczby, przez które ją dzielimy. A zatem:

$$\left. \begin{array}{l} 12 \text{ rob. po } 10 \text{ godz.} \\ 1 \text{ » » } 10 \text{ »} \\ 1 \text{ » » } 1 \text{ »} \\ 15 \text{ » » } 1 \text{ »} \\ 15 \text{ » » } 12 \text{ »} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dni} \\ x = \frac{24 \cdot 12 \cdot 10}{15 \cdot 12} = 16. \end{array}$$

Przykład 2. Kamień młyński, mający $1\frac{1}{4}$ m średnicy
 a $\frac{5}{8}$ m grubości, waży 875 kg; ile kg waży kamień z tego sa-
 mego materyału, mający $1\frac{1}{8}$ m średnicy a $\frac{3}{4}$ m grubości?

Założenie: $\frac{5}{4}$ m średnicy $\frac{5}{8}$ m grubości 875 kg

Pytanie: $\frac{6}{5}$ » » $\frac{3}{4}$ » » x »

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rozwiąz.: } \frac{5}{4} \text{ » » } \frac{5}{8} \text{ » »} \\ \frac{1}{4} \text{ » » } \frac{5}{8} \text{ » »} \\ 1 \text{ » » } \frac{5}{8} \text{ » »} \\ 1 \text{ » » } \frac{1}{8} \text{ » »} \\ 1 \text{ » » } 1 \text{ » »} \\ \frac{1}{5} \text{ » » } 1 \text{ » »} \\ \frac{6}{5} \text{ » » } 1 \text{ » »} \\ \frac{6}{5} \text{ » » } \frac{1}{4} \text{ » »} \\ \frac{6}{5} \text{ » » } \frac{3}{4} \text{ » »} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{kg} \\ x = \frac{875 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4} = 756. \end{array}$$

Przykład 3. W 15 piecach spalono przez 36 dni 10 m^3
 drzewa sosnowego; ile m^3 drzewa brzożowego potrzeba do
 20-tu takich pieców na 54 dni, jeżeli 2 m^3 drzewa brzożowego
 dają tyle ciepła, ile 3 m^3 drzewa sosnowego?

Założenie: 15 pieców 36 dni 10 m³ drzewa sosnowego
Pytanie: 20 » 54 » x » » brzożow.

Obliczmy, ile m³ drzewa sosnowego potrzeba do 20-u pieców na 54 dni.

$$\left. \begin{array}{l} 15 \text{ pieców na } 36 \text{ dni} \\ 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 36 \quad \text{»} \\ 1 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 1 \quad \text{»} \\ 20 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 1 \quad \text{»} \\ 20 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 54 \quad \text{»} \end{array} \right\} x = \frac{10 \cdot 20 \cdot 54}{15 \cdot 36} = 20. \quad \text{m}^3$$

Jeżeli 3 m³ drzewa sos. dają tyle ciepła, ile 2 m³ brzożowego,
to 1 » » » da » » » $\frac{2}{3}$ » »
a 20 » » » dadzą » » » $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13\frac{1}{3}$ m³ brz.

Przykład 4. Załogę 4000 ludzi zaopatrzono w żywność na 11½ roku tak, aby dzienna porcja żołnierza wynosiła 1.75 kg. Po 9 miesiącach wzmocniono tę załogę 500 ludźmi; ile ma wynosić dzienna porcja żołnierza, aby żywność ta wystarczyła na dalszych 10 miesięcy?

Ponieważ pozostała po 9-u miesiącach żywność wystarczyłaby dla 4000 ludzi na dalszych 9 miesięcy, jeżeliby dzienna porcja wynosiła 1.75 kg, przeto trzeba obliczyć, ile będzie wynosiła dzienna porcja, jeżeli ta sama żywność ma wystarczyć dla 4500 ludzi na 10 miesięcy.

Założenie: Dla 4000 osób na 9 mies. po 1.75 kg

Pytanie: » 4500 » » 10 » » x »

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rozwiązanie: } 4000 \text{ osób } 9 \text{ m} \\ 1 \quad \text{»} \quad 9 \quad \text{»} \\ 1 \quad \text{»} \quad 1 \quad \text{»} \\ 4500 \quad \text{»} \quad 1 \quad \text{»} \\ 4500 \quad \text{»} \quad 10 \quad \text{»} \end{array} \right\} x = \frac{1.75 \cdot 4000 \cdot 9}{4500 \cdot 10} = 1.4. \quad \text{kg}$$

Zadania.

1. Dwunastu ludzi zarobiło w 3 dniach 90 K; ile zarobi 16 ludzi w 5 dniach? 200 K.

2. Sześciu robotników zarobiło w 5 dniach 65 K; ilu robotnikom trzeba zapłacić 130 K za 12 dni? 5.

3. Dwadzieścia osób zjadło w 18 dniach za 276 K mięsa; ile będzie kosztowało mięso dla 35 osób za 21 dni, jeżeli cenę mięsa podniesiono o 2%? 574·77 K.

4. Dwoma pługami zorano w 8 dniach 6 ha pola; w jakim czasie zorze się trzema pługami 13·5 ha? 12 dni.

5. Za przewóz 10 q towaru na odległość 96 km zapłacono 48 K; jaki ciężar przewieźć można za 108 K na odległość 54 km? 40 q.

6. Woźnica przewiózł 45 q towaru na odległość 66 km za 88 K; ile K otrzyma za przewóz 50 q na odległość 54 km, jeżeli z powodu lepszej drogi zniżył cenę przewozu o 5%? 76.

7. Przewóz 30 beczek wina na odległość 20 km kosztował 50 K; ile K trzeba zapłacić za przewóz 25 beczek wina na odległość 36 km, jeżeli z powodu gorszej drogi podwyższono cenę przewozu o trzecią część pierwotnej ceny? 100.

8. Sześciu tkaczy wyrabia w $8\frac{1}{2}$ tygodniach 1377 m płótna; ile m płótna wyrobi 15 tkaczy w 3 tygodniach? 1215.

9. Z 15·6 kg przędzy wyrobiono sztukę płótna, 60 m długą a 1·5 m szeroką; ile m płótna, 1·25 m szerokiego, wyrobi się z 18·2 kg przędzy? 84.

10. Za 15½ m sukna, 1½ m szerokiego, zapłacono 232·5 K; ile K należy zapłacić za 3½ m tego samego sukna, 1½ m szerokiego? 63.

11. Na opał do 5 pieców potrzebowano drzewa w 2½ miesiącach za 86·54 K; ile będzie kosztowało drzewo do 8 pieców na 4 miesiące? 221·54 K.

12. Dziesięć płomieni gazowych zużywa w 8 godzinach 1½ m³ gazu; ile m³ gazu zużyje 12 płomieni gazowych w 10 godzinach? 2·25 m³.

13. Maszyna, o sile 5 koni, podniesie w 5 sekundach 1560 kg na wysokość 1 m; ile kg podniesie na tę samą wysokość maszyna, o sile 7 koni, w 12 sekundach? 5241·6.

14. Pompa parowa, o sile 20 koni, podnosi w pewnym czasie 945 m³ wody na wysokość 18·9 m; do jakiej wysokości podniesie pompa, o sile 18 koni, 729 m³ wody w czasie trzy razy dłuższym? 66·15 m.

15. Pewien zapas żywności wystarczy dla 4800 ludzi na

30 dni, licząc po $7\frac{1}{2}$ kg tygodniowo na osobę. Po ile kg wydzielać trzeba tygodniowo na osobę, aby ten sam zapas wystarczył dla 3000 ludzi na 45 dni? 8.

16. Chodnik ma być wyłożony 4800 płytami kamiennymi, 0.3 m długimi a 0.21 m szerokimi. Ponieważ takich płyt nie dostano, wzięto płyty 0.36 m długie, 0.24 m szerokie. Ile ich potrzeba? 3500.

17. Na chodnik 250 m długi, 3 m szeroki, potrzeba 13500 kamiennych kostek. Jak długi chodnik, szeroki na 4 m, można ułożyć z 16200 takich kostek? 225 m.

