BIBLIOTEKA PWSP ZAMOŚĆ
9101
DN., 15. 10. L. 53, 20.000

IE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:
K. BORSUK, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, W. SIERPIŃSKI,
H. STEINHAUS, W. ŚLEBODZIŃSKI i A. ZYGMUND
TOM IX

STEFAN BANACH

MECHANIKA

W ZAKRESIE SZKÓŁ AKADEMICKICH

Tom II

Wydanie trzecie niezmienione

Z ZASIŁKIEM DEPARTAMENTU NAUKI MINISTERSTWA OŚWIATY

SPÓŁDZIELNIA WYDAWNICZO-OŚWIATOWA „CZYTELNIK"
1950

102695

K

CZYTELNIK

ST. BANACH. MECHANIKA

Tom II

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:
K. BORSUK, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, W. SIERPIŃSKI,
H. STEINHAUS, W. ŚLEBODZIŃSKI i A. ZYGMUND
TOM IX

STEFAN BANACH

MECHANIKA

W ZAKRESIE SZKÓŁ AKADEMICKICH

Tom II

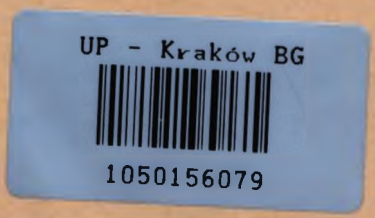
Wydanie trzecie niezmienione

Z ZASIŁKIEM WYDZIAŁU NAUKI MINISTERSTWA OŚWIATY

»CZYTELNIK«
SPÓŁDZIELNIA WYDAWNICZO - OŚWIATOWA
1949

Wydanie pierwsze 1938
Wydanie drugie poprawione odbite sposobem fotomechanicznym 1947
Wydanie trzecie ofsetowe 1949

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE
All rights reserved



Spółdzielnia Wydawniczo Oświatowa „Czytelnik"
Tłoczono w Drukarni Nr 3 „Czytelnika" w Krakowie
Zam. T. II. Nr 696. 26. 8. 1949. Papier ofsetowy 61×86 — 80 g. 4200.
Druk uk. 16. 9. 1950
M-54718

ROZDZIAŁ VI [1])

STATYKA CIAŁA SZTYWNEGO

I. Ciało swobodne

§ 1. Ciało sztywne. Ciało materialne, które mimo działania sił nie doznaje żadnych odkształceń (t. j. w którym odległości wzajemne punktów ciała nie ulegają zmianie), nazywamy *ciałem sztywnym.*

Ciał sztywnych w przyrodzie nie spotykamy, ponieważ każde ciało mniej lub więcej odkształca się pod wpływem działania sił. Jeżeli jednak jakieś ciało doznaje niewielkich tylko odkształceń pod wpływem sił nie przekraczających pewnej granicy, możemy za model takiego ciała przyjąć ciało sztywne i wnioski, jakie wyprowadzimy, będą w przybliżeniu zgadzały się z doświadczeniem (o ile siły są nieduże). Stąd pochodzi wielkie znaczenie teorii ciała sztywnego dla zastosowań praktycznych.

Zajmiemy się po kolei statyką, kinematyką i dynamiką ciała sztywnego.

Oprócz brył materialnych sztywnych spotkamy się w teorii ciała sztywnego z powierzchniami i liniami materialnymi sztywnymi (str. 171) jako modelami ciał, w których jeden lub dwa wymiary są małe w porównaniu z pozostałymi. Przykładami ciał takich są płyty, pręty, druty i t. p.

Układy sztywne punktów materialnych. Często okazuje się korzystnym uważać ciało sztywne za zbiór (układ) wielkiej liczby punktów materialnych. Zakładamy wówczas, że punkty materialne działają na siebie z pewnymi siłami, które sprawiają, że układ punktów jest sztywny, t. j. że wzajemne odległości jego punktów nie ulegają zmianie. Siły te nazywamy *siłami wewnętrznymi.*

---

[1]) Do zrozumienia tego rozdziału wystarczają wiadomości zawarte w rozdziałach I i III (od str. 70 do 76) oraz twierdzenia o środku ciężkości z rozdziału IV, zawarte w §§ 1, 2, 6, 7 i 8.

O siłach wewnętrznych zakładamy, że stosuje się do nich prawo akcji i reakcji Newtona (str. 74), t. zn. że dwa punkty działają na siebie z siłami równymi co do wielkości i wprost przeciwnie skierowanymi wzdłuż prostej łączącej te punkty.

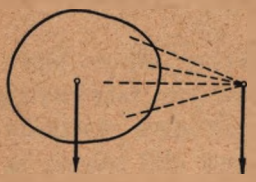
Oprócz sił wewnętrznych działać mogą na punkty układu inne jeszcze siły, które nazywamy *siłami zewnętrznymi*.

Jeżeli więc ciało sztywne uważamy za układ sztywny punktów materialnych, to siły działające na ciało sztywne są siłami zewnętrznymi, działającymi na punkty układu.

Można mieć wątpliwość, czy dopuszczalną jest rzeczą uważać ciało sztywne za układ punktów materialnych. Założenie to możemy jednak usprawiedliwić w ten sposób, że dzieląc ciało sztywne na bardzo wiele drobnych części i zastępując każdą z nich punktem materialnym o tej samej masie, otrzymamy układ sztywny punktów materialnych, przedstawiający dane ciało ze znacznym przybliżeniem.

Jakkolwiek więc założenie, że ciało sztywne jest zbiorem punktów materialnych, nie jest poprawne, będziemy się nim posługiwali, ponieważ upraszcza ono rozumowania i prowadzi do wyników zadowalających. Właściwie jednak należy teorię ciała sztywnego i teorię sztywnych układów punktów materialnych traktować odrębnie.

§ 2. Siła. Punkt zaczepienia siły. W teorii ciała sztywnego przyjmujemy, że punkt zaczepienia (początek) siły, działającej na ciało sztywne, może do ciała należeć lub nie; w tym ostatnim przypadku zakładamy jednak, że punkt zaczepienia jest sztywnie z ciałem związany (wyobrażamy sobie np., że punkt zaczepienia jest połączony z ciałem przy pomocy sztywnych prętów bez masy). Działanie siły będzie więc wówczas takie, jak gdyby punkt zaczepienia do ciała należał.



Moment względem punktu. Jeżeli siła P zaczepiona jest w punkcie A o współrzędnych x, y, z, to moment siły względem punktu O o współrzędnych x_0, y_0, z_0 ma na osie układu rzuty (str. 17, (I)):

$$(1) \qquad M_x = P_y(z-z_0) - P_z(y-y_0), \qquad M_y = P_z(x-x_0) - P_x(z-z_0),$$
$$M_z = P_x(y-y_0) - P_y(x-x_0).$$

W szczególności, gdy O jest początkiem układu, t. j. gdy $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, dostajemy:

$$(2) \qquad M_x = P_y z - P_z y, \qquad M_y = P_z x - P_x z, \qquad M_z = P_x y - P_y x.$$

Z określenia momentu (str. 17) wynika, że

$$|\bar{M}| = |\bar{P}|\, h, \tag{3}$$

gdzie h oznacza odległość punktu O od położenia siły $\bar{P}$ (t. j. od prostej, na której leży $\bar{P}$); odległość tę nazywamy *ramieniem siły $\bar{P}$ względem punktu O*.

Moment siły $\bar{P}$ względem osi l otrzymamy, obierając dowolny punkt O na l i tworząc następnie rzut na oś l momentu siły $\bar{P}$ względem O (str. 18).

Jeżeli na prostej l dany jest zwrot, to moment siły $\bar{P}$ względem osi l określony będzie przez podanie jego współrzędnej względem tej osi. Współrzędną tą nazywamy również (jeżeli nie ma obawy pomyłki) momentem siły $\bar{P}$ względem osi l.

Jeżeli oś l przechodzi przez punkt $O(x_0, y_0, z_0)$ i tworzy z osiami układu współrzędnych kąty α, β, γ, to oznaczając przez $\bar{M}$ moment siły $\bar{P}$ względem O, zaś przez M_l moment względem osi l, dostaniemy

$$M_l = M_x \cos\alpha + M_y \cos\beta + M_z \cos\gamma \tag{4}$$

czyli na mocy (1)

$$\begin{aligned} M_l = {} & P_x[(y-y_0)\cos\gamma - (z-z_0)\cos\beta] + \\ & + P_y[(z-z_0)\cos\alpha - (x-x_0)\cos\gamma] + P_z[(x-x_0)\cos\beta - (y-y_0)\cos\alpha]. \end{aligned} \tag{5}$$

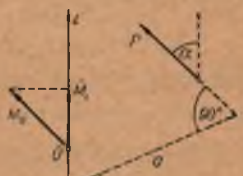
W szczególności, gdy punkt O, przez który przechodzi oś l, jest początkiem układu współrzędnych, t. j. gdy $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, otrzymamy

$$\begin{aligned} M_l = {} & P_x[y\cos\gamma - z\cos\beta] + \\ & + P_y[z\cos\alpha - x\cos\gamma] + P_z[x\cos\beta - y\cos\alpha]. \end{aligned} \tag{6}$$

Rzuty M_x, M_y, M_z we wzorach (1) i (4) są momentami siły $\bar{P}$ względem osi równoległych do osi x, y, z i przechodzących przez O, zaś we wzorach (2) względem osi x, y, z.

Jeżeli przez d oznaczymy odległość osi l od siły $\bar{P}$ (ściślej: od położenia siły $\bar{P}$, t. j. prostej na której $\bar{P}$ leży), zaś przez α kąt między l a $\bar{P}$, otrzymamy (str. 18, wzór (III))

$$|M_l| = |\bar{P}|\, d \sin\alpha. \tag{7}$$



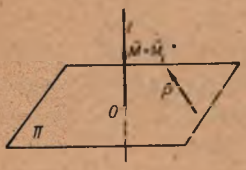
Jeżeli w szczególności $\bar{P} \perp l$, czyli $\alpha = \pi/2$, to

$$|M_l| = |\bar{P}|\, d. \tag{8}$$

Znak momentu M_l otrzymujemy z reguły następującej:

$M_l>0$, jeżeli siła $\bar{P}$ stara się obrócić ciało około osi l w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówek zegarka (względem człowieka mającego stopy w dowolnym punkcie O osi l, głowę zaś zwróconą w kierunku osi l); w przeciwnym razie $M_l<0$.

Przy pomocy powyższej reguły i wzoru (7) możemy wyznaczyć M_l, znając $|\bar{P}|$, d i α.



1.

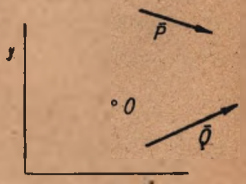
Jeżeli siła $\bar{P}$ i punkt O leżą w pewnej płaszczyźnie Π (rys. 1), to moment $\bar{M}$ siły $\bar{P}$ względem O jest prostopadły do płaszczyzny Π. Zatem $\bar{M}$ równa się wtedy momentowi siły $\bar{P}$ względem osi l, prostopadłej do Π i przechodzącej przez O:

$$|\bar{M}|=|M_l|.$$

Jeżeli badamy np. układ sił leżących w płaszczyźnie xy, wówczas przyjmując, że O leży również w xy, mamy $M_x=0$ i $M_y=0$. Moment względem osi równoległej do z, t. j. M_z, nazywamy wówczas krótko *momentem względem O* i oznaczamy wprost przez M. Zatem

$$(8)\qquad M=P_x(y-y_0)-P_y(x-x_0) \quad \text{lub} \quad M=P_x y-P_y x.$$

Przypuśćmy np., że wykreśliliśmy osie x,y jak na rysunku 2. Należy zatem przyjąć oś z skierowaną pionowo w dół. Jeżeli więc chcemy wyznaczyć moment siły $\bar{P}$ względem jakiegoś punktu O, to należy pamiętać, że $M>0$, gdy siła stara się obrócić kartkę papieru około O w kierunku wskazówek zegarka (t. j. tak jak na rys. 2); w przeciwnym razie będzie $M<0$, jak dla siły $\bar{Q}$.



2.

Mając dane ramię h, możemy więc ze wzoru (3) otrzymać M, wyznaczając znak w sposób wyżej podany.

Równowaga sił. Jeżeli ciało sztywne jest w spoczynku to mówimy, że jest *w równowadze*. O siłach zaś działających na ciało sztywne, pozostające w równowadze mówimy, że *się równoważą* (są w równowadze) lub że *się znoszą*.

Statyka zajmuje się badaniem warunków, jakim muszą czynić zadość siły, będące w równowadze.

Należy zwrócić uwagę na różnicę, jaka zachodzi między równowagą ciała a równowagą sił. Ciało jest w równowadze wtedy i tylko wtedy, gdy jest w spoczynku. Jeżeli ciało jest w równowadze, to i układ sił, działających na nie, jest w równowadze. Na odwrót jednak, jeżeli układ sił działających na ciało jest w równowadze, to nie wynika stąd jeszcze, by ciało musiało być w równowadze, ponieważ może się ono np. poruszać ruchem jednostajnym postępowym.

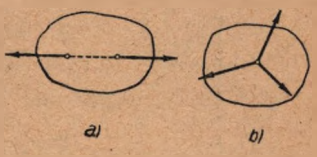
Warunki równowagi sił wyprowadzimy na razie niezależnie od zasad dynamiki, zakładając pewne hipotezy dość oczywiste. Okażemy później (w rozdz. IX), że warunki równowagi wynikają z t. zw. *zasady prac przygotowanych.*

§ 3. Hipotezy równowagi sił. Aby wyprowadzić warunki równowagi ciała sztywnego, przyjmiemy hipotezy następujące:

I. *Do układu sił, działających na ciało sztywne znajdujące się w równowadze, możemy bez zachwiania równowagi dołożyć (lub z układu usunąć):*

a) *dwie siły równe co do wielkości, i działające wzdłuż tej samej prostej, lecz wprost przeciwnie skierowane;*

b) *kilka sił o wspólnym punkcie zaczepienia, których suma jest zerem.*



II. *Siły zerowe równoważą się;* innymi słowy: *jeżeli na ciało sztywne nie działają żadne siły, to ciało może pozostawać w równowadze.*

Hipotezy powyższe można sprawdzić doświadczalnie. Wyprowadzimy z nich warunki konieczne i wystarczające dla równowagi sił. Na razie zajmiemy się pewnymi wnioskami, wypływającymi z przyjętych hipotez.

§ 4. Przekształcanie układów sił. Opierając się na określeniu przekształceń elementarnych (str. 29), możemy hipotezę I wypowiedzić jak następuje:

I'. *Jeżeli ciało sztywne jest w równowadze, to bez zachwiania równowagi możemy wykonać na układzie sił działających dowolne przekształcenia elementarne.*

Zmiana punktu zaczepienia siły. Z twierdzenia 1), str. 29, wynika, że

1° *punkt zaczepienia siły możemy obrać gdziekolwiek na prostej jej działania.*

W przypadku równowagi działanie siły będzie więc określone, jeżeli podamy jej wielkość, kierunek, zwrot i położenie, zaś punkt zaczepienia siły jest rzeczą obojętną. Na mocy tw. ze str. 18.

wnosimy stąd, że działanie siły $\bar{P}$ będzie wyznaczone, jeżeli podamy jej rzuty i rzuty jej momentu $\bar{M}$ względem dowolnego punktu. Rzuty:

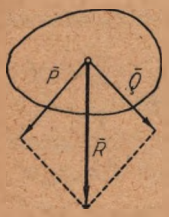
(1) $$P_x, P_y, P_z, \qquad M_x, M_y, M_z$$

określają więc działanie siły na ciało sztywne. Zauważmy, że ponieważ $\bar{M} \perp \bar{P}$, więc iloczyn skalarowy $\bar{M} \cdot \bar{P}$ jest zerem czyli

(2) $$M_x P_x + M_y P_y + M_z P_z = 0.$$

Na ogół więc pięć spośród liczb (1) wystarcza do określenia siły; szóstą możemy otrzymać z równania (2).

Prawo składania i rozkładania sił. Z twierdzeń 2) i 3), str. 29, wnosimy, że:



2° *kilka sił, zaczepionych w jednym punkcie, możemy zastąpić ich sumą, zaczepioną w tym samym punkcie.*

3° *każdą siłę możemy zastąpić kilkoma siłami o tym samym początku co siła dana i o sumie równej sile danej.*

Twierdzenia powyższe noszą nazwę *prawa składania i rozkładania sił.*

Układy równoważne. Z hipotezy I i tw. 3, str. 31, wnosimy, że:

4° *układ sił działających na ciało sztywne możemy zastąpić przez dowolny inny układ równoważny.*

Innymi słowy: *układy sił równoważne działają na ciało sztywne jednakowo*; stąd znaczenie pojęcia równoważności układów. W twierdzeniu 4° zawarte są, jak łatwo widzieć, twierdzenia 1°, 2° i 3°.

Jak wiemy, dwa układy sił są równoważne, jeżeli mają równe sumy i równe momenty ogólne względem jednego punktu (str. 22). Na mocy tw. 4° działanie układu sił na ciało sztywne będzie więc określone, jeżeli podamy sumę $\bar{R}$ i moment ogólny $\bar{M}$ układu sił względem dowolnego punktu.

Niechaj na ciało sztywne działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ zaczepione w punktach $A_1, A_2, \ldots$ o współrzędnych x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... Oznaczając przez $\bar{R}$ sumę, a przez $\bar{M}$ moment ogólny względem początku układu, otrzymamy ze wzoru (2), str. 236,

(3) $$R_x = \sum P_{ix}, \qquad R_y = \sum P_{iy}, \qquad R_z = \sum P_{iz}$$

$$M_x = \sum (P_{iy} z_i - P_{iz} y_i), \quad M_y = \sum (P_{iz} x_i - P_{ix} z_i), \quad M_z = \sum (P_{ix} y_i - P_{iy} x_i).$$

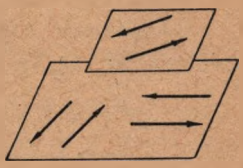
Działanie układu sił określone jest zatem przy pomocy sześciu liczb $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$.

Parametrem układu (str. 21) jest $K = \bar{R} \cdot \bar{M}$ czyli

$$K = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z. \tag{4}$$

Para sił. Układ złożony z dwóch sił równych co do wielkości, równoległych, lecz przeciwnie skierowanych nazywamy *parą sił* (str. 23). Moment pary nie zależy od wyboru punktu, względem którego moment wyznaczamy (str. 23). Ponieważ suma sił pary jest zerem, więc dwie pary są równoważne, jeżeli mają równe momenty. Zatem działanie pary sił na ciało sztywne jest określone przez podanie jej momentu.

Para sił stara się ciało obrócić. Działanie pary nie ulegnie zmianie, jeżeli dowolnie ją przesuniemy i skręcimy w jej płaszczyźnie (nie zmieniając zwrotu momentu). Parę możemy również dowolnie przesuwać w przestrzeni, byleby tylko w każdym położeniu pozostawała w płaszczyźnie równoległej i zwroty momentu były zgodne.



Para o momencie równym zeru równoważna jest wektorowi zerowemu. Parę taką nazywamy także *parą zerową*.

Redukcja układu sił. Twierdzenia dotyczące redukcji układów § 16, str. 24, pozwalają wyznaczyć najprostszy układ sił równoważny danemu (t. j. najprostszy układ sił, przez który możemy zastąpić układ dany). W szczególności, twierdzenie o redukcji możemy wypowiedzieć jak następuje:

Każdy układ sił działających na ciało sztywne możemy zastąpić:

a) *bądź przez jedną siłę równą sumie układu, zaczepioną w dowolnym punkcie O i parę sił o momencie równym momentowi układu względem O*,

b) *bądź przez dwie siły, z których jedna zaczepiona jest w dowolnie obranym punkcie.*

W podobny sposób można wypowiedzieć twierdzenia podane na str. 25 i 26.

Niechaj na ciało sztywne działa siła $\bar{P}$ o początku w punkcie A. Obierzmy dowolny punkt O. Z twierdzenia o redukcji wynika (jeżeli za układ przyjmiemy siłę $\bar{P}$), że *siłę $\bar{P}$ możemy zastąpić przez siłę jej równą, zaczepioną w O, i przez parę sił o momencie równym momentowi siły $\bar{P}$ względem O.*

Układ płaski sił. Jeżeli siły układu leżą w jednej płaszczyźnie, to układ ich nazywamy *układem płaskim*. Na mocy tw. 3, str. 26, *układ płaski sił bądź ma wypadkową, bądź jest równoważny parze sił.*

Z tabelki podanej na str. 26 widzimy, że układ płaski ma wypadkową, gdy suma sił układu jest różna od zera lub gdy zarówno suma jak moment ogólny są równe zeru; jeżeli zaś suma jest zerem, a moment ogólny różny od zera, to układ jest równoważny parze.

Niechaj w płaszczyźnie xy dany będzie układ płaski sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$, zaczepionych w punktach $A_1, A_2, \ldots$ o współrzędnych $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$

Rzuty sił P_{iz} na oś z są zerami, jak również współrzędne z_i punktów A_i. Zatem, oznaczając przez $\bar{R}$ sumę sił, a przez $\bar{M}$ moment ogólny względem początku układu, otrzymujemy ze wzorów (3), str. 240:

$$R_z = 0, \qquad M_x = 0, \qquad M_y = 0.$$

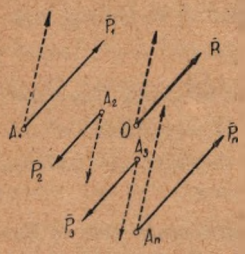
Działanie więc układu płaskiego sił wyznaczone jest przez trzy liczby: R_x, R_y i M_z.

Ze wzorów (3), str. 240, otrzymujemy też (pisząc M zamiast M_z):

$$(5) \qquad R_x = \Sigma P_{ix}, \qquad R_y = \Sigma P_{iy}, \qquad M = \Sigma (P_{ix} y_i - P_{iy} x_i).$$

Układ równoległy sił. Z tw. 4, str. 26, wynika, że *układ równoległy sił ma wypadkową albo jest równoważny parze sił.*

Niech siły równoległe $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ mają początki w punktach $A_1, A_2, \ldots$ o współrzędnych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ Załóżmy, że suma sił $\bar{R}$ jest różna od zera. Zatem dany układ ma wypadkową.



Obierzmy zwrot dowolnej siły układu, np. zwrot siły $\bar{P}_1$, za dodatni. Oznaczmy dla $i = 1, 2, \ldots$ przez P_i liczbę, której bezwzględna wartość równa się $|\bar{P}_i|$, zaś znak jest dodatni lub ujemny, zależnie od tego, czy $\bar{P}_i$ ma zwrot dodatni (t. j. zgodny ze zwrotem siły $\bar{P}_1$) czy nie. Podobnie określamy R. Mamy $R = \Sigma P_i$.

Na str. 28 dowiedliśmy, że wypadkowa $\bar{R}$ przechodzi przez pewien punkt O, zwany *środkiem sił*. Współrzędne x_0, y_0, z_0 środka sił otrzymamy ze wzoru (4), str. 28, kładąc $a_i = P_i$:

$$(6) \qquad x_0 = \Sigma P_i x_i / R, \quad y_0 = \Sigma P_i y_i / R, \quad z_0 = \Sigma P_i z_i / R.$$

Jeżeli siły obrócimy około ich punktów zaczepienia o ten sam kąt tak, że pozostaną nadal równoległe (jak np. wektory kreskowane na rysunku), to środek sił nie ulegnie zmianie. Wynika to ze wzorów (6), gdyż współrzędne x_0, y_0, z_0 zależą tylko od P_i, x_i, y_i i z_i, a nie zależą od kierunku sił. Nowa wypadkowa będzie więc również przechodziła przez O.

Jeżeli punkty zaczepienia sił leżą w jednej płaszczyźnie (lub na jednej prostej), to środek sił leży również na tej płaszczyźnie (lub na tej prostej).

Zakładając bowiem, że punkty zaczepienia leżą na płaszczyźnie Π i obierając tę płaszczyznę za płaszczyznę xy, otrzymamy $z_1=z_2=\ldots=0$; ze wzorów (6) dostaniemy więc $z_0=0$, co oznacza, że środek sił leży w płaszczyźnie Π.

Podobnie, jeżeli punkty zaczepienia leżą na jednej prostej l, to obierając ją za oś x, mamy $y_1=y_2=\ldots=0$ i $z_1=z_2=\ldots=0$, więc na mocy (6) $y_0=0$ i $z_0=0$; zatem środek sił leży na prostej l.

Niech na punkty materialne o masach $m_1, m_2, \ldots$ działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ równoległe, zgodnie skierowane i proporcjonalne co do wielkości do mas poszczególnych punktów. Kładąc $P_1=|\bar{P}_1|$, $P_2=|\bar{P}_2|, \ldots$, otrzymujemy:

$$(7) \qquad P_1=km_1, \qquad P_2=km_2, \ldots \qquad R=P_1+P_2+\ldots=km,$$

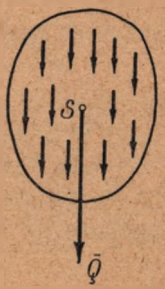
gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności, zaś $m=m_1+m_2+\ldots$ Ze wzorów (6) i (7) dostaniemy po podstawieniu:

$$x_0=\Sigma m_i x_i/m, \qquad y_0=\Sigma m_i y_i/m, \qquad z_0=\Sigma m_i z_i/m.$$

Porównując te równości ze wzorami (I), str. 154, widzimy, że środek sił jest środkiem masy danego układu punktów materialnych.

A więc: *środek masy układu punktów materialnych jest środkiem działających na te punkty sił, zgodnie skierowanych, równoległych, i proporcjonalnych co do wielkości do mas tych punktów.*

Siły ciężkości. Niech ciało sztywne znajduje się w polu siły ciężkości. Uważając ciało za układ punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \ldots$, możemy przyjąć, że ciężary poszczególnych punktów są siłami równoległymi, skierowanymi zgodnie (pionowo w dół). Ciężary mają zatem wypadkową.



Wielkości ciężarów poszczególnych punktów wynoszą $Q_1=m_1g$, $Q_2=m_2g$, ... (gdzie g oznacza przyśpieszenie ziemskie). Zatem wielkości ciężarów są proporcjonalne do mas punktów. Na mocy więc poprzedniego twierdzenia, środkiem sił ciężkości jest środek masy ciała. Wielkość wypadkowej jest

$$Q=m_1g+m_2g+\ldots=(m_1+m_2+\ldots)g=mg,$$

gdzie m oznacza masę ciała.

A więc: *wypadkowa sił ciężkości przechodzi w każdym położeniu ciała przez środek ciężkości ciała. Ciężar ciała* (t. j. wypadkowa sił ciężkości, działających na poszczególne jego punkty) *wynosi*

$$Q = mg, \tag{8}$$

gdzie m oznacza masę ciała, a g przyśpieszenie ziemskie.

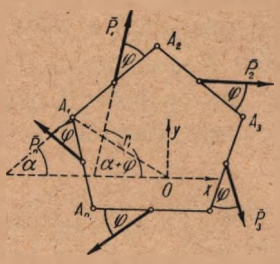
Opierając się na powyższym twierdzeniu możemy działanie siły ciężkości zastąpić jedną siłą, zaczepioną w środku ciężkości ciała.

Układy par. Układ złożony z kilku par ma sumę zero. Z tabelki na str. 26 wynika, że układ taki równoważny jest parze lub wektorowi zerowemu (t. j. parze zerowej). Miech $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \ldots$ oznaczają momenty poszczególnych par. Wówczas moment ogólny będzie $\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots$ Z twierdzenia o redukcji (str. 24) otrzymujemy więc twierdzenie następujące:

Układ złożony z kilku par równoważny jest jednej parze o momencie równym momentowi ogólnemu układu.

Zauważmy, że para sił (o momencie różnym od zera) nie może być równoważna jednej sile. Ze względu bowiem na to, że suma sił pary jest zerem, siła ta musiałaby być zerem, a jej moment różny od zera, co jest niemożliwe.

Przykład 1. W środkach boków wielokąta płaskiego $A_1, A_2, \ldots, A_n$ zaczepione są siły $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$, leżące w płaszczyźnie wielokąta, tworzące z jego bokami $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \ldots, \overline{A_nA_1}$ kąt φ, skierowane na zewnątrz i proporcjonalne co do wielkości do boków wielokąta.



Łatwo zauważyć, że suma sił jest zerem. Tworząc bowiem sumę $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_n$, otrzymamy wielokąt podobny do danego, lecz skręcony względem niego o kąt φ.

Układ sił jest więc równoważny parze albo zeru.

Obierzmy dowolny układ współrzędnych $O(x,y)$ i oznaczmy przez x_1y_1, x_2y_2, ... współrzędne punktów $A_1, A_2, \ldots$ Punkt zaczepienia siły $\overline{P}_1$ ma współrzędne $(x_1+x_2)/2$, $(y_1+y_2)/2$. Zatem moment siły $\overline{P}_1$ względem O wynosi ((8), str. 238)

$$M_1 = P_{1_x}(y_1+y_2)/2 - P_{1_y}(x_1+x_2)/2. \tag{9}$$

Według założenia jest

$$|\bar{P}_1| = \lambda d_1, \tag{10}$$

gdzie $d_1 = A_1A_2$, zaś λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Jeżeli $\overline{A_1A_2}$ tworzy z osią x kąt α, to siła $\bar{P}_1$ tworzy z osią x kąt $\alpha+\varphi$. Zatem:

$$P_{1_x} = |\bar{P}_1| \cos(\alpha+\varphi), \qquad P_{1_y} = |\bar{P}_1| \sin(\alpha+\varphi).$$

Na mocy więc (10) jest $P_{1_x} = \lambda d_1 [\cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi]$. Lecz $d_1 \cos\alpha = x_2 - x_1$ i $d_1 \sin\alpha = y_2 - y_1$, więc

$$P_{1_x} = \lambda[(x_2 - x_1)\cos\varphi - (y_2 - y_1)\sin\varphi].$$

Podobnie

$$P_{1_y} = \lambda[(y_2 - y_1)\cos\varphi + (x_2 - x_1)\sin\varphi].$$

Wstawiając w (9), otrzymamy

$$M_1 = \tfrac{1}{2}\lambda[2(y_1x_2 - y_2x_1)\cos\varphi + (y_1^2 + x_1^2 - y_2^2 - x_2^2)\sin\varphi]. \tag{11}$$

Kładąc $OA_1 = r_1$, $OA_2 = r_2, \ldots$ i oznaczając przez $p_1, p_2, \ldots$ pola trójkątów OA_1A_2, OA_2A_3, ..., dostaniemy $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$, $r_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \ldots$, $p_1 = \frac{1}{2}(y_1x_2 - y_2x_1)$ i t. d. Zatem na mocy (11)

$$M_1 = \tfrac{1}{2}\lambda[4p_1 \cos\varphi + (r_1^2 - r_2^2)\sin\varphi]. \tag{12}$$

Podobne wyrażenia otrzymamy na momenty pozostałych sił. Ogólny moment sił względem O wynosi $M = M_1 + M_2 + \ldots$ Więc w myśl (12)

$$M = \tfrac{1}{2}\lambda[4(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\cos\varphi + (r_1^2 - r_2^2 + r_2^2 - r_3^2 + \ldots r_n^2 - r_1^2)\sin\varphi].$$

Ponieważ $p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ jest polem wielokąta $A_1A_2 \ldots A_n$, więc

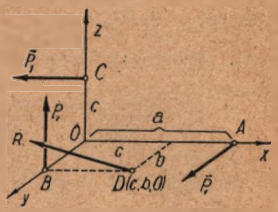
$$M = 2\lambda p \cos\varphi. \tag{13}$$

Moment ogólny jest zatem proporcjonalny do pola wielokąta i do cosinusa kąta φ.

W szczególności, gdy siły są prostopadłe do boków wielokąta, to $\varphi = \pi/2$ i $\cos\varphi = 0$, skąd na mocy (13) $M = 0$, czyli siły tworzą układ równoważny zeru.

Gdy zaś siły są skierowane wzdłuż boków (t. j. gdy $\varphi = 0$), mamy na mocy (13) $M = 2\lambda p$, więc moment jest wówczas proporcjonalny do pola wielokąta.

Przykład 2. W punktach $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ i $C(0,0,c)$ na osiach układu współrzędnych (x,y,z) zaczepione są siły $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$, równoległe do osi układu, równe co do wielkości i mające zwroty jak na rysunku. Jaki zachodzi związek między współrzędnymi a, b i c, jeżeli układ sił ma wypadkową?



Położymy $P=|\bar{P}_1|=|\bar{P}_2|=|\bar{P}_3|$. Suma sił $\bar{R}$ ma zatem rzuty

$$R_x=-P, \quad R_y=P, \quad R_z=P. \tag{14}$$

Obliczmy moment ogólny $\bar{M}$ względem O. Moment sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_3$ względem osi x jest zerem; moment siły $\bar{P}_2$ względem osi x wynosi $-Pb$ Zatem $M_x=-Pb$; podobnie $M_y=Pc$ i $M_z=-Pa$. Parametr układu wynosi $K=\bar{R}\bar{M}=R_xM_x+R_yM_y+R_zM_z$, więc

$$K=P^2(b+c-a).$$

Jeżeli układ ma wypadkową, to $K=0$ (str. 26). Zatem

$$b+c-a=0. \tag{15}$$

Równanie (15) stanowi warunek dostateczny i, jak łatwo widać z tabelki na str. 26, również warunek konieczny na to, by układ miał wypadkową, gdyż $\bar{R}\neq 0$.

Za punkt zaczepienia wypadkowej możemy przyjąć punkt $D(x,y,z)$, względem którego moment ogólny jest zerem.

Oznaczmy przez $\bar{M}'$ moment ogólny względem D. Mamy:

$$M'_x=-Pz-P(b-y), \quad M'_y=-Px+P(c-z), \quad M'_z=-P(a-x)+Py.$$

Zakładając, że moment względem D jest zerem, dostaniemy:

$$y-z=b, \qquad x+z=c, \qquad x+y=a.$$

Z uwagi na (15) równania te są od siebie zależne. Dwa z nich są równaniami prostej, na której leży wypadkowa. Kładąc np. $z=0$, otrzymamy $x=c$ i $y=b$. A więc za punkt zaczepienia wypadkowej możemy przyjąć punkt $D(c,b,0)$.

Przykład 3. W punktach A i B zaczepione są siły równoległe $\bar{P}$ i $\bar{Q}$, przyczem $\bar{P}+\bar{Q}\neq 0$. Wyznaczyć środek sił.

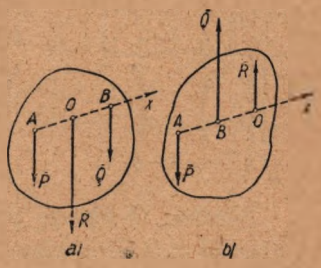
Środek sił leży na prostej AB (str. 243). Obierzmy ją za oś x, przyjmując punkt A za początek osi x i nadając jej zwrot taki, by punkt B leżał na jej części dodatniej. Położymy $P=|\bar{P}|$ i oznaczmy

przez Q liczbę, której wartość bezwzględna równa się $|\bar{Q}|$, znak zaś jest + lub — zależnie od tego, czy $\bar{Q}$ ma zwrot zgodny z siłą $\bar{P}$, czy przeciwny. Kładąc $AB=d$ i oznaczając przez x_0 współrzędną środka sił O, dostaniemy ze wzoru (6), str. 242,

$$x_0=Qd/R, \qquad \text{gdzie} \qquad R=P+Q.$$

Jeżeli siły $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ mają zwroty zgodne, to $Q>0$, a zatem $0<Q/R<1$, skąd $0<x_0<d$. Środek sił znajduje się wówczas między punktami A i B.

Jeżeli zaś siły $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ mają zwroty przeciwne i np. $|\bar{P}|<|\bar{Q}|$, to $Q<0$ i $R<0$, skąd $x_0>0$. Ponadto $|R|<|Q|$, zatem $x_0>d$. Środek sił leży więc wówczas poza punktem B.



Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach jest $AO/BO=|\bar{Q}|/|\bar{P}|$.

A więc: *środek dwóch sił równoległych* (o sumie $\neq 0$) *znajduje się na prostej łączącej punkty zaczepienia tych sił.*

Jeżeli siły skierowane są zgodnie, to środek ich leży między punktami zaczepienia, w przeciwnym razie leży on poza punktem zaczepienia tej siły, której wartość bezwzględna jest większa.

Odległości środka sił od punktów zaczepienia są w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do wielkości tych sił.

Przykład 4. Na pręt sztywny AB działają siły $\bar{P}_1,\bar{P}_2,\ldots$ o początkach w $A_1,A_2,\ldots$ oraz siły $\bar{Q}_1,\bar{Q}_2,\ldots$ o początkach w $B_1,B_2,\ldots$ Wszystkie siły są do siebie równoległe i prostopadłe do pręta, przyczem siły $\bar{P}_1,\bar{P}_2,\ldots$ mają zwrot przeciwny niż siły $\bar{Q}_1,\bar{Q}_2,\ldots$

Niechaj $\bar{R}=\bar{P}_1+\bar{P}_2+\ldots+\bar{Q}_1+\bar{Q}_2+\ldots$ Oznaczmy przez $P_1,P_2,\ldots$ i $Q_1,Q_2,\ldots$ bezwzględne wartości sił, przez $a_1,a_2,\ldots$ i $b_1,b_2,\ldots$ odpowiednio długości odcinków $AA_1,AA_2,\ldots$ i $AB_1,AB_2,\ldots$ Przyjmijmy zwrot sił $\bar{P}_1,\bar{P}_2,\ldots$ za dodatni. Połóżmy

$$R=P_1+P_2+\ldots-Q_1-Q_2-\ldots \tag{16}$$

Oczywiście $|R|=|\bar{R}|$. Gdy $R>0$, suma $\bar{R}$ ma zwrot zgodny z siłami $\bar{P}_1,\bar{P}_2,\ldots$ Gdy zaś $R<0$, to $\bar{R}$ ma zwrot zgodny z siłami $\bar{Q}_1,\bar{Q}_2,\ldots$

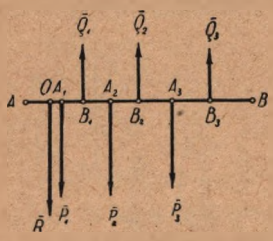
Obliczmy moment ogólny M sił względem A. Oznaczając przez $M_1,M_2,\ldots$ i $M_1',M_2',\ldots$ momenty sił $\bar{P}_1,\bar{P}_2,\ldots$ i $\bar{Q}_1,\bar{Q}_2,\ldots$ względem A, mamy (według umowy co do znaku momentu, przyjętej na str. 238):

$$M_1=P_1a_1, \quad M_2=P_2a_2, \quad \ldots, \qquad M_1'=-Q_1b_1, \quad M_2'=-Q_2b_2, \quad \ldots$$

Zatem

$$M = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots - Q_1 b_1 - Q_2 b_2 - \ldots \tag{17}$$

Załóżmy, że $\bar{R}=0$. Układ sił równoważny jest wówczas parze o momencie M według wzoru (17).



Gdy $M>0$, to para będzie starała się obrócić pręt w kierunku wskazówek zegara, gdy zaś $M<0$ — w kierunku przeciwnym. Gdy wreszcie $M=0$, układ równoważny będzie zeru.

Załóżmy teraz, że $\bar{R}\neq 0$. Układ ma zatem wypadkową.

Niechaj O będzie początkiem wypadkowej $\bar{R}$, znajdującym się na prostej AB. Położmy $d=\pm AO$, przyjmując znak $+$, gdy punkt O jest po tej samej stronie punktu A, co początki sił, zaś znak $-$ w przypadku przeciwnym. Jak łatwo sprawdzić, moment wypadkowej względem O wynosi przy tym znakowaniu Rd. Ponieważ moment wypadkowej równa się momentowi ogólnemu, więc dostaniemy z (17)

$$d = \frac{1}{R}(P_1 a_1 + P_2 a_2 + \ldots - Q_1 b_1 - Q_2 b_2 - \ldots).$$

§ 5. Warunki równowagi sił. Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie I. *Na to, by układ sił działających na ciało sztywne był w równowadze, potrzeba i wystarcza, by suma sił i moment ogólny były zerem,* czyli *by układ sił był równoważny zeru.*

Dowód. Udowodnimy najpierw, że warunek jest konieczny. Przyjmijmy, że ciało sztywne jest układem sztywnym punktów materialnych $A_1, A_2, \ldots$ i że jest w równowadze pod działaniem danego układu sił. Weźmy pod uwagę dowolny punkt A_i. Oznaczmy przez $\bar{P}_i$ sumę sił zewnętrznych, a przez $\bar{W}_i$ sumę sił wewnętrznych, zaczepionych w A_i. Ponieważ punkt A_i jest w równowadze (gdyż cały układ sztywny jest w równowadze), więc $\bar{P}_i + \bar{W}_i = 0$. Zatem

$$\Sigma(\bar{P}_i + \bar{W}_i) = 0, \tag{1}$$

gdzie suma Σ rozciągnięta jest na wszystkie punkty A_i danego układu sztywnego.

Z prawa akcji i reakcji wynika, że suma sił, z jakimi działają na siebie dwa punkty, jest zerem. Ponieważ wszystkie siły wewnętrzne możemy ułożyć w pary, z jakimi działają na siebie dwa punkty, więc suma sił wewnętrznych jest zerem czyli $\Sigma \overline{W}_i = 0$, skąd na mocy (1)

$$\Sigma \overline{P}_i = 0. \tag{2}$$

Wynika stąd, że suma sił zewnętrznych, t. j. sił działających na ciało sztywne w równowadze, jest zerem.

Obierzmy teraz dowolny punkt O. Ponieważ siły $\overline{P}_i$ i $\overline{W}_i$ mają wspólny początek A_i, a ponadto $\overline{P}_i + \overline{W}_i = 0$, więc (str. 17) $\mathrm{Mom}_O \overline{P}_i + \mathrm{Mom}_O \overline{W}_i = 0$, skąd

$$\Sigma(\mathrm{Mom}_O \overline{P}_i + \mathrm{Mom}_O \overline{W}_i) = 0. \tag{3}$$

Moment ogólny sił wewnętrznych, z jakimi dwa punkty działają na siebie, jest — jak łatwo stwierdzić — zerem. Zatem moment ogólny wszystkich sił wewnętrznych jest zerem, czyli $\Sigma \mathrm{Mom}_O \overline{W}_i = 0$, skąd na mocy (3)

$$\Sigma \mathrm{Mom}_O \overline{P}_i = 0. \tag{4}$$

Dowiedliśmy więc, że zarówno suma jak i moment ogólny sił działających na ciało sztywne jest zerem. Konieczność warunku jest tym samym udowodniona.

Załóżmy teraz, że dany układ sił jest równoważny zeru. Ponieważ układ równoważny zeru jest równoważny sile zerowej, więc na mocy hipotezy II (str. 239) jest on w równowadze. Warunek jest więc zarazem wystarczającym, c. b. d. d.

Z tw. I wynika, że jeżeli układ sił działających na ciało sztywne nie jest równoważny zeru, to ciało nie może być w równowadze. W szczególności nie może więc pozostawać w równowadze ciało sztywne pod działaniem układu sił złożonego

bądź z jednej siły różnej od zera,

bądź z jednej pary sił o momencie różnym od zera,

bądź z jednej siły różnej od zera i jednej pary o momencie różnym od zera.

Jak wiemy (str. 23), układ sił jest równoważny zeru, jeżeli momenty ogólne względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej są zerami. Opierając się na tw. I, otrzymujemy stąd następujące

Twierdzenie II. *Na to, aby układ sił działających na ciało sztywne był w równowadze, potrzeba i wystarcza, by momenty układu względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej były równe zeru.*

W zastosowaniach korzystamy często z następującego twierdzenia:

Twierdzenie III. *Jeżeli układ złożony z trzech sił jest w równowadze, to siły te leżą w jednej płaszczyźnie i bądź są równoległe, bądź ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie.*

Tw. III wynika z twierdzenia rozdz. I, § 14 (str. 23), w którego dowodzie wykazano, że wektory leżą w jednej płaszczyźnie.

Postać analityczna warunków równowagi. Obierzmy dowolny układ współrzędnych $O(x,y,z)$. Niechaj na ciało sztywne działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ zaczepione w punktach $A_1, A_2, \ldots$ o współrzędnych $x_1, y_1, z_1,\ x_2, y_2, z_2, \ldots$ Oznaczmy przez $\bar{R}$ sumę, a przez $\bar{M}$ moment ogólny układu względem O. Na mocy tw. I (str. 248) równania:

$$\bar{R}=0, \qquad \bar{M}=0 \tag{5}$$

stanowią warunek konieczny i wystarczający równowagi. Tworząc rzuty na osie układu, otrzymujemy z (5) i ze wzorów (3), str. 240:

$$\Sigma P_{ix}=0, \qquad \Sigma P_{iy}=0, \qquad \Sigma P_{iz}=0, \tag{I}$$

$$\Sigma(P_{iy}z_i-P_{iz}y_i)=0, \quad \Sigma(P_{iz}x_i-P_{ix}z_i)=0, \quad \Sigma(P_{ix}y_i-P_{iy}x_i)=0. \tag{II}$$

Równania (I) noszą nazwę *warunku rzutów*, a równania (II) *warunku momentu*.

Równania (I) i (II) są postacią analityczną warunków równowagi układu sił. Z równań tych możemy na ogół wyznaczyć sześć niewiadomych.

Układ płaski sił. Warunki równowagi stosują się oczywiście także do układu płaskiego sił.

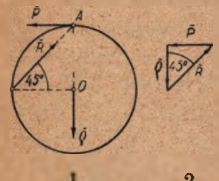
Niech siły leżą w płaszczyźnie xy. Z uwagi na to, że $P_{iz}=0$ i $z_i=0$, warunki równowagi (I) i (II) przyjmą postać:

$$\Sigma P_{ix}=0, \qquad \Sigma P_{iy}=0, \tag{I'}$$

$$\Sigma(P_{ix}y_i-P_{iy}x_i)=0. \tag{II'}$$

W przypadku układu płaskiego otrzymujemy więc trzy równania. Możemy z nich na ogół wyznaczyć trzy niewiadome.

Przykład 1. Kula ciężka jest w równowadze pod działaniem trzech sił (rys. 1): ciężaru $\bar{Q}$ (zaczepionego w środku kuli O), siły poziomej $\bar{P}$ (zaczepionej w punkcie A, położonym na powierzchni kuli w końcu średnicy pionowej) i siły $\bar{R}$ (zaczepionej w punkcie B, położonym na powierzchni kuli w końcu średnicy poziomej). Dany jest ciężar $\bar{Q}$. Wyznaczyć siły $\bar{P}$ i $\bar{R}$.



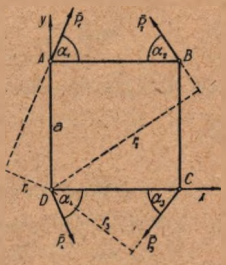
1. 2.

Siły $\bar{P}$, $\bar{Q}$ i $\bar{R}$ są w równowadze, więc na mocy tw. III leżą w jednej płaszczyźnie i kierunki ich przecinają się w jednym punkcie, którym jest punkt A. Siła $\bar{R}$ ma więc kierunek prostej BA, która tworzy z poziomem kąt 45^0. Ponieważ $\bar{Q}+\bar{P}+\bar{R}=0$, więc znając siłę $\bar{Q}$ i kierunki sił $\bar{P}$ i $\bar{R}$, możemy utworzyć trójkąt sił (rys. 2). Z trójkąta tego otrzymujemy:

$$P=Q, \qquad R=Q/\cos 45^0=\sqrt{2}\,Q,$$

gdzie P, Q i R oznaczają wartości bezwzględne sił.

Przykład 2. W wierzchołkach kwadratu $ABCD$ o boku a zaczepione są cztery siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$, leżące w płaszczyźnie kwadratu i tworzące z jego bokami kąty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (rys. 3). Podać warunki równowagi.



3.

Oznaczmy przez P_1, P_2, P_3, P_4 bezwzględne wartości sił. Obierzmy osie x i y wzdłuż boków kwadratu. Tworząc rzuty sił na osie x i y, dostaniemy w przypadku równowagi (przy zwrotach sił jak na rys. 3):

$$(6)\quad P_1\cos\alpha_1 - P_2\cos\alpha_2 - P_3\cos\alpha_3 + P_4\cos\alpha_4 = 0,$$

$$(7)\quad P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 - P_3\sin\alpha_3 - P_4\sin\alpha_4 = 0.$$

Oznaczając przez r_1, r_2, r_3, r_4 ramiona sił względem wierzchołka D, otrzymamy:

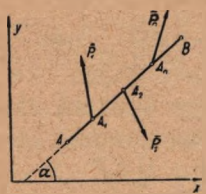
$$r_1 = a\cos\alpha_1, \qquad r_2 = \sqrt{2}\,a\sin(\alpha_2+45^0), \qquad r_3 = a\sin\alpha_3.$$

Ponadto $r_4=0$. Ponieważ w przypadku równowagi moment ogólny względem D jest zerem, więc (przyjmując znak momentu podług reguły podanej na str. 238) dostaniemy po podzieleniu przez a

$$(8)\qquad P_1\cos\alpha_1 - P_2\sqrt{2}\sin(\alpha_2+45^0) + P_3\sin\alpha_3 = 0.$$

Równania (6), (7) i (8) stanowią warunek równowagi konieczny i wystarczający.

Przykład 3. Na pręt AB, leżący w płaszczyźnie poziomej xy, działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$, leżące w tejże płaszczyźnie i zaczepione w punktach $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Podać warunki, jakim muszą czynić zadość siły, aby pręt był w równowadze w każdym położeniu na płaszczyźnie xy przy założeniu, że siły nie zmieniają swych wielkości, kierunków, zwrotów ani punktów zaczepienia (na pręcie).



Weźmy pod uwagę dowolne położenie pręta AB w płaszczyźnie xy. Oznaczmy przez x_0, y_0 współrzędne punktu A, przez $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ współrzędne punktów $A_1, A_2, \ldots$ i przez α kąt, jaki pręt AB tworzy z osią x-ów. Położymy: $d_1 = AA_1$, $d_2 = AA_2$, ..., $d_n = AA_n$. Mamy:

$$x_i = x_0 + d_i \cos\alpha, \qquad y_i = y_0 + d_i \sin\alpha \qquad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{9}$$

Z warunków równowagi (I') i (II'), str. 250, otrzymujemy:

$$\Sigma P_{i_x} = 0, \qquad \Sigma P_{i_y} = 0, \tag{10}$$

$$\Sigma(P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) = \Sigma[P_{i_x}(y_0 + d_i \sin\alpha) - P_{i_y}(x_0 + d_i \cos\alpha)] = 0. \tag{11}$$

Warunek (11) możemy napisać w postaci

$$y_0 \Sigma P_{i_x} - x_0 \Sigma P_{i_y} + \sin\alpha \Sigma P_{i_x} d_i - \cos\alpha \Sigma P_{i_y} d_i = 0, \tag{12}$$

skąd na mocy (10)

$$\sin\alpha \Sigma P_{i_x} d_i - \cos\alpha \Sigma P_{i_y} d_i = 0. \tag{13}$$

Ponieważ związek (13) ma zachodzić dla każdego kąta α, więc dla $\alpha = \pi/2$, a następnie dla $\alpha = 0$ dostajemy:

$$\Sigma P_{i_x} d_i = 0, \qquad \Sigma P_{i_y} d_i = 0. \tag{14}$$

Równania (10) i (14) są warunkami koniecznymi i dostatecznymi na to, aby pręt był w równowadze w każdym swym położeniu na płaszczyźnie.

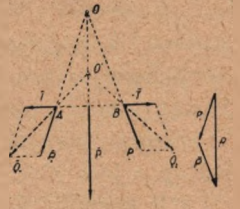
Jeżeli bowiem zachodzą warunki (10) i (14), to łatwo widzieć, że zachodzi też warunek (13), a zatem na mocy (10) również i warunki (12) i (11).

Warunki zaś (10) i (11) są, jak widzieliśmy, konieczne i wystarczające dla równowagi na mocy (I') i (II').

§ 6. Grafostatyka. Wielobok sznurowy. Zadania, z jakimi spotykamy się w statyce, prowadzą często do długich i żmudnych rachunków. Istnieją jednak metody graficzne (t. j. rysunkowe), pozwalające otrzymać w wielu przypadkach rozwiązania przybliżone wprawdzie, lecz wystarczająco dokładne dla zastosowań. Metody te mają wielkie znaczenie w technice, gdyż prowadzą do celu szybciej, z pominięciem zawiłych obliczeń.

Ta część statyki teoretycznej, która zajmuje się metodami graficznymi, nosi nazwę *grafostatyki*.

Poznamy tu tylko niektóre metody graficzne, jak np. wyznaczanie graficzne (przy pomocy wieloboku sznurowego) wypadkowej układu płaskiego sił, oraz pewne ich zastosowania. Później (w § 16) poznamy jeszcze metody graficzne, służące do wyznaczania napięć w prętach kratownicy.



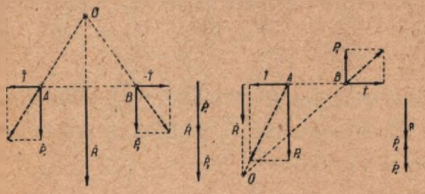
1. 1a.

Składanie sił. Mając dwie siły $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$, których kierunki przecinają się w punkcie O, wyznaczamy obok sumę $\bar{R}$ (rys. 1a), a następnie rysujemy wypadkową przez punkt O (rys. 1).

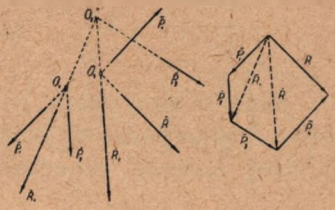
Jeżeli punkt O leży poza granicą rysunku, możemy postąpić jak następuje: dodajemy dwie siły $\bar{T}$ i $-\bar{T}$, zaczepione w punktach A i B (t. j. w początkach sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$) i działające wzdłuż prostej AB. Układ $\bar{T}, -\bar{T}, \bar{P}_1, \bar{P}_2$ jest oczywiście równoważny układowi $\bar{P}_1, \bar{P}_2$, gdyż siły $\bar{T}$ i $-\bar{T}$ znoszą się nawzajem, a zatem wypadkowa nowego układu czterech sił jest ta sama co poprzednio.

Siły $\bar{T}$ i $\bar{P}_1$ zastępujemy siłą $\bar{Q}_1 = \bar{T} + \bar{P}_1$ o początku w A; podobnie siły $-\bar{T}$ i $\bar{P}_2$ zastępujemy siłą $\bar{Q}_2 = -\bar{T} + \bar{P}_2$ o początku w B. Wypadkowa $\bar{R}$ przechodzi przez punkt przecięcia O' sił $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$.

Konstrukcję powyższą można również zastosować do przypadku dwóch sił równoległych, nie tworzących pary (rys. 2, 2a i 3, 3a).



2. 2a. 3. 3a.



4. 4a.

W tenże sposób można otrzymać wypadkową (lub parę wypadkową) układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ (str. 253, rys. 4 i 4a). Tworzymy najpierw wypadkową $\bar{R}_1$ dwóch z tych sił (np. sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$) i otrzymujemy układ zawierający już tylko $n-1$ sił.

Szybciej prowadzi do celu metoda, którą poznamy obecnie.

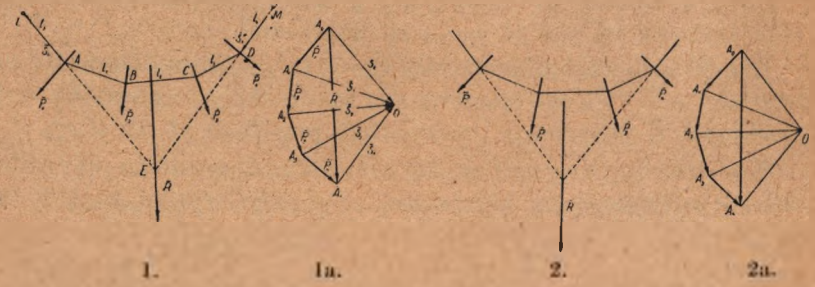
Wielobok sznurowy. Przypuśćmy, że mamy znaleźć wypadkową układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ (rys. 1).

Tworzymy najpierw sumę $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_4$. Otrzymany wielobok nazywamy *wielobokiem sił*[1]).

Oznaczmy (w wieloboku sił) przez A_0 początek siły $\bar{P}_1$, zaś przez A_1, A_2, A_3, A_4 końce sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$. Obierzmy teraz dowolny punkt O poza wielobokiem sił. Punkt ten nazywamy *biegunem*.

Łączymy biegun O z punktami $A_0, A_1, \ldots, A_4$. Z dowolnego punktu A, położonego na kierunku siły P_1, kreślimy proste l_0 i l_1, równoległe odpowiednio do prostych OA_0 i OA_1. Prostą l_1 przedłużamy aż do punktu B jej przecięcia z kierunkiem siły $\bar{P}_2$. Prosta l_1 przetnie kierunek siły $\bar{P}_2$, gdyż l_1 jest równoległa do OA_1, zaś OA_1 nie jest równoległa do $\bar{P}_2$ (rys. 1a).

Z punktu B kreślimy prostą $l_2 \| OA_2$ aż do punktu jej przecięcia C z kierunkiem siły $\bar{P}_3$. Z punktu C kreślimy prostą $l_3 \| OA_3$ aż do punktu jej przecięcia D z kierunkiem siły $\bar{P}_4$. Z punktu D kreślimy prostą $l_4 \| OA_4$.



1. 1a. 2. 2a.

Wyznaczamy teraz punkt przecięcia E prostych l_0 i l_4. Przez punkt E przechodzi wypadkowa $\bar{R}$. Ponieważ $\bar{R}$ znamy z wieloboku sił, więc możemy wypadkową tę wykreślić.

[1]) Na rys. 1, 2 i dalszych podane są tylko położenia sił, zaś wielkości sił zaznaczone są w wielobokach sił (rys. 1a, 2a i t. d.).

Przejdziemy teraz do uzasadnienia powyższej konstrukcji.

Oznaczmy wektory $\overline{A_0O}, \overline{A_1O_1}, \ldots, \overline{A_4O}$ odpowiednio przez $\bar{S}_0, \bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_4$. Z wieloboku sił (str. 254, rys. 1a) otrzymujemy:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \bar{P}_1+\bar{S}_1+(-\bar{S}_0)&=0, & \bar{P}_2+\bar{S}_2+(-\bar{S}_1)&=0,\\ \bar{P}_3+\bar{S}_3+(-\bar{S}_2)&=0, & \bar{P}_4+\bar{S}_4+(-\bar{S}_3)&=0. \end{aligned}$$

Dodajmy do układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ siły $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_0$, leżące na prostej l_0, siły $\bar{S}_1$ i $-\bar{S}_1$, leżące na l_1 i t. d., wreszcie siły $\bar{S}_4$ i $-\bar{S}_4$, leżące na l_4. Dodany układ jest oczywiście równoważny zeru, gdyż siły $\bar{S}_0$, $-\bar{S}_0$, $\bar{S}_1$, $-\bar{S}_1$ i t. d. znoszą się parami. Wypadkowa rozszerzonego układu jest więc ta sama co poprzednio.

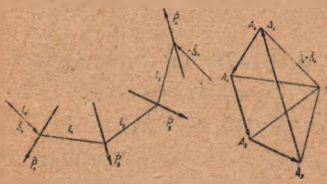
Na mocy (1) siły $\bar{P}_1$, $\bar{S}_1$ i $-\bar{S}_0$ znoszą się, gdyż suma ich równa się zeru, a kierunki ich przecinają się w A. Siły te możemy więc usunąć. Podobnie możemy usunąć siły $\bar{P}_2$, $\bar{S}_2$ i $-\bar{S}_1$, następnie, $\bar{P}_3$, $\bar{S}_3$ i $-\bar{S}_2$ i t. d. w końcu siły $\bar{P}_4$, $\bar{S}_4$ i $-\bar{S}_3$. Zostaną siły $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$, które tworzą zatem układ równoważny danemu. Przez punkt przecięcia E kierunków sił $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$ (t. j. prostych l_0, l_4) przechodzi więc wypadkowa $\bar{R}$, c. b. d. d.

Odcinki l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 tworzą t. zw. *wielobok sznurowy*; l_0 i l_4 nazywamy jego *bokami skrajnymi*.

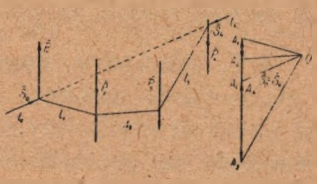
A więc: *wypadkowa przechodzi przez punkt przecięcia skrajnych boków wieloboku sznurowego.*

Nazwa wieloboku sznurowego pochodzi stąd, że nić (sznur) nierozciągliwa i nieważka, utwierdzona w punktach L i M, położonych na prostych l_0 i l_4 w kierunkach $-\bar{S}_0$ i $\bar{S}_4$ (zresztą dowolnych), i przyjmująca położenie wieloboku $LABCDM$, będzie w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_4$, zaczepionych odpowiednio w punktach A, B, C, D.

W praktyce opuszczamy oznaczenia zbędne i wykres przedstawia się jak na rys. 2 i 2a str. 254 oraz jak na rysunkach str. niniejszej.



1. 1a.



2. 2a.

Na str. 255 rys. 1 przedstawia układ sił, którego suma jest zerem. Mówimy wtedy, że *wielobok sił zamyka się* (rys. 1a).

Kreśląc zaś wielobok sznurowy przekonywamy się, że skrajne jego boki nie przecinają się (są równoległe). Mówimy wtedy, że *wielobok sznurowy nie zamyka się.*

Układ sił równoważny jest w tym przypadku układowi sił $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$, które, jak widać z wieloboku sił, tworzą parę. Układ jest tedy równoważny parze sił $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$ leżących na bokach skrajnych wieloboku sznurowego.

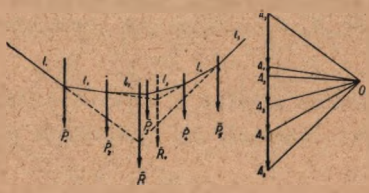
A więc: *jeżeli wielobok sił zamyka się, zaś wielobok sznurowy nie zamyka się, to układ jest równoważny parze sił.*

Na rys. 2 str. 255 widzimy układ sił, dla którego wielobok sił (rys. 2a) się zamyka, a boki skrajne wieloboku sznurowego leżą na jednej prostej. Mówimy wtedy, że *wielobok sznurowy zamyka się.*

Układ sił równoważny jest w tym przypadku układowi sił $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$, leżących na skrajnych bokach wieloboku sznurowego, a więc na jednej linii prostej. Ponieważ (jak widać z wieloboku sił) $\bar{S}_0 = \bar{S}_4$, więc siły $\bar{S}_0$ i $-\bar{S}_4$ znoszą się; dany układ jest tedy równoważny zeru.

A więc: *jeżeli wielobok sił i wielobok sznurowy zamykają się, to układ sił jest równoważny zeru.*

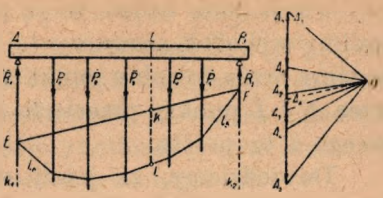
Wypadkowa części układu. Mając wielobok sznurowy pewnego układu sił, możemy łatwo wyznaczyć wypadkową dowolnej części tego układu, złożonej z sił występujących po sobie w wieloboku sił.



Niech dany będzie np. układ sił równoległych $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5$. Niech wyznaczona będzie wypadkową $\bar{R}$ całego układu i wypadkowa $\bar{R}_1$ sił $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$. Z rysunku obok widać, że wielobok sznurowy dla układu $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ jest częścią wieloboku sznurowego całego układu.

§ 7. Niektóre zastosowania wieloboku sznurowego. Wyznaczanie reakcji w punktach podparcia belki. Dany jest układ sił równoległych $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5$. Wyznaczyć dwie siły $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ równoległe do poprzednich i tworzące wraz z nimi układ równoważny zeru, przyczem dane są proste k_1 i k_2, na których siły $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ mają leżeć.

Z zadaniem tym spotykamy się w przypadku belki sztywnej poziomej, podpartej w punktach A i B i obciążonej siłami pionowymi $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5$ (rys. 1). Jeżeli nie ma tarcia, to w punktach A i B występują reakcje pionowe, równoważące się z siłami $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5$ (str. 267).



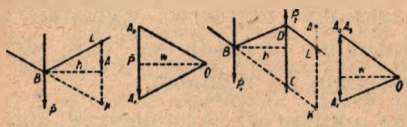
1.

Aby wyznaczyć siły $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, kreślimy wielobok sznurowy dla danego układu sił w porządku $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5, \bar{R}_2, \bar{R}_1$. W wieloboku sił prosta A_6O łącząca koniec siły $\bar{R}_2$ z biegunem O jest na razie nieznana. Ponieważ wielobok sił zamyka się, więc punkt A_7, t. j. koniec siły $\bar{R}_1$, schodzi się z początkiem siły $\bar{P}_1$, t. j. z punktem A_0.

Kreślimy wielobok sznurowy, zaczynając od prostej $l_0 \| A_0O$ aż dojdziemy do prostej $l_5 \| A_5O$.

Oznaczmy przez E, F punkty przecięcia się prostych l_0 i l_5 z kierunkami sił $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, t. j. z prostymi danymi k_1 i k_2. Rysując w wieloboku sił prostą OA_6 równoległe do prostej EF, otrzymujemy siły $\bar{R}_1 = \overrightarrow{A_5A_6}$ i $\bar{R}_2 = \overrightarrow{A_6A_7}$. Łatwo bowiem zauważyć, że kreśląc w dalszym ciągu wielobok sznurowy dla tak wyznaczonych sił $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, otrzymamy wielobok sznurowy zamknięty.

Wyznaczanie momentu sił. Gdy mamy wyznaczyć moment siły $\bar{P}$ względem pewnego punktu A, kreślimy najpierw z dowolnego punktu B, położonego na kierunku siły $\bar{P}$, wielobok sznurowy, jak na rys. 2.



2. 3.

Prowadzimy następnie przez A prostą równoległą do $\bar{P}$. Oznaczmy przez L, K punkty przecięcia się tej prostej z bokami wieloboku sznurowego. Z podobieństwa trójkątów A_0A_1O i KLB otrzymujemy $KL : |\bar{P}| = h : w$, gdzie h i w są wysokościami tych trójkątów. Stąd $|\bar{P}|h = KL \cdot w$. Oznaczając przez M moment siły $\bar{P}$ względem A, mamy $|M| = |\bar{P}|h$ czyli

$$|M| = KL \cdot w. \tag{1}$$

A więc: *moment siły $\bar{P}$ względem punktu A jest* (co do modułu) *proporcjonalny do odcinka, jaki boki wieloboku sznurowego odcinają na prostej przechodzącej przez A równolegle do $\bar{P}$; współczynnikiem proporcjonalności jest odległość bieguna od siły w wieloboku sił.*

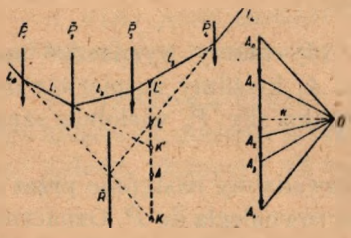
Niech dana będzie teraz para sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ (gdzie $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$). Wykreślmy wielobok sznurowy tej pary, jak na rys. 3, str. 257. Poprowadźmy przez dowolny punkt A prostą równoległą do sił i oznaczmy przez K i L punkty przecięcia się boków skrajnych wieloboku sznurowego z tą prostą.

Dowiedziemy, że jeżeli oznaczymy przez M moment pary, przez w zaś odległość bieguna od sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$ w wieloboku sił, to będzie zachodził wzór (1).

Weźmy bowiem pod uwagę trójkąt BCD, gdzie B jest punktem na kierunku siły $\bar{P}_1$, z którego zaczęliśmy kreślić wielobok sznurowy, C i D zaś są punktami przecięcia kierunku siły $\bar{P}_2$ ze skrajnymi bokami wieloboku sznurowego.

Niech h oznacza wysokość trójkąta BCD. Z podobieństwa trójkątów BCD i A_0A_1O mamy $CD:|\bar{P}_1| = h:w$, skąd $|\bar{P}_1|h = CD \cdot w$. Ponieważ $|M| = |\bar{P}_1|h$, zaś $CD = KL$, więc dostajemy istotnie wzór (1).

Zatem: *moment pary sił jest* (co do wielkości) *proporcjonalny do odcinka, jaki odcinają skrajne boki wieloboku sznurowego na dowolnej prostej równoległej do sił pary; współczynnikiem proporcjonalności jest odległość bieguna od sił w wieloboku sił.*



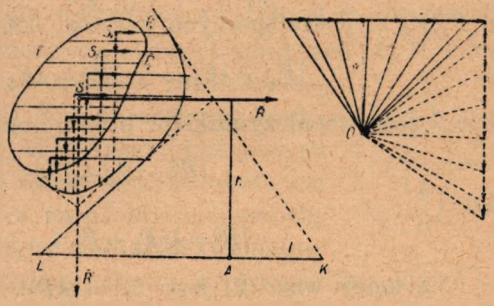
Podobne sposoby wyznaczania momentu są korzystne wówczas, gdy mamy do czynienia z kilkoma siłami równoległymi, wtedy bowiem możemy dla wszystkich sił przyjąć to samo w. Gdy zaś mamy wyznaczyć moment układu sił równoległych, wyznaczamy najpierw wypadkową (ewentualnie wypadkową parę sił), a następnie jej moment.

Nakreśliwszy wielobok sznurowy układu sił równoległych, możemy względem punktu A wyznaczyć moment dowolnej części układu, złożonej z sił następujących po sobie w takim porządku jak w wieloboku sił. Wielobok sznurowy tej części zawarty jest bowiem w wieloboku sznurowym całego układu. Na rysunku odcinek $K'L'$ jest proporcjonalny (co do modułu) do momentu układu sił $\bar{P}_2, \bar{P}_3$ względem A.

Niech wreszcie dany będzie układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5, \bar{R}_1, \bar{R}_2$ równoważny zeru (rys. 1, str. 257). Prowadzimy przez dowolny punkt C prostą równoległą do sił. Odcinek LK tej prostej, leżący między bokami wieloboku sznurowego, jest proporcjonalny (co do modułu)

do momentu ogólnego względem C sił położonych po jednej stronie tej prostej (w naszym przypadku do momentu sił $\bar{R}_1, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ lub sił $\bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{R}_2$; momenty obu tych części układu względem C są równe co do modułu, ponieważ suma ich jest zerem, na skutek założenia, że układ jest równoważny zeru). Współczynnikiem proporcjonalności jest w, t. j. odległość bieguna O od sił w wieloboku sił.

Wyznaczanie środka ciężkości i momentu statycznego figur płaskich. Aby wyznaczyć środek ciężkości figury płaskiej F, dzielimy ją na wąskie paski przy pomocy prostych równoległych. Jeżeli w środkach ciężkości $S_1, S_2, \ldots$ otrzymanych pasków zaczepimy siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ równoległe, zgodnie skierowane i proporcjonalne co do wielkości do pól $F_1, F_2, \ldots$ tych pasków, to środek sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ będzie środkiem ciężkości figury F.



1. 1a.

Zauważmy bowiem, że środek ciężkości figury F jest środkiem masy układu punktów materialnych, jaki otrzymamy, zastępując każdy pasek punktem materialnym o masie równej masie paska (str. 156). Na mocy zaś twierdzenia dowiedzionego na str. 243 środek masy otrzymanego układu punktów materialnych jest środkiem układu sił równoległych $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$

Paski dostatecznie wąskie możemy uważać za trapezy; środki ciężkości trapezów wyznaczamy podług konstrukcji podanej na str. 180, rys. 1. Linie podziału figury prowadzimy zazwyczaj w równych odstępach (rys. 1). Zatem pola trapezów będą proporcjonalne do ich linij środkowych. Wielkości sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ możemy więc uważać za proporcjonalne do linij środkowych trapezów.

Wypadkowa $\bar{R}$ przechodzi przez środek ciężkości S; wyznaczamy ją przy pomocy wieloboku sznurowego (rys. 1a).

Zmieniając kierunek sił i wyznaczając nową wypadkową $\bar{R}'$, otrzymamy środek ciężkości S jako punkt przecięcia się obu wypadkowych $\bar{R}$ i $\bar{R}'$.

Aby wyznaczyć moment statyczny figury F względem pewnej prostej l, rysujemy siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ równolegle do l.

Moment wypadkowej $\bar{R}$ względem dowolnego punktu A prostej l jest co do wielkości proporcjonalny do momentu statycznego figury F względem l.