18. Dla 300 owiec potrzeba na 9 miesięcy 960 kg siana; ile kg siana trzeba przygotować na $7\frac{1}{2}$ miesięcy, po dokupieniu 180 owiec? 1280.

19. Koło, mające $2\frac{3}{4}$ m w obwodzie, przebiegło w $4\frac{1}{2}$ godzinach 55 km. W jakim czasie przebiegłoby koło, mające 3 m w obwodzie, drogę 210 km, jeżeli koło to robi 5 obrotów w tym czasie, w którym pierwsze robi 2 obroty? 6.3 godz.

20. Pociągiem kolei żelaznej przejechałem w 20 dniach 5600 km, jadąc po 12 godzin dziennie. Po ile godzin dziennie musiałbym jechać pociągiem, który przebywa 40 km w tym czasie, w którym pierwszy robi 35 km, aby w 16 dniach przebyć 4480 km? $10\frac{1}{2}$.

21. Podróżny, idąc po 10 godzin dziennie, przebył w 15 dniach 600 km. Ile km przeszedłby w 45 dniach, idąc po 8 godzin dziennie, gdyby prędkość zmniejszył o połowę? 720.

22. Jeden robotnik zarabia w 20 dniach, pracując po 10 godzin dziennie, 56 K; ile K zarobi drugi robotnik w 27 dniach, pracując po $12\frac{1}{2}$ godzin dziennie, jeżeli zarabia 4 K w tym czasie, w którym pierwszy zarabia 3.5 K? 108.

23. Kapitał 2500 K przynosi po $3\frac{1}{2}$ latach 350 K odsetek; ile odsetek przyniesie kapitał 4200 K, na tym samym procencie, po $4\frac{3}{4}$ latach? 798 K.

24. Odsetki od 2900 K za dwa lata wynoszą 232 K; jaki kapitał przyniesie na tym samym procencie po $1\frac{1}{2}$ roku 124 $\frac{2}{3}$ K odsetek? 2080 K.

25. Jeżeli 540 K przynoszą po 8 miesiącach 18 K odsetek, w jakim czasie przyniesie kapitał 810 K, oddany na ten sam procent, 20.25 K odsetek? 6 mies.

26. Kapitał 4620 K, oddany na 5%, przyniósł po pewnym czasie 924 K odsetek; na ile % oddać trzeba 1200 K, aby w tym samym czasie uzyskać 180 K odsetek? $3\frac{3}{4}\%$.

27. Jaki kapitał, oddany na $5\frac{1}{2}\%$, przyniesie po $9\frac{3}{4}$ latach ten sam dochód, co 12441 K po 8 latach na $2\frac{3}{4}\%$? 5104 K.

28. W jakim czasie przyniesie kapitał 2000 K, oddany na 5%, tyle odsetek, co 25000 K na 6% po 6 miesiącach? $7\frac{1}{2}$ lat.

29. Na ile % oddano 4500 K, jeżeli po 5 latach przyniosły te same odsetki, co 2500 K po 8 latach na 6%? $5\frac{1}{3}\%$.

30. Pewien kapitał, oddany na 4%, przyniósł po $1\frac{1}{2}$ roku 300 K odsetek. Ile odsetek przyniesie ten kapitał po $2\frac{1}{3}$ latach, jeżeli się go odda na $3\frac{1}{2}\%$? *proszę* $408\frac{1}{3}$ K.

31. Trzydziestu robotników, pracując przez 6 dni, po 10 godzin dziennie, wyrobiło 375 sztuk pewnego przedmiotu; w ilu dniach wyrobi 12 robotników, pracując po 8 godzin dziennie, 1000 sztuk tego przedmiotu? 50.

32. Za 20 płomieni gazowych, które się paliły przez 300 dni po 6 godzin dziennie, zapłacono 1350 K; ile K zapłaci się za 30 płomieni, które się paliły przez 240 dni po 4 godziny dziennie? 1080.

33. Do wystawienia muru 35 m długiego, 12 m wysokiego, 8 dm grubego, potrzeba 88000 cegieł. Ile cegieł potrzeba na wystawienie muru 28 m długiego, 15 m wysokiego a 1 m grubego? 110000.

34. Z łąki 512 m długiej, 72 m szerokiej, zebrano 10 wozów siana po 9 centnarów; ile wozów siana po 10 centnarów można zebrać z łąki 320 m długiej a 192 m szerokiej? 15.

35. Na oświetlenie 21 sal, po 5 lamp w każdej, wyszło w 33 dniach 66 kg nafty. Na ile dni wystarczy 252 kg nafty do 27 sal, po 7 lamp w każdej? 70.

36. Oświetlenie sześcioma lampami naftowymi, palącymi się przez 35 wieczorów po $3\frac{1}{2}$ godzin, kosztuje 15 koron. Ile lamp wypali nafty za 30 K, przez 56 wieczorów, po $3\frac{3}{4}$ godzin? 7.

37. Najęto 32 robotników, aby pracując po 10 godzin dziennie, usypali wał w 18 dniach. Po 2 dniach zażądano, aby

wał był gotowy w terminie 10-dniowym i w tym celu donajęto 16 robotników. Ile godzin dziennie muszą pracować¹⁾? $13\frac{1}{3}$.

38. Ośmiu robotników wykonałoby pewną robotę w 30 dniach, gdyby pracowali dziennie po 9 godzin. Po 5 dniach zachorowało 2 robotników, a pozostali pracowali po 10 godzin dziennie; w jakim czasie wykonano tę robotę? 35 dni.

39. Okręt, mający 240 ludzi, zaopatrzone w żywność na 60 dni, licząc na osobę po $1\frac{1}{4}$ kg dziennie. Po 10 dniach ubyło na okręcie 40 ludzi, a każdy z pozostałych otrzymywał po $1\frac{1}{3}$ kg dziennej żywności. Na ile dni wystarczyła cała żywność? $66\frac{1}{4}$.

40. W cegielni wyrobiło 30 robotnic, pracując przez 27 dni, po 9 godzin dziennie, 20169 cegieł. Ile cegieł wyrobi 24 robotników w 30 dniach, pracując po 11 godzin dziennie, jeżeli każdy robotnik wyrabia 5 cegieł w tym czasie, w którym robotnica wyrabia 3 cegły? 36520.

41. Dziewięciu mężczyzn, pracując dziennie po $10\frac{1}{2}$ godzin, ukończy pewną robotę w 16 dniach. Ile kobiet, pracując po 9 godzin dziennie, ukończy tę samą robotę w 11 $\frac{1}{2}$ dniach, jeżeli stosunek siły roboczej mężczyzn i kobiety równa się 7:5? 21

ROZDZIAŁ XI.

Rachunek procentu składanego.

Oddając np. 5000 K na 4%, uzyskam za rok 200 K odsetek. Jeżeli tych odsetek nie odbieram, ale je wraz z kapitałem pozostawiam na procencie przez rok następny, to od 5200 K uzyskam po roku 208 K odsetek. Przez 3-ci rok procentować się będzie suma 5408 K i ta przyniesie po upływie 3-go roku 216 $\cdot$ 32 K odsetek. Kapitał więc 5000 K przybierze po roku wartość 5200 K, po 2 latach 5408 K a po 3 latach 5624 $\cdot$ 32 K.

¹⁾ 32 robotników, pracując po 10 godzin dziennie, usypało w 2 dniach 9-tą część wału; po ile godzin dziennie musi pracować 48 robotników przez 8 dni, aby usypać resztę ($\frac{8}{9}$) wału?

Jeżeli odsetki od kapitału, przypadające za pewien okres czasu, doliczamy po upływie tego czasu do kapitału i w następnym okresie procentujemy je razem z kapitałem, to mówimy, że kapitał pozostaje na procencie składanym.

Doliczanie odsetek do kapitału nazywamy kapitalizacją odsetek. Kapitalizacja może być roczna, półroczna, kwartalna i t. d., według tego, czy doliczanie odsetek do kapitału następuje po roku, czy po pół roku, kwartale i t. d. Jeżeli w zadaniu nie jest wyraźnie podane, jaka to kapitalizacja, należy rozumieć kapitalizację roczną.

Kapitał np. 5000 K, oddany na procent składany, nazywamy kapitałem początkowym albo gotówką, wartość zaś jego 5624·32 K po upływie pewnej ilości okresów czasu (3 lata) wartością końcową kapitału 5000 K.

Z powyższego przykładu widzimy, że chcąc obliczyć wartość końcową podanego kapitału, obliczamy jego odsetki za pierwszy rok, te dodajemy do kapitału i od tak otrzymanej sumy obliczamy odsetki za drugi rok i t. d. Odjęwszy gotówkę od jej wartości końcowej, otrzymamy odsetki składane za czas podany.

Obliczmy jeszcze jako przykład wartość końcową kapitału 5000 K, umieszczonego na procencie składanym 4%, po 2 latach przy kapitalizacji półrocznej.

Skoro za rok liczy się 4%, to za pół roku wyniesie procent 2%, natomiast okresów kapitalizacji będzie cztery. Kapitał 5000 K urośnie po pół roku do sumy $K_1 = 5000 + \frac{5000 \cdot 2}{100} = 5100$ K. Odsetki za drugie półrocze wyniosą $\frac{5100 \cdot 2}{100}$ K = 102 K; kapitał więc 5000 K będzie miał po dwu półroczach wartość $K_2 = 5100 + 102 = 5202$ K. Podobnie $K_3 = 5202 + 104 \cdot 04 = 5306 \cdot 04$ K, $K_4 = 5306 \cdot 04 + 106 \cdot 12 = 5412 \cdot 16$ K.

Zadania.

1. Oddano 4000 K na procent składany 3%. Jaka suma utworzy się z tego po 2 latach? 4243·6 K.

2. Do jakiej sumy urośnie kapitał 6250 K, umieszczony na procencie składanym 4% po 3 latach? 7030·4 K.

3. Jaką wartość będzie miał kapitał 7400 K, umieszczony na procencie składanym 2½% po 2 latach? 7774·63 K.

4. Kapitał 2000 K oddano na $3\frac{1}{2}\%$ składany; jaka suma utworzy się z tego po 3 latach? 2217·44 K.

5. Oddano 819·8 K na procent składany 5% ; jaką wartość będzie miał ten kapitał po 4 latach? 996·47 K.

6. O ile się powiększy kapitał 5200 K po 3 latach, jeżeli go oddamy na procent składany $4\frac{1}{2}\%$? 734·06 K.

7. Do jakiej wartości wzrośnie po 4-ech latach kapitał 5500 K na procencie pojedynczym 6% , a do jakiej na tym samym procencie składanym? 6820 K i 6943·63 K.

8. O ile są większe odsetki składane niż odsetki proste kapitału 10200 K, umieszczonego na 5% przez 3 lata? 77·78 K.

9. Las, mający 45000 m³ drzewa, powiększa się corocznie o $3\frac{1}{8}\%$; ile m³ drzewa będzie miał ten las po 4 latach? 52239·85 m³.

10. Do jakiej wartości wzrośnie po 2 latach kapitał 1000 K, oddany na procent składany 4% , przy kapitalizacji półrocznej? 1082·43 K.

11. Ktoś włożył przed $1\frac{1}{2}$ rokiem 1200 K do kasy oszczędności na 5% . Ile otrzyma dzisiaj, jeżeli kasa procentuje wkładki półrocznie? 1292·27 K.

12. Ktoś pożyczył 8000 K na procent składany 5% i włożył je w przedsiębiorstwo, przynoszące $6\frac{1}{2}\%$ składany; ile zyskał po 4 latach? 567·68 K.

13. Ktoś sprzedał realność za 75500 K, za którą mu dawano przed dwoma laty 70000 K. Ile zyskał lub stracił, jeżeli przed dwoma laty mógł umieścić ten kapitał na procencie składanym 4% ? Stracił 212 K.

14. Co korzystniej, czy wziąć dzisiaj 6240 K, czy po 4 latach 6887·8 K, licząc procent składany $2\frac{1}{2}\%$? Wszystko jedno.

15. Ile się zaoszczędzi przez 2 lata, składając w kasie oszczędności na początku każdego półroczu po 400 K na procent składany 4% (kapitalizacja półroczna)? 1681·61 K.

16. Do jakiej sumy wzrośnie po 2 latach i 4 miesią-

¹⁾ Obliczyć wartość końcową kapitału 3200 K po 2 latach a następnie odsetki proste tej wartości za 4 miesiące.

cach kapitał 3 200 K, oddany na procent składany $3\frac{1}{2}\%$? 3 467·91 K.

17. Jakie odsetki przyniesie po 3 latach i 3 miesiącach kapitał 10 000 K, oddany na procent składany $4\frac{1}{2}\%$? 15 40·04 K.

18. Kapitał 2 200 K oddałem na procent składany $4\cdot8\%$; ile odsetek otrzymam po roku i 8 miesiącach, jeżeli procenta dolicza się do kapitału co pół roku? 181·13 K.



ROZDZIAŁ XII.

Rachunek spółki.

A) Rachunek spółki prosty.

Przykład 1. Trzej kupcy zawiązali spółkę handlową z następującymi wkładkami: A dał 9 000 K, B 12 000 K a C 14 000 K. Przy końcu roku wynosił zysk 2 100 K; ile K zysku otrzyma każdy?

Rozwiązanie:

35 000 K przynosi czystego zysku 2 100 K

1	»	»	»	»	$\frac{2100}{35000}$	»
---	---	---	---	---	----------------------	---

9 000	»	»	»	»	$\frac{2100}{35000}$	· 9 000 K,
-------	---	---	---	---	----------------------	------------

podobnie:

12 000	»	»	»	»	$\frac{2100}{35000}$	· 12 000 K,
--------	---	---	---	---	----------------------	-------------

14 000	»	»	»	»	$\frac{2100}{35000}$	· 14 000 K.
--------	---	---	---	---	----------------------	-------------

Z tego widzimy, że zysk każdego z tych 3-ch kupców obliczymy, dzieląc cały zysk przez sumę wkładek, a otrzymany iloraz mnożąc przez odpowiednią wkładkę.

Rachunek, zapomocą którego dzieli się podaną liczbę na części, pozostające z innemi danemi liczbami w pewnym stosunku, nazywamy rachunkiem (regulą) spółki (podziału) prostym.

Liczba, np. 2100 K, którą się ma podzielić na części, nazywa się sumą, liczby zaś, np. 9000 K, 12000 K, 14000 K, wyrażające, w jakim stosunku ma być podział sumy dokonany, liczbami stosunkowymi, a wyniki, otrzymane z podziału, udziałami.

Udziały oblicza się, dzieląc sumę, przeznaczoną do podziału, przez sumę liczb stosunkowych i mnożąc otrzymany iloraz przez te liczby.

Przed wykonaniem rachunku należy liczby stosunkowe uprościć, dzieląc je przez najw. wsp. podzielnik, a jeżeli są ułamki, sprowadzić je do wspólnego mianownika i za liczby stosunkowe wziąć tylko liczniki.

Dla jasnego przeglądu przeprowadza się rachunek w sposób następujący:

A	9000	9	$60 \cdot 9 = 540$ K
B	12000	12	$60 \cdot 12 = 720$ K
C	14000	14	$60 \cdot 14 = 840$ K
$2100 : 35 = 60$			2100 K.

Przykład 2. Podzielić 690 K na trzy części w stosunku: $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$.

Sprowadzając liczby stosunkowe do wspólnego mianownika, otrzymamy $\frac{6}{12} : \frac{8}{12} : \frac{9}{12}$ albo 6 : 8 : 9; mamy zatem podzielić 690 K na $6 + 8 + 9 = 23$ równych części i wziąć takich części 6, 8 i 9. A zatem:

$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$	6	$30 \cdot 6 = 180$ K
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$	8	$30 \cdot 8 = 240$ K
$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{12}$	9	$30 \cdot 9 = 270$ K
$690 : 23 = 30$			690 K.