Oznaczając bowiem przez M moment siły $\bar{R}$ względem A, przez h odległość A od kierunku siły $\bar{R}$, przez M_s moment statyczny danej figury względem l, wreszcie przez F pole figury, mamy:

$$|M| = h|\bar{R}|, \qquad |M_s| = hF, \tag{2}$$

gdyż środek ciężkości leży na kierunku wypadkowej.

Ponieważ wielkość sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ obraliśmy proporcjonalnie do pól $F_1, F_2, \ldots$ poszczególnych pasków, więc

$$|\bar{P}_1| = \lambda F_1, \qquad |\bar{P}_2| = \lambda F_2 \qquad \text{i t. d.}, \tag{3}$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Lecz

$$|\bar{R}| = |\bar{P}_1| + |\bar{P}_2| + \ldots,$$

skąd

$$|\bar{R}| = \lambda(F_1 + F_2 + \ldots) = \lambda F.$$

Na mocy więc (2) jest $|M| = \lambda h F = \lambda |M_s|$ czyli

$$|M_s| = |M|/\lambda. \tag{4}$$

A więc: *moment statyczny figury jest* (co do modułu) *proporcjonalny do momentu wypadkowej.*

Momenty statyczne figur płaskich możemy zatem wyznaczać przy pomocy wieloboku sznurowego.

Na rys. 1, str. 259, jest $|\bar{M}| = w \cdot KL$, skąd na mocy (4)

$$|M_s| = w \cdot KL/\lambda. \tag{5}$$

Oznaczmy przez $d_1, d_2, \ldots$ długość linij środkowych trapezów, a przez a odstęp między liniami podziału. Zatem $F_1 = ad_1$, $F_2 = ad_2, \ldots$. Ponieważ przyjęto na rysunku $|\bar{P}_1| = kd_1$, $|\bar{P}_2| = kd_2, \ldots$, gdzie $k = \frac{1}{4}$, więc $|\bar{P}_1| = kF_1/a$, $|\bar{P}_2| = kF_2/a, \ldots$. Na mocy (3) będzie tedy $\lambda = k/a$, skąd na mocy (5)

$$|M_s| = aw \cdot KL/k = 3aw \cdot KL.$$

Mierząc a, w i KL na rysunku, otrzymujemy $|M_s|$ z powyższego wzoru.

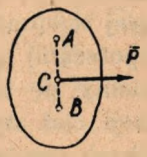
II. Ciało nieswobodne

§ 8. Warunki równowagi. Ciało sztywne nazywamy *nieswobodnym*, jeżeli położenia lub ruchy tego ciała poddane są pewnym warunkom. Warunki te nazywamy *więzami*.

Np. jeżeli jeden punkt ciała jest unieruchomiony, ciało może się tylko obracać około tego punktu. Jeżeli dwa punkty A i B ciała są unieruchomione, ciało może się tylko obracać około prostej AB. Poznamy później inne jeszcze przykłady ciał sztywnych nieswobodnych.

Gdy ciało sztywne nieswobodne jest w równowadze, mówimy, że siły działające na to ciało *równoważą się* lub *są w równowadze*.

Ciało sztywne unieruchomione w dwóch punktach A, B i znajdujące się w równowadze pozostanie w równowadze, gdy dołączymy dowolną siłę $\bar{P}$ o początku w punkcie C, położonym na prostej AB. Intuicyjnie jest to jasne, gdyż ciało może się tylko obracać około osi AB, a więc siła $\bar{P}$, działająca na oś unieruchomioną, nie może ciała poruszyć. Gdyby ciało było swobodne, to pozostałoby w równowadze jedynie w przypadku, gdy $\bar{P}=0$.



Widzimy stąd, że warunki równowagi sił przy ciele nieswobodnym są inne niż przy ciele swobodnym.

Badanie warunków równowagi w przypadku ciała sztywnego nieswobodnego możemy sprowadzić do przypadku ciała swobodnego. Przyjmować będziemy w tym celu, że na ciało sztywne nieswobodne działają oprócz sił danych siły dodatkowe zwane *reakcjami*, dzięki którym ciało zachowuje więzy. Reakcje pochodzą od tych ciał, które ograniczają swobodę ruchów danego ciała sztywnego nieswobodnego.

Jeżeli np. ciało ciężkie spoczywa na stole, wówczas nie jest swobodne, nie może bowiem przejść przez powierzchnię stołu. W tym przypadku reakcjami są siły z jakimi powierzchnia stołu ciśnie na ciało.

Inne siły, pod których działaniem znajduje się ciało sztywne nieswobodne, nazywać będziemy *siłami działającymi* (dla odróżnienia od reakcyj). Jeżeli do sił działających dołączymy reakcje, to możemy ciało sztywne nieswobodne uważać za swobodne.

Wynika stąd, że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił działających jest, by siły działające równoważyły się z reakcjami*.

Powyższy warunek nie jest jednak dogodny, gdyż występują w nim siły reakcyjne, których na ogół nie znamy. W niektórych przypadkach, jak np. w przypadku ciała unieruchomionego w jednym punkcie lub w dwóch punktach, można jednak podać warunki równowagi sił działających, nie odwołując się do reakcyj (str. 274). Warunkiem równowagi, w którym nie występują reakcje, jest t. zw. *zasada prac przygotowanych*, którą poznamy w rozdziale IX.

§ 9. Reakcje ciał stykających się. Każde dwa ciała (bryły, powierzchnie lub linie) sztywne, stykające się z sobą, działają na siebie z pewnymi siłami. Siły te są reakcjami i pochodzą z wzajemnego oddziaływania na siebie punktów obu ciał. Reakcje stosują się do prawa akcji i reakcji.

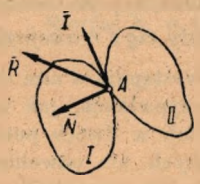
Siły, z jakimi jedno ciało działa na drugie, możemy w myśl twierdzenia o redukcji (str. 241) zawsze zastąpić jedną siłą $\bar{R}$ i parą o momencie $\bar{M}$. Na odwrót, na mocy prawa akcji i reakcji, ciało drugie działa na ciało pierwsze z siłami równoważnymi sile $-\bar{R}$ (o tym samym początku co $\bar{R}$) i parze o momencie $-\bar{M}$.

Wyznaczanie reakcyj jest bardzo ważne w zagadnieniach związanych z techniką. Dotychczas nie mamy jeszcze teorii rozwiązującej tę sprawę w zupełności. W praktyce posługujemy się pewnymi hipotezami zgadzającymi się w przybliżeniu z doświadczeniem. Zajmiemy się tutaj niektórymi tylko zagadnieniami dotyczącymi reakcji ciał stykających się. Szerzej ujęta jest ta sprawa w podręcznikach mechaniki technicznej.

Doświadczenie wykazuje, że w ciałach sztywnych stykających się tylko te punkty działają na siebie, które położone są blisko punktów zetknięcia. Przyjmiemy tu hipotezę upraszczającą, że tylko punkty zetknięcia obu ciał działają na siebie; reakcje będą wówczas siłami zaczepionymi w punktach zetknięcia.

Hipoteza powyższa nie da się utrzymać w całej ogólności. Dla dwu ciał sztywnych, stykających się tylko w jednym punkcie, reakcje sprowadzałyby się według tej hipotezy do jednej siły, mającej początek w punkcie zetknięcia. Doświadczenie natomiast poucza, że prócz niej może w tym przypadku występować jeszcze para sił o momencie różnym od zera, co sprzeciwia się hipotezie. Jeżeli np. sztywna kula ciężka opiera się o sztywną płytę poziomą, to może pozostawać w równowadze nawet wtedy, gdy będzie pod działaniem pary sił (leżącej w płaszczyźnie poziomej) o małym momencie. W stanie równowagi reakcje płyty równoważą zarówno ciężar kuli jak parę sił, co byłoby niemożliwe, gdyby reakcje płyty sprowadzały się do jednej tylko siły zaczepionej w punkcie styczności.

Reakcja normalna i styczna. Niech dwa ciała sztywne I i II stykają się w punkcie A. Oznaczmy przez $\bar{R}$ siłę z jaką ciało II działa na ciało I w punkcie A. Siła $\bar{R}$ ma początek w A. Na mocy prawa akcji i reakcji ciało I działa na ciało II z siłą $-\bar{R}$, mającą początek również w A.



Niech ciało I będzie bryłą lub powierzchnią posiadającą w punkcie A płaszczyznę styczną II.

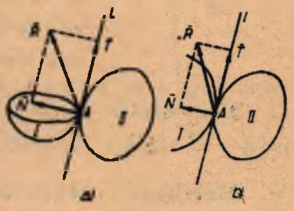
Rozłóżmy reakcję $\bar{R}$ na dwie składowe: na składową $\bar{N}$ prostopadłą do ciała, t. j. do płaszczyzny Π, i na składową $\bar{T}$ styczną do ciała, t. j. leżącą w Π.

Składową $\bar{N}$ nazywamy reakcją *normalną*, składową zaś $\bar{T}$ reakcją *styczną* lub *tarciem*. Reakcja normalna jest zazwyczaj skierowana względem ciała II w tę stronę, w której znajduje się ciało I; nazywamy ją wówczas *ciśnieniem*. Gdy w punktach zetknięcia tarcie nie występuje, ciała stykające się nazywamy *gładkimi*.

Rozpatrzmy jeszcze dwa przypadki:

1° Ciało I jest powierzchnią, ograniczoną pewną linią, na której leży punkt zetknięcia A, przy czym linia ograniczająca ma w A prostą styczną l (rys. a).

2° Ciało I jest linią posiadającą w A prostą styczną l, przy czym A nie jest końcem tej linii (rys. b).



Przykładem 1° może być półkula sztywna ograniczona okręgiem, na którym leży punkt A; przykładem 2° może być łuk okręgu o punkcie A leżącym w jego połowie. W przypadkach 1° i 2° reakcją normalną będzie składowa reakcji $\bar{R}$ prostopadła do stycznej l; tarciem zaś będzie składowa reakcji $\bar{R}$ leżąca na prostej l.

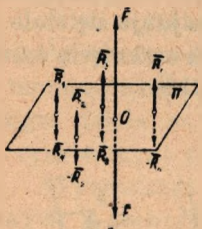
Dla dwu ciał gładkich stykających się w punkcie A kierunek i zwrot reakcji jest wyznaczony, jeżeli jedno z ciał jest bryłą lub powierzchnią posiadającą w A płaszczyznę styczną. Kierunek i zwrot reakcji jest wyznaczony również dla ciał 1° i 2°, jeżeli proste styczne do nich w punkcie ich zetknięcia nie pokrywają się z sobą. W tym bowiem przypadku reakcja musi być prostopadła do obu stycznych. Dla ciał, z których jedno jest ciałem 1° lub 2°, wiemy o reakcji tylko tyle, że leży ona w płaszczyźnie prostopadłej do prostej stycznej l.

Podpory. Ciało sztywne unieruchomione (np. związane sztywnie z ziemią) nazywamy *podporą*. W wielu zastosowaniach idzie o wyznaczenie reakcyj podpór na inne ciała sztywne.

Jeżeli ciało sztywne opierające się na podporach jest w równowadze, to siły działające na to ciało równoważą się z reakcjami podpór. Jeżeli ciało gładkie opiera się na podporach gładkich, to przyjmujemy, że *jeżeli są do pomyślenia reakcje* (oczywiście normalne), *równoważące siły, jakie działają na ciało, to reakcje takie rzeczywiście wystąpią*.

Dzięki powyższej hipotezie możemy w wielu przypadkach podać warunki konieczne i wystarczające dla równowagi sił, jakie działają na ciało sztywne opierające się na podporach gładkich.

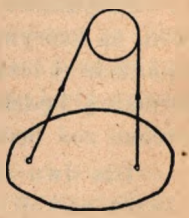
Środek ciśnień. Niech dwa ciała gładkie I i II stykają się w punktach leżących na pewnej płaszczyźnie Π (rys. 1). Reakcje będą więc prostopadłe do płaszczyzny Π. Reakcje działające na ciało I są zatem równoległe; załóżmy że są ciśnieniami. Mają więc ten sam zwrot. Wynika stąd, że mają wypadkową $\bar{F}$, o której możemy przyjąć, że zaczepiona jest w pewnym punkcie O płaszczyzny Π. Punkt O nazywamy *środkiem ciśnień*.



1.

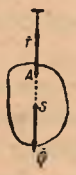
Oczywiście reakcje działające na drugie ciało mają wypadkową $-\bar{F}$ i ten sam środek ciśnień.

Reakcje nici. Nić nierozciągliwa, przyczepiona do ciała, działa na nie tylko wtedy, gdy jest napięta. Jeżeli masa nici jest mała (tak, że można ją pominąć) i obydwa końce nici przyczepione są do ciała, to działa ona w obu końcach, z siłami równymi co do wielkości, także i wtedy, gdy jest nawinięta na jakieś ciało gładkie (rys. 2). Siły, z jakimi nić działa w swoich końcach, są styczne do nici i mają zwrot w kierunku nici. Siły te nazywamy *napięciami nici*.


2.

Przykład 1. Jeżeli ciało ciężkie, zawieszone na nici w punkcie A, jest w równowadze, to napięcie nici $\bar{T}$ o początku A równoważy się z ciężarem $\bar{Q}$, mającym początek w środku ciężkości S. Zatem $\bar{T}+\bar{Q}=0$ czyli

$$|\bar{T}|=|\bar{Q}|. \tag{1}$$

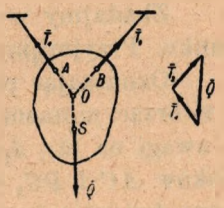


3.

Ponadto siły $\bar{T}$ i $\bar{Q}$ muszą działać wzdłuż jednej prostej. Nić ma zatem kierunek pionowy i jej przedłużenie przechodzi przez środek ciężkości (rys. 3). Zawieszając więc ciało po kolei w dwóch punktach i zaznaczając kierunki nici w ciele, otrzymamy jako punkt przecięcia środek ciężkości ciała.

Przykład 2. Jeżeli ciało zawieszone na dwóch niciach w punktach A i B jest w równowadze, to napięcia nici $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ o początkach w A i B równoważą się z ciężarem $\bar{Q}$, mającym początek w środku ciężkości S (rys. 1). Zatem

(2) $$\bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{Q} = 0.$$



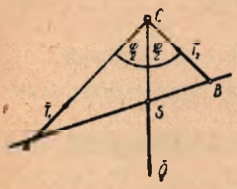
1. 1a.

Na mocy więc twierdzenia podanego na str. 250 kierunki sił przecinają się w jednym punkcie O lub siły są równoległe. W obu przypadkach możemy wyznaczyć siły $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$, tworząc moment względem dowolnego punktu, np. względem punktu A. Oznaczając przez a_2 i d ramiona sił $\bar{T}_2$ i $\bar{Q}$ względem A, dostaniemy $|\bar{T}_2|a = |\bar{Q}|d$ czyli

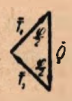
(3) $$|\bar{T}_2| = |\bar{Q}|d/a.$$

Podobnie otrzymamy $|\bar{T}_1|$, tworząc moment względem B. W przypadku, gdy siły $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ nie są równoległe, możemy je wyznaczyć graficznie, tworząc trójkąt sił (rys. 1a).

Przykład 3. Na nici nierozciągliwej bez masy, przewiniętej przez gładki pierścień w punkcie C, zawieszony jest w punktach A i B ciężki pręt sztywny (rys. 2). Wyznaczyć napięcia nici w położeniu równowagi.



2.


2a.

Oznaczmy przez l długość nici, przez φ kąt ACB, a przez S środek ciężkości pręta. Połóżmy:

$$AB = a, \quad AC = l_1, \quad BC = l_2, \quad AS = b.$$

Przypuśćmy, że dane są a, b, l i ciężar pręta $\bar{Q}$.

Ponieważ napięcia $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ nici równoważą się z ciężarem $\bar{Q}$, więc siły te przecinają się w punkcie C (gdyż siły $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ przechodzą przez punkt C (str. 250)) i ponadto

(4) $$\bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{Q} = 0.$$

Prócz tego (str. 264)

(5) $$|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2|.$$

Gdy $\varphi=0$, pręt ma położenie pionowe i siły $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ mają kierunek pionowy. Na mocy (5) jest więc $\bar{T}_1=\bar{T}_2$, skąd na mocy (4)

$$|\bar{T}_1|=|\bar{T}_2|=|\bar{Q}|/2.$$

Zbadajmy w jakim przypadku może być $\varphi\neq 0$, jak na rysunku. Przyjmijmy więc, że $\varphi\neq 0$.

Oznaczając przez d_1 i d_2 odległości kierunków sił $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ od S i tworząc moment względem S, dostaniemy $|T_1|d_1=|T_2|d_2$; zatem, z uwagi na (5), $d_1=d_2$. Środek ciężkości S jest równo oddalony od boków AC i BC, czyli prosta CS jest symetralną kąta φ. Ze znanego twierdzenia geometrycznego o symetralnych kątów trójkąta, otrzymujemy $AC/BC=AS/BS$ czyli

$$l_1/l_2=b/(a-b). \tag{6}$$

Ponieważ

$$l_1+l_2=l, \tag{7}$$

więc rozwiązując układ równań (6) i (7), dostaniemy:

$$l_1=bl/a, \qquad l_2=(a-b)l/a. \tag{8}$$

Aby boki l_1, l_2, a mogły tworzyć trójkąt, muszą zachodzić nierówności $l_1+l_2>a$, $l_1+a>l_2$, $l_2+a>l_1$, które możemy napisać w postaci:

$$l_1+l_2>a, \qquad a>|l_1-l_2|,$$

skąd na mocy (8)

$$l>a>|a-2b|l/a. \tag{9}$$

Muszą być więc spełnione nierówności $a<l<a^2/|a-2b|$ czyli, kładąc $k=b/a$,

$$a<l<a/|1-2k|. \tag{10}$$

A więc: *równowaga zajdzie przy* $\varphi\neq 0$, *jeżeli długość nici* l *spełnia warunek* (10).

Zauważmy, że jeżeli $k=b/a=1/2$ (t. j. gdy środek ciężkości S wypada w środku odcinka AB), to warunki (9) spełnione są dla każdego $l>a$. W tym więc przypadku możliwe jest zawsze położenie równowagi pręta przy $\varphi\neq 0$.

Kąt φ otrzymamy z twierdzenia Carnota

$$a^2=l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\varphi. \tag{11}$$

Z trójkąta sił dostajemy

$$|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = |\bar{Q}| : 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi. \tag{12}$$

Po łatwych przeróbkach, wyrażając $\cos\frac{1}{2}\varphi$ przez a, b, l ze wzorów (8) i (11), otrzymamy na mocy (12)

$$|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = |\bar{Q}|\frac{l}{a}\sqrt{\frac{(a-b)b}{l^2-a^2}}.$$

W szczególności dla $b = a/2$ dostaniemy

$$|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = |\bar{Q}|\frac{l}{2\sqrt{l^2-a^2}}.$$

Przykład 4. Belka pozioma spoczywa w punktach A i B na dwóch podporach gładkich. Na belkę działają siły pionowe (skierowane w dół) $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5$ (str. 257, rys. 1). Wyznaczyć reakcje podpór.

Oznaczmy przez $x_1, x_2, \ldots, x_5$ odległości punktów zaczepienia sił od A. Połóżmy $AB = d$. Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w A i B są pionowe. Tworząc moment względem A i oznaczając przez $P_1, P_2, \ldots, P_5, R_1, R_2$ wartości bezwzględne sił, otrzymamy $P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_5x_5 - R_2d = 0$, skąd

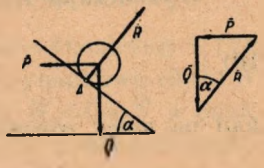
$$R_2 = (P_1x_1 + P_2x_2 + \ldots + P_5x_5)/d. \tag{13}$$

Ponieważ $R_1 + R_2 = P_1 + P_2 + \ldots + P_5$, więc

$$R_1 = [P_1(d - x_1) + \ldots + P_5(d - x_5)]/d. \tag{14}$$

Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ można również wyznaczyć przy pomocy wieloboku sznurowego jak na str. 257.

Przykład 5. Kula ciężka o stałej gęstości dotyka płaszczyzny gładkiej Π, nachylonej do poziomu pod kątem α. Wyznaczyć siłę poziomą $\bar{P}$, utrzymującą kulę w równowadze.

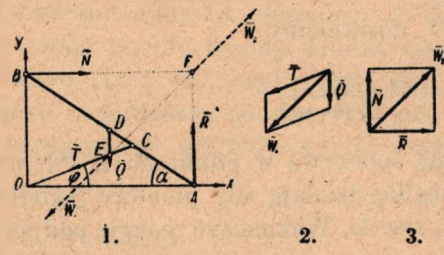


Ciężar $\bar{Q}$ kuli ma początek w jej środku O, a reakcja $\bar{R}$ płaszczyzny Π w punkcie styczności A; jest ona prostopadła do Π. Siły $\bar{Q}$ i $\bar{R}$ przecinają się w punkcie O. Ponieważ siły $\bar{P}$, $\bar{Q}$ i $\bar{R}$ równoważą się, więc na mocy tw. III, str. 250, przecinają się one w punkcie O. Ponadto $\bar{P} + \bar{Q} + \bar{R} = 0$, więc z trójkąta sił otrzymujemy siły $\bar{P}$ i $\bar{R}$. Mamy:

$$R = Q\cos\alpha, \qquad P = Q\operatorname{tg}\alpha,$$

gdzie P, Q i R oznaczają bezwzględne wartości odpowiednich sił.

Przykład 6. W płaszczyźnie pionowej Π leży pręt ciężki AB o gęstości stałej, oparty na dwóch płaszczyznach gładkich: poziomej Π_1 i pionowej Π_2. Niechaj Ox i Oy będą prostymi przecięcia płaszczyzn Π_1 i Π_2 z płaszczyzną Π. Pręt AB przywiązany jest nicią nierozciągliwą OC do punktu O. Pręt znajduje się w równowadze. Wyznaczyć reakcje, mając dane: $AB=2l$, kąt α między AB a osią x i kąt φ między OC a osią x (rys. 1).



1. 2. 3.

Siłą działającą na pręt jest ciężar $\bar{Q}$ zaczepiony w środku pręta AB w punkcie D. Reakcjami są reakcje ścian $\bar{R}$ i $\bar{N}$, zaczepione w A i B i prostopadłe do ścian, oraz reakcja nici $\bar{T}$ zaczepiona w C i skierowana wzdłuż nici ku punktowi O. Siła działająca równoważy się z reakcjami. Z warunku rzutów na osie x i y otrzymujemy:

$$N_x+T_x=0, \qquad R_y+Q_y+T_y=0, \tag{15}$$

a z warunku momentu względem O:

$$-R_y\cdot 2l\cos\alpha+N_x\cdot 2l\sin\alpha-Q_y l\cos\alpha=0. \tag{16}$$

Oznaczmy przez R, N, T, Q bezwzględne wartości odpowiednich sił. Mamy oczywiście $R_y=R$, $N_x=N$, $Q_y=-Q$ i $T_x=-T\cos\varphi$, $T_y=-T\sin\varphi$. Zatem z równań (15) i (16) otrzymujemy:

$$N-T\cos\varphi=0, \qquad R-Q-T\sin\varphi=0, \tag{17}$$

$$-2R\cos\alpha+2N\sin\alpha+Q\cos\alpha=0. \tag{18}$$

Wyznaczając R i N z równań (17) i wstawiając w (18) otrzymamy

$$T=\frac{Q\cos\alpha}{2\sin(\alpha-\varphi)}, \tag{19}$$

skąd na mocy równań (17):

$$N=\frac{Q\cos\alpha\cos\varphi}{2\sin(\alpha-\varphi)}, \qquad R=Q\left(1+\frac{\cos\alpha\sin\varphi}{2\sin(\alpha-\varphi)}\right). \tag{20}$$

Ponieważ $T>0$, więc na mocy (19) musi być $\alpha>\varphi$; zatem punkt C musi leżeć między A i D.

Zadanie możemy również rozwiązać graficznie (rys. 2 i 3).

Oznaczmy przez E punkt przecięcia sił $\bar{T}$ i $\bar{Q}$, zaś przez F sił $\bar{N}$ i $\bar{R}$. Wypadkowa $\overline{W}_1$ sił $\bar{T}$ i $\bar{Q}$ zaczepiona jest w E, zaś wypadkowa $\overline{W}_2$ sił $\bar{R}$ i $\bar{N}$ w F. Ponieważ układ sił $\bar{N}, \bar{R}, \bar{T}, \bar{Q}$ jest równoważny zeru, więc układ sił $\overline{W}_1, \overline{W}_2$ jest też równoważny zeru. Zatem siły działają wzdłuż prostej EF i $\overline{W}_1 + \overline{W}_2 = 0$. Siła $\bar{Q}$ oraz kierunki sił $\bar{T}$ i $\overline{W}_1 = \bar{T} + \bar{Q}$ są dane, więc możemy wyznaczyć siły $\overline{W}_1$ i $\bar{T}$ jak na rys. 2. Ponieważ $\bar{N} + \bar{R} = \overline{W}_2 = -\overline{W}_1$, więc siły $\bar{N}$ i $\bar{R}$ otrzymamy, rozkładając siłę $\overline{W}_2$ na składowe w kierunkach osi x i y (rys. 3).

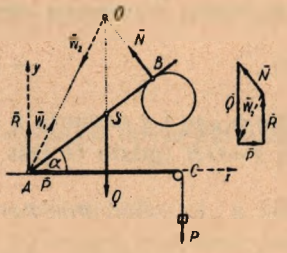
Przykład 7. Pręt ciężki AB o środku ciężkości S opiera się w punkcie A o płaszczyznę poziomą gładką, a w punkcie B o kulę gładką. W punkcie A uczepiona jest nić nierozciągliwa, przewinięta przez blok C i obciążona w drugim końcu ciężarem $\bar{P}$. Wyznaczyć ciężar $\bar{P}$, reakcję $\bar{R}$ ściany poziomej i reakcję $\bar{N}$ kuli w położeniu równowagi, mając dane $a = AS$, $b = AB$, kąt α między prętem a płaszczyzną i ciężar pręta $\bar{Q}$.

Obierzmy osie x i y jak na rysunku. Ponieważ napięcie nici w punkcie A wynosi $\bar{P}$, więc oznaczając przez P, Q, R, N wartości bezwzględne sił i tworząc rzuty na osie x, y, dostaniemy:

$$(21) \qquad P - N\sin\alpha = 0, \quad R - Q + N\cos\alpha = 0.$$

Moment ogólny względem A wynosi

$$(22) \qquad Q\,a\cos\alpha - bN = 0.$$



Z równań (21) i (22) otrzymamy:

$$N = Q\frac{a\cos\alpha}{b}, \qquad P = Q\frac{a\sin 2\alpha}{2b},$$

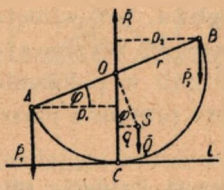
$$R = Q\left(1 - \frac{a}{b}\cos^2\alpha\right).$$

Zadanie możemy rozwiązać również graficznie. Oznaczmy w tym celu przez $\overline{W}_1$ wypadkową sił $\bar{R}$ i $\bar{P}$, a przez $\overline{W}_2$ wypadkową sił $\bar{Q}$ i $\bar{N}$. Siła $\overline{W}_1 = \bar{R} + \bar{P}$ zaczepiona jest w punkcie A, zaś $\overline{W}_2 = \bar{Q} + \bar{N}$ w punkcie O, w którym przecinają się kierunki sił $\bar{Q}$ i $\bar{N}$. Ponieważ znamy położenia sił $\bar{Q}$ i $\bar{N}$, więc punkt O możemy wyznaczyć.

Siły $\bar{P}, \bar{R}, \bar{Q}$ i $\bar{N}$ są w równowadze, więc i siły $\overline{W}_1$ i $\overline{W}_2$ równoważą się. Zatem $\overline{W}_1 + \overline{W}_2 = 0$; ponadto siły $\overline{W}_1$ i $\overline{W}_2$ leżą na

jednej prostej. Prostą tą jest oczywiście prosta AO. Ponieważ znamy już kierunek siły $\bar{W}_2$, więc możemy ze związku $\bar{W}_2=\bar{Q}+\bar{N}$ wyznaczyć $\bar{W}_2$ i $\bar{N}$, rysując trójkąt sił. Mamy $\bar{W}_1=-\bar{W}_2$ i $\bar{W}_1=\bar{R}+\bar{P}$, więc siły $\bar{R}$ i $\bar{P}$ otrzymamy, rozkładając siłę $\bar{W}_1$ w kierunkach sił $\bar{R}$ i $\bar{P}$.

Przykład 8. Drut ciężki sztywny o stałej gęstości, w kształcie półokręgu, leży w płaszczyźnie pionowej, opierając się o prostą poziomą l. Na końcach pręta A i B zaczepione są siły $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$, skierowane pionowo w dół. Wyznaczyć kąt φ, jaki w położeniu równowagi tworzy średnica AB z poziomem, oraz reakcję $\bar{R}$ w punkcie styczności C (przy założeniu, że nie ma tarcia).



W położeniu równowagi siły $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ ciężar $\bar{Q}$, zaczepiony w środku S masy oraz reakcja $\bar{R}$, prostopadła do l, równoważą się. Ponieważ siły powyższe są równoległe, więc (oznaczając ich wartości bezwzględne przez P_1, P_2, Q i R) otrzymamy z warunku rzutów na oś y, skierowaną pionowo w górę, $-P_1+R-Q-P_2=0$ czyli

$$R=P_1+P_2+Q. \tag{23}$$

Obliczmy moment ogólny sił względem punktu styczności C. Z warunku momentu otrzymamy

$$-P_1p_1+Qq+P_2p_2=0, \tag{24}$$

gdzie p_1, p_2 i q oznaczają ramiona sił P_1, P_2 i Q względem C. Kładąc $r=OB$ (gdzie O jest środkiem średnicy AB), otrzymamy:

$$p_1=p_2=r\cos\varphi, \qquad q=OS\cdot\sin\varphi, \tag{25}$$

a ponieważ $OS=2r/\pi$ (str. 179), więc

$$q=\frac{2r\sin\varphi}{\pi}. \tag{26}$$

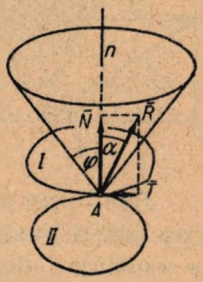
Z (25) i (26) dostaniemy przez podstawienie w (24)

$$(P_2-P_1)r\cos\varphi+\frac{2rQ\sin\varphi}{\pi}=0$$

czyli

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{(P_1-P_2)\pi}{2Q} \tag{27}$$

§ 10. Tarcie. Niech dwa ciała I i II, będące w spoczynku, stykają się w punkcie A i niech mają w tym punkcie wspólną płaszczyznę styczną Π. Oznaczmy przez $\bar{R}$ reakcję z jaką w punkcie A działa ciało II na ciało I. Jeżeli ciała nie są gładkie, to reakcja $\bar{R}$ nie jest do płaszczyzny Π prostopadła.



Niechaj α będzie kątem, jaki $\bar{R}$ tworzy z normalną n do Π.

Oznaczając przez $\bar{N}$ składową normalną, a przez $\bar{T}$ składową styczną czyli *tarcie* i kładąc $R=|\bar{R}|$, $N=|\bar{N}|$, $T=|\bar{T}|$, otrzymujemy:

$$T=R\sin\alpha, \qquad N=R\cos\alpha, \tag{1}$$

skąd

$$T=N\operatorname{tg}\alpha. \tag{2}$$

Doświadczenie pokazuje, że kąt α nie może przekroczyć pewnej granicy, zależnej od natury powierzchni ciał I i II.

Oznaczmy przez φ maksymalną wartość kąta α w punkcie A dla danej pary ciał I i II w położeniu równowagi. Mamy więc $0\leqslant\alpha\leqslant\varphi$ czyli $0\leqslant\operatorname{tg}\alpha\leqslant\operatorname{tg}\varphi$, skąd na mocy (2)

$$T\leqslant N\operatorname{tg}\varphi. \tag{3}$$

Kładąc $f=\operatorname{tg}\varphi$, dostaniemy

$$T\leqslant Nf. \tag{4}$$

Liczbę f nazywamy *współczynnikiem statycznym tarcia* dla danej pary ciał I i II w punkcie styczności A.

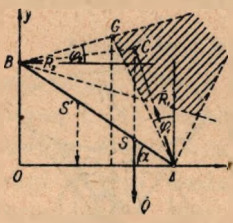
Weźmy pod uwagę stożek obrotowy o wierzchołku A, a którego osią jest normalna n, nachylona do tworzących stożka pod kątem φ. Stożek ten nazywamy *stożkiem tarcia* w punkcie A.

Ponieważ $\alpha\leqslant\varphi$, więc *reakcja leży wewnątrz stożka tarcia lub na jego powierzchni.*

Podobnie jak dla podpór gładkich (str. 263), przyjmujemy również w przypadku tarcia zasadę następującą:

Jeżeli ciało sztywne opiera się na podporach i są do pomyślenia reakcje (leżące wewnątrz stożków tarcia), równoważące się z siłami, jakie działają na ciało, to reakcje te wystąpią w rzeczywistości (jeżeli w chwili początkowej ciało było w spoczynku).

Przykład 1. Pręt ciężki AB, leżący na płaszczyźnie pionowej, opiera się na płaszczyznach poziomej i pionowej. Współczynniki tarcia w A i B są f_1 i f_2. Zbadać warunki równowagi.



Weźmy pod uwagę stożki tarcia w A i B. Tworzące tych stożków są nachylone do normalnych w A i B pod kątami φ_1 i φ_2, gdzie $\operatorname{tg}\varphi_1 = f_1$ i $\operatorname{tg}\varphi_2 = f_2$. Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w A i B muszą leżeć wewnątrz lub na powierzchni tych stożków.

Na pręt AB działają trzy siły: $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ i ciężar $\bar{Q}$, zaczepiony w środku ciężkości S.

Jeżeli pręt jest w równowadze, to kierunki tych sił przechodzą przez jeden punkt C (str. 250). Punkt ten musi oczywiście leżeć we wspólnym obszarze obu stożków tarcia (p. obszar zacieniowany na rysunku), gdyż kierunki reakcyj $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ mogą się tylko przecinać w tym obszarze. Kierunek siły ciężkości musi zatem przechodzić przez obszar wspólny obu stożków tarcia.

Na odwrót, jeżeli kierunek ciężaru $\bar{Q}$ przechodzi przez wspólny obszar stożków tarcia, to pręt może pozostawać w równowadze. Obierzmy bowiem na pionie przechodzącym przez S dowolny punkt C wewnątrz wspólnego obszaru stożków tarcia. Łatwo widzieć, że mogą wystąpić reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, mające kierunek AC i BC i równoważące ciężar $\bar{Q}$. A więc pręt może w tym przypadku pozostawać w równowadze.

Gdyby środek ciężkości leżał w takim punkcie S', że pion przechodzący przez ten punkt nie przecinałby wspólnego obszaru stożków tarcia, to równowaga pręta byłaby niemożliwa.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym dla równowagi pręta jest to, by kierunek ciężaru przechodził przez wspólny obszar stożków tarcia.*

Położmy: $AB = l$, $AS = d$, $BS = d'$ i oznaczmy przez α kąt, jaki AB tworzy z poziomem. Obierzmy osie x i y układu współrzędnych jak na rysunku i załóżmy, że pręt jest w równowadze. Z warunków rzutów i momentu względem O otrzymamy:

$$R_{1_x} + R_{2_x} = 0, \qquad R_{1_y} + R_{2_y} - Q = 0, \tag{5}$$

oraz $-R_{1_y} d\cos\alpha + R_{2_x} l\sin\alpha + Qd'\cos\alpha = 0$ czyli

$$-R_{1_y} d + R_{2_x} l\operatorname{tg}\alpha + Qd' = 0. \tag{6}$$

Mamy ponadto nierówności następujące:

$$|R_{1x}| \leqslant R_{1y} f_1, \qquad |R_{2x}| \leqslant R_{2y} f_2. \tag{7}$$

Ze wzorów (5) i (6) nie możemy reakcyj wyznaczyć. Związki (5)-(7) pozwalają nam tylko podać granice, których nie mogą przekroczyć składowe reakcyj.

Oznaczmy przez x_0 odciętą punktu S, a przez ξ odciętą punktu G, w którym przecinają się tworzące skrajne stożków tarcia. Równowaga nastąpi, jeżeli

$$\xi \leqslant x_0. \tag{8}$$

Aby wyznaczyć ξ, napiszmy równania prostych BG i AG:

$$y = f_2 x + l \sin\alpha, \qquad y = -(x - l\cos\alpha)/f_1.$$

Punkt G jest punktem przecięcia tych prostych, więc

$$\xi = \frac{1 - f_1 \operatorname{tg}\alpha}{1 + f_1 f_2} l \cos\alpha. \tag{9}$$

Ponieważ zaś $x_0 = d' \cos\alpha$, więc nierówność (8) przyjmuje postać

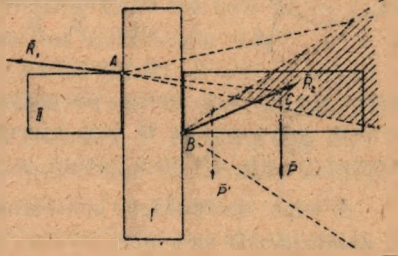
$$(1 - f_1 \operatorname{tg}\alpha)/(1 + f_1 f_2) \leqslant d'/l. \tag{10}$$

Równowaga nastąpi, jeżeli lewa strona tej nierówności jest liczbą ujemną lub zerem. W tym przypadku jest $1 - f_1 \operatorname{tg}\alpha \leqslant 0$, więc $1/f_1 \leqslant \operatorname{tg}\alpha$ czyli $\operatorname{ctg}\varphi_1 \leqslant \operatorname{tg}\alpha$, zatem $\pi/2 - \varphi_1 \leqslant \alpha$.

Jeżeli więc $\pi/2 - \varphi_1 \leqslant \alpha$, to równowaga nastąpi. Jeżeli zaś $\pi/2 - \varphi_1 > \alpha$, to lewa strona nierówności (10) będzie dodatnia i równowaga nie zajdzie przy zbyt małym d'.

Wyniki te łatwo sprawdzić na rysunku (str. 272).

Przykład 2. Belka I przechodzi luźno przez wycięcie w belce II. Na belkę II działa siła $\bar{P}$ równoległa do belki I. Belki są przyciśnięte do siebie w punktach A i B.



Wyznaczmy stożki tarcia w A i B. Jeżeli kierunek siły $\bar{P}$ przejdzie przez obszar wspólny stożków tarcia, to w A i B wystąpią działające na belkę II reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, które zrównoważą siłę $\bar{P}$. Wówczas belka II się nie poruszy: nastąpi t. zw. *zacinanie*.

Z rys. łatwo widzieć, że zacinania nie będzie, jeżeli siła $\bar{P}'$ będzie miała początek w pobliżu belki I i będzie do niej równoległa. Wtedy bowiem kierunek siły $\bar{P}'$ nie przejdzie przez wspólną część obu stożków tarcia; równowaga nie będzie więc możliwa.

§ 11. Warunki równowagi nie zawierające reakcji. Warunek równowagi sił działających na ciało sztywne, podany na str. 261, wyraża związek zachodzący między siłami działającymi a reakcjami. Obecnie podamy kilka przykładów, w których warunki równowagi sił działających można będzie odnieść do samych tylko sił działających z pominięciem reakcji.

Ciało o punkcie nieruchomym. Niech ciało sztywne ma jeden punkt unieruchomiony, np. punkt O. Możemy więc przyjąć, że ciało jest swobodne i że w punkcie O działa reakcja $\bar{R}$, przytrzymująca punkt O.

Załóżmy dalej, że ciało jest w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$. Siły te równoważą się zatem z reakcją $\bar{R}$. Z warunków równowagi wynika, że zarówno suma sił, jak i moment względem punktu O, są równe zeru czyli:

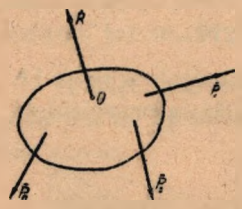
$$\bar{R} + \Sigma \bar{P}_i = 0, \tag{1}$$

$$\Sigma \operatorname{Mom}_O \bar{P}_i = 0. \tag{I}$$

W równaniu (I) nie występuje reakcja $\bar{R}$, gdyż moment jej względem O (jako siły o początku O) jest zerem. Z równania (1) możemy wyznaczyć $\bar{R}$. Mamy

$$\bar{R} = -\Sigma \bar{P}_i. \tag{2}$$

Równanie (I) stanowi warunek konieczny, jaki muszą spełniać siły działające $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ w przypadku równowagi.



Dowiedziemy teraz, że warunek (I) jest również warunkiem wystarczającym równowagi.

Załóżmy, że układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ spełnia równanie (I), czyli że moment układu tych sił względem O jest zerem. Wynika stąd, że siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ mają wypadkową $\bar{P} = \Sigma \bar{P}_i$ o początku w O (str. 26). Otóż siła $\bar{P}$, zaczepiona w O, nie może poruszyć danego ciała, będącego w spoczynku, gdyż punkt O jest nieruchomy. Układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ (równoważny sile $\bar{P}$) jest zatem w równowadze.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układ sił, działających na ciało sztywne unieruchomione w jednym punkcie O, był w równowadze, jest, by moment ogólny sił działających względem punktu O był zerem* (czyli aby układ miał wypadkową przechodzącą przez O).

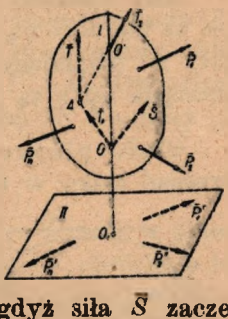
Ciało o osi nieruchomej. Niech ciało sztywne ma unieruchomioną pewną prostą l (wystarczy w tym celu np. unieruchomić dwa punkty tej prostej). Ciało sztywne może się wówczas tylko obracać około osi l. Możemy przyjąć, że ciało jest swobodne i że w punktach położonych na osi zaczepione są siły reakcyjne, dzięki którym oś jest nieruchoma.

Załóżmy, że ciało jest w równowadze pod działaniem sił $\{\bar{P}_i\}$. Zatem siły $\{\bar{P}_i\}$ równoważą się z siłami reakcyjnymi. Z warunków równowagi wynika, że moment ogólny tych sił względem osi l jest równy zeru. Ponieważ moment sił reakcyjnych względem osi l, jako sił o początkach położonych na osi, jest zerem, więc moment ogólny sił $\{\bar{P}_i\}$ względem osi l jest zerem czyli

$$\text{(II)} \qquad \Sigma \operatorname{Mom}_l \bar{P}_i = 0.$$

W równaniu (II) siły reakcyjne nie występują. Równanie to jest zatem warunkiem **koniecznym**, jaki musi spełniać dany układ sił $\{\bar{P}_i\}$, by ciało było w równowadze.

Udowodnimy teraz, że warunek (II) jest również warunkiem **wystarczającym** równowagi.



Załóżmy więc, że dowolny układ sił $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n$ spełnia warunek (II). Obierzmy dowolny punkt O na osi l. Na mocy twierdzenia o redukcji (str. 241), dany układ sił jest równoważny układowi złożonemu z dwóch sił $\bar{S}$ i $\bar{T}$, z których $\bar{S}$ ma początek w O. Ponieważ moment ogólny sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ względem l jest zerem, więc moment ogólny sił $\bar{S}$ i $\bar{T}$ względem l jest również zerem. Z uwagi na to, że $\operatorname{Mom}_l \bar{S} = 0$ (gdyż siła $\bar{S}$ zaczepiona jest w punkcie O, położonym na l), musi też być $\operatorname{Mom}_l \bar{T} = 0$. Zatem siła $\bar{T}$ bądź przecina l, bądź jest równoległa do l.

Weźmy pod uwagę na osi l dowolny punkt $O' \neq O$. Niechaj A będzie początkiem siły $\bar{T}$. Ponieważ siła $\bar{T}$ leży w płaszczyźnie przechodzącej przez l i A, więc możemy rozłożyć $\bar{T}$ na dwie siły $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ o kierunkach OA i $O'A$, a następnie przesunąć ich punkty zaczepienia do O i O'. Wykazaliśmy w ten sposób, że układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ równoważny jest układowi sił, zaczepionych w punktach osi l.

Ponieważ jest oczywistym, że siły zaczepione w punktach osi l, unieruchomionej z założenia, nie poruszą ciała będącego w spoczynku, więc dany układ sił działających $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ jest w równowadze.

Zatem: *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układ sił działających na ciało sztywne, mające oś nieruchomą, był w równowadze, jest to, by moment ogólny układu sił względem tej osi był zerem.*

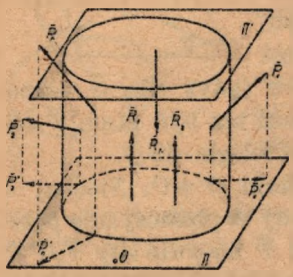
Uwaga. Niech Π będzie dowolną płaszczyzną prostopadłą do prostej l, a O_1 punktem przebicia płaszczyzny Π osią l. Oznaczmy przez $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ rzuty na płaszczyznę Π sił działających $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$ Z określenia momentu względem osi (str. 237) wynika, że moment siły $\overline{P}_i$ względem O_1 równa się momentowi siły $\overline{P}_i$ względem l. Zatem moment ogólny sił $\{\overline{P}_i\}$ względem punktu O_1 równy jest momentowi ogólnemu sił $\{\overline{P}_i\}$ względem osi l.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu sił $\{\overline{P}_i\}$ jest to, by moment ogólny sił $\{\overline{P}_i\}$ względem O_1 był zerem.*

Warunek ten ma taką postać, jak gdyby rzut ciała na płaszczyznę Π miał punkt O_1 unieruchomiony i jak gdyby na rzut ciała działały rzuty sił $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots$

Aby wiedzieć, czy układ sił działających na ciało sztywne, mające oś nieruchomą, jest w równowadze, wystarczy więc znać tylko rzuty sił działających na płaszczyznę prostopadłą do osi i punkt przecięcia osi z tą płaszczyzną.

Ciało płasko prowadzone. Niechaj ciało sztywne może się poruszać tylko w ten sposób, że tor każdego punktu jest płaski i leży w płaszczyźnie równoległej do pewnej płaszczyzny stałej Π.



Mówimy wówczas, że ciało może odbywać jedynie *ruch płaski* lub że jest *płasko prowadzone*, a płaszczyznę Π nazywamy *płaszczyzną kierowniczą*.

Przykładem ciała płasko prowadzonego jest walec, którego podstawy leżą na dwóch płaszczyznach równoległych Π i Π'. Jeżeli nie ma tarcia, to reakcje płaszczyzn Π i Π' są do tych płaszczyzn prostopadłe.

Załóżmy ogólnie, że *ilekroć nie ma tarcia, reakcje, dzięki którym ciało wykonywać może tylko ruch płaski, są prostopadłe do płaszczyzny kierowniczej Π.*

Oczywistym jest zatem, że układ sił prostopadłych do płaszczyzny kierowniczej jest w równowadze, t. zn. że siły prostopadłe do Π nie mogą poruszyć ciała płasko prowadzonego, będącego w spoczynku.

Niechaj ciało płasko prowadzone będzie w równowadze pod działaniem układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ Siły działające równoważą się więc z reakcjami $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots$, czyli tworzą układ równoważny zeru. Wynika stąd, że rzuty sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ i reakcyj $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots$ na płaszczyznę kierowniczą Π tworzą również układ równoważny zeru. Ponieważ rzuty reakcyj są zerami (gdyż reakcje są prostopadłe do Π), więc same rzuty $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ na płaszczyznę kierowniczą też tworzą układ równoważny zeru.

Niech O będzie dowolnym punktem płaszczyzny Π. Jeżeli siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ są w równowadze, otrzymamy:

$$\Sigma \bar{P}_i' = 0, \qquad \Sigma \operatorname{Mom}_O \bar{P}_i' = 0. \tag{3}$$

Warunek (3) jest więc warunkiem konieczny m równowagi układu sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ Udowodnimy, że jest on również warunkiem dostateczny m.

Załóżmy w tym celu, że układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ spełnia równania (3). Na mocy twierdzenia o redukcji układ ten jest równoważny układowi złożonemu z siły $\bar{P} = \Sigma \bar{P}_i$ i pewnej pary $\bar{U}, -\bar{U}$. Oznaczmy przez $\bar{P}'$, $\bar{U}'$ i $-\bar{U}'$ rzuty tych sił na płaszczyznę Π. Na mocy (3) otrzymamy:

$$\bar{P}' = 0, \qquad \operatorname{Mom}(\bar{U}', -\bar{U}') = 0.$$

Zatem $\bar{P}$ jest prostopadłe do Π; para zaś $\bar{U}, -\bar{U}$ leży w płaszczyźnie prostopadłej do Π. Możemy więc parę $\bar{U}, -\bar{U}$ obrócić w jej płaszczyźnie (nie zmieniając momentu) tak, aby w nowym położeniu obie siły były prostopadłe do Π. Oznaczając przez $\bar{V}, -\bar{V}$ nową parę równoważną dawnej, widzimy, że układ sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ równoważny jest układowi sił $\bar{P}$, $\bar{V}$ i $-\bar{V}$, prostopadłych do Π. Wynika stąd, że układ $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ jest w równowadze.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układ sił działających na ciało sztywne płasko prowadzone był w równowadze, jest by rzuty tych sił na płaszczyznę kierowniczą tworzyły układ równoważny zeru.*

Aby więc zbadać, czy układ sił działających na ciało płasko prowadzone jest w równowadze, wystarczy znać tylko rzuty sił działających na płaszczyznę kierowniczą.

Przykład 1. Dźwignia. Belkę mającą unieruchomioną oś poziomą, do niej prostopadłą, nazywamy *dźwignią*.

Zakładamy, że siły działające na dźwignię leżą w jednej płaszczyźnie Π, prostopadłej do osi obrotu i przechodzącej przez środek ciężkości.

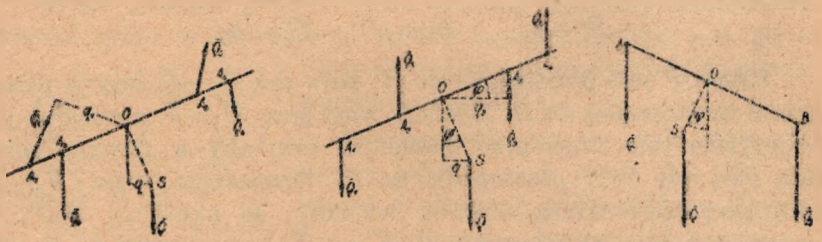
Oznaczmy przez $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots$ siły działające na belkę, zaczepione w punktach $A_1, A_2, \ldots$, przez $\bar{Q}$ ciężar belki, zaczepiony w jej środku ciężkości S, przez $Q_1, Q_2, \ldots, Q$ wartości bezwzględne, a przez $q_1, q_2, \ldots, q$ ramiona tych sił względem punktu przebicia O płaszczyzny Π osią obrotu (rys. 1).

Moment układu sił $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots, \bar{Q}$ względem osi obrotu jest w tym przypadku równy momentowi tego układu względem O. Siły działające będą zatem w równowadze, jeżeli suma ich momentów względem O będzie zerem. Warunek równowagi możemy więc napisać w postaci

$$\pm Q_1 q_1 \pm Q_2 q_2 \pm \ldots \pm Q q = 0, \tag{4}$$

gdzie znaki + i − przyjmujemy według reguły podanej na str. 238.

Załóżmy, że środek ciężkości leży pod osią obrotu, gdy belka ma położenie poziome. Wynika stąd oczywiście, że dla belki, na którą nie działają żadne siły (oprócz ciężkości), położenie poziome jest położeniem równowagi. Załóżmy ponadto, że siły działające mają kierunek pionowy (rys. 2).



1. 2. 3.

Niech φ oznacza kąt, jaki belka tworzy z poziomem. Ponieważ OS jest prostopadłe do belki, więc OS tworzy z pionem również kąt φ. Mamy zatem:

$$q_1 = OA_1 \cos\varphi, \qquad q_2 = OA_2 \cos\varphi, \qquad \ldots, \qquad q = OS \sin\varphi,$$

skąd przez podstawienie w (4)

$$(\pm Q_1 \cdot OA_1 \pm Q_2 \cdot OA_2 \pm \ldots) \cos\varphi \pm Q \cdot OS \sin\varphi = 0,$$

czyli, dzieląc przez $\cos\varphi$,

$$(5) \qquad \pm Q_1 \cdot OA_1 \pm Q_2 \cdot OA_2 \pm \ldots \pm Q \cdot OS \operatorname{tg}\varphi = 0.$$

Znając siły $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \ldots, \bar{Q}$, możemy obliczyć z równania (5) kąt φ, jaki belka tworzy z poziomem w położeniu równowagi.

W szczególności, gdy na belkę działają tylko dwie siły $\bar{Q}_1$ i $\bar{Q}_2$, skierowane w dół i uczepione po przeciwnych stronach belki (jak na rys. 3, str. 278), otrzymamy z (5) $-Q_1 \cdot OA + Q_2 \cdot OB - Q \cdot OS \cdot \operatorname{tg}\varphi = 0$ czyli

$$(6) \qquad \operatorname{tg}\varphi = (Q_2 \cdot OB - Q_1 \cdot OA)/Q \cdot OS.$$

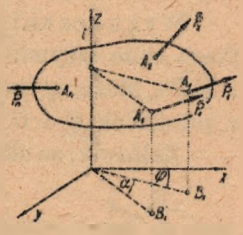
Jeżeli $\varphi = 0$ (t. j. jeżeli belka jest w równowadze w położeniu poziomym), otrzymamy

$$Q_1 \cdot OA = Q_2 \cdot OB.$$

W szczególności więc, jeżeli $OA = OB$, to $Q_1 = Q_2$.

Na tej zasadzie polega przyrząd zwany *wagą*, służący do porównywania ciężarów dwóch ciał, a pośrednio ich mas.

Przykład 2. Ciało sztywne, mające oś l unieruchomioną, jest w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ o punktach zaczepienia $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Podać warunki konieczne i dostateczne, jakie muszą spełniać te siły, by ciało pozostawało nadal w równowadze, jeżeli obrócimy je około osi l o dowolny kąt α, nie zmieniając przy tym kierunków, zwrotów, wielkości, ani punktów zaczepienia (w ciele) tych sił.



Przyjmijmy oś l za oś z układu współrzędnych i oznaczmy przez x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... współrzędne punktów zaczepienia $A_1, A_2, \ldots$, a przez x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z_2', ... współrzędne punktów $A_1', A_2', \ldots$, w które przeszły punkty $A_1, A_2, \ldots$ przy obrocie ciała o kąt α wokoło osi l. Niech B_1 i B_1' będą rzutami punktów A_1 i A_1' na płaszczyznę xy, a φ kątem między OB a osią x. Kładąc $r_1 = OB_1 = OB_1'$, mamy:

$$(7) \qquad x_1 = r_1 \cos\varphi, \qquad y_1 = r_1 \sin\varphi,$$

$$(8) \qquad x_1' = r_1 \cos(\varphi + \alpha), \qquad y_1' = r_1 \sin(\varphi + \alpha), \qquad z_1 = z_1'.$$

Zatem $x_1' = r_1 \cos\varphi \cos\alpha - r_1 \sin\varphi \sin\alpha$, skąd na mocy (7)

$$(9) \qquad x_1' = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha \qquad \text{i podobnie} \qquad y_1' = y_1 \cos\alpha + x_1 \sin\alpha.$$

Analogiczne wzory otrzymamy dla pozostałych punktów $A_2', A_3', \ldots$

Ponieważ po obrocie o kąt α ciało ma zachować równowagę, więc moment sił względem osi z musi być zerem czyli

$$\Sigma(P_{i_x} y_i' - P_{i_y} x_i') = 0.$$

Podstawiając zamiast x_i', y_i' wyrażenia ze wzorów (9), otrzymamy

$$\cos\alpha\,\Sigma(P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) + \sin\alpha\,\Sigma(P_{i_x} x_i + P_{i_y} y_i) = 0. \tag{10}$$

Ponieważ równowaga zachodzi dla $\alpha = 0$, więc wstawiając $\alpha = 0$ do wzoru (10), otrzymamy

$$\Sigma(P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) = 0. \tag{11}$$

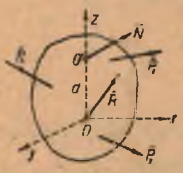
Z (10) mamy dla $\alpha = \pi/2$

$$\Sigma(P_{i_x} x_i + P_{i_y} y_i) = 0. \tag{12}$$

Na odwrót, jeżeli zachodzą warunki (11) i (12), to zachodzi oczywiście warunek (10) dla każdego α. Równania (11) i (12) są więc szukanymi warunkami koniecznymi i wystarczającymi.

Wyznaczanie reakcyj działających na oś nieruchomą. Niech ciało sztywne ma prostą l unieruchomioną w dwóch punktach O i O'. Możemy wówczas przyjąć, że siły reakcyjne zaczepione są w punktach O i O'.

Załóżmy, że układ $\{P_i\}$ sił działających na ciało jest w równowadze.



Niech punkt O będzie początkiem układu współrzędnych, a oś l osią z-ów. Oznaczmy przez x_i, y_i, z_i współrzędne punktów zaczepienia sił $\{P_i\}$, przez $\bar{R}$ i $\bar{N}$ reakcje w punktach O i O', a przez d długość odcinka OO'.

Ponieważ układ sił $\{P_i\}$ wraz z reakcjami $\bar{R}$ i $\bar{N}$ jest w równowadze, więc tworząc rzuty sumy i momentu ogólnego względem O na osie układu współrzędnych, otrzymamy sześć równań:

$$\text{(I)} \quad \Sigma P_{i_x} + R_x + N_x = 0,$$

$$\text{(II)} \quad \Sigma P_{i_y} + R_y + N_y = 0,$$

$$\text{(III)} \quad \Sigma P_{i_z} + R_z + N_z = 0,$$

$$\text{(IV)} \quad \Sigma(P_{i_y} z_i - P_{i_z} y_i) + N_y d = 0,$$

$$\text{(V)} \quad \Sigma(P_{i_z} x_i - P_{i_x} z_i) - N_x d = 0,$$

$$\text{(VI)} \quad \Sigma(P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) = 0.$$

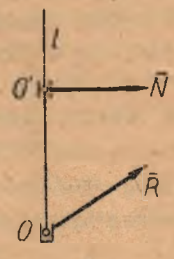
Z równań (IV) i (V) możemy wyznaczyć N_x i N_y. Następnie wyznaczamy R_x i R_y z równań (I) i (II). Wreszcie obliczamy R_z+N_z z równania (III).

Widzimy więc, że równania powyższe nie pozwalają wyznaczyć reakcji. Niewiadomych jest wprawdzie sześć (R_x, R_y, R_z i N_x, N_y, N_z), t. j. tyle ile równań, występują one jednak tylko w pięciu równaniach. Równanie (VI) wyraża warunek równowagi sił działających. Z równań (I)-(V) możemy wyznaczyć tylko składowe reakcji, prostopadłe do osi l, i sumę składowych równoległych do osi l.

Zadania, w których siły reakcyjne nie dają się wyznaczyć z warunków równowagi, nazywamy *statycznie niewyznaczalnymi*.

A więc obliczenie reakcyj ciała sztywnego, unieruchomionego w dwóch punktach jest statycznie niewyznaczalne.

Jeżeli założymy, że dane ciało nie jest ciałem sztywnym, lecz ciałem mogącym ulegać zniekształceniom, to opierając się na teorii sprężystości, moglibyśmy siły reakcyjne obliczyć.

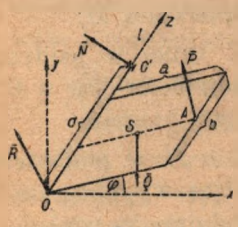


1.

Zadanie nasze możemy uczynić statycznie wyznaczalnym, przyjmując, że punkt O' jest unieruchomiony w t. zw. *łożysku szyjnym* bez tarcia.

Reakcja $\bar{N}$ jest wtedy prostopadła do osi l. Mamy w tym przypadku $N_z=0$, możemy więc wyznaczyć R_z z równania (III).

Przykład 3. Płyta ciężka prostokątna ma oś poziomą l unieruchomioną w punktach O i O' (łożysko szyjne). Środek boku równoległego do osi jest punktem zaczepienia siły $\bar{P}$ prostopadłej do płyty. Dane są: ciężar $\bar{Q}$ o początku w środku S prostokąta, boki prostokąta a i b oraz długość $d=OO'$. Wyznaczyć w położeniu równowagi reakcje $\bar{R}$ i $\bar{N}$ (w O i O') oraz kąt φ, jaki płyta tworzy z poziomem.



2.

Niech O będzie początkiem, a oś l osią z układu współrzędnych; nadajmy osi x kierunek poziomy, a osi y kierunek pionowy ku górze. Będziemy mogli zastosować równania (I)-(VI), str. 280.

Punkt S ma współrzędne $\frac{1}{2}a\cos\varphi$, $\frac{1}{2}a\sin\varphi$, $\frac{1}{2}b$; punkt A zaś $a\cos\varphi$, $a\sin\varphi$, $\frac{1}{2}b$. Mamy:

$$Q_x=0,\quad Q_y=-Q,\quad Q_z=0,\quad \text{gdzie}\quad Q=|Q|;$$

$$P_x=-P\sin\varphi,\quad P_y=P\cos\varphi,\quad P_z=0,\quad \text{gdzie}\quad P=|P|.$$

Z uwagi, że $N_z=0$, dostaniemy na mocy wzorów (I)-(VI), str. 280:

$$-P\sin\varphi+R_x+N_x=0,\qquad P\cos\varphi-Q+R_y+N_y=0,\qquad R_z=0,$$

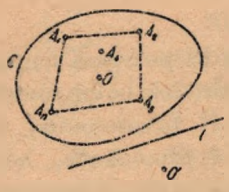
$$\tfrac{1}{2}bP\cos\varphi-\tfrac{1}{2}Qb+N_y d=0,\qquad \tfrac{1}{2}bP\sin\varphi-N_x d=0,\qquad -Pa+\tfrac{1}{2}Qa\cos\varphi=0.$$

Z ostatniego równania otrzymujemy $\cos\varphi=2P/Q$, a z pozostałych równań wyznaczamy R_x, R_y i N_x, N_y. Mamy $R_z=N_z=0$.

Oczywiście równowaga jest możliwa, jeżeli $2P/Q\leqslant 1$, t. j. jeżeli $P\leqslant Q$ 2.

§ 12. Równowaga ciał ciężkich podpartych. Jeżeli ciało sztywne, na które nie działają żadne siły prócz siły ciężkości, opiera się na płaszczyźnie poziomej Π i jest w równowadze, to siły reakcyjne z jakimi płaszczyzna działa na ciało (w punktach podparcia) równoważą się z siłami ciężkości.

Załóżmy, że płaszczyzna podpierająca Π jest gładka. Reakcje są wtedy prostopadłe do płaszczyzny; mają więc wypadkową $\bar{F}$, zaczepioną w pewnym punkcie O płaszczyzny Π. Punkt O nazwaliśmy *środkiem ciśnień* (str. 264). Siły ciężkości działające na dane ciało sztywne mają wypadkową $\bar{Q}$, zaczepioną w środku ciężkości S.



Gdy ciało jest w równowadze, siły $\bar{F}$ i $\bar{Q}$ równoważą się nawzajem. Zatem $\bar{F}+\bar{Q}=0$, a ponadto $\bar{F}$ i $\bar{Q}$ leżą na jednej prostej. Wobec tego środek ciśnień leży w punkcie przecięcia się kierunku siły $\bar{Q}$ z płaszczyzną Π. Środek ciśnień O jest więc rzutem środka ciężkości S na płaszczyznę podpierającą Π.

Jeżeli ciało opiera się na płaszczyźnie Π tylko w jednym punkcie O i jest w równowadze, to reakcja zaczepiona jest w O. Zatem środek ciężkości leży wówczas nad punktem oparcia.

Niech teraz ciało opiera się na płaszczyźnie Π w punktach $A_1, A_2, \ldots$ i niech C będzie dowolną linią zamkniętą wypukłą, otaczającą wszystkie punkty oparcia $A_1, A_2, \ldots$. Udowodnimy, że wówczas środek ciśnień O leży również bądź wewnątrz, bądź na samej linii C.

Przypuśćmy bowiem, że środek ciśnień leży zewnątrz linii C w punkcie O'. Poprowadźmy dowolną prostą l w płaszczyźnie Π, tak by punkt O' i linia C leżały po przeciwnych stronach prostej l.

Momenty sił reakcyjnych względem prostej l byłyby więc skierowane przeciwnie niż moment siły $\bar{F}$. Jest to jednak niemożliwe, gdyż moment ogólny sił reakcyjnych jest równy momentowi siły $\bar{F}$. Istotnie więc środek ciśnień musi leżeć wewnątrz obwodu wypukłego C. Jeżeli K jest najmniejszą linią wypukłą (na rysunku łamana A_1, A_2, A_3, A_n), w obrębie której leżą punkty oparcia [1]), to środek ciśnień leży także w obrębie tej linii. Ponieważ założyliśmy, że ciało jest w równowadze, więc kierunek siły ciężkości przechodzi przez środek ciśnień, trafia zatem również w obręb linii K.

Udowodnimy teraz, że jeżeli ciężar trafia w obręb linii K, to wystąpią reakcje, które zrównoważą ciężar.

Rozpatrzymy dwa przypadki:

1° Ciało podparte jest w dwóch punktach A i B. W tym przypadku linią K jest odcinek AB. Jeżeli kierunek siły ciężkości przechodzi przez punkt G odcinka AB, to istnieją dwie siły reakcyjne $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ o początkach w A i B, skierowane pionowo w górę. Siły te można wyznaczyć graficznie jak na str. 257, lub rachunkowo jak w przykładzie 4, str. 267. Wynika stąd na mocy zasady podanej na str. 263, że reakcje zrównoważą ciężar.

2° Ciało podparte jest w $n>2$ punktach. Jeżeli punkty te leżą na jednej prostej, to oznaczając przez A i B skrajne punkty oparcia, możemy postąpić jak w przypadku 1°. Przypuśćmy więc, że punkty oparcia nie leżą wszystkie na jednej prostej. Jeżeli siła ciężkości trafia w obręb linii K w punkcie O, to możemy znaleźć takie trzy punkty oparcia, że punkt O leżeć będzie w obrębie trójkąta, którego punkty te są wierzchołkami (punkty A_1, A_3, A_n na rysunku). Jak wykażemy za chwilę (str. 284, przykład 4), można wówczas wyznaczyć reakcje, zaczepione w wierzchołkach tego trójkąta i równoważące siłę ciężkości.

Mamy więc twierdzenie następujące:

Jeżeli ciężkie ciało sztywne opiera się na płaszczyźnie poziomej gładkiej, to warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby reakcje płaszczyzny mogły zrównoważyć ciężar ciała jest, by siła ciężkości trafiała w obręb najmniejszej linii wypukłej K, obejmującej wszystkie punkty oparcia.

---

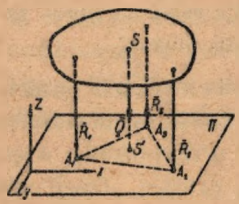
[1]) W geometrii dowodzi się, że linia taka zawsze istnieje i mieści się wewnątrz każdej linii wypukłej, obejmującej punkty oparcia.

Ogólniej: niech ciało sztywne opiera się na powierzchni poziomej gładkiej i niech oprócz siły ciężkości działają na nie inne jeszcze siły. Jeżeli ciało jest w równowadze, to wypadkowa reakcyj $\bar{F}$ równoważy siły działające. Wynika stąd, że siły działające na ciało mają wypadkową pionową $-\bar{F}$, której kierunek przechodzi przez środek ciśnień O, a więc trafia w obręb linii K. Na odwrót, jeżeli siły działające mają wypadkową pionową, skierowaną w dół i trafiającą w obręb linii K, to wystąpią reakcje, równoważące siły działające na ciało. Dowód przeprowadza się jak poprzednio.

Przykład 4. Stołek o trzech nogach opiera się na podłodze Π. Wyznaczyć reakcje w punktach oparcia A_1, A_2, A_3 przy założeniu, że nie ma tarcia.

Oznaczmy przez S środek ciężkości stołka, przez S' rzut S na Π, przez $\bar{Q}$ ciężar stołka, a przez $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$ reakcje (rys. 1).

Zadanie rozwiążemy najprościej, obliczając momenty ogólne sił względem prostych A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1; oczywiście momenty te są zerami.



1.

Niech h_3 oznacza odległość A_3 od A_1A_2, a w_3 odległość S' od A_1A_2. Tworząc moment względem osi A_1, A_2, otrzymamy:

$$R_3 h_3 - Q w_3 = 0, \quad \text{gdzie} \quad R_3 = |\bar{R}_3| \quad \text{i} \quad Q = |\bar{Q}|,$$

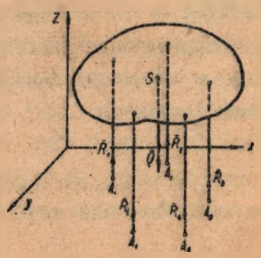
gdyż momenty sił $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ są zerami. Zatem

$$R_3 = Q w_3 / h_3.$$

Analogicznie otrzymamy:

$$R_1 = Q w_1 / h_1 \qquad \text{i} \qquad R_2 = Q w_2 / h_2.$$

Przykład 5. Niech ciało sztywne spoczywa na płaszczyźnie poziomej Π na n punktach oparcia $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Przyjmijmy płaszczyznę Π za płaszczyznę xy układu współrzędnych (x, y, z) i oznaczmy przez $x_1, y_1, 0$, $x_2, y_2, 0$, $\ldots$, $x_n, y_n, 0$ współrzędne punktów oparcia $A_1, A_2, \ldots, A_n$, zaś przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka ciężkości S (rys. 2).



2.

Niechaj $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, \bar{R}_n$ oznaczają reakcje, $\bar{Q}$ ciężar, zaś $R_1, R_2, \ldots, R_n$ i Q wartości bezwzględne tych sił.

Tworząc rzuty na osie układu współrzędnych, otrzymamy dla rzutu na oś z

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_n - Q = 0. \tag{13}$$

Pozostałe dwa równania odpadają, gdyż dają tożsamościowo 0.

Tworząc następnie momenty względem początku układu współrzędnych, otrzymamy tylko dwa równania:

$$(14)\quad -R_1y_1-R_2y_2-\ldots+Qy_0=0, \qquad R_1x_1+R_2x_2+\ldots-Qx_0=0,$$

gdyż moment sił względem osi z jest zerem.

Mamy wobec tego trzy tylko równania dla wyznaczenia reakcyj. Jeżeli więc $n>3$, to reakcyj nie będziemy mogli wyznaczyć. Zadanie wyznaczenia reakcyj w przypadku np. stołu opierającego się na czterech nogach jest więc statycznie niewyznaczalnym (p. str. 281).

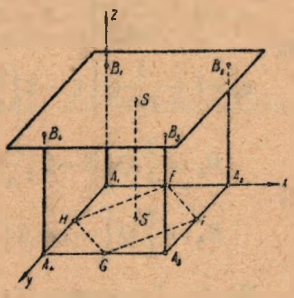
Jeżeli natomiast ciało podparte w $n>3$ punktach nie jest sztywne, to reakcje można wyznaczyć, opierając się na teorii sprężystości. Okażemy to na przykładzie następnym.

Przykład 6. Stół prostokątny opiera się na czterech nogach w punktach A_1, A_2, A_3, A_4 płaszczyzny poziomej gładkiej Π.

Oznaczmy przez $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, \bar{R}_4$ reakcje, przez $\bar{Q}$ ciężar, a przez R_1, R_2, R_3, R_4, Q wartości bezwzględne tych sił. Załóżmy, że punkty A_1, A_2, A_3, A_4 są wierzchołkami prostokąta i połóżmy:

$$(15)\qquad A_1A_2=A_3A_4=a, \qquad A_1A_4=A_2A_3=b.$$

Przyjmijmy A_1 za początek układu współrzędnych, a proste A_1A_2 i A_1A_4 za osie x i y, nadając osi z zwrot ku górze. Oznaczmy wreszcie przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka ciężkości S płyty danego stołu.



Tworząc rzuty sił na osie układu współrzędnych, oraz momenty sił względem tych osi, otrzymamy (por. równania (13) i (14) przykładu 5):

$$(16)\qquad R_1+R_2+R_3+R_4-Q=0,$$

$$(17)\quad -(R_3+R_4)b+Qy_0=0, \quad (R_2+R_3)a-Qx_0=0.$$

Z równań tych wyznaczyć reakcyj nie można.