Przykład 3. Stratę na pewnym przedsiębiorstwie rozdzielono między 4 osoby tak, że na osobę A przypadła $\frac{1}{2}$, na B $\frac{1}{4}$, na C $\frac{1}{6}$ a na D reszta straty w kwocie 250 K. Ile K straciła każda z tych 3 osób?

Ponieważ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6+3+2}{12} = \frac{11}{12}$, przeto resztą jest $\frac{1}{12}$ i ta wynosi 250 K; cała więc strata $= 12 \times 250 = 3000$ K.

Postępując podobnie, jak w przykładzie 2-im, znajdziemy straty dla tych 4-ch osób: 1500 K, 750 K, 500 K i 250 K.

Przykład 4. Trzy gminy mają się przyczynić do naprawy drogi sumą 1680 K, rozdzieloną w stosunku odwrotnym do

odległości tych gmin od miejsca naprawy. Jeżeli gmina A od-
dalona jest o 4500 m, B o $2\frac{1}{2}$ km, C o $3\frac{3}{4}$ km od tego miejsca,
ile K ma złożyć każda z tych 3 gmin?

Ponieważ udziały są odwrotnie proporcjonalne do liczb:
 $4\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, czyli wprost proporcjonalne do: $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{15}$ albo po
uproszczeniu do: 5, 9, 6, przeto 1680 K należy podzielić w sto-
sunku 5:9:6. A 420, B 756, C 504.

B) Rachunek spółki złożony.

Jeżeli pewna suma ma być podzielona na części, które
zależą od więcej niż jednego gatunku liczb stosunkowych, to
sposób obliczania udziałów nazywamy rachunkiem spółki
złożonym.

Każde zadanie na regułę spółki złożoną można sprowa-
dzić do zadania na regułę spółki prostą.

Przykład 5. Trzy osoby zarobiły na pewnem przedsiębior-
stwie 2300 K. Osoba A należała do tej spółki przez 8 miesięcy
z wkładką 2000 K, B przez 6 mies. z wkładką 4000 K, C przez
5 mies. z wkładką 8000 K. Jak podzielić się zyskiem?

Włożyć w przedsiębiorstwo 2000 K na 8 mies. jestto to
samo, wśród równych zresztą warunków, co włożyć $8 \cdot 2000$ K =
= 16000 K na miesiąc; podobnie 4000 K na 6 mies. czyni to
samo, co 24000 K na 1 mies. i 8000 K na 5 mies. = 40000 K
na 1 mies.

A zatem:

A	2000×8	16	2	$230 \cdot 2 = 460$ K,
B	4000×6	24	3	$230 \cdot 3 = 690$ K,
C	8000×5	40	5	$230 \cdot 5 = 1150$ K,
2300 : 10 = 230				2300 K.

Zadania.

1. Dwaj handlarze zarobili na zbożu 108 K. Jak się po-
dzielić zyskiem, jeżeli jeden dał na zakupno zboża 420 K,
drugi 390 K? 56 K i 52 K.

2. Do pewnego przedsiębiorstwa włożyła osoba A 2800 K,
B 3600 K, C 4000 K. Spółka przyniosła 1300 K zysku; ile
K przypada na każdą osobę? 350, 450 i 500.

3. Trzy osoby kupiły los, którego czysta wygrana wyno-

siła 2000 K. Ile K wygrała każda osoba, jeżeli jedna dała na kupno losu 60 K, druga 55 K, a trzecia 45 K? 750, 687·5 i 562·5.

4. Powietrze atmosferyczne składa się z 20·9 części tlenu i 79·1 części azotu. Ile tych składników zawiera w sobie 85 m³ powietrza? 17·765 m³ i 67·235 m³.

5. Bezwodnik węglowy składa się co do wagi z 12 części węgla i 32 części tlenu. Ile g tych dwu pierwiastków jest w 220 g bezwodnika węglowego? 60 i 160.

6. Koronówka waży 5 g a wybija się ją ze srebra próby 835; ile g czystego srebra a ile miedzi jest w koronówce? 4·175 i 0·825.

7. Liczbę 162 rozłożyć na dwie części w stosunku 4:5. 72 i 90.

8. Liczbę 421·2 rozłożyć na dwa składniki w stosunku 4:9. 129·6 i 291·6.

9. Rozdzielić 252 K między 3 osoby w stosunku $\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{5}{12}$. 63 K, 84 K i 105 K.

10. Liczbę 99 rozłożyć na 3 części, któreby tworzyły stosunek $1:1\frac{1}{2}:2$. 22, 33 i 44.

11. Suma trzech kapitałów, oddanych na ten sam procent, wynosi 7500 K. Jakie to są kapitały, jeżeli ich odsetki za ten sam czas tworzą stosunek 4:5:6? 2000 K, 2500 K, 3000 K.

12. Kupiec chce mieszać 3 gatunki kawy w stosunku 5:6:7. Ile kg ma wziąć z każdego gatunku, aby otrzymać 49·5 kg mieszaniny? 13·75, 16·5 i 19·25.

13. Z 1 kg stopu, złożonego z 95 części miedzi, 4 części cyny i 1 części cynku, wybija się 600 sztuk jednohalerzówek. Ile kg każdego z tych trzech składników należy stopić, aby wybić 3000 jednohalerzówek? (Do wybicia 3000 jednohal. trzeba 5 kg stopu). 4·75, 0·2, 0·05.

14. Kwas siarkowy składa się (co do wagi) z 1 części wodoru, 16 części siarki i 32 części tlenu. Ile g tych składników znajduje się w 10 kg kwasu siarkowego (w całkowitych)? 204, 3265 i 6531.

15. Koszta podróży trzech osób dorosłych i czworga dzieci wyniosły 85 K. Ile K przypada na osobę dorosłą, a ile na dziecko, jeżeli osoba dorosła płaciła 2 razy tyle K, co dziecko? 17 i 8·5.

16. Czterej spółnicy stracili na przedsiębiorstwie 780 K.

Spółnik A włożył w to przedsiębiorstwo 300 K, B 360 K, C 420 K a D 480 K. Ile K stracił każdy z nich?

150, 180, 210 i 240.

17. Czterej wierzyciele mają się podzielić masą upadłości kupca, wynoszącą 8621 K. Ile K otrzyma każdy z nich, jeżeli wierzyciel A pożyczył kupcowi 3000 K, B 3200, C 1200 K, D 2800 K, E 4600 K? 1747.5, 1864, 699, 1631 i 2679.5.

18. Sumę 840 K rozdzielono między 3 osoby tak, że jedna z nich otrzymała połowę, druga trzecią część a trzecia resztę tej sumy. Ile K otrzymała każda z nich? 420, 280 i 140.

19. Ile K rozdzielono między 4 osoby, jeżeli osoba A otrzymała $\frac{1}{8}$, B $\frac{3}{8}$, C $\frac{1}{4}$ a D resztę w kwocie 50 K? 240.

20. Trzy gminy stawiają most kosztem 6500 K, które mają być rozłożone na te gminy w stosunku odwrotnym ich odległości od mostu. Ile K ma zapłacić każda gmina, jeżeli te odległości tworzą stosunek 2:3:4? 3000, 2000 i 1500.

21. W pewne przedsiębiorstwo włożyła osoba A 2400 K, B 3600 K, C 6000 K. Jak się podzielił zyskiem 1500 K, jeżeli osoba A ma oprócz udziału otrzymać $16\frac{2}{3}\%$ całego zysku? (Resztę, uzyskaną po odjęciu $16\frac{2}{3}\%$ całego zysku, podzielić w stosunku wkładów). 500 K, 375 K i 625 K.

22. Między A i B rozdzielić 800 K w ten sposób, aby osoba A otrzymała $3\frac{1}{2}$ razy tyle, co B i nadto 80 K. Ile K otrzyma A, a ile B? 640 i 160.

23. Suma 31500 K ma być rozdzielona między 3 spadkobierców w ten sposób, aby jeden z nich otrzymał 2 razy tyle K, co drugi, ten zaś 3 razy tyle K, co trzeci. Ile K otrzyma każdy z nich? Trzeci 3150.

24. A wkłada w pewne przedsiębiorstwo kwotę 2 razy większą niż B, B 2 razy większą niż C, C 2 razy większą niż D. Jeżeli wszyscy 4-ej włożyli razem 4800 K, ile K włożył każdy z nich i jak się podzielił zyskiem 1470 K?

Wkładka osoby D = 320 K, zysk = 98 K.

25. Kapitał 15300 K rozdzielić między 3 osoby tak, aby osoba A otrzymała 80%, a C 75% udziału osoby B. Ile K otrzyma każda z nich? 4800, 6000 i 4500.

26. Między 4 osoby rozdzielić 153 K tak, aby każda na-

stępna osoba otrzymała o 1 K więcej, niż podwójny udział osoby poprzedzającej. 10, 21, 41 i 81.

(27. Osoba A włożyła w przedsiębiorstwo 18 000 K na 3 mies., B 15 000 K na 2 mies. Jak się podzielił zyskiem 840 K? 540 K i 300 K.

(28. W pewnem przedsiębiorstwie miała osoba A 8 200 K przez 5 miesięcy, B 10 500 K przez 4 mies., C 12 000 K przez 3 mies. Ile K otrzyma każdy spółnik z zysku 4 522 K? 1 558, 1 596 i 1 368.

(29. Trzej spółnicy stracili na przedsiębiorstwie 486 K. Jeżeli jeden z nich miał w tem przedsiębiorstwie 600 K przez 8 mies., drugi 800 K przez $7\frac{1}{2}$ mies. a trzeci 900 K przez 6 mies., ile K stracił każdy z nich? 144, 180 i 162.

(30. Przy naprawie drogi pracowało ze wsi A 5 robotników przez 6 dni, ze wsi B 4 robotników przez 9 dni, ze wsi C 3 robotników przez 10 dni. Jeżeli za naprawę drogi zapłacono 288 K, ile K otrzymali robotnicy każdej wsi, a ile jeden robotnik? 90, 108 i 90; 3.

31. Trzej gospodarze wynajęli pastwisko za 256 K; gospodarz A wypasał 20 sztuk bydła przez $3\frac{1}{2}$ mies., B 30 sztuk przez 3 mies., C 24 sztuk przez 4 mies. Ile K ma zapłacić każdy z nich? 70, 90 i 96.

x 32. Czterem gminom wypłacono za roboty 1 225 K. Ile K otrzymała każda gmina, jeżeli jedna dostarczyła 30 ludzi przez 24 dni, druga 24 ludzi przez 36 dni, trzecia 26 ludzi przez 30 dni, a czwarta 18 ludzi przez 32 dni? 300, 360, 325 i 240.

x 33. Gmina A żywiła 750 żołnierzy przez 3 dni, B 900 żołnierzy przez 4 dni, C 600 żołnierzy przez 2 dni a D 1 050 żołnierzy przez 5 dni. Jeżeli zarząd wojskowy wypłacił dla tych 4-ch gmin 5 576 K, ile K otrzyma każda gmina? 1 020, 1 632, 544 i 2 380.

34. Osoba A włożyła w przedsiębiorstwo 1 200 K, B 4 000 K; po 3 miesiącach dołożył pierwszy spółnik 800 K, a po pół roku drugi 1 500 K. Jak się podzielił po roku zyskiem, wynoszącym 655 K? 180 K i 475 K.

35. Osoba A rozpoczęła pewien interes z wkładką 12 000 K; po 2 miesiącach przystąpiła do tego interesu osoba B z wkładką 10 000 K a po dalszych 4 mies. C z wkładką 6 000 K, a znowu po 3 mies. D z wkładką 4 000 K. Po roku rozdzielono zysk 4 380 K; ile K otrzymał każdy spółnik? 2 160, 1 500, 540 i 180.

36. Trzy kapitały, oddane w tym samym czasie na ten sam procent, przyniosły 76·4 K odsetek. Kapitał 420 K procentował się przez $1\frac{1}{2}$ roku, 600 K przez $1\frac{1}{3}$ roku a 240 K przez 2 lata. Jakie odsetki przyniósł każdy z tych kapitałów i na ile % były oddane? 25·2 K, 32 K i 19·2 K; 4%.

37. Zapis 3 600 K ma być rozdzielony między trzech służących w stosunku ich wieku i lat służby. Jeżeli służący mają: 44, 40 i 36 lat a służyli: 15, 12 i 10 lat, ile K otrzyma każdy z nich? 1 584, 1 152, 864.

38. Właściciel fabryki przeznaczył dla trzech swoich urzędników 2 400 K wynagrodzenia, które ma być rozdzielone w stosunku pobieranych płac i lat służby. Jeżeli urzędnik A służy 5 lat i pobiera 6 000 K płacy, B 6 lat z płacą 4 000 K, C zaś służy 9 lat i pobiera 2 000 K płacy, ile K wynagrodzenia otrzyma każdy z nich? 1 000, 800 i 600.

39. Za trzy sztuki sukna tego samego gatunku zapłacił kupiec 902 K. Jeżeli sztuki te mają: 42 m, 36 m i 30 m długości a: 1·2 m, 1·5 m i 1·8 m szerokości, ile K kosztuje każda sztuka? 287, 307·5 i 307·5.

40. Ma być zbudowany most kosztem 3-ch gmin, które się na to mają złożyć w prostym stosunku liczby domów, a w odwrotnym stosunku odległości od mostu. Jeżeli gminy te, oddalone od mostu o: 2 km, 5 km i 6 km, mają: 540, 650 i 900 domów, ile K ma zapłacić każda z tych gmin, jeżeli kosztu budowy mostu obliczono na 5 500 K? 2 700, 1 300 i 1 500.

ROZDZIAŁ XIII.

Rachunek mieszaniny.

Przykład 1. Do 35 kg kawy po 3·4 K za kg dosypano 15 kg kawy po 2·6 K za kg; ile K kosztuje kg tej mieszaniny?

Rozwiązanie:

35 kg	po 3·4 K	kosztuje		119 K
15 »	» 2·6 »	»		39 »
50 »	mieszaniny	»		158 »
1 »	»	»		3·16 »

Wartość jednostki mieszaniny znajdujemy, jeżeli sumę iloczynów ilości materyałów i ich ceny dzielimy przez sumę ilości tych materyałów.

Przykład 2. Kupiec ma dwa gatunki wina: litr po 75 h i po 94 h. Ile l ma wziąć tańszego, a ile droższego wina, aby otrzymać mieszaninę w cenie 85 h za litr?

Rozwiązanie. Sprzedając tańsze wino po 85 h, zyskałby kupiec na litrze 85 h — 75 h = 10 h; sprzedając zaś droższe po 85 h, straciłby na litrze 94 h — 85 h = 9 h. Gdyby tańszego wina sprzedał 9 l a droższego 10 l, zysk: 10 h · 9 = 90 h wyrównałby stratę: 9 h · 10 = 90 h. Kupiec ma zatem zmieszać 9 l tańszego wina z 10 l droższego, aby litr mieszaniny miał wartość 85 h.

Próba:	9 l	po 75 h	. . =	675 h
	10 »	» 94 »	. . =	940 »
	19 »	mieszaniny	=	1615 h
	1 »	»	=	1615 h : 19 = 85 h.

Rachunek ten przeprowadzamy zwykle w ten sposób, że liczby, odnoszące się do gatunków, które mają być ze sobą zmieszane, wypisujemy pod sobą, a liczbę średniego gatunku po lewej stronie pomiędzy dwiema poprzednimi.

Różnica między wartością lepszego a średniego gatunku wskazuje ilość gatunku pośledniejszego, różnica zaś między wartością średniego a pośledniejszego gatunku wskazuje ilość gatunku lepszego.