Załóżmy jednak, że płyta stołu i płaszczyzna Π (na której opierają się nogi stołu) są sztywne, natomiast, że nogi stołu sztywne nie są, lecz ulegają ściśnieniu, i że reakcje są proporcjonalne (co do wielkości) do skrócenia poszczególnych nóg.

Jeżeli więc przez l oznaczymy pierwotną długość nóg, zaś przez z_1, z_2, z_3, z_4 ich długości po ściśnieniu, to skrócenia wyniosą $l-z_1$, $l-z_2$, $l-z_3$, $l-z_4$, skąd w myśl założenia:

$$(18)\qquad R_1 = m(l-z_1),\quad R_2 = m(l-z_2),\quad R_3 = m(l-z_3),\quad R_4 = m(l-z_4),$$

gdzie m jest współczynnikiem proporcjonalności.

Równania (16), (17) i (18) stanowią układ siedmiu równań o ośmiu niewiadomych R_1, R_2, R_3, R_4 i z_1, z_2, z_3, z_4. Ósme równanie otrzymamy, wyrażając, że punkty B_1, B_2, B_3, B_4, w których płyta stołu opiera się na nogach, leżą w jednej płaszczyźnie; założyliśmy bowiem, że płyta stołu jest sztywna.

Punkty B_1, B_2, B_3 i B_4 mają współrzędne $0, 0, z_1$, $a, 0, z_2$, a, b, z_3 i $0, b, z_4$. Jak wiadomo z geometrii analitycznej, warunek by punkty te leżały w jednej płaszczyźnie, wyraża się wzorem

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & z_1, & 1 \\ a, & 0, & z_2, & 1 \\ a, & b, & z_3, & 1 \\ 0, & b, & z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Obliczając wyznacznik, otrzymamy:

$$(19)\qquad z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0.$$

Z równań (16)-(19) możemy już wyznaczyć niewiadome reakcje. Otrzymamy:

$$(20)\qquad \begin{aligned} z_1 &= l + \frac{1}{4m}Q\left[-3 + 2\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\right], & z_2 &= l + \frac{1}{4m}Q\left[-1 - 2\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\right], \\ z_3 &= l + \frac{1}{4m}Q\left[1 - 2\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\right], & z_4 &= l + \frac{1}{4m}Q\left[-1 + 2\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\right], \end{aligned}$$

$$(21)\qquad \begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{4}Q\left[3 - 2\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\right], & R_2 &= \frac{1}{4}Q\left[1 + 2\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\right], \\ R_3 &= \frac{1}{4}Q\left[-1 + 2\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b}\right)\right], & R_4 &= \frac{1}{4}Q\left[1 - 2\left(\frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b}\right)\right]. \end{aligned}$$

Na to, by wzory (21) dawały na $R_1, \ldots, R_4$ wartości nieujemne, muszą zachodzić związki następujące:

$$(22)\qquad \frac{1}{2} \leqslant \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \leqslant \frac{3}{2}, \qquad -\frac{1}{2} \leqslant \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Wynika stąd, że rzut środka ciężkości na płaszczyznę poziomą, t. j. punkt $S'(x_0, y_0, 0)$, musi leżeć w obrębie równoległoboku $EFGH$, którego wierzchołki są środkami boków prostokąta $A_1A_2A_3A_4$.

Przypuśćmy, że punkt S' wypada w obrębie trójkąta A_1EH (poza bokiem EH). Wówczas byłoby

$$\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}<\frac{1}{2} \quad \text{czyli} \quad 1-2\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)>0,$$

skąd na mocy (20) $z_3>l$; znaczy to, że noga A_3B_3 się wydłużyła, co oczywiście niemożliwe.

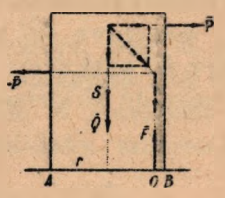
Musimy zatem przyjąć, że *stół opiera się tylko na trzech nogach*, mianowicie w punktach A_1, A_2, A_4. Kładąc $R_3=0$, otrzymamy więc z równań (17):

$$R_4=Qy_0/b, \qquad R_2=Qx_0/a,$$

z równania zaś (16)

$$R_1=Q\left|1-\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right)\right|.$$

Przykład 7. Walec ciężki opiera się na płaszczyźnie poziomej gładkiej. Na walec działa para sił $\bar{P}$ i $-\bar{P}$ leżących w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez środek ciężkości S. Jaka może być maksymalna wielkość momentu pary, gdy walec jest w równowadze?



Oznaczmy przez $\bar{M}$ moment pary, przez $\bar{Q}$ ciężar walca, przez $\bar{F}$ wypadkową sił reakcyjnych, zaczepioną w O, a przez r promień podstawy walca.

Jeżeli walec jest w równowadze, to suma sił jest zerem, więc $\bar{F}+\bar{Q}=0$ czyli $\bar{F}=-\bar{Q}$.

Zakładając, że S leży na osi walca i kładąc $d=AO$, dostaniemy z obliczenia momentu względem A:

$$|\bar{M}|+|\bar{Q}|r-|\bar{F}|d=0.$$

Ponieważ, $|\bar{Q}|=|\bar{F}|$, więc

$$|\bar{M}|=Q(d-r),$$

gdzie $Q=|\bar{Q}|$. Ponieważ maksymalną wartością d jest $d=2r$, więc maksymalną wartością $|\bar{M}|$ jest Qr.

Jeżeli więc $|\bar{M}|>Qr$, równowaga jest niemożliwa. Jeżeli zaś $|\bar{M}|\leqslant Qr$, to, jak łatwo stwierdzić, wypadkowa sił $\bar{Q}$, $\bar{P}$ i $-\bar{P}$ jest równa $\bar{Q}$ i trafia płaszczyznę poziomą w obrębie podstawy walca. Walec może więc pozostawać w równowadze.

§ 13. Siły wewnętrzne. Przeprowadźmy przez dowolny punkt O osi obranej w danym ciele sztywnym, np. w belce, płaszczyznę Π, prostopadłą do tej osi. Płaszczyzna podzieli ciało na dwie części I i II. Załóżmy, że ciało poddane jest działaniu pewnych sił i że jest w równowadze. W wielu zagadnieniach mechaniki technicznej dogodnym jest rozpatrywać części I i II tak, jak gdyby tworzyły odrębne ciała sztywne, stykające się wzdłuż płaszczyzny przekroju Π.

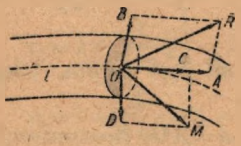
Z takiego ujęcia wynika, że część II działa na część I z pewnymi siłami. Siły te nazywamy *napięciami*.

Przyjmując punkt O za środek redukcji, możemy zastąpić napięcia przez jedną siłę $\bar{R}$ o początku O i parę sił o momencie $\bar{M}$.

Składową $\overline{OA}$ siły $\bar{R}$, prostopadłą do przekroju, nazywamy *ściskaniem* wypadkowym lub *rozciąganiem* w O, zależnie od tego, czy składowa jest skierowana do wewnątrz, czy na zewnątrz części I.

Składową $\overline{OB}$ siły $\bar{R}$, styczną do przekroju, nazywamy siłą wypadkową *zginającą* lub *ścinającą* w O.

Składową $\overline{OC}$ momentu $\bar{M}$, prostopadłą do płaszczyzny przekroju Π, nazywamy *momentem skręcającym* w O, składową zaś $\overline{OD}$ styczną do powierzchni *momentem zginającym* w O.



1.

Moment skręcający możemy uważać za moment pewnej pary sił, leżących w płaszczyźnie przekroju, zaś moment zginający za moment pary sił, leżących w płaszczyźnie stycznej do osi w punkcie O. Działanie tych par, z których pierwsza stara się ciało skręcić, a druga zgiąć, tłumaczą nam nazwy momentów.

Jeżeli ciało jest w równowadze, to siły zewnętrzne działające na część I równoważą się z napięciami. Zatem $-\bar{R}$ i $-\bar{M}$ równają się odpowiednio sumie i momentowi ogólnemu względem O sił zewnętrznych działających na część I. Znając siły zewnętrzne, możemy więc wyznaczyć $\bar{R}$ i $\bar{M}$.

Znajomość siły $\bar{R}$ i momentu $\bar{M}$ ma wielkie znaczenie w nauce o wytrzymałości. Na ogół wytrzymałość ciała jest tym bardziej zagrożona, im $\bar{R}$ i $\bar{M}$ są większe.

Napięcia, z jakimi część I działa na II, dają się zastąpić w myśl prawa akcji i reakcji sumą $-\bar{R}$ o początku O i parą o momencie $-\bar{M}$.

Przykład 1. Belka podparta w punktach A i B obciążona jest siłami $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_5$ skierowanymi pionowo w dół i zaczepionymi w odległościach $x_1, x_2, \ldots, x_5$ od A (str. 257, rys. 1). Zakładając, że podpory są gładkie, otrzymamy (por. wzory (13) i (14), str. 267):

$$R_2=(P_1x_1+P_2x_2+\ldots+P_5x_5)/d, \quad R_1=[P_1(d-x_1)+\ldots+P_5(d-x_5)]/d,$$

gdzie $AB=d$, a P_i, R_1 i R_2 oznaczają wartości bezwzględne sił i reakcyj.

Utwórzmy przekrój belki płaszczyzną prostopadłą do osi w punkcie C, odległym o x od A. Oznaczmy przez $\bar{R}$ sumę, a przez $\bar{M}$ moment względem C napięć części CB na część AC. Przyjmując, że przekrój wypada między siłą P_3 a P_4, otrzymamy:

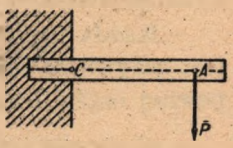
$$-\bar{R}=\bar{R}_1+\bar{P}_1+\bar{P}_2+\bar{P}_3, \quad -\bar{M}=\mathrm{Mom}_C\bar{R}_1+\mathrm{Mom}_C\bar{P}_1+\mathrm{Mom}_C\bar{P}_2+\mathrm{Mom}_C\bar{P}_3.$$

Nadając osi y kierunek pionowy ze zwrotem ku górze, otrzymamy:

$$R_y=R_1-P_1-P_2-P_3, \qquad M=xR_1-(x-x_1)P_1-(x-x_2)P_2-(x-x_3)P_3.$$

Ponieważ $\bar{R}$ i $\bar{M}$ leżą w płaszczyźnie przekroju, więc $\bar{R}$ jest siłą zginającą, $\bar{M}$ zaś momentem zgięcia. Siła ściskająca (lub rozciągająca) i moment skręcający są zerami. Siłę $\bar{R}$ i moment $\bar{M}$ możemy również wyznaczyć przy pomocy wieloboku sznurowego jak na str. 257 i 258.

Przykład 2. Belka, wmurowana jak na rysunku, obciążona jest w A siłą $\bar{P}$. Utwórzmy przekrój belki przez punkt C i oznaczmy przez $\bar{R}$ sumę, a przez $\bar{M}$ moment względem C napięć części lewej na prawą. Mamy zatem:



$$-\bar{R}=\bar{P}, \qquad -\bar{M}=\mathrm{Mom}_C\bar{P}.$$

Część prawa działa więc na część lewą (wmurowaną) napięciami o sumie $-\bar{R}$ i momencie $-\bar{M}$. Reakcje muru, równoważące te napięcia, mają tedy sumę $\bar{R}=-\bar{P}$ i moment $\bar{M}=-\mathrm{Mom}_C\bar{P}$.

III. Układy ciał

§ 14. Warunki równowagi. Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu ciał sztywnych (swobodnych lub nie) jest, by każde ciało układu było w równowadze. Wynika stąd, że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu ciał sztywnych jest, by dla każdego ciała z osobna siły działające na to ciało równoważyły się z reakcjami.*

Siły, z jakimi dwa ciała układu działają na siebie, nazywamy siłami *wewnętrznymi* układu. Pozostałe siły nazywamy *zewnętrznymi.*

Jeżeli np. dwa ciała układu stykają się z sobą, to reakcje w punktach zetknięcia są siłami wewnętrznymi. Natomiast te siły działające i reakcje, które pochodzą od ciał nie należących do układu (np. od podpór), są siłami zewnętrznymi.

Siły wewnętrzne występują parami i podlegają prawu akcji i reakcji, zatem suma i moment ogólny sił wewnętrznych jest zerem.

Jeżeli układ ciał jest w równowadze, to dla każdego ciała siły zewnętrzne, działające na to ciało, równoważą się z siłami wewnętrznymi. Wynika stąd, że siły zewnętrzne, działające na cały układ, równoważą się z siłami wewnętrznymi układu. Ponieważ (jak wyżej wspomnieliśmy) siły wewnętrzne mają sumę i moment ogólny równe zeru, więc *jeżeli układ ciał sztywnych jest w równowadze, to suma i moment ogólny sił zewnętrznych są zerami.*

Warunek ten jest tylko koniecznym, ale nie wystarczającym do równowagi układu ciał sztywnych.

Każda część układu ciał sztywnych, będącego w równowadze, jest oczywiście sama w równowadze. Siłami zewnętrznymi względem pewnej części układu są:

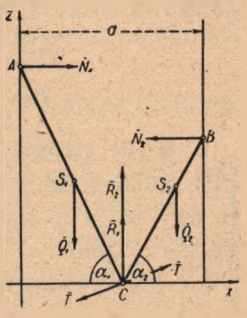
a) te siły zewnętrzne całego układu, które działają na daną jego część,

b) reakcje, wywierane na tę część przez pozostałe ciała układu.

Wynika stąd, że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu ciał sztywnych jest, by siły zewnętrzne, działające na jakąkolwiek część układu, równoważyły się z reakcjami, wywieranymi na tę część przez pozostałe ciała układu.*

Możemy bowiem obrać za części układu poszczególne ciała układu.

Przykład. Dwa pręty ciężkie AC i BC, leżące w płaszczyźnie pionowej i stykające się w punkcie C, opierają się w A i B o ściany pionowe, zaś w C o ścianę poziomą. Dane są ciężary prętów $\bar{Q}_1$ i $\bar{Q}_2$, zaczepione w środkach ciężkości, oraz długości $l_1 = AC$, $l_2 = BC$, $a_1 = S_1C$, $a_2 = S_2C$ i odległość d ścian pionowych od siebie. Wyznaczyć w położeniu równowagi kąty α_1 i α_2, jakie pręty tworzą z poziomem, przy założeniu, że nie ma tarcia.



Oznaczmy: przez $\bar{N}_1$ i $\bar{N}_2$ reakcje ścian pionowych (reakcje te mają więc kierunek poziomy), przez $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ reakcje ściany poziomej (mające więc kierunek pionowy), wreszcie przez $\bar{T}$ siłę, z jaką pręt CB działa na pręt AC w punkcie C. Na mocy prawa akcji i reakcji pręt AC działa wówczas na pręt CB z siłą $-\bar{T}$. O kierunku siły $\bar{T}$ nie możemy nic z góry powiedzieć.

Obierzmy osie x i z w płaszczyźnie prętów, nadając osi x kierunek poziomy, zaś osi z kierunek pionowy w górę. Gdy pręt AC jest w równowadze, siły działające na ten pręt równoważą się. Tworząc zatem ich rzuty na osie x, z i obliczając moment względem C, otrzymamy:

$$(1) \qquad N_1 + T_x = 0, \qquad -Q_1 + R_1 + T_y = 0,$$

$$(2) \qquad N_1 l_1 \sin \alpha_1 - Q_1 a_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

gdzie N_1, R_1 i Q_1 oznaczają wartości bezwzględne odpowiednich sił. Podobnie dla pręta CB dostaniemy:

$$(3) \qquad -N_2 - T_x = 0, \qquad -Q_2 + R_2 - T_y = 0,$$

$$(4) \qquad -N_2 l_2 \sin \alpha_2 + Q_2 a_2 \cos \alpha_2 = 0.$$

Z równań (2) i (4) mamy:

$$(5) \qquad N_1 = Q_1 a_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 / l_1, \qquad N_2 = Q_2 a_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 / l_2,$$

z pierwszych zaś równań (1) i (3) $N_1 = N_2$, skąd na mocy (5)

$$(6) \qquad Q_1 a_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 / l_1 = Q_2 a_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 / l_2.$$

Ponadto, jak widać z rysunku,

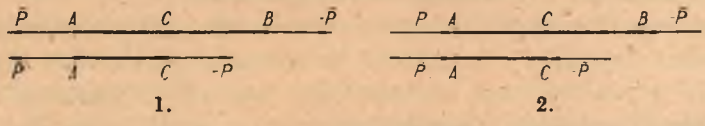
$$(7) \qquad l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 = d.$$

Z równań (6) i (7) możemy wyznaczyć kąty α_1 i α_2.

Uwaga. Z równań (1)-(4) nie możemy wyznaczyć sił $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ i $\bar{T}$. Możemy natomiast otrzymać siłę $\bar{T}'=\bar{R}_1+\bar{T}$ i $\bar{T}''=\bar{R}_2-\bar{T}$. Są to wypadkowe reakcyj, działających w C na pręty. Dostaniemy:

$$T_x = T_x = -N_1, \qquad T_y = R_1 + T_y = Q_1,$$
$$T_x = -T_x = N_2, \qquad T_y = R_2 - T_y = Q_2.$$

§ 15. Układy prętów. Jeżeli na pręt sztywny działają dwie siły, zaczepione w jego końcach A i B, i pręt jest w równowadze, to siły te (z uwagi na to, że ich suma i moment ogólny równają się zeru) działają wzdłuż pręta, są równe co do wielkości i skierowane przeciwnie. Oznaczmy te siły przez $\bar{P}$ i $-\bar{P}$.



1. 2.

Napięcia w prętach. Przetnijmy pręt w jakimś punkcie C i usuńmy prawą jego część CB (rys. 1). Aby teraz lewa część pręta pozostała w równowadze, należałoby dołączyć siłę $-\bar{P}$ o początku w C. Możemy zatem przyjąć, że część prawa CB oddziaływa na część lewą AC z siłą $-\bar{P}$. Siłę tę nazywamy *napięciem* pręta.

Gdy siły $\bar{P}$ i $-\bar{P}$ skierowane są ku sobie, napięcie nazywamy *ściskaniem* (rys. 1), w przeciwnym razie *rozciąganiem* (rys. 2).

Napięcie ma w każdym punkcie pręta tą samą wielkość i kierunek; zwrot zaś napięcia będzie zależał od tego, czy idzie o oddziaływanie części prawej na lewą, czy przeciwnie. Co do końca pręta, to możemy mówić tylko o oddziaływaniu całego pręta na koniec. Jeżeli więc podamy wielkość napięcia i jego rodzaj (t. zn. czy jest ono ściskaniem czy rozciąganiem), to napięcia w końcach prętów będą w zupełności określone.

Połączenia przegubowe. Wyobraźmy sobie kilka prętów sztywnych tak ze sobą połączonych, że muszą się one stale ze sobą stykać pewnymi punktami, np. końcami. Jeżeli poza tym połączenie to nie powoduje innych ograniczeń ruchu prętów, powiadamy, że pręty są *połączone przegubowo*, a punkty, w których pręty stykają się jeden z drugim, nazywamy *przegubami*.

3.

Połączenie przegubowe możemy otrzymać w przybliżeniu, łącząc np. końce prętów bardzo krótką nicią nierozciągliwą.

Reakcje, z jakimi jeden pręt działa na drugi, możemy zastąpić w myśl twierdzenia o redukcji przez jedną siłę $\bar{R}$, zaczepioną w punkcie styku oraz przez parę sił o momencie $\bar{M}$.

Dla prostoty zakładać będziemy, że $\bar{M}=0$. Mówimy wówczas, że *przegub jest gładki*.

Zaznaczyć należy, że nie zawsze możemy założyć gładkość przegubu; przykłady na to podamy później (str. 297).

W przypadku przegubu gładkiego reakcja, z jaką jeden pręt oddziaływa na drugi, jest siłą zaczepioną w punkcie zetknięcia, t. j. w przegubie. W szczególności, jeżeli w przegubie gładkim schodzi się kilka prętów, to reakcja wywierana na pewien pręt przez pozostałe będzie siłą zaczepioną w punkcie przegubu (np. reakcja $\bar{R}_1$ prętów 2, 3, 4 na pręt 1, przedstawiona na rysunku).

Układy prętów. Weźmy pod uwagę układ prętów połączonych w końcach. Jeżeli jakaś siła zewnętrzna zaczepiona jest w przegubie, to należy wówczas zaznaczyć wyraźnie, na który pręt działa ta siła.

Gdy układ prętów jest w równowadze, siły działające na każdy pręt muszą się oczywiście równoważyć z reakcjami wywieranymi na ten pręt.

Na rys. 1, str. 294, przedstawiony jest układ prętów, w którym na pręt AB działają siły zewnętrzne $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$. Siła $\bar{P}_1$ zaczepiona jest w końcu A pręta. Siły te równoważą się z reakcjami $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w końcach A i B.

Często dogodnym jest uważać przegub za odrębny punkt materialny (za odrębne ciało), połączony z końcami prętów schodzących się w tym przegubie. Innymi słowy, zakłada się wówczas, że końce prętów nie są połączone z sobą bezpośrednio, lecz za pośrednictwem przegubu. Przy tym założeniu reakcje stykających się prętów zastępuje się reakcjami przegubu na te pręty, a siły zaczepione w przegubie uważa się za siły działające na przegub, a nie na pręty. Jedynymi siłami wewnętrznymi układu prętów będą wtedy reakcje przegubów na pręty i prętów na przeguby.

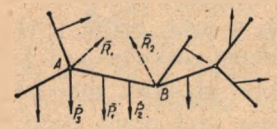
W przypadku równowagi układu każdy pręt i przegub jest w równowadze, zatem (str. 290):

1° *siły zewnętrzne, działające na dowolny pręt* (nie zaczepione w przegubie) *równoważą się z reakcjami, jakie przeguby na ten pręt wywierają*;

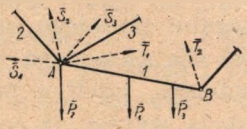
2° *siły zewnętrzne, zaczepione w którymkolwiek przegubie, równoważą się z reakcjami prętów na ten przegub.*

Na rys. 2 siła $\overline{P}_2$ o początku w przegubie A równoważy się z reakcjami $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$ prętów 1, 2, 3 na przegub A. Siły zaś zewnętrzne $\overline{P}_1$, $\overline{P}_3$ działające na pręt AB równoważą się z reakcjami $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ przegubów A i B na ten pręt.

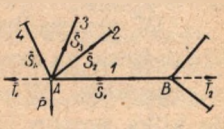
O kierunkach reakcji przegubów na pręty nie możemy na ogół nic z góry powiedzieć. Inaczej jednak przedstawia się sprawa, gdy siły zewnętrzne zaczepione są tylko w przegubach.



1.



2.



3.

Weźmy pod uwagę taki właśnie układ prętów, pozostający w równowadze (rys. 3). Niech $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ oznaczają reakcje przegubów A i B na pręt łączący te przeguby. Ponieważ na pręt nie działają żadne siły zewnętrzne, więc reakcje $\overline{T}_1$ i $\overline{T}_2$ muszą się równoważyć (wynika to z warunku 1°). Reakcje działają więc wzdłuż pręta i mamy $\overline{T}_1 = -\overline{T}_2$.

A więc: *jeżeli układ prętów połączonych przegubowo jest w równowadze, a siły zewnętrzne zaczepione są tylko w przegubach, to reakcje przegubów na pręty są siłami skierowanymi wzdłuż prętów; reakcje, z jakimi oddziałują na pręt przeguby, które ten pręt łączy, są równe co do wielkości i kierunku, a zwroty mają przeciwne.*

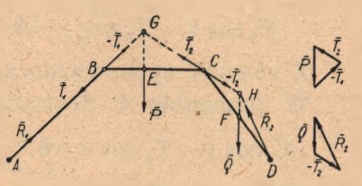
Reakcje przegubów A i B wywołują w pręcie napięcie, które może być rozciąganiem lub ściskaniem (w naszym przypadku napięcie jest rozciąganiem). Na mocy prawa akcji i reakcji pręt AB działa na przegub A z siłą $\overline{S}_1 = -\overline{T}_1$. Siła $\overline{S}_1$ jest więc napięciem pręta w końcu A. Reakcje prętów na przeguby są tedy równe napięciom tych prętów. Z warunku 2° wynika więc tw. następujące:

Siły zewnętrzne zaczepione w przegubie równoważą się z napięciami prętów (schodzących się w tym przegubie).

Na rys. 3 napięcia $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{S}_3, \overline{S}_4$ prętów 1, 2, 3, 4 równoważą się z siłą $\overline{P}$, zaczepioną w przegubie A; jest więc $\overline{P}+\overline{S}_1+\overline{S}_2+\overline{S}_3+\overline{S}_4=0$.

Przykład 1. Trzy pręty AB, BC i CD, połączone przegubowo w punktach B i C, unieruchomione zaś (również przegubowo) w punktach A i D, pozostają w równowadze w płaszczyźnie pionowej pod działaniem sił pionowych $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ o początkach E i F. Dane są: siła $\overline{P}$ oraz punkty zaczepienia E i F. Wyznaczyć siłę $\overline{Q}$.

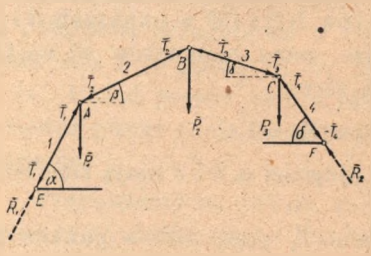
Na pręt AB działa w punkcie A reakcja $\bar{R}_1$ i w punkcie B reakcja $\bar{T}_1$ pręta BC. Mamy $\bar{R}_1+\bar{T}_1=0$, reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{T}_1$ działają więc wzdłuż pręta AB.



Na pręt BC działa reakcja $-\bar{T}_1$, siła $\bar{P}$ i reakcja $\bar{T}_2$ pręta CD w punkcie C. Ponieważ pręt BC jest w równowadze, więc kierunki tych sił przecinają się w jednym punkcie G, który znajdziemy jako punkt przecięcia prostej AB i kierunku siły $\bar{P}$. Mając punkt G, możemy otrzymać kierunek CG reakcji $\bar{T}_2$. Ponieważ $-\bar{T}_1+\bar{P}+\bar{T}_2=0$, więc znając kierunki sił $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ i siłę $\bar{P}$, możemy wyznaczyć z trójkąta sił siły $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$.

Na pręt CD działają reakcje $-\bar{T}_2$ i $\bar{R}_2$ oraz siła $\bar{Q}$. Siły te przecinają się w jednym punkcie H, który otrzymamy, jako punkt przecięcia się kierunków sił $-\bar{T}_2$ i $\bar{Q}$. Mając punkt H, otrzymamy kierunek siły $\bar{R}_2$. Ponieważ $-\bar{T}_2+\bar{Q}+\bar{R}_2=0$, więc znając $\bar{T}_2$, otrzymujemy z trójkąta sił siły $\bar{Q}$ i $\bar{R}_2$.

Przykład 2. Cztery pręty 1, 2, 3 i 4 są połączone przegubowo w A, B i C, zaś unieruchomione w łożyskach przegubowych E i F. Pręty są nachylone do poziomu pod kątami α, β, γ i δ. W przegubach A, B i C zaczepione są siły pionowe $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$. Dana jest siła $\bar{P}_1$. Wyznaczyć siły $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$ oraz reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ w E i F.



Ponieważ siły zewnętrzne zaczepione są tylko w przegubach, więc w każdym przegubie napięcia prętów równoważą się z siłami zewnętrznymi zaczepionymi w tym przegubie.

W przegubie E napięcie $\bar{T}_1$ pręta 1 równoważy się z reakcją $\bar{R}$: $\bar{T}_1+\bar{R}_1=0$.

W przegubie A napięcia $-\bar{T}_1$ pręta 1 i $\bar{T}_2$ pręta 2 równoważą się z siłą $\bar{P}_1$: $-\bar{T}_1+\bar{T}_2+\bar{P}_1=0$. Oznaczając przez T_1, T_2 i P_1 wartości bezwzględne tych sił i tworząc ich rzuty na kierunki pionowy i poziomy, otrzymamy:

$$T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\beta = 0, \qquad T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\beta - P_1 = 0.$$

Z równań tych obliczamy T_1 i T_2.

W przegubie B dla napięcia $\bar{T}_3$ pręta 3 dostaniemy związek $-\bar{T}_2+\bar{T}_3+\bar{P}_2=0$. Tworząc rzuty na kierunek poziomy i pionowy oraz kładąc $T_3=|\bar{T}_3|$ i $P_2=|\bar{P}_2|$, otrzymamy:

$$T_2\cos\beta-T_3\cos\gamma=0, \qquad T_2\sin\beta+T_3\sin\gamma-P_2=0.$$

Z równań tych wyznaczamy T_3 i P_2.

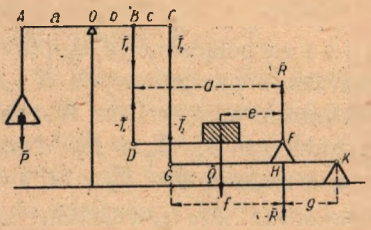
W przegubie C dostaniemy przy analogicznym znakowaniu:

$$T_3\cos\gamma-T_4\cos\delta=0, \qquad -T_3\sin\gamma+T_4\sin\delta-P_3=0,$$

skąd obliczymy T_4 i P_3.

W przegubie F otrzymamy wreszcie $-\bar{T}_4+\bar{R}_2=0$ czyli $\bar{R}_2=\bar{T}_4$.

Przykład 3. Waga dziesiętna. Belka AC, podparta w O, połączona jest w punktach B i C z belkami DF i GK przy pomocy prętów BD i CG. Belka DF, podparta w punkcie F, opiera się w punkcie H na belce GK, podpartej w K. W punktach B, C, G i D połączenia są przegubowe.



Na belce DF kładziemy ciężar $\bar{Q}$, który mamy zważyć, i równoważymy go ciężarkiem $\bar{P}$, położonym na szalce zawieszonej w A. Ciężary belek i prętów pomijamy. Wyznaczyć związek między ciężarami $\bar{P}$ i $\bar{Q}$.

Oznaczmy przez $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$ napięcia prętów BD i CG w punktach B i C.

Gdy belka AC jest w równowadze, suma momentów sił na nią działających względem O równa jest zeru:

$$-Pa+bT_1+(b+c)T_2=0, \tag{8}$$

gdzie $P=|\bar{P}|$, $T_1=|\bar{T}_1|$ i $T_2=|\bar{T}_2|$, zaś długości a, b i c mają znaczenie takie jak na rysunku.

Na belkę DF działają: napięcie $-\bar{T}_1$ pręta BD w punkcie D, ciężar $\bar{Q}$ oraz reakcja $\bar{R}$ w punkcie F. Tworząc rzuty na kierunek pionowy oraz moment względem F, otrzymamy w położeniu równowagi belki DF:

$$T_1+R-Q=0, \qquad T_1d-Qe=0, \tag{9}$$

gdzie $R=|\bar{R}|$ i $Q=|\bar{Q}|$, zaś długości d i e mają znaczenie podane na rysunku.

Na belkę GK działa napięcie $-\bar{T}_2$ pręta CG w punkcie G oraz reakcja $-\bar{R}$ belki DF w punkcie H. Tworząc moment tych sił względem punktu oparcia K, otrzymamy

(10) $$T_2(f+g)-Rg=0.$$

Z równań (9) otrzymujemy:

$$T_1=Q\cdot\frac{e}{d},\qquad R=Q\cdot\frac{d-e}{d},$$

skąd na mocy równania (10)

$$T_2=Q\cdot\frac{d-e}{d}\cdot\frac{g}{f+g}.$$

Podstawiając otrzymane wartości w równanie (8) zamiast T_1 i T_2, otrzymujemy

(11) $$P=Q\cdot\frac{(bf-cg)e+(b+c)gd}{ad(f+g)}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że $bf-cg=0$ czyli

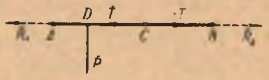
(12) $$b/c=g/f,$$

to P będzie niezależne od e, t. zn. od tego, w którym miejscu dźwigni DF umieścimy ciężar Q. Na mocy (11) i (12) jest wtedy

$$P=Q\cdot\frac{b}{a}.$$

Dla $b/a=1/10$ mamy *wagę decymalną* czyli *dziesiętną*.

Przykład 4. Dwa pręty unieruchomione w końcach A i B, zaś połączone przegubowo w C, leżą na jednej prostej. Na pręt AC działa siła $\bar{P}$ o początku D, prostopadła do AC. Układ prętów jest w równowadze, ponieważ punkt C nie może zmienić swego położenia.



Przypuśćmy na chwilę, że pręt AC działa na CB z siłą $\bar{T}$ o początku w C. Zatem pręt CB działałby na pręt AC z siłą $-\bar{T}$, również zaczepioną w C.

Oznaczmy przez $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ reakcje w A i B.

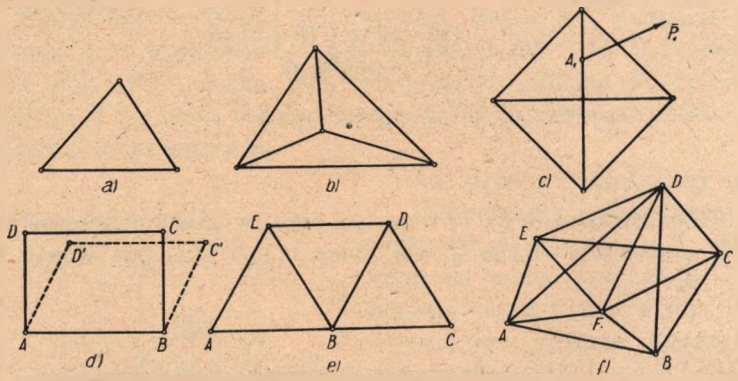
Ponieważ pręt CB jest w równowadze, więc siły $\bar{R}_2$ i $\bar{T}$ działają wzdłuż pręta AB. Wynika stąd, że pręt AC nie może być w równowadze, bo siły $-\bar{T}$, $\bar{R}_1$ i $\bar{P}$, działające na ten pręt, nie równoważą się, gdyż ich moment ogólny względem A równy jest różnemu od zera momentowi siły $\bar{P}$ względem A. Doszliśmy więc do sprzeczności.

Musimy zatem przyjąć, że pręt AC działa na pręt CB z siłą równoważną jednej sile i parze sił o momencie różnym od zera.

§ 16. Kratownice. Układ prętów sztywnych, połączonych przegubowo i tworzących jako całość ciało sztywne, nazywamy *kratownicą przestrzenną.*

Przykładem kratownicy (przestrzennej) jest układ trzech prętów, połączonych przegubowo i tworzących trójkąt (rys. a)), lub układ sześciu prętów, tworzących krawędzie czworościanu (rys. b)). Natomiast układ prętów, tworzących krawędzie prostopadłościanu i połączonych przegubowo w wierzchołkach, nie jest kratownicą, gdyż pręty mogą zmieniać położenie względem siebie.

Przeguby kratownicy nazywamy także *węzłami.*



Kratownica płaska. Jeżeli układ prętów sztywnych, połączonych przegubowo, leży w jednej płaszczyźnie i pręty nie mogą w tej płaszczyźnie zmieniać wzajemnego położenia, to układ taki nazywamy *kratownicą płaską.*

Przykłady kratownic płaskich przedstawiają rys. a), b), c), e) i f).

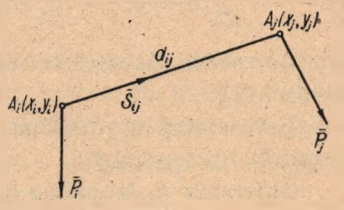
Układ prętów na rys. d) nie tworzy kratownicy, nawet płaskiej, bo pręty mogą zmieniać położenie względem siebie; mogą np. przyjąć położenie oznaczone kreską przerywaną.

Kratownica płaska nie musi tworzyć układu sztywnego, jeżeli dopuścimy ruchy prętów w przestrzeni. Jeżeli np. w kratownicy na rys. e) unieruchomimy przeguby B, C, D i E, to możemy pręty AE i AB obracać w przestrzeni około EB. Natomiast w płaszczyźnie kratownicy pręty AE i AB nie mogą się poruszyć.

Jeżeli w kratownicy przedstawionej na rys. f) usuniemy pręt AB, to w płaszczyźnie jej układ prętów pozostanie nadal utworem sztywnym, t. j. kratownicą. Pręt taki nazywamy prętem *nadliczbowym.*

Kratownica przedstawiona na rys. e) nie ma prętów nadliczbowych.

Wyznaczanie napięć w kratownicy (przy pomocy rachunku). Kratownica płaska ma p prętów i w węzłów $A_1, A_2, \ldots, A_w$, w których zaczepione są siły zewnętrzne $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_w$. Gdy węzeł A_i, jest połączony prętem z węzłem A_j, oznaczamy przez d_{ij} długość tego pręta, a przez S_{ij} liczbę, której wartość bezwzględna równa się wielkości napięcia w tym pręcie, znak zaś jest + lub − zależnie od tego, czy napięcie jest rozciąganiem czy ściskaniem (str. 292).



Obierzmy dowolny układ współrzędnych i oznaczmy przez $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_w, y_w$ współrzędne węzłów $A_1, A_2, \ldots, A_w$. Z określenia liczby S_{ij} wynika, że dla $i=1,2,\ldots,w$ napięcie pręta w węźle A_i ma na osie układu rzuty:

$$\frac{x_j - x_i}{d_{ij}} S_{ij}, \qquad \frac{y_j - y_i}{d_{ij}} S_{ij}.$$

Ponieważ w węźle A_i siła zewnętrzna $\bar{P}_i$ równoważy się z napięciami prętów stykających się w tym węźle (str. 294), więc:

$$P_{i_x} + \sum_j \frac{x_j - x_i}{d_{ij}} S_{ij} = 0, \qquad P_{i_y} + \sum_j \frac{y_j - y_i}{d_{ij}} S_{ij} = 0$$

czyli

$$(1) \qquad P_{i_x} = \sum_j \frac{x_i - x_j}{d_{ij}} S_{ij}, \qquad P_{i_y} = \sum_j \frac{y_i - y_j}{d_{ij}} S_{ij},$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie takie wskaźniki j, dla których węzeł A_j jest połączony prętem z węzłem A_i. Ponieważ z założenia jest w węzłów, więc układ (1) składa się z $2w$ równań.

Równania (1) służą do wyznaczania napięć S_{ij}, gdy dane są siły $\bar{P}_i$. Może się jednak zdarzyć, że układ (1) rozwiązania nie posiada lub że równań jest za mało do wyznaczenia niewiadomych S_{ij}.

Np. w kratownicy przedstawionej na rys. c), str. 298, pręty stykające się w węźle A_1 leżą na jednej prostej, zaś siła zewnętrzna $\bar{P}_1$ zaczepiona w tym węźle nie leży na tej prostej. Napięcia w tych prętach nie mogą zrównoważyć siły $\bar{P}_1$. Układ równań (1) dla tej kratownicy nie ma więc rozwiązania (str. 297).

W kratownicy na rys. f), str. 298, prętów mamy 13, a wierzchołków 6. Niewiadomych napięć jest zatem 13, a równań w układzie (1) jest tylko $2 \cdot 6 = 12$. A więc równań jest za mało.

Oznaczmy w równaniach (1) prawe strony pierwszych równań przez E_i, a drugich przez F_i. Równania (1) przyjmą wtedy postać:

$$P_{i_x} = E_i, \qquad P_{i_y} = F_i. \tag{2}$$

Łatwo można sprawdzić rachunkowo, że:

$$\sum_{i=1}^{w} E_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{w} F_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{w} (E_i y_i - F_i x_i) = 0. \tag{3}$$

Równości (3) są tożsamościami, t. zn. zachodzą dla wszelkich wartości S_{ij}.

Tożsamości (3) można wyprowadzić również bez rachunku w sposób następujący:

Obierzmy S_{ij} zupełnie dowolnie, a P_{i_x} i P_{i_y} wyznaczmy z równań (1). Ponieważ równania te wyrażają, że w każdym węźle napięcia prętów równoważą się z siłami zewnętrznymi, więc tak wyznaczone siły będą w równowadze (str. 293). Zatem siły zewnętrzne będą w równowadze, t. j. będą zachodziły równości:

$$\sum_{i=1}^{w} P_{i_x} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{w} P_{i_y} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{w} (P_{i_x} y_i - P_{i_y} x_i) = 0. \tag{4}$$

Wynika stąd na mocy (2), że związki (3) muszą być spełnione tożsamościowo dla wszelkich wartości S_{ij}.

Załóżmy teraz, że dla pewnej kratownicy równania (1) mają rozwiązania dla każdego układu sił $\{\bar{P}_i\}$ równoważnego zeru. Załóżmy dalej, że prawe strony równań (1) spełniają tożsamościowo jakiś związek liniowy kształtu

$$a_1 E_1 + a_2 E_2 + \ldots + b_1 F_1 + b_2 F_2 + \ldots = 0, \tag{5}$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots$ i $b_1, b_2, \ldots$ są pewnymi stałymi.

Niech układ sił $\{\bar{P}_i\}$ będzie równoważny zeru; równania (1) mają więc rozwiązanie. Na mocy (2) i (5) siły $\{\bar{P}_i\}$ muszą zatem spełniać związek

$$a_1 P_{1_x} + a_2 P_{2_x} + \ldots + a_w P_{w_x} + b_1 P_{1_y} + b_2 P_{2_y} + \ldots + b_w P_{w_y} = 0. \tag{6}$$

A więc, jeżeli siły $\{\bar{P}_i\}$ spełniają równania (4), to spełniają również równanie (6). Związek (6) jest tedy zależny od związków (4). Wynika stąd, że związek (5) jest zależny od związków (3).

Prawe strony równań (1) spełniają zatem tylko trzy związki niezależne (3). Układ równań (1) ma więc $2w-3$ równań niezależnych (trzy zaś równania są zależne od pozostałych). Niewiadomych musi być co najmniej tyle, ile równań niezależnych, a więc $\geqslant 2w-3$. Ponieważ niewiadomych S_{ij} jest tyle ile prętów, czyli p, więc

$$p \geqslant 2w-3. \tag{7}$$

W przypadku, gdy $p>2w-3$, równań niezależnych jest mniej niż niewiadomych; istnieje wtedy nieskończenie wiele rozwiązań. W przypadku zaś, gdy $p=2w-3$, niewiadomych jest tyle, ile równań liniowo niezależnych; zatem napięcia S_{ij} są wówczas wyznaczone jednoznacznie.

Kratownicę nazywamy *wyznaczalną statycznie*, jeżeli równania (1) wyznaczają jednoznacznie napięcia S_{ij} prętów dla każdego układu sił $\{\bar{P}_i\}$ będącego w równowadze. Udowodniliśmy zatem twierdzenie:

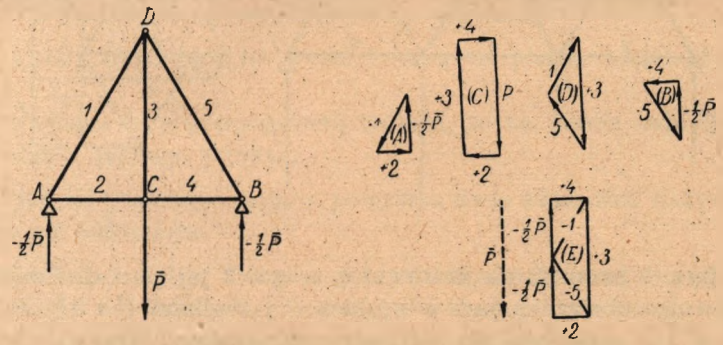
I. *Jeżeli kratownica jest wyznaczalna statycznie, to* $p=2w-3$ (gdzie p oznacza liczbę prętów, a w liczbę węzłów).

Można dowieść twierdzenia:

II. *Kratownica wyznaczalna statycznie nie posiada prętów nadliczbowych.*

Warunki wypowiedziane w tw. I i II są **konieczn**ymi, ale nie **dostateczn**ymi na to, aby kratownica była wyznaczalna statycznie (p. rys. c), str. 298).

Wyznaczanie napięć w kratownicy (przy pomocy planów sił). Mamy wyznaczyć napięcia prętów w kratownicy przedstawionej na rysunku. Węzły oznaczone są literami A, B, C i D, a pręty liczbami 1, 2, 3, 4 i 5. Kratownica obciążona jest siłą pionową $\bar{P}$ w węźle C i spoczywa na podporach gładkich A i B.



Wyznaczmy najpierw reakcje w A i B. Ze względu na symetrię, każda z reakcyj wynosi $-\bar{P}/2$.

Na węzeł A działa siła zewnętrzna $-\bar{P}/2$ i napięcia prętów 1 i 2. Ponieważ siły te równoważą się, więc tworzą wielobok zamknięty, który możemy narysować, znając siłę $-\bar{P}/2$ i kierunki napięć. Wielobok ten przedstawiony jest na rys. (A); napięcia oznaczone są liczbami 1 i 2, a znaki przed liczbami oznaczają czy napięcie jest rozciąganiem (+) czy ściskaniem (—).

Na węzeł C działają napięcia prętów 2, 3 i 4, równoważące się z siłą $\overline{P}$. Ponieważ nieznane są tylko dwie siły, mianowicie napięcia prętów 3 i 4, więc możemy narysować wielobok sił, pamiętając o tym, że napięcie pręta 2 w węźle C ma zwrot przeciwny niż w węźle A. Wielobok ten przedstawiony jest na rysunku (C).

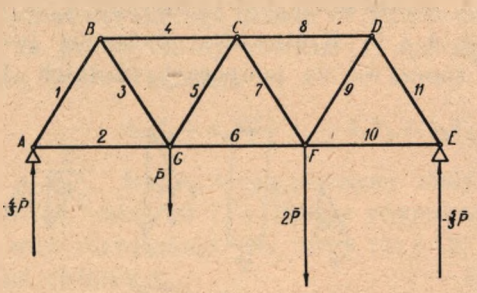
Na węzeł D nie działają żadne siły zewnętrzne, zaczepione w tym węźle, zatem napięcia się równoważą. Tworzą więc one wielobok zamknięty, który możemy narysować (rys D), pamiętając o tym, że napięcia prętów 1 i 3 w węźle D mają zwroty przeciwne niż w A i C.

Wyznaczyliśmy napięcia we wszystkich prętach. Dla sprawdzenia można jeszcze zbudować wielobok dla węzła B (rys. (B)).

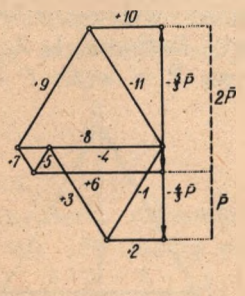
Postępując w ten sposób, nakreśliliśmy każdą siłę dwa razy. Można jednak wprowadzić uproszczenie, polegające na tym, że wszystkie wieloboki (A), (B), (C) i (D) rysujemy łącznie, jak na rys. (E).

W rysunku tym każda siła występuje raz tylko; rysunek taki nazywamy *planem sił Cremony* dla danej kratownicy.

Pewne wskazówki, jak można otrzymać plan sił Cremony, podamy na przykładzie następującym:



1.



2.

Rys. 1 przedstawia kratownicę, a rys. 2 jej plan sił Cremony. Kratownica obciążona jest w węzłach G i F siłami $\overline{P}$ i $2\overline{P}$. W węzłach A i E spoczywa ona na podporach gładkich. Pręty 2, 6 i 10 są poziome i równej długości. Obliczając moment sił zewnętrznych względem E i A, otrzymamy, że reakcja w A wynosi $-\frac{1}{3}\overline{P}$, zaś w E wynosi $-\frac{2}{3}\overline{P}$.

Kreślimy teraz wielobok sił zewnętrznych w takim porządku, w jakim występują one na obwodzie kratownicy. Idąc np. w kierunku wskazówek zegara, kreślimy po kolei $-\frac{1}{3}\overline{P}$, $-\frac{2}{3}\overline{P}$, $2\overline{P}$ i $\overline{P}$.

Następnie budujemy wielobok dla węzła A. Zauważmy, że pręt 2 łączy węzły A i G, w których zaczepione są siły zewnętrzne $-\frac{4}{3}\overline{P}$ i $\overline{P}$. Na planie sił napięcie pręta 2 rysujemy z początku siły $-\frac{4}{3}\overline{P}$ i końca siły $\overline{P}$. Zwrot sił w wieloboku dla węzła A określa siła $-\frac{4}{3}\overline{P}$. Otrzymujemy napięcia prętów 1 i 2 i zaznaczamy, że w pręcie 1 jest ściskanie (—) zaś w 2 rozciąganie (+).

Przechodzimy teraz do węzła, gdzie są dwa tylko napięcia niewiadome. Węzłem takim jest B. Wyznaczamy wielobok napięć w węzłach 1, 3 i 4. Zwrot sił otrzymamy, wiedząc z poprzedniego wieloboku, że w pręcie 1 występuje ściskanie.

Przechodzimy następnie do węzła G, w którym są tylko dwa napięcia niewiadome, mianowicie napięcia prętów 5 i 6. Postępując tak dalej, przechodzimy kolejno węzły C, F, D i E.

Przy sporządzaniu planu sił Cremony należy trzymać się dwóch reguł następujących:

1. Siły zewnętrzne w wieloboku sił rysujemy na planie w takim porządku, w jakim występują one na obwodzie kratownicy.

2. Jeżeli pręt na obwodzie kratownicy łączy węzły, które są początkami sił zewnętrznych, to napięcie pręta rysujemy na planie sił z punktu, w którym koniec jednej siły zewnętrznej schodzi się z początkiem drugiej.

Zauważmy, że plan sił Cremony, przedstawiony na rys. 2, str. 302, ma jeszcze następujące dwie własności:

(a) siły działające na węzeł tworzą na planie wielobok zamknięty,

(b) jeżeli trzy pręty tworzą trójkąt, to na planie napięcia ich wychodzą z jednego punktu.

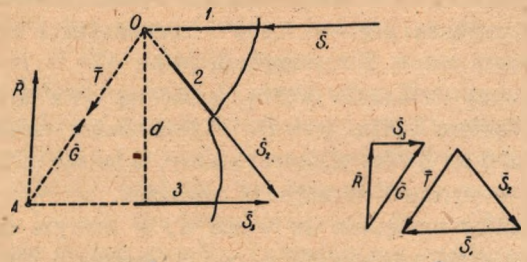
Plan sił Cremony, mający powyższe dwie własności, nazywa się *planem sił odwrotnym*.

Nazwa ta stoi w związku z t. zw. teorią figur odwrotnych.

Należy zwrócić uwagę, że nie dla każdej kratownicy wyznaczalnej statycznie można zbudować plan sił Cremony.

Wyznaczanie napięć z pomocą przekrojów. Przypuśćmy, że kratownica daje się przeciąć przez trzy pręty nie wychodzące z jednego węzła, w taki sposób, by rozpadła się na dwie części. Jeżeli choć dwa z przeciętych prętów nie są równoległe, to w prętach przeciętych można wyznaczyć napięcia bez obliczania napięć w pozostałych prętach.

Oznaczmy pręty przecięte przez 1, 2, 3. Jeżeli usunąć jedną część kratownicy, np. prawą, to lewa pozostanie w równowadze po dołączeniu napięć $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$.



1. 2.

Niech pręty 1 i 2 przecinają się w punkcie O (rys. 1). Ponieważ lewa część kratownicy jest w równowadze, więc siły zewnętrzne działające na tę część równoważą się z napięciami $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$. Oznaczając przez $\bar{M}$ moment sił zewnętrznych (działających na lewą część kratownicy) względem O, a przez d odległość O od pręta 3, dostaniemy $|\bar{M}|=|\bar{S}_3|d$ czyli $|\bar{S}_3|=|\bar{M}|/d$.

Zwrot siły $\bar{S}_3$ obieramy tak, by $\bar{M}$ i moment siły $\bar{S}_3$ względem O miały znaki przeciwne. Moment $\bar{M}$ możemy otrzymać, wyznaczając najpierw wypadkową $\bar{R}$ (ewentualnie parę wypadkową) sił zewnętrznych, działających na lewą część, a następnie obliczając moment wypadkowy $\bar{R}$ (lub parę wypadkową) względem O. Podobnie obliczamy $\bar{S}_2$ oraz $\bar{S}_1$, tworząc moment względem punktu przecięcia prętów 1 i 3 oraz 2 i 3.

Gdyby pręty 1 i 3 były równoległe, to siłę $\bar{S}_2$ otrzymalibyśmy, tworząc rzuty sił na prostą prostopadłą do prętów 1 i 3 (rzuty sił $\bar{S}_1$ i $\bar{S}_3$ będą bowiem zerami).

Opisana powyżej metoda obliczania napięć podana została przez J. W. Rittera. Napięcia $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$ można również wyznaczyć graficznie metodą podaną przez K. Culmanna.

Niech pręty 1 i 2 przecinają się w O, niech siły zewnętrzne mają wypadkową $\bar{R}$ i niech $\bar{R}$ i $\bar{S}_3$ przecinają się w punkcie A. Oznaczmy przez $\bar{T}$ wypadkową sił $\bar{S}_1$ i $\bar{S}_2$, a przez $\bar{G}$ wypadkową sił $\bar{R}$ i $\bar{S}_3$.

Ponieważ siły $\bar{R}$, $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{S}_3$ są w równowadze, więc siły $\bar{T}$ i $\bar{G}$ również są w równowadze. Wynika stąd, że $\bar{T}=-\bar{G}$ i że siły $\bar{T}$ i $\bar{G}$ leżą na jednej prostej. Ponieważ $\bar{T}$ ma początek w O, zaś $\bar{G}$ w A,

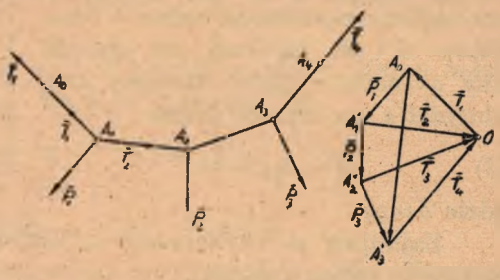
więc siły $\bar{T}$ i $\bar{G}$ leżą na prostej OA. Znając już kierunek sił $\bar{T}$ i $\bar{G}$, wyznaczamy trójkąt sił $\bar{R}$, $\bar{S}_3$ i $\bar{G}$, skąd otrzymujemy siły $\bar{S}_3$ i $\bar{G}$. Ponieważ $\bar{T}=-\bar{G}$, więc możemy utworzyć trójkąt sił $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ i $\bar{T}$, skąd dostaniemy $\bar{S}_1$ i $\bar{S}_2$.

Gdyby wypadkowa $\bar{R}$ była równoległa do pręta 3, siła $\bar{G}$ byłaby również równoległa do 3 i przechodziłaby przez O. Ponieważ $\bar{R}$ jest wypadkową sił $\bar{G}$ i $-\bar{S}_3$, więc zadanie sprowadziłoby się wówczas do rozłożenia siły $\bar{R}$ na dwie siły $\bar{G}$ i $-\bar{S}_3$, których położenia są dane. Zadanie takie zostało rozwiązane przy pomocy wieloboku sznurowego na str. 257.

Gdyby wreszcie siły zewnętrzne redukowały się do pary $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$, mielibyśmy $\bar{R}_1=-\bar{R}_2$ i wypadkowa $\bar{G}$ sił $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ i $\bar{S}_3$ równałaby się $\bar{S}_3$ i miałaby początek w O. Zadanie sprowadzałoby się wtedy do rozłożenia układu sił $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ na dwie siły $\bar{G}$ i $-\bar{S}_3$, których położenia są dane (por. str. 257).

§ 17. Równowaga lin ciężkich. Łańcuch. Układ prętów sztywnych połączonych przegubowo, nazywamy *łańcuchem*, jeżeli w każdym przegubie stykają się tylko dwa pręty. Pręty łańcucha nazywamy także *ogniwami*.

Załóżmy, że łańcuch złożony z ogniw A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3 i A_3A_4, połączonych przegubami A_1, A_2 i A_3, pozostaje w równowadze pod działaniem sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$, zaczepionych w przegubach, oraz sił $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_4$, zaczepionych w A_1 i A_4. Siły $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_4$ mają oczywiście kierunki prętów A_1A_2 i A_3A_4 (str. 294).



Łatwo okazać, że *łańcuch w równowadze przybiera postać wieloboku sznurowego* układu sił $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ i $\bar{P}_3$.

Zbudujmy w tym celu wielobok sił $A_0'A_1'A_2'A_3'$ dla układu $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$. Za biegun O obierzmy punkt przecięcia linii wykreślonych z punktu A_0' i A_3' równolegle do skrajnych prętów łańcucha. Ponieważ łańcuch jest w równowadze, więc suma sił jest zerem:

$$\bar{T}_1+\bar{T}_4+\bar{P}_1+\bar{P}_2+\bar{P}_3=0.$$

Ponieważ $\bar{P}_1+\bar{P}_2+\bar{P}_3=\overline{A_0'A_3'}$, zaś OA_0' i $A_3'O$ są równoległe do $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_3$, więc z trójkąta $A_0'A_3'O$ otrzymujemy:

(1) $$\overline{T}_1 = \overline{OA_0'}, \qquad \overline{T}_3 = \overline{A_3'O}.$$

Weźmy teraz pod uwagę przegub A_1. Napięcie ogniwa A_0A_1 w przegubie A_1 jest $\overline{T}_1$; oznaczmy przez $\overline{T}_2$ napięcie ogniwa A_1A_2 w przegubie A_1. Mamy oczywiście

(2) $$\overline{T}_1 + \overline{T}_2 + \overline{P}_1 = 0.$$

Z wieloboku sznurowego otrzymujemy $\overline{OA_0'} + \overline{P}_1 + \overline{A_1'O} = 0$, skąd na mocy (1) $\overline{T}_1 + \overline{P}_1 + \overline{A_1'O} = 0$, a stąd na mocy (2) $\overline{A_1'O} = \overline{T}_2$. Odcinek $A_1'O$ jest więc równoległy do pręta A_1A_2.

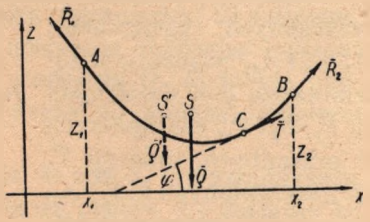
Podobnie przekonywamy się, że odcinki $A_2'O$ i $A_3'O$ są równoległe do prętów A_2A_3 i A_3A_4.

Wynika stąd, że wielobok sznurowy, jaki otrzymamy, rysując go z punktu A_1, przyjmie postać łańcucha.

Lina. *Sznurem* albo *liną (wiotką* i *nierozciągliwą)* nazywamy linię materialną, która daje się dowolnie zginać, nie zmieniając przy tym swojej długości ani długości swoich części.

Sznur może więc przyjąć kształt dowolnej linii krzywej o tej samej długości. Linę możemy uważać w przybliżeniu za łańcuch złożony z bardzo wielu drobnych ogniw.

Niech ciężka lina (wiotka i nierozciągliwa) zawieszona będzie w punktach A i B. Załóżmy, że gęstość liny $\varrho = \text{const}$. Ciężar kawałka liny długości s cm wynosi zatem



(3) $$Q = s\varrho g = s\delta,$$

gdzie $\delta = \varrho g$.

Zajmijmy się wyznaczeniem kształtu, jaki przyjmie lina pod wpływem swego ciężaru.

Obierzmy układ współrzędnych (x,y,z), nadając osi z kierunek pionowy ze zwrotem ku górze; przyjmijmy za płaszczyznę xz płaszczyznę pionową, przechodzącą przez punkty A i B.

Siłami zewnętrznymi działającymi na linę są: ciężar, zaczepiony w środku ciężkości S liny, i reakcje $\overline{R}_1$ i $\overline{R}_2$ w punktach A i B. Gdy lina jest w równowadze, siły te równoważą się. Wynika stąd, że leżą w jednej płaszczyźnie pionowej, mianowicie w płaszczyźnie xz. Zatem:

(4) $$R_{1_y} = 0, \qquad R_{2_y} = 0.$$

Przetnijmy linę w dowolnym punkcie C i odrzućmy część CB. Aby część AC pozostała w równowadze, należy dołączyć w punkcie C siłę $\overline{T}$, z jaką część CB działa na część AC. Siłę $\overline{T}$ nazywamy *napięciem liny*.

Ponieważ linę uważamy w przybliżeniu za łańcuch złożony z drobnych ogniw, więc siła $\overline{T}$ jest styczna do CB.

Oznaczmy przez s długość łuku AC. Siłami zewnętrznymi, działającymi na część AC są: ciężar $\overline{Q}'$ o wielkości $s\delta$, zaczepiony w środku ciężkości S' części AC, reakcja $\overline{R}_1$ i napięcie $\overline{T}$. Ponieważ, suma sił tych jest zerem, gdyż część AC pozostaje w równowadze, więc tworząc rzuty na osie układu współrzędnych, otrzymamy:

$$T_x + R_{1_x} = 0, \qquad T_z + R_{1_z} - s\delta = 0, \qquad T_y + R_{1_y} = 0. \tag{5}$$

Wobec (4) jest $R_{1_y}=0$, więc $T_y=0$. Ponieważ napięcie $\overline{T}$ jest styczne do krzywej, zaś C jest dowolnym punktem tej krzywej, więc styczna w każdym punkcie jest równoległa do płaszczyzny pionowej xz. Wynika stąd, że krzywa leży w płaszczyźnie pionowej, a mianowicie w płaszczyźnie xz, gdyż ma z nią dwa punkty A i B wspólne. Pierwsze z równań (5) daje

$$T_x = -R_{1_x} = \text{const}. \tag{6}$$

A więc: *składowa pozioma napięcia liny jest w każdym punkcie liny ta sama.*

Oznaczmy przez φ kąt jaki $\overline{T}$ tworzy z osią x. Mamy zatem $\operatorname{tg}\varphi = T_z/T_x$, skąd na mocy drugiego z równań (5)

$$\operatorname{tg}\varphi = (-\delta s/R_{1_x}) + (R_{1_z}/R_{1_x}). \tag{7}$$

Położmy:

$$a = -\delta/R_{1_x}, \qquad a' = R_{1_z}/R_{1_x}. \tag{8}$$

Jeżeli $z=f(x)$ jest równaniem krzywej, to $z'=\operatorname{tg}\varphi$. Na mocy więc (7) i (8)

$$z' = as + a'. \tag{9}$$

Równanie (9) jest równaniem różniczkowym krzywej, której postać przyjmuje lina. Różniczkując je, otrzymamy $z''=ads/dx$, a ponieważ $ds=\sqrt{1+z'^2}\,dx$, więc $z''=a\sqrt{1+z'^2}$. Podstawmy $z'=w$. Zatem $z''=dw/dx$, skąd $dw/dx=a\sqrt{1+w^2}$ czyli $dw/\sqrt{1+w^2}=adx$. Całkując, otrzymujemy $\int dw/\sqrt{1+w^2}=\int adx$, więc $\log(\sqrt{1+w^2}+w)=ax+c$, gdzie c jest stałą całkowania. Zatem

$$\sqrt{1+w^2}+w=\sqrt{1+z'^2}+z'=e^{ax+c}. \tag{10}$$

Mamy

$$1/(\sqrt{1+z'^2}+z')=\sqrt{1+z'^2}-z'=e^{-ax-c}. \tag{11}$$

Z równań (10) i (11) otrzymujemy:

$$z'=(e^{ax+c}-e^{-ax-c})/2, \tag{12}$$

$$ds/dx=\sqrt{1+z'^2}=(e^{ax+c}+e^{-ax-c})/2. \tag{13}$$

Całkując równania (12) i (13), otrzymamy

$$z=\frac{1}{2a}(e^{ax+c}+e^{-ax-c})+c' \tag{14}$$

$$s=\frac{1}{2a}(e^{ax+c}-e^{-ax-c})+c'', \tag{15}$$

gdzie c' i c'' są pewnymi stałymi.

Krzywą określoną równaniem (14) nazywamy *krzywą łańcuchową*.

A więc: *lina przyjmuje kształt krzywej łańcuchowej.*

Równania (14) i (15) zależą od czterech stałych a, c, c' i c''. Stałe te możemy wyznaczyć, jeżeli znamy np. współrzędne x_1,z_1 i x_2,z_2 punktów A i B oraz długość l liny.

Z warunków bowiem, że dla $x=x_1$ jest $z=z_1$, zaś dla $x=x_2$ jest $z=z_2$, otrzymujemy na mocy (14):

$$z_1=\frac{1}{2a}(e^{ax_1+c}+e^{-ax_1-c})+c', \qquad z_2=\frac{1}{2a}(e^{ax_2+c}+e^{-ax_2-c})+c'. \tag{16}$$

Z warunku zaś, że dla $x=x_1$ jest $s=0$, a dla $x=x_2$ jest $s=l$, dostajemy na mocy (15):

$$0=\frac{1}{2a}(e^{ax_1+c}-e^{-ax_1-c})+c'', \qquad l=\frac{1}{2a}(e^{ax_2+c}+e^{-ax_2-c})+c''. \tag{17}$$

Można okazać, że równania (16) i (17) określają jednoznacznie stałe a, c, c' i c''.

Obliczmy jeszcze napięcie liny T w dowolnym jej punkcie C o współrzędnych x, z. Z równań (6) i (8) dostajemy

$$T_x=\delta/a. \tag{18}$$

Ponieważ $T_z/T_x=\operatorname{tg}\varphi=z'$, więc $T_z=T_x z'$, zatem

$$T_z=\delta z'/a. \tag{19}$$

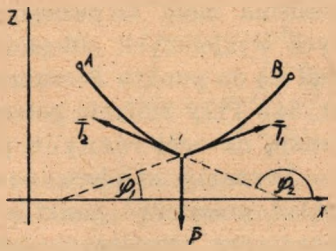
Z równań (18) i (19) otrzymujemy

$$T=\sqrt{T_x^2+T_z^2}=\frac{\delta}{a}\sqrt{1+z'^2}=\frac{\delta}{a}\cdot\frac{ds}{dx}=\frac{\delta}{2a}\left(e^{\frac{ax+c}{a}}+e^{-\frac{ax+c}{a}}\right),$$

na mocy więc (14)

$$T=\delta(z-c'). \tag{20}$$

Lina obciążona. Niech w punkcie C liny zaczepiona będzie siła $\bar{P}$, skierowana pionowo w dół. Części CB i AC liny są, jak już wiemy, linami łańcuchowymi. Oznaczmy przez a_1, c_1, c_1', c_1'' i a_2, c_2, c_2', c_2'', odpowiednie stałe dla krzywych BC i CA w równaniach (14) i (15), a przez $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ napięcia części BC i CA w punkcie C.



Uważając linę za łańcuch o drobnych ogniwach, zaś punkt C za przegub, mamy w położeniu równowagi $\bar{T}_1+\bar{T}_2+\bar{P}=0$. Tworząc rzuty na osie x, z i kładąc $P=|\bar{P}|$, otrzymujemy:

$$T_{1_x}+T_{2_x}=0, \qquad T_{1_z}+T_{2_z}-P=0. \tag{21}$$

Oznaczając pochodne prawostronną i lewostronną w C przez z_1' i z_2', otrzymamy na mocy (18) i (19):

$$T_{1_x}=\delta/a_1, \quad T_{1_z}=\delta z_1'/a_1, \qquad T_{2_x}=-\delta/a_2, \quad T_{2_z}=-\delta z_2'/a_2,$$

skąd na mocy (21)

$$\frac{\delta}{a_1}-\frac{\delta}{a_2}=0, \qquad \frac{\delta z_1'}{a_1}-\frac{\delta z_2'}{a_2}-P=0.$$

Dostajemy więc:

$$a_1=a_2, \qquad z_1'-z_2'=\frac{Pa_1}{\delta}=\frac{Pa_2}{\delta}. \tag{22}$$

Znając długości l_1 i l_2 łuków BC i CA, możemy otrzymać równania krzywych CB i AC. Należy w tym celu wyznaczyć dziesięć stałych a_1, c_1, c_1', c_1'', a_2, c_2, c_2', c_2'' i x_0, z_0, gdzie x_0 i z_0 są współrzędnymi punktu C. Otóż do wyznaczenia tych stałych dla CB i AC mamy po cztery równania analogiczne do (16) i (17), a nadto dwa równania (22), razem więc dziesięć.

ROZDZIAŁ VII

KINEMATYKA CIAŁA SZTYWNEGO

§ 1. Przesunięcie i obrót ciała około osi. W myśl określenia ciała sztywnego (str. 235) punkty jego nie zmieniają swych wzajemnych odległości podczas ruchu. Gdy punkt A przesunął się do punktu B, wektor $\overrightarrow{AB}$ nazwaliśmy *przesunięciem* punktu (str. 34). Przy zmianie położenia ciała sztywnego punkty tego ciała doznają na ogół różnych przesunięć.

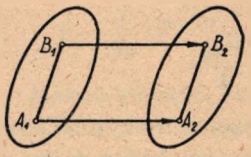
Poznamy najpierw pewne twierdzenia z geometrii, podające rozkład przesunięć punktów ciała. Twierdzenia te będą nam pomocne przy wyznaczaniu prędkości tych punktów.

Przesunięcie równoległe czyli translacja. Jeżeli przy zmianie położenia ciała przesunięcia wszystkich punktów są równe, mówimy, że ciało uległo *przesunięciu (równoległemu)* lub *translacji*.

Przesunięcie wspólne wszystkim punktom ciała nazywamy *wektorem przesunięcia* lub *przesunięciem ciała*.

Położenie ciała po przesunięciu jest więc wyznaczone przez położenie początkowe i wektor przesunięcia.

Przyjmijmy, że punkty A_1, B_1 przeszły po przesunięciu równoległym w punkty A_2, B_2. Ponieważ przesunięcia obu punktów są równe, więc $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}$. Wynika stąd, że $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}$.



A więc: *przy przesunięciu równoległym wektory związane z ciałem nie zmieniają kierunku ani zwrotu.*

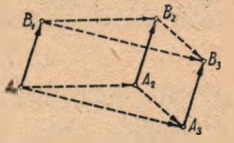
Na odwrót, łatwo dowieść, że *jeżeli przy zmianie położenia ciała wektory w ciele zachowują kierunek i zwrot, to zmiana położenia jest przesunięciem równoległym.*

Załóżmy bowiem, że dwa dowolne punkty A_1, B_1 przeszły w punkty A_2, B_2. Ponieważ w myśl założenia jest $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}$, więc $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}$. Punkty A_1, B_1 mają zatem równe przesunięcia czyli zmiana położenia ciała jest przesunięciem równoległym.

Łatwo zauważyć, że po przesunięciu równoległym proste i płaszczyzny w ciele pozostają do siebie równoległe.

Przypuśćmy, że ciało wykonało po kolei dwie translacje: najpierw z położenia I do położenia II, a następnie z położenia II do położenia III. Niech A_1, B_1 będą dwoma dowolnymi punktami w położeniu I, zaś A_2, B_2 i A_3, B_3 odpowiadającymi im punktami w położeniach II i III. Z założenia jest $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}$ i $\overline{A_2A_3}=\overline{B_2B_3}$. Ponieważ $\overline{A_1A_3}=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}$ i $\overline{B_1B_3}=\overline{B_1B_2}+\overline{B_2B_3}$, więc $\overline{A_1A_3}=\overline{B_1B_3}$. Od położenia I możemy zatem przejść wprost do położenia III przy pomocy jednej translacji. Oznaczając przez $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$ i $\bar{u}$ przesunięcia przy przejściu z I do II, z II do III i z I do III, otrzymamy oczywiście

$$\bar{u}=\bar{u}_1+\bar{u}_2.$$



A więc: *jeżeli ciało wykonało kilka translacyj kolejnych, wówczas położenie końcowe otrzymać możemy z położenia początkowego przy pomocy jednej translacji; przesunięcie ciała z położenia początkowego do końcowego równe jest sumie przesunięć przy poszczególnych translacjach.*

Twierdzenie powyższe możemy nazwać *prawem składania przesunięć.*

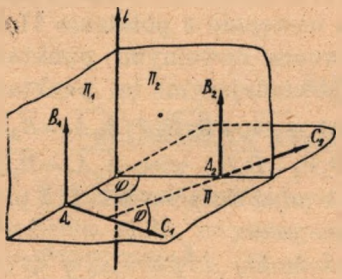
Ponieważ przesunięcie wypadkowe jest sumą przesunięć składowych, więc (na mocy przemienności sumy wektorów) przesunięcie wypadkowe nie zależy od porządku, w jakim ciało wykonywało przesunięcia składowe.

Obrót około osi. Jeżeli przy zmianie położenia ciała dwa punkty, np. K i M, pozostały nieruchome, wówczas oczywiście, wszystkie punkty prostej l, przechodzącej przez K i M, również pozostaną nieruchome. Mówimy wtedy, że ciało wykonało *obrót około prostej* l; prostą tę nazywamy *osią obrotu.*

Jeżeli jakaś płaszczyzna Π_1 przechodzi w położeniu początkowym ciała przez oś obrotu, to odpowiednia płaszczyzna Π_2 w położeniu końcowym również przejdzie przez tę oś.

Nadajmy osi l dowolny zwrot. Kąt φ, o jaki należy obrócić płaszczyznę Π_1 (w kierunku od ręki prawej ku lewej względem osi l), tak aby padła na Π_2 i aby odpowiednie punkty się nakryły, nazywamy *kątem obrotu.*

Obrót ciała około osi wyznaczony jest przez podanie osi i kąta obrotu. Przy obrocie punkty ciała pozostają w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu.



1.

Każdy wektor $\overline{A_1B_1}$, równoległy do osi obrotu, przechodzi przy obrocie w wektor $\overline{A_2B_2}$, równy wektorowi $\overline{A_1B_1}$. Łatwo udowodnić, że tylko wektory równoległe do osi nie zmieniają przy obrocie kierunku ani zwrotu.

Zauważmy, że jeżeli wektor $\overline{A_1C_1}$ leży w płaszczyźnie Π prostopadłej do osi obrotu, to kąt jaki ten wektor tworzy z odpowiednim wektorem $\overline{A_2C_2}$ jest (przy obranym zwrocie osi obrotu) równy kątowi obrotu (rys. 1).

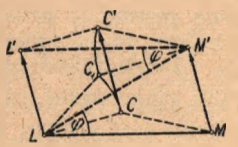
Jeżeli ciało wykona kilka obrotów około tej samej osi l o kąty $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, wówczas ostateczna zmiana położenia jest oczywiście również obrotem około osi l o kąt $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots$ Wynika stąd na mocy przemienności sumy, że położenie ostateczne nie zależy od porządku, w jakim ciało wykonywało obroty częściowe.

Inaczej przedstawia się sprawa, gdy ciało wykonywa kolejne obroty wkoło różnych osi, jak o tym poucza przykład na str. 317.

Przykład. Ciało sztywne wykonało po kolei dwa obroty około dwóch prostych równoległych l i m, sztywnie z ciałem związanych. Obroty miały zwroty przeciwne, kąty zaś równe. Udowodnić, że ciało można przeprowadzić z położenia początkowego w końcowe przy pomocy przesunięcia równoległego (translacji).

Niech C będzie dowolnym punktem ciała. Poprowadźmy przez C płaszczyznę Π, prostopadłą do danych osi obrotu l i m. Niechaj L i M oznaczają odpowiednie punkty przebicia, zaś φ kąt obrotu (rys. 2).

Przy obrocie około osi l o kąt φ oś m przejdzie w prostą m'; oznaczmy przez M' punkt przebicia tej prostej z płaszczyzną Π. Następnie, po obrocie około osi m' o kąt φ oś l przyjmie położenie prostej l'; oznaczmy przez L' jej punkt przebicia z płaszczyzną Π.



2.

Wreszcie, niech C_1 będzie położeniem punktu C po obrocie około prostej l, a C' położeniem punktu C_1 po obrocie około prostej m'.

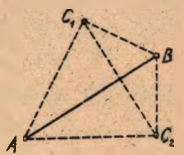
Trójkąt LMC przeszedł ostatecznie w położenie $L'M'C'$, przyczem $\overline{LL'}=\overline{MM'}=\overline{CC'}$ (jak na rysunku). Ponieważ przesunięcia punktów położonych na osi l (lub m) są równe, więc związek powyższy wskazuje, że przesunięcia wszystkich punktów są równe. Łatwo sprawdzić, że

$$LL'=2LM\sin\tfrac{1}{2}\varphi. \tag{1}$$

§ 2. Przesunięcia punktów ciała w ruchu płaskim. Ruch figury płaskiej poruszającej się w płaszczyźnie nazywamy *ruchem płaskim*.

Położenie figury w ruchu płaskim jest wyznaczone przez położenie dowolnych dwóch jej punktów.

Przypuśćmy bowiem, że możliwe są dwa położenia figury, w których dwa punkty A i B zajmowałyby to samo położenie. Weźmy pod uwagę dowolny punkt C figury, który w jednym położeniu jest w C_1, w drugim zaś w C_2. Trójkąty ABC_1 i ABC_2 przystają i są położone symetrycznie względem AB. Nie dadzą się zatem przeprowadzić w siebie bez oderwania od płaszczyzny. To zaś jest sprzeczne z założeniem, że trójkąt ABC zajmował w ruchu płaskim raz położenie ABC_1, a drugi raz położenie ABC_2.



Obrót około punktu. Jeżeli figurę leżącą w płaszczyźnie Π obrócić około prostej l prostopadłej do tej płaszczyzny, to figura pozostanie nadal w płaszczyźnie Π. Obrót taki nazywamy *obrotem* figury *około punktu* (przebicia prostej l z płaszczyzną Π).

Twierdzenie. *Każdą figurę w ruchu płaskim można przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy jednego przesunięcia równoległego i jednego obrotu.*

Niech bowiem A_1, B_1 będą dwoma punktami tej figury w położeniu pierwszym, zaś A_2, B_2 odpowiednimi punktami w drugim. Przesuńmy najpierw figurę równolegle tak, by punkt A_1 padł na A_2. Punkt B_1 padnie po tym przesunięciu na pewien punkt B_1'. Obróćmy teraz figurę około A_2 tak, by B_1' padł na B_2. Ponieważ po przesunięciu i obrocie dwa punkty A_1, B_1 pokryły się z odpowiednimi punktami A_2, B_2, więc i pozostałe punkty się pokryją. Przeprowadziliśmy zatem figurę z jednego położenia w drugie przy pomocy jednego przesunięcia i jednego obrotu, c. b. d. d.

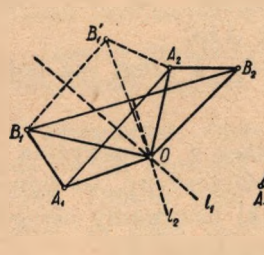
Udowodnimy teraz, że najogólniejsza zmiana położenia figury w ruchu płaskim jest albo przesunięciem albo obrotem.

I Twierdzenie Eulera. *Figurę z jednego położenia w drugie* (jakie zajmuje w ruchu płaskim) *można przeprowadzić bądź przy pomocy przesunięcia równoległego, bądź przy pomocy obrotu.*

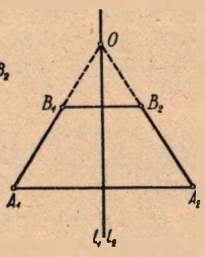
Dowód. Niech A_1B_1 będzie dowolnym odcinkiem figury w położeniu początkowym I, zaś A_2B_2 tymże odcinkiem w położeniu końcowym II.

W przypadku gdy wektory $\overrightarrow{A_1B_1}$ i $\overrightarrow{A_2B_2}$ są równe, mamy $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}$. Przy przesuwaniu więc figury równolegle, tak by punkt A_1 padł na A_2, punkt B_1 padnie na B_2. Ponieważ po tym przesunięciu figura będzie miała z położeniem II punkty A_2 i B_2 wspólne, więc będzie miała wszystkie punkty wspólne. W tym przypadku można zatem przeprowadzić figurę z położenia I w położenie II przy pomocy przesunięcia równoległego.

W przypadku gdy wektory $\overrightarrow{A_1B_1}$ i $\overrightarrow{A_2B_2}$ nie są równe, poprowadźmy symetralne l_1 i l_2 odcinków A_1A_2 i B_1B_2.



1.



2.

Przyjmijmy najpierw, że symetralne te są różne i że przecinają się w punkcie O (rys. 1). Trójkąty OA_1B_1 i OA_2B_2 są przystające. Oznaczmy przez B_1' punkt symetryczny do B_1 względem symetralnej l_1. Oczywiście trójkąty OA_1B_1 i OA_2B_1' są położone symetrycznie względem l_1. Są zatem przystające i nienakładalne na siebie bez odrywania od płaszczyzny. Jeżeli więc figurę obrócimy około O tak, by punkt A_1 padł na A_2, to ponieważ punkt B_1 nie może paść na B_1', punkt B_1 padnie na B_2. Po tym obrocie figura będzie więc miała z położeniem II punkty A_2 i B_2 wspólne, a zatem i wszystkie inne punkty wspólne.

Przyjmijmy następnie, że symetralne odcinków A_1A_2 i B_1B_2 są identyczne (rys. 2). W tym przypadku odcinki A_1B_1 i A_2B_2 są położone symetrycznie względem l_1 (lub l_2); środkiem obrotu będzie punkt przecięcia się prostej A_1B_1 z l_1 (lub A_2B_2 z l_2). W tym przypadku więc przeprowadzimy figurę z położenia I w położenie II przy pomocy obrotu, c. b. d. d.

Ciało płasko prowadzone. Jeżeli ciało może się tylko tak poruszać, że punkty jego pozostają stale w płaszczyznach równoległych do pewnej płaszczyzny stałej Π, powiadamy, że ciało jest *płasko prowadzone*, a płaszczyznę Π nazywamy *płaszczyzną kierowniczą* (por. określenie i przykład na str. 276).

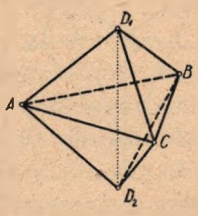
Przetnijmy ciało płasko prowadzone płaszczyzną Π', równoległą do płaszczyzny kierowniczej Π. Niechaj C będzie figurą przekroju. Położenie figury C wyznacza oczywiście położenie całego ciała. Ponieważ figura płaska C musi pozostawać stale w jednej i tej samej płaszczyźnie Π', więc na mocy I tw. Eulera możemy figurę tę przeprowadzić z dowolnego położenia, jakie zajmuje, w dowolne inne bądź przy pomocy przesunięcia, bądź przy pomocy obrotu około punktu leżącego na Π'.

Wynika stąd, że *ciało płasko prowadzone możemy przeprowadzić z jednego położenia w drugie bądź przy pomocy translacji, bądź przy pomocy obrotu około osi prostopadłej do płaszczyzny kierowniczej.*

§ 3. Przesunięcia punktów ciała. Jeżeli ciało sztywne ma jeden punkt unieruchomiony, to może się obracać około tego punktu, jeżeli zaś ma unieruchomione dwa punkty, to może się obracać około osi przechodzącej przez te punkty. Podanie położenia jednego lub dwóch punktów ciała nie wystarcza zatem do wyznaczenia położenia wszystkich innych punktów ciała. Zachodzi jednak następujące

Twierdzenie 1. *Położenie wszystkich punktów ciała sztywnego wyznaczone jest przez położenie trzech jego punktów, nie leżących na jednej prostej.*

Dowód. Przypuśćmy bowiem, że istnieją dwa różne położenia ciała, w których trzy punkty A, B, C, nie leżące na jednej prostej, zajmowałyby położenia jednakowe. Weźmy pod uwagę dowolny punkt D tegoż ciała, który w pierwszym położeniu jest w D_1, w drugim zaś jest w D_2. Czworościany $ABCD_1$ i $ABCD_2$ mają podstawę wspólną i krawędzie odpowiednio równe. Wynika stąd, że są położone symetrycznie względem płaszczyzny ABC. Nie dadzą się zatem doprowadzić do zupełnego przystawania. To zaś jest sprzeczne z założeniem, że czworościan $ABCD$ raz zajmuje położenie $ABCD_1$, a drugi raz położenie $ABCD_2$.



Obrót około punktu ciała. Jeżeli przy zmianie położenia ciała jeden punkt ciała pozostał nieruchomy, powiadamy, że ciało wykonało *obrót* około tego punktu.

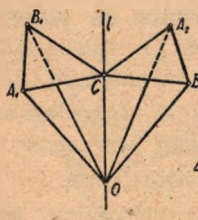
II Twierdzenie Eulera. *Obrót około punktu jest równoważny obrotowi około pewnej prostej, przechodzącej przez ten punkt.*

Dowód. Przypuśćmy, że ciało wykonało obrót około punktu O. Obierzmy w ciele w położeniu początkowym I dowolny odcinek A_1B_1 (nie przechodzący przez O) i niechaj A_2B_2 będzie odpowiednim odcinkiem w położeniu końcowym II. Poprowadźmy płaszczyzny symetralne Π_1 i Π_2 odcinków A_1A_2 i B_1B_2.

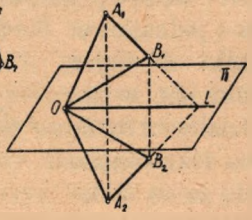
Załóżmy najpierw, że Π_1 i Π_2 są różne i że przecinają się wzdłuż prostej l (rys. 1). Prosta l przechodzi przez O, gdyż l jest zbiorem punktów równoodległych od A_1 i A_2, jako też od B_1 i B_2, zaś $OA_1=OA_2$ i $OB_1=OB_2$. Niech C będzie dowolnym punktem (różnym od O) na prostej l.

Czworościany OCA_1B_1 i OCA_2B_2 są równe. Łatwo wykazać, że są także nakładalne na siebie. Wierzchołki bowiem O,C,A_1 i O,C,A_2 są położone symetrycznie względem Π_1. Gdyby więc czworościany OCA_1B_1 i OCA_2B_2 nie były nakładalne, wówczas wierzchołki B_1 i B_2 musiałyby leżeć symetrycznie względem Π_1, co niemożliwe, skoro B_1 i B_2 leżą symetrycznie względem Π_2, zaś $\Pi_1 \neq \Pi_2$. Udowodniliśmy więc, że czworościany OCA_1B_1 i OCA_2B_2 są równe i nakładalne.

Jeżeli teraz obrócimy ciało około osi l tak, by A_1 padło na A_2, to czworościan OCA_1B_1 padnie na czworościan OCA_2B_2. Po tym obrocie ciało będzie więc miało z ciałem w położeniu II trzy punkty wspólne (mianowicie O, A_2 i B_2), a zatem i wszystkie inne punkty wspólne. Przeprowadziliśmy więc ciało z położenia I w położenie II przy pomocy obrotu około prostej l.



1.



2.

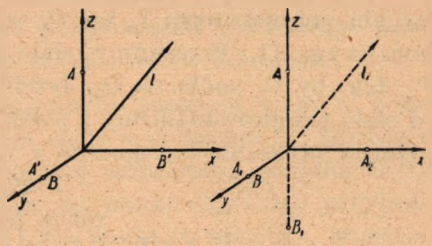
Załóżmy teraz, że odcinki A_1A_2 i B_1B_2 mają wspólną płaszczyznę symetralną Π (rys. 2). Wówczas trójkąty OA_1B_1 i OA_2B_2 są położone symetrycznie względem Π. Osią obrotu będzie w tym przypadku krawędź przecięcia się płaszczyzny OA_1B_1 (lub OA_2B_2) z płaszczyzną Π.

Uwaga 1. Z II tw. Eulera wynika, że przy obrocie ciała około punktu istnieje w ciele pewna prosta o tej własności, że punkty jej nie zmieniają położenia.

Uwaga 2. Jeżeli ciało wykonywa dwa kolejne obroty wkoło dwóch osi, przechodzących przez jeden punkt O, to z położenia początkowego w położenie końcowe możemy przeprowadzić ciało przy pomocy jednego obrotu około osi, przechodzącej przez O, gdyż punkt O nie zmienił położenia. A więc złożenie dwóch obrotów około osi, przechodzących przez jeden punkt, jest obrotem około osi, również przechodzącej przez ten sam punkt.

Przykład. Ciało wykonało kolejno dwa obroty wkoło osi stałego układu współrzędnych: najpierw wkoło osi z, a następnie wkoło osi x, oba obroty o kąt prosty w kierunku od ręki prawej ku lewej.

Ponieważ przy obu obrotach początek układu O pozostał nieruchomy, możemy przeprowadzić ciało z położenia początkowego do położenia końcowego przy pomocy jednego obrotu około pewnej osi l, przechodzącej przez O (rys. 1).



1. 2.

Weźmy pod uwagę w położeniu początkowym punkt $A(0,0,1)$ osi z. Po obrocie około tej osi punkt A nie zmienił położenia, a po obrocie około osi x przeszedł w położenie $A'(0,1,0)$.

Weźmy z kolei pod uwagę w położeniu początkowym punkt $B(0,1,0)$ osi y. Po obrocie około osi z punkt B zajął położenie $B'(1,0,0)$ na osi x, a następnie przy obrocie wkoło tej osi punkt B' nie zmienił już swego położenia. Szukana oś l będzie więc przekrojem płaszczyzn symetralnych odcinków AA' i BB'.

Płaszczyzna symetralna odcinka AA' ma równanie $y=z$, zaś płaszczyzna symetralna odcinka BB' ma równanie $x=y$. Oś l będąca przecięciem obu płaszczyzn ma zatem równanie

$$x = y = z.$$

Przypuśćmy teraz, że ciało wykonywało te same obroty w porządku odwrotnym, t. j. najpierw około osi x, a następnie około osi z (rys. 2). Punkty $A(0,0,1)$ i $B(0,1,0)$ zajmą po obrocie około osi x położenia $A_1(0,1,0)$ i $B_1(0,0,-1)$, a następnie po obrocie około osi z przejdą w położenia $A_2(1,0,0)$ i $B_2(0,0,-1)$. Płaszczyzny symetralne odcinków AA_2 i BB_2 mają równania $x=z$ i $y=-z$. Oś l_1, około której należy obrócić ciało, aby przeszło z położenia początkowego w końcowe, będzie więc miała równanie

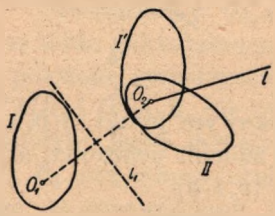
$$x = -y = z.$$

Widzimy stąd, że położenie końcowe zależy od porządku, w jakim ciało wykonywało obroty.

Twierdzenie Chasle'a. *Ciało można przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy jednego przesunięcia i jednego obrotu około osi.*

Na ogół można to zrobić na nieskończenie wiele sposobów, zawsze jednak osie obrotu będą równoległe, a kąty obrotu równe (jeżeli osiom nadany będzie ten sam zwrot).

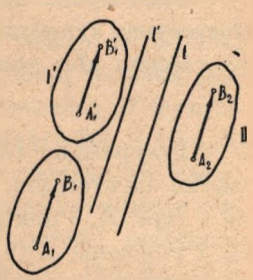
Dowód. Niechaj O_1 będzie dowolnym punktem ciała w położeniu początkowym I, zaś O_2 odpowiednim punktem w położeniu końcowym II. Przesuńmy ciało najpierw równolegle w położenie I′, tak by O_1 padło na O_2. Jeżeli położenie I′ jest identyczne z II, to ciało przeprowadziliśmy z położenia I w położenie II przy pomocy jednego przesunięcia, zgodnie z wymogami twierdzenia.



Przyjmijmy więc, że położenie I′ jest różne od II. Ponieważ w położeniach II i I′ ciało ma punkt O_2 wspólny, więc na mocy II tw. Eulera możemy je przeprowadzić z położenia I′ w położenie II przy pomocy obrotu około pewnej osi l, przechodzącej przez punkt O_2.

W każdym więc razie przeprowadziliśmy ciało z położenia I w położenie II przy pomocy jednego przesunięcia i jednego obrotu; udowodniliśmy zatem pierwszą część twierdzenia.

Gdybyśmy obrali na początku inny punkt O_1, to na ogół otrzymalibyśmy inne przesunięcie i inny obrót około innej osi. Wykażemy jednak, że we wszystkich przypadkach osie obrotu byłyby równoległe.



Weźmy pod uwagę w ciele dowolny wektor A_1B_1 w położeniu I, równoległy do osi obrotu l. Odpowiedni wektor $\overline{A_2B_2}$ w położeniu II będzie miał ten sam kierunek i zwrot co wektor A_1B_1. Ani bowiem przesunięcie, ani obrót (około osi równoległej), nie zmienia kierunku ani zwrotu wektora.

Załóżmy teraz, że ciało przeprowadziliśmy z położenia I w położenie II przy pomocy innego przesunięcia oraz obrotu około innej osi l'. Niechaj przy tym przesunięciu wektor A_1B_1 przejdzie w wektor $A_1'B_1'$. Oczywiście wektor $A_1'B_1'$ przejdzie po obrocie około nowej

osi l' w wektor $\overline{A_2B_2}$. Ponieważ przesunięcie nie zmienia kierunku ani zwrotu wektora, więc $\overline{A_1'B_1'}$ ma ten sam zwrot i kierunek co wektor $\overline{A_1B_1}$. Wynika stąd, że wektor $\overline{A_1'B_1'}$ będzie miał również ten sam zwrot i kierunek co wektor $\overline{A_2B_2}$. Zatem oś obrotu l' musi być równoległa do $\overline{A_2B_2}$ czyli do osi l.

Wykażemy wreszcie, że kąty obrotu około osi l i l' są równe, bylebyśmy nadali osiom l i l' jednakowe zwroty. Obierzmy w ciele w położeniu I dowolny wektor $\bar{a}_1$ prostopadły do l, a zarazem oczywiście do l'. Kąt, jaki tworzy wektor $\bar{a}_1$ z odpowiednim wektorem $\bar{a}_2$ w położeniu II przy obranym zwrocie osi, jest kątem obrotu (str. 312). Kąt obrotu jest więc w obu przypadkach ten sam, c. b. d. d.

Twierdzenie 2. Ciało można przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy dwóch obrotów kolejnych.

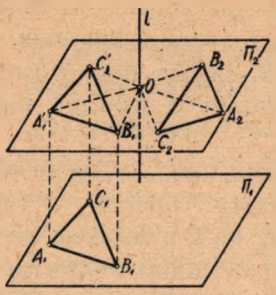
Dowód. Niech O_1 będzie dowolnym punktem ciała w położeniu I, a O_2 odpowiednim punktem ciała w położeniu II. Obróćmy ciało o kąt 180^0 około osi l_1, będącej symetralną odcinka O_1O_2. Przy tym obrocie punkt O_1 padnie na punkt O_2. Ciało przyjmie położenie II', które z położeniem II ma punkt O_2 wspólny. Możemy zatem z położenia II' przejść do położenia II przy pomocy obrotu około pewnej prostej l, przechodzącej przez O_2. Przeprowadziliśmy w ten sposób ciało z położenia I w położenie II przy pomocy dwóch obrotów około prostych l_1 i l, c. b. d. d.

Skręt. Jeżeli ciało wykonało przesunięcie, a następnie obrót około osi równoległej do przesunięcia, to powiadamy, że ciało wykonało *skręt*.

W szczególności przesunięcie lub obrót również nazywamy skrętem.

Twierdzenie 3. Ciało można zawsze przeprowadzić z dowolnego położenia w dowolne inne przy pomocy skrętu i to tylko w jeden sposób.

Dowód. Weźmy pod uwagę w ciele w położeniu I dowolny trójkąt $A_1B_1C_1$, leżący w płaszczyźnie Π_1 prostopadłej do możliwych osi obrotu. Oznaczmy przez $A_2B_2C_2$ odpowiedni trójkąt, zaś przez Π_2 odpowiednią płaszczyznę w położeniu II. Płaszczyzny Π_1 i Π_2 są zatem równoległe. Przeprowadźmy teraz ciało z położenia I w położenie I', nadając ciału takie przesunięcie prostopadłe do Π_1, by płaszczyzna Π_1 przeszła w płaszczyznę Π_2 (p. str. 320, rys. 1). Trójkąt $A_1B_1C_1$ przejdzie przy tym przesunięciu w trójkąt $A_1'B_1'C_1'$ leżący w płaszczyźnie Π_2, w której leży także trójkąt $A_2B_2C_2$.



1.

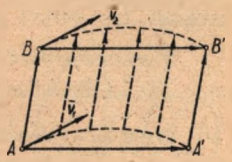
Z położenia I′ możemy przeprowadzić ciało w położenie II najpierw przy pomocy translacji tak, by A_1' padło na A_2, a następnie przy pomocy obrotu około prostej prostopadłej do Π_2 przechodzącej przez A_2. Wynika stąd, że trójkąt $A_1'B_1'C_1'$ przejdzie w $A_2B_2C_2$, pozostając stale w płaszczyźnie Π_2. Na mocy więc II tw. Eulera możemy trójkąt $A_1'B_1'C_1'$ przeprowadzić w $A_2B_2C_2$ przy pomocy translacji lub obrotu (około pewnego punktu O leżącego w Π_2, czyli przy pomocy obrotu około osi l prostopadłej do Π_2 w punkcie O). Przy tej translacji (lub obrocie) ciało przejdzie z położenia I′ w położenie II.

Wynika stąd, że przeprowadzimy ciało z położenia I w położenie II albo przy pomocy przesunięcia (jeżeli przejście z I′ do II jest przesunięciem), albo przy pomocy przesunięcia i obrotu około osi l, równoległej do przesunięcia, c. b. d. d.

Oś l nazywamy *osią skrętu*.

Oś skrętu przesuwa się przy skręcie po sobie. Każda inna prosta zmienia przy skręcie swoje położenie. Wynika stąd, że nie możemy przeprowadzić ciała z położenia I w położenie II przy pomocy skrętu około innej osi l'.

§ 4. Ruch postępowy i ruch obrotowy około osi. Ruch postępowy. Jeżeli każde położenie, jakie ciało przyjmuje w ciągu ruchu, możemy otrzymać z położenia początkowego przy pomocy translacji, to powiadamy, że ciało porusza się *ruchem postępowym*.



2.

Z określenia ruchu postępowego wynika, że każde dwa położenia ciała w ruchu postępowym dają się otrzymać jedno z drugiego przy pomocy przesunięcia równoległego.

Niech A i B będą dwoma dowolnymi punktami ciała. W ruchu postępowym wektor $\overline{AB}$ nie zmienia kierunku ani zwrotu. Jeżeli więc tor punktu A przesuniemy równolegle tak, że wszystkie jego punkty doznają przesunięcia równego wektorowi $\overline{AB}$, wówczas tor punktu A pokryje się z torem punktu B (rys. 2).

A więc: *w ruchu postępowym tory wszystkich punktów są do siebie przystające i przechodzą jeden w drugi przy pomocy translacji.*

Ruch postępowy ciała jest więc wyznaczony przez ruch jednego jego punktu i położenie ciała w chwili początkowej. Jeżeli bowiem znamy ruch np. punktu A, to wektor przesunięcia ciała z położenia początkowego do położenia w chwili t będzie również wiadomy, gdyż równa się znanemu przesunięciu punktu A.

Na odwrót: *jeżeli wektory związane z ciałem sztywnym nie zmieniają kierunku, to ciało porusza się ruchem postępowym.*

Istotnie weźmy pod uwagę stały układ współrzędnych (x, y, z) oraz dwa punkty w ciele $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$. Z założenia wektor $\overline{AB}$ nie zmienia kierunku (ani oczywiście długości); wykażemy, że nie zmienia również zwrotu. Rzuty wektora $\overline{AB}$ na osie układu są podczas ruchu stałe co do wartości bezwzględnej. A więc $|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$ i $|z_2-z_1|$ są pewnymi stałymi. Ponieważ x_2-x_1 jest funkcją ciągłą czasu t, więc z tego, że $|x_2-x_1|=\text{const.}$ wynika również, że $x_2-x_1=\text{const.}$ Podobnie $y_2-y_1=\text{const.}$ i $z_2-z_1=\text{const.}$ Zatem wektor $\overline{AB}$ nie zmienia zwrotu.

Oznaczając tedy przez A, B i A', B' położenia danych punktów w dowolnych dwóch chwilach t i t', otrzymamy $\overline{AB}=\overline{A'B'}$, skąd $\overline{AA'}=\overline{BB'}$. Przesunięcia dwóch dowolnych punktów są zatem równe, a więc możemy przeprowadzić ciało z położenia w chwili t do położenia w chwili t' przy pomocy przesunięcia. Ruch ciała jest więc ruchem postępowym.

Weźmy pod uwagę w ciele poruszającym się ruchem postępowym dwa dowolne punkty A_1, A_2 w chwili t i położenia A_1', A_2' tych punktów w chwili $t+\Delta t$. Oznaczając przez $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ prędkości punktów A_1 i A_2, otrzymamy (str. 35):

$$\bar{v}_1=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{A_1A_1'}}{\Delta t}, \qquad \bar{v}_2=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{A_2A_2'}}{\Delta t}.$$

Ponieważ ciało porusza się ruchem postępowym, więc $\overline{A_1A_1'}=\overline{A_2A_2'}$, skąd $\bar{v}_1=\bar{v}_2$.

A więc: *w ruchu postępowym w dowolnej chwili t prędkości wszystkich punktów ciała są sobie równe.*

Prędkością ruchu postępowego w chwili t nazywamy wspólną prędkość wszystkich punktów ciała w tej chwili.

Niech teraz ciało porusza się w taki sposób, że w każdej poszczególnej chwili t prędkości wszystkich punktów ciała są sobie równe. Obierzmy dwa dowolne punkty ciała $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$.

Ponieważ w jednej i tej samej chwili prędkość punktu A jest zawsze równa prędkości punktu B, więc:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2, \qquad \dot{y}_1 = \dot{y}_2, \qquad \dot{z}_1 = \dot{z}_2, \qquad \text{skąd} \qquad \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0.$$

Zatem $x_2 - x_1 = c_1$ i podobnie $y_2 - y_1 = c_2$, $z_2 - z_1 = c_3$, gdzie c_1, c_2 i c_3 są pewnymi stałymi. Wynika stąd, że wektor $\overline{AB}$ ma stałe rzuty na osie układu, nie zmienia więc podczas ruchu ani kierunku, ani zwrotu. Ruch jest przeto ruchem postępowym.

A więc: *jeżeli wszystkie punkty ciała mają w każdej poszczególnej chwili prędkości równe, to ciało porusza się ruchem postępowym.*

Ruch obrotowy około osi. Jeżeli ciało porusza się w ten sposób, że wszystkie punkty pewnej prostej l pozostają w spoczynku, to powiadamy, że ciało *obraca się około osi* l (str. 311).

W ruchu obrotowym wszystkie punkty krążą po kołach, leżących w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu; środki tych kół leżą na osi obrotu.

Promienie łączące punkty ciała ze środkami kół, po których punkty te krążą, zakreślają w równych czasach równe kąty. Wynika stąd, że w ruchu obrotowym około osi wszystkie punkty mają w każdej poszczególnej chwili równe prędkości kątowe. Ich wspólną prędkość kątową nazywamy *prędkością kątową* ruchu obrotowego około osi.

Z określenia wektora prędkości kątowej (str. 46) wynika, że w ruchu obrotowym ciała około osi wszystkie punkty mają ten sam wektor prędkości kątowej, leżący na osi obrotu. Wektor ten nazywamy *wektorem prędkości kątowej* obracającego się ciała.

Przykład 1. Jeżeli w równoległoboku $ABCD$ wierzchołki A i D są unieruchomione, wówczas boki AB i DC mogą się obracać około wierzchołków A i D. Przy tych obrotach bok BC pozostaje stale równoległy do AD. Zatem BC porusza się wówczas ruchem postępowym.

Przykład 2. Koło o środku O' i promieniu r porusza się ruchem postępowym, pozostając stale stycznym do koła K o środku O i promieniu R. Wyznaczyć tor dowolnego punktu A (rys. str. 369).

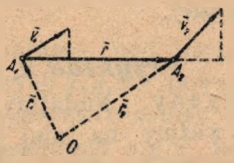
Środek O' porusza się oczywiście po kole K' o środku O i promieniu $a = R - r$. Tor punktu A (kropkowany na rysunku) będzie zatem kołem o promieniu a. Środek O_1 tego koła otrzymamy, nadając środkowi O przesunięcie $\overline{OO_1}$ równe wektorowi $\overline{O'A}$.

§ 5. Rozmieszczenie prędkości w ciele sztywnym.

Gdy ciało sztywne się porusza, punkty jego mogą mieć w danej chwili na ogół prędkości różne.

Związki między prędkościami punktów ciała. Weźmy pod uwagę dwa punkty ciała A_1 i A_2 o prędkościach $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$. Niech O będzie początkiem układu współrzędnych. Połóżmy:

$$\bar{r}_1 = \overline{OA_1}, \qquad \bar{r}_2 = \overline{OA_2}, \qquad \bar{r} = \overline{A_1A_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1.$$



Zatem (str. 35, (III)):

$$(1) \qquad \dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}_1, \qquad \dot{\bar{r}}_2 = \bar{v}_2, \qquad \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_2 - \dot{\bar{r}}_1 = \bar{v}_2 - \bar{v}_1.$$

Mamy $\bar{r}^2 = |\bar{r}|^2$. Ponieważ $|\bar{r}| = \text{const.}$, więc tworząc pochodną, otrzymamy $2\bar{r}\dot{\bar{r}} = 0$ czyli $\bar{r}\dot{\bar{r}} = 0$, skąd na mocy (1) $\bar{r}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = 0$ czyli

$$(2) \qquad \bar{r}\bar{v}_2 = \bar{r}\bar{v}_1.$$

Z określenia iloczynu skalarowego wynika, że

$$\bar{r}\bar{v}_1 = |\bar{r}| \operatorname{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \bar{v}_1 \qquad \text{i} \qquad \bar{r}\bar{v}_2 = |\bar{r}| \operatorname{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \bar{v}_2.$$

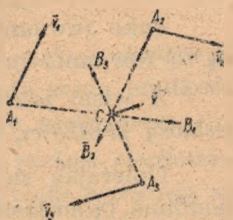
Na mocy więc (2) otrzymamy, dzieląc przez $|\bar{r}|$,

$$(3) \qquad \operatorname{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \bar{v}_1 = \operatorname{Rzut}_{\overline{A_1A_2}} \bar{v}_2.$$

Udowodniliśmy więc, że *w ciele sztywnym rzuty prędkości dwóch punktów na odcinek łączący te punkty są równe.*

Możemy także powiedzieć, że składowe prędkości dwóch punktów względem odcinka łączącego te punkty są równe.

Przykład 1. Niech dane będą prędkości $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ trzech punktów ciała A_1, A_2, A_3, nie leżących na jednej prostej. Obierzmy dowolnie punkt C, nie leżący w płaszczyźnie $A_1A_2A_3$, i oznaczmy jego prędkość przez $\bar{v}$. Wykreślmy z punktu C wektory $\overline{CB_1}$, $\overline{CB_2}$, $\overline{CB_3}$ równe rzutom prędkości $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ na proste A_1C, A_2C, A_3C.



W myśl udowodnionego twierdzenia wektory te będą również rzutami wektora $\bar{v}$ o początku C na proste A_1C, A_2C i A_3C. Jeżeli do tych prostych poprowadzimy płaszczyzny prostopadłe w punktach B_1, B_2 i B_3, to punkt przecięcia tych płaszczyzn będzie końcem wektora $\bar{v}$.

Aby wyznaczyć prędkość punktu D, leżącego w płaszczyźnie $A_1A_2A_3$, wyznaczamy najpierw prędkość dowolnego punktu C, nie leżącego w płaszczyźnie $A_1A_2A_3$, a następnie prędkość punktu D jak poprzednio (biorąc spośród punktów A_1, A_2, A_3 i C trzy punkty nie leżące wraz z D w jednej płaszczyźnie).

A więc: *prędkości wszystkich punktów ciała sztywnego wyznaczone są przez prędkości trzech jego punktów, nie leżących na jednej prostej.*

Przykład 2. Prędkości punktów linii prostej i płaszczyzny. Nadajmy poruszającej się prostej l dowolny zwrot i weźmy na niej punkt O o współrzędnych x_0, y_0, z_0. Oznaczmy przez α, β, γ kąty, jakie oś l tworzy z osiami układu współrzędnych, i położmy:

$$a = \cos\alpha, \qquad b = \cos\beta, \qquad c = \cos\gamma.$$

Dla dowolnego punktu $A(x, y, z)$ osi l, o współrzędnej r na tej osi, jest:

$$(4) \qquad x = x_0 + ar, \qquad y = y_0 + br, \qquad z = z_0 + cr.$$

Oznaczając przez $\bar{v}$ prędkość punktu A i tworząc pochodną (4) względem czasu, otrzymamy (wobec tego, że $r = \text{const.}$):

$$(5) \qquad v_x = \dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{a}r, \qquad v_y = \dot{y} = \dot{y}_0 + \dot{b}r, \qquad v_z = \dot{z} = \dot{z}_0 + \dot{c}r.$$

Wykreślmy z punktu A wektor $\overline{AA'}$, równy prędkości $\bar{v}$ punktu A, i oznaczmy przez ξ, η, ζ współrzędne punktu A'. Z uwagi na to, że $\xi = x + v_x$ it.d., dostaniemy na mocy (4) i (5):

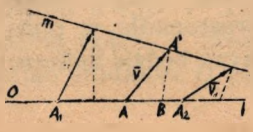
$$\xi = x_0 + \dot{x}_0 + (a + \dot{a})r, \qquad \eta = y_0 + \dot{y}_0 + (b + \dot{b})r, \qquad \zeta = z_0 + \dot{z}_0 + (c + \dot{c})r.$$

Jako równania pierwszego stopnia ze względu na parametr r są to równania prostej.

A więc: *jeżeli z punktów położonych na linii prostej wykreślić wektory prędkości, to końce tych wektorów leżą na linii prostej.*

Opierając się na tym twierdzeniu, można łatwo udowodnić, podobne twierdzenia dla płaszczyzny.

Mianowicie: *jeżeli z punktów położonych na płaszczyźnie wykreślić wektory prędkości, to końce tych wektorów leżą na jednej płaszczyźnie.*



Znając prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ dwóch punktów A_1 i A_2 prostej l, można wyznaczyć prędkość $\bar{v}$ dowolnego punktu A tej prostej, w sposób następujący (p. rysunek):

Prowadzimy prostą m przez końce wektorów prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$, wykreślonych z punktów A_1 i A_2. Na tej prostej leży koniec wektora prędkości $\bar{v}$, wykreślonego z A. Wyznaczamy na prostej l punkt B taki, by wektor $\overline{AB}$ równy był rzutowi $\bar{v}_1$ (lub $\bar{v}_2$) na oś l. Wedle twierdzenia dowiedzionego na str. 323, $\overline{AB}$ jest rzutem $\bar{v}$ na l. Jeżeli przez B przeprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do l, to punkt A', w którym płaszczyzna ta przetnie prostą m, będzie końcem wektora $\bar{v}$, wykreślonego z A.

Ruch chwilowy ciała sztywnego. Weźmy pod uwagę w ciele sztywnym dowolny punkt A o współrzędnych x, y, z w pewnej chwili t i oznaczmy przez $\bar{v}$ jego prędkość. Ponieważ $\bar{v}$ zależy od punktu A, więc $\bar{v}$ jest w chwili t funkcją współrzędnych x, y, z. Możemy zatem przyjąć, że

$$\bar{v} = \bar{F}(x, y, z). \tag{6}$$

Funkcja wektorowa (6) określa prędkość w chwili t w każdym punkcie ciała.

Rozmieszczenie prędkości w ciele w pewnej chwili nazywamy *ruchem chwilowym* ciała.

Ruch chwilowy ciała jest zatem wyznaczony przez podanie funkcji wektorowej (6).

W ruchu postępowym wszystkie punkty mają tę samą prędkość. Funkcja (6) przyjmie więc postać $\bar{v} = \text{const}$.

W ruchu obrotowym około osi l mamy dla punktu A, oznaczając przez $\bar{\omega}$ wektor prędkości kątowej, a przez O dowolny punkt na osi l (por. wzory (2) i (111), str. 46):

$$\bar{v} = \text{Mom}_A\,\bar{\omega} \qquad \text{lub} \qquad \bar{v} = \overline{OA} \times \bar{\omega}. \tag{7}$$

Ruch chwilowy ciała w chwili t nazywamy *ruchem chwilowym postępowym*, jeżeli wszystkie punkty ciała mają tę samą prędkość. Prędkość tę nazywamy *prędkością chwilową ruchu postępowego*.

Ruch chwilowy ciała w chwili t nazywamy *ruchem chwilowym obrotowym* około osi l, jeżeli prędkość punktów ciała wyrażają się wzorem (7), t. zn. jeżeli prędkości punktów ciała w chwili t są takie, jak gdyby ciało obracało się około osi l. Prędkość $\bar{\omega}$ nazywamy wektorem *prędkości kątowej chwilowej*, a oś l *osią obrotu chwilowego*.

Jeżeli w każdej chwili czasu ruch chwilowy jest obrotem około prostej (nieruchomej) l, to jest on ruchem obrotowym około osi l.

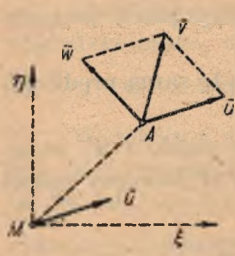
Obierzmy bowiem stały układ współrzędnych $O(x,y,z)$, przyjmując oś l za oś z. Niechaj A będzie dowolnym punktem ciała o współrzędnych x,y,z, a $\bar{\omega}$ wektorem prędkości chwilowej. Wówczas $\omega_x=0$ i $\omega_y=0$. Według wzoru (7) rzuty prędkości $\bar{v}$ punktu A wynoszą:

$$(8) \qquad v_x=\dot{x}=y\omega_z, \qquad v_y=\dot{y}=-x\omega_z, \qquad v_z=\dot{z}=0.$$

Ponieważ $\dot{z}=0$, więc $z=\text{const}$. Punkty biegną zatem po płaszczyznach prostopadłych do osi l. Z równań (8) dostajemy $x\dot{x}+y\dot{y}=0$, skąd po scałkowaniu $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=\text{const}$, czyli $x^2+y^2=\text{const}$. Punkty ciała krążą tedy po płaszczyznach prostopadłych do osi l w stałej odległości od l, a więc ciało wykonywa obrót około l.

§ 6. Ruch chwilowy płaski. Niech figura płaska porusza się w płaszczyźnie Π. Obierzmy w tej płaszczyźnie dowolne dwa układy współrzędnych: jeden stały (x,y), a drugi (ξ,η) poruszający się ruchem postępowym i mający początek w dowolnie obranym punkcie M danej figury.

Ruch chwilowy figury względem układu (ξ,η) będzie tedy obrotem około punktu M (czyli około osi l prostopadłej do Π w punkcie M). Prędkości względne punktów w chwili t będą więc takie, jak gdyby figura obracała się około punktu M z pewną prędkością kątową ω. Możemy zatem powiedzieć, że ruch chwilowy względny jest ruchem obrotowym około punktu M. Ponieważ ruch układu (ξ,η) jest postępowy, więc prędkość unoszenia jest jednakowa dla wszystkich punktów figury (str. 58) i równa się prędkości punktu M. Oznaczając przez $\bar{v}$ prędkość (bezwzględną) dowolnego punktu A, przez $\bar{w}$ prędkość względną punktu A, a przez $\bar{u}$ prędkość unoszenia (t. j. prędkość punktu M), otrzymamy zatem (str. 58)



$$(1) \qquad \bar{v}=\bar{u}+\bar{w}.$$

Możemy wobec tego powiedzieć, że prędkości punktów figury są takie, jak gdyby figura wykonywała dwa ruchy równocześnie: jeden postępowy z prędkością $\bar{u}$ dowolnego punktu M figury, drugi zaś obrotowy około tegoż punktu M.

A więc: *ruch chwilowy figury w ruchu płaskim składa się z ruchu chwilowego postępowego i ruchu chwilowego obrotowego; ruch postępowy ma prędkość dowolnego punktu figury, zaś ruch obrotowy jest obrotem około tegoż punktu.*

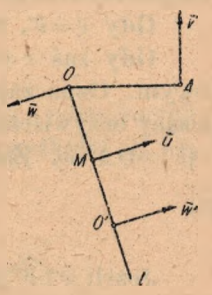
Ruch chwilowy figury można przedstawić na ogół na nieskończenie wiele sposobów jako złożenie ruchu chwilowego postępowego i ruchu chwilowego obrotowego. Zależy to bowiem od wyboru punktu M.

We wszystkich tych przedstawieniach jednak prędkości chwilowe kątowe są równe. Obierzmy bowiem na figurze dowolną oś k w chwili t i niechaj k' oznacza położenie tej osi w chwili $t+\Delta t$. Kąt $\Delta\varphi$, jaki oś k' tworzy z osią k, jest równy kątowi, o jaki figura obróciła się około M w ruchu względnym. Widzimy stąd, że $\Delta\varphi$ nie zależy od wyboru punktu M, a tym samym i ω, bo $\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\varphi/\Delta t$.

W szczególności ruch chwilowy może być ruchem chwilowym postępowym (jeżeli prędkość chwilowa kątowa ω jest zerem) lub ruchem chwilowym obrotowym (jeżeli punkt M ma prędkość $\bar{u}=0$).

Dla każdego punktu A figury prędkość $\bar{w}$ (obrotu chwilowego) jest prostopadła do odcinka MA, przyczem $|\bar{w}|=MA\cdot\omega$. Znając zwrot obrotu chwilowego, możemy więc wyznaczyć zwrot $\bar{w}$, a następnie otrzymać ze wzoru (1) prędkość $\bar{v}$ punktu A.

Niech teraz $\bar{u}\neq 0$ i $\omega\neq 0$. Weźmy pod uwagę na prostej l, prostopadłej do $\bar{u}$ i przechodzącej przez M, dwa punkty O i O' w odległości r od M, gdzie $r=|\bar{u}|/\omega$.



Prędkości obrotu chwilowego $\bar{w}$ i $\bar{w}'$ punktów O i O' są prostopadłe do l, zatem równoległe do $\bar{u}$. Mamy ponadto $|\bar{w}|=MO\cdot\omega=r\omega=|\bar{u}|$ i podobnie $|\bar{w}'|=|\bar{u}|$. Ponieważ $\bar{w}$ i $\bar{w}'$ mają zwroty przeciwne, więc dla jednego z punktów O i O', np. dla O, mamy $\bar{w}=-\bar{u}$. Zatem prędkość punktu O wynosi $\bar{v}=\bar{w}+\bar{u}=0$. Jeżeli więc początek układu (ξ,η) umieścimy w punkcie O, to prędkość unoszenia będzie zerem, ruch chwilowy będzie zatem obrotem chwilowym około O.

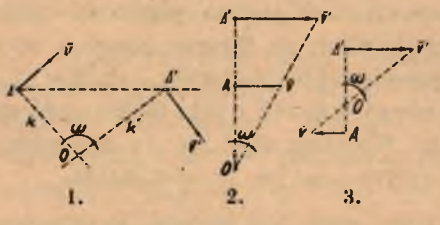
Punkt O nazywamy *środkiem obrotu chwilowego*.

Prędkość $\bar{v}$ dowolnego punktu A jest prostopadła do odcinka OA i ma zwrot zależny od zwrotu obrotu chwilowego. Ponadto

$$|\bar{v}|=OA\cdot\omega. \tag{2}$$

A więc: *ruch chwilowy płaski jest albo ruchem chwilowym postępowym, albo ruchem chwilowym obrotowym około środka obrotu chwilowego.*

Wyznaczanie środka obrotu chwilowego. Środek obrotu chwilowego ma oczywiście prędkość 0. Każdy inny punkt ma według (2) prędkość $\bar{v} \neq 0$ (jeżeli $\omega \neq 0$). Istnieje zatem jeden tylko środek obrotu chwilowego (gdy $\omega \neq 0$).



1. 2. 3.

Jeżeli w dowolnym punkcie A wykreślimy prostopadłą do prędkości $\bar{v}$ tego punktu, to środek obrotu chwilowego znajdzie się na tej prostej (rys. 1).

Środek obrotu chwilowego można na ogół wyznaczyć, znając prędkość $\bar{v}$ jednego punktu, np. A, oraz kierunek prędkości $\bar{v}'$ drugiego punktu A'. Wykreślmy proste k i k' prostopadłe do $\bar{v}$ i $\bar{v}'$ w punktach A i A'. Punkt O przecięcia się tych prostych jest środkiem obrotu chwilowego. Ze wzoru (2) otrzymujemy $\omega = |\bar{v}| / OA$. Zwrot obrotu chwilowego otrzymamy ze zwrotu prędkości $\bar{v}$.

Gdy proste k i k' są równoległe, to ruch chwilowy jest ruchem chwilowym postępowym.

Gdy proste k i k' pokrywają się z sobą, musimy w celu wyznaczenia ruchu chwilowego znać jeszcze prędkość $\bar{v}'$ punktu A'. Znajomość samego tylko kierunku prędkości $\bar{v}'$ wówczas nie wystarcza.

Gdy $\bar{v} = \bar{v}'$, ruch chwilowy jest ruchem postępowym.

Gdy zaś $\bar{v} \neq \bar{v}'$, ruch chwilowy jest ruchem chwilowym obrotowym. Oznaczając wówczas przez O środek obrotu chwilowego (leżący oczywiście na prostych k i k'), mamy na mocy (2) $|\bar{v}| = OA \cdot \omega$ i $|\bar{v}'| = OA' \cdot \omega$. Zatem

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{|\bar{v}|}{|\bar{v}'|}. \tag{3}$$

Jeżeli $\bar{v}$ i $\bar{v}'$ mają zwroty zgodne (rys. 2) i $|\bar{v}| < |\bar{v}'|$, to punkt O leży na przedłużeniu odcinka $A'A$ poza punktem A. Mamy wtedy $OA' - OA = A'A$, skąd na mocy (3)

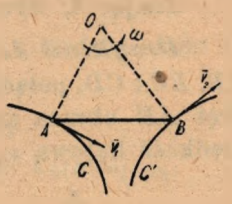
$$OA = A'A \cdot \frac{|\bar{v}|}{|\bar{v}'| - |\bar{v}|}. \tag{4}$$

Jeżeli zaś $\bar{v}$ i $\bar{v}'$ mają zwroty przeciwne (rys. 3), punkt O leży na odcinku AA'. Mamy wtedy $OA + OA' = AA'$, skąd na mocy (3)

$$OA = AA' \cdot \frac{|\bar{v}|}{|\bar{v}| + |\bar{v}'|}. \tag{5}$$

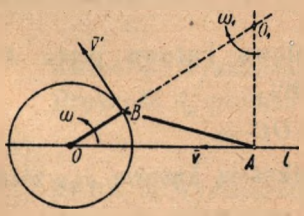
Przykład 1. Pręt AB porusza się w płaszczyźnie w ten sposób, że oba jego końce A i B poruszają się stale po krzywych C i C'. Prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ punktów A i B są styczne do krzywych C i C'.

Rysując w punktach A i B prostopadłe do stycznych, otrzymamy środek O chwilowego obrotu pręta AB, jako punkt przecięcia się tych prostopadłych. Oznaczając przez ω prędkość chwilową kątową, otrzymamy:



$$|\bar{v}_1| = OA \cdot \omega, \quad |\bar{v}_2| = OB \cdot \omega \quad \text{i} \quad |\bar{v}_1| / |\bar{v}_2| = OA / OB.$$

Przykład 2. W mechanizmie korbowym pręt AB porusza się w ten sposób, że jego koniec B połączony jest przegubowo z prętem OB unieruchomionym w O, drugi zaś koniec A porusza się po prostej l przechodzącej przez O. Pręt OB obraca się około punktu O z prędkością kątową ω. Jaka jest prędkość punktu A?

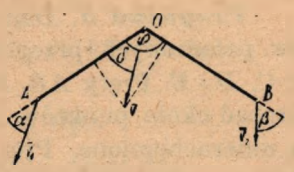


Prędkość $\bar{v}'$ punktu B jest prostopadła do OB, a prędkość $\bar{v}$ punktu A ma kierunek prostej l. Kreśląc prostopadłe do $\bar{v}'$ i $\bar{v}$, otrzymamy środek O_1 chwilowego obrotu pręta AB. Jest $OB \cdot \omega = |\bar{v}'| = O_1B \cdot \omega_1$, zatem $\omega_1 = OB \cdot \omega / O_1B$, skąd

$$|\bar{v}| = O_1A \cdot \omega_1 = O_1A \cdot OB \cdot \omega / O_1B.$$

Przykład 3. Układ dwóch prętów AO i OB, połączonych przegubowo, porusza się w płaszczyźnie. Dane są prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ punktów A i B. Wyznaczyć prędkość punktu O.

Oznaczmy przez α i β kąty, jakie tworzą prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ z prętami OA i OB, przez δ kąt, jaki prędkość $\bar{v}$ punktu O tworzy z prętem OA, a przez φ kąt AOB.



Ponieważ rzuty prędkości $\bar{v}$ na pręty OA i OB są odpowiednio równe rzutom $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ na te pręty, więc oznaczając przez v, v_1 i v_2, wartości bezwzględne tych prędkości, otrzymamy:

$$(6) \qquad v_1 \cos\alpha = v \cos\delta, \qquad v_2 \cos\beta = v \cos(\varphi - \delta),$$

skąd

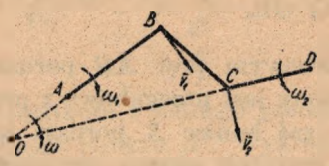
$$\cos(\varphi - \delta) / \cos\delta = v_2 \cos\beta / v_1 \cos\alpha,$$

więc $\cos\varphi + \operatorname{tg}\delta\sin\varphi = v_2\cos\beta / v_1\cos\alpha$ czyli

$$\operatorname{tg}\delta = (v_2\cos\beta - v_1\cos\alpha\cos\varphi)/v_1\cos\alpha\sin\varphi.$$

Znając δ, wyznaczamy v z równania (6).

Przykład 4. W płaszczyźnie leży układ trzech prętów AB, BC i CD, połączonych przegubowo i unieruchomionych w A i D. Pręt AB obraca się około A z prędkością kątową ω_1. Wyznaczyć prędkość kątową ω_2 pręta CD około D.



Punkty B i C krążą po kołach o środkach A i D; ich prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ są zatem prostopadłe do AB i CD. Środek obrotu chwilowego pręta BC otrzymamy, prowadząc prostopadłe do $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$, czyli przedłużając odcinki AB i DC do przecięcia się w punkcie O. Punkt O jest środkiem obrotu chwilowego pręta BC.

Oznaczmy przez ω prędkość chwilową kątową pręta BC. Kładąc $v_1 = |\bar{v}_1|$ i $v_2 = |\bar{v}_2|$, otrzymamy więc:

$$v_1 = OB\cdot\omega \quad \text{i} \quad v_2 = OC\cdot\omega. \tag{7}$$

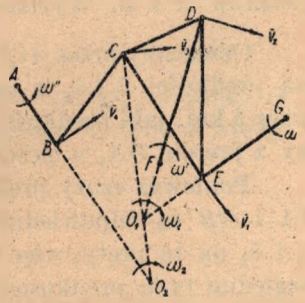
Pręt AB obraca się około A z prędkością kątową ω_1; zatem

$$v_1 = AB\cdot\omega_1 \quad \text{i podobnie} \quad v_2 = CD\cdot\omega_2. \tag{8}$$

Z (7) i (8) otrzymujemy $AB\cdot\omega_1 = OB\cdot\omega$ czyli $\omega = AB\cdot\omega_1/OB$, skąd na mocy (7) $v_2 = AB\cdot OC\cdot\omega_1/OB$, a ponieważ na mocy (8) jest $\omega_2 = v_2/CD$, więc

$$\omega_2 = \frac{AB\cdot OC}{OB\cdot CD}\omega_1.$$

Przykład 5. Dany jest układ prętów połączonych przegubowo w węzłach B, C, D i E. Pręty AB, FD i EG mogą się obracać około punktów A, F i G, które są unieruchomione. Pręt GE obraca się około G z prędkością kątową ω. Wyznaczyć prędkości kątowe ω' i ω'' prętów FD i AB około F i A.



Oznaczmy przez $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ i $\bar{v}_4$ prędkości punktów E, D, C, B, zaś przez v_1, v_2, v_3 i v_4 ich wartości bezwzględne. Punkty E i D krążą po kołach o środkach G i F. Prędkości więc tych punktów są prostopadłe do EG i FD.

Niech O_1 będzie punktem przecięcia prostopadłych do $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ (t. j. przedłużeń prętów GE i DF). Punkt O_1 będzie środkiem obrotu chwilowego pręta ED, a zarazem trójkąta EDC, gdyż pręty ED, DC i CE tworzą układ sztywny.

Oznaczając przez ω_1 prędkość obrotu chwilowego około O_1, której zwrot wyznaczamy ze zwrotu $\bar{v}_1$, mamy:

$$v_1 = O_1E \cdot \omega_1, \qquad v_2 = O_1D \cdot \omega_1. \tag{9}$$

Zwrot $\bar{v}_2$ wyznaczamy ze zwrotu prędkości kątowej ω_1.

Ponieważ $v_1 = GE \cdot \omega$, więc na mocy (9):

$$\omega_1 = \frac{GE}{O_1E}\,\omega, \qquad v_2 = \frac{O_1D \cdot GE}{O_1E}\,\omega. \tag{10}$$

Pręt FD obraca się około F z prędkością kątową ω', więc $v_2 = FD \cdot \omega'$ czyli $\omega' = v_2/FD$. Na mocy (10) jest zatem

$$\omega' = \frac{O_1D \cdot GE}{O_1E \cdot FD}\,\omega. \tag{11}$$

Zwrot ω' wyznaczamy ze zwrotu $\bar{v}_2$.

Prędkość $\bar{v}_3$ punktu C jest prostopadła do O_1C; mamy więc

$$v_3 = O_1C \cdot \omega_1. \tag{12}$$

Zwrot $\bar{v}_3$ wyznaczamy ze zwrotu obrotu około O_1.

Aby wyznaczyć środek O_2 obrotu chwilowego pręta BC, zauważmy, że prędkość $\bar{v}_4$ punktu B jest prostopadła do pręta AB. Kreślimy więc prostopadłe do prędkości $\bar{v}_4$ i $\bar{v}_3$, czyli przedłużamy AB i CO_1 do przecięcia się w O_2.

Oznaczając przez ω_2 prędkość kątową obrotu chwilowego około O_2, mamy:

$$v_3 = O_2C \cdot \omega_2, \qquad v_4 = O_2B \cdot \omega_2. \tag{13}$$

Zwrot obrotu chwilowego otrzymujemy ze zwrotu $\bar{v}_3$.

Z (13) dostajemy:

$$\omega_2 = v_3/O_2C, \qquad v_4 = O_2B \cdot v_3/O_2C. \tag{14}$$

Zwrot $\bar{v}_4$ otrzymujemy ze zwrotu obrotu około O_2.

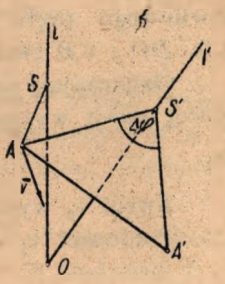
Ponieważ pręt AB obraca się około A z prędkością kątową ω'', więc $v_4 = AB \cdot \omega''$ czyli $\omega'' = v_4/AB$. Stąd na mocy (14), (12) i (10) dostajemy

$$\omega'' = \frac{O_2B \cdot O_1C \cdot GE}{AB \cdot O_2C \cdot O_1E}\,\omega.$$

Zwrot prędkości kątowej ω'' otrzymujemy ze zwrotu $\bar{v}_4$.

§ 7. Ruch chwilowy przestrzenny. Zajmiemy się najpierw przypadkiem szczególnym.

Obrót około punktu. Przypuśćmy, że ciało obracające się około punktu stałego O, zajmowało położenie I w chwili t, zaś położenie II w chwili $t+\Delta t$. Z położenia I w położenie II możemy więc przeprowadzić ciało przy pomocy obrotu o kąt $\Delta\varphi$ około pewnej prostej l'. Załóżmy, że gdy Δt dąży do 0, prosta l' dąży do pewnej prostej l. Położymy



$$\lim_{\Delta t\to 0}\Delta\varphi/\Delta t=\omega. \tag{1}$$

Oznaczmy przez A dowolny punkt ciała w położeniu I, a przez A' odpowiedni punkt w położeniu II. Niechaj S' będzie środkiem koła, po którym porusza się A przy obrocie około prostej l', zaś S położeniem granicznym punktu S', gdy $\Delta t\to 0$. Oznaczmy wreszcie przez $\bar{v}$ prędkość punktu A. Mamy

$$\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{AA'}}{\Delta t},$$

zatem

$$|\bar{v}|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{AA'}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2AS'\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{AS'\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta t},$$

a ponieważ $\lim_{\Delta\varphi\to 0}\left(\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\Big/\frac{\Delta\varphi}{2}\right)=1$, więc na mocy (1)

$$|\bar{v}|=AS\cdot\omega. \tag{2}$$

Zauważmy, że wektor $\overline{AA'}/\Delta t$ jest prostopadły do l' i tworzy z odcinkiem $S'A$ kąt $90^0-\Delta\varphi/2$; wektor $\bar{v}$ jest tedy w granicy prostopadły do l i AS. Prędkość punktu A w chwili t jest zatem taka, jak gdyby ciało obracało się około osi l z prędkością kątową ω. Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Ruch chwilowy ciała, obracającego się wokoło pewnego punktu O, jest obrotem chwilowym wokoło osi, przechodzącej przez O.

Prędkość $\bar{v}$ punktu A jest prostopadła do płaszczyzny Π przechodzącej przez l i A, skąd $\bar{v}\perp OA$, ponieważ OA leży w Π.

A więc: *przy obrocie ciała około punktu O prędkości punktów ciała są prostopadłe do prostych łączących te punkty z punktem O.*

Oś l obrotu chwilowego leży w płaszczyźnie przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do prędkości punktu A. Znając więc kierunki prędkości dwóch punktów ciała, otrzymamy oś obrotu chwilowego jako krawędź przecięcia płaszczyzn, przechodzących przez te punkty prostopadle do kierunków prędkości. Prędkość chwilową kątową otrzymamy z równości (2).

Przykład 1. Kula $x^2+y^2+z^2=1$ obraca się około środka O. Dana jest prędkość $\bar{v}$ punktu $A(1,0,0)$ w pewnej chwili t oraz kierunek prędkości $\bar{w}$ punktu $B(0,1,0)$ w tejże chwili. Wyznaczyć oś obrotu chwilowego, prędkość kątową i prędkość $\bar{w}$ (w chwili t).

Ponieważ prędkość $\bar{v}$ jest prostopadła do OA, t. j. do osi x, więc $v_x=0$. Oznaczmy przez a, b, c cosinusy kątów, jakie prędkość $\bar{w}$ tworzy z osiami układu współrzędnych. Mamy oczywiście $b=0$, gdyż $\bar{w}$ jest prostopadłe do OB, t. j. do osi y.

Oś chwilowego obrotu jest przecięciem płaszczyzn przeprowadzonych przez O oraz przez A i B prostopadle do prędkości $\bar{v}$ i $\bar{w}$. Równania tych płaszczyzn są następujące:

$$yv_y+zv_z=0, \qquad ax+cz=0, \tag{3}$$

skąd

$$\frac{x}{c/a}=\frac{y}{v_z/v_y}=\frac{z}{-1}. \tag{4}$$

Równania (4) są równaniami osi obrotu chwilowego.

Niech $\bar{\omega}$ oznacza prędkość chwilową kątową. Rzuty $\bar{\omega}$ na osie układu są proporcjonalne do współczynników kierunkowych osi obrotu, t. j. do liczb c/a, v_z/v_y i -1. Oznaczając przez λ współczynnik proporcjonalności, dostaniemy:

$$\omega_x=\lambda c/a, \qquad \omega_y=\lambda v_z/v_y, \qquad \omega_z=-\lambda. \tag{5}$$

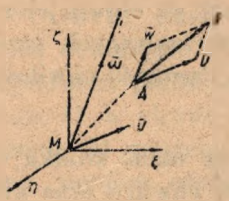
Aby wyznaczyć λ, obliczamy prędkość $\bar{v}$, opierając się na wzorze $\bar{v}=\overline{OA}\times\bar{\omega}$. Otrzymujemy $v_x=0$, $v_y=\lambda$ i $v_z=\lambda v_z/v_y$, skąd $\lambda=v_y$, więc na mocy (5):

$$\omega_x=cv_y/a, \qquad \omega_y=v_z, \qquad \omega_z=-v_y. \tag{6}$$

Ponieważ $\bar{w}=\overline{OB}\times\bar{\omega}$, więc na mocy (6) jest

$$w_x=-v_y, \qquad w_y=0, \qquad w_z=-cv_y/a.$$

Ruch chwilowy w przypadku ogólnym. Umieśćmy w dowolnym punkcie M danego ciała początek układu współrzędnych (ξ, η, ζ), poruszającego się ruchem postępowym. Ponieważ punkt M jest względem układu (ξ, η, ζ) nieruchomy, więc ruch ciała względem układu (ξ, η, ζ) jest obrotem około punktu M. Ruch chwilowy względny będzie więc obrotem chwilowym około osi obrotu chwilowego l, przechodzącej przez M.



Niechaj A będzie dowolnym punktem ciała. Oznaczmy przez $\bar{v}$ prędkość bezwzględną punktu A, przez $\bar{u}$ prędkość unoszenia, a przez $\bar{w}$ prędkość względną. Zatem

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}. \tag{7}$$

Prędkość unoszenia $\bar{u}$ równa się prędkości punktu M, gdyż układ (ξ, η, ζ) porusza się ruchem postępowym. Prędkości punktów ciała są zatem takie, jak gdyby ciało wykonywało dwa ruchy równocześnie: jeden postępowy z prędkością $\bar{u}$ dowolnego punktu M ciała, drugi zaś obrotowy około pewnej osi przechodzącej przez M.

A więc: *ruch chwilowy ciała składa się z ruchu chwilowego postępowego o prędkości dowolnego punktu M tego ciała i ruchu chwilowego obrotowego około osi obrotu chwilowego, przechodzącej przez punkt M.*

Ruch chwilowy ciała możemy na ogół przedstawić na nieskończenie wiele sposobów jako złożenie ruchu chwilowego postępowego i ruchu chwilowego obrotowego. Zależy to bowiem od wyboru punktu M.

Wykażemy, że *przy wszystkich możliwych przedstawieniach wektory prędkości chwilowych kątowych są równe (t. zn. że osie obrotu chwilowego są równoległe i prędkości chwilowe kątowe są równe).*

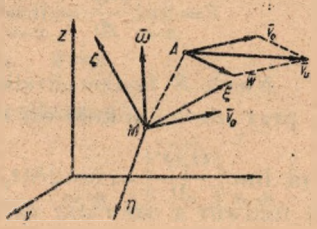
Przypuśćmy, że punkt ciała M w chwili t przeszedł w punkt M' w chwili $t + \Delta t$. Względem układu stałego zmiana położenia ciała w czasie Δt jest złożeniem przesunięcia MM' i obrotu o kąt $\Delta\varphi$ około pewnej osi l'. Względem układu (ξ, η, ζ) zmiana położenia jest tylko obrotem o kąt $\Delta\varphi$ około osi l', układ bowiem (ξ, η, ζ) wykonał w czasie Δt przesunięcie MM'. Zatem położeniem granicznym osi l' jest oś l obrotu chwilowego, zaś prędkością chwilową kątową jest $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\varphi / \Delta t$.

Z twierdzenia podanego na str. 318 wynika, że gdybyśmy w ciele obrali inny punkt M_1, to przy podobnych znakowaniach oś l_1' byłaby równoległa do l', przyczem $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi$. Zatem oś obrotu chwilowego l_1 przechodząca przez M_1 jest równoległa do l i prędkość chwilowa kątowa ω_1 równa jest ω. Zarówno więc dla M jak dla M_1 wektory prędkości kątowych będą równe.

Uwaga. Oznaczając przez $\bar{\omega}$ wektor prędkości chwilowej kątowej, otrzymamy na mocy (III), str. 46, dla dowolnego punktu A $\bar{w} = \overline{MA} \times \bar{\omega}$, skąd na mocy (7)

$$\bar{v} = \bar{u} + \overline{MA} \times \bar{\omega}. \tag{I}$$

Prędkość unoszenia. Niech układ współrzędnych (ξ, η, ζ) o początku M porusza się w przestrzeni względem stałego układu współrzędnych (x, y, z). Układ (ξ, η, ζ) (wraz z punktami sztywnie z nim związanymi) możemy uważać za ciało sztywne. Ruch chwilowy układu (ξ, η, ζ) będzie więc złożeniem ruchu chwilowego postępowego z prędkością $\bar{v}_0$ początku M układu i ruchu obrotowego z prędkością chwilową kątową $\bar{\omega}$ około osi obrotu chwilowego, przechodzącej przez M. Prędkość unoszenia $\bar{v}_u$ dowolnego punktu A, znajdującego się w ruchu względem układu (ξ, η, ζ), jest to prędkość, jakąby punkt A posiadał, gdyby był związany sztywnie z układem (ξ, η, ζ). Zatem $\bar{v}_u$ jest sumą prędkości $\bar{v}_0$ i prędkości $\bar{w}$ obrotu chwilowego. Wobec powyższego mamy na mocy (I)



$$\bar{v}_u = \bar{v}_0 + \overline{MA} \times \bar{\omega}. \tag{8}$$

A więc: *prędkość unoszenia dowolnego punktu jest taka, jak gdyby punkt ten był związany sztywnie z układem ruchomym współrzędnych, a układ ten wykonywał dwa ruchy równocześnie: jeden postępowy z prędkością początku układu, drugi zaś obrotowy około osi, przechodzącej przez początek układu.*

Twierdzenie powyższe podaliśmy bez dowodu na str. 62.

Skręt chwilowy. Ruch chwilowy ciała nazywamy *skrętem chwilowym* albo *ruchem śrubowym chwilowym*, jeżeli prędkość ruchu chwilowego postępowego jest równoległa do osi obrotu chwilowego.

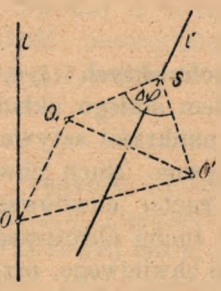
W szczególności ruch chwilowy postępowy lub obrót chwilowy nazywamy również skrętem chwilowym.

Oś skrętu chwilowego nazywamy *osią środkową* obrotu chwilowego.

Przy pomocy twierdzenia, podanego na str. 319, udowodnimy twierdzenie następujące:

Ruch chwilowy ciała sztywnego można przedstawić, i to tylko w jeden sposób, jako skręt chwilowy.

Dowód. Załóżmy, że przeprowadziliśmy ciało z położenia I w chwili t w położenie II w chwili $t+\Delta t$ przy pomocy skrętu około osi l' (str. 319). Niechaj l będzie położeniem granicznym prostej l', gdy $\Delta t \to 0$. Weźmy pod uwagę na l dowolny punkt O w chwili t i oznaczmy przez O' położenie punktu O w chwili $t+\Delta t$. Przy przeprowadzaniu ciała z położenia I w położenie II z pomocą skrętu, punkt O zajmie po przesunięciu położenie O_1, a następnie po obrocie około l' o kąt $\Delta\varphi$ przejdzie w położenie O'. Oznaczając przez $\bar{u}$ prędkość punktu O, mamy więc



$$(9)\qquad \bar{u}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{OO'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{OO_1}+\overline{O_1O'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{OO_1}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{O_1O'}}{\Delta t}.$$

Niech S będzie środkiem koła, po którym punkt O poruszał się przy obrocie około osi l' o kąt $\Delta\varphi$. Zatem $|\overline{O_1O'}|=2SO_1\cdot\sin\Delta\varphi/2$, skąd $\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\overline{O_1O'}}{\Delta t}\right|=\lim 2SO_1\cdot\left|\frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t}\right|=\lim SO_1\cdot\left|\frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2}\right|\cdot\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$.

Ponieważ $\lim_{\Delta t\to 0} SO_1=0$, a $\lim_{\Delta\varphi\to 0}\left|\frac{\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta\varphi/2}\right|=1$, więc $\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\overline{O_1O'}}{\Delta t}\right|=0$.

Na mocy (9) jest więc $\bar{u}=\lim_{\Delta t\to 0}\overline{OO_1}/\Delta t$. Lecz $\overline{OO_1}\parallel l'$, więc z uwagi na to, że l' dąży do l, gdy $\Delta t\to 0$, prędkość $\bar{u}$ ma kierunek osi l, która jest osią obrotu chwilowego, przechodzącą przez O. Ruch chwilowy jest więc skrętem, bo prędkość $\bar{u}$ ruchu chwilowego postępowego ma kierunek osi l obrotu chwilowego.

Punkty położone na osi skrętu chwilowego mają prędkości równe 0, a przeto równoległe do osi skrętu. Punkty położone poza osią skrętu mają prędkości, które nie są równoległe do osi skrętu. Prędkość takiego punktu jest bowiem sumą prędkości $\bar{u}$ i pręd-

kości $\bar{w}$ obrotowej, prostopadłej do $\bar{u}$. Zatem suma $\bar{u}+\bar{w}$ nie jest nigdy równoległa do $\bar{u}$ (a więc i do l), chyba, że $\bar{w}=0$, t. j. że punkt leży na osi skrętu.