Rachunek, który podaje sposób obliczania wartości pewnej mieszaniny, albo sposób wyznaczania stosunku, w jakim należy zmieszać dwa lub więcej gatunków rozmaitej jakości, aby uzyskać mieszaninę, połączenie chemiczne albowiem stop, nazywamy rachunkiem mieszaniny.

Przykład 3. Ile hl spirytusu po 100 K i ile hl po 72 K trzeba ze sobą zmieszać, aby otrzymać 56 hl po 88 K za hl?

Dzieląc 56 hl na 2 części w stosunku 4:3, otrzymamy: 56 hl:7=8 hl; 8 hl.4=32 hl, 8 hl.3=24 hl. Należy przeto zmieszać 32 hl tańszego spirytusu z 24 hl droższego.

Wzór działania jest następujący:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 16 & 4 \\ 88 & 72 & 12 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 \text{ hl.} 4 = 32 \text{ hl} \\ 8 \text{ hl.} 3 = 24 \text{ hl} \end{array}$$

$$56 \text{ hl:} 7 = 8 \text{ hl} \qquad 56 \text{ hl}$$

Przykład 4. Kupiec ma dwa gatunki pszenicy: po 13·4 K i po 12·4 K za hl. Ile hl pszenicy pośledniejszego gatunku ma zmieszać z 78 hl lepszego gatunku, aby otrzymać pszenicę po 12·8 K za hl?

$$\begin{array}{r|l} 13\cdot4 & 0\cdot4 & 2 \text{ — — — } 78 \text{ hl} \\ 12\cdot8 & 12\cdot4 & 0\cdot6 & 3 \text{ — — — } x \text{ »} \end{array}$$

$$x:78=3:2; \quad x=117 \text{ hl.}$$

$$\begin{array}{r} \text{Próba: } 78 \text{ hl po } 13\cdot4 \text{ K} = 1045\cdot2 \text{ K,} \\ 117 \text{ » » } 12\cdot4 \text{ »} = 1450\cdot8 \text{ »} \\ \hline 195 \text{ » mieszaniny} = 2496\cdot0 \text{ »} \\ 1 \text{ » » } = 12\cdot8 \text{ »} \end{array}$$

Przykład 5. Kupiec ma 3 gatunki wina: po 56 h, 62 h i 70 h za l. W jakim stosunku ma zmieszać te 3 gatunki wina, aby otrzymać wino po 65 h za l?

Gdybyśmy miesza li 1-e wino z 3-em, wzięlibyśmy 5 l pierwszego a 9 l trzeciego, mieszając zaś 2-e wino z 3-em, wzięlibyśmy 5 l drugiego a 3 l trzeciego. Mieszanina składać się będzie przeto z 5 l najtańszego, z 5 litrów średniego i z 12 l najdroższego wina.

Zadania.

1. Do 5 hl wina po 120 K za hl dolałem 3 hl wina po 80 K za hl; ile K kosztuje hl tej mieszaniny? 105.
2. Kupiec zmieszał 6 hl wina po 72 K z 7 hl po 84 K i 2 hl po 90 K; ile K kosztuje litr tej mieszaniny? 0·8.

3. Do 45 l spirytusu 80%-ego dolałem 30 l spirytusu 50%-go i 10 l wody; ilu procentowa będzie ta mieszanina?

60%-owa.

4. Zmieszano $3\frac{1}{2}$ kg herbaty po 8.4 K z $2\frac{1}{2}$ kg herbaty pośledniejszego gatunku i otrzymano herbatę po 6 K za kg. W jakiej cenie był gatunek pośledniejszy? (Od wartości herbaty po 8.4 K odjąć wartość herbaty średniego gatunku). 2.64.

5. Zmieszano trzy gatunki oliwy: $2\frac{1}{2}$ kg po 2.4 K, $3\frac{1}{4}$ kg po 3.8 K i $4\frac{1}{4}$ kg po 2.6 K za kg; ile kosztuje 15 kg tej mieszaniny? 44.1 K.

6. Stopiono 5 kg srebra próby 750 z 4 kg srebra próby 850 i dodano 1 kg miedzi. Jakiej próby srebro otrzymano? 715.

7. W jakim stosunku trzeba zmieszać wino po 72 h i 95 h za litr, aby otrzymać wino po 80 h za litr? 15:8.

8. Z dwu gatunków kawy: po 5.2 K i po 4.7 K za kg ma być utworzony gatunek pośredni po 4.9 K za kg; w jakim stosunku zmieszać należy te dwa gatunki? 2:3.

9. Kupiec ma dostarczyć 24 kg herbaty po 10.4 K; ma jednak tylko herbatę po 12 K i po 9 K za kg. Ile kg ma wziąć z obu gatunków? 11.2 i 12.8.

10. Z dwu gatunków srebra próby 760 i 680 ma być utworzony 1 kg srebra próby 800. Ile gramów trzeba wziąć z każdego gatunku? 75 i 25.

11. Ile kg czystego srebra, a ile miedzi znajduje się w 5 kg srebra próby 825? 4.125 i 0.875.

12. Ile spirytusu 80%-ego mam dolać do spirytusu 60%-ego, aby otrzymać 8 l spirytusu 76%-ego? 6.4 l i 1.6 l.

13. Kupiec ma dostarczyć 500 kg kawy po cenie 4.5 K za kg; ma jednak tylko kawę po 4.85 K i po 4 K. W jakim stosunku ma zmieszać te dwa gatunki? 294.1 kg i 205.9 kg.

14. Ze srebra próby 950 i próby 750 chcemy otrzymać 5 kg srebra próby 900. Ile kg trzeba wziąć z każdego gatunku? 3.75 i 1.25.

15. Ile litrów wody trzeba dolać do 5 l octu po 32 h za litr, aby otrzymać ocet po 20 h za litr (cena wody = 0)? 3.

16. Ile l wody trzeba dolać do 6 hl spirytusu 85%-go, aby otrzymać spirytus 60%-owy? 250.

17. W jakim stosunku trzeba zmieszać 3 gatunki spiry-

tusu po: 90 K, 96 K i 104 K za hl, aby otrzymać spirytus po 95 K za hl? 3:3:2.

18. W jakim stosunku trzeba zmieszać spirytus 56%, 60% i 74%, aby otrzymać 24 l spirytusu 70%-ego? 3 l, 3 l i 18 l.

19. Z trzech gatunków rodzyneków po: 1.44 K, 1.12 K i 0.96 K za kg chce kupiec uzyskać 20 kg po 1.2 K. Ile kg ma wziąć z każdego gatunku? 8, 6 i 6.

20. Złotnik ma złoto próby: 750, 800 i 900; ile g ma wziąć z każdego gatunku, aby otrzymać 150 g srebra próby 850? 30, 30 i 90.

21. W jakim stosunku ma zmieszać kupiec trzy gatunki herbaty po: 9.6 K, 10.56 K i 12.8 K za kg, aby otrzymać 34 kg herbaty po 11.52 K za kg? 8 kg, 8 kg i 18 kg.

ROZDZIAŁ XIV.

Rachunek łańcuchowy.

Przykład 1. Ile Frs trzeba zapłacić za 320 R, jeżeli 100 R = 256 K, 11.2 K = 10 M a 80 M = 105 Frs?

Aby obliczyć niewiadomą, wypiszmy liczby tak, aby dwie tego samego gatunku znalazły się pod sobą:

x Frs — 320 R

100 » — 256 K

11.2 » — 10 M

80 » — 105 Frs

i wnioskujemy w sposób następujący:

Za 80 M	placi się	105	Frs
» 1 »	»	$\frac{105}{80}$	»
» 10 » czyli 11.2 K	»	$\frac{105 \cdot 10}{80}$	»
za 1 »	»	$\frac{105 \cdot 10}{80 \cdot 11.2}$	»
» 256 K czyli 100 R »	»	$\frac{105 \cdot 10 \cdot 256}{80 \cdot 11.2}$	»
za 1 » »	»	$\frac{105 \cdot 10 \cdot 256}{80 \cdot 11.2 \cdot 100}$	»
» 320 » »	»	$\frac{105 \cdot 10 \cdot 256 \cdot 320}{80 \cdot 11.2 \cdot 100}$	Frs.