Wynika stąd, że ruch chwilowy daje się przedstawić jako skręt chwilowy tylko w jeden sposób. Gdybyśmy bowiem przedstawili tenże ruch chwilowy jako skręt około innej osi l_1, to na mocy twierdzenia na str. 334, proste l i l_1 byłyby równoległe, a wtedy prędkości punktów położonych na l_1 byłyby równoległe do l_1 i l co jest niemożliwe, ponieważ — jak dowiedliśmy przed chwilą — tylko punkty położone na osi l mają prędkości równoległe do l.

Przykład 2. Niech ciało porusza się w ten sposób, że ruch chwilowy jest skrętem o stałej prędkości postępowej $\bar{u}$ i obrotowej $\bar{\omega}$ około stałej osi l.

Obierzmy oś obrotu chwilowego za oś z. Oznaczmy przez ω i u współrzędne $\bar{\omega}$ i $\bar{u}$ względem osi z. Prędkość $\bar{v}$ punktu A ciała o współrzędnych x,y,z wyraża się na mocy (I), str. 335, wzorem

$$\bar{v}=\bar{u}+\overline{OA}\times\bar{\omega},$$

gdzie O jest początkiem układu. Ponieważ $\omega_x=0$, $\omega_y=0$, $\omega_z=\omega$ i $u_x=0$, $u_y=0$, $u_z=u$, więc:

$$\dot{x}=\omega y, \qquad \dot{y}=-\omega x, \qquad \dot{z}=u. \tag{10}$$

Ostatnie z równań (10) daje po scałkowaniu

$$z=ut+c, \tag{11}$$

gdzie c jest stałą dowolną. Różniczkując pierwsze z równań (10), otrzymamy $\ddot{x}=\omega\dot{y}$. Podstawiając na $\dot{y}$ wartość z równania drugiego, dostaniemy równanie $\ddot{x}+\omega^2x=0$, którego rozwiązanie ogólne ma postać

$$x=a\sin\omega t+b\cos\omega t, \tag{12}$$

gdzie a i b są stałymi dowolnymi. Ponieważ $y=\dot{x}:\omega$ więc

$$y=a\cos\omega t-b\sin\omega t. \tag{13}$$

Przyjmijmy, że w chwili $t=0$ punkt A miał współrzędne $x_0=r$, $y_0=0$ i $z_0=0$. Podstawiając $t=0$ w (11)-(13), dostaniemy $a=0$, $b=r$ i $c=0$, skąd:

$$x=r\cos\omega t, \qquad y=-r\sin\omega t, \qquad z=ut.$$

Punkt będzie więc poruszał się ruchem śrubowym (str. 55) po powierzchni walca o osi z (gdyż $x^2+y^2=r^2$), zakreślając t. zw. *linię śrubową*. Jeżeli pobocznicę walca rozwiniemy, to linia śrubowa przedstawi się jako prosta. Linia śrubowa przecina zatem wszystkie tworzące pod jednym i tym samym kątem α. Odległość dwóch punktów sąsiednich linii śrubowej na tej samej tworzącej nazywamy *skokiem śruby* i oznaczamy przez h. Mamy więc

$$\operatorname{tg}\alpha = 2r\pi/h, \tag{14}$$

gdzie r jest promieniem podstawy walca. Ponieważ czas obrotu wynosi $2\pi/|\omega|$ lub $h/|\overline{u}|$, więc:

$$h = 2\pi|\overline{u}|/|\overline{\omega}|, \qquad \operatorname{tg}\alpha = r|\overline{\omega}|/|\overline{u}|. \tag{15}$$

Wyznaczanie ruchu ciała. Obierzmy w ciele dowolny punkt O o współrzędnych x_0, y_0, z_0 względem pewnego stałego układu współrzędnych (x,y,z). Oznaczmy przez $\overline{\omega}$ prędkość chwilową kątową, a przez $\overline{u}$ prędkość punktu O. Punkt ciała A o współrzędnych x,y,z ma prędkość ((I), str. 335)

$$\overline{v} = \overline{u} + OA \times \overline{\omega}. \tag{16}$$

Ponieważ: $v_x=\dot{x}$, $v_y=\dot{y}$, $v_z=\dot{z}$ i $u_x=\dot{x}_0$, $u_y=\dot{y}_0$, $u_z=\dot{z}_0$, więc dostajemy ze wzoru (16):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_0 + (y-y_0)\omega_z - (z-z_0)\omega_y, \qquad \dot{y} = \dot{y}_0 + (z-z_0)\omega_x - (x-x_0)\omega_z, \\ \dot{z} &= \dot{z}_0 + (x-x_0)\omega_y - (y-y_0)\omega_x. \end{aligned} \tag{17}$$

Jeżeli ruch punktu O i prędkość kątowa $\overline{\omega}$ dane są przy pomocy funkcyj:

$$x_0 = f(t), \quad y_0 = \varphi(t), \quad z_0 = \psi(t); \qquad \omega_x = \alpha(t), \quad \omega_y = \beta(t), \quad \omega_z = \gamma(t),$$

to (17) jest układem równań różniczkowych, w którym funkcjami niewiadomymi są funkcje $x=F(t)$, $y=\Phi(t)$ i $z=\Psi(t)$, określające ruch punktu A. Z równań (17) możemy wyznaczyć funkcje F, Φ, Ψ, jeżeli znamy położenie początkowe punktu A, prędkość chwilową kątową $\overline{\omega}$ i ruch punktu O.

A więc: *ruch ciała sztywnego jest wyznaczony przez następujące dane*:

a) *położenie początkowe ciała*,

b) *ruch jednego jego punktu*,

c) *prędkość chwilową kątową obrotu $\overline{\omega}$ w każdej chwili*.

§ 8. Toczenie i ślizganie. Niech krzywa płaska C, poruszająca się w swej płaszczyźnie Π, będzie styczną w każdej chwili do pewnej krzywej nieruchomej C', leżącej w Π.

Jeżeli ruch chwilowy krzywej C jest obrotem chwilowym około punktu styczności O, to jej ruch chwilowy nazywamy *toczeniem* się krzywej C po C'.

Wynika stąd, że przy toczeniu punkt styczności ma prędkość zero. Punkt styczności jest środkiem obrotu chwilowego.

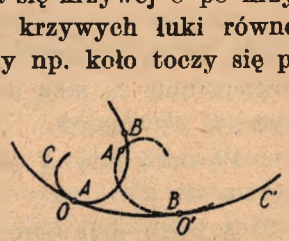
Jeżeli ruch chwilowy krzywej C jest ruchem postępowym, to jej ruch chwilowy nazywamy *ślizganiem* się krzywej C po C'.

Prędkość ruchu postępowego przy ślizganiu równa jest prędkości punktu styczności.

W przypadku ogólnym ruch chwilowy krzywej C możemy uważać za złożenie dwóch ruchów: jednego obrotowego około punktu styczności O, drugiego zaś postępowego z prędkością punktu styczności.

A więc: *ruch chwilowy jest złożeniem toczenia i ślizgania.*

Można udowodnić, że podczas toczenia się krzywej C po krzywej C' punkty styczności tworzą na obu krzywych łuki równej długości (łuki OO' i AB na rysunku). Gdy np. koło toczy się po prostej l, to odległość punktów styczności po całkowitym obrocie równa się obwodowi koła.



Toczenie i ślizganie powierzchni po powierzchni określamy analogicznie.

Niech mianowicie powierzchnia Σ porusza się w ten sposób, że stale jest styczną do pewnej powierzchni nieruchomej Σ'.

Jeżeli punkt styczności ma prędkość zero, powiadamy, że ruch chwilowy powierzchni Σ jest *toczeniem* po powierzchni Σ'.

Przy toczeniu ruch chwilowy jest obrotem około osi, przechodzącej przez punkt styczności. W szczególności, jeżeli powierzchnie Σ i Σ' są powierzchniami walcowymi lub stożkowymi, stykającymi się wzdłuż tworzących, wówczas przy toczeniu osią obrotu chwilowego jest tworząca, wzdłuż której powierzchnie się stykają.

Jeżeli ruch chwilowy powierzchni Σ jest ruchem postępowym, powiadamy, że ruch chwilowy powierzchni Σ jest *ślizganiem* po powierzchni Σ'.

Linia środków chwilowych. Niech figura K porusza się po płaszczyźnie Π. Weźmy pod uwagę w każdej chwili na płaszczyźnie Π środek obrotu chwilowego. Środki te utworzą na Π pewną linię C', zwaną *linią stałą środków chwilowych*.

Weźmy teraz pod uwagę na figurze K w każdej chwili punkt, który w danej chwili schodzi się ze środkiem obrotu chwilowego. Punkty te utworzą na figurze K pewną linię C, poruszającą się wraz z figurą. Linię tę nazywamy *linią ruchomą środków chwilowych*.

Na ogół linie środków chwilowych: ruchoma C i stała C' są styczne do siebie w każdej chwili i w chwili tej punkt ich styczności jest środkiem obrotu chwilowego. Linia ruchoma porusza się zatem wraz z figurą K w taki sposób, że jej ruch chwilowy jest w każdej chwili obrotem około jej punktu styczności z linią stałą C'.

A więc: *w ruchu płaskim linia ruchoma środków chwilowych toczy się po linii stałej środków chwilowych.*

Stożek osi chwilowych. Niech ciało K obraca się około punktu O. Weźmy pod uwagę w przestrzeni oś obrotu chwilowego w każdej chwili. Osie te utworzą pewną powierzchnię stożkową Σ' o wierzchołku O; nazywamy ją *stożkiem stałym osi chwilowych*.

Weźmy następnie pod uwagę w ciele K w każdej chwili tę prostą, która w danej chwili schodzi się z osią obrotu chwilowego. Powierzchnię Σ, jaką utworzą te proste, nazywamy *stożkiem ruchomym osi chwilowych*.

Powierzchnia Σ porusza się wraz z ciałem i jest na ogół styczna do Σ'.

A więc: *przy obrocie ciała około punktu powierzchnia ruchoma osi chwilowych toczy się po powierzchni stałej osi chwilowych.*

Powierzchnia osi środkowych. Niech ciało K wykonywa w przestrzeni ruch dowolny. Weźmy pod uwagę w przestrzeni oś skrętu, t. j. oś środkową w każdej chwili. Osie te tworzą pewną powierzchnię Σ', zwaną *powierzchnią stałą osi środkowych*.

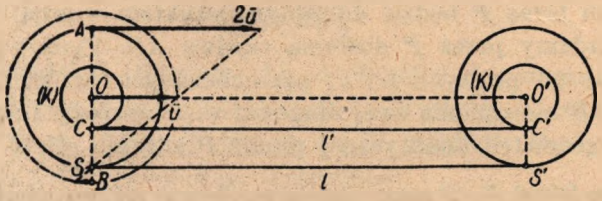
Weźmy także pod uwagę w ciele K w każdej chwili prostą, która w danej chwili schodzi się z osią środkową. Powierzchnię Σ, utworzoną przez te osie w ciele, nazywamy *powierzchnią ruchomą osi środkowych*.

Na ogół powierzchnia ruchoma osi środkowych styka się z powierzchnią stałą w każdej chwili wzdłuż osi środkowej. Ruch chwilowy powierzchni ruchomej jest skrętem około osi styczności.

Przykład 1. Koło K o promieniu r toczy się po prostej l, przyczem środek koła O porusza się ruchem jednostajnym z prędkością $\bar{u}$. Ponieważ punkt styczności S jest środkiem obrotu chwilowego, więc oznaczając przez ω prędkość chwilową kątową, mamy $u = r\omega$ (gdzie $u = |\bar{u}|$) czyli

$$\omega = u/r. \tag{1}$$

Punkt A leżący na średnicy SO ma prędkość równą co do wielkości $2r\omega = 2u$; punkt A ma więc prędkość $2\bar{u}$.



Koła wagonu kolejowego mają brzegi wystające od strony wewnętrznej szyn, by zapobiec wykolejeniu się wagonu. Najniższy więc punkt koła wagonu kolejowego (na rysunku punkt B) znajduje się poniżej punktu styczności S. Jego prędkość chwilowa ma zatem zwrot przeciwny niż prędkość pociągu (t. j. środka koła O) i wynosi $SB \cdot \omega = u \cdot SB/r$.

Jeżeli np. pociąg porusza się z prędkością 50 km/godz. to istnieją na kołach pociągu w każdej chwili punkty mające prędkości chwilowe 100 km/godz (na rysunku punkt A), a nawet takie, które biegną w przeciwnym kierunku niż pociąg (np. punkt B).

Weźmy pod uwagę na kole K koło K' o środku O i promieniu $OC = r'$. Koło pozostaje stale stycznym do prostej $l' \parallel l$. Ponieważ punkt C nie jest środkiem obrotu chwilowego, więc koło to nie toczy się po l'. Ruch koła K' jest złożeniem toczenia i ślizgania po prostej l'. Toczenie odbywa się z prędkością kątową ω, zaś ślizganie ma prędkość punktu C, t. j. $SC \cdot \omega$.

Ponieważ całe koło K o promieniu r toczy się po l, więc odcinek SS', utworzony przez punkty styczności przy pełnym obrocie koła, równa się obwodowi koła, t. j. $2\pi r$. Odpowiedni odcinek CC' dla koła K wynosi również $2\pi r$. Nie jest on równy obwodowi $2\pi r'$ koła K', ponieważ ruch koła K po prostej l' nie jest toczeniem, lecz złożeniem toczenia i ślizgania wzdłuż tej prostej.

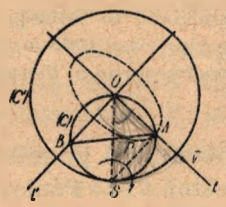
Przykład 2. Koło (C) o promieniu r toczy się po kole stałym (C') o promieniu $2r$. Koło (C) znajduje się wewnątrz koła (C') (p. str. 342, rys. 1). Wyznaczyć tory punktów koła (C).

Niech A będzie dowolnym punktem na obwodzie koła (C). Ponieważ punkt styczności S obu kół jest środkiem obrotu chwilowego, więc prędkość $\bar{v}$ punktu A jest prostopadła do SA. Kierunek prędkości punktu A przechodzi zatem przez punkt O, leżący na kole (C) i na średnicy przechodzącej przez S. Ponieważ $SO=2r$, więc O jest środkiem koła (C'). Prędkość punktu A jest zatem stale skierowana ku punktowi nieruchomemu O. Punkt A porusza się więc po prostej OA. Punkty położone na okręgu koła (C) poruszają się zatem po średnicach koła (C').

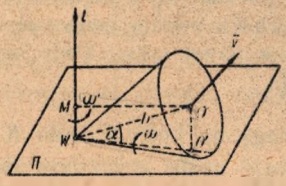
Niech teraz P będzie dowolnym punktem wewnątrz koła (C). Przeprowadźmy przez P dowolną cięciwę AB. Punkty A i B poruszają się po prostych l i l', przechodzących przez O. Ponieważ odcinek AB nie zmienia swej długości, więc na mocy znanego twierdzenia z geometrii analitycznej punkt P zakreśli elipsę.

Przykład 3. Stożek obrotowy toczy się po płaszczyźnie Π (rys. 2). Ruch chwilowy stożka jest więc obrotem chwilowym około tworzącej, wzdłuż której styka się on z płaszczyzną Π.

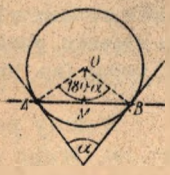
Wierzchołek W stożka leży zawsze na osi obrotu chwilowego, ma zatem stałe prędkość zero, czyli pozostaje w spoczynku.



1.



2.



3.

Oznaczmy przez α kąt między tworzącymi a wysokością h stożka, przez O środek podstawy stożka, a przez O' rzut O na płaszczyznę Π. Ponieważ $O'O=h\sin\alpha=\text{const.}$, więc punkt O porusza się po płaszczyźnie równoległej do Π.

Odległość punktu O od prostej l, prostopadłej do Π w punkcie W, wynosi $MO=WO'=h\cos\alpha=\text{const.}$ Wynika stąd, że punkt O krąży po kole o środku M, w płaszczyźnie prostopadłej do l, a więc obraca się około prostej l.

Niech ω będzie prędkością kątową toczenia się stożka, a ω' prędkością kątową środka O przy obrocie około osi l. Niech wreszcie $\bar{v}$ będzie prędkością punktu O. Mamy zatem $|\bar{v}|=O'O\cdot\omega$ i $|\bar{v}|=MO\cdot\omega'$, skąd $\omega'=\omega\cdot O'O/MO=\omega\cdot O'O/WO'$, a więc

$$\omega'=\omega\operatorname{tg}\alpha. \tag{2}$$

Przykład 4. Kula toczy się w rynnie utworzonej przez dwie płaszczyzny (rys. 3).

Ponieważ punkty styczności A i B mają prędkość zero, więc osią obrotu chwilowego jest prosta AB.

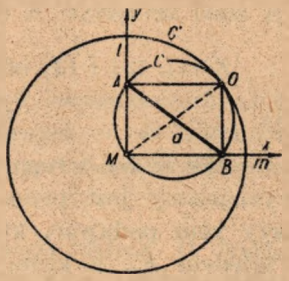
Oznaczmy przez r promień kuli, przez α kąt między płaszczyznami rynny, przez ω prędkość kątową toczenia, wreszcie przez $\bar{v}$ prędkość środka kuli O.

Odległość środka kuli od osi obrotu jest $OM = r\sin\frac{\alpha}{2}$. Kładąc $v = |\bar{v}|$, otrzymujemy zatem

$$v = r\omega\sin\frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

Przykład 5. Odcinek AB o długości d porusza się w ten sposób, że końce jego pozostają stale na prostych l i m, prostopadłych do siebie i przecinających się w punkcie M.

Środek obrotu chwilowego O otrzymamy, prowadząc prostopadłe do l i m w punktach A i B. Ponieważ $MO = AB = d$, więc środki obrotu chwilowego tworzą koło C' o środku M i promieniu d. Koło C' jest więc linią stałą środków chwilowych. Ponieważ w każdym położeniu odcinka AB kąt AOB równa się $\pi/2$, więc linia ruchoma środków chwilowych będzie kołem C o średnicy AB (por. przykład 2).



§ 9. Składanie ruchów ciała. Dwa obroty równoczesne. Niech ruch chwilowy ciała K względem ciała K_1 (t. j. względem układu współrzędnych, związanego sztywnie z ciałem K_1) będzie obrotem około osi l_1 z prędkością kątową $\bar{\omega}_1$, zaś ruch chwilowy ciała K_1 względem ciała K' obrotem około osi l_2 z prędkością kątową $\bar{\omega}_2$. Mówimy wówczas, że ciało K wykonywa względem ciała K' dwa obroty chwilowe równoczesne około osi l_1 i l_2 z prędkościami kątowymi $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$.

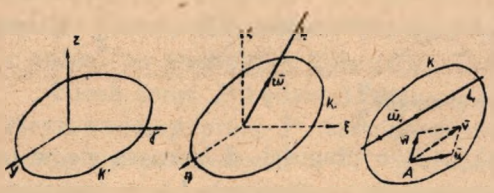
Ruch chwilowy ciała K względem ciała K' nazywamy *ruchem wypadkowym* tych dwóch obrotów chwilowych; mówimy także, że jest on *równoważny układowi obu obrotów*.

Przyjmijmy w ciele K_1 układ współrzędnych (ξ, η, ζ), zaś w ciele K' układ współrzędnych (x, y, z) (rys. str. 344). Niech A będzie dowolnym punktem ciała K. Prędkość $\bar{v}$ punktu A względem układu (x, y, z) jest sumą jego prędkości względnej $\bar{w}$ względem układu (ξ, η, ζ) oraz prędkości unoszenia $\bar{u}$:

(1) $$\bar{v} = \bar{w} + \bar{u}.$$

Ponieważ ruch chwilowy ciała K względem układu (ξ, η, ζ) jest obrotem około osi l_1 z prędkością kątową $\bar{\omega}_1$, więc (str. 325)

(2) $$\bar{w} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_1.$$



Prędkość unoszenia $\bar{u}$ punktu A otrzymamy, zakładając, że punkt A jest związany sztywnie z układem (ξ, η, ζ). Układ (ξ, η, ζ) obraca się około osi l_2 z prędkością kątową $\bar{\omega}_2$, więc

(3) $$\bar{u} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_2.$$

Z (1), (2) i (3) otrzymujemy

(4) $$\bar{v} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_1 + \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_2.$$

Jak widać z tego wzoru, ruch chwilowy ciała K względem K' wyznaczony jest przez prędkości kątowe $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$. Nie potrzeba przy tym podawać, która z nich jest prędkością obrotu ciała K względem K_1, a która prędkością obrotu ciała K_1 względem K'.

Przypuśćmy, że osie l_1 i l_2 przecinają się w punkcie O. Weźmy pod uwagę wektor $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ o początku O. Mamy (str. 17)

(5) $$\mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_1 + \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}_2,$$

skąd na mocy (4)

(6) $$\bar{v} = \mathrm{Mom}_A\, \bar{\omega}.$$

Ruch chwilowy ciała K względem K' jest zatem obrotem chwilowym około osi, przechodzącej przez punkt O, z prędkością kątową równą sumie prędkości kątowych $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$ obrotów składowych.

A więc: *układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych około osi, przecinających się w punkcie O, jest równoważny obrotowi około osi, przechodzącej przez O, z prędkością kątową równą sumie prędkości kątowych obrotów składowych.*

Przypuśćmy teraz, że osie l_1 i l_2 są równoległe, przyczem $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \neq 0$. Wektory $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$ mają wówczas wektor wypadkowy $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$, dla którego zachodzą równości (5) i (6).

A więc: *układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych około osi równoległych, o prędkościach kątowych mających sumę różną od zera, jest równoważny obrotowi około osi równoległej do poprzednich; położenie tej osi i prędkość kątowa obrotu naokoło niej wyznaczona jest przez wypadkową prędkości kątowych obrotów składowych.*

Przypuśćmy wreszcie, że osie l_1 i l_2 są równoległe, ale $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = 0$, t. zn. że zwroty obrotów są przeciwne, a wartości bezwzględne prędkości kątowych są równe. W tym przypadku wektory $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$ tworzą parę. Ponieważ moment pary jest wektorem stałym, więc na mocy (4) wszystkie punkty ciała K mają jedną i tę samą prędkość, równą momentowi pary $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$. Ruch chwilowy ciała K względem ciała K' jest zatem ruchem postępowym.

A więc: *układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych około osi równoległych o prędkościach kątowych równych co do wielkości, lecz mających zwroty przeciwne, jest równoważny ruchowi chwilowemu postępowemu.*

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego. Niech O będzie dowolnym punktem ciała K. Układ wektorów $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ jest na mocy twierdzenia o redukcji (str. 24) równoważny układowi, złożonemu z wektora $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ o początku O i pary $\bar{\omega}', -\bar{\omega}'$ o momencie równym momentowi układu $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ względem O. Dla każdego punktu A ciała K mamy więc $\mathrm{Mom}_A \bar{\omega}_1 + \mathrm{Mom}_A \bar{\omega}_2 = \mathrm{Mom}_A \bar{\omega} + \bar{u}$, gdzie $\bar{u}$ jest momentem pary $\bar{\omega}', -\bar{\omega}'$. Na mocy (4) jest tedy

$$\bar{v} = \mathrm{Mom}_A \bar{\omega} + \bar{u}. \tag{7}$$

Zatem ruch chwilowy ciała K względem K' jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości $\bar{u}$ punktu O i obrotowego o prędkości kątowej $\bar{\omega}$ około osi przechodzącej przez O.

A więc: *układ dwóch obrotów chwilowych równoczesnych równoważny jest złożeniu ruchu obrotowego około osi przechodzącej przez dowolny punkt O ciała i ruchu postępowego o prędkości punktu O; wektor prędkości kątowej ruchu wypadkowego równy jest sumie wektorów prędkości kątowych obrotów składowych.*

Składanie kilku obrotów równoczesnych. Otrzymane wyniki można uogólnić na kilka obrotów równoczesnych. Ruch wypadkowy określamy podobnie jak dla dwóch obrotów.

Powiemy więc np., że ciało K wykonywa obroty równoczesne około osi l_1, l_2 i l_3 z prędkościami $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ i $\bar{\omega}_3$ względem pewnego ciała K', jeżeli ciało K obraca się około osi l_1 z prędkością kątową $\bar{\omega}_1$ względem pewnego ciała K_1, to zaś ciało obraca się około osi l_2 z prędkością kątową $\bar{\omega}_2$ względem pewnego ciała K_2, a to ostatnie obraca się około osi l_3 z prędkością kątową $\bar{\omega}_3$ względem ciała K'.

Podobnie ruch chwilowy ciała K względem K' nazywamy ruchem wypadkowym obrotów chwilowych około osi l_1, l_2, l_3 z prędkościami kątowymi $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$.

Niech ciało K wykonywa kilka obrotów równoczesnych z prędkościami kątowymi $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots$. Podobnie jak w przypadku dwóch obrotów, dowodzi się, że prędkość $\bar{v}$ dowolnego punktu A ciała K względem ciała stałego K' wynosi

$$\bar{v} = \mathrm{Mom}_A \bar{\omega}_1 + \mathrm{Mom}_A \bar{\omega}_2 + \ldots \tag{8}$$

Prędkość $\bar{v}$ punktu A jest momentem ogólnym układu wektorów prędkości kątowych $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots$:

$$\bar{v} = \mathrm{Mom}_A(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots). \tag{9}$$

Jeżeli więc dla dwu układów obrotów równoczesnych układy prędkości kątowych

$$\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots \quad \text{i} \quad \bar{\omega}'_1, \bar{\omega}'_2, \ldots$$

są równoważne (str. 22), to ruchy wypadkowe tych obrotów są te same.

Pozwala nam to interpretować twierdzenia rozdziału I o układach wektorów jako twierdzenia o układach obrotów równoczesnych.

Twierdzeniu o redukcji układów wektorów (str. 26) możemy więc nadać brzmienie następujące:

Układ kilku obrotów równoczesnych o prędkościach kątowych $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots$ *jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości dowolnego punktu O ciała i ruchu obrotowego o prędkości kątowej* $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots$ *około osi przechodzącej przez O.*

Twierdzenia 1-4, podane na str. 26, przybiorą w tej interpretacji postać:

1. *Układ obrotów równoczesnych z prędkościami kątowymi* $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots$ *około osi przechodzących przez jeden punkt O jest równoważny jednemu obrotowi z prędkością kątową* $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots$ *około osi przechodzącej przez O.*

2. *Układ obrotów równoczesnych z prędkościami* $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots$ *około osi równoległych (około osi leżących w jednej płaszczyźnie Π) jest równoważny ruchowi obrotowemu około osi równoległej (około osi leżącej w płaszczyźnie Π), gdy* $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots \neq 0$, *zaś ruchowi postępowemu, gdy* $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots = 0$.

W myśl określenia parametru układu wektorów (str. 21), parametr układu prędkości kątowych $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots$ wyraża się iloczynem skalarowym $K = (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \ldots) \cdot \mathrm{Mom}_A(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots)$, gdzie A jest dowolnym punktem ciała. Oznaczając przez $\bar{\omega}$ sumę prędkości kątowych, mamy na mocy (9)

$$K = \bar{\omega} \cdot \bar{v}, \tag{10}$$

gdzie $\bar{v}$ jest prędkością wypadkową punktu A.

Z twierdzenia 4, str. 20, wynika, że iloczyn skalarowy $\bar{\omega} \cdot \bar{v}$ ma wartość stałą. W szczególności dla $K = 0$ układ obrotów równoczesnych jest równoważny jednemu obrotowi lub ruchowi postępowemu (por. tabelkę na str. 28).

Jak wiemy, każdy ruch ciała jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości $\bar{u}$ dowolnego punktu O ciała i ruchu obrotowego o prędkości kątowej $\bar{\omega}$ (str. 334). Ruch chwilowy możemy więc przedstawić jako złożenie obrotu $\bar{\omega}$ z parą $\bar{\omega}', -\bar{\omega}'$ o momencie równym $\bar{u}$.

Przypuśćmy, że ruch ciała przedstawiliśmy w inny sposób jako złożenie ruchu obrotowego $\bar{\omega}_1$ i pary obrotów $\bar{\omega}_1', -\bar{\omega}_1'$. Ponieważ układy $\bar{\omega}, \bar{\omega}', -\bar{\omega}'$ i $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_1', -\bar{\omega}_1'$ są równoważne, gdyż przedstawiają ten sam rozkład prędkości w ciele, więc sumy ich są równe, czyli $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1$. Otrzymujemy więc i na tej drodze twierdzenie (udowodnione na str. 334), według którego przy wszelkich przedstawieniach ruchu chwilowego osie obrotu chwilowego są równoległe i prędkości chwilowe kątowe są równe.

Zauważmy przytem, że parametr układu $\bar{\omega}, \bar{\omega}', -\bar{\omega}'$ wynosi $K = \bar{\omega} \cdot \mathrm{Mom}_O(\bar{\omega}', -\bar{\omega}') = \bar{\omega} \cdot \bar{u}$. Jeżeli więc $\bar{\omega} \cdot \bar{u} = 0$, to ruch chwilowy jest obrotem chwilowym.

W szczególności, jeżeli $\bar{\omega} \perp \bar{u}$, a więc *jeżeli oś chwilowego obrotu jest prostopadła do prędkości ruchu postępowego, to ruch chwilowy jest równoważny obrotowi chwilowemu.*

Na str. 27 udowodniliśmy, że każdy układ wektorów jest równoważny skrętnikowi. Z określenia skrętnika wynika, że ruch chwilowy ciała sztywnego jest skrętem. Otrzymaliśmy zatem nowy dowód twierdzenia podanego na str. 336.

Ruch względny ciała. Niech dane będą ruchy chwilowe dwu ciał K_1 i K_2 względem stałego układu współrzędnych (x, y, z). Wyznaczymy ruch chwilowy ciała K_2 względem K_1, t. j. względem układu ruchomego współrzędnych (ξ, η, ζ), związanego sztywnie z ciałem K_1.

Oznaczmy przez $\bar{\omega}_1$ wektor prędkości chwilowej kątowej ciała K_1. Ruch zaś postępowy przedstawmy jako złożenie pary obrotów o prędkościach kątowych $\bar{\omega}_1', -\bar{\omega}_1'$. Podobnie przedstawimy ruch chwilowy ciała K_2, jako złożenie obrotu $\bar{\omega}_2$ z parą obrotów $\bar{\omega}_2', -\bar{\omega}_2'$.

Prędkości bezwzględna $\bar{v}_b$ i unoszenia $\bar{v}_u$ dowolnego punktu A ciała K_2 wynoszą:

$$\bar{v}_b = \mathrm{Mom}_A(\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_2', -\bar{\omega}_2'), \qquad \bar{v}_u = \mathrm{Mom}_A(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_1', -\bar{\omega}_1').$$

Ponieważ $\bar{v}_w = \bar{v}_b - \bar{v}_u$ ((I), str. 58), więc

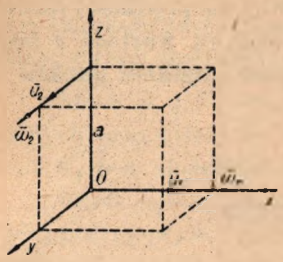
$$\bar{v}_w = \mathrm{Mom}_A(\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_2', -\bar{\omega}_2', -\bar{\omega}_1, -\bar{\omega}_1', \bar{\omega}_1'). \tag{11}$$

Ruch chwilowy ciała K_2 względem ciała K_1 jest złożeniem sześciu obrotów równoczesnych. Na mocy twierdzenia o redukcji (str. 24) odnośny układ wektorów jest równoważny jednemu wektorowi $\bar{\omega}$ i parze $\bar{\omega}', -\bar{\omega}'$. Wektor $\bar{\omega}$ jest prędkością chwilową kątową ruchu względnego, zaś moment pary $\bar{\omega}', -\bar{\omega}'$ równy jest prędkości ruchu chwilowego postępowego.

A więc: *ruch chwilowy względny ciała K_2 względem ciała K_1 otrzymamy, dodając do układu prędkości kątowych, określających ruch chwilowy ciała K_2, układ prędkości kątowych ze zwrotami przeciwnymi, określających ruch chwilowy ciała K_1.*

Twierdzenie to wysławiamy zwykle krócej, mówiąc, że ruch ciała K_2 względem ciała K_1 otrzymujemy, składając ruch chwilowy ciała K_2 z ruchem chwilowym ciała K_1 o zwrocie przeciwnym.

Przykład 1. Sześcian wykonywa dwa równoczesne skręty około dwóch krawędzi wichrowatych. Niechaj $\bar{u}_1, \bar{\omega}_1$ i $\bar{u}_2, \bar{\omega}_2$ oznaczają prędkości chwilowe kątowe ruchu postępowego i obrotowego tych skrętów. Zajmiemy się wyznaczeniem skrętu wypadkowego.



Obierzmy układ współrzędnych w ten sposób, by jedna z krawędzi (około których odbywają się skręty) leżała na osi x, druga zaś na płaszczyźnie yz i była do osi y równoległa.

Ruchy postępowe zastąpić możemy parami obrotów $\bar{\omega}_1', -\bar{\omega}_1'$ i $\bar{\omega}_2', -\bar{\omega}_2'$ o momentach $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$. Ruch chwilowy wypadkowy jest zatem równoważny złożeniu sześciu obrotów równoczesnych:

$$\bar{\omega}_1', -\bar{\omega}_1', \bar{\omega}_1, \qquad \bar{\omega}_2', -\bar{\omega}_2', \bar{\omega}_2. \tag{12}$$

Suma układu (12) równa jest $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$, zatem:

$$\omega_x = \omega_1, \qquad \omega_y = \omega_2, \qquad \omega_z = 0, \tag{13}$$

gdzie ω_1 i ω_2 oznaczają odpowiednio rzuty wektorów $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$ na oś x i y.

Aby obliczyć moment obrotów (12) względem początku O układu, zauważmy, że momenty par $\bar{\omega}_1', -\bar{\omega}_1'$ i $\bar{\omega}_2', -\bar{\omega}_2'$ wynoszą odpowiednio $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$. Moment $\bar{\omega}_1$ jest zerem, gdyż $\bar{\omega}_1$ leży na osi x. Moment $\bar{\omega}_2$ jest prostopadły do płaszczyzny yz i rzut jego na oś x wynosi $a\omega_2$, gdzie a jest długością krawędzi sześcianu. Oznaczając więc przez $\bar{u}$ moment obrotów (12) względem O, otrzymamy:

$$u_x = u_1 + a\omega_2, \qquad u_y = u_2, \qquad u_z = 0, \tag{14}$$

gdzie u_1 oznacza rzut $\bar{u}_1$ na oś x, zaś u_2 rzut $\bar{u}_2$ na oś y. Równania (14) przedstawiają oczywiście rzuty prędkości początku układu.

Ruch chwilowy jest więc złożeniem ruchu postępowego z prędkością $\bar{u}$ i ruchu obrotowego z prędkością $\bar{\omega}$ około osi przechodzącej przez O.

Prędkość dowolnego punktu $A(x,y,z)$ wynosi według wzoru (1), str. 335, $\bar{v} = \bar{u} + \overline{OA} \times \bar{\omega}$, skąd na mocy (13) i (14)

$$v_x = u_1 + a\omega_2 - z\omega_2, \qquad v_y = u_2 + z\omega_1, \qquad v_z = x\omega_2 - y\omega_1. \tag{15}$$

Aby wyznaczyć oś środkową skrętu, musimy znaleźć punkt A taki, by jego prędkość miała kierunek wektora $\bar{\omega}$, t. zn. by $\bar{v} = \lambda\bar{\omega}$ przy odpowiedniej wartości liczbowej spółczynnika λ. Muszą więc być spełnione równania $v_x = \lambda\omega_1$, $v_y = \lambda\omega_2$ i $v_z = 0$ czyli $v_x/\omega_1 = v_y/\omega_2$ i $v_z = 0$. Wobec (15) dostajemy stąd następujące równania osi środkowej:

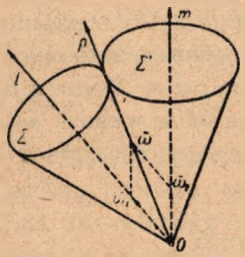
$$(u_1 + a\omega_2 - z\omega_2)/\omega_1 = (u_2 + z\omega_1)/\omega_2, \qquad x\omega_2 - y\omega_1 = 0. \tag{16}$$

Prędkość ruchu postępowego skrętu równa się prędkości dowolnego punktu osi środkowej, np. punktu $A(0,0,z)$; wartość z obliczamy z pierwszego z równań (16), a następnie prędkość punktu A ze wzorów (15). Dostaniemy:

$$v_x = k\omega_1, \qquad v_y = k\omega_2, \qquad v_z = 0,$$

gdzie $k = [(u_1 + a\omega_2)\omega_1 + u_2\omega_2]/(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \bar{u}\cdot\bar{\omega}/|\bar{\omega}|^2$.

Przykład 2. Precesja regularna. Jeżeli ciało porusza się w ten sposób, że ruch chwilowy jest w każdej chwili złożeniem dwóch obrotów równoczesnych około dwóch przecinających się osi, z których pierwsza l jest nieruchoma w przestrzeni, druga zaś m ma stałe położenie w ciele, przyczem prędkości kątowe $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$ tych obrotów są stałe co do wielkości, to ruch ciała nazywamy *precesją regularną*.



Ponieważ z założenia osie l i m się przecinają, więc ruch chwilowy ciała jest obrotem z prędkością kątową $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ około osi p przechodzącej przez punkt przecięcia osi l i m. Zauważmy, że ruch chwilowy osi m jest obrotem chwilowym około osi l z prędkością kątową $\bar{\omega}_1$ (obrót bowiem osi m około siebie samej nie wchodzi w rachubę). Zatem oś m obraca się około osi l ze stałą prędkością kątową ω_1. Punkt przecięcia O obu osi jest więc nieruchomy i kąt między osiami l i m jest stały. Wynika stąd, że wektor $\bar{\omega}$, a więc i oś p obrotu chwilowego, tworzy stałe kąty z osiami l i m.

Oś p zakreśla w przestrzeni stożek obrotowy Σ. Ślad osi p w ciele jest również stożkiem obrotowym Σ'.

A więc: *stożki osi obrotów chwilowych, stały i ruchomy, są stożkami obrotowymi o osiach l i m.*

Oś ziemi nie zachowuje stałego kierunku w przestrzeni, lecz opisuje stożek obrotowy około prostej prostopadłej do ekliptyki i przechodzącej przez środek ziemi. Czas obrotu osi ziemskiej trwa około 26.000 lat, zaś kąt między osią ziemską a osią prostopadłą do ekliptyki wynosi $23^1/_2{}^\circ$.

Przyjmijmy środek ziemi za początek układu współrzędnych, poruszającego się ruchem postępowym, i nadajmy osi z kierunek prostopadły do ekliptyki. Osie x i y będą wówczas leżały w ekliptyce. Względem tego układu współrzędnych ziemia wykonywa ruch precesyjny regularny. Osią stałą w przestrzeni jest oś z, osią stałą w ciele jest oś ziemska.

Przykład 3. Dwa koła K_1 i K_2, leżące w płaszczyźnie Π, obracają się około swoich środków z prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2. Wyznaczyć ruch chwilowy względny koła K_2 względem koła K_1 (rys. 1).

Niech $\bar{\omega}_1$ i $\bar{\omega}_2$ oznaczają wektory prędkości kątowych, prostopadłych oczywiście do Π (rys. 2). Ruch chwilowy koła K_2 względem K_1 jest złożeniem dwóch obrotów równoczesnych $\bar{\omega}_2$ i $-\bar{\omega}_1$.

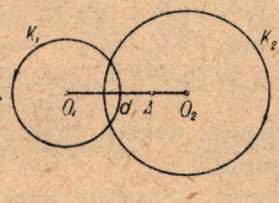
Jeżeli $\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1 = 0$, to ruch chwilowy względny koła K_2 jest ruchem postępowym z prędkością $\bar{a}$, równą momentowi pary $(\bar{\omega}_2, -\bar{\omega}_1)$. Oznaczając przez d odległość środków, mamy $|\bar{a}| = d\omega_1 = d\omega_2$. Prędkość a jest prostopadła do prostej O_1O_2, łączącej środki kół K_1 i K_2.

Jeżeli zaś $\omega_2 - \omega_1 \neq 0$, to wektory $\bar{\omega}_2$ i $-\bar{\omega}_1$ mają wypadkową $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1$ o początku A, który leży na prostej O_1O_2 w punkcie, względem którego moment układu $\bar{\omega}_2$, $-\bar{\omega}_1$ jest zerem. Ruch chwilowy względny koła K_2 jest więc obrotem chwilowym około punktu A z prędkością kątową $\bar{\omega}$.

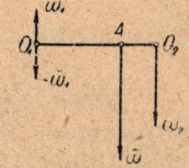
Jeśli $\bar{\omega}_1$ i ω_2 mają zwroty przeciwne (jak na rys. 2), to oznaczając przez ω_1, ω_2 i ω wartości bezwzględne prędkości kątowych, otrzymamy:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

$$O_1A = O_1O_2 \cdot \omega_2/(\omega_1 + \omega_2).$$



1.



2.

§10. Przedstawienie analityczne ruchu ciała sztywnego.

Prędkość chwilowa kątowa. Przypuśćmy, że badamy ruch ciała sztywnego względem układu współrzędnych (x, y, z). Obierzmy układ współrzędnych (ξ, η, ζ) o początku M, związany sztywnie z ciałem. Położenie ciała względem układu (x, y, z) będzie wyznaczone, jeżeli podamy położenie układu (ξ, η, ζ), t. zn. współrzędne x_0, y_0, z_0 punktu M i kąty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ i $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, jakie osie ξ, η, ζ tworzą z osiami x, y, z.

Niech A będzie dowolnym punktem ciała. Oznaczmy jego współrzędne względem układu ruchomego przez ξ, η, ζ, zaś względem stałego przez x, y, z.

Znając współrzędne ξ, η, ζ i położenie układu ruchomego, możemy wyznaczyć współrzędne x, y, z przy pomocy wzorów (11), str. 54. Jeżeli $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$ i $\cos\gamma_i$ oznaczyć przez a_i, b_i i c_i, (gdzie $i = 1, 2, 3$), to wzory te przyjmą postać:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, \qquad y = y_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, \\ z &= z_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta. \end{aligned}$$

Niech $\bar{v}$ będzie prędkością punktu A względem układu (x,y,z). Ponieważ z założenia układ (ξ,η,ζ) jest z ciałem związany sztywnie, więc współrzędne ξ,η,ζ punktu A są stałe (niezależne od czasu). Różniczkując (1) (i pamiętając o tym, że $a_1,a_2,\ldots,c_3$ są funkcjami czasu t), otrzymamy:

$$(2)\qquad \begin{aligned} v_x=\dot{x}=\dot{x}_0+\dot{a}_1\xi+\dot{a}_2\eta+\dot{a}_3\zeta, \qquad v_y=\dot{y}=\dot{y}_0+\dot{b}_1\xi+\dot{b}_2\eta+\dot{b}_3\zeta,\\ v_z=\dot{z}=\dot{z}_0+\dot{c}_1\xi+\dot{c}_2\eta+\dot{c}_3\zeta. \end{aligned}$$

Z geometrii analitycznej wiadomo, że:

$$(3)\qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2=1, \qquad b_1^2+b_2^2+b_3^2=1, \qquad c_1^2+c_2^2+c_3^2=1,$$

$$(4)\qquad a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0, \qquad a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=0, \qquad a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0.$$

Różniczkując równania (3) i (4), otrzymamy:

$$(5)\qquad a_1\dot{a}_1+a_2\dot{a}_2+a_3\dot{a}_3=0, \qquad b_1\dot{b}_1+b_2\dot{b}_2+b_3\dot{b}_3=0, \qquad c_1\dot{c}_1+c_2\dot{c}_2+c_3\dot{c}_3=0,$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_1\dot{a}_2+b_1\dot{b}_2+c_1\dot{c}_2=-\dot{a}_1a_2-\dot{b}_1b_2-\dot{c}_1c_2,\\ a_1\dot{a}_3+b_1\dot{b}_3+c_1\dot{c}_3=-\dot{a}_1a_3-\dot{b}_1b_3-\dot{c}_1c_3,\\ a_2\dot{a}_3+b_2\dot{b}_3+c_2\dot{c}_3=-\dot{a}_2a_3-\dot{b}_2b_3-\dot{c}_2c_3. \end{aligned}$$

Niech $\bar{\omega}$ oznacza wektor, którego rzuty na osie układu (ξ,η,ζ) wyrażają się wzorami:

$$(7)\qquad \omega_\xi=a_2\dot{a}_3+b_2\dot{b}_3+c_2\dot{c}_3, \qquad \omega_\eta=a_3\dot{a}_1+b_3\dot{b}_1+c_3\dot{c}_1, \qquad \omega_\zeta=a_1\dot{a}_2+b_1\dot{b}_2+c_1\dot{c}_2.$$

Utwórzmy rzuty v_ξ,v_η,v_ζ prędkości $\bar{v}$ na osie ξ,η,ζ; dostaniemy $v_\xi=a_1v_x+b_1v_y+c_1v_z$, skąd przez podstawienie wartości v_x,v_y,v_z ze wzorów (2):

$$\begin{aligned} v_\xi=(a_1\dot{x}_0+b_1\dot{y}_0+c_1\dot{z}_0)+(a_1\dot{a}_1+b_1\dot{b}_1+c_1\dot{c}_1)\xi+\\ +(a_1\dot{a}_2+b_1\dot{b}_2+c_1\dot{c}_2)\eta+(a_1\dot{a}_3+b_1\dot{b}_3+c_1\dot{c}_3)\zeta. \end{aligned}$$

Współczynnik przy ξ jest równy zeru na mocy (5). Współczynniki przy η i ζ są na mocy (6) i (7) równe odpowiednio ω_ζ i $-\omega_\eta$. Zatem

$$(8)\qquad v_\xi=(a_1\dot{x}_0+b_1\dot{y}_0+c_1\dot{z}_0)+\omega_\zeta\eta-\omega_\eta\zeta.$$

Dla rzutów prędkości $\bar{u}$ punktu M na osie x,y,z dostaniemy $u_x=\dot{x}_0$, $u_y=\dot{y}_0$, $u_z=\dot{z}_0$, a dla rzutów tej prędkości na osie ξ,η,ζ

$$u_\xi=a_1u_x+b_1u_y+c_1u_z=a_1\dot{x}_0+b_1\dot{y}_0+c_1\dot{z}_0 \qquad \text{i t. d.}$$

Na mocy więc (8) otrzymamy na v_ξ (i podobnie na v_η,v_ζ) wzory:

$$(9)\qquad v_\xi=u_\xi+\omega_\zeta\eta-\omega_\eta\zeta, \qquad v_\eta=u_\eta+\omega_\xi\zeta-\omega_\zeta\xi, \qquad v_\zeta=u_\zeta+\omega_\eta\xi-\omega_\xi\eta.$$

Ze wzorów (9) wynika, że prędkość $\bar{v}$ jest sumą dwóch prędkości: $\bar{v}=\bar{u}+\bar{w}$, z których pierwsza jest prędkością punktu M, a druga ma rzuty na osie ξ,η,ζ:

$$(10)\qquad w_\xi=\omega_\zeta\eta-\omega_\eta\zeta,\qquad w_\eta=\omega_\xi\zeta-\omega_\zeta\xi,\qquad w_\zeta=\omega_\eta\xi-\omega_\xi\eta.$$

Porównując te wzory ze wzorami (V), str. 46, widzimy, że $\bar{w}$ jest to prędkość, jaką miałby punkt A, gdyby ciało obracało się z prędkością kątową $\bar{\omega}$ około osi przechodzącej przez M. Wynika stąd, że wektor $\bar{\omega}$, określony wzorami (7), jest wektorem prędkości chwilowej kątowej.

Uwaga. Wzory (7) ulegają uproszczeniu, jeżeli założyć, że w danej chwili t układy współrzędnych (x,y,z) i (ξ,η,ζ) schodzą się. Przy tym założeniu mamy $\alpha_1=\beta_2=\gamma_3=0$, pozostałe zaś kąty są równe $\pi/2$. Zatem $a_1=b_2=c_3=1$, a pozostałe cosinusy są zerami. Na mocy (7) i (6) jest wówczas:

$$\omega_\xi=-\dot{c}_2,\qquad \omega_\eta=-\dot{a}_3,\qquad \omega_\zeta=-\dot{b}_1$$

Ponieważ $c_2=\cos\gamma_2$, więc $\dot{c}_2=-(\sin\gamma_2)\dot{\gamma}_2=-\dot{\gamma}_2$, zatem $\omega_\xi=\dot{\gamma}_2$. Postępując podobnie, otrzymamy:

$$\omega_\xi=\omega_x=\dot{\gamma}_2,\qquad \omega_\eta=\omega_y=\dot{\alpha}_3,\qquad \omega_\zeta=\omega_z=\dot{\beta}_1.$$

A więc: *jeżeli osie układu ruchomego współrzędnych schodzą się w chwili t z osiami układu stałego, to rzuty wektora prędkości chwilowej kątowej na osie układu ruchomego są pochodnymi kątów $\sphericalangle\eta x$, $\sphericalangle\zeta x$ i $\sphericalangle\xi y$.*

Oś środkowa. Aby otrzymać oś środkową, należy wyznaczyć punkty, których prędkości mają kierunek wektora $\bar{\omega}$. Jeżeli więc punkt $A(\xi,\eta,\zeta)$ leży na osi środkowej, to jego prędkość równa się $\bar{v}=\lambda\bar{\omega}$, gdzie λ jest pewną liczbą stałą. Przez podstawienie w równania (9), otrzymamy stąd równania osi środkowej:

$$(12)\qquad \lambda\omega_\xi=u_\xi+\omega_\zeta\eta-\omega_\eta\zeta,\qquad \lambda\omega_\eta=u_\eta+\omega_\xi\zeta-\omega_\zeta\xi,$$
$$\lambda\omega_\zeta=u_\zeta+\omega_\eta\xi-\omega_\xi\eta,$$

skąd

$$(13)\qquad \frac{u_\xi+\omega_\zeta\eta-\omega_\eta\zeta}{\omega_\xi}=\frac{u_\eta+\omega_\xi\zeta-\omega_\zeta\xi}{\omega_\eta}=\frac{u_\zeta+\omega_\eta\xi-\omega_\xi\eta}{\omega_\zeta}.$$

Aby otrzymać prędkość $\bar{v}$ ruchu chwilowego postępowego przy skręcie, pomnóżmy obie strony równań (12) odpowiednio przez $\omega_\xi,\omega_\eta,\omega_\zeta$. Dodając je, otrzymamy

$$(14)\qquad \lambda(\omega_\xi^2+\omega_\eta^2+\omega_\zeta^2)=u_\xi\omega_\xi+u_\eta\omega_\eta+u_\zeta\omega_\zeta=\bar{u}\cdot\bar{\omega}.$$

Ponieważ $\bar{v}=\lambda\bar{\omega}$, więc kładąc $\omega=|\bar{\omega}|=\sqrt{\omega_\xi^2+\omega_\eta^2+\omega_\zeta^2}$, dostaniemy na mocy (14) $\bar{v}=\frac{\bar{u}\cdot\bar{\omega}}{\omega^2}\bar{\omega}$, skąd

$$|\bar{v}|=|\bar{u}\cdot\bar{\omega}|/\omega. \tag{15}$$

Jeżeli $\bar{u}\perp\bar{\omega}$, to $\bar{u}\cdot\bar{\omega}=0$, skąd na mocy (15) $\bar{v}=0$.

A więc: *jeżeli prędkość ruchu chwilowego postępowego jest prostopadła do osi chwilowej obrotu, to ruch chwilowy jest obrotem chwilowym około osi środkowej.*

Ruch płaski. Przypuśćmy, że badamy ruch figury w płaszczyźnie Π. Obierzmy układ współrzędnych stały (x,y) oraz ruchomy (ξ,η) o początku M, związany sztywnie z figurą. Oznaczmy przez x_0,y_0 współrzędne punktu M, zaś przez φ kąt między osiami ξ a x. Niechaj wreszcie A będzie dowolnym punktem figury o współrzędnych x,y względem układu stałego, zaś ξ,η względem układu ruchomego. Związki między tymi współrzędnymi podają wzory (II), str. 54:

$$x=x_0+\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi, \qquad y=y_0+\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi. \tag{16}$$

Niech $\bar{v}$ będzie prędkością punktu A. Ponieważ punkt A jest związany sztywnie z układem ruchomym, więc ξ i η są stałe. Różniczkując (16), otrzymamy

$$v_x=\dot{x}=\dot{x}_0-(\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi)\dot{\varphi}, \qquad v_y=\dot{y}=\dot{y}_0+(\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi)\dot{\varphi}. \tag{17}$$

Porównując (17) ze wzorami (16) i kładąc

$$\omega=\dot{\varphi}, \tag{18}$$

dostaniemy:

$$v_x=\dot{x}_0-(y-y_0)\omega, \qquad v_y=\dot{y}_0+(x-x_0)\omega. \tag{19}$$

A więc: *prędkość $\bar{v}$ jest sumą dwóch prędkości: $\bar{v}=\bar{u}+\bar{w}$, z których pierwsza jest prędkością punktu M, druga zaś ma rzuty na osie układu stałego:*

$$w_x=-(y-y_0)\omega, \qquad w_y=(x-x_0)\omega. \tag{20}$$

Widzimy stąd, że $\bar{w}$ jest to prędkość jaką miałby punkt A, gdyby figura obracała się około punktu $M(x_0,y_0)$ z prędkością kątową ω (przyczem zwrot dodatni obrotu jest zgodny ze zwrotem dodatnim kąta). Zatem $\omega=\dot{\varphi}$ jest prędkością chwilową kątową.

Aby otrzymać środek obrotu chwilowego, należy wyznaczyć punkt o prędkości $\bar{v}=0$. Oznaczając współrzędne środka obrotu chwilowego przez $\bar{x}$ i $\bar{y}$, otrzymamy z (4):

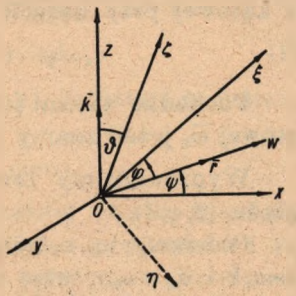
$$0=\dot{x}_0-(\bar{y}-y_0)\omega, \qquad 0=\dot{y}_0+(\bar{x}-x_0)\omega,$$

skąd

$$\bar{x}=x_0-\dot{y}_0/\omega, \qquad \bar{y}=y_0+\dot{x}_0/\omega. \tag{21}$$

Kąty Eulera. Wygodnym jest w niektórych rozważaniach określić położenie ciała przy pomocy t. zw. kątów Eulera.

Niech ciało obraca się około punktu O. Obierzmy dwa układy współrzędnych o wspólnym początku O: stały (x,y,z) i ruchomy (ξ,η,ζ), związany sztywnie z ciałem. Położenie układu ruchomego wyznaczymy, jak następuje.



Niech w oznacza linię przecięcia płaszczyzn xy i $\xi\eta$. Linię tę nazywamy *linią węzłów*.

Linia w jest prostopadła do osi z i ζ. Nadajmy linii w taki zwrot, by układ osi (ζ,z,w) był lewostronny, t. j. zgodny z przyjętymi zwrotami układów (x,y,z) i (ξ,η,ζ).

Oznaczmy przez ϑ kąt, o jaki należy obrócić oś z około osi w w kierunku dodatnim (t. j. od ręki prawej ku lewej), aby kierunek dodatni osi z pokrył kierunek dodatni osi ζ. Podobnie, przez φ oznaczymy kąt, o jaki należy obrócić oś w około osi ζ w kierunku dodatnim, aby kierunek dodatni osi w pokrył kierunek dodatni osi ξ. Wreszcie przez ψ oznaczymy kąt, o jaki należy obrócić oś x około osi z w kierunku dodatnim, aby kierunki dodatnie osi x i w pokryły się z sobą.

Kąty ϑ,φ,ψ nazywamy *kątami Eulera*.

Kąty te wyznaczają położenie osi ξ,η,ζ, z wyjątkiem przypadku, gdy $\vartheta=0$ lub $\vartheta=\pi$, wówczas bowiem położenie osi w, a więc i kąty φ,ψ, są nieokreślone.

Jeżeli zaś $\vartheta\neq 0$ i $\vartheta\neq\pi$, to kąt ψ określa położenie osi w w płaszczyźnie xy. Znając już położenie osi w, otrzymujemy położenie osi ζ, obracając oś z o kąt ϑ (w kierunku dodatnim) około osi w. Wreszcie, oś ξ otrzymamy, obracając oś w około osi ζ w kierunku dodatnim o kąt φ.

Kąty Eulera zmieniają się w następujących granicach:

$$0<\vartheta<\pi, \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, \qquad 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi.$$

Ruch chwilowy układu (ξ,η,ζ) jest obrotem około pewnej osi. Niech $\bar{\omega}$ będzie wektorem jego prędkości chwilowej kątowej. Rozłóżmy $\bar{\omega}$ na trzy składowe $\bar{o}_z$, $\bar{o}_w$, i $\bar{o}_\zeta$ w kierunku osi z, w i ζ. Zatem

$$\bar{\omega}=\bar{o}_z+\bar{o}_w+\bar{o}_\zeta. \tag{21}$$

Oznaczmy przez o_z, o_w i o_ζ współrzędne odpowiednich wektorów względem osi z, w i ζ. Zauważmy, że jeżeli układ (ξ,η,ζ) obraca się około osi z, to kąty ϑ i φ nie zmieniają się, zaś kąt ψ jest kątem obrotu. Zatem przy obrocie około osi z prędkość chwilowa kątowa układu (ξ,η,ζ) ma wielkość $\dot{\psi}$. Ponieważ o_z jest wektorem prędkości kątowej przy obrocie około osi z, więc

$$o_z=\dot{\psi} \quad \text{i podobnie} \quad o_w=\dot{\vartheta}, \quad o_\zeta=\dot{\varphi}. \tag{22}$$

Pochodne zatem $\dot{\psi},\dot{\vartheta},\dot{\varphi}$ określają wektor chwilowej prędkości kątowej $\bar{\omega}$, jeżeli znamy położenie układu (ξ,η,ζ), t. j. kąty ψ, ϑ i φ.

Wyprowadzimy teraz wzory na rzuty wektora $\bar{\omega}$ na osie układu (ξ,η,ζ).

Obierzmy na osiach z i w wektory jednostkowe $\bar{k}$ i $\bar{r}$. Zatem $\bar{o}_z=o_z\bar{k}$ i $\bar{o}_w=o_w\bar{r}$, więc według (22):

$$\bar{o}_z=\dot{\psi}\bar{k}, \qquad \bar{o}_w=\dot{\vartheta}\bar{r}. \tag{23}$$

Rzut wektora $\bar{k}$ na oś ζ wynosi $\cos\vartheta$. Wektor $\bar{k}$ tworzy z płaszczyzną $\xi\eta$ kąt $\pi/2-\vartheta$, więc rzut $\bar{k}$ na płaszczyznę $\xi\eta$ ma długość $\sin\vartheta$ i jest prostopadły do w (ponieważ oś z jest prostopadła do w). Rzut $\bar{k}$ tworzy z osiami ξ i η kąty $\pi/2-\varphi$ i $\pi-\varphi$, więc:

$$k_\xi=\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad k_\eta=-\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad k_\zeta=\cos\vartheta. \tag{24}$$

Rzuty wektora $\bar{r}$ na osie ξ i η wynoszą $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$, zaś rzut na oś ζ jest zerem. Zatem:

$$r_\xi=\cos\varphi, \qquad r_\eta=\sin\varphi, \qquad r_\zeta=0. \tag{25}$$

Rzuty wektora $\bar{o}_z$ na osie ξ, η i ζ wynoszą na mocy (23) i (24): $\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi$, $-\dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi$ i $\dot{\psi}\cos\vartheta$, zaś rzuty wektora $\bar{o}_w$ na osie ξ, η i ζ są na mocy (23) i (25) równe odpowiednio $\dot{\vartheta}\cos\varphi$, $\dot{\vartheta}\sin\varphi$ i 0; wreszcie rzuty wektora $\bar{o}$ na osie ξ, η i ζ wynoszą oczywiście 0, 0 i $\dot{\varphi}$. Stąd dostajemy na mocy (21):

$$\text{(I)} \quad \omega_\xi=\dot{\vartheta}\cos\varphi+\dot{\psi}\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \omega_\eta=\dot{\vartheta}\sin\varphi-\dot{\psi}\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \omega_\zeta=\dot{\psi}\cos\vartheta+\dot{\varphi}.$$

Wyznaczając z (I) $\dot{\vartheta}$, $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$, otrzymujemy:

$$\text{(II)} \qquad \dot{\vartheta}=\omega_\xi\cos\varphi+\omega_\eta\sin\varphi, \qquad \dot{\psi}=(\omega_\xi\sin\varphi-\omega_\eta\cos\varphi)/\sin\vartheta,$$
$$\dot{\varphi}=\omega_\zeta-(\omega_\xi\sin\varphi-\omega_\eta\cos\varphi)\cot\vartheta.$$

Znając w każdej chwili rzuty ω_ξ, ω_η i ω_ζ prędkości kątowej $\bar{\omega}$ na osie ξ, η i ζ układu ruchomego, możemy więc wyznaczyć ϑ, φ i ψ jako funkcje czasu, rozwiązując układ równań różniczkowych (II).

Postępując podobnie, otrzymujemy wzory następujące na rzuty prędkości kątowej $\bar{\omega}$ na osie x, y, z układu stałego:

$$\text{(I')} \qquad \omega_x=\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi+\dot{\vartheta}\cos\psi, \qquad \omega_y=\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi-\dot{\vartheta}\sin\psi,$$
$$\omega_z=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\vartheta,$$

$$\text{(II')} \qquad \dot{\vartheta}=\omega_x\cos\psi-\omega_y\sin\psi, \qquad \dot{\varphi}=\frac{\omega_x\sin\psi+\omega_y\cos\psi}{\sin\vartheta},$$
$$\dot{\psi}=\omega_z-(\omega_x\sin\psi+\omega_y\cos\psi)\cot\vartheta.$$

Kąty Eulera w precesji regularnej. Załóżmy, że podczas ruchu ciała jest stale:

$$\text{(26)} \qquad \dot{\vartheta}=0, \qquad \dot{\psi}=\text{const}, \qquad \dot{\varphi}=\text{const}.$$

Ruch chwilowy ciała jest więc w każdej chwili złożeniem dwóch obrotów równoczesnych około osi z i ζ z prędkościami kątowymi $\dot{\psi}$ i $\dot{\varphi}$ o stałej wielkości. Oś z ma stałe położenie w przestrzeni, oś ζ zaś jest związana sztywnie z ciałem. W tych warunkach ruch ciała jest precesją regularną (por. str. 350).

§ 11. Rozkład przyśpieszeń. Ruch płaski. Jeżeli figura płaska obraca się około punktu stałego M z prędkością kątową zmienną ω, wówczas każdy punkt figury krąży po okręgu koła. Przyśpieszenie p dowolnego punktu A figury jest więc sumą przyśpieszenia normalnego p_n, skierowanego ku M, oraz przyśpieszenia stycznego p_t, prostopadłego do MA. Przyśpieszenia normalne i styczne określone są wzorami (I) i (II), str. 45:

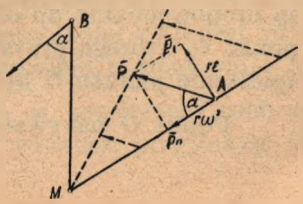
$$\text{(1)} \qquad p_n=r\omega^2, \qquad p_t=r\varepsilon,$$

gdzie $r=MA$, zaś $\varepsilon=\dot{\omega}$ jest przyśpieszeniem kątowym.

Niech α oznacza kąt, jaki przyśpieszenie p punktu A tworzy z prostą MA. Wówczas

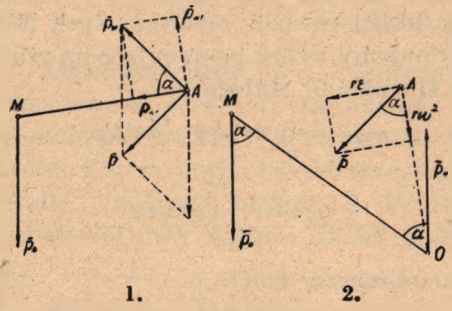
$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg}\alpha=p_t/p_n=\varepsilon/\omega^2.$$

Widzimy stąd, że α jest jednakowe dla wszystkich punktów.



A więc: *w ruchu obrotowym figury około punktu stałego przyśpieszenia punktów figury są proporcjonalne do ich odległości od środka obrotu i tworzą kąty równe z prostą łączącą te punkty ze środkiem obrotu.*

Załóżmy teraz, że figura porusza się w płaszczyźnie zupełnie dowolnie (rys. 1). Przyjmijmy dowolny punkt M figury za początek układu współrzędnych (ξ, η), poruszającego się ruchem postępowym. Przyśpieszenie $\bar{p}$ dowolnego punktu A figury będzie sumą przyśpieszeń: względnego p_w i unoszenia p_u. Przyśpieszenie unoszenia równa się przyśpieszeniu p_0 punktu M. Ruch względny figury jest obrotem około M z prędkością kątową zmienną ω. Możemy więc przyśpieszenie względne $\bar{p}_w$ rozłożyć na sumę przyśpieszeń (względnych): normalnego $\bar{p}_{w_n}$ i stycznego $\bar{p}_{w_t}$. Zatem



1. 2.

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{p}_w = \bar{p}_0 + \bar{p}_{w_n} + \bar{p}_{w_t}. \tag{3}$$

A więc: *w ruchu płaskim przyśpieszenia punktów figury są sumami przyśpieszenia dowolnego punktu M figury i przyśpieszeń, jakie miałyby te punkty przy obrocie figury około punktu M* (jako punktu stałego) *z prędkością kątową* (obrotu chwilowego figury) *ω i z przyśpieszeniem kątowym $\varepsilon = \dot{\omega}$.*

Jeżeli $\omega \neq 0$ lub $\varepsilon \neq 0$, to przyśpieszenie względne p_w tworzy z prostą MA kąt α określony wzorem (2) i kąt ten jest stały dla wszystkich punktów figury.

Przeprowadźmy w tym przypadku przez punkt M prostą l, tworzącą kąt α z kierunkiem przyśpieszenia $\bar{p}_0$ punktu M (rys. 2). Przyśpieszenia względne punktów położonych na prostej l będą miały kierunek przyśpieszenia $\bar{p}_0$. Ponieważ przyśpieszenia względne są proporcjonalne do odległości od M, więc na prostej l znajdziemy punkt O, którego przyśpieszenie względne będzie równe $-\bar{p}_0$. Przyśpieszenie punktu O będzie więc zerem.

Punkt O nazywamy *środkiem chwilowym przyśpieszeń.*

Jeżeli zaś $\omega=0$ i $\varepsilon=0$, to przyśpieszenia wszystkich punktów figury są równe (mianowicie, równe przyśpieszeniu punktu M).

A więc: *jeżeli przyśpieszenia punktów w ruchu płaskim figury nie są równe, to istnieje punkt, którego przyśpieszenie jest równe zeru.*

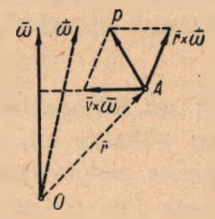
Przyśpieszenia punktów są zatem takie, jak gdyby figura obracała się około środka chwilowego przyśpieszeń (jako punktu stałego) z prędkością kątową ω i z przyśpieszeniem kątowym $\varepsilon=\dot{\omega}$. Przyśpieszenia punktów figury są proporcjonalne do odległości od środka chwilowego przyśpieszeń i tworzą kąty równe z prostymi, łączącymi te punkty ze środkiem chwilowym przyśpieszeń.

Ruch w przestrzeni. Jeżeli ciało obraca się około punktu stałego O z prędkością chwilową kątową $\bar{\omega}$, wówczas prędkość dowolnego punktu A ciała wynosi

$$\bar{v}=\bar{r}\times\bar{\omega}, \tag{4}$$

gdzie $\bar{r}=\overline{OA}$. Tworząc pochodną i oznaczając przez p przyśpieszenie punktu A, otrzymamy

$$\bar{p}=\dot{\bar{r}}\times\bar{\omega}+\bar{r}\times\dot{\bar{\omega}}.$$



Ponieważ O jest z założenia punktem stałym, więc $\dot{\bar{r}}=\bar{v}$; zatem

$$p=\bar{v}\times\omega+\bar{r}\times\dot{\bar{\omega}}. \tag{5}$$

Jeżeli ciało obraca się około osi stałej z prędkością kątową stałą ω, to $\dot{\bar{\omega}}=0$, skąd na mocy (5) $\bar{p}=\bar{v}\times\bar{\omega}$. Z drugiej strony, każdy punkt ma wówczas przyśpieszenie dośrodkowe $\varrho|\bar{\omega}|^2$, gdzie ϱ oznacza odległość tego punktu od osi obrotu. Iloczyn $\bar{v}\times\bar{\omega}$ jest więc przyśpieszeniem, z jakim poruszałyby się punkty ciała, gdyby ciało obracało się około osi stałej z prędkością kątową stałą $\bar{\omega}$. Iloczyn zaś $\bar{r}\times\dot{\bar{\omega}}=\mathrm{Mom}_A\dot{\bar{\omega}}$ przedstawia prędkość, jaką miałby punkt A, gdyby ciało obracało się około osi stałej z prędkością kątową $\dot{\bar{\omega}}$. Pochodna $\dot{\bar{\omega}}$ ma na ogół inny kierunek niż $\bar{\omega}$. Jeżeli $\bar{\omega}$ ma kierunek stały (t. zn. gdy oś obrotu jest stała), to $\dot{\bar{\omega}}$ ma kierunek $\bar{\omega}$, zatem $\bar{r}\times\dot{\bar{\omega}}$ ma kierunek prędkości $\bar{v}$. W tym przypadku $r\times\dot{\bar{\omega}}$ jest przyśpieszeniem stycznym, zaś $\bar{v}\times\bar{\omega}$ przyśpieszeniem normalnym.

Załóżmy teraz, że ciało wykonywa w przestrzeni ruch dowolny. Rozkład przyśpieszeń otrzymamy wówczas, przyjmując do-

wolny punkt O ciała za początek układu współrzędnych (ξ, η, ζ), poruszającego się ruchem postępowym. Przyśpieszenia punktów będą sumami: przyśpieszenia unoszenia (t. j. przyśpieszenia punktu O) i przyśpieszenia względnego. Ruch względny będzie obrotem około punktu O. Zatem przyśpieszenie względne dowolnego punktu A wyrazi się w myśl (5) wzorem

$$\bar{p}_w = \bar{v}_w \times \bar{\omega} + \bar{r} \times \dot{\bar{\omega}}, \tag{6}$$

gdzie $\bar{r} = \overline{OA}$, zaś $\bar{v}_w$ oznacza prędkość względną punktu A.

Interpretacja iloczynów $\bar{v}_w \times \bar{\omega}$ i $\bar{r} \times \dot{\omega}$ jest podobna jak przy obrocie ciała około punktu stałego. Oznaczając przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie, a przez $\bar{v}_0$ prędkość punktu O, zaś przez $\bar{v}$ prędkość punktu A, otrzymamy $\bar{v}_w = \bar{v} - \bar{v}_0$, a więc przyśpieszenie punktu A wyniesie na mocy (6)

$$p = p_0 + (\bar{v} - \bar{v}_0) \times \bar{\omega} + \bar{r} \times \dot{\bar{\omega}}. \tag{7}$$

ROZDZIAŁ VIII

DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO

§ 1. Praca i energia kinetyczna. W dynamice, podobnie jak w statyce, będziemy również zakładali często, że ciało sztywne jest układem sztywnym punktów materialnych. Dzięki temu będziemy mogli stosować do ciała sztywnego twierdzenia dynamiki układu punktów materialnych.

Wielkości dynamiczne. Wielkości dynamiczne jak np. pęd, energia kinetyczna, kręt i t. d., które poznaliśmy dla układów punktów materialnych, określamy również dla ciał sztywnych, stosując podobne przejścia graniczne, jak przy określaniu dla nich środka masy, momentów statycznych i bezwładności (p. rozdz. IV, str. 173). Aby określić np. pęd ciała, dzielimy ciało na prostopadłościany o objętościach $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots$ i w każdym z nich bierzemy następnie pod uwagę po jednym punkcie $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2), \ldots$ Niechaj $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ oznaczają gęstości ciała w obranych punktach, zaś $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots$ prędkości tych punktów. Masy prostopadłościanów wynoszą w przybliżeniu $m_1 = \varrho_1 \Delta\tau_1$, $m_2 = \varrho_2 \Delta\tau_2, \ldots$ Jeżeli ciało zastąpimy układem punktów materialnych umieszczonych w $A_1, A_2, \ldots$ o masach $m_1, m_2, \ldots$ i prędkościach $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots$, wówczas pęd tego układu równy będzie

$$\bar{H} = \Sigma m_i \bar{v}_i = \Sigma \varrho_i \bar{v}_i \Delta\tau_i. \tag{1}$$

Otóż granicę tej sumy, gdy wymiary prostopadłościanów dążą do zera, nazywamy *pędem ciała*.

Oznaczając przez $\varrho(x, y, z)$ gęstość, przez $\bar{v}(x, y, z)$ prędkość punktu o współrzędnych x, y, z, a przez $\bar{H}$ pęd ciała, dostaniemy:

$$H_x = \int\int\int_D \varrho v_x \, d\tau, \qquad H_y = \int\int\int_D \varrho v_y \, d\tau, \qquad H_z = \int\int\int_D \varrho v_z \, d\tau, \tag{2}$$

gdzie D oznacza obszar przestrzeni zajęty przez ciało. Wzory powyższe piszemy w postaci wektorowej

$$\bar{H}=\int\int\int_D \varrho\bar{v}\,d\tau. \tag{3}$$

Podobnie postępując, otrzymamy na energię kinetyczną wzór

$$E=\frac{1}{2}\int\int\int_D \varrho v^2 d\tau, \tag{4}$$

gdzie $v=|\bar{v}|$.

Kręt ((I'), str. 203) względem początku układu współrzędnych ma rzuty:

$$K_x=\int\int\int_D \varrho(v_y z-v_z y)\,d\tau, \qquad K_y=\int\int\int_D \varrho(v_z x-v_x z)\,d\tau,$$
$$K_z=\int\int\int_D \varrho(v_x y-v_y x)\,d\tau. \tag{5}$$

Oznaczając przez $\bar{r}$ promień wodzący $\overline{OA}$, gdzie A ma współrzędne x,y,z, możemy napisać wzory (5) w postaci wektorowej:

$$\bar{K}=\int\int\int_D \varrho(\bar{v}\times\bar{r})\,d\tau. \tag{6}$$

Praca. Niech na ciało sztywne działa siła $\bar{P}$ o początku w punkcie A i niech $\bar{v}$ oznacza prędkość tego punktu.

Praca siły $\bar{P}$ w czasie od t' do t'' wyraża się wzorem (str. 96)

$$L=\int_{t'}^{t''}(\bar{P}\bar{v})\,dt. \tag{7}$$

Weźmy w ciele pod uwagę dowolny punkt O. Ruch chwilowy ciała możemy uważać za złożenie ruchu postępowego z prędkością $\bar{u}$ punktu O i ruchu obrotowego z prędkością kątową $\bar{\omega}$ około osi l przechodzącej przez O. Prędkość punktu A wynosi zatem ((I), str. 335)

$$\bar{v}=\bar{u}+\overline{OA}\times\bar{\omega}, \tag{8}$$

skąd

$$\bar{P}\bar{v}=\bar{P}\bar{u}+\bar{P}(\overline{OA}\times\bar{\omega}). \tag{9}$$

Ze wzoru (II), str. 12, mamy (kładąc $\bar{a}=\bar{P}$, $\bar{b}=\overline{OA}$ i $\bar{c}=\bar{\omega}$)

$$\bar{P}(\overline{OA}\times\bar{\omega})=\bar{\omega}(\bar{P}\times\overline{OA}). \tag{10}$$

Ponieważ $\mathrm{Mom}_O \bar{P} = \bar{P} \times \overline{OA}$ (str. 16), więc na mocy (9) i (10)

$$\bar{P}\bar{v} = \bar{P}\bar{u} + \bar{\omega}\,\mathrm{Mom}_O\,\bar{P},$$

skąd na mocy (7)

$$L = \int_t^{t''} \bar{P}\bar{u}\,dt + \int_t^{t''} \bar{\omega}\,\mathrm{Mom}_O\,\bar{P}\,dt. \tag{11}$$

Jeżeli na ciało działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$, to praca ich wynosi według (11)

$$L = \int_t^{t''} \left(\sum \bar{P}_l\right)\bar{u}\,dt + \int_t^{t''} \bar{\omega}\left(\sum \mathrm{Mom}_O \bar{P}_l\right)dt.$$

Oznaczając przez $\bar{P}$ sumę sił, a przez $\bar{M}_O$ moment ogólny względem O, dostaniemy

$$L = \int_t^{t''} (\bar{P}\bar{u})\,dt + \int_t^{t''} (\bar{\omega}\bar{M}_O)\,dt. \tag{I}$$

Z powyższego wzoru wynika, że *równoważne układy sił wykonują równe prace.*

W szczególności *układ sił równoważny zeru* ($\bar{P}=0$, $\bar{M}=0$) *wykonuje pracę zero.*

Oznaczając przez α kąt, jaki $\bar{M}_O$ tworzy z osią l obrotu chwilowego, a przez ω współrzędną wektora $\bar{\omega}$ względem osi l, mamy $\bar{\omega}\bar{M}_O = \omega|\bar{M}_O|\cos\alpha$. Lecz $|\bar{M}_O|\cos\alpha$ jest to rzut momentu $\bar{M}_O$ na oś l. Zatem $|\bar{M}_O|\cos\alpha$ równa się M_l, t. j. momentowi ogólnemu sił względem osi obrotu chwilowego; dostajemy więc z (I)

$$L = \int_t^{t''} (\bar{P}\bar{u})\,dt + \int_t^{t''} \omega M_l\,dt. \tag{I'}$$

Gdy ciało porusza się ruchem postępowym, to $\bar{\omega}=0$, więc na mocy (I)

$$L = \int_t^{t''} (\bar{P}\bar{u})\,dt. \tag{12}$$

Gdy ciało obraca się około punktu O, to $\bar{u}=0$, więc na mocy (I')

$$L = \int_t^{t''} \omega M_l\,dt. \tag{13}$$

Wzór (13) zachodzi również wtedy, gdy ciało obraca się około osi stałej l; otrzymujemy go ze wzoru (I'), obierając punkt O na osi l. Oznaczając w tym przypadku przez φ kąt obrotu, dostaniemy $\omega = d\varphi/dt$ czyli $\omega dt = d\varphi$, więc na mocy (13)

$$L = \int_{\varphi'}^{\varphi''} M_l \, d\varphi, \tag{14}$$

gdzie φ' i φ'' oznaczają kąty w początkowym i końcowym położeniu ciała.

Energia kinetyczna. Jak wiemy (str. 332), ruch chwilowy ciała względem dowolnego punktu O ciała jest obrotem z prędkością chwilową kątową $\bar{\omega}$ około osi przechodzącej przez O. Niech I oznacza moment bezwładności względem osi obrotu chwilowego. Energia kinetyczna ruchu względnego wynosi $\frac{1}{2}I\omega^2$. Na mocy więc twierdzenia Königa (str. 218) energia kinetyczna ciała wyrazi się wzorem

$$E = \tfrac{1}{2}mu^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 + m\bar{u}(\bar{v}_0 - \bar{u}), \tag{II}$$

gdzie u oznacza wartość bezwzględną prędkości $\bar{u}$ punktu O, $\bar{v}_0$ prędkość środka masy, a m masę ciała.

A więc: *energia kinetyczna ciała sztywnego równa się sumie*:

1) *energii kinetycznej ruchu postępowego z prędkością dowolnego punktu O ciała*,

2) *energii kinetycznej obrotu chwilowego względem osi chwilowej, przechodzącej przez punkt O* i

3) *iloczynu skalarowego* $m\bar{u}(\bar{v}_0 - \bar{u})$,

gdzie m oznacza masę ciała, $\bar{u}$ prędkość punktu O, a $\bar{v}_0$ prędkość środka masy.

Jeżeli obierzemy za punkt O środek masy, to $\bar{u} = \bar{v}_0$; kładąc $v_0 = |\bar{v}_0|$, dostaniemy zatem

$$E = \tfrac{1}{2}mv_0^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2. \tag{II'}$$

A więc: *energia kinetyczna ciała sztywnego równa się sumie energii kinetycznej ruchu postępowego z prędkością środka masy i energii kinetycznej ruchu chwilowego obrotowego względem osi chwilowej, przechodzącej przez środek masy.*

Jeżeli ruch chwilowy jest skrętem chwilowym około osi środkowej przechodzącej przez O, to wektory $\bar{\omega}$ i $\bar{u}$ są równoległe. Prędkość $\bar{v}_0$ środka masy S wynosi wtedy $\bar{v}_0=\bar{u}+\overline{OS}\times\bar{\omega}$. Ponieważ $\bar{v}_0-\bar{u}=\overline{OS}\times\bar{\omega}$, więc wektor $\bar{v}_0-\bar{u}$ jest prostopadły do $\bar{\omega}$, a przeto również do $\bar{u}$. Wynika stąd, że iloczyn skalarowy $\bar{u}(\bar{v}_0-\bar{u})$ jest zerem. Na mocy (II) dostaniemy zatem

$$E=\tfrac{1}{2}mu^2+\tfrac{1}{2}I\omega^2. \tag{15}$$

A więc: *jeżeli ruch chwilowy ciała sztywnego przedstawić jako skręt, to energia kinetyczna jest sumą energii kinetycznej ruchów postępowego i obrotowego.*

Ruch chwilowy płaski jest obrotem chwilowym około środka obrotu chwilowego z prędkością chwilową kątową.

Energia kinetyczna w ruchu płaskim wynosi $E=\tfrac{1}{2}I\omega^2$,

gdzie I jest momentem bezwładności względem środka obrotu chwilowego, zaś ω prędkością chwilową kątową.

§ 2. Równania ruchu. Ruch środka masy. Niech m oznacza masę ciała, $\bar{p}_0$ przyśpieszenie środka masy, a $\bar{P}$ sumę sił zewnętrznych, działających na ciało. Wówczas (str. 200)

$$m\bar{p}_0=\bar{P}. \tag{I}$$

Znając więc sumę sił zewnętrznych, możemy wyznaczyć ruch środka masy ciała.

Zasada krętu. Niech $\bar{K}$ oznacza kręt, $\bar{M}$ moment ogólny sił zewnętrznych względem punktu stałego lub względem środka masy. Wówczas (str. 205)

$$\dot{\bar{K}}=\bar{M}. \tag{II}$$

Znając więc moment ogólny sił względem punktu stałego lub względem środka masy, możemy wyznaczyć kręt.

Jeżeli z równań (I) i (II) obliczymy przyśpieszenie p_0 środka masy i kręt $\bar{K}$, to ruch ciała będzie wyznaczony. Mając bowiem dane p_0, możemy wyznaczyć ruch środka masy. Znając zaś kręt $\bar{K}$, możemy (jak okażemy później, str. 396) wyznaczyć prędkość chwilową kątową $\bar{\omega}$. Ponieważ ruch jednego punktu i prędkość chwilowa kątowa określają ruch ciała (str. 338), więc równania (I) i (II) wystarczają do wyznaczenia tego ruchu.

Zasada energii kinetycznej. Uważajmy ciało sztywne za układ sztywny punktów materialnych. Wówczas na mocy twierdzenia podanego na str. 212 siły wewnętrzne nie wykonują pracy. Zatem pracę wykonują tylko siły zewnętrzne. Z twierdzenia o energii kinetycznej (str. 219) wynika, że *przyrost energii kinetycznej ciała sztywnego równa się pracy sił zewnętrznych.*

Jeżeli siły zewnętrzne posiadają potencjał, to (str. 220) *suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała.*

Zasada d'Alemberta. Jak wiemy (str. 192), siły bezwładności równoważą się z siłami działającymi na punkty układu. Ponieważ siły wewnętrzne mają sumę i moment ogólny równe zeru, więc *siły bezwładności równoważą się z siłami zewnętrznymi.*

Zasada ta sprowadza badanie ruchu ciała sztywnego do zagadnień statyki.

Ruch postępowy ciała. Jeżeli ruch chwilowy ciała sztywnego jest ruchem postępowym, to kręt względem środka masy jest zerem (str. 203). Na odwrót:

Jeżeli w pewnej chwili kręt względem środka masy jest zerem, to ruch chwilowy ciała sztywnego jest ruchem postępowym.

Dowód. Załóżmy, że kręt $\bar{K}$ względem środka masy jest zerem. Ruch chwilowy ciała sztywnego możemy uważać za złożenie ruchu postępowego z prędkością środka masy i ruchu obrotowego z prędkością kątową ω około osi l przechodzącej przez środek masy. Ponieważ $\bar{K}$ jest sumą krętów ruchu postępowego i obrotowego, więc $\bar{K}$ równa się krętowi ruchu obrotowego, gdyż kręt ruchu postępowego względem środka masy jest zerem (str. 203).

Oznaczmy przez K kręt względem osi chwilowego obrotu l. Ze wzoru (7), str. 205, mamy $K=I\omega$, gdzie I jest momentem bezwładności względem osi l. Ponieważ K jest rzutem krętu $\bar{K}$ na oś obrotu chwilowego, więc $K=0$. Zatem $I\omega=0$, skąd $\omega=0$, c. b. d. d.

Jeżeli ciało porusza się przez pewien czas ruchem postępowym, to kręt $\bar{K}$ względem środka masy jest przez ten czas stale zerem. Wobec tego pochodna krętu $\dot{\bar{K}}$ też jest zerem. Ze wzoru (II) str. 365, wynika, że $\bar{M}=0$, t. zn. że moment sił względem środka masy jest zerem. Na mocy więc twierdzenia 1, str. 26, siły mają wypadkową, zaczepioną w środku masy.

Na odwrót, jeżeli siły mają wypadkową zaczepioną stale w środku masy, to $\bar{M}=0$, więc stale $\dot{\bar{K}}=0$ czyli $\bar{K}=\text{const}$. Jeżeli założymy, że w chwili początkowej ruch chwilowy był ruchem postępowym czyli że było wówczas $\bar{K}=0$, to będzie stale $\bar{K}=0$, t. zn. ciało będzie się poruszało ruchem postępowym.

A więc: *na to, by ciało poruszało się ruchem postępowym potrzeba i wystarczy, by były spełnione warunki następujące:*

1° *w chwili początkowej ruch chwilowy jest ruchem chwilowym postępowym,*

2° *w każdej chwili siły mają wypadkową, zaczepioną w środku masy.*

Warunki równowagi. Z warunków 1° i 2° łatwo wynikają warunki konieczne i wystarczające, jakim musi czynić zadość układ sił w równowadze (por. str. 248).

Jeżeli ciało jest w spoczynku, to przyśpieszenie środka masy $\bar{p}_0$ i kręt $\bar{K}$ są równe zeru, zatem na mocy (I) i (II), str. 365, jest $\bar{P}=0$ i $\bar{M}=0$.

Na odwrót, jeżeli założymy, że w chwili $t=t_0$ ciało było w spoczynku i że stale jest $\bar{P}=0$ i $\bar{M}=0$, to z warunków 1° i 2° wynika, że ciało będzie się poruszać ruchem postępowym. Środek masy będzie w spoczynku, gdyż $\bar{p}_0=0$ i prędkość początkowa $\bar{v}_0$ jest zerem; całe ciało będzie zatem w spoczynku. Układ sił jest więc w równowadze.

Udowodniliśmy zatem, że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił jest znikanie sumy i momentu ogólnego sił.*

Reakcje ciał stykających się. Dwa ciała sztywne I i II, stykające się w punkcie A, działają na siebie z pewnymi siłami, podlegającymi prawu akcji i reakcji. Siły, z jakimi ciało II działa na ciało I, możemy zastąpić jedną siłą $\bar{R}$ o początku A i parą sił o momencie $\bar{M}$.

Nie posiadamy dotychczas ogólnej teorii dla momentu $\bar{M}$. W niektórych tylko przypadkach szczególnych stwierdzono pewne prawa, odnoszące się do $\bar{M}$. Dla siły $\bar{R}$ natomiast uzyskano na drodze doświadczalnej prawa dość ogólne (jakkolwiek przybliżone), które w praktyce dają wyniki dostatecznie dokładne.

Załóżmy, że ciała mają w A wspólną płaszczyznę styczną Π. Składową $\bar{N}$ (reakcji $\bar{R}$) prostopadłą do Π nazywamy *reakcją normalną*, składową zaś styczną $\bar{T}$ *tarciem*.

Doświadczenie wykazuje, że między $\bar{N}$ i $\bar{T}$ zachodzą pewne związki. Rozpatrzymy dwa przypadki:

1° Punkty, którymi oba ciała się stykają, mają prędkości równe: punkty te mają więc względem siebie prędkość zero. Ruch chwilowy ciała jednego względem drugiego jest obrotem około osi przechodzącej przez punkt styczności, jest więc toczeniem względnym. W tym przypadku (kładąc $T=|\bar{T}|$ i $N=|\bar{N}|$), mamy

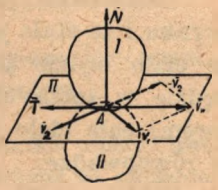
$$T \leqslant fN, \tag{1}$$

gdzie f oznacza współczynnik statyczny tarcia (por. str. 271), zależny tylko od natury powierzchni obu ciał w punkcie zetknięcia.

2° Prędkości $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ punktów, jakimi oba ciała stykają się z sobą, są różne. Prędkość względna $\bar{v}_w$ punktu styczności ciała I względem ciała II wynosi $\bar{v}_w=\bar{v}_1-\bar{v}_2$ i leży w płaszczyźnie stycznej. W tym przypadku tarcie ma kierunek prędkości względnej $\bar{v}_w$, zwrot zaś przeciwny. Mamy ponadto

$$T=\mu N, \tag{2}$$

gdzie μ oznacza t. zw. *współczynnik dynamiczny tarcia*, zależny tylko od natury powierzchni ciał w punkcie zetknięcia, a nie od prędkości punktów. Możemy więc przyjąć, że podczas ruchu $\mu=\text{const.}$ dopóki ciała się stykają i dopóki punkty styczności mają prędkości różne.



Na ogół μ jest nieco mniejsze od f.

Prawa podane w 1° i 2° są przybliżone.

Jeżeli tarcie jest zerem, powiadamy, że powierzchnie ciał są *gładkie*.

Powierzchnie ciał nazywamy *doskonale chropowatymi*, jeżeli ciała mogą poruszać się tylko w taki sposób, że punkty, jakimi się stykają, mają prędkości równe. Ruch względny jednego ciała względem drugiego jest wówczas toczeniem.

Praca tarcia. Niech $\bar{R}$ oznacza reakcję ciała II na ciało I; wówczas $-\bar{R}$ oznacza reakcję ciała I na ciało II. Niech $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ oznaczają prędkości punktów materialnych, którymi ciała się stykają. Praca, jaką reakcje w punkcie styczności wykonują w czasie od t' do t'' wynosi

$$L=\int_{t'}^{t''}\bar{R}\bar{v}_1\,dt-\int_{t'}^{t''}\bar{R}\bar{v}_2\,dt=\int_{t'}^{t''}\bar{R}(\bar{v}_1-\bar{v}_2)\,dt.$$

Ponieważ $\bar{v}_1-\bar{v}_2$ leży w płaszczyźnie stycznej (albo jest zerem), więc reakcje normalne nie wykonują pracy, bo $\bar{N}(\bar{v}_1-\bar{v}_2)=0$. Praca reakcji redukuje się zatem do pracy sił tarcia. A więc

$$L=\int_t^{t'}\bar{T}(\bar{v}_1-\bar{v}_2)\,dt.$$

Gdy $\bar{v}_w=\bar{v}_1-\bar{v}_2\neq 0$, tarcie $\bar{T}$ ma na mocy 2^0 kierunek $\bar{v}_w$, lecz zwrot przeciwny, zatem iloczyn skalarowy $\bar{T}(\bar{v}_1-\bar{v}_2)$ jest ujemny. Gdy $\bar{v}_1-\bar{v}_2=0$, wówczas $\bar{T}(\bar{v}_1-\bar{v}_2)=0$. W obu więc przypadkach $\bar{T}(\bar{v}_1-\bar{v}_2)\leqslant 0$, skąd $L\leqslant 0$.

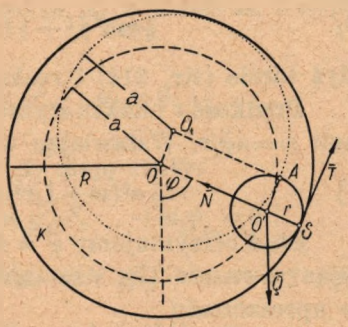
Gdy ruch ciał względem siebie jest toczeniem, to praca tarcia jest zerem, gdy zaś ruch ten jest ślizganiem, to praca tarcia jest ujemna i powoduje zmniejszenie energii kinetycznej ciał.

Przykład 1. Tarcza koła spada pod wpływem swego ciężaru w płaszczyźnie pionowej po kole K. Wyznaczyć ruch tarczy.

Niechaj O i O' oznaczają środek koła K i środek tarczy, R i r ich promienie, m masę tarczy, I jej moment bezwładności względem środka masy O', wreszcie φ kąt między pionem a odcinkiem OO'.

Rozpatrzymy najpierw przypadek, gdy tarcza i koło K są gładkie, a następnie, gdy są doskonale chropowate.

1^0 Załóżmy, że tarcza oraz koło są gładkie i że w chwili początkowej $t=0$ tarcza była w spoczynku. Siłami działającymi na tarczę podczas ruchu są: ciężar $\bar{Q}$ o początku w środku masy O' i reakcja $\bar{N}$, której kierunek przechodzi przez O'. Moment tych sił względem środka masy jest więc stale zerem. Ponieważ w chwili początkowej tarcza była w spoczynku, więc będzie ona się poruszać ruchem postępowym (str. 367), t. j. ślizgać się po kole K (str. 339). Środek O' tarczy będzie się tedy poruszał po kole o środku O i o promieniu $a=R-r$. Zatem wszystkie punkty tarczy będą się poruszały po kołach o promieniu a (por. np. tor punktu A, zaznaczony na rysunku).



Oznaczając przez p_0 przyśpieszenie środka masy tarczy, mamy na mocy twierdzenia o ruchu środka masy (str. 365)

$$m\bar{p}_0=\bar{Q}+\bar{N}. \tag{3}$$

Tworząc rzuty na styczną i normalną do toru punktu O', dostaniemy:

$$(4) \qquad ma\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi, \qquad ma\dot{\varphi}^2 = N,$$

gdzie $N = |\overline{N}|$. Pierwsze z równań (4) możemy napisać w postaci

$$(5) \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{a}\sin\varphi.$$

Porównując równanie (5) z równaniem wahadła matematycznego $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ (str. 132), widzimy, że środek masy tarczy będzie wykonywał ruch wahadłowy, jak wahadło matematyczne o długości $l = a$.

2^0 Załóżmy teraz, że tarcza i koło są doskonale chropowate. Tarcza będzie się zatem (str. 368) toczyć po kole K.

Oznaczmy przez ω prędkość chwilową kątową tarczy. Energia kinetyczna tarczy wynosi ((II'), str. 364)

$$E = \tfrac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

(gdyż $a\dot{\varphi}$ jest prędkością środka masy). Jeżeli dla $t = 0$ ciało jest w spoczynku oraz $\varphi = \varphi_0$, wówczas z zasady równowartości pracy i energii kinetycznej (str. 366) dostaniemy

$$(6) \qquad \tfrac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 = mga(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

gdyż tarcie (str. 214) i reakcja $\overline{N}$ pracy nie wykonują.

Prędkość v punktu styczności S jest zerem. Zatem $v = a\dot{\varphi} - r\omega = 0$ czyli $\omega = a\dot{\varphi}/r$. Wstawiając w (6), dostaniemy więc

$$(7) \qquad \tfrac{1}{2}a^2(m + I/r^2)\dot{\varphi}^2 = mga(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

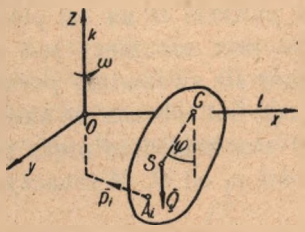
Stąd otrzymujemy $\dot{\varphi}$ w zależności od φ, a następnie ω. Różniczkując równanie (7), dostaniemy $a^2[m + I/r^2]\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = -mga\dot{\varphi}\sin\varphi$, skąd po uproszczeniu

$$(8) \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{mg}{a(m + I/r^2)}\sin\varphi.$$

Porównując równanie (8) z równaniem wahadła matematycznego $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ (str. 132), widzimy że środek tarczy będzie poruszał się jak wahadło o długości $l = a(1 + I/mr^2)$.

Ponieważ dla koła jednorodnego jest $I = \frac{1}{2}mr^2$, więc $l = 3a/2$. Okres wahania będzie więc dłuższy niż dla wahadła o długości a.

Przykład 2. Ciężkie ciało sztywne zawieszone jest na osi poziomej l, około której może się tylko obracać. Położenie ciała wyznaczone jest przez podanie położenia osi l i kąta φ, jaki tworzy z pionem prosta SG, przechodząca przez środek masy S i przecinająca oś l pod kątem prostym w punkcie G. Oś l przecina oś pionową k w punkcie O i obraca się około niej z prędkością kątową stałą ω. Jaki zachodzi związek między ω i φ, jeżeli φ jest stałe?



Zadanie rozwiążemy przy pomocy zasady d'Alemberta (str. 366). Siły bezwładności równoważą się z siłami działającymi. Zatem moment ogólny sił bezwładności i sił działających względem osi l jest zerem.

Obierzmy w pewnej chwili t układ współrzędnych, przyjmując oś l za oś x, a oś k za oś z. Ponieważ $\varphi = \text{const.}$, więc każdy punkt ciała krąży z prędkością kątową ω po kole poziomym (którego środek leży na osi z). Przyśpieszenie każdego punktu ciała jest zatem skierowane ku środkowi koła i wynosi $r\omega^2$, gdzie r oznacza promień koła.

Przyjmijmy, że ciało jest zbiorem punktów materialnych. Jeżeli przez p_i oznaczymy przyśpieszenie punktu A_i o masie m_i i współrzędnych x_i, y_i, z_i, to

$$p_{i_x} = -x_i\omega^2, \quad p_{i_y} = -y_i\omega^2, \quad p_{i_z} = 0. \tag{9}$$

Zatem siły bezwładności punktu A_i mają rzuty:

$$-m_i p_{i_x} = m_i x_i \omega^2, \quad -m_i p_{i_y} = m_i y_i \omega^2, \quad -m_i p_{i_z} = 0.$$

Moment sił bezwładności względem osi l (t.j. osi x) wynosi:

$$B_x = \sum(-m_i p_{i_y}) z_i = \omega^2 \sum m_i y_i z_i = \omega^2 D_x, \tag{10}$$

gdzie D_x oznacza moment zboczenia względem płaszczyzn xy i xz.

Środek ciężkości S ma współrzędne $x_0 = OG$, $y_0 = l_0 \sin\varphi$, $z_0 = -l_0\cos\varphi$ (gdzie $l_0 = SG$). Moment ciężaru względem osi x wynosi

$$M_x = mgl_0 \sin\varphi, \tag{11}$$

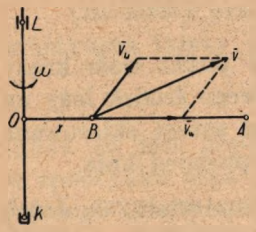
gdzie m oznacza masę ciała.

Moment reakcyj względem osi x jest zerem, gdyż reakcje zaczepione są na osi z. Zatem $B_x+M_x=0$, więc na mocy (10) i (11)

$$\omega^2 D_x + mgl_0 \sin\varphi = 0. \tag{12}$$

Równanie powyższe jest związkiem szukanym i może być spełnione tylko wtedy, gdy $D_x \leqslant 0$ (a więc np., gdy ciało znajduje się w ćwiartce, w której $y>0$, a $z<0$).

Przykład 3. Pręt poziomy OA osadzony jest sztywnie w punkcie O na osi pionowej, unieruchomionej w punktach K i L. Na pręt nasunięty jest punkt materialny (drobna kulka) B, mogący się swobodnie poruszać po pręcie. W chwili początkowej $t=0$ pręt OA obraca się około KL z prędkością kątową ω_0, punkt zaś B ma względem pręta prędkość równą zeru i znajduje się w odległości x_0 od O. Wyznaczyć ruch pręta OA i punktu materialnego B.



Niechaj I oznacza moment bezwładności pręta względem osi KL, m masę punktu B, ω prędkość kątową pręta, a x długość odcinka OB.

Załóżmy, że nie ma tarcia. Na układ złożony z osi KL, pręta OA i punktu m działają siły zewnętrzne: reakcje w L i K oraz siła ciężkości. Moment tych sił względem KL jest zerem. Kręt układu względem osi KL jest więc stały. Kręt pręta względem KL wynosi $I\omega$ (str. 205).

Prędkość $\bar{v}$ punktu B jest sumą jego prędkości względnej $\bar{v}_w$ względem pręta i prędkości unoszenia $\bar{v}_u$. Prędkość względna ma współrzędną (względem OA) $v_w=\dot{x}$ i kierunek OA; moment jej względem KL jest więc zerem. Prędkość unoszenia jest prostopadła do OA, ma kierunek poziomy i $|\bar{v}_u|=x\omega$. Zatem moment pędu punktu B względem KL równa się $mx^2\omega$. Kręt całego układu wynosi więc $I\omega+mx^2\omega$, skąd

$$(I+mx^2)\omega = k = \text{const}. \tag{13}$$

Z danych początkowych mamy $k=(I+mx_0^2)\omega_0$. Zauważmy, że praca sił działających jest zerem. Zatem energia kinetyczna układu jest stała. Energia kinetyczna pręta wynosi $\frac{1}{2}I\omega^2$ (str. 365), energia zaś punktu B

$$\tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 = \tfrac{1}{2}m(\bar{v}_w^2+\bar{v}_u^2) = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+x^2\omega^2).$$

Zatem

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+x^2\omega^2) = h = \text{const}. \tag{14}$$

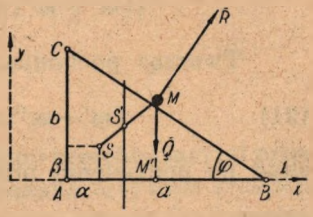
Obliczając ω z (13) i wstawiając w (14), otrzymujemy

$$k^2/(I+mx^2)+m\dot{x}^2=2h. \tag{15}$$

Równanie (15) określa ruch względny punktu po pręcie. Znając x, wyznaczamy ω z (13).

Jeżeli punkt dojdzie do A, a następnie opuści pręt, to pręt będzie się obracał ze stałą prędkością kątową ω', którą otrzymamy z (13), kładąc $x=OA=l$. Prędkość punktu w chwili opuszczania pręta wyniesie $v^2=l^2\omega'^2+\dot{x}^2$, gdzie $\dot{x}^2$ otrzymujemy z (15), kładąc $x=l$.

Przykład 4. Punkt materialny M stacza się po przeciwprostokątnej trójkąta materialnego prostokątnego ABC. Trójkąt leży w płaszczyźnie pionowej i opiera się na prostej poziomej gładkiej l. Wyznaczyć ruch układu złożonego z punktu M i trójkąta ABC.



Przyjmijmy oś l za oś x układu współrzędnych. Niechaj a i b oznaczają długości przyprostokątnych trójkąta, S środek jego masy, α i β rzuty odcinka AS na przyprostokątne, φ kąt o wierzchołku w B, m' masę trójkąta, m'' masę punktu, x_1 i $y_1=\beta$ współrzędne punktu S, zaś x_2 i y_2 współrzędne punktu materialnego M.

Załóżmy, że w chwili początkowej $t=0$ układ złożony z trójkąta i punktu M był w spoczynku.

Siłami zewnętrznymi, działającymi na układ, są reakcja prostej l oraz ciężar trójkąta i punktu M. Siły te mają stale kierunek pionowy. Zatem ich suma ma również stale kierunek pionowy. Z zasady środka masy (str. 365) wynika, że środek masy S' całego układu będzie poruszał się po pionie (ponieważ prędkość początkowa była równa zeru). Współrzędne środka S' masy układu wynoszą:

$$x_0=(m'x_1+m''x_2)/m, \qquad y_0=(m'\beta+m''y_2)/m, \tag{16}$$

gdzie $m=m'+m''$. Zatem

$$m'x_1+m''x_2=c=\text{const}. \tag{17}$$

Środek masy S trójkąta porusza się po prostej $y=\beta$, więc jego prędkość jest $\dot{x}_1$. Energia kinetyczna trójkąta ABC równa się $\frac{1}{2}m'\dot{x}_1^2$, zaś energia kinetyczna punktu M wynosi $\frac{1}{2}m''(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)$. Pracę wykonywa tylko ciężar punktu M. Ponieważ ciężar ma potencjał $-m''gy_2$, więc z zasady zachowania energii całkowitej otrzymujemy

$$\tfrac{1}{2}m'\dot{x}_1^2+\tfrac{1}{2}m''(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2)+m''gy_2=h=\text{const} \tag{18}$$

Punkt B ma odciętą x_1-a+a. Oznaczając przez M' rzut M na oś x, mamy $\operatorname{tg}\varphi=MM'/M'B$, skąd $\operatorname{tg}\varphi=y_2/(x_1-a+a-x_2)$. Zatem

$$y_2-(x_1-x_2-a+a)\operatorname{tg}\varphi=0. \tag{19}$$

Z równań (17)-(19) możemy otrzymać x_1, x_2 i y_2 jako funkcje czasu.

Równania (17) i (19) są równaniami stopnia pierwszego, możemy więc wyznaczyć z nich x_2 i y_2 liniowo przy pomocy x_1. Otrzymamy:

$$x_2=Ax_1+B, \qquad y_2=A'x_1+B', \tag{20}$$

gdzie A, B i A', B' są pewnymi stałymi. Różniczkując i wstawiając w (18) dostaniemy

$$\tfrac{1}{2}[m'+m''(A^2+A'^2)]\dot{x}_1^2+m''g(A'x_1+B')=h.$$

Tworząc pochodną, otrzymamy

$$[m'+m''(A^2+A'^2)]\dot{x}_1\ddot{x}_1+m''gA'\dot{x}_1=0, \tag{21}$$

skąd po podzieleniu przez $\dot{x}_1$

$$\ddot{x}_1=\text{const.} \tag{22}$$

A więc trójkąt poruszać się będzie ruchem postępowym jednostajnie przyśpieszonym.

Z równań (20) otrzymujemy, znając x_1,

$$A'x_2-Ay_2=A'B-AB'. \tag{23}$$

A więc punkt M będzie się poruszał po linii prostej.

Na mocy (20) mamy $\ddot{x}_2=A\ddot{x}_1$ i $\ddot{y}_2=A'\ddot{x}_1$, więc według (22) $\ddot{x}_2=\text{const.}$ i $\ddot{y}_2=\text{const.}$ Rzuty przyśpieszenia punktu M są stałe, więc i przyśpieszenie punktu M jest stałe. Przyśpieszenie względne punktu M względem trójkąta jest również stałe, gdyż otrzymujemy je, odejmując od przyśpieszenia punktu M przyśpieszenie trójkąta. Punkt M będzie więc staczał się po przeciwprostokątnej ruchem jednostajnie przyśpieszonym (względem przeciwprostokątnej).

Zbadajmy jeszcze, czy M nie oderwie się od trójkąta przed osiągnięciem punktu B.

Oznaczmy przez $\bar{R}$ reakcję trójkąta na punkt M. Ponieważ na punkt M działa ciężar $\bar{Q}$ i siła $\bar{R}$, więc tworząc rzuty na osie x i y, otrzymamy:

$$m''\ddot{x}_2 = R_x \quad \text{i} \quad m''\ddot{y}_2 = -m''g + R_y.$$

Lecz $\ddot{x}_2 = \text{const.}$ i $\ddot{y}_2 = \text{const}$, więc $R_x = \text{const.}$ i $R_y = \text{const.}$ Zatem $\bar{R}$ jest stałe. Siła $\bar{R}$ jest więc skierowana stale ku punktowi M, który zatem nie może odpaść od trójkąta ABC przed osiągnięciem punktu B.

§ 3. Obrót około osi stałej. Jeżeli ciało sztywne ma oś l unieruchomioną, to może się tylko obracać około tej osi. Załóżmy, że na ciało działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ Nadajmy osi l dowolny zwrot i oznaczmy przez I moment bezwładności ciała względem l, przez M moment sił względem l, a przez ω prędkość kątową.

Kręt względem osi l wynosi $K = I\omega$ ((7), str. 205). Ponieważ w myśl twierdzenia o kręcie względem osi (str. 206) mamy $\dot{K} = M$, więc

$$I\dot{\omega} = M. \tag{1}$$

Przyśpieszenie kątowe jest $\varepsilon = \dot{\omega}$, więc

$$I\varepsilon = M. \tag{1}$$

Niech Π i Π' będą dwiema płaszczyznami przechodzącymi przez oś l; Π niech będzie nieruchoma, a Π' związana sztywnie z ciałem i obracająca się wraz z nim. Niech wreszcie φ oznacza kąt między płaszczyznami Π a Π'. Wówczas $\dot{\varphi} = \omega$ i $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, skąd na mocy (I)

$$I\ddot{\varphi} = M. \tag{2}$$

Równanie różniczkowe (2) ma postać taką, jak równanie $m\ddot{x} = P$, określające ruch punktu materialnego po osi x.

Jeżeli siły $\bar{P}_i$ lub moment M dane są jako funkcje zależne od φ, $\dot{\varphi}$ i t (t. j. od położenia ciała, prędkości kątowej i czasu), wówczas równanie (2) jest równaniem różniczkowym rzędu drugiego i pozwala wyznaczyć ruch, gdy znamy φ i $\dot{\varphi}$ (t. j. położenie i prędkość kątową ciała) dla chwili początkowej $t = t_0$.

Energia kinetyczna ciała przy obrocie około osi l wynosi $E = \frac{1}{2}I\omega^2$ (str. 365). Oznaczmy przez ω_0 i ω prędkość kątową w chwilach t_0 i t, a przez $L_{t_0,t}$ pracę sił od chwili t_0 do t. Ponieważ siły reakcyjne, utrzymujące oś w spoczynku, zaczepione są w punktach osi, więc nie wykonują pracy. Z twierdzenia o równowartości pracy i energii kinetycznej (str. 366) dostaniemy zatem

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 = L_{t_0,t}. \tag{3}$$

Praca sił wyraża się wzorem (14), str. 364,

$$(4) \qquad L_{t_0,t} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M\, d\varphi,$$

gdzie φ_0 i φ oznaczają kąty obrotu w chwilach t_0 i t. Jeżeli M jest funkcją zależną tylko od φ, możemy otrzymać $L_{t_0,t}$ ze wzoru (4) jako funkcję kąta φ. Wstawiając w (3), otrzymamy równanie różniczkowe rzędu pierwszego.

Przykład 1. Maszyna Atwooda[1]). Na końcach nici nierozciągliwej (bez masy), przewiniętej przez krążek materialny doskonale chropowaty, zawieszone są dwa punkty ciężkie o masach m_1 i m_2. Niech r oznacza promień krążka.

Załóżmy, że punkty poruszają się pionowo. Drogi przebywane przez punkty są równe, a więc przyśpieszenia punktów równe są co do wielkości, lecz mają zwroty przeciwne.

Oznaczmy przez p rzut przyśpieszenia punktu m_1 na oś z, skierowaną pionowo w dół (p. rysunek na str. 197). Krążek jest doskonale chropowaty, a zatem nić nie ślizga się po nim. Jeżeli więc krążek obróci się o kąt φ (przyczem przyjmujemy $\varphi>0$, gdy punkt m_1 spada), to punkt m_1 przebiegnie drogę $s=r\varphi$. Stąd $\ddot{s}=r\ddot{\varphi}$, a zatem

$$(5) \qquad p=r\varepsilon.$$

Oznaczmy przez $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ reakcje nici na punkty m_1 i m_2, a przez R_1 i R_2 ich wartości bezwzględne. Reakcje $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ nie są równe, gdyż nić nie jest przewinięta przez ciało gładkie.

Na punkty m_1 i m_2 działają reakcje nici i ciężary. Zatem:

$$(6) \qquad m_1 p = m_1 g - R_1, \qquad -m_2 p = m_2 g - R_2.$$

Kawałek nici od punktu m_1 do krążka działa na krążek z siłą $-\bar{R}_1$; podobnie kawałek nici od punktu m_2 do krążka działa na krążek z siłą $-\bar{R}_2$. Momenty tych sił względem osi krążka wynoszą $R_1 r$ i $-R_2 r$, przyczem moment siły $-\bar{R}_1$ jest dodatni, gdyż siła $-\bar{R}_1$ stara się obrócić krążek w kierunku przyjętym poprzednio za dodatni dla kąta φ.

Oznaczając więc przez I moment bezwładności krążka względem jego osi, otrzymamy na mocy (I), str. 375,

$$(7) \qquad I\varepsilon = (R_1 - R_2)r.$$

---

[1]) por. str. 197, przykład 4.

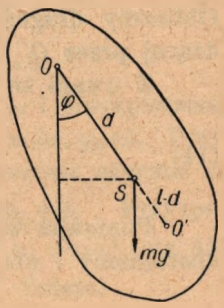
Z równań (5)-(7) możemy wyznaczyć ε, p, R_1 i R_2. Z równań (6) dostajemy $R_1 - R_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)p$. Wstawiając w (7), otrzymamy $I\varepsilon = (m_1 - m_2)rg - (m_1 + m_2)rp$, skąd na mocy (5)

$$\varepsilon = \frac{(m_1 - m_2)rg}{I + (m_1 + m_2)r^2}. \tag{8}$$

Widzimy więc, że $\varepsilon = \text{const}$, zatem wobec (5) $p = \text{const}$. Punkty m_1 i m_2 będą się tedy poruszać ruchem jednostajnie przyśpieszonym. Przyśpieszenie p otrzymamy z (8) i (5). Reakcje R_1 i R_2 obliczyć można z równań (6).

Wahadło fizyczne. *Wahadłem fizycznym* nazywamy ciało sztywne, obracające się około osi poziomej pod wpływem siły ciężkości.

Poprowadźmy przez środek S masy wahadła płaszczyznę pionową, prostopadłą do osi i przecinającą oś w punkcie O. Niech φ oznacza kąt między OS a pionem; zwrot dodatni obrotu obieramy przytem od ręki lewej ku prawej. Oznaczmy wreszcie przez M moment siły ciężkości, przez I moment bezwładności wahadła względem osi obrotu i niech $d = OS$.



Przyśpieszenie kątowe równa się $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, zaś moment siły ciężkości

$$M = -mgd\sin\varphi$$

(gdzie m oznacza masę ciała), skąd na mocy (2), str. 375, $I\ddot{\varphi} = -mgd\sin\varphi$ czyli

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgd}{I}\sin\varphi. \tag{9}$$

Porównując równanie (9) z równaniem wahadła matematycznego ((I), str. 132): $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$, widzimy, że jeżeli długość l wahadła matematycznego spełnia warunek

$$-mgd/I = -g/l, \tag{10}$$

to ruch wahadła fizycznego jest taki jak wahadła matematycznego. Z (10) otrzymujemy

$$l = I/md. \tag{11}$$

A więc: *ruch wahadła fizycznego jest taki jak ruch wahadła matematycznego o długości* $l=I/md$, gdzie I oznacza moment bezwładności względem osi obrotu, m masę wahadła, a d odległość środka masy od osi obrotu.

Oznaczając przez K ramię bezwładności względem osi obrotu, mamy $I=mK^2$, skąd na mocy (11)

$$l=K^2/d. \tag{12}$$

Długość l nazywamy *długością zredukowaną* wahadła fizycznego względem osi obrotu.

Niechaj I_0 oznacza moment, zaś K_0 ramię bezwładności względem osi, przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do osi obrotu. Wówczas (str. 161) $I=I_0+md^2$, skąd $mK^2=mK_0^2+md^2$ czyli $K^2=K_0^2+d^2$, a więc na mocy (12)

$$l=\frac{K_0^2}{d}+d. \tag{13}$$

Weźmy pod uwagę na prostej OS punkt O' w odległości l od O. Ponieważ $l>d$ na mocy (13), więc O' wypadnie poza punktem S. Obliczmy długość zredukowaną l' względem osi obrotu, przechodzącej przez O' i równoległej do osi l, przechodzącej przez O.

Z uwagi że $O'S=l-d$ mamy na mocy (13)

$$l'=\frac{K_0^2}{l-d}+l-d. \tag{14}$$

Ponieważ wobec (13) jest $l-d=K_0^2/d$, więc po podstawieniu dostaniemy z (14)

$$l'=d+\frac{K_0^2}{d}.$$

Porównując z (13), widzimy, że

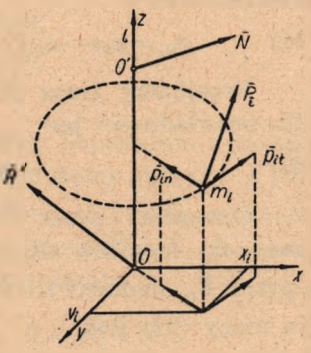
$$l'=l.$$

Długości zredukowane względem osi przechodzących przez O i przez O' są zatem równe.

Jeżeli więc zawiesimy ciało na osi przechodzącej przez O' i równoległej do osi przechodzącej przez O, to czas wahania w obu przypadkach będzie jednakowy (przy tym samym początkowym kącie wychylenia).

Punkt O' nazywamy *środkiem wahań* względem punktu O

Wyznaczanie reakcji na oś obrotu. Załóżmy, że oś obrotu l jest unieruchomiona przy pomocy reakcyj (bez tarcia), zaczepionych na osi l. Przyjmując za środek redukcji dowolny punkt O na osi l, możemy reakcje zastąpić jedną siłą $\bar{R}$ o początku O, i parą sił o momencie $\bar{H}$. Na ogół $\bar{R}$ i $\bar{H}$ zmieniają się podczas ruchu. Do obliczenia $\bar{R}$ i $\bar{H}$ użyjemy zasady d'Alemberta.



Obierzmy O za początek układu współrzędnych, przyjmując oś l za oś z. Podzielmy ciało na drobne części i zastąpmy każdą z nich punktem materialnym o równej masie. Otrzymamy w ten sposób układ punktów materialnych $m_1, m_2, \ldots$ o współrzędnych x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... Przyśpieszenia punktów układu oznaczymy przez $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots$, a siły działające na te punkty przez $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$

Siły bezwładności $-m_l \bar{p}_l$ równoważą się z reakcjami i z siłami $\bar{P}_l$, więc suma i moment ogólny (względem O) są równe zeru. Zatem:

$$\sum \bar{P}_l + \bar{R} + \sum(-m_l \bar{p}_l) = 0, \tag{15}$$

$$\sum \mathrm{Mom}_O \bar{P}_l + \bar{H} + \sum \mathrm{Mom}_O(-m_l \bar{p}_l) = 0. \tag{16}$$

Niech w chwili t ciało ma prędkość kątową ω i przyśpieszenie kątowe ε. Weźmy pod uwagę dowolny punkt $m_l(x_l, y_l, z_l)$. Przyśpieszenie $\bar{p}_l$ tego punktu rozłóżmy na przyśpieszenie styczne $\bar{p}_{i_t}$ i normalne $\bar{p}_{i_n}$ (str. 40). Mamy oczywiście $\bar{p}_i = \bar{p}_{i_t} + \bar{p}_{i_n}$. Przyśpieszenia składowe wyrażają się wzorami $p_{i_t} = r_i \varepsilon$ i $p_{i_n} = r_i \omega^2$ (str. 45), gdzie r_l oznacza odległość punktu od osi obrotu. Zatem:

$$p_{i_{t_x}} = y_i \varepsilon, \qquad p_{i_{t_y}} = -x_i \varepsilon, \qquad p_{i_{t_z}} = 0; \tag{17}$$

$$p_{i_{n_x}} = -x_i \omega^2, \qquad p_{i_{n_y}} = -y_i \omega^2, \qquad p_{i_{n_z}} = 0. \tag{18}$$

Oznaczając przez m masę ciała, przez x_0, y_0, z_0 współrzędne, a przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie środka S jego masy, otrzymamy ze wzoru (III), str. 199,

$$\sum m_l \bar{p}_l = m \bar{p}_0. \tag{19}$$

Równanie (15) przyjmie więc postać

$$\sum \bar{P}_l + \bar{R} - m \bar{p}_0 = 0. \tag{20}$$

Dla przyśpieszenia stycznego $\bar{p}_{0_t}$ i normalnego $\bar{p}_{0_n}$ środka S masy, mamy $\bar{p}_0=\bar{p}_{0_t}+\bar{p}_{0_n}$. Na mocy więc (17) i (18) otrzymamy (kładąc $i=0$):

$$(21)\qquad p_{0_x}=y_0\varepsilon-x_0\omega^2,\qquad p_{0_y}=-x_0\varepsilon-y_0\omega^2,\qquad p_{0_z}=0.$$

Przejdźmy teraz do obliczenia momentów sił bezwładności. Siła bezwładności jest

$$(22)\qquad -m_i\bar{p}_i=-m_i\bar{p}_{i_t}-m_i\bar{p}_{i_n}.$$

Oznaczmy przez $\bar{B}$ moment sił bezwładności względem O, przez $\bar{B}_t$ moment sił stycznych bezwładności (t. j. sił $-m_i\bar{p}_{i_t}$), a przez $\bar{B}_n$ moment sił normalnych bezwładności (t. j. sił $-m_i\bar{p}_{i_n}$). Na mocy (22) jest

$$(23)\qquad \bar{B}=\bar{B}_t+\bar{B}_n.$$

Rzut $\bar{B}_t$ na oś x wynosi (por. (2), str. 236)

$$(24)\qquad B_{t_x}=\sum(-m_ip_{i_y}z_i+m_ip_{i_z}y_i),$$

skąd na mocy (17)

$$(25)\qquad B_{t_x}=\varepsilon\sum m_ix_iz_i \text{ i podobnie } B_{t_y}=\varepsilon\sum m_iy_iz_i,\quad B_{t_z}=-\varepsilon\sum m_i(x_i^2+y_i^2).$$

Postępując w ten sam sposób, otrzymamy:

$$(26)\qquad B_{n_x}=\omega^2\sum m_iy_iz_i,\qquad B_{n_y}=\omega^2\sum m_ix_iz_i,\qquad B_{n_z}=0.$$

Przy dzieleniu ciała na coraz drobniejsze części sumy we wzorach (24) dążą do momentów zboczeń D_y i D_x, oraz momentu bezwładności I_z względem osi z (str. 161). W granicy dostaniemy więc z (25) i (26):

$$(27)\qquad B_{t_x}=\varepsilon D_y,\qquad B_{t_y}=\varepsilon D_x,\qquad B_{t_z}=-\varepsilon I_z;$$

$$(28)\qquad B_{n_x}=\omega^2D_x,\qquad B_{n_y}=-\omega^2D_y,\qquad B_{n_z}=0,$$

skąd na mocy (23):

$$(29)\qquad B_x=\varepsilon D_y+\omega^2D_x,\qquad B_y=\varepsilon D_x-\omega^2D_y,\qquad B_z=-\varepsilon I_z.$$

Tworząc rzuty na osie układu, dostaniemy z równań (20) i (21):

$$(11)\qquad \begin{aligned}&\sum P_{i_x}+R_x-my_0\varepsilon+mx_0\omega^2=0,\\ &\sum P_{i_y}+R_y+mx_0\varepsilon+my_0\omega^2=0,\\ &\sum P_{i_z}+R_z=0.\end{aligned}$$

Siły reakcyjne zaczepione są na osi l, zatem $H_z=0$. Oznaczając przez $\bar{M}$ moment sił $\bar{P}_i$ względem O, otrzymamy więc na mocy (16) i (29) dla rzutów na osie układu:

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} &M_x+H_x+\varepsilon D_y+\omega^2 D_x=0,\\ &M_y+H_y+\varepsilon D_x-\omega^2 D_y=0,\\ &M_z-\varepsilon I_z=0. \end{aligned}$$

Ostatnie z równań (III) wyprowadziliśmy poprzednio z zasady krętu (str. 375, wzór (I)). Z równań (II) i (III) możemy obliczyć $\bar{R}$ i $\bar{H}$.

Załóżmy teraz, że oś jest unieruchomiona w dwóch punktach O i O'. Oznaczmy reakcje w tych punktach przez $\bar{R}'$ i $\bar{N}$, położmy $d=OO'$ i nadajmy osi z kierunek OO'. Otrzymamy:

$$\text{(30)}\qquad R_x=R'_x+N_x,\qquad R_y=R'_y+N_y,\qquad R_z=R'_z+N_z;$$

$$\text{(31)}\qquad H_x=N_y d,\qquad H_y=-N_x d,\qquad H_z=0.$$

Jeżeli wyznaczymy $\bar{R}$ i $\bar{H}$ z (II) i (III), to możemy obliczyć z (30) i (31) tylko składowe N_x, N_y i R'_x, R'_y oraz sumę $N_z+R'_z$.

Załóżmy, że punkt O' jest w t. zw. łożysku szyjnym, w którym nie ma tarcia (rys. 1, str. 281). Wówczas $\bar{N}$ jest prostopadłe do osi obrotu; zatem $N_z=0$.

Jeżeli więc punkt O' jest w łożysku szyjnym bez tarcia, reakcje dadzą się wyznaczyć.

Oś obrotu osią środkową bezwładności. Przy założeniu, że środek ciężkości leży na osi obrotu i że oś obrotu jest jedną z osi środkowych bezwładności, mamy (str. 167):

$$x_0=0,\qquad y_0=0,\qquad D_x=0,\qquad D_y=0.$$

Równania (II) i (III) przyjmą więc postać:

$$\text{(32)}\qquad \sum P_{i_x}+R_x=0,\qquad \sum P_{i_y}+R_y=0,\qquad \sum P_{i_z}+R_z=0;$$

$$\text{(33)}\qquad M_x+H_x=0,\qquad M_y+H_y=0,\qquad M_z-\varepsilon I_z=0.$$

Widzimy stąd, że przy tym założeniu reakcje nie zależą od prędkości kątowej ani od przyśpieszenia kątowego, są więc takie, jak gdyby ciało było w spoczynku.

Jeżeli siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ są równe zeru, to z równań (32) i (33) otrzymujemy $\bar{R}=0$, $\bar{H}=0$ i $\varepsilon=0$, więc $\omega=\text{const}$. Ponieważ reakcje są równoważne zeru, więc możemy przyjąć, że oś l nie jest unieruchomiona, czyli że oś obrotu jest swobodna.

Na odwrót, jeżeli założymy, że na ciało nie działają żadne siły, a więc że $\bar{P}_l=0$, $\bar{R}=0$ i $\bar{H}=0$, to równania (II) i (III) przyjmą postać:

$$(34)\qquad \begin{aligned} &-y_0\varepsilon+x_0\omega^2=0, \qquad x_0\varepsilon+y_0\omega^2=0,\\ &\varepsilon D_y+\omega^2 D_x=0, \qquad \varepsilon D_x-\omega^2 D_y=0, \qquad \varepsilon I_z=0. \end{aligned}$$

Na mocy ostatniego z równań (34) jest $\varepsilon=0$, zatem $\omega=\text{const}$. Jeżeli $\omega\neq 0$ (t.zn. gdy ciało nie jest w spoczynku), otrzymamy z (34) $x_0=0$, $y_0=0$ oraz $D_x=0$, $D_y=0$. Oś z (t.j. oś obrotu) jest tedy osią środkową bezwładności.

Wyprowadziliśmy więc następującą własność osi środkowych bezwładności:

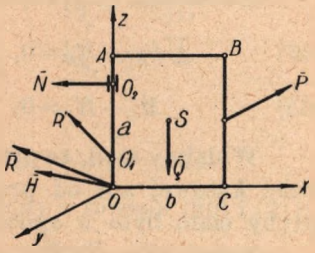
Jeżeli ciało sztywne swobodne bez działania sił obraca się około stałej osi, to oś ta jest jedną z osi środkowych bezwładności.

Przykład 2. Drzwi ciężkie w kształcie prostokąta $OABC$ (gdzie $\overline{OA}$ i $\overline{CB}$ mają zwrot pionowy w górę) mogą się obracać około osi pionowej OA, unieruchomionej w punktach O_1 i O_2 boku OA, przyczem $OO_1=O_2A=d$. W chwili $t=0$ drzwi są w spoczynku i zaczyna działać siła $\bar{P}$ o stałej wartości bezwzględnej P, prostopadła do drzwi i zaczepiona stale w środku D boku BC. Wyznaczyć reakcje w punktach O_1 i O_2 w chwili t.

Oznaczmy przez m masę drzwi, przez I moment bezwładności względem osi OA. Niech $OA=a$ i $OC=b$. Przyjmijmy, że siła $\bar{P}$ obraca drzwi od ręki prawej ku lewej względem osi obrotu, skierowanej w górę.

Moment siły $\bar{P}$ względem osi obrotu jest stały i równa się bP. Zatem $I\varepsilon=bP$ czyli $\varepsilon=bP/I$. Jeżeli drzwi są jednorodne, to na mocy (8), str. 184, jest $I=\frac{1}{3}mb^2$. A więc

$$(35)\qquad \varepsilon=3P/mb.$$



Przyśpieszenie kątowe $\varepsilon=\text{const}$., zatem

$$(36)\qquad \omega=\varepsilon t=3Pt/mb.$$

Drzwi będą się więc obracać ruchem jednostajnie przyśpieszonym.

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem reakcji. Przyjmijmy w chwili t punkt O za początek układu współrzędnych, nadając osiom z i x kierunki OA i OC. Oznaczmy przez $\bar{R}'$ reakcję w O_1, przez $\bar{N}$

reakcję w O_2, wreszcie przez $\bar{R}$ sumę, a przez $\bar{H}$ moment reakcji względem O. Zakładając, że w O_2 jest łożysko szyjne (str. 231), otrzymamy:

$$(37) \qquad R_x = R'_x + N_x, \qquad R_y = R'_y + N_y, \qquad R_z = R'_z;$$

$$(38) \qquad H_x = R'_y d + N_y(a-d), \qquad H_y = -R'_x d - N_x(a-d), \qquad H_z = 0.$$

Z równań (II), str. 380, i (III), str. 381, otrzymamy $\bar{R}$ i $\bar{H}$, a następnie obliczymy $\bar{R}'$ i $\bar{N}$ z (37) i (38).

Siłami działającymi są ciężar $\bar{Q}$ i siła $\bar{P}$. Współrzędne środka S masy drzwi są: $x_0 = b/2$, $y_0 = 0$, $z_0 = a/2$, zaś początku siły $\bar{P}$ $x = b$, $y = 0$, $z = a/2$. Ponieważ drzwi leżą w płaszczyźnie zx, więc $D_x = 0$. Moment zboczenia D_y wynosi (str. 178)

$$D_y = \int_0^b \int_0^a \varrho x z \, dx \, dz = \int_0^b \frac{1}{2} \varrho a^2 x \, dx = \frac{1}{4} a^2 b^2 \varrho,$$

gdzie ϱ oznacza gęstość. Ponieważ $ab\varrho = m$, więc $D_y = \frac{1}{4} mab$. Z równań (II), str. 380, i (III), str. 381, otrzymamy:

$$(39) \qquad R_x + \tfrac{1}{2} mb\omega^2 = 0, \qquad -P + R_y + \tfrac{1}{2} mb\varepsilon = 0, \qquad -mg + R_z = 0;$$

$$(40) \qquad -\tfrac{1}{2} aP + H_x + \tfrac{1}{4} mab\varepsilon = 0, \qquad -\tfrac{1}{2} mbg + H_y - \tfrac{1}{4} mab\omega^2 = 0.$$

Z równań (39) i (40) obliczamy $\bar{R}$ i $\bar{H}$ przy pomocy (35) i (36), a następnie wyznaczamy reakcje $\bar{R}'$ i $\bar{N}$ z równań (37) i (38).

Przykład 3. Pręt ciężki OA zawieszony jest na osi poziomej i może się tylko obracać w płaszczyźnie pionowej dokoła swego końca O. Pręt puszczono wolno z położenia poziomego. Jaka jest reakcja w O, gdy pręt tworzy z pionem kąt φ?

Oznaczmy przez $\bar{R}$ reakcję w O, przez $\bar{Q}$ ciężar pręta, przez m masę ciała, a przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie środka S masy pręta.

Z twierdzenia o ruchu środka masy wynika, że

$$(41) \qquad m\bar{p}_0 = \bar{R} + \bar{Q}.$$

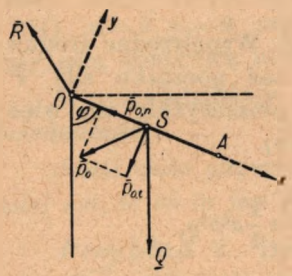
Z równania tego można obliczyć $\bar{R}$, jeżeli znane jest $\bar{p}_0$. Położmy $l = OS$ i oznaczmy przez ω i ε prędkość i przyśpieszenie kątowe pręta; wówczas przyśpieszenia: styczne p_{0_t} i normalne p_{0_n} wyniosą:

$$p_{0_t} = l\varepsilon \quad \text{i} \quad p_{0_n} = l\omega^2.$$

Przyśpieszenie kątowe otrzymamy z równania $I\varepsilon = M$. Ponieważ moment siły ciężkości względem O równa się $mgl\sin\varphi$, więc

$$\varepsilon = mgl\sin\varphi / I, \tag{42}$$

gdzie I oznacza moment bezwładności pręta względem O.



Prędkość kątową ω obliczymy, opierając się na zasadzie równowartości pracy i energii kinetycznej (str. 366). Przyrost energii kinetycznej pręta równa się pracy siły ciężkości. Energia kinetyczna pręta jest $E = \frac{1}{2}I\omega^2$, a praca ciężaru $L = mgl\cos\varphi$, bo poziom środka masy obniżył się o $h = l\cos\varphi$. Na początku energia kinetyczna równa była zeru. Więc $\frac{1}{2}I\omega^2 = mgl\cos\varphi$ czyli

$$\omega^2 = 2mgl\cos\varphi / I. \tag{43}$$

Przyjmijmy kierunek OS za kierunek dodatni osi x układu współrzędnych (x, y). Tworząc rzuty na osie x i y, otrzymamy z równania (41):

$$-ml\omega^2 = mg\cos\varphi + R_x, \qquad -ml\varepsilon = -mg\sin\varphi + R_y.$$

Z (42) i (43) dostajemy zatem:

$$R_x = -mg\cos\varphi[2ml^2/I + 1], \qquad R_y = mg\sin\varphi[1 - ml^2/I].$$

Jeżeli pręt jest jednorodny, to długość jego równa się $a = 2l$, zaś moment bezwładności $I = \frac{1}{3}ml^2$ (str. 183). Zatem:

$$R_x = -\tfrac{5}{2}mg\cos\varphi, \qquad R_y = \tfrac{1}{4}mg\sin\varphi,$$

skąd

$$|\bar{R}| = \tfrac{1}{4}mg\sqrt{1 + 99\cos^2\varphi}.$$

Maksymalna wartość $|\bar{R}|$ wypada więc dla $\varphi = 0$ i wynosi

$$|\bar{R}| = \frac{5mg}{2}.$$

Środek uderzeń. Przyjmijmy, że oś obrotu z jest osią główną bezwładności w punkcie O i że w pewnej chwili t_0 środek masy leży w płaszczyźnie yz (przyczem $y_0>0$). Zatem:

$$x_0=0, \quad y_0>0, \quad D_x=0, \quad D_y=0. \tag{44}$$

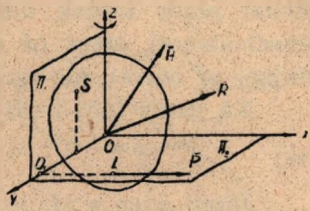
Równania (II), str. 380 i (III), str. 381, przyjmują wówczas postać:

$$\sum P_{ix}+R_x-my_0\varepsilon=0, \quad \sum P_{iy}+R_y+my_0\omega^2=0, \quad \sum P_{iz}+R_z=0, \tag{45}$$

$$M_x+H_x=0, \quad M_y+H_y=0, \quad M_z-\varepsilon I_z=0. \tag{46}$$

Załóżmy, że w chwili t_0 zaczęła nagle działać siła $\bar{P}$, zaczepiona w punkcie A o współrzędnych x,y,z. Wskutek działania siły $\bar{P}$ reakcja $\bar{R}$ i moment $\bar{H}$ zmieniły się na $\bar{R}+\bar{R}'$ i $\bar{H}+\bar{H}'$; przyśpieszenie ε przyjęło wartość $\varepsilon+\varepsilon'$, natomiast prędkość kątowa, równa ω w chwili t_0, nie uległa nagłej zmianie. Od chwili działania siły $\bar{P}$ równania (II) i (III) przyjmą (z uwagi na (44)) postać:

$$\begin{aligned} &P_x+\sum P_{ix}+R_x+R'_x-my_0(\varepsilon+\varepsilon')=0,\\ &P_y+\sum P_{iy}+R_y+R'_y+my_0\omega^2=0,\\ &P_z+\sum P_{iz}+R_z+R'_z=0, \end{aligned} \tag{47}$$



$$\begin{aligned} &M'_x+M_x+H_x+H'_x=0,\\ &M'_y+M_y+H_y+H'_y=0,\\ &M'_z+M_z-(\varepsilon+\varepsilon')I_z=0, \end{aligned} \tag{48}$$

gdzie $\bar{M}'$ oznacza moment siły $\bar{P}$ względem O. Porównując równania (45) i (46) z (47) i (48), dostaniemy:

$$\begin{aligned} &P_x+R'_x-my_0\varepsilon'=0, \quad P_y+R'_y=0, \quad P_z+R'_z=0,\\ &M'_x+H'_x=0, \quad M'_y+H_y=0, \quad M'_z-\varepsilon' I_z=0. \end{aligned} \tag{49}$$

Z równań (49) możemy wyznaczyć $\bar{R}'$ i $\bar{H}'$.

Załóżmy, że $\bar{P}$ ma kierunek osi x i leży w płaszczyźnie xy. Wówczas:

$$z=0, \quad P_y=0, \quad P_z=0, \quad M'_x=0, \quad M'_y=0, \quad M'_z=P_x y. \tag{50}$$

Z (49) otrzymujemy:

$$=', \tag{51}$$

$$\varepsilon'=P_x y/I_z. \tag{52}$$

Z (49), (50) i (52) dostajemy:

$$R'_x = P_x(my y_0/I_z - 1), \qquad R'_y = 0, \qquad R_z = 0. \tag{53}$$

Weźmy pod uwagę na osi y punkt O_1 o rzędnej l, określonej wzorem

$$l = I_z/my_0. \tag{54}$$

Jeżeli kierunek siły $\bar{P}$ przechodzi przez O_1, to $y = l$, a zatem na mocy (53) jest $R'_x = 0$, $R'_y = 0$ i $R'_z = 0$, skąd

$$\bar{R} = 0. \tag{55}$$

Punkt O_1 nazywamy *środkiem uderzeń*.

Środek uderzeń leży na krawędzi przecięcia płaszczyzny Π_1, przechodzącej przez oś obrotu i środek masy, z płaszczyzną Π_2, prostopadłą do osi obrotu w punkcie O. Środek uderzeń leży na Π_1 po tej stronie osi obrotu co środek masy. Odległość środka uderzeń od osi obrotu określona jest wzorem (54).

Gdy na ciało nagle zaczyna działać siła, której kierunek przechodzi przez środek uderzeń i jest prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu i środek masy, to reakcje utrzymujące oś obrotu nie zmieniają się nagle (oś nie doznaje wstrząsu).

Na mocy (53) i (54) mamy

$$R'_x = P_x(y/l - 1). \tag{56}$$

Jeżeli więc $y > l$, to $\bar{R}'$ i $\bar{P}$ mają zwroty zgodne, jeżeli natomiast $y < l$, to $\bar{R}$ i $\bar{P}$ mają zwroty przeciwne.

Przyjmijmy, że w wahadle fizycznym pewna płaszczyzna Π_2, prostopadła do osi, przechodzi przez środek masy S i jest płaszczyzną środkową. Zatem oś obrotu jest osią główną bezwładności względem punktu O, w którym oś przebija płaszczyznę Π_2. Prosta OS jest przekrojem płaszczyzny Π_2 płaszczyzną Π_1, przechodzącą przez oś obrotu i środek masy. Na prostej OS leży zatem środek uderzeń w odległości l od O, określonej wzorem (54), gdzie oczywiście $y_0 = OS$. Kładąc więc $OS = d$ i $I_z = I$, dostajemy $l = I/md$. Porównując ze wzorem (11), str. 377, widzimy, że środek uderzeń schodzi się ze środkiem wahań.

Załóżmy, że wahadło jest w spoczynku i że oś wahadła opiera się na dwóch prętach gładkich, poziomych. Płaszczyzna Π_1 (przechodząca przez oś i środek masy) jest tedy pionowa.

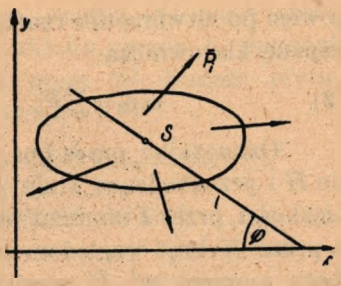
Jeżeli uderzymy wahadło w środku uderzeń w kierunku poziomym prostopadle do Π_1, to oś nie dozna wstrząśnień.

Jeżeli uderzymy je powyżej środka uderzeń, wówczas na mocy (56) potrzebna będzie do utrzymania osi w spoczynku reakcja, mająca zwrot przeciwny niż uderzenie. Ponieważ reakcja ta wystąpić nie może (gdyż pręty, na których oś się opiera, są gładkie i nie mogą przeto wywołać reakcji poziomej), więc oś posunie się w kierunku uderzenia.

Jeżeli zaś uderzymy wahadło poniżej środka uderzeń, to oś posunie się w kierunku przeciwnym do kierunku uderzenia.

§ 4. Ruch płaski. Ruch płaski figury płaskiej. Niech figura materialna porusza się w płaszczyźnie Π i niech siły działające $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots$ również leżą w tej płaszczyźnie. Oznaczmy przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie środka S masy figury, przez m masę, a przez $\bar{F}$ sumę sił. Wówczas w myśl (I), str. 365,

$$(I) \qquad m\bar{p}_0 = \bar{P}.$$



Oznaczmy dalej przez ω prędkość chwilową kątową, a przez I_0 moment bezwładności względem środka masy. Ruch chwilowy figury możemy uważać za złożenie ruchu postępowego z prędkością środka masy i ruchu obrotowego z prędkością ω około środka masy. Ponieważ kręt względem środka masy ruchu postępowego jest zerem (str. 203), więc kręt K ruchu chwilowego względem środka masy równy jest krętowi ruchu obrotowego. Na mocy wzoru (7), str. 205, mamy zatem

$$(1) \qquad K = I\omega,$$

skąd $\dot{K} = I\varepsilon$, gdzie $\varepsilon = \dot{\omega}$. Oznaczając przez M moment sił względem środka masy, otrzymamy z (II), str. 365,

$$(II) \qquad I\varepsilon = M.$$

Równania (I) i (II) określają ruch figury materialnej w płaszczyźnie.

Weźmy pod uwagę na figurze stałą prostą l i oznaczmy przez φ kąt między l a osią x, mierzony w kierunku wskazówek zegara. Położenie figury określają współrzędne x_0, y_0 środka masy i kąt φ.

Z równania (I), tworząc rzuty na osie układu, otrzymamy:

$$m\ddot{x}_0 = P_x, \qquad m\ddot{y}_0 = P_y. \tag{I'}$$

Ponieważ $\dot{\varphi} = \omega$ i $\ddot{\varphi} = \varepsilon$, więc na mocy (II)

$$I\ddot{\varphi} = M. \tag{II'}$$

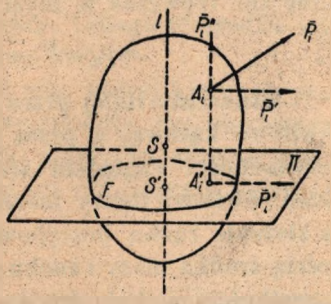
Z równań (I') i (II') możemy wyznaczyć x_0, y_0 i φ.