Jeżeli podane liczby umieścimy po obu stronach kreski pionowej w tym samym porządku, co poprzednio, zobaczymy,

x Frs	320 R	że każdy następny wiersz zaczyna się
100 R	256 K	liczbą tego samego miana, które ma liczbą,
11·2 K	10 M	kończącą wiersz poprzedni; całe zaś ze-
80 M	105 Frs	stawienie tych liczb zamknięte jest liczbą
		tego samego gatunku, którym się zaczyna.

Iloczyn liczb, umieszczonych po prawej stronie kreski, podzielony przez iloczyn liczb znanych, znajdujących się po stronie lewej, przedstawia wartość niewiadomej. $x = 960$ Frs.

Rachunek, zapomocą którego obliczamy niewiadomą, związaną z danym warunkiem (320 R) zapomocą kilku równości (100 R = 256 K, 11·2 K = 10 M, 80 M = 105 Frs), łączących się między sobą jakby ogniwa łańcucha, nazywamy **rachunkiem (regulą) łańcuchowym (łańcuchową)**.

Aby więc rozwiązać zadanie zapomocą rachunku łańcuchowego, kładziemy po lewej stronie kreski pionowej niewiadomą a po prawej daną wielkość równej wartości. Każdy następny wiersz zaczynamy liczbą tego samego gatunku, na którym skończyliśmy wiersz poprzedni, całe zaś zestawienie liczb zamykamy liczbą tego miana, co niewiadoma. Iloczyn liczb, umieszczonych po prawej stronie kreski, podzielony przez iloczyn liczb, znajdujących się po lewej stronie, da wartość niewiadomej.

Ponieważ liczby, stojące po obu stronach kreski, są czynnikami licznika i mianownika, przeto można je uprościć; mianowniki zaś ułamków, znajdujących się po jednej stronie, można przenieść jako czynniki na stronę przeciwną.

Przykład 2. Ile kg chleba można upiec z $5\frac{1}{2}$ hl żyta, jeżeli 1 hl żyta waży 70 kg, jeżeli z 5 kg żyta otrzymuje się 4 kg mąki a z 3 kg mąki wypieka się 4 kg chleba?

x kg chleba	$5\frac{1}{2}$ hl żyta	czyli:	x	11
			2	
1 hl żyta	70 kg		1	70
5 kg »	4 kg mąki		5	4
3 kg mąki	4 kg chleba		3	4

$$x = \frac{11 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 4}{3} = 410\frac{2}{3} \text{ kg.}$$

Zadania.

1. Ile Frs otrzyma się za 38 dukatów, jeżeli za dukata płaci się 11·3 K, a $95 \text{ K} = 100 \text{ Frs}$? 452.

2. Ile km ma mila austriacka, jeżeli 1 mila = 4 000 sążni, 1 sążeń = 6 stóp, a 1 m = 3·16 stóp? 7·59.

3. Ile łokci polskich pewnej materyi otrzyma się za 30 rubli (R), jeżeli za 1 m tej materyi płacono 15 Frs, 1 R = 4 Frs, a łokieć polski = 0·576 m? 13·9.

4. Ile K kosztują szyny na 1 km kolei żelaznej, jeżeli każda szyna ma 5 m długości i 125·5 kg wagi, jeżeli za 100 kg szyn płaci się 28 Frs, a 100 Frs = 95 K? 6 676·6.

5. Sztaba złota waży 8·19 funtów po 500 g; ile funtów rosyjskich waży ta sztaba, jeżeli funt rosyjski ma 409·5 g? 10.

6. Cena kawy w Hamburgu wynosiła 91½ M za 100 funtów (50 kg); ile K kosztuje kg kawy, jeżeli za 60 M płaci się 70·5 K? 2·15.

7. Ile pudów rosyjskich ma 5·5625 centnarów angielskich, jeżeli centnar ang. = 50·8 kg, a 16·38 kg = 1 pudowi? 17·24.

8. Ile ha łąki dostanie się za 9 ha roli, jeżeli 5 ha roli = 9 ha lasu, 8 ha lasu = 3 ha łąki? 6·075.

9. Ile m płótna można dostać za 16½ m materyi jedwabnej, której 1¾ m ma tę samą cenę, co 1½ m sukna, a ½ m sukna kosztuje tyle, ile 2¼ m płótna? 63.

10. Ile kosztuje sztaba złota próby 780, która waży 4 kg, jeżeli za kg czystego srebra płaci się 180 K, a 15½ kg srebra = 1 kg złota? 8 704·8 K.

11. Za czasów Karola Wielkiego nie wart był tłusty wół więcej niż 5 szelągów, których 22 wybijano z funta czystego srebra, mającego teraz wartość 90 K. Ile K wart był podówczas wół? 20·45 K.

12. Ile kosztuje kg palonej kawy, jeżeli po upaleniu każde 10 kg surowej kawy waży 8·4 kg, a kg surowej kawy kosztuje 4·2 K? 5 K.

13. Jaką wartość ma 500 chińskich Taëłów w koronach, jeżeli za 15 Frs otrzymuje się 2 Taële, a 100 Frs = 95 K? 3 562·5 K.

14. Ile ryz papieru zapisze urzędnik w 10 latach, jeżeli rocznie pracuje przez 300 dni po 6 godzin dziennie, a w 5 godzinach zapisuje 2 arkusze? 5½.

15. Za móg roli zapłacono 500 K. Jaką wartość w fun-

tach szterl. miałoby w Anglii 10 ha takiej roli, jeżeli 1 ha = 1·74 morga, 1 funt szterling = 20 K? 435.

16. Korzec pszenicy waży 171 funtów wiedeńskich. Ile K trzeba zapłacić za 50 hl tej pszenicy, jeżeli 1 hl = 0·82 korca a 190 funtów wiedeńskich kosztuje 26 K? 959·4.

17. Ile rubli kosztuje pud srebra w Rosyi, jeżeli za funt płaci się 90 R, 100 R = 256 K, a 1 pud = 40 funtów? 1406½.

18. Ile dukatów otrzymam za 565 lirów, jeżeli 100 lirów = 80 K, a dukat = 11·3 K? 40.

19. Kupiec zapłacił 115 K za 150 kg towaru; po ile będzie sprzedawał kg, jeżeli ma zarobić na tym towarze 20%? 0·92 K.

20. Ile K kosztuje 100 arkuszy papieru, którego bela kosztuje 200 Frs, a cło, koszta przewozu i zysk wynoszą 10% ceny kupna (1 bela = 10000 arkuszy, 95 K = 100 Frs)? 2·09.

21. Za 5 kg towaru zapłaciłem 300 Frs. Po ile K trzeba sprzedawać funt wiedeński, jeżeli się ma zarobić na tym towarze 12% (1 funt wied. = 0·56 kg, 100 Frs = 95 K)? 35·75.

ROZDZIAŁ XV.

Rachunek terminu średniego.

Bardzo często zdarza się, że dług, rozłożony na raty, płatne w różnych czasach czyli terminach, umarza się za zgodą wierzyciela i dłużnika naraz. Czas, w którym spłaca się dług jednorazowo, musi być tak dobrany, aby ani dłużnik ani wierzyciel nie ponieśli uszczerbku w odsetkach. Czas ten nazywamy terminem średnim, a sposób obliczania tego terminu rachunkiem terminu średniego.

Przykład 1. Dłużnik ma spłacić 1200 K w 3 równych po sobie następujących rocznych ratach. Kiedy może spłacić cały dług naraz?

Ponieważ pierwszą ratę (400 K) zwraca dłużnik wierzycielowi po roku, przeto za rok ten może pobrać od tej kwoty odsetki albo też w inny sposób może mieć z niej pewien zysk. Podobnie korzysta dłużnik z drugiej raty przez 2 lata, z trzeciej przez trzy lata, czyli razem korzysta z kwoty 400 K przez

$1 + 2 + 3 = 6$ lat. Te same odsetki, co od 400 K po 6 latach, można mieć od kwoty 3 razy większej tj. od 1200 K za czas 3 razy krótszy tj. za 2 lata, czyli zamiast oddawać po 400 K w naznaczonych terminach, może spłacić cały dług po $2 = \frac{1+2+3}{3}$ latach.