Ruch płaski ciała. Niech ciało porusza się ruchem płaskim, t.zn. niech jego punkty poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej płaszczyzny stałej Π, zwanej płaszczyzną kierowniczą (str. 315). Siły $\{\bar{P}_i\}$, działające na ciało, rozłóżmy na składowe $\{\bar{P}'_i\}$ równoległe do Π i na składowe $\{\bar{P}''_i\}$ prostopadłe do Π. Ponieważ środek ciężkości S porusza się w płaszczyźnie równoległej do Π, więc jego przyśpieszenie $\bar{p}_0$ leży w płaszczyźnie Π. Na mocy zasady ruchu środka masy mamy

$$m\bar{p}_0 = \sum \bar{P}_i = \sum \bar{P}'_i + \sum \bar{P}''_i,$$

a więc po utworzeniu rzutów na płaszczyznę kierowniczą

$$m\bar{p}_0 = \sum \bar{P}'_i. \tag{2}$$



Oznaczając przez l oś prostopadłą do Π i przechodzącą stale przez środek ciężkości, przez I moment bezwładności, a przez K kręt względem osi l, otrzymamy (str. 365) $\dot{K} = \sum \mathrm{Mom}_l \bar{P}_i$. Lecz moment sił $\bar{P}''_i$ względem l jest zerem, gdyż $\bar{P}''_i \parallel l$. Zatem

$$\dot{K} = \sum \mathrm{Mom}_l \bar{P}'_i. \tag{3}$$

Oś obrotu chwilowego w ruchu płaskim jest prostopadła do płaszczyzny kierowniczej; oś l jest zatem osią obrotu chwilowego. Ponieważ przechodzi ona stale przez środek masy, więc ((7), str. 205) $K = I\omega$, skąd $\dot{K} = I\dot{\omega} = I\varepsilon$ i na mocy (3)

$$I\varepsilon = \sum \mathrm{Mom}_l \bar{P}'_i. \tag{4}$$

Weźmy pod uwagę na płaszczyźnie Π dowolną figurę płaską F, związaną sztywnie z ciałem: może to być np. przekrój ciała płaszczyzną Π lub rzut ciała na tę płaszczyznę. Ruch figury F wyznacza oczywiście ruch ciała. Utwórzmy rzuty sił $\{\bar{P}_i\}$ i środka ciężkości S na płaszczyznę Π. Równania (2) i (4) określają ruch płaski figury F

przy założeniach, że:

1) masa figury F równa się masie całego ciała,

2) środkiem ciężkości figury F jest rzut środka masy ciała,

3) moment bezwładności figury F względem S' równa się momentowi bezwładności I ciała względem osi l.

Wynika stąd, że ruch płaski ciała będzie określony, jeżeli podamy rzuty sił na płaszczyznę kierowniczą, masę ciała, rzut jego środka ciężkości i moment bezwładności ciała względem prostej, przechodzącej przez środek masy prostopadle do płaszczyzny kierowniczej.

Przykład 1. Pręt ciężki AB zsuwa się w płaszczyźnie pionowej, opierając się końcami o płaszczyzny gładkie: poziomą i pionową (podłogę i ścianę). Na pręt działają więc siły: ciężar o początku w środku pręta i reakcje $\bar{N}, \bar{R}$, prostopadłe do ścian. Współrzędne N i R reakcyj względem osi x i y są nieujemne (jak na rysunku).

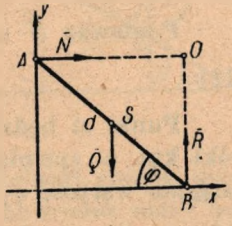
Oznaczmy przez x_0, y_0 współrzędne środka S masy ciała, przez φ kąt, jaki pręt tworzy z osiami układu, przez I_0 moment bezwładności względem środka masy, a przez $2d$ długość pręta.

Z równań (I') i (II'), str. 388, otrzymamy:

$$(5) \qquad m\ddot{x}_0 = N, \qquad m\ddot{y}_0 = -mg + R, \qquad I_0\ddot{\varphi} = d(N\sin\varphi - R\cos\varphi).$$

Do równań powyższych dochodzą jeszcze związki:

$$(5') \qquad x_0 = d\cos\varphi, \qquad y_0 = d\sin\varphi.$$



Z równań (5) i (5') możemy otrzymać równanie różniczkowe wyznaczające φ jako funkcję czasu t. Równanie to otrzymamy, stosując zasadę równowartości pracy i energii kinetycznej.

Siły $\bar{R}$ i $\bar{N}$ nie wykonują pracy. Pracuje tylko siła ciężkości. Zauważmy, że prędkości punktów A i B mają kierunki osi y i x. Zatem środek O obrotu chwilowego jest punktem przecięcia prostych prostopadłych do osi x i y w punktach B i A (str. 328). Moment bezwładności względem O wynosi (por. (I), str. 161)

$$(6) \qquad I = I_0 + md^2,$$

a więc I ma wartość stałą. Energia kinetyczna E wyrazi się tedy wzorem $E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$.

Jeżeli w chwili początkowej było $\varphi=\varphi_0$, to praca siły ciężkości wynosi $L=mgd(\sin\varphi_0-\sin\varphi)$. Zatem, przy założeniu, że w chwili początkowej prędkość była $\dot\varphi=0$, otrzymamy

$$\tfrac{1}{2}I\dot\varphi^2=mgd(\sin\varphi_0-\sin\varphi). \tag{7}$$

Rozwiązanie równania (7) wymaga znajomości teorii funkcyj eliptycznych. Możemy jednak bez rozwiązania wyznaczyć reakcje $\bar N$ i $\bar R$, jeżeli znamy φ. Różniczkując w tym celu równanie (7), otrzymamy $I\dot\varphi\ddot\varphi=-mgd\dot\varphi\cos\varphi$, skąd

$$I\ddot\varphi=-mgd\cos\varphi. \tag{8}$$

Na mocy (5′) będzie po zróżniczkowaniu:

$$\ddot x_0=-d\dot\varphi^2\cos\varphi-d\ddot\varphi\sin\varphi,\qquad \ddot y_0=-d\dot\varphi^2\sin\varphi+d\ddot\varphi\cos\varphi. \tag{9}$$

Z równań (5) otrzymujemy:

$$N=m\ddot x_0,\qquad R=m\ddot y_0+mg. \tag{10}$$

Z równań (7) i (8) możemy obliczyć $\dot\varphi$ i $\ddot\varphi$. Z równań (9) otrzymamy wtedy $\ddot x_0$ i $\ddot y_0$, skąd dostaniemy na mocy (10) reakcje $\bar R$ i $\bar N$.

Obliczmy wartość reakcji $N=|\bar N|$. Na mocy (7), (8) i (9) jest

$$\ddot x_0=-d\cos\varphi\,\frac{2mgd(\sin\varphi_0-\sin\varphi)}{I}+d\sin\varphi\,\frac{mgd\cos\varphi}{I},$$

więc na mocy (10)

$$N=m\ddot x_0=\frac{m^2gd^2\cos\varphi}{I}(3\sin\varphi-2\sin\varphi_0). \tag{11}$$

Ponieważ N musi być liczbą nieujemną, więc

$$3\sin\varphi-2\sin\varphi_0\geqslant 0. \tag{12}$$

Punkt A będzie się zatem dopóty zsuwał po ścianie pionowej, póki kąt φ spełniać będzie równanie (12). Z chwilą, gdy kąt φ osiągnie wartość φ_1 spełniającą równanie

$$3\sin\varphi_1-2\sin\varphi_0=0, \tag{13}$$

punkt A przestanie zsuwać się po ścianie pionowej, ponieważ reakcja N musiałaby wówczas stać się ujemną, t. zn. ściana musiałaby przyciągać punkt A ku sobie. Pręt odpadnie więc w owej chwili od ściany pionowej.

Niech h_0 oznacza wysokość początkową punktu A, a h_1 wysokość tego punktu w chwili odpadnięcia pręta od ściany pionowej. Ponieważ $h_0=2d\sin\varphi_0$ i $h_1=2d\sin\varphi_1$, więc na mocy (13)

$$h_1=\tfrac{2}{3}h_0. \tag{14}$$

Punkt A odpadnie zatem na $\frac{2}{3}$ swej wysokości początkowej. Po odpadnięciu od ściany ruch pręta określony będzie równaniami (5) przy założeniu, że $N=0$ i $y_0=d\sin\varphi$.

Przykład 2. Walec obrotowy stacza się po płaszczyźnie pochyłej doskonale chropowatej; będzie się więc toczył. Ruch chwilowy walca będzie zatem obrotem około tworzącej, wzdłuż której walec styka się z płaszczyzną. Załóżmy, że tworząca ta jest pozioma.

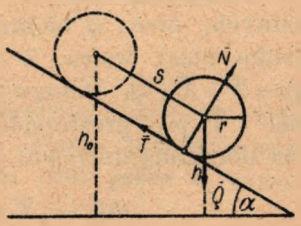
Tarcie nie wykonuje pracy, gdyż punkty zaczepienia tarcia (t.j. punkty styczności walca i płaszczyzny) mają prędkość zero (str. 214). Jedyną siłą wykonującą pracę jest ciężar walca.

Oznaczmy przez I moment bezwładności walca względem tworzącej, a przez ω prędkość kątową toczenia w chwili t. Energia kinetyczna wyniesie zatem

$$E=\tfrac{1}{2}I\omega^2. \tag{15}$$

Niech dalej m oznacza masę walca, h wysokość środka masy w chwili t, zaś h_0 w chwili t_0. Praca siły ciężkości w czasie od t_0 do t wyniesie więc

$$L=mg(h_0-h). \tag{16}$$



Przyjmując, że w chwili t_0 prędkość początkowa kątowa była ω_0, otrzymamy z (15) i (16) na mocy zasady równowartości pracy i energii kinetycznej

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2-\tfrac{1}{2}I\omega_0^2=mg(h_0-h), \tag{17}$$

skąd możemy wyznaczyć ω.

Wreszcie niech s oznacza drogę, jaką przebiegł środek masy od chwili początkowej t_0 do chwili t. Załóżmy, że środek masy leży na osi walca, i niech α będzie kątem nachylenia płaszczyzny pochyłej do poziomu. Wówczas

$$h_0-h=s\sin\alpha. \tag{18}$$

Ponieważ prędkość środka masy S w chwili t wynosi $v=\dot{s}=r\omega$ (gdzie r jest promieniem walca), zaś w chwili początkowej t_0 wynosiła $v_0=\dot{s}_0=r\omega_0$, więc na mocy (17) i (18) otrzymamy

$$I\dot{s}^2/2r^2-I\dot{s}_0^2/2r^2=mgs\sin\alpha, \tag{19}$$

skąd, różniczkując względem t, dostajemy $I\dot{s}\ddot{s}/r^2 = mg\dot{s}\sin\alpha$. Zatem

$$p = \ddot{s} = mgr^2\sin\alpha/I. \tag{20}$$

Środek masy będzie więc spadał ruchem jednostajnie przyśpieszonym.

Moment bezwładności walca pełnego (o stałej gęstości) względem tworzącej wynosi (str. 187, wzór (23)) $I = \frac{3}{2}mr^2$. Na mocy (20) jest przeto $p = \frac{2}{3}g\sin\alpha$. Środek masy będzie więc spadał z przyśpieszeniem mniejszym niż punkt swobodny, dla którego $p = g\sin\alpha$ (str. 124).

Moment bezwładności walca pustego (np. rury) względem osi wynosi mr^2, a względem tworzącej $I = 2mr^2$. Na mocy (6) jest tedy $p = \frac{1}{2}g\sin\alpha$. Walec pełny będzie więc spadał szybciej, niż pusty.

Jeżeli prędkość początkowa była $\omega_0 = 0$, to środek masy przebiegnie drogę s w czasie

$$t = \sqrt{2s/p} = \sqrt{2sI/mgr^2\sin\alpha}. \tag{21}$$

Wzór (21) może służyć do doświadczalnego wyznaczania momentu bezwładności I.

Oznaczmy przez $\bar{T}$ sumę sił tarcia, przez $\bar{N}$ sumę reakcyj normalnych, przez $\bar{Q}$ ciężar, a przez p (jak powyżej) przyśpieszenie środka masy walca. Z twierdzenia o ruchu środka masy mamy $m\bar{p} = \bar{T} + \bar{N} + \bar{Q}$. Ponieważ $\bar{p}$, $\bar{N}$ i $\bar{Q}$ są prostopadłe do osi walca, więc i $\bar{T}$ jest prostopadłe do osi walca. Tworząc rzuty na równię i na normalną do równi (oraz kładąc $T = |\bar{T}|$ i $N = |\bar{N}|$), otrzymamy:

$$mp = -T + mg\sin\alpha, \qquad 0 = N - mg\cos\alpha,$$

skąd na mocy (20)

$$T = mg\sin\alpha(1 - mr^2/I), \qquad N = mg\cos\alpha.$$

Przykład 3. Koło porusza się w płaszczyźnie pionowej Π, pozostając stale stycznym do prostej poziomej l. W chwili początkowej $t = 0$ ruch chwilowy koła był obrotem około środka koła z prędkością kątową ω_0. Wyznaczyć ruch koła, uwzględniając tarcie.

Przyjmijmy prostą l za oś x i nadajmy osi y zwrot pionowy ku górze. Załóżmy, że środek koła S jest zarazem środkiem masy. Oznaczmy przez r, m i I promień, masę i moment bezwładności koła względem S, przez x_0, y_0 współrzędne środka koła, przez

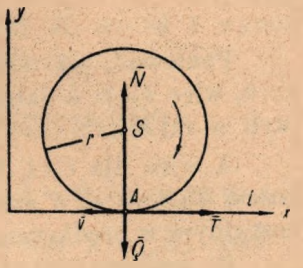
ω i ε prędkość i przyśpieszenie kątowe środka S, wreszcie przez T i N współrzędne (względem osi x i y) tarcia $\bar{T}$ i reakcji normalnej $\bar{N}$, zaczepionych w punkcie styczności A. Z równań (I) i (II), str. 387, dostaniemy:

$$m\ddot{x}_0 = T, \qquad m\ddot{y}_0 = N - mg, \qquad I\varepsilon = -Tr. \tag{22}$$

Ponieważ jest stale $y_0 = r$, więc $\ddot{y}_0 = 0$, skąd na mocy (22)

$$N = mg. \tag{23}$$

Niech v będzie współrzędną (względem osi x) prędkości $\bar{v}$ punktu A. Ponieważ ruch chwilowy koła w czasie t jest złożeniem ruchu postępowego środka masy o prędkości $\dot{x}_0$ oraz ruchu obrotowego około środka masy o prędkości kątowej ω, więc



$$v = \dot{x}_0 - r\omega, \tag{24}$$

skąd przez zróżniczkowanie

$$\dot{v} = \ddot{x}_0 - r\varepsilon. \tag{25}$$

Na mocy (22) mamy $\ddot{x}_0 = T/m$ i $\varepsilon = -Tr/I$, skąd przez podstawienie do równania (25)

$$\dot{v} = (1/m + r^2/I)T. \tag{26}$$

Jeżeli $\bar{v} \neq 0$, wówczas $\bar{T}$ ma zwrot przeciwny niż $\bar{v}$ (str. 368), zatem $vT \leqslant 0$; jeżeli zaś $\bar{v} = 0$, to $vT = 0$. Mamy przeto zawsze $vT \leqslant 0$. Mnożąc więc obie strony równania (26) przez v, otrzymamy $v\dot{v} = (1/m + r^2/I)Tv$, zatem

$$v\dot{v} \leqslant 0. \tag{27}$$

Lecz $2v\dot{v}$ jest pochodną v^2, na mocy więc (27) pochodna v^2 jest nie dodatnia, a zatem v^2 jest funkcją nie rosnącą. Jeżeli więc v osiągnie w pewnej chwili t_1 po raz pierwszy wartość $v = 0$, to od tej chwili będzie stale $v = 0$, t. zn. że od tej chwili koło będzie się toczyło po prostej l.

Rozpatrzmy najpierw ruch koła w czasie od $t = 0$ do $t = t_1$. W tym czasie jest $v \neq 0$, więc $T = \mu N$, gdzie μ oznacza współczynnik tarcia (str. 368). Przyjmując zwrot obrotu jak na rysunku, mamy $T > 0$, więc wedle (23) jest $T = \mu mg$, skąd przez podstawienie do (22)

$$\ddot{x}_0 = \mu g, \qquad \varepsilon = -\mu mgr/I. \tag{28}$$

Całkując równania (28), otrzymamy z uwagi na to, że dla $t=0$ jest z założenia $\dot{x}_0=0$ i $\omega=\omega_0$:

$$\dot{x}_0=\mu g t, \qquad \omega=\omega_0-\mu m g r t/I. \tag{29}$$

Na mocy (24) mamy

$$v=\mu g t(1+mr^2/I)-r\omega_0, \tag{30}$$

więc $v=0$ nastąpi w chwili

$$t_1=\frac{r\omega_0}{\mu g(1+mr^2/I)}. \tag{31}$$

Ponieważ, jak dowiedliśmy, od chwili t_1 będziemy mieli stale $v=0$, więc $\dot{v}=0$, a zatem dla $t\geqslant t_1$ będzie na mocy (26) stale $T=0$, czyli w myśl (22) $x_0=0$ i $\varepsilon=0$.

A więc dla $t\geqslant t_1$ koło toczyć się będzie z pewną stałą prędkością kątową ω_1 i środek masy poruszać się będzie ruchem jednostajnym z prędkością $v_0=r\omega_1$.

Ze wzorów (29) i (31) dostajemy

$$\omega_1=\omega_0/(1+mr^2/I). \tag{32}$$

Od chwili t_1 energia kinetyczna jest $E_1=\text{const}$. Ponieważ E_1 równa się sumie energii kinetycznych ruchu postępowego o prędkości środka masy $v_0=r\omega_1$ oraz ruchu obrotowego, więc

$$E_1=\tfrac{1}{2}mr^2\omega_1^2+\tfrac{1}{2}I\omega_1^2=\tfrac{1}{2}I\omega_0^2/(1+mr^2/I). \tag{33}$$

W chwili początkowej $t=0$ jest $E_0=\frac{1}{2}I\omega_0^2$, zatem

$$E_1=E_0/(1+mr^2/I). \tag{34}$$

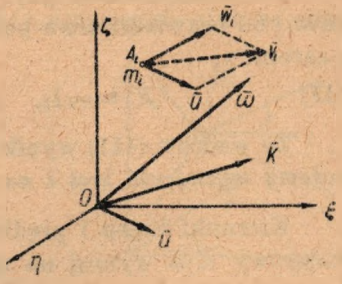
§ 5. Kręt. Niech O będzie dowolnym punktem poruszającego się ciała. Ruch chwilowy ciała jest złożeniem ruchu chwilowego postępowego o prędkości $\bar{u}$ punktu O i ruchu obrotowego o prędkości kątowej $\bar{\omega}$ około osi przechodzącej przez O.

Podzielmy ciało na drobne części i zastąpmy każdą z nich punktem materialnym o tej samej masie. Otrzymamy układ punktów $A_1, A_2, \ldots$ o masach $m_1, m_2, \ldots$ Obierzmy w danej chwili t dowolny układ współrzędnych (ξ, η, ζ) o początku w O. Oznaczmy współrzędne punktów $A_1, A_2, \ldots$ przez ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2, ...

Prędkości punktów A_i możemy przedstawić w postaci

(1) $$\bar{v}_i = \bar{u} + \bar{w}_i,$$

gdzie $\bar{w}_i$ jest prędkością ruchu chwilowego obrotowego. Na mocy (V), str. 46, mamy



$$w_{i\xi} = \eta_i\omega_\zeta - \zeta_i\omega_\eta, \quad w_{i\eta} = \zeta_i\omega_\xi - \xi_i\omega_\zeta,$$
(2)
$$w_{i\zeta} = \xi_i\omega_\eta - \eta_i\omega_\xi.$$

Niech $\bar{K}_i$ będzie momentem względem O pędu $m_i\bar{v}_i$ punktu A_i, czyli $\bar{K}_i = \mathrm{Mom}_O(m_i\bar{v}_i)$. Na mocy (II), str. 18, rzut K_i na oś ξ wynosi $K_{i\xi} = m_i(r_{i\eta}\zeta_i - r_{i\zeta}\eta_i)$, skąd na mocy (1) i (2)

$$K_{i\xi} = m_i[(u_\eta + \zeta_i\omega_\xi - \xi_i\omega_\zeta)\zeta_i - (u_\zeta + \xi_i\omega_\eta - \eta_i\omega_\xi)\eta_i],$$

czyli

$$K_{i\xi} = \omega_\xi m_i(\zeta_i^2 + \eta_i^2) - \omega_\eta m_i\xi_i\eta_i - \omega_\zeta m_i\xi_i\zeta_i + u_\eta m_i\zeta_i - u_\zeta m_i\eta_i.$$

Ponieważ kręt względem punktu O wynosi $\bar{K} = \sum\bar{K}_i$, więc

$$K_\xi = \omega_\xi\sum m_i(\zeta_i^2 + \eta_i^2) - \omega_\eta\sum m_i\xi_i\eta_i - \omega_\zeta\sum m_i\xi_i\zeta_i + u_\eta\sum m_i\zeta_i - u_\zeta\sum m_i\eta_i.$$

Przy podziale ciała na coraz drobniejsze części, sumy występujące w ostatnim wzorze będą dążyły odpowiednio do:

$$I_\xi, \quad D_\zeta, \quad D_\eta, \quad m\zeta_0, \quad m\eta_0,$$

gdzie m oznacza masę ciała, zaś ξ_0, η_0, ζ_0 współrzędne środka masy. Otrzymamy zatem (przeprowadzając podobny rachunek również dla rzutów K_η i K_ζ):

$$K_\xi = \omega_\xi I_\xi - \omega_\eta D_\zeta - \omega_\zeta D_\eta + m(\zeta_0 u_\eta - \eta_0 u_\zeta),$$
(I)
$$K_\eta = \omega_\eta I_\eta - \omega_\zeta D_\xi - \omega_\xi D_\zeta + m(\xi_0 u_\zeta - \zeta_0 u_\xi),$$
$$K_\zeta = \omega_\zeta I_\zeta - \omega_\xi D_\eta - \omega_\eta D_\xi + m(\eta_0 u_\xi - \xi_0 u_\eta).$$

Kręt względem środka masy ciała lub względem jego punktu nieruchomego. Jeżeli O jest środkiem masy, to $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0$. Jeżeli zaś punkt O jest nieruchomy, to $u_\xi = 0$, $u_\eta = 0$, $u_\zeta = 0$. W obu przypadkach mamy na mocy (I):

$$K_\xi = \omega_\xi I_\xi - \omega_\eta D_\zeta - \omega_\zeta D_\eta,$$
(II)
$$K_\eta = \omega_\eta I_\eta - \omega_\zeta D_\xi - \omega_\xi D_\zeta,$$
$$K_\zeta = \omega_\zeta I_\zeta - \omega_\xi D_\eta - \omega_\eta D_\xi.$$

W szczególności, gdy osie układu współrzędnych są osiami głównymi bezwładności w punkcie O, wówczas $D_\xi=0$, $D_\eta=0$, $D_\zeta=0$, a zatem:

(III) $$K_\xi=\omega_\xi I_\xi, \quad K_\eta=\omega_\eta I_\eta, \quad K_\zeta=\omega_\zeta I_\zeta.$$

Ze wzorów (III) wynika, że *znając prędkość chwilową kątową, możemy wyznaczyć krętu i na odwrót.*

Kierunki krętu i prędkości kątowej są na ogół różne. Iloczyn skalarowy $\bar{K}\cdot\bar{\omega}$ wynosi na mocy (III)

$$\bar{K}\cdot\bar{\omega}=K_\xi\omega_\xi+K_\eta\omega_\eta+K_\zeta\omega_\zeta=\omega_\xi^2 I_\xi+\omega_\eta^2 I_\eta+\omega_\zeta^2 I_\zeta,$$

zatem jeżeli $\bar{\omega}\neq 0$, to $\bar{K}\bar{\omega}>0$.

A więc: *krętu tworzy z wektorem prędkości kątowej kąt ostry.*

Udowodnimy teraz następujące

Twierdzenie. *Jeżeli krętu $\bar{K}$ lub wektor prędkości kątowej $\bar{\omega}$ ma kierunek jednej z osi głównych bezwładności, to krętu i prędkość kątowa mają kierunek jednakowy i na odwrót.*

Dowód. Przyjmijmy za oś ξ tę oś główną bezwładności, której kierunek jest kierunkiem krętu $\bar{K}$. Wówczas $K_\eta=0$ i $K_\zeta=0$, skąd na mocy (III) $\omega_\eta=0$ i $\omega_\zeta=0$. Wektor $\bar{\omega}$ ma więc wtedy kierunek osi ξ, t. j. krętu.

Podobnie przeprowadza się dowód, jeżeli $\bar{\omega}$ ma kierunek jednej z osi głównych bezwładności.

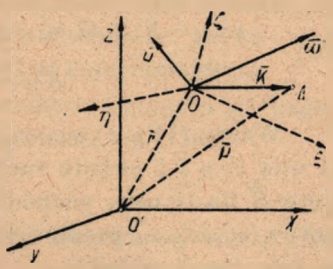
Na odwrót, jeżeli $\bar{K}$ i ω mają kierunek jednakowy, przyjmujemy kierunek ten za kierunek osi ξ. Wówczas $\omega_\eta=0$ i $\omega_\zeta=0$, oraz $K_\eta=0$ i $K_\zeta=0$, skąd na mocy (II) $K_\xi=I_\xi\omega_\xi$, $0=-\omega_\xi D_\zeta$ i $0=-\omega_\xi D_\eta$, a więc $D_\zeta=0$ i $D_\eta=0$. Oś ξ jest więc wtedy osią główną bezwładności, c. b. d. d.

Jeżeli punkt O jest punktem kulistym, t. zn. jeżeli $I_\xi=I_\eta=I_\zeta$, wówczas, oznaczając momenty bezwładności przez I, mamy na mocy (III) $K_\xi=I\omega_\xi$, $K_\eta=I\omega_\eta$, $K_\zeta=I\omega_\zeta$, skąd

(3) $$K=I\omega.$$

A więc: *jeżeli środek masy (lub punkt nieruchomy ciała) jest punktem kulistym, to krętu ma stale kierunek i zwrot prędkości kątowej.*

Pochodna krętu. Niech $\bar{K}$ będzie krętem ciała względem dowolnego punktu O tegoż ciała i niech (x, y, z) będzie stałym układem współrzędnych o początku O', zaś (ξ, η, ζ) dowolnie poruszającym się układem współrzędnych o początku w O. Oznaczmy przez $\bar{u}$ prędkość punktu O, a przez $\bar{\omega}'$ prędkość chwilową kątową układu (ξ, η, ζ). Wykreślmy z punktu O wektor $\overline{OA} = \bar{K}$. Kładąc $\overline{O'O} = \bar{r}$ i $\overline{O'A} = \varrho$, otrzymujemy $\varrho = \bar{r} + \bar{K}$ czyli $\bar{K} = \varrho - \bar{r}$. Tworząc pochodną, otrzymamy $\dot{\bar{K}} = \dot{\varrho} - \dot{r}$.



Lecz $\dot{r} = \bar{u}$, zaś $\dot{\varrho}$ równa się prędkości bezwzględnej $\bar{v}_b$ punktu A względem układu stałego $O'(x, y, z)$. Zatem

$$\dot{\bar{K}} = \bar{v}_b - \bar{u}. \tag{4}$$

Niech $\bar{v}_w$ będzie prędkością względną punktu A względem układu (ξ, η, ζ), a $\bar{v}_u$ prędkością unoszenia. Zatem (str. 58)

$$\bar{v}_b = \bar{v}_w + \bar{v}_u, \tag{5}$$

skąd na mocy (4)

$$\dot{\bar{K}} = \bar{v}_w + (\bar{v}_u - \bar{u}). \tag{6}$$

Punkt A ma w układzie (ξ, η, ζ) współrzędne K_ξ, K_η, K_ζ. Zatem

$$v_{w_\xi} = \dot{K}_\xi, \quad v_{w_\eta} = \dot{K}_\eta, \quad v_{w_\zeta} = \dot{K}_\zeta. \tag{7}$$

Ruch chwilowy układu (ξ, η, ζ) jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości $\bar{u}$ punktu O i ruchu obrotowego o chwilowej prędkości kątowej $\bar{\omega}'$ około osi przechodzącej przez O. Zatem (str. 63)

$$\bar{v}_u = \bar{u} + \overline{OA} \times \bar{\omega}' = \bar{u} + \bar{K} \times \bar{\omega}'. \tag{8}$$

Przyjmując

$$\bar{w} = \bar{K} \times \bar{\omega}' \tag{9}$$

otrzymamy więc na mocy (8) i (6)

$$\dot{\bar{K}} = \bar{v}_w + \bar{w}. \tag{10}$$

Z (9) dostajemy:

$$w_\xi = K_\eta \omega'_\zeta - K_\zeta \omega'_\eta, \quad w_\eta = K_\zeta \omega'_\xi - K_\xi \omega_\zeta, \quad w_\zeta = K_\xi \omega'_\eta - K_\eta \omega'_\xi. \tag{11}$$

Oznaczmy rzuty wektora $\dot{\bar{K}}$ na osie ξ,η i ζ przez $(\dot{\bar{K}})_\xi,(\dot{\bar{K}})_\eta$ i $(\dot{\bar{K}})_\zeta$. Z (10) na mocy (7) i (11) otrzymamy:

$$(IV)\qquad \begin{gathered}(\dot{\bar{K}})_\xi=\dot{K}_\xi+K_\eta\omega'_\zeta-K_\zeta\omega'_\eta,\qquad (\dot{\bar{K}})_\eta=\dot{K}_\eta+K_\zeta\omega'_\xi-K_\xi\omega'_\zeta,\\ (\dot{\bar{K}})_\zeta=\dot{K}_\zeta+K_\xi\omega'_\eta-K_\eta\omega'_\xi.\end{gathered}$$

Wzory (IV) wyznaczają rzuty pochodnej krętu $\dot{\bar{K}}$ względem O na osie ξ, η i ζ układu ruchomego przy pomocy rzutów K_ξ, K_η, K_ζ krętu $\bar{K}$ na te osie, pochodnych $\dot{K}_\xi$, $\dot{K}_\eta$, $\dot{K}_\zeta$ rzutów K_ξ, K_η, K_ζ oraz rzutów ω'_ξ, ω'_η, ω'_ζ prędkości chwilowej układu (ξ,η,ζ) — a nie ciała! — na osie tegoż układu.

Należy zwrócić uwagę na różnicę, jaka zachodzi między symbolami $(\dot{K})_\xi$ a $\dot{K}_\xi$. Wartość pierwszego symbolu otrzymujemy, tworząc najpierw pochodną K, a następnie rzut na oś ξ; wartość zaś drugiego symbolu otrzymujemy, postępując odwrotnie, a więc najpierw rzutując wektor $\bar{K}$ na oś ξ, a następnie tworząc pochodną rzutu. Jak wskazuje wzór (IV), na ogół $(\dot{K})_\xi\neq\dot{K}_\xi$.

Przyjmijmy, że O jest punktem nieruchomym lub środkiem masy i że osie ξ, η, ζ, mają stałe kierunki osi głównych bezwładności ciała w punkcie O. W tym przypadku prędkość chwilowa kątowa ciała $\bar{\omega}$, równa się prędkości chwilowej kątowej układu współrzędnych (ξ,η,ζ):

$$(12)\qquad \bar{\omega}=\bar{\omega}'.$$

Ponieważ na mocy (III), str. 396, jest

$$(13)\qquad K_\xi=I_\xi\omega_\xi,\qquad K_\eta=I_\eta\omega_\eta,\qquad K_\zeta=I_\zeta\omega_\zeta,$$

więc z uwagi na to, że I_ξ, I_η, I_ζ są stałe, dostajemy:

$$(14)\qquad \dot{K}_\xi=I_\xi\dot{\omega}_\xi,\qquad \dot{K}_\eta=I_\eta\dot{\omega}_\eta,\qquad \dot{K}_\zeta=I_\zeta\dot{\omega}_\zeta.$$

Podstawiając w (IV) wartości z (12)-(14), otrzymamy:

$$(V)\qquad \begin{gathered}(\dot{\bar{K}})_\xi=I_\xi\dot{\omega}_\xi+(I_\eta-I_\zeta)\omega_\eta\omega_\zeta,\qquad (\dot{\bar{K}})_\eta=I_\eta\dot{\omega}_\eta+(I_\zeta-I_\xi)\omega_\zeta\omega_\xi,\\ (\dot{\bar{K}})_\zeta=I_\zeta\dot{\omega}_\zeta+(I_\xi-I_\eta)\omega_\xi\omega_\eta.\end{gathered}$$

Wzory (V) odnoszą się do układu współrzędnych, którego początek jest środkiem masy lub punktem nieruchomym ciała i którego osie mają stałe kierunki osi głównych bezwładności.

§ 6. Równania Eulera. Zajmiemy się teraz ruchem, jaki pod działaniem sił wykonywa ciało, mające unieruchomiony jeden punkt O, a więc mogące się tylko obracać około tego punktu. Do tego bowiem przypadku można sprowadzić badanie ruchu ciała sztywnego pod wpływem sił w przypadku najogólniejszym.

Niech $\bar{K}$ będzie krętem, zaś $\bar{M}$ momentem ogólnym sił względem O. Wówczas w myśl zasady krętu (II), str. 365, jest

$$\dot{\bar{K}} = \bar{M}. \tag{1}$$

Zauważmy, że $\bar{M}$ nie zależy od siły zaczepionej w O, gdyż jej moment względem O jest zerem.

Obierzmy dwa układy współrzędnych o początku O: jeden stały (x, y, z), a drugi ruchomy (ξ, η, ζ), którego osie są osiami głównymi bezwładności ciała względem O. Niech A, B, C oznaczają momenty bezwładności ciała względem osi głównych bezwładności (t.j. osi ξ, η i ζ), a $\bar{\omega}$ niech oznacza prędkość chwilową kątową ciała. Na mocy (1) i (V), str. 398, dostaniemy:

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_\xi + (B-C)\omega_\eta\omega_\zeta &= M_\xi, \\ B\dot{\omega}_\eta + (C-A)\omega_\zeta\omega_\xi &= M_\eta, \\ C\dot{\omega}_\zeta + (A-B)\omega_\xi\omega_\eta &= M_\zeta. \end{aligned} \tag{I}$$

Równania (I) noszą nazwę *równań Eulera*.

Równania (I) służą do wyznaczenia ω_ξ, ω_η, ω_ζ jako funkcji czasu t. Znając ω_ξ, ω_η, ω_ζ, możemy określić położenie układu ruchomego (ξ, η, ζ), a więc i położenie ciała, przy pomocy kątów Eulera ϑ, φ, ψ (str. 355), obliczonych z równań różniczkowych (II), str. 357. W ten sposób przy pomocy równań Eulera (I) i równań (II), str. 357, możemy wyznaczyć ruch ciała. Rozwiązanie tych równań nastręcza wiele trudności i nie zawsze da się wykonać. Poznamy jednak niektóre przypadki, w których rozwiązania te dają się otrzymać. Najważniejszym z nich jest przypadek, gdy prócz reakcji w punkcie O nie działają na ciało żadne siły.

Jeżeli znamy ruch ciała, to możemy obliczyć reakcję $\bar{R}$ zaczepioną w O. Oznaczmy bowiem przez $\bar{P}$ sumę sił działających, przez m masę ciała, a przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie środka masy. Na mocy twierdzenia o ruchu środka masy (I), str. 365, mamy więc $m\bar{p}_0 = \bar{P} + \bar{R}$ czyli

$$\bar{R} = m\bar{p}_0 - \bar{P}. \tag{2}$$

Uwaga 1. Równania Eulera (I) zachodzą również, gdy punkt O nie jest punktem nieruchomym, lecz środkiem masy ciała. Zachodzi bowiem wówczas twierdzenie o kręcie $\bar{K}=\bar{M}$ (str. 365), zaś wzory (II) str. 357, słuszne są dla każdego punktu O.

Uwaga 2. Opierając się na wzorach (IV), str. 398, możemy podać równania ogólniejsze od równań Eulera.

Niech O będzie punktem nieruchomym lub środkiem masy, zaś (ξ,η,ζ) dowolnym układem współrzędnych o początku O, mającym prędkość chwilową kątową $\bar{\omega}'$. Ponieważ $\dot{\bar{K}}=\bar{M}$, więc na mocy wzorów (IV), str. 398, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
&\dot{K}_\xi+K_\eta\omega'_\zeta-K_\zeta\omega'_\eta=M_\xi,\\
(II)\qquad &\dot{K}_\eta+K_\zeta\omega'_\xi-K_\xi\omega'_\zeta=M_\eta,\\
&\dot{K}_\zeta+K_\xi\omega'_\eta-K_\eta\omega'_\xi=M_\zeta.
\end{aligned}$$

Ruch ciała sztywnego swobodnego. Przyjmijmy środek S masy ciała za początek układu współrzędnych (x,y,z), poruszającego się ruchem postępowym względem układu inercjalnego. Ruch ciała w przestrzeni będzie określony, jeżeli wyznaczymy ruch środka masy S i ruch ciała względem S, t.j. względem układu (x,y,z).

Ruch środka masy otrzymać możemy z równań (I), str. 365.

Aby zaś wyznaczyć ruch ciała względem układu (x,y,z), możemy przyjąć, że układ ten jest w spoczynku (str. 137) i że oprócz sił działających na ciało działają nań tylko siły unoszenia (gdyż siły Coriolisa są zerem (str. 138). Przyśpieszenie unoszenia równa się przyśpieszeniu p_0 środka masy i jest wspólne wszystkim punktom ciała (str. 60). Jeżeli ciało uważać będziemy za układ punktów materialnych $m_1,m_2,\ldots$, to siły unoszenia wyniosą $-m_1\bar{p}_0$, $-m_2\bar{p}_0$, ... Siły unoszenia są więc proporcjonalne do mas i mają jednakowe kierunki oraz zwroty. Zatem (str. 243) siły unoszenia mają wypadkową $\bar{R}$ o początku w środku masy:

$$\bar{R}=-m_1\bar{p}_0-m_2\bar{p}_0-\ldots=-m\bar{p}_0,$$

gdzie m oznacza masę ciała. Oznaczając sumę sił działających przez $\bar{P}$, otrzymujemy z twierdzenia o ruchu środka masy $m\bar{p}_0=\bar{P}$, skąd $\bar{R}=-\bar{P}$.

Ponieważ środek masy S jest nieruchomy względem układu (x,y,z), zaś siła unoszenia ma początek w S, więc *ruch ciała względem środka masy* (a zatem i względem układu (x,y,z)) *jest taki, jak gdyby środek masy był unieruchomiony, a na ciało działały te same siły.*

Ruch ciała względem środka masy jest zatem niezależny od ruchu samego środka masy i możemy go wyznaczyć przy pomocy równań Eulera.

Widzimy stąd, że badanie ruchu ciała w przypadku najogólniejszym istotnie sprowadza się do badania ruchu środka masy i obrotu ciała około punktu nieruchomego.

§ 7. Obrót ciała około punktu bez działania sił.

Załóżmy, że na ciało sztywne, mające unieruchomiony punkt O, nie działają żadne siły. W tym przypadku moment sił jest $\bar{M}=0$, więc równania Eulera (I), str. 399, przyjmą postać:

$$(I') \qquad \begin{gathered} A\dot{\omega}_\xi+(B-C)\omega_\eta\omega_\zeta=0, \qquad B\dot{\omega}_\eta+(C-A)\omega_\zeta\omega_\xi=0, \\ C\dot{\omega}_\zeta+(A-B)\omega_\xi\omega_\eta=0. \end{gathered}$$

Równania (I') zachodzą również przy samym tylko założeniu, że jest stale $\bar{M}=0$, t. zn. że siły działające na ciało mają wypadkową, której kierunek przechodzi stale przez punkt O. Wynika stąd, że równania (I') stosują się także do ruchu ciała sztywnego ciężkiego o unieruchomionym środku ciężkości, gdy oprócz ciężkości na ciało to nie działają żadne inne siły.

Rozwiązanie równań (I') w przypadku ogólnym wymaga znajomości teorii funkcyj eliptycznych. Podamy tu rozwiązania tych równań tylko w przypadkach, gdy elipsoida bezwładności względem O jest kulą lub elipsoidą obrotową, t. zn. gdy wszystkie trzy lub przynajmniej dwie z liczb A, B, C są równe.

Na razie wyprowadzimy z równań (I') pewne wnioski ogólne.

Kręt i energia kinetyczna. Ponieważ $\bar{M}=0$, więc z twierdzenia o kręcie wynika, że *kręt $\bar{K}$ jest wektorem stałym.*

Ponieważ $|\bar{K}|^2=K_\xi^2+K_\eta^2+K_\zeta^2$, więc na mocy (III), str. 396, dostaniemy, kładąc $I_\xi=A$, $I_\eta=B$ i $I_\zeta=C$,

$$(1) \qquad |\bar{K}|^2=A^2\omega_\xi^2+B^2\omega_\eta^2+C^2\omega_\zeta^2=\text{const}.$$

Pomnóżmy równania Eulera (I') obustronnie przez $\omega_\xi,\omega_\eta,\omega_\zeta$ i dodajmy je stronami. Otrzymamy $A\dot{\omega}_\xi\omega_\xi+B\dot{\omega}_\eta\omega_\eta+C\dot{\omega}_\zeta\omega_\zeta=0$, co możemy napisać w postaci $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(A\omega_\xi^2+B\omega_\eta^2+C\omega_\zeta^2)=0$ czyli

$$(2) \qquad A\omega_\xi^2+B\omega_\eta^2+C\omega_\zeta^2=\text{const}.$$

Aby podać znaczenie równania (2), weźmy pod uwagę kąty α, β, γ, jakie $\bar{\omega}$ tworzy z osiami ξ, η, ζ. Mamy więc $\omega_\xi = |\bar{\omega}| \cos\alpha$, $\omega_\eta = |\bar{\omega}| \cos\beta$, $\omega_\zeta = |\bar{\omega}| \cos\gamma$, skąd

$$A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2 = (A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma)|\bar{\omega}|^2. \tag{3}$$

Niech I będzie momentem bezwładności ciała względem osi obrotu chwilowego. Na mocy wzoru (I), str. 164, jest więc $I = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$, a zatem na mocy (3) lewa strona (2) równa się $I|\bar{\omega}|^2$. Ponieważ zaś energia kinetyczna ciała jest $E = \frac{1}{2} I|\bar{\omega}|^2$ (str. 365), więc

$$2E = A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2 = \text{const.} \tag{4}$$

Jak widzimy stąd, równanie (2) wyraża, że *energia kinetyczna ciała jest stała.*

Na mocy (III), str. 396, mamy dalej $\bar{K}\bar{\omega} = A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2$, skąd na mocy (4) $\bar{K}\bar{\omega} = \text{const.}$ Ponieważ $\bar{K}\bar{\omega} = |\bar{K}|\,\text{Rzut}_{\bar{K}}\,\bar{\omega}$, zaś według (1) jest $|\bar{K}| = \text{const.}$, zatem $\text{Rzut}_{\bar{K}}\,\bar{\omega} = \text{const.}$

A więc: *rzut prędkości chwilowej kątowej na kierunek krętu jest stały.*

Przypuśćmy, że w chwili początkowej $t = 0$ kierunek krętu był ten sam, co kierunek prędkości chwilowej kątowej. $\bar{K}$ i $\bar{\omega}$ miały więc (str. 396) kierunek jednej z osi głównych bezwładności, np. osi ζ. W chwili $t = 0$ było zatem:

$$\omega_\xi = 0, \quad \omega_\eta = 0 \quad \text{i} \quad \omega_\zeta = \omega_\zeta^0, \tag{5}$$

gdzie ω_ζ^0 oznacza rzut $\bar{\omega}$ na oś ζ w chwili $t = 0$.

Równania Eulera (I′) są równaniami różniczkowymi pierwszego rzędu. Z teorii równań różniczkowych wiadomo, że istnieje jedno tylko rozwiązanie, spełniające w chwili $t = 0$ warunki (5). Tym jedynym rozwiązaniem jest

$$\omega_\xi = \text{const.} = 0, \qquad \omega_\eta = \text{const.} = 0, \qquad \omega_\zeta = \text{const.} = \omega_\zeta^0,$$

gdyż spełnia ono dla $t = 0$ warunki (5) i, jak łatwo stwierdzić, równania Eulera (I′). Wektor $\bar{\omega}$ ma tedy wielkość stałą i stałe kierunek osi bezwładności ζ, zatem (str. 396) $\bar{\omega}$ ma również kierunek krętu $\bar{K}$. Ponieważ zaś kręt $\bar{K}$ zachowuje kierunek niezmienny w przestrzeni, więc i kierunek wektora $\bar{\omega}$ jest stały.

A zatem: *jeżeli w chwili początkowej prędkość chwilowa kątowa ma kierunek osi głównej bezwładności, to* (przy założeniu, że moment sił względem punktu unieruchomionego jest zerem) *ruch ciała jest obrotem około osi stałej z prędkością kątową stałą.*

Obrót około punktu kulistego. Załóżmy, że punkt O jest punktem kulistym, t. zn. że $A=B=C$. Równania Eulera (I') przyjmą wtedy postać $\dot{\omega}_\xi=0$, $\dot{\omega}_\eta=0$, $\dot{\omega}_\zeta=0$ czyli:

$$\omega_\xi=c_1, \qquad \omega_\eta=c_2, \qquad \omega_\zeta=c_3. \tag{II'}$$

Wynika stąd, że prędkość kątowa jest stała co do wielkości. Ponieważ punkt O jest z założenia punktem kulistym, więc na mocy (3), str. 396 (kładąc $I=A$), mamy $\bar{K}=A\bar{\omega}$, a zatem oś obrotu chwilowego ma kierunek krętu; że zaś kręt $\bar{K}$ jest wektorem stałym, więc oś obrotu chwilowego ma stały kierunek w przestrzeni. Wobec tego ciało obraca się około osi stałej ze stałą prędkością kątową.

A więc: *jeżeli punkt O jest punktem kulistym* (t. zn. jeżeli $A=B=C$), *wówczas ruch ciała pod działaniem sił, których moment względem O jest zerem, jest obrotem około osi stałej ze stałą prędkością kątową.*

Obrót około punktu, którego elipsoida bezwładności jest elipsoidą obrotową. Załóżmy, że $A=B$, t. j. że elipsoida bezwładności względem punktu O jest obrotowa. Przypadek ten zachodzi, jeżeli ciało posiada np. oś symetrii przechodzącą przez O. Równania Eulera (I') przyjmą wtedy postać:

$$\dot{\omega}_\xi+\frac{A-C}{A}\omega_\zeta\omega_\eta=0, \qquad \dot{\omega}_\eta-\frac{A-C}{A}\omega_\zeta\omega_\xi=0, \qquad \dot{\omega}_\zeta=0. \tag{II''}$$

Trzecie z równań (II'') daje

$$\omega_\zeta=c=\text{const.} \tag{6}$$

Z równania (4), kładąc $A=B$, otrzymujemy

$$A(\omega_\xi^2+\omega_\eta^2)+C\omega_\zeta^2=\text{const.},$$

na mocy więc (6) mamy

$$\omega_\xi^2+\omega_\eta^2=c_1^2=\text{const.} \tag{7}$$

Ponieważ $|\bar{\omega}|^2=\omega_\xi^2+\omega_\eta^2+\omega_\zeta^2$, zatem na mocy (6) i (7)

$$|\bar{\omega}|^2=c^2+c_1^2=\text{const.} \tag{8}$$

A więc: *prędkość chwilowa kątowa jest stała co do wielkości.*

Połóżmy

$$\frac{A-C}{A}\omega_\zeta = h. \tag{9}$$

Ponieważ wobec (6) jest $\omega_\zeta = \text{const.}$, więc $h = \text{const.}$ i dwa pierwsze z równań (II') przyjmą postać:

$$\dot{\omega}_\xi + h\omega_\eta = 0, \quad \dot{\omega}_\eta - h\omega_\xi = 0. \tag{10}$$

Niech $h \neq 0$. Różniczkując pierwsze z równań (10), dostajemy $\ddot{\omega}_\xi + h\dot{\omega}_\eta = 0$ czyli $\dot{\omega}_\eta = -\ddot{\omega}_\xi/h$, skąd przez podstawienie w drugie z równań (10) otrzymamy po pomnożeniu przez h

$$\ddot{\omega}_\xi + h^2\omega_\xi = 0. \tag{11}$$

Rozwiązanie ogólne równania (11) ma postać

$$\omega_\xi = a\sin ht + b\cos ht, \tag{12}$$

gdzie a i b są stałymi dowolnymi. Pierwsze z równań (10) daje $\omega_\eta = -\dot{\omega}_\xi/h$, skąd na mocy (12)

$$\omega_\eta = -a\cos ht + b\sin ht. \tag{13}$$

Równania (6), (12) i (13) przedstawiają ogólne rozwiązanie równań Eulera (II'') również i w przypadku, gdy $h = 0$. Rozwiązanie to zawiera trzy stałe dowolne a, b, c, które wyznacza się z danych początkowych.

Wyznaczanie kątów Eulera. Zajmiemy się teraz wyznaczaniem kątów Eulera przy pomocy równań (6), (12) i (13) oraz równań (II), str. 357.

Ponieważ kręt $\bar{K}$ jest wektorem stałym, więc możemy przyjąć kierunek krętu za kierunek osi z. Rzut krętu na oś ζ jest $K_\zeta = |\bar{K}|\cos\vartheta$. Z drugiej strony (kładąc $I_\zeta = C$) mamy na mocy (III), str. 396, $K_\zeta = C\omega_\zeta$, więc $|\bar{K}|\cos\vartheta = C\omega_\zeta$ czyli

$$\cos\vartheta = C\omega_\zeta/|\bar{K}|. \tag{14}$$

Ponieważ $|\bar{K}| = \text{const.}$ i $\omega_\zeta = \text{const.}$, więc

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.} \tag{15}$$

Jeżeli $\vartheta_0 = 0$ lub $\vartheta_0 = \pi$, to kręt $\bar{K}$ ma stale kierunek osi bezwładności ζ, zatem w myśl twierdzenia podanego na str. 396 prędkość chwilowa kątowa ma kierunek krętu. Podobnie, jeżeli $\vartheta_0 = \pi/2$, to na mocy (14) jest $\omega_\zeta = 0$, więc ((III), str. 396) $K_\xi = A\omega_\xi$, $K_\eta = A\omega_\eta$,

$K_\xi = 0$, skąd $\bar{K} = A\bar{\omega}$; a zatem kręt ma kierunek prędkości chwilowej kątowej. Z twierdzenia podanego na str. 396 wnosimy więc, że *jeżeli* $\vartheta_0 = 0$ *lub* π *lub* $\pi/2$, *to ruch ciała jest obrotem około osi stałej z prędkością kątową stałą.*

Załóżmy teraz, że $\vartheta_0 \neq 0$ i $\vartheta_0 \neq \pi$ i $\vartheta_0 \neq \pi/2$. Ponieważ $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const.}$, więc oś ζ zakreśla stożek obrotowy, którego osią jest oś z. Podstawiając w równania (II), str. 357, wartości ω_ξ i ω_η z równań (12) i (13), otrzymamy (wobec $\dot{\vartheta} = 0$):

$$a\sin(ht-\varphi) + b\cos(ht-\varphi) = 0, \tag{16}$$

$$\dot{\psi} = [a\cos(ht-\varphi) - b\sin(ht-\varphi)]/\sin\vartheta_0, \tag{17}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_\xi - [a\cos(ht-\varphi) - b\sin(ht-\varphi)]\cot\vartheta_0. \tag{18}$$

Gdyby było $a = 0$ i $b = 0$, to na mocy (12) i (13) mielibyśmy $\omega_\xi = 0$ i $\omega_\eta = 0$, więc $\bar{\omega}$ miałoby kierunek osi bezwładności ζ, a zatem krętu $\bar{K}$ (na mocy twierdzenia ze str. 396). Oś ζ miałaby zatem kierunek osi z i byłoby $\vartheta_0 = 0$ lub $\vartheta_0 = \pi$ wbrew założeniu. Jedna z liczb a i b jest tedy różna od zera, skąd na mocy (16) $ht - \varphi = \text{const.}$

Niech $\varphi = \varphi_0$ dla $t = 0$. Zatem $ht - \varphi = -\varphi_0$ czyli

$$\varphi = ht + \varphi_0. \tag{19}$$

Podstawiając tę wartość φ w (17) i (18), dostaniemy:

$$\dot{\psi} = (a\cos\varphi_0 + b\sin\varphi_0)/\sin\vartheta_0, \tag{20}$$

$$h = \omega_\xi - (a\cos\varphi_0 + b\sin\varphi_0)\cot\vartheta_0 \tag{21}$$

Ponieważ $\vartheta_0 \neq 0$ i $\vartheta_0 \neq \pi$ i $\vartheta_0 \neq \pi/2$, więc z (21) otrzymujemy $a\cos\varphi_0 + b\sin\varphi_0 = (\omega_\xi - h)\operatorname{tg}\vartheta_0$, skąd na mocy (20)

$$\dot{\psi} = (\omega_\xi - h)/\cos\vartheta_0. \tag{22}$$

Wstawiając w równania (19) i (22) wartość h z równania (9), otrzymamy łącznie z równaniem (15):

$$\dot{\varphi} = \frac{A-C}{A}\omega_\xi, \qquad \dot{\psi} = \frac{C}{A\cos\vartheta_0}\omega_\xi, \qquad \dot{\vartheta} = 0. \tag{23}$$

Całkując równania (23) i przyjmując, że dla $t = 0$ było $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ i $\vartheta = \vartheta_0$, dostajemy:

$$\varphi = \frac{A-C}{A}\omega_\xi t + \varphi_0, \qquad \psi = \frac{C}{A\cos\vartheta_0}\omega_\xi t + \psi_0, \qquad \vartheta = \vartheta_0. \tag{24}$$

Ponieważ według (6) jest $\omega_\zeta = \text{const.}$, więc z (23) wynika, że $\dot{\varphi} = \text{const.}$ i $\dot{\psi} = \text{const.}$

A zatem: *ruch ciała jest złożeniem dwóch obrotów, z których jeden odbywa się około osi stałej ζ w ciele, a drugi około osi stałej z w przestrzeni. Oba obroty odbywają się z prędkością kątową stałą.*

Ruch taki nazwaliśmy *ruchem precesyjnym regularnym* (str. 357). Stosunek obu prędkości kątowych wynosi w myśl (23) .

$$\dot{\varphi}/\dot{\psi} = (A - C)\cos\vartheta_0/C. \tag{25}$$

Udowodniliśmy więc

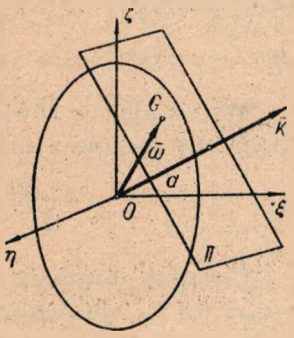
Twierdzenie. *Jeżeli w punkcie O elipsoida bezwładności jest elipsoidą obrotową, to ruch ciała albo jest obrotem około osi stałej z prędkością kątową stałą, albo jest precesją regularną.*

Obrót ciała około punktu w przypadku ogólnym. Podamy obecnie pewne uwagi, dotyczące ciała obracającego się około punktu O, przy założeniu, że moment sił względem punktu O jest zerem.

Zachowajmy oznaczenia dotychczasowe. Osie ξ, η, ζ mają kierunki osi głównych bezwładności w punkcie O, a więc równanie elipsoidy bezwładności względem O ma w układzie (ξ, η, ζ) postać (wzór (8), str. 166) $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = c^2$, gdzie c jest stałą dowolną. Ponieważ energia kinetyczna E jest stała, więc możemy przyjąć $c^2 = 2E$. Elipsoida bezwładności będzie więc miała równanie

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 2E. \tag{26}$$

Oznaczmy przez G koniec wektora prędkości kątowej $\bar{\omega}$. Punkt G ma zatem współrzędne ω_ξ, ω_η i ω_ζ. Na mocy wzoru (4), str. 402, współrzędne punktu G spełniają równanie (26). Wynika stąd, że *koniec wektora $\bar{\omega}$ leży na elipsoidzie bezwładności* (26).



Równanie płaszczyzny Π, stycznej do elipsoidy (26) w punkcie G, ma postać

$$A\omega_\xi\xi + B\omega_\eta\eta + C\omega_\zeta\zeta = 2E. \tag{27}$$

Ponieważ na mocy (III), str. 396, kręt $\bar{K}$ ma na osie ξ,η,ζ rzuty $K_\xi = A\omega_\xi$, $K_\eta = B\omega_\eta$, i $K_\zeta = C\omega_\zeta$, więc kręt $\bar{K}$ jest prostopadły do płaszczyzny Π. Odległość płaszczyzny Π od punktu O wynosi $d = 2E/\sqrt{A^2\omega_\xi^2 + B^2\omega_\eta^2 + C^2\omega_\zeta^2}$, zatem na mocy (1), str. 401,

$$d = 2E/|\bar{K}| = \text{const.} \tag{28}$$

Odległość płaszczyzny Π od punktu O jest przeto stała. Ponieważ nadto płaszczyzna Π jest stale prostopadła do wektora nieruchomego $\bar{K}$, więc *Π jest płaszczyzną nieruchomą w przestrzeni.*

Elipsoida bezwładności jest stale styczną do płaszczyzny Π. Ruch chwilowy ciała jest obrotem chwilowym z prędkością kątową $\bar{\omega}$, zaś G jest końcem wektora $\bar{\omega}$, a zatem prędkość punktu G jest zerem. Wynika stąd, że *elipsoida bezwładności toczy się po płaszczyźnie Π.*

Zajmiemy się teraz pytaniem, jakie mogą być położenia wektora $\bar{\omega}$ w ciele, czyli jaką krzywą zakreśla punkt G na elipsoidzie bezwładności.

Oznaczmy współrzędne punktu G przez ξ, η i ζ. Zatem $\xi = \omega_\xi$, $\eta = \omega_\eta$ i $\zeta = \omega_\zeta$. Na mocy więc (1), str. 401, mamy

$$A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = K^2, \tag{29}$$

gdzie $K = |\bar{K}|$. Współrzędne punktu G spełniają również równanie (26) elipsoidy bezwładności. Mnożąc obustronnie równanie (26) przez K^2, a równanie (29) przez $2E$ i odejmując je od siebie, otrzymamy

$$(AK^2 - 2EA^2)\xi^2 + (BK^2 - 2EB^2)\eta^2 + (CK^2 - 2EC^2)\zeta^2 = 0. \tag{30}$$

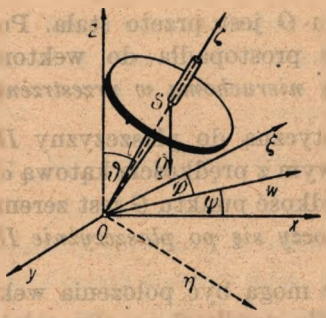
Równanie (30) jest równaniem stożka o wierzchołku O. Punkt G zakreśla więc linię, która jest przekrojem elipsoidy bezwładności (26) i stożka (30). Przekroje te są krzywymi zamkniętymi rzędu (na ogół) czwartego. W szczególności, stożek (30) jest stożkiem obrotowym, gdy np. $A = B$ (lub $A = C$ lub $B = C$). Jeżeli A, B i C są różne, stożek może się zredukować do dwóch płaszczyzn.

Prędkości kątowe zaznaczone w ciele tworzą stożek (30). Zatem stożek określony równaniem (30) jest stożkiem ruchomym prędkości chwilowych kątowych (str. 340).

Jeżeli na płaszczyźnie nieruchomej Π zaznaczymy położenia punktu G, to otrzymamy pewną krzywą. Stożek, dla którego ta krzywa jest kierownicą, zaś O wierzchołkiem, jest stożkiem stałym chwilowych prędkości kątowych (str. 340).

§ 8. Obrót ciała ciężkiego około punktu. Zajmiemy się obecnie ruchem ciała ciężkiego, w którym unieruchomiony jest dowolny punkt O nie będący środkiem masy.

Ruch taki wykonuje np. bąk, obracający się około osi i opierający się jednym końcem osi na podłodze dość chropowatej, by posuwanie się końca osi po podłodze było niemożliwe.



Załóżmy dla prostoty, że ciało posiada oś symetrii, przechodzącą przez O. Środek masy S leży oczywiście na tej osi. Przyjmijmy oś symetrii za oś ζ ruchomego układu współrzędnych i nadajmy jej zwrot ku środkowi masy S. Połóżmy $OS=l$. Niechaj oś z układu stałego współrzędnych ma zwrot pionowy ku górze. Ciężar ciała $\bar{Q}$ ma więc kierunek osi z. Oznaczając przez $\bar{k}$ wektor jednostkowy, położony na osi z, a przez m masę ciała, mamy $\bar{Q}=-mg\bar{k}$. Tworząc rzuty na osie ξ, η, ζ otrzymamy na mocy (24), str. 356:

$$Q_\xi=-mg\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad Q_\eta=mg\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad Q_\zeta=-mg\cos\vartheta.$$

Ponieważ $\bar{Q}$ ma początek w środku masy S, którego współrzędne w układzie (ξ,η,ζ) są $0,0,l$, więc oznaczając przez $\bar{M}$ moment ciężaru $\bar{Q}$ względem O, dostaniemy:

$$M_\xi=mgl\sin\vartheta\cos\varphi, \qquad M_\eta=mgl\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad M_\zeta=0.$$

Równania Eulera (I), str. 399, przyjmą postać (z uwagi na to, że $A=B$):

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_\xi+(A-C)\omega_\eta\omega_\zeta&=mgl\sin\vartheta\cos\varphi,\\ A\dot{\omega}_\eta-(A-C)\omega_\zeta\omega_\xi&=mgl\sin\vartheta\sin\varphi,\\ C\dot{\omega}_\zeta&=0. \end{aligned} \tag{1}$$

Jeżeli w równaniach (1) wyrazimy ω_ξ, ω_η, ω_ζ przez kąty Eulera według wzorów (I), str. 356, otrzymamy układ równań różniczkowych rzędu drugiego, gdzie niewiadomymi będą ϑ, φ, ψ jako funkcje czasu.

Układ (1) możemy w prosty sposób sprowadzić do układu równań różniczkowych rzędu pierwszego. Jedno równanie dosta-

niemy z trzeciego równania układu (1). Całkując mianowicie to równanie, otrzymamy $C\omega_\zeta = \text{const.}$, a więc

$$\omega_\zeta = r = \text{const.} \tag{2}$$

Dwa inne równania rzędu pierwszego dostaniemy z zasady zachowania energii (ciężar posiada bowiem potencjał) i z zasady krętu, w myśl której kręt względem osi stałej z jest w danym przypadku stały, gdyż moment ciężaru względem tej osi jest zerem (ciężar bowiem ma kierunek osi z).

Środek masy ma współrzędną $z = l\cos\vartheta$, więc potencjał ciężaru jest $V = -mgz = -mgl\cos\vartheta$.

Energia kinetyczna ciała ((4), str. 402) wynosi

$$E = \tfrac{1}{2}[A(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + C\omega_\zeta^2],$$

a z zasady zachowania energii mamy $E - V = \text{const.}$; zatem

$$A(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + C\omega_\zeta^2 + 2mgl\cos\vartheta = h = \text{const.} \tag{3}$$

Oznaczając przez $\bar{K}$ kręt względem O, mamy ((III), str. 396) $K_\xi = A\omega_\xi$, $K_\eta = A\omega_\eta$ i $K_\zeta = C\omega_\zeta$. Oś z tworzy z osiami ξ, η i ζ kąty, których cosinusy wynoszą k_ξ, k_η i k_ζ (gdyż $\bar{k}$ jest wektorem jednostkowym, mającym zwrot i kierunek osi z). Zatem rzut krętu $\bar{K}$ na oś z wynosi $K_z = K_\xi k_\xi + K_\eta k_\eta + K_\zeta k_\zeta$. Wstawiając do tego wzoru wartości k_ξ, k_η, k_ζ ze wzorów (24), str. 356, i pamiętając że $K_z = \text{const.}$, gdyż moment ciężaru względem osi pionowej z jest zerem, otrzymamy

$$K_z = A(\omega_\xi \sin\vartheta\sin\varphi - \omega_\eta \sin\vartheta\cos\varphi) + C\omega_\zeta\cos\vartheta = \text{const.} \tag{4}$$

Wyraźmy teraz we wzorach (2)-(4) rzuty ω_ξ, ω_η, ω_ζ przez kąty Eulera według wzorów (I), str. 356. Otrzymamy:

$$\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi} = r, \quad \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\vartheta + a\cos\vartheta = b, \quad \dot{\psi}\sin^2\vartheta + a\cos\vartheta = \beta, \tag{5}$$

gdzie

$$r = \omega_\zeta, \quad a = 2mgl/A, \quad b = (h - Cr^2)/A, \quad a = Cr/A, \quad \beta = K_z/A. \tag{6}$$

Trzecie z równań (5) daje $\dot{\psi} = (\beta - a\cos\vartheta)/\sin^2\vartheta$. Podstawiając tę wartość $\dot{\psi}$ w drugie z równań (5) i mnożąc przez $\sin^2\vartheta$, dostaniemy

$$\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta + (\beta - a\cos\vartheta)^2 = (b - a\cos\vartheta)\sin^2\vartheta. \tag{7}$$

Podstawmy do (7), a następnie do pierwszego i trzeciego z równań (5)

$$u = \cos\vartheta \quad \text{czyli} \quad \dot{u} = -\dot{\vartheta}\sin\vartheta. \tag{8}$$

Otrzymamy:

$$\dot{u}^2=(b-au)(1-u^2)-(\beta-au)^2, \tag{9}$$

$$\dot{\psi}=(\beta-au)/(1-u^2), \tag{10}$$

$$\dot{\varphi}=r-(\beta-au)u/(1-u^2). \tag{11}$$

Z (9) możemy wyznaczyć u, t. j. $\cos\vartheta$, a następnie z (10) i (11) kąty ψ i φ.

Oznaczmy prawą stronę równania (9) przez $f(u)$. Zakładając, że $\beta-a\neq 0$ i $\beta+a\neq 0$, mamy:

$$f(+1)<0, \quad f(-1)<0, \tag{12}$$

a ponadto, ponieważ $a>0$ na mocy (6),

$$\lim_{u\to+\infty} f(u)=+\infty. \tag{13}$$

Jeżeli ϑ_0 było wartością kąta ϑ dla $t=0$, zaś $u_0=\cos\vartheta_0$, to na mocy (9)

$$f(u_0)=\dot{u}_0^2\geqslant 0. \tag{14}$$

Z równań (12)-(14) wynika, że równanie $f(u)=0$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste, z których dwa, mianowicie u_1 i u_2, leżą między -1 a $+1$, trzeci zaś jest $u_3>1$. W przypadku szczególnym może być $u_1=u_2$ (pierwiastek podwójny).

Przyjmijmy, że $u_1<u_2$. Ponieważ $u=\cos\vartheta$ musi być zawarte między -1 a $+1$, a ponadto $f(u)\geqslant 0$ (na mocy (9)), więc $u_1\leqslant u\leqslant u_2$ czyli

$$u_1\leqslant\cos\vartheta\leqslant u_2. \tag{15}$$

A więc: *kąt ϑ zmienia się podczas ruchu między granicami ϑ_1 a ϑ_2, gdzie $\cos\vartheta_1=u_1$ i $\cos\vartheta_2=u_2$. Ponieważ $l\cos\vartheta$ oznacza wysokość środka masy nad płaszczyzną poziomą xy, więc środek masy wykonywa wahania między dwiema płaszczyznami poziomymi $z=l\cos\vartheta_1$* i $z=l\cos\vartheta_2$.

Licznik prawego członu równania (10) jest zerem tylko dla $u=\beta/a$. Jeżeli więc $|\beta/a|>1$, to znak przy $\dot{\psi}$ jest stały, gdyż $|u|\leqslant 1$. Oczywistą jest rzeczą, że jeżeli

$$u_1<\beta/a<u_2, \tag{16}$$

to $\dot{\psi}$ zmienia znak. Łatwo wykazać, że wzór (16) równoważny jest nierównościom:

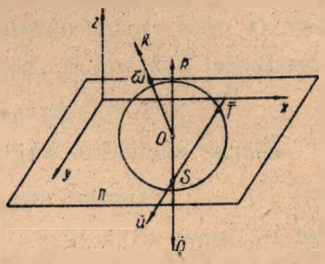
$$|\beta/a|<1, \quad \beta/a<b/a. \tag{17}$$

Jeżeli bowiem zachodzi wzór (16), to $|\beta/a|<1$ i ponadto

$$f(\beta/a)=(b-a\beta/a)(1-\beta^2/a^2)>0, \tag{18}$$

więc $b-a\beta/a>0$, skąd $\beta/a<b/a$ (gdyż $a>0$ na mocy (6)). Na odwrót, jeżeli zachodzą nierówności (17), to mamy w myśl (18) $f(\beta/a)>0$; zachodzi więc albo nierówność (16), albo nierówność $\beta/a>u_3$. Ta ostatnia jest jednak niemożliwa, ponieważ $f(b/a)=-(\beta-ab/a)^2<0$, więc $b/a<u_3$, a zatem $\beta/a<u_3$ na mocy (17).

§ 9. Ruch kuli po płaszczyźnie. Niech kula ciężka o gęstości stałej porusza się po płaszczyźnie poziomej Π (przykład: ruch kuli po bilardzie). Uwzględnijmy tarcie i załóżmy, że reakcja płaszczyzny sprowadza się do jednej siły, zaczepionej w punkcie styczności S. Oznaczmy przez R i T wartości bezwzględne reakcyj: normalnej $\bar{R}$ i stycznej (tarcia) $\bar{T}$, a przez μ współczynnik tarcia. Zatem



$$T=\mu R. \tag{1}$$

Jeżeli punkt S styczności kuli z płaszczyzną Π ma prędkość różną od zera, wówczas tarcie $\bar{T}$ ma kierunek tej prędkości, lecz zwrot przeciwny (str. 368). Przyjmijmy płaszczyznę Π za płaszczyznę xy układu stałego współrzędnych (x,y,z) i nadajmy osi z zwrot ku górze. Oznaczając przez $\bar{p}_0$ przyśpieszenie środka masy kuli $O(x_0,y_0,z_0)$, przez m masę kuli, a przez $\bar{Q}$ jej ciężar, mamy

$$m\bar{p}_0=\bar{Q}+\bar{R}+\bar{T}. \tag{2}$$

Tworząc rzuty na osie układu, dostaniemy:

$$m\ddot{x}_0=T_x, \quad m\ddot{y}_0=T_y, \quad m\ddot{z}_0=-mg+R. \tag{3}$$

Ponieważ $z_0=\text{const.}=r$ (gdzie r oznacza promień kuli), więc $\ddot{z}_0=0$, a zatem $R=mg$ i na mocy (1), przy założeniu, że S ma prędkość różną od zera,

$$T=\mu mg. \tag{4}$$

Niech $\bar{K}$ będzie krętem względem środka O kuli, $\bar{\omega}$ prędkością chwilową kątową, a A momentem bezwładności względem średnicy. Ponieważ z założenia kula jest jednorodna, więc jej środek O jest punktem kulistym. Zatem (na mocy (3), str. 396) $\bar{K}=A\bar{\omega}$, skąd

$$\dot{\bar{K}}=A\dot{\bar{\omega}}. \tag{5}$$

Moment $\bar{M}$ sił względem punktu O redukuje się do momentu siły $\bar{T}$. Zatem:

$$M_x=-rT_y, \quad M_y=rT_x, \quad M_z=0. \tag{6}$$

Ponieważ $\dot{\bar{K}}=\bar{M}$, więc dostajemy z (5):

$$A\dot{\omega}_x=-rT_y, \quad A\dot{\omega}_y=rT_x, \quad A\dot{\omega}_z=0. \tag{7}$$

Z ostatniego równania otrzymujemy

$$\omega_z=\text{const}. \tag{8}$$

Niech $\bar{u}$ oznacza prędkość punktu styczności S. Ruch chwilowy kuli jest złożeniem ruchu postępowego o prędkości $\bar{v}_0$ środka masy O oraz ruchu obrotowego około osi przechodzącej przez O o prędkości kątowej $\bar{\omega}$. Zatem $\bar{u}=\bar{v}_0+\overline{OS}\times\bar{\omega}$, skąd:

$$u_x=\dot{x}_0+r\omega_y, \quad u_y=\dot{y}_0-r\omega_x, \quad u_z=0. \tag{9}$$

Biorąc pochodne względem czasu, otrzymamy:

$$\dot{u}_x=\ddot{x}_0+r\dot{\omega}_y, \quad \dot{u}_y=\ddot{y}_0-r\dot{\omega}_x, \quad \dot{u}_z=0, \tag{10}$$

skąd na mocy (3) i (7):

$$\dot{u}_x=(1/m+r^2/A)T_x, \quad \dot{u}_y=(1/m+r^2/A)T_y, \quad \dot{u}_z=0. \tag{11}$$

Mnożąc obie strony pierwszego z równań (11) przez u_x, a drugiego przez u_y i dodając, otrzymamy:

$$u_x\dot{u}_x+u_y\dot{u}_y=(1/m+r^2/A)(T_xu_x+T_yu_y). \tag{12}$$

Jeżeli $\bar{u}\neq 0$, to $\bar{T}$ ma kierunek $\bar{u}$, a zwrot przeciwny. Zatem stale jest $\bar{T}\bar{u}\leqslant 0$ czyli $T_xu_x+T_yu_y\leqslant 0$, skąd na mocy (12) $u_x\dot{u}_x+u_y\dot{u}_y\leqslant 0$. Ponieważ $u_x\dot{u}_x+u_y\dot{u}_y=\frac{1}{2}d(u_x^2+u_y^2)/dt$, więc $|\bar{u}|^2=u_x^2+u_y^2$ jest funkcją nie rosnącą. Jeżeli więc w pewnej chwili jest $\bar{u}=0$, to poczynając od tej chwili będzie stale $\bar{u}=0$.