Z powodu spłaty wcześniejszej nie ponosi i wierzyciel żadnej straty, bo ile traci odsetek, otrzymując ostatnią ratę o rok wcześniej, tyle odsetek zyskuje, otrzymując pierwszą ratę o rok później.

Jeżeli raty, płatne w różnych terminach, są sobie równe, znajdujemy termin średni, dzieląc sumę tych terminów przez ich ilość.

Przykład 2. Dług 1800 K ma być spłacony w 4 ratach: 800 K po 2 miesiącach, 700 K po 3 mies., 300 K po 5 mies. Kiedy można spłacić cały dług naraz?

Dłużnik, płacąc dług ratami, korzysta z odsetek od:

800 K	za 2 mies.	czyli	od	$800 K \times 2 = 1600$	K	za 1 mies.,
700 »	» 3 »	»	»	$700 K \times 3 = 2100$	» » 1 »	
300 »	» 5 »	»	»	$300 K \times 5 = 1500$	» » 1 »	

razem: korzysta z odsetek od 5200 K za 1 mies.

Kwotę 1800 K może dłużnik zatrzymać u siebie dopóty, dopóki nie przyniesie mu tych samych odsetek, co 5200 K za 1 miesiąc. A ponieważ tem dłużej musi się kapitał procentować, im jest mniejszy, przeto, ile razy dług 1800 K mniejszy jest od sumy 5200 K, przez tyle miesięcy może dłużnik długu nie spłacać. Dzieląc przeto 5200 K przez 1800 K, otrzymamy $2\frac{8}{9}$ mies. jako termin średni. Dłużnik spłaci zatem dług 1800 K po $2\frac{8}{9}$ miesiącach.

Jeżeli raty, płatne w różnych terminach, są różne, obliczamy termin średni, mnożąc każdą ratę przez odpowiedni termin i dzieląc sumę tych iloczynów przez sumę rat.

Jeżeli liczby, wyrażające poszczególne raty, mają wspólny dzielnik, należy je przed wykonaniem mnożenia uprościć.

Przykład 3. Mam zapłacić 300 K po 2 miesiącach, 500 K po 4 mies. i 600 K po 8 mies., a zapłaciłem na rachunek tych

należytości 200 K zaraz, 300 K po 2 mies. i 400 K po 5 mies.
Kiedy mam zapłacić resztę?

Mam zapłacić:			Zapłaciłem:		
	mies.				
300 K po 2, czyli 600 K po 1			200 K po 0 mies. . .		0 K
500 » » 4 » 2 000 » » 1			300 » » 2 » . .		600 »
600 » » 8 » 4 800 » » 1			400 » » 5 » . .		2 000 »
1 400 K długu		7 400 K po 1	900 K		2 600 K
900 » spłaty		2 600 » » 1			
500 » długu		4 800 » » 1			

$$4\,800 : 500 = 9\frac{1}{2} \text{ mies.}$$

Raty, które miały być spłacone w umówionych terminach przynoszą tyle odsetek, ile 7 400 K za 1 mies.; odsetki zaś od rat spłaconych są równe odsetkom od 2 600 K za 1 mies. Aby więc żadna strona nie poniosła uszczerbku w odsetkach, muszę resztę 500 K spłacić w takim terminie, aby odsetki od tej reszty były równe odsetkom 7 400 K — 2 600 K = 4 800 K za 1 mies. Wyznaczając zatem, ile razy 500 K mieści się w 4 800 K, otrzymam termin średni. Ponieważ $4\,800 : 500 = 9\frac{1}{2}$, przeto resztę długu mam zapłacić po 9 mies. 18 dniach.

Zadania.

1. Dług 3 600 K mam spłacić kwartalnie równymi ratami po 600 K; kiedy mogę zapłacić cały dług naraz? Po $10\frac{1}{2}$ mies.

2. Ktoś ma zapłacić trzy równe kwoty: jedną po 3 mies., drugą po 5 mies., a trzecią po 8 mies. Kiedy może spłacić całą sumę naraz? Po $5\frac{1}{3}$ mies.

3. Dług 20 000 K mam spłacić równymi ratami w terminach następujących: 1. marca, 16. kwietnia i 1. lipca tego samego roku. Kiedy mógłbym cały dług naraz zapłacić? 23. maja.

4. Kapitał 2 600 K ma być spłacony w 4 równych po sobie następujących ratach w ten sposób, że pierwsza rata przypada po 3 miesiącach. W jakim terminie może nastąpić wypłata całego kapitału? Po $7\frac{1}{2}$ mies.

5. Mamy zapłacić 400 K po 4 mies., a 600 K po 6 mies. Kiedy możemy zapłacić całą sumę naraz? Po $5\frac{1}{3}$ mies.

6. Kupiec bierze towar za 1 600 K pod warunkiem, że 600 K zapłaci zaraz, a 1 000 K po 6 miesiącach. Kiedy może zapłacić całą należność naraz? Po $3\frac{3}{4}$ mies.

7. Ktoś ma spłacić 3000 K w 3 ratach: 1200 K po 3 mies., 1000 K po 4 mies., a resztę po 6 mies. Kiedy spłaci całą kwotę naraz? Po $4\frac{2}{15}$ mies.

8. Dłużnik ma zapłacić 18000 K zaraz, 15000 K po 2 latach, 12000 K po $3\frac{1}{2}$ latach, 9000 K po $4\frac{2}{3}$ latach a 6000 K po 5 latach. Kiedy mógłby umorzyć cały dług naraz? Po $2\frac{2}{3}$ latach.

9. Dług 5400 K ma być spłacony w następujących ratach: 800 K po 8 mies., 1000 K po roku i 1 mies., 1200 K po roku i 8 mies., 1600 K po 2 latach a reszta po 2 latach i 2 miesiącach. Kiedy można spłacić cały dług naraz?

Po roku i 7 mies.

10. Z pięciu kapitałów: 7200 K, 6000 K, 4800 K, 3600 K i 2400 K miał być ostatni spłacony z końcem roku 1904, a każdy poprzedzający o 2 miesiące wcześniej niż następujący. Znaleźć średni termin. 31. lipca 1904.

11. Ktoś wypożyczył na rok następujące kwoty: dnia 1. marca 300 K na 4% , 1. czerwca 400 K na 5% a 16. sierpnia 600 K na $4\frac{1}{2}\%$. W którym dniu następnego roku mógłby odsetki od tych trzech kwot naraz zapłacić? (Obliczyć odsetki za rok i liczyć spłaty od dnia wypożyczenia pierwszej kwoty t. j. od 1. marca). 16 czerwca ($15\frac{1}{2}$ mies.).

12. Kapitał 6000 K ma być spłacony wraz z rocznymi odsetkami po 4% dnia 1. kwietnia, kapitał 8000 K wraz z rocznymi odsetkami po $4\frac{1}{2}\%$ dnia 1. lipca, kapitał zaś 10000 K wraz z dwuletnimi odsetkami po $2\frac{1}{2}\%$ dnia 1. września tego samego roku. Którego dnia możnaby zwrócić te 3 kapitały z odsetkami naraz? 1. września 1904 (20 mies.).

13. Mam zapłacić 200 K po 2 mies., 250 K po 4 mies., 350 K po 6 mies. i 200 K po 10 miesiącach. Zapłaciłem 150 K gotówką, 250 K po 3 mies. i 350 K po 5 mies. Kiedy mam zapłacić resztę? Po 12 mies.

14. Dług 1800 K miał spłacić dłużnik w trzech terminach: 600 K po 3 mies., 400 K po 4 mies., a resztę po 6 mies. Za zgodą wierzyciela zwrócił 800 K po 2 mies., 200 K po 3 mies., a 400 K po 4 mies. Kiedy ma zwrócić resztę? Po $11\frac{1}{4}$ mies.