Załóżmy, że w ciągu pewnego czasu było stale $\bar{u}\neq 0$. Tarcie $\bar{T}$ miało w ciągu tego czasu kierunek $\bar{u}$ (a zwrot przeciwny); możemy więc przyjąć, że $\bar{T}=\lambda\bar{u}$, gdzie $\lambda<0$, (przyczem λ zależy od czasu). Zatem $\lambda u_x=T_x$ i $\lambda u_y=T_y$, skąd na mocy (11)

$$u_x\dot{u}_y-\dot{u}_xu_y=0. \tag{13}$$

Z równania (13) wynika, że $\bar{u}$ ma kierunek stały: kładąc bowiem $u=|\bar{u}|$ i oznaczając przez φ kąt między $\bar{u}$ a osią x, dostajemy $u_x=u\cos\varphi$, $u_y=u\sin\varphi$, $\dot{u}_x=\dot{u}\cos\varphi-u\dot{\varphi}\sin\varphi$ i $\dot{u}_y=\dot{u}\sin\varphi+u\dot{\varphi}\cos\varphi$, więc $u_x\dot{u}_y-\dot{u}_xu_y=u^2\dot{\varphi}$, skąd na mocy (13) $u^2\dot{\varphi}=0$, a ponieważ $u^2\neq 0$, więc $\dot{\varphi}=0$ czyli $\varphi=\text{const}$.

Ponieważ zaś $\bar{T}$ ma kierunek prędkości $\bar{u}$, więc również kierunek tarcia $\bar{T}$ jest stały. Przy założeniu stałości współczynnika tarcia μ (str. 368) otrzymamy stąd na mocy (*A*) $T = \text{const}$.

A więc: *przez cały czas, w którym jest* $\bar{u} \neq 0$, *jest* $\bar{T} = \text{const}$.

Ponieważ ruch punktu materialnego pod wpływem siły stałej odbywa się po paraboli (str. 81), więc *środek masy kuli zakreśla parabolę* (o osi równoległej do kierunku $\bar{T}$) *przez cały czas, w którym* $\bar{u} \neq 0$ (t. j. *w którym punkt styczności kuli z płaszczyzną II ma prędkość różną od zera*).

Przyjmijmy, że w chwili początkowej $t = 0$ jest:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = r, \quad \dot{x}_0 = a, \quad \dot{y}_0 = b, \quad \dot{z}_0 = 0,$$

$$\omega_x = \omega_x^0, \quad \omega_y = \omega_y^0, \quad \omega_z = \omega_z^0. \tag{14}$$

Prędkość początkowa $\bar{u}_0$ punktu styczności S ma więc na mocy (9) rzuty:

$$u_x^0 = a + r\omega_y^0, \quad u_y^0 = b - r\omega_x^0, \quad u_z^0 = 0. \tag{15}$$

Załóżmy, że $\bar{u}_0 \neq 0$ i nadajmy osi y kierunek i zwrot prędkości $\bar{u}_0$. Na mocy (15) będą więc między danymi początkowymi zachodziły związki:

$$u_x^0 = a + r\omega_y^0 = 0, \quad u_y^0 = b - r\omega_x^0 > 0. \tag{16}$$

Że zaś $\bar{u}$ i $\bar{T}$ mają kierunki równe, lecz zwroty przeciwne, więc

$$T_x = 0, \quad T_y = -\mu mg. \tag{17}$$

Z równań (3) i (7) po scałkowaniu i uwzględnieniu warunków początkowych, otrzymamy:

$$x_0 = at, \quad y_0 = -\tfrac{1}{2}\mu g t^2 + bt, \quad z_0 = r. \tag{18}$$

$$\omega_x = \mu mgrt/A + \omega_x^0, \quad \omega_y = \omega_y^0, \quad \omega_z = \omega_z^0. \tag{19}$$

Podstawiając wartości z (18) i (19) w równania (9), otrzymamy wobec (16):

$$u_x = 0, \quad u_y = (b - r\omega_x^0) - (1 + mr^2/A)gt\mu, \quad u_z = 0. \tag{20}$$

Ponieważ na mocy (16) jest $b - r\omega_x^0 > 0$, więc po czasie

$$t_1 = \frac{b - r\omega_x^0}{(1 + mr^2/A)\mu g} \tag{21}$$

będzie $u_x=0$, $u_y=0$ i $u_z=0$, czyli $\bar{u}=0$ i od chwili t_1 będzie już stale $\bar{u}=0$. Na mocy (11) będzie więc stale $T_x=0$ i $T_y=0$ czyli $\bar{T}=0$. Z równań (3) i (7) otrzymamy wówczas:

$$\ddot{x}_0=0, \quad \ddot{y}_0=0, \quad \ddot{z}_0=0, \quad \dot{\omega}_x=0, \quad \dot{\omega}_y=0, \quad \dot{\omega}_z=0.$$

A więc: *od chwili t_1 będzie stale $\bar{v}_0=$ const. i $\bar{\omega}=$ const., t. zn. że środek kuli poruszać się będzie od chwili t_1 ruchem jednostajnym po linii prostej, zaś prędkość chwilowa kątowa kuli będzie stała.*

§ 10. Giroskop Foucaulta. Tak nazywamy ciało ciężkie, posiadające oś symetrii i zawieszone w środku masy (t. zw. *zawieszenie Cardana*).

Ponieważ siła ciężkości zaczepiona jest w środku masy, więc w przypadku, gdy na ciało nie działają żadne inne siły, ruch giroskopu sprowadza się do obrotu ciała około środka masy bez działania sił.

Jeżeli ciało wprawimy w obrót około środka masy i w chwili początkowej oś symetrii będzie osią obrotu chwilowego, to oś symetrii będzie zachowywała stały kierunek w przestrzeni. Wynika to z twierdzenia podanego na str. 403 i z uwagi, że oś symetrii jest osią środkową bezwładności ciała.

Oś symetrii będzie się wprawdzie poruszała względem ziemi, będzie to jednak tylko ruch pozorny (wywołany obrotem ziemi): jeżeli bowiem skierować oś symetrii ku jakiejś gwieździe stałej, to oś będzie ją stale wskazywać.

Rozpatrzymy tutaj przypadki, w których oś symetrii nie jest swobodna, lecz uwięziona bądź w płaszczyźnie południka, bądź w płaszczyźnie poziomej.

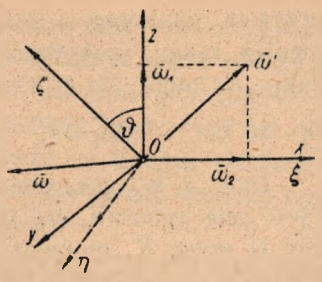
Ruch osi symetrii w płaszczyźnie południka. Niech oś symetrii ciała (zawieszonego w środku masy) może się poruszać tylko w płaszczyźnie południka, przechodzącego przez dany punkt na ziemi. Możemy założyć, że siły (reakcje), utrzymujące oś w płaszczyźnie południka, są do tej płaszczyzny prostopadłe i zaczepione w punktach osi symetrii.

Oznaczmy przez $\bar{\omega}_1$ wektor prędkości kątowej ziemi i połóżmy:

$$(1) \qquad \omega_1=|\bar{\omega}_1|.$$

Przyjmijmy środek O masy ciała za początek układu współrzędnych (x,y,z), nadając osi z kierunek i zwrot prędkości kątowej ziemi $\bar{\omega}_1$, zaś osi x kierunek poziomy ze zwrotem na wschód.

Płaszczyzna yz będzie zatem płaszczyzną południka, a oś z będzie w danym miejscu tworzyć z pionem kąt $90^0-\varphi$, gdzie φ oznacza szerokość geograficzną tego miejsca.



Obierzmy ponadto drugi układ współrzędnych (ξ,η,ζ) o początku O, przyjmując za oś ζ oś symetrii ciała, a za oś ξ oś x. Płaszczyzna $\eta\zeta$ będzie zatem identyczna z płaszczyzną południka yz. Położenie układu (ξ,η,ζ) określone jest przez kąt ϑ, jaki tworzą z sobą osie ζ i z (przyczem kąt ϑ określamy jako kąt, o który należy obrócić oś z w kierunku od ręki prawej ku lewej względem osi x, aby kierunki dodatnie osi z i ζ pokryły się z sobą).

Niech $\bar{\omega}'$ będzie chwilową prędkością kątową układu (ξ,η,ζ) względem układu inercjalnego, za który przyjmujemy układ związany ze słońcem i gwiazdami stałymi. Łatwo zauważyć, że $\bar{\omega}'$ jest wypadkową prędkości chwilowej kątowej $\bar{\omega}_2$ układu (ξ,η,ζ) względem (x,y,z) i prędkości kątowej $\bar{\omega}_1$ układu (x,y,z) względem układu inercjalnego. Zatem

$$\bar{\omega}'=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2. \tag{2}$$

Ponieważ wektor $\bar{\omega}_1$ ma z założenia kierunek i zwrot osi z, więc jego rzuty na osie układu (ξ,η,ζ) wynoszą na mocy (1):

$$\omega_{1_\xi}=0, \qquad \omega_{1_\eta}=-\omega_1\sin\vartheta, \qquad \omega_{1_\zeta}=\omega_1\cos\vartheta. \tag{3}$$

Układ (ξ,η,ζ) obraca się około osi ξ względem układu (x,y,z). Ponieważ kąt obrotu wynosi ϑ, więc prędkość chwilowa kątowa ma kierunek osi ξ i jej współrzędna względem osi ξ wynosi $\dot{\vartheta}$. Zatem:

$$\omega_{2_\xi}=\dot{\vartheta}, \qquad \omega_{2_\eta}=0, \qquad \omega_{2_\zeta}=0. \tag{4}$$

Na mocy (2)-(4) jest:

$$\omega'_\xi=\dot{\vartheta}, \qquad \omega'_\eta=-\omega_1\sin\vartheta, \qquad \omega'_\zeta=\omega_1\cos\vartheta. \tag{5}$$

Niech $\bar{\omega}$ oznacza prędkość chwilową kątową ciała względem układu inercjalnego. Wektor $\bar{\omega}$ uważać możemy za złożenie prędkości chwilowej kątowej $\bar{\omega}_3$ ciała względem układu (ξ,η,ζ) oraz prędkości $\bar{\omega}'$ układu (ξ,η,ζ) względem układu inercjalnego. Zatem $\bar{\omega}=\bar{\omega}_3+\bar{\omega}'$. Ponieważ ruch ciała względem (ξ,η,ζ) jest obrotem około osi ζ, więc $\omega_{3_\xi}=0$ i $\omega_{3_\eta}=0$, skąd:

$$\omega_\xi=\omega'_\xi, \qquad \omega_\eta=\omega'_\eta, \qquad \omega_\zeta=\omega_{3_\zeta}+\omega_\zeta \tag{6}$$

(przytem, ponieważ ω_1 jest bardzo małe, więc na mocy (5) ω_ξ jest również małe; praktycznie więc $\omega_\xi = \omega_{3\xi}$). Kładąc $\omega_\zeta = \omega$, otrzymamy na mocy (5) i (6):

$$\omega_\xi = \dot{\vartheta}, \quad \omega_\eta = -\omega_1 \sin\vartheta, \quad \omega_\zeta = \omega. \tag{7}$$

Osie ξ, η, ζ są osiami środkowymi bezwładności ciała, gdyż ζ jest osią symetrii, zaś O środkiem masy. Oznaczając kręt względem O przez $\bar{K}$, momenty bezwładności względem ξ i η przez A, a względem ζ przez C, otrzymamy na mocy (III), str. 396, i (7):

$$K_\xi = A\dot{\vartheta}, \quad K_\eta = -A\omega_1 \sin\vartheta, \quad K_\zeta = C\omega, \tag{8}$$

skąd po zróżniczkowaniu:

$$\dot{K}_\xi = A\ddot{\vartheta}, \quad \dot{K}_\eta = -A\omega_1 \dot{\vartheta}\cos\vartheta, \quad \dot{K}_\zeta = C\dot{\omega}. \tag{9}$$

Moment ciężaru względem O jest zerem. Moment sił, utrzymujących oś symetrii ciała w płaszczyźnie południka, jest względem osi ξ i ζ zerem, gdyż siły te zaczepione są w punktach osi ζ i są równoległe do osi ξ. Oznaczając więc przez $\bar{M}$ moment sił względem środka masy O, otrzymujemy:

$$M_\xi = 0, \quad M_\zeta = 0. \tag{10}$$

Do wyznaczenia ruchu ciała zastosujemy równania (II), str. 400. Z równań tych po podstawieniu w nie wartości z (5), (8), (9) i (10) i po zredukowaniu otrzymamy:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &A\ddot{\vartheta} - A\omega_1^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + C\omega\omega_1 \sin\vartheta = 0, \\ &-2A\omega_1\dot{\vartheta}\cos\vartheta + C\omega\dot{\vartheta} = M_\eta, \quad C\dot{\omega} = 0. \end{aligned}$$

Na mocy ostatniego równania $\omega = \text{const}$. Opuszczając w pierwszym z równań (I) wyraz zawierający ω_1^2, jako bardzo mały, otrzymamy

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{C\omega\omega_1}{A}\sin\vartheta. \tag{11}$$

Ponieważ $\omega = \text{const.}$, więc osi ζ możemy nadać taki zwrot, by było stale $\omega > 0$, t. zn. by obrót ciała względem osi symetrii ζ odbywał się w kierunku od ręki prawej ku lewej. Przy tym założeniu będzie $C\omega\omega_1/A > 0$. Równanie (11) ma więc postać równania różniczkowego dla wahadła matematycznego (str. 132, wzór (I)). Położenie równowagi następuje przy $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \pi$.

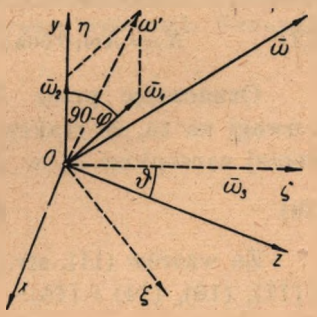
Oś symetrii ciała będzie się więc wahała około osi z, t.j. około prostej równoległej do osi ziemskiej. Oś ciała może być w spoczynku tylko dla $\vartheta=0$ lub dla $\vartheta=\pi$, t.j. tylko wówczas gdy jest do osi ziemi równoległa. Wyznaczając zatem położenie równowagi osi ciała, otrzymujemy kierunek osi ziemi. Ponieważ w danym miejscu oś ziemi tworzy z pionem kąt $90^0-\varphi$, więc *w ten sposób możemy otrzymać szerokość geograficzną φ danego miejsca.*

Można wykazać, że $\vartheta=0$ jest położeniem równowagi stałej, zaś $\vartheta=\pi$ równowagi chwiejnej. Oś ζ ciała stara się więc tak ustawić, aby jej kierunek i zwrot zgodne były z kierunkiem osi ziemskiej i zwrotem wektora $\bar{\omega}_1$. Ze wzoru (3), str. 132, wynika, że okres wahania osi ciała (gdy kąt początkowy ϑ_0 jest mały i $\dot{\vartheta}_0=0$) wynosi

$$T=2\pi\sqrt{A/C\omega\omega_1}. \tag{12}$$

Okres wahania jest duży, bo ω_1 jest małe (około 0,00007 sek^{-1}). Możemy go jednak zmniejszyć, zwiększając ω, t. j. nadając ciału szybszy obrót około własnej osi symetrii.

Ruch osi w płaszczyźnie poziomej. Załóżmy teraz, że oś symetrii ciała może się poruszać jedynie w płaszczyźnie poziomej. Możemy więc przyjąć, że reakcje, utrzymujące oś poziomo, zaczepione są w punktach tej osi i mają kierunek pionowy.



Obierzmy dwa układy współrzędnych (x,y,z) i (ξ,η,ζ) o początku w środku O masy ciała. Nadajmy osi y zwrot pionowy ku górze, osi x zwrot na wschód, a osi z na północ. Przyjmijmy oś symetrii ciała za oś ζ, a oś y za oś η. Płaszczyzna $\xi\zeta$ będzie zatem stale poziomą. Położenie układu (ξ,η,ζ) określone jest przez kąt ϑ między osiami ζ a z (przyczem kąt ϑ określamy jako kąt, o jaki trzeba obrócić oś z około osi y w kierunku od ręki prawej ku lewej, aby kierunki dodatnie osi ζ i z pokryły się z sobą).

Prędkość chwilowa kątowa układu (x,y,z) względem układu inercjalnego równa jest $\bar{\omega}_1$ (t. j. prędkości kątowej ziemi). Wektor ω_1 leży w płaszczyźnie yz i tworzy z osią y kąt $90^0-\varphi$ (gdzie φ oznacza szerokość geograficzną danego miejsca). Niech $\omega_1=|\omega_1|$. Rzuty ω_1 na osie ξ,η,ζ wyniosą zatem:

$$\omega_{1\xi}=\omega_1\cos\varphi\sin\vartheta,\qquad \omega_{1\eta}=\omega_1\sin\varphi,\qquad \omega_{1\zeta}=\omega_1\cos\varphi\cos\vartheta. \tag{13}$$

Prędkość chwilowa kątowa $\bar{\omega}_2$ układu (ξ, η, ζ) względem układu (x, y, z) równa jest $\dot{\vartheta}$ i ma kierunek osi η, gdyż (ξ, η, ζ) obraca się około η względem (x, y, z). Zatem prędkość chwilowa kątowa $\bar{\omega}'$ układu (ξ, η, ζ) względem układu inercjalnego jest złożeniem prędkości kątowej $\bar{\omega}_2$ i prędkości kątowej $\bar{\omega}_1$, skąd na mocy (13):

$$(14) \qquad \omega'_\xi = \omega_1 \cos\varphi \sin\vartheta, \qquad \omega_\eta = \dot{\vartheta} + \omega_1 \sin\varphi, \qquad \omega'_\zeta = \omega_1 \cos\varphi \cos\vartheta.$$

Niech $\bar{\omega}$ oznacza prędkość chwilową kątową ciała względem układu inercjalnego. Ponieważ ruch chwilowy ciała względem układu (ξ, η, ζ) jest obrotem chwilowym około osi ζ, więc prędkość chwilowa kątowa $\bar{\omega}_3$ ciała względem układu (ξ, η, ζ) ma na osie tego układu rzuty $\omega_{3\xi} = 0$, $\omega_{3\eta} = 0$. Z uwagi na to, że $\bar{\omega} = \bar{\omega}' + \bar{\omega}_3$, otrzymamy na mocy (14) (kładąc $\omega_\zeta = \omega$):

$$(15) \qquad \omega_\xi = \omega_1 \cos\varphi \sin\vartheta, \qquad \omega_\eta = \dot{\vartheta} + \omega_1 \sin\varphi, \qquad \omega_\zeta = \omega.$$

Oznaczając kręt względem O przez $\bar{K}$, momenty bezwładności względem osi ξ i η przez A, a względem osi ζ przez C, otrzymamy na mocy (III), str. 396, i (15):

$$(16) \qquad K_\xi = A\omega_1 \cos\varphi \sin\vartheta, \qquad K_\eta = A(\dot{\vartheta} + \omega_1 \sin\varphi), \qquad K_\zeta = C\omega,$$

skąd przez różniczkowanie:

$$(17) \qquad \dot{K}_\xi = A\omega_1 \dot{\vartheta} \cos\varphi \cos\vartheta, \qquad \dot{K}_\eta = A\bar{\vartheta}, \qquad \dot{K}_\zeta = C\dot{\omega}.$$

Oznaczając przez $\bar{M}$ moment sił działających, otrzymamy z uwagi na to, że reakcje utrzymujące oś ciała w płaszczyźnie poziomej zaczepione są w punktach osi ζ ciała i prostopadłe do $\xi\zeta$:

$$(18) \qquad M_\eta = 0, \qquad M_\zeta = 0.$$

Ze wzorów (II), str. 400, otrzymamy po podstawieniu wartości z (17), (16), (14) i (18):

$$(II) \qquad \begin{gathered} A\omega_1 \dot{\vartheta} \cos\varphi \cos\vartheta + A(\dot{\vartheta} + \omega_1 \sin\varphi)\omega_1 \cos\varphi \cos\vartheta - C\omega(\dot{\vartheta} + \omega_1 \sin\varphi) = M_\xi, \\ A\bar{\vartheta} + C\omega\omega_1 \cos\varphi \sin\vartheta - A\omega_1^2 \cos^2\varphi \cos\vartheta \sin\vartheta = 0, \quad C\dot{\omega} = 0. \end{gathered}$$

Na mocy ostatniego z równań (II) jest $\omega = \text{const}$. Opuszczając w drugim z tych równań wyraz zawierający ω_1^2, jako bardzo mały, dostaniemy

$$(19) \qquad \bar{\vartheta} = -\frac{C\omega\omega_1 \cos\varphi}{A} \sin\vartheta.$$

Nadajmy osi ζ zwrot taki, by było $\omega > 0$. Wówczas

$$C\omega\omega_1 \cos\varphi / A > 0$$

i równanie (19) przyjmie postać równania wahadła matematycznego ((I), str. 132). Położenie równowagi nastąpi przy $\vartheta = 0$ i $\vartheta = \pi$.

Oś symetrii ciała będzie się więc wahać około osi z, t. j. około osi poziomej, biegnącej z południa na północ. Oś ciała może być w spoczynku tylko dla $\vartheta = 0$ lub $\vartheta = \pi$, t. j. tylko wówczas, gdy leży w płaszczyźnie południka. Wyznaczając zatem położenie równowagi osi ciała, *otrzymujemy kierunek południka: ciało może więc być użyte jako kompas.*

Zauważmy jeszcze, że tak jak poprzednio $\vartheta = 0$ odpowiada położeniu równowagi stałej, zaś $\vartheta = \pi$ położeniu równowagi chwiejnej.

Okres wahania otrzymamy ze wzoru (3), str. 132:

$$T = 2\pi \sqrt{A / C\omega\omega_1 \cos\varphi}. \tag{20}$$

Będzie on najmniejszy na równiku (t. j. przy $\varphi = 0$). Na biegunie zaś (t. j. przy $\varphi = 90^0$), każde położenie będzie położeniem równowagi, jak wynika ze wzoru (19). Dla $\varphi = 90^0$ jest bowiem $\dot{\vartheta} = 0$; w miarę zbliżania się do bieguna będzie więc $T \to \infty$.

Otrzymane wyniki znalazły potwierdzenie w doświadczeniu, co dowodzi obrotu ziemi około osi. Doświadczenia takie pierwszy wykonał L. Foucault.

ROZDZIAŁ IX

ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH

§ 1. Układy holonomiczne skleronomiczne. W przypadku równowagi układu nieswobodnego punktów materialnych lub ciał sztywnych, w którym tarcie nie występuje, ograniczenia ruchów (więzy) są niezależne od czasu i polegają zazwyczaj na tym, że pewne tylko położenia układu są możliwe, inne zaś wykluczone.

Przykładami są: punkt materialny, mający pozostawać na nieruchomej linii lub powierzchni, układ dwóch punktów materialnych, połączonych drutem sztywnym bez masy, ciało sztywne, mające punkt lub oś unieruchomioną, układ ciał sztywnych, stykających się z sobą lub połączonych przegubowo, i t.p.

Ograniczenia ruchu układu mogą być wywołane w różny sposób: np. z pomocą ciał sztywnych, podpór i t.d. Okazuje się jednak, że w przypadku, gdy nie ma tarcia, warunki równowagi sił działających nie zależą od tego, skąd pochodzą więzy, lecz tylko od tego, jakie położenia są możliwe. Ponadto, jeżeli chodzi o badanie równowagi układu, to wystarcza znajomość tych tylko zgodnych z więzami położeń, które są bliskie położenia badanego.

Zajmiemy się najpierw pytaniem, w jaki sposób możemy przedstawić położenia układu zgodne z więzami. Rozważymy tę sprawę najpierw na przykładach.

Więzy obustronne.

Przykład 1. Załóżmy, że punkt materialny ma pozostawać na pewnej powierzchni S. Więzy możemy określić, podając równanie tej powierzchni np. w postaci

$$F(x,y,z)=0. \tag{1}$$

Możliwe będą tylko te położenia punktu, w których współrzędne x,y,z spełniają równanie (1). Do zbadania równowagi punktu w jakimś położeniu $A(x,y,z)$ wystarcza, jeżeli (1) jest równaniem płata powierzchni S, na którym punkt ten leży.

Przykład 2. Załóżmy, że punkt materialny ma znajdować się na krzywej C o równaniach:

$$F_1(x,y,z)=0, \qquad F_2(x,y,z)=0; \tag{2}$$

wówczas współrzędne punktu muszą spełniać równania (2). Do zbadania równowagi punktu wystarczy, jeżeli równania (2) przedstawiają tylko łuk krzywej C, wewnątrz którego leży punkt materialny.

Przykład 3. Jeżeli układ złożony z dwóch punktów A_1 i A_2 jest układem sztywnym (t.j. odległość punktów $A_1A_2=\text{const.}=d$), wówczas współrzędne x_1,y_1,z_1 i x_2,y_2,z_2 tych punktów muszą spełniać równanie

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-d^2=0. \tag{3}$$

Jeżeli ponadto np. suma odległości punktów od początku O układu współrzędnych jest stała i wynosi h, wówczas współrzędne punktów muszą spełniać oprócz równania (3) równanie

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-h=0. \tag{4}$$

Przykład 4. Jeżeli układ złożony z n punktów:

$$A_1(x_1,y_1,z_1), \quad A_2(x_2,y_2,z_2), \quad \ldots, \quad A_n(x_n,y_n,z_n)$$

jest układem sztywnym (t.zn. że wzajemne odległości jego punktów są stałe), wówczas współrzędne każdej pary punktów A_i,A_j muszą spełniać równanie

$$(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2-r_{ij}^2=0, \tag{5}$$

gdzie $r_{ij}=A_iA_j$. Równań (5) jest tyle, ile par punktów, t.j. $n(n-1)/2$.

W przykładach 1-4 więzy dały się przedstawić równaniami postaci

$$F(x_1,y_1,z_1,\ x_2,y_2,z_2,\ \ldots,\ x_n,y_n,z_n)=0, \tag{6}$$

gdzie F jest funkcją określoną w pewnym obszarze zmiennych $x_1,\ldots,z_n$ i niezależną od czasu t.

Więzy przedstawione równaniami (6) nazywamy *więzami holonomicznymi obustronnymi (lub dwustronnymi) niezależnymi od czasu.*

Więzy jednostronne.

Przykład 5. Punkt ma znajdować się wewnątrz lub na powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$ (jak np. punkt materialny uwiązany na nici nierozciągliwej o długości r i uczepionej w początku układu). Współrzędne punktu muszą zatem spełniać nierówność

$$x^2+y^2+z^2-r^2\leqslant 0, \tag{7}$$

wyrażającą, że odległość punktu materialnego od początku układu współrzędnych jest nie większa od r.

Przykład 6. Dwa punkty materialne A_1, A_2 połączone są nicią nierozciągliwą o długości h, przewiniętą przez początek O układu współrzędnych. Zatem $OA_1+OA_2\leqslant h$. Współrzędne punktów spełniają więc nierówność

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-h\leqslant 0. \tag{8}$$

W przykładach 5 i 6 więzy dały się wyrazić przez nierówności postaci

$$\Phi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n)\leqslant 0. \tag{9}$$

Więzy, określone nierównościami kształtu (9), nazywamy *więzami holonomicznymi jednostronnymi niezależnymi od czasu.*

Uwaga. Jeżeli więzy są podane nierównością

$$\Psi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n)\geqslant 0,$$

to kładąc $\Psi=-\Phi$, otrzymamy po zmianie znaku postać (9).

Położenie układu w którym związek (9) przyjmuje postać równości (t.j. w którym $\Phi=0$), nazywamy *położeniem brzeżnym.*

W przykładach 5 i 6 położenie brzeżne występuje wówczas, gdy nić jest napięta.

Więzy układu mogą się składać równocześnie z więzów dwustronnych i jednostronnych postaci (6) i (9). Jeżeli np. punkt materialny ma znajdować się na górnej półkuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$, to współrzędne punktu muszą spełniać związki:

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0, \qquad z\geqslant 0 \quad (\text{czyli } -z\leqslant 0). \tag{10}$$

Układ, którego więzy dają się przedstawić przy pomocy związków postaci (6) lub (9), nazywamy układem *holonomicznym skleronomicznym.* O związkach zaś (6) i (9) mówimy, że przedstawiają *więzy w postaci skończonej.*

W rozdziale tym będziemy się zajmowali wyłącznie układami holonomicznymi skleronomicznymi.

Stopień swobody układu. Gdy badamy równowagę układu, zakładamy na ogół, iż dla położeń bliskich położeniu badanemu więzy obustronne polegają na tym, że współrzędne punktów układu muszą spełniać równania:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &F_m(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

co piszemy krócej

$$F_j(x_1, \ldots, z_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{I}$$

O funkcjach F_j zakładamy na ogół, że są ciągłe i mają pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu ciągłe w pewnym otoczeniu wartości $x_1, \ldots, z_n$, określających dane położenie układu.

Ponadto zakładamy o tych funkcjach, że są w tym otoczeniu *niezależne*, t.zn. że żadna z nich nie jest funkcją pozostałych.

Zakładać będziemy wreszcie, że $m < 3n$. Gdyby bowiem było $m = 3n$, to układ równań (I) miał by na ogół jedno tylko rozwiązanie, a więc było by możliwe jedno tylko położenie układu, gdyby zaś było $m > 3n$, to na ogół układ równań (I) nie miałby żadnego rozwiązania, ponieważ niewiadomych byłoby mniej niż równań.

Liczbę $k = 3n - m$ nazywamy *liczbą stopni swobody*.

Znając k zmiennych spośród zmiennych $x_1, \ldots, z_n$, możemy obliczyć z równań (I) pozostałe zmienne w liczbie $3n - k = m$.

Jeżeli układ jest swobodny, to $m = 0$ czyli $k = 3n$. W szczególności, punkt materialny swobodny ma więc 3 stopnie swobody. Możemy wówczas obrać dowolnie wszystkie trzy jego współrzędne.

Jeżeli zaś punkt ma pozostawać na powierzchni (jak w przykładzie 1), wówczas współrzędne jego mają spełniać jedno tylko równanie (1). Zatem $m = 1$ czyli $k = 3 \cdot 1 - 1 = 2$. Punkt, mający pozostawać na powierzchni, ma więc dwa stopnie swobody. Wówczas jedna z jego współrzędnych zależna jest od dwóch pozostałych.

Jeżeli wreszcie punkt ma pozostawać na linii (jak w przykładzie 2), to współrzędne jego muszą spełniać dwa równania (2). Zatem $k = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ i punkt ma jeden tylko stopień swobody: znając jedną z jego współrzędnych, możemy wyznaczyć obie pozostałe.

Układ sztywny dwóch punktów (przykład 3) ma stopni swobody $3 \cdot 2 - 1 = 5$. Jeżeli jednak układ ten ma spełniać oba równania (3) i (4), wówczas $k = 3 \cdot 2 - 2 = 4$.

Ogólnie, niech układ sztywny składa się z n punktów materialnych (jak w przykładzie 4). Współrzędne tych punktów muszą spełniać $n(n-1)/2$ równań (5). Równania te dla $n>3$ nie są jednak od siebie niezależne.

Zauważmy, że położenie układu sztywnego jest wyznaczone przez podanie trzech jego punktów (np. A_1, A_2, A_3), nie leżących na jednej prostej (str. 315). Znając więc współrzędne x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 i x_3, y_3, z_3 punktów A_1, A_2, A_3, będziemy mogli obliczyć współrzędne punktów $A_4, A_5, \ldots, A_n$ z równań (5).

Między współrzędnymi punktów A_1, A_2, A_3 zachodzą 3 równania postaci (5), wyrażające, że odległości A_1A_2, A_1A_3 i A_2A_3 są wielkościami stałymi. Z równań tych możemy wyznaczyć na ogół 3 niewiadome współrzędne, znając 6 pozostałych. Widzimy zatem, że znając pewne 6 współrzędnych spośród $3n$ współrzędnych $x_1, \ldots, z_n$, możemy obliczyć pozostałe z równań (5). Zatem liczba stopni swobody jest $k=6$.

A więc: *układ sztywny punktów posiada 6 stopni swobody.*

Ilość równań niezależnych jest $m=3n-k$, zatem $m=3n-6$. Spośród $n(n-1)/2$ równań (5) jest zatem niezależnych tylko $3n-6$.

§ 2. Przesunięcia przygotowane. Punkt na powierzchni. Załóżmy, że punkt materialny ma pozostawać stale na pewnej powierzchni S i znajduje się w punkcie A tej powierzchni.

Przesuńmy punkt z położenia A do B. Przesunięcie AB nazywamy *możliwym*, jeżeli B również leży na powierzchni S. W przeciwnym razie przesunięcie AB nazywamy *przesunięciem niemożliwym.*

Jeżeli punktowi materialnemu, znajdującemu się w A, nadamy prędkość $\bar{v}$, to prędkość tę nazywamy *możliwą* lub *zgodną z więzami*, gdy punkt może ją posiadać, poruszając się po powierzchni. W przeciwnym razie prędkość ta nazywa się *niemożliwą* lub *niezgodną z więzami.*

Łatwo zauważyć, że każdy wektor styczny do powierzchni w punkcie A przedstawia prędkość możliwą. Na odwrót, prędkości możliwe są wektorami stycznymi do powierzchni.

Ważną rolę odgrywają przesunięcia proporcjonalne do prędkości możliwych, t.j. takie, które dadzą się przedstawić przy pomocy wektorów równych wektorom prędkości możliwych.

Przesunięcia proporcjonalne do prędkości możliwych w punkcie A nazywamy *przesunięciami przygotowanymi* (lub *wirtualnymi*) w tym punkcie.

Przesunięcie przygotowane ma więc kierunek styczny do powierzchni, zwrot zaś i wielkość dowolną. Na ogół przesunięcia przygotowane nie są przesunięciami możliwymi. Są nimi jednak, gdy powierzchnia S jest np. płaszczyzną.

Niechaj powierzchnia S ma równanie

$$F(x,y,z)=0. \tag{1}$$

Jeżeli punkt materialny znajduje się w punkcie A powierzchni S, to jego współrzędne x,y,z spełniają równanie (1). Przypuśćmy, że punkt materialny porusza się po powierzchni S w sposób zupełnie dowolny. Równanie (1) jest więc spełnione stale. Różniczkując (1) względem czasu t, otrzymamy

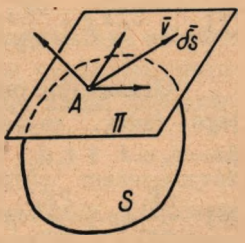
$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}=0. \tag{2}$$

Oznaczając przez $\bar{v}$ prędkość punktu, mamy $v_x=\dot{x}$, $v_y=\dot{y}$, $v_z=\dot{z}$, zatem

$$\frac{\partial F}{\partial x}v_x+\frac{\partial F}{\partial y}v_y+\frac{\partial F}{\partial z}v_z=0. \tag{3}$$

Widzimy więc, że prędkości możliwie muszą spełniać równanie (3). Pochodne cząstkowe, występujące w tym równaniu, są proporcjonalne do współczynników kierunkowych normalnej do powierzchni w punkcie A. Równanie (3) wyraża zatem, że prędkość $\bar{v}$ jest prostopadła do normalnej, t. zn. że leży w płaszczyźnie stycznej.

Na odwrót, jeżeli jakaś prędkość spełnia równanie (3), to jest prędkością możliwą.



Oznaczmy przez $\bar{\delta s}$ dowolne przesunięcie punktu A, a przez $\delta x, \delta y, \delta z$ rzuty tego przesunięcia na osie układu. W myśl określenia przesunięcie przygotowane jest proporcjonalne do prędkości możliwej $\bar{v}$. Przesunięcie $\bar{\delta s}=\bar{v}$ będzie zatem przesunięciem przygotowanym.

A więc rzuty przesunięcia przygotowanego spełniają na mocy (3) równanie

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z=0. \tag{4}$$

Na odwrót, jeżeli rzuty jakiegoś wektora $\overline{\delta s}$ spełniają równanie (4), to $\overline{\delta s}$ jest przesunięciem przygotowanym.

Możemy więc powiedzieć, że *przesunięcie przygotowane jest to wektor, którego rzuty spełniają równanie* (4).

Przykład 1. Punkt ma pozostawać na kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$. Niech $A(x,y,z)$ będzie dowolnym punktem na tej kuli. Przesunięcia przygotowane w punkcie A spełniają równanie

$$2x\delta x+2y\delta y+2z\delta z=0 \quad \text{czyli} \quad x\delta x+y\delta y+z\delta z=0.$$

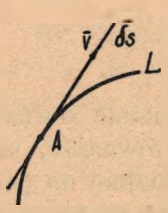
Przyjmując np. że $z\neq 0$, otrzymamy

$$\delta z=-(x\delta x+y\delta y)/z. \tag{5}$$

Obierając dowolnie δx i δy, zaś wartość δz przyjmując z (5), dostaniemy układ liczb $\delta x, \delta y, \delta z$, przedstawiających rzuty przesunięcia przygotowanego w punkcie A.

Punkt na linii. Załóżmy, że punkt materialny ma pozostawać na linii nieruchomej L, określonej równaniami:

$$F_1(x,y,z)=0, \qquad F_2(x,y,z)=0. \tag{6}$$



Jeżeli więc punkt materialny znajduje się w punkcie A, to współrzędne x,y,z tego punktu spełniają równania (6). Łatwo zauważyć, że punkt materialny może posiadać tylko takie prędkości, których kierunki są styczne do linii L w punkcie A. W myśl określenia przesunięcia przygotowane mają więc kierunki styczne do linii, a zwroty i długości dowolne.

Jeżeli punkt porusza się po linii L, równania (6) są spełnione stale. Różniczkując je, dostaniemy:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\dot{z}=0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\dot{z}=0. \tag{7}$$

Oznaczając przez $\overline{\delta s}$ przesunięcie przygotowane, a przez $\delta x,\delta y,\delta z$ jego rzuty, możemy przyjąć w myśl określenia $\overline{\delta s}=\bar{v}$, skąd $\delta x=v_x=\dot{x}$ i t.d. Na mocy więc (7):

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z=0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z=0. \tag{8}$$

Na odwrót, jeżeli jakieś przesunięcie $\overline{\delta s}$ spełnia równania (8), to jest przesunięciem przygotowanym.

Przykład 2. Punkt ma pozostawać na linii, określonej równaniami:

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0, \qquad x^2+2y^2-z=0. \tag{9}$$

Niech punkt $A(x,y,z)$ leży na tej linii. Przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s}$ w punkcie A spełnia więc równania:

$$x\delta x+y\delta y+z\delta z=0, \qquad 2x\delta x+4y\delta y-\delta z=0. \tag{10}$$

Jeżeli $x\neq 0$ i $y\neq 0$, to dostaniemy z (10):

$$\delta x=-(1+4z)\delta z/2x, \qquad \delta y=(1+2z)\delta z/2y.$$

Obierając więc dowolnie δz i wyznaczając następnie $\delta x, \delta y$ z ostatnich równań, otrzymamy układ liczb $\delta x, \delta y, \delta z$, określający przesunięcie przygotowane w A.

Jeżeli zaś np. $x=0$, to wobec $z\geqslant 0$ (co wynika z drugiego równania (9)), otrzymujemy na mocy (10) $\delta y=0$ i $\delta z=0$. W tym przypadku przesunięcie przygotowane będzie zatem miało rzuty $\delta x, 0, 0$, gdzie δx jest liczbą dowolną. A więc: przesunięcie przygotowane ma kierunek osi x.

Układy holonomiczne skleronomiczne. Określimy teraz przesunięcia przygotowane w przypadku ogólnym.

Niech dany będzie układ holonomiczny skleronomiczny n punktów materialnych $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Układ wektorów $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \ldots, \overline{A_nB_n}$ (przedstawiających przesunięcia poszczególnych punktów) nazywamy krótko *przesunięciem układu*. Przesunięcie układu punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazywamy *możliwym*, jeżeli położenia końcowe $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są zgodne z więzami. W przeciwnym razie przesunięcie układu nazywamy *niemożliwym*.

Nadajmy punktom układu w położeniu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dowolne prędkości $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$. Układ tych prędkości nazywamy *układem prędkości możliwych*, jeżeli punkty mogą mieć te prędkości, poruszając się zgodnie z więzami. W przeciwnym razie układ prędkości nazywamy *niemożliwym*.

Przesunięciem przygotowanym układu punktów materialnych w pewnym jego położeniu nazywamy takie przesunięcie, w którym poszczególne punkty doznają przesunięć proporcjonalnych do układu prędkości możliwych.

Jeżeli więc $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ jest układem prędkości możliwych, to przesunięcie przygotowane układu otrzymamy, nadając punktom układu przesunięcia:

$$\bar{\delta s}_1 = \bar{v}_1, \qquad \bar{\delta s}_2 = \bar{v}_2, \qquad \ldots, \qquad \bar{\delta s}_n = \bar{v}_n. \tag{11}$$

Zauważmy, że jeżeli układ jest swobodny, to każde przesunięcie układu jest przesunięciem przygotowanym, gdyż każdy układ prędkości jest układem możliwym.

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem przesunięć przygotowanych. Rozpatrzymy najpierw przypadek więzów obustronnych, a następnie więzów jednostronnych.

Więzy obustronne. Załóżmy, że więzy określone są przez równania:

$$F_j(x_1, \ldots, z_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{12}$$

którym muszą czynić zadość współrzędne x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n punktów układu. Nadajmy układowi dowolny ruch zgodny z więzami. Różniczkując równania (12), dostaniemy:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial z_n}\dot{z}_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{13}$$

Oznaczając przez $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ prędkości punktów układu otrzymamy więc $v_{1_x} = \dot{x}_1, \ldots, v_{n_z} = \dot{z}_n$, skąd

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_1}v_{1_x} + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial z_n}v_{n_z} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{14}$$

Wszelki zatem możliwy układ prędkości musi spełniać równania (14). Na odwrót, można okazać, że, jeżeli układ prędkości spełnia równania (14), to jest on układem prędkości możliwym.

Załóżmy, że przesunięcie układu, w którym kolejne punkty doznają przesunięć $\bar{\delta s}_1, \ldots, \bar{\delta s}_n$, jest przesunięciem przygotowanym. Prędkości $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ określone równaniami (11) tworzą zatem układ możliwy prędkości, wobec czego spełnione są równania (14). Oznaczając rzuty przesunięć odpowiednio przez $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, otrzymamy z (14)

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial z_n}\delta z_n = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{15}$$

lub, jak piszemy inaczej,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial F_j}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F_j}{\partial z_i}\delta z_i\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{I}$$

A więc: każdy układ liczb $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, określający przesunięcie przygotowane układu punktów, spełnia układ równań (I). Na odwrót, każdy układ liczb $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, spełniający układ równań (I), określa przesunięcie przygotowane.

Opierając się na tym, możemy podać następującą definicję przesunięć przygotowanych (równoważną poprzedniej):

Przesunięciem przygotowanym układu, którego więzy podane są równaniami (12), *nazywamy każde przesunięcie* $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ *spełniające równania* (I).

Układ równań (I) (lub (15)) jest układem m równań o $3n$ niewiadomych $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$.

Zakładamy zazwyczaj, że równania (I) są od siebie niezależne. Dzięki temu możemy spośród niewiadomych $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ obrać dowolnie $k=3n-m$ niewiadomych, a pozostałe obliczyć z równań (I).

Jeżeli układ liczb $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ spełnia równania (I), to układ liczb $-\delta x_1, \ldots, -\delta z_n$ oczywiście również spełnia równania (I).

Przesunięcie przygotowane układu punktów nazywamy *odwracalnym*, jeżeli zmieniając w nim zwroty przesunięć poszczególnych punktów, otrzymamy znowu przesunięcie przygotowane układu.

Widzimy zatem, że *w przypadku więzów obustronnych przesunięcia przygotowane są odwracalne.*

Uwaga 1. Różniczka funkcji $F_j(x_1, \ldots, z_n)$ wynosi

$$dF_j = \frac{\partial F_j}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial z_n} dz_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F_j}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial F_j}{\partial z_i} dz_i \right).$$

Widzimy stąd, że lewą stronę równości (I) otrzymamy, tworząc formalnie różniczkę funkcji F_j i pisząc następnie $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ zamiast $dx_1, \ldots, dz_n$.

Uwaga 2. Niech dana będzie funkcja $V(x_1, \ldots, z_n)$, określona w pewnym obszarze zmiennych $x_1, \ldots, z_n$ i ciągła wraz z pochodnymi cząstkowymi w tym obszarze. Obierzmy dowolny układ wartości zmiennych $x_1, \ldots, z_n$ i oznaczmy przez $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ dowolne przyrosty tych zmiennych.

Nie oznaczamy tu przyrostów symbolami $\Delta x_1, \ldots, \Delta z_n$, gdyż w przypadku, gdy zmienne $x_1, \ldots, z_n$ są funkcjami czasu t, symbolami $\Delta x_1, \ldots, \Delta z_n$ oznacza się zwykle przyrost tych zmiennych w czasie Δt. Symbole $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ służą natomiast do zaznaczenia, że przyrosty są zupełnie dowolne i nic nie mają wspólnego z przyrostami zmiennych niezależnych, od których zależą $x_1, \ldots, z_n$ (w danym razie od czasu t).

Na mocy twierdzenia Taylora mamy:

$$V(x_1+\delta x_1, \ldots, z_n+\delta z_n) - V(x_1, \ldots, z_n) = \frac{\partial V}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z_n}\delta z_n + R, \tag{16}$$

gdzie resztę R możemy napisać w postaci

$$R = \varepsilon(|\delta x_1| + \ldots + |\delta z_n|), \tag{17}$$

przyczem ε zależy od $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ i dąży do 0 wraz z $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$.

Położymy $\delta V = \frac{\partial V}{\partial x_1}\delta x_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial z_n}\delta z_n$ czyli

$$\delta V = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right). \tag{18}$$

Na mocy (16) mamy

$$V(x_1+\delta x_1, \ldots, z_n+\delta z_n) - V(x_1, \ldots, z_n) = \delta V + R. \tag{19}$$

Jeżeli liczba $|\delta x_1|+\ldots+|\delta z_n|$ jest dostatecznie mała, to $|\varepsilon|$ także jest małą liczbą, a zatem $|R|$ jest na mocy (17) znikome w stosunku do $|\delta x_1|+\ldots+|\delta z_n|$. W tym więc przypadku δV przedstawia w przybliżeniu przyrost funkcji V. Wyrażamy to zazwyczaj, mówiąc, że δV oznacza przyrost funkcji V, odpowiadający „nieskończenie małym“ przyrostom $\delta x_i, \ldots, \delta z_n$ zmiennych $x_1, \ldots, z_n$, lub że dla „nieskończenie małych“ przyrostów mamy

$$V(x_1+\delta x_1, \ldots, z_n+\delta z_n) - V(x_1, \ldots, z_n) = \delta V. \tag{20}$$

Powyższy sposób wyrażania się nie jest zupełnie ścisły, jest jednak wygodny. Podajemy go, gdyż często używają go fizycy.

Równania (I), str. 428, określające przesunięcia przygotowane, możemy, opierając się na (18), napisać w postaci

$$\delta F_j = 0 \qquad (j=1,2,\ldots,m). \tag{21}$$

W położeniu układu zgodnym z więzami mamy $F_j=0$ $(j=1,2,\ldots,m)$. Na mocy więc (21) mamy dla przesunięć przygotowanych $F_j+\delta F_j=0$ $(j=1,2,\ldots,m)$. Na mocy (20) możemy przeto powiedzieć, że po „nieskończenie małym“ przesunięciu przygotowanym układ znajduje się również w położeniu zgodnym z więzami. Stąd pochodzi określenie przesunięcia przygotowanego jako „przesunięcia nieskończenie małego, zgodnego z więzami“. Określenie to (nieścisłe, ale dość intuicyjne) rozumieć należy w wyżej podanym znaczeniu.

Przykład 3. Układ złożony z dwóch punktów materialnych A_1, A_2 ma zachować stałą odległość $A_1A_2=r$. Współrzędne x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 tych punktów spełniają zatem równanie

$$(22) \qquad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-r^2=0.$$

Przesunięcie przygotowane układu jest więc określone równaniem

$$(23) \quad (x_1-x_2)(\delta x_1-\delta x_2)+(y_1-y_2)(\delta y_1-\delta y_2)+(z_1-z_2)(\delta z_1-\delta z_2)=0.$$

Z liczb $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$ możemy tedy obrać pięć dowolnie, a szóstą wyznaczyć z (23).

Przyjmijmy np., że $x_1=y_1=z_1=0$, $x_2=r$, $y_2=z_2=0$. Równanie (23) przyjmie wtedy postać

$$(24) \qquad -r(\delta x_1-\delta x_2)+0\cdot(\delta y_1-\delta y_2)+0\cdot(\delta z_1-\delta z_2)=0.$$

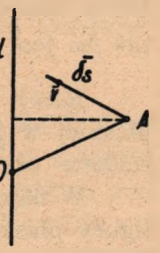
Równanie (24) będzie spełnione przy dowolnych wartościach $\delta x_2, \delta y_1, \delta y_2, \delta z_1, \delta z_2$, jeżeli przyjmiemy $\delta x_1=\delta x_2$. Przesunięcia przygotowane punktów A_1, A_2 mają więc równe rzuty na kierunek A_1A_2. Wynika to łatwo z twierdzenia podanego na str. 323, w myśl którego rzuty prędkości punktów A_1, A_2 na prostą łączącą te punkty są równe.

Przykład 4. Ciało sztywne swobodne. Załóżmy, że ciało sztywne jest układem sztywnym punktów materialnych (str. 194).

Nadajmy ciału dowolny ruch postępowy o prędkości $\overline{\delta u}$. Ponieważ punkty ciała będą miały tę samą prędkość $\overline{\delta u}$, więc przesunięcie przygotowane ciała otrzymamy, przyjmując, że punkty ciała doznały równych przesunięć:

$$(25) \qquad \overline{\delta s}=\overline{\delta u}.$$

Wynika stąd, że *translacja ciała jest przesunięciem przygotowanym.*



Nadajmy ciału dowolny ruch obrotowy o prędkości kątowej $\overline{\delta\omega}$ około osi, przechodzącej przez (dowolny) punkt O. Prędkość dowolnego punktu A ciała równa się $\overline{\delta w}=\overline{OA}\times\overline{\delta\omega}$ (str. 46). Przesunięcie przygotowane ciała otrzymamy więc, nadając dowolnemu punktowi A przesunięcie $\overline{\delta s}=\overline{\delta w}$ czyli

$$(26) \qquad \overline{\delta s}=\overline{OA}\times\overline{\delta\omega}.$$

Wynika stąd, że *przesunięcie przygotowane ciała otrzymamy, nadając punktom ciała przesunięcia proporcjonalne do prędkości, jakie by miały, gdyby ciało obracało się około dowolnej osi z dowolną prędkością kątową.*

Zauważmy, że w tym przypadku przesunięcie przygotowane nie jest przesunięciem możliwym.

Najogólniejszy ruch chwilowy ciała sztywnego jest złożeniem ruchu postępowego i obrotowego (str. 334).

A więc: *najogólniejsze przesunięcie przygotowane ciała jest złożeniem dwóch przesunięć przygotowanych, z których jedno jest przesunięciem równoległym (translacją), w drugim zaś przesunięcia punktów są proporcjonalne do ich prędkości przy obrocie ciała około osi.*

Na mocy (25) i (26) najogólniejsze przesunięcie przygotowane ciała otrzymamy, obierając dowolnie punkt O oraz wektory $\overline{\delta u}$, $\overline{\delta\omega}$ i nadając każdemu punktowi A ciała przesunięcie

$$\overline{\delta s}=\overline{\delta u}+\overline{OA}\times\overline{\delta\omega}. \tag{27}$$

Dotychczas zakładaliśmy, że ciało sztywne jest swobodne. Rozpatrzymy teraz kilka przypadków ciała nieswobodnego.

Punkt unieruchomiony. Jeżeli ciało sztywne ma unieruchomiony jeden punkt, np. punkt O, to może się tylko obracać około tego punktu. Ruch chwilowy ciała jest zatem obrotem chwilowym około pewnej osi, przechodzącej przez O (str. 332). Najogólniejsze przesunięcie przygotowane ciała otrzymamy, nadając punktom ciała przesunięcia określone wzorem (26), w którym $\overline{\delta\omega}$ możemy obrać dowolnie.

Oś unieruchomiona. Jeżeli ciało sztywne ma unieruchomioną oś, wówczas ruch ciała może być tylko obrotem około tej osi. Zatem w przesunięciu przygotowanym ciała punkty mają przesunięcia określone wzorem (26), gdzie O jest dowolnym punktem osi, zaś $\overline{\delta\omega}$ jest dowolnym wektorem, mającym kierunek osi.

Ruch figury w płaszczyźnie. Ruch chwilowy figury płaskiej w jej płaszczyźnie jest bądź ruchem postępowym, bądź ruchem obrotowym około środka obrotu chwilowego (str. 327). W najogólniejszym więc przypadku przesunięcie przygotowane figury płaskiej jest albo przesunięciem równoległym albo przesunięciem, w którym przesunięcia punktów figury są proporcjonalne do prędkości tych punktów w ruchu obrotowym około pewnego punktu, leżącego w płaszczyźnie figury.

Przykład 5. Dwa punkty materialne A_1 i A_2, połączone prętem sztywnym (bez masy) o długości d, mają pozostawać na krzywych C_1 i C_2, leżących w płaszczyźnie poziomej i danych przez równania:

$$f_1(x,y)=0, \qquad f_2(x,y)=0. \tag{28}$$

Między współrzędnymi punktów A_1 i A_2 zachodzą więc związki:

$$f_1(x_1,y_1)=0, \quad f_2(x_2,y_2)=0, \qquad (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2-d^2=0. \tag{29}$$

Równania (29) określają więzy układu. Przesunięcie przygotowane spełnia zatem równania:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1=0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\delta y_2=0, \tag{30}$$

$$(x_1-x_2)(\delta x_1-\delta x_2)+(y_1-y_2)(\delta y_1-\delta y_2)=0.$$

Możemy więc jedną z liczb $\delta x_1,\delta y_1,\delta x_2,\delta y_2$ obrać dowolnie, a pozostałe otrzymać z równań (30). Zauważmy, że prędkości punktów A_1,A_2 są styczne do krzywych C_1,C_2. Środek O obrotu chwilowego pręta A_1A_2 jest zatem punktem przecięcia się normalnych w punktach A_1 i A_2 do krzywych C_1 i C_2 (por. przykład 1, str. 329). Ponieważ ruch chwilowy pręta może być tylko obrotem około O, więc punkty A_1 i A_2 mogą mieć prędkości tylko takie, których kierunki są styczne do C_1 i C_2, a wielkości proporcjonalne do OA_1 i OA_2. Przesunięcie przygotowane układu punktów A_1,A_2 otrzymamy tedy, nadając tym punktom przesunięcia styczne do krzywych C_1,C_2 o wielkościach proporcjonalnych do odległości OA_1,OA_2 i o zwrotach jak przy obrocie około O.

Więzy jednostronne. Przypuśćmy, że wśród związków, jakie muszą spełniać współrzędne punktów układu, występuje nierówność

$$\Phi(x_1,\ldots,z_n)\leqslant 0. \tag{31}$$

Załóżmy, że w pewnym położeniu układu jest $\Phi<0$. Jeżeli układowi nadamy w pewnej chwili ruch dowolny, zgodny z wszystkimi związkami prócz (31), to — jak łatwo widzieć — w małym przedziale czasu będzie stale $\Phi<0$ (wskutek ciągłości). Ruch będzie więc spełniał równanie (31). Wynika stąd, że w położeniu, w którym zachodzi nierówność $\Phi<0$, równanie (31) nie stanowi żadnego ograniczenia prędkości możliwych i, co za tym idzie, przesunięć przygotowanych. Przy wyznaczaniu przesunięć przygotowanych możemy więc w tym przypadku nie brać w ogóle w rachubę nierówności (31).

Załóżmy teraz, że układ zajmuje położenie brzeżne, t.zn. że zachodzi równość $\Phi=0$. Nadajmy układowi w chwili t dowolny ruch zgodny z więzami. W chwili $t+\Delta t$ (gdzie $\Delta t>0$) funkcja Φ będzie miała wartość $\Phi'=\Phi+\Delta\Phi$. Ponieważ $\Phi'\leqslant 0$, a $\Phi=0$, więc $\Delta\Phi\leqslant 0$. Zatem $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\Phi/\Delta t\leqslant 0$, skąd

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial z_n}\dot{z}_n\leqslant 0. \tag{32}$$

Prędkości możliwe muszą więc spełniać nierówność (32). Jeżeli $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$ jest przesunięciem przygotowanym układu, to kładąc $\dot{x}_1=\delta x_1,\ldots,\dot{z}_n=\delta z_n$, otrzymamy układ prędkości możliwych. Zatem $\dot{x}_1,\ldots,\dot{z}_n$ spełniają nierówność (32) skąd

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial z_n}\delta z_n\leqslant 0. \tag{33}$$

Jeżeli więc w pewnym położeniu układu związek (31) staje się równością, to przesunięcie przygotowane musi spełniać związek (33) i na odwrót: przesunięcie spełniające związek (33) jest przesunięciem przygotowanym.

Jeżeli dla pewnego przesunięcia przygotowanego $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$ w związku (33) występuje znak $<$, to przesunięcie $-\delta x_1,\ldots,-\delta z_n$ nie jest przesunięciem przygotowanym; dane więc przesunięcie przygotowane nie jest odwracalne (str. 429). Jeżeli zaś przesunięcie $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$ jest odwracalne, to w (33) musi wystąpić znak $=$.

Zbierając otrzymane wyniki, możemy więc powiedzieć:

Jeżeli więzy układu określone są przez związki:

$$F_j(x_1,\ldots,z_n)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m),$$

$$\Phi_r(x_1,\ldots,z_n)\leqslant 0 \qquad (r=1,2,\ldots,s),$$

to przesunięcie przygotowane $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$ w danym położeniu układu spełnia równania:

$$\text{(I)}\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$$

oraz te spośród związków

$$\text{(II)}\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi_r}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial\Phi_r}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_i}\delta z_i\right)\leqslant 0 \qquad (r=1,2,\ldots,s),$$

dla których w tym położeniu układu zachodzi równość $\Phi_r=0$.

Przykład 6. Załóżmy, że punkt materialny ma pozostawać wewnątrz lub na powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$. Współrzędne x,y,z tego punktu muszą zatem spełniać nierówność

$$x^2+y^2+z^2-r^2\leqslant 0. \tag{34}$$

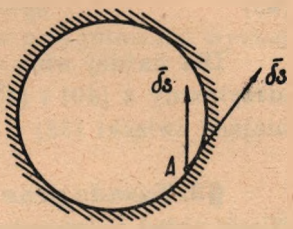
Jeżeli punkt znajduje się wewnątrz kuli, to zachodzi nierówność

$$x^2+y^2+z^2-r^2<0; \tag{35}$$

w tym położeniu punkt może mieć prędkość dowolną, zatem każda prędkość jest prędkością możliwą. Wynika stąd, że każde przesunięcie jest wtedy przesunięciem przygotowanym.

Jeżeli zaś punkt znajduje się na powierzchni kuli, to

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0 \tag{36}$$



i prędkościami możliwymi są prędkości styczne do kuli lub prędkości, mające zwroty ku wnętrzu kuli. Przesunięciami przygotowanymi są więc wtedy przesunięcia, których kierunki są styczne do kuli oraz których kierunki nie są styczne, lecz mają zwroty ku wnętrzu kuli.

Przesunięcie przygotowane $\delta x,\delta y,\delta z$ spełnia na mocy (II) nierówność, którą otrzymamy różniczkując (34):

$$2x\delta x+2y\delta y+2z\delta z\leqslant 0 \qquad \text{czyli} \qquad x\delta x+y\delta y+z\delta z\leqslant 0.$$

Przykład 7. Punkt materialny, uwiązany na nici o długości l uczepionej w początku układu współrzędnych, ma pozostawać na powierzchni $z=x^2+y^2$. Współrzędne punktu spełniają więc związki:

$$z-x^2-y^2=0, \qquad x^2+y^2+z^2-l^2\leqslant 0. \tag{37}$$

Jeżeli nić nie jest napięta, t. zn. jeżeli $x^2+y^2+z^2-l^2<0$, wówczas przesunięcia przygotowane spełniają tylko równość

$$\delta z-2x\delta x-2y\delta y=0. \tag{38}$$

Jeżeli zaś nić jest napięta, to punkt zajmuje położenie brzeżne, więc $x^2+y^2+z^2-l^2=0$; w tym przypadku oprócz równości (38) musi zatem zachodzić nierówność

(39) $$x\delta x+y\delta y+z\delta z\leqslant 0.$$

Z (38) dostajemy

(40) $$\delta z=2x\delta x+2y\delta y,$$

skąd przez podstawienie w (39)

(41) $$x(1+2z)\delta x+y(1+2z)\delta y\leqslant 0.$$

Położmy

(42) $$w=x(1+2z)\delta x+y(1+2z)\delta y.$$

Stąd jeżeli $y\neq 0$, to

(43) $$\delta y=[w-x(1+2z)\delta x]/y(1+2z).$$

Dla każdej więc wartości δx i każdej wartości w niedodatniej, otrzymamy z (40) i (43) przesunięcie przygotowane $\delta x, \delta y, \delta z$, spełniające związki (38) i (39).

§3. Zasada prac przygotowanych. Praca przygotowana. Niech układ holonomiczny skleronomiczny będzie złożony z n punktów materialnych $A_1,\ldots,A_n$, w których zaczepione są siły $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$. Nadajmy układowi dowolne przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s}_1,\ldots,\overline{\delta s}_n$. Praca sił $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$ na tym przesunięciu wynosi

(I) $$\delta' L=\overline{P}_1\overline{\delta s}_1+\ldots+\overline{P}_n\overline{\delta s}_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{P}_i\overline{\delta s}_i.$$

Jeżeli $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \ldots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ są rzutami wektorów $\overline{\delta s}_1,\ldots,\overline{\delta s}_n$, to

(I') $$\delta' L=\sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\delta x_i+P_{i_y}\delta y_i+P_{i_z}\delta z_i).$$

Pracę określoną wzorami (I) i (I') nazywamy *pracą przygotowaną* sił $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$ na przesunięciu przygotowanym $\overline{\delta s}_1,\ldots,\overline{\delta s}_n$ (mającym rzuty $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$).

Uwaga. Pracę przygotowaną oznaczamy przez $\delta' L$ (z kreską), gdyż symbol δL mógłby nasuwać przypuszczenie, że L jest funkcją, a δL wyrażeniem określonym przez wzór (18), str. 430.

Jeżeli siły $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n$ mają potencjał V, wówczas na mocy (III), str. 214, mamy $P_{ix}=\partial V/\partial x_i$, $P_{iy}=\partial V/\partial y_i$, $P_{iz}=\partial V/\partial z_i$.

Z (I') dostaniemy

$$\delta' L=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i\right), \tag{1}$$

skąd na mocy (18), str. 430,

$$\delta' L=\delta V. \tag{I''}$$

Przykład 1. Punkt ma pozostawać na kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$. Przesunięcie przygotowane określone jest równaniem

$$x\delta x+y\delta y+z\delta z=0.$$

Jeżeli na punkt działa siła $\bar{P}$, to jej praca przygotowana wynosi

$$\delta' L=P_x\delta x+P_y\delta y+P_z\delta z. \tag{2}$$

Załóżmy, że $z\neq 0$. Zatem

$$\delta z=-(x\delta x+y\delta y)/z, \tag{3}$$

skąd przez podstawienie w (2)

$$\delta' L=[(P_x z-P_z x)\delta x+(P_y z-P_z y)\delta y]/z. \tag{4}$$

We wzorze (4) wartości δx, δy są dowolne.

Jeżeli

$$P_x z-P_z x=0, \qquad P_y z-P_z y=0, \tag{5}$$

to otrzymujemy jako pracę przygotowaną $\delta' L=0$ na każdym przesunięciu przygotowanym. Na odwrót, jeżeli jest stale $\delta' L=0$, to przyjmując we wzorze (4) raz $\delta x=1$ i $\delta y=0$, a drugi raz $\delta x=0$ i $\delta y=1$, otrzymamy równania (5), które wyrażają, że kierunek siły $\bar{P}$ przechodzi przez początek układu współrzędnych (czyli przez środek kuli), t.j. że siła jest normalna do powierzchni kuli.

Otrzymane wyniki możemy sprawdzić w następujący sposób. Zauważmy, że przesunięciem przygotowanym w dowolnym punkcie kuli jest każdy wektor styczny do kuli w tym punkcie (str. 424). Praca przygotowana siły $\bar{P}$ będzie więc stale zerem wtedy i tylko wtedy, gdy siła $\bar{P}$ jest prostopadła do każdego przesunięcia przygotowanego, a więc do płaszczyzny stycznej do kuli, czyli gdy kierunek siły jest normalny do powierzchni kuli.

Zasada prac przygotowanych. Niech układ holonomiczny skleronomiczny punktów materialnych $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ poddany będzie działaniu sił. Siły sprawiające, że układ zachowuje więzy, nazywamy *reakcjami*, a siły zaczepione w punktach układu i nie będące reakcjami nazywamy dla odróżnienia *siłami działającymi*. Gdy układ jest w spoczynku t.j. w równowadze, mówimy o siłach działających, że *się równoważą*.

Oczywistym jest, że nawet gdy siły działające się równoważą, układ nie musi pozostawać w spoczynku: np. punkt materialny, na który nie działają żadne siły, może się poruszać ruchem jednostajnym.

Załóżmy, że układ punktów jest w równowadze. Dla każdego punktu z osobna siły działające na ten punkt znoszą się więc z reakcjami. Oznaczając przez $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n$ siły działające na poszczególne punkty, a przez $\bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_n$ reakcje, otrzymamy zatem:

$$\bar{P}_1 + \bar{R}_1 = 0, \quad \bar{P}_2 + \bar{R}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \bar{P}_n + \bar{R}_n = 0. \tag{6}$$

Weźmy pod uwagę dowolne przesunięcie przygotowane $\bar{\delta s}_1, \ldots, \bar{\delta s}_n$. Praca sił działających i reakcyj na tym przesunięciu wynosi z uwagi na (6)

$$(\bar{P}_1 + \bar{R}_1)\,\bar{\delta s}_1 + \ldots + (\bar{P}_n + \bar{R}_n)\,\bar{\delta s}_n = 0 \tag{7}$$

czyli

$$(\bar{P}_1\,\bar{\delta s}_1 + \ldots + \bar{P}_n\,\bar{\delta s}_n) + (\bar{R}_1\,\bar{\delta s}_1 + \ldots + \bar{R}_n\,\bar{\delta s}_n) = 0. \tag{8}$$

Doświadczenie okazuje, że jeżeli nie ma tarcia, to praca reakcyj na każdym przesunięciu przygotowanym jest nieujemna.

Jeżeli np. punkt ma pozostawać wewnątrz lub na powierzchni pewnej kuli gładkiej, to w przypadku, gdy punkt znajduje się na powierzchni, reakcja jest skierowana ku środkowi kuli. Przesunięcie przygotowane jest albo styczne do kuli albo ma zwrot ku wnętrzu (str. 435). W pierwszym przypadku praca reakcji jest zerem, w drugim zaś jest dodatnia.

Przy założeniu więc, że tarcie nie występuje, jest

$$\bar{R}_1\,\bar{\delta s}_1 + \ldots + \bar{R}_n\,\bar{\delta s}_n \geqslant 0. \tag{9}$$

Na mocy (8)

$$\bar{P}_1\,\bar{\delta s}_1 + \ldots + \bar{P}_n\,\bar{\delta s}_n = -(\bar{R}_1\,\bar{\delta s}_1 + \ldots + \bar{R}_n\,\bar{\delta s}_n), \tag{10}$$

więc z (9) otrzymujemy

$$\bar{P}_1\,\bar{\delta s}_1 + \ldots + \bar{P}_n\,\bar{\delta s}_n \leqslant 0. \tag{11}$$

Wyrażenie po lewej stronie nierówności (11) przedstawia w myśl (I), str. 436, pracę przygotowaną sił działających.

A więc: jeżeli nie ma tarcia i układ jest w równowadze, to praca sił działających na każdym przesunięciu przygotowanym jest bądź zerem, bądź liczbą ujemną.

Jeżeli przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s}_1, \ldots, \overline{\delta s}_n$ jest odwracalne (str. 429), to $-\overline{\delta s}_1, \ldots, -\overline{\delta s}_n$ jest również przesunięciem przygotowanym. W przypadku równowagi zachodzi więc (11) oraz

$$-\overline{P}_1 \overline{\delta s}_1 - \ldots - \overline{P}_n \overline{\delta s}_n \leqslant 0. \tag{12}$$

Z (11) i (12) wynika, że

$$\overline{P}_1 \overline{\delta s}_1 + \ldots + \overline{P}_n \overline{\delta s}_n = 0. \tag{13}$$

A więc: w przypadku równowagi układu praca przygotowana sił działających jest równa zeru na każdym przesunięciu przygotowanym odwracalnym.

W szczególności, gdy więzy są obustronne, każde przesunięcie przygotowane jest odwracalne, a zatem praca przygotowana sił działających jest wtedy zerem na każdym przesunięciu przygotowanym.

Otrzymany warunek równowagi jest warunkiem konieczny m. Doświadczenie uczy, że jest także wystarczającym.

Warunek ten nosi nazwę *zasady prac przygotowanych.*

Możemy ją wypowiedzieć, jak następuje:

Zasada prac przygotowanych. *Jeżeli układ n punktów materialnych $A_1, \ldots, A_n$ jest holonomiczny skleronomiczny i tarcie nie występuje, to warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił działających $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ jest, by na każdym przesunięciu przygotowanym $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ praca przygotowana sił działających była zerem lub liczbą ujemną, t.zn. żeby zachodził wzór*

$$\delta' L = \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x} \delta x_i + P_{i_y} \delta y_i + P_{i_z} \delta z_i) \leqslant 0. \tag{II}$$

Jeżeli więzy są obustronne, warunek (II) *przyjmuje postać*

$$\delta' L = \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x} \delta x_i + P_{i_y} \delta y_i + P_{i_z} \delta z_i) = 0. \tag{III}$$

Zasadę prac przygotowanych można w wielu przypadkach udowodnić. Przyjmujemy ją jako prawo stwierdzone doświadczalnie we wszystkich tych przypadkach, w których określone jest pojęcie tarcia. W przypadku ogólnym możnaby powiedzieć, że w układzie nie występuje tarcie, jeżeli do układu stosuje się zasada prac przygotowanych.

Znaczenie zasady prac przygotowanych polega na tym, że podaje warunek równowagi sił działających bez pomocy reakcyj.

Przykład 2. Niech A będzie punktem materialnym swobodnym. Oznaczmy przez $\overline{P}$ sumę sił działających na A. Praca przygotowana jest $\delta' L = \overline{P}\,\overline{\delta s}$, gdzie $\overline{\delta s}$ jest przesunięciem przygotowanym. W przypadku równowagi $\delta' L = 0$ czyli

$$\overline{P}\,\overline{\delta s} = 0 \tag{14}$$

dla każdego przesunięcia przygotowanego. Ponieważ punkt A jest swobodny, więc $\overline{\delta s}$ jest dowolne. Wynika stąd wobec (14), że $\overline{P} = 0$. Gdyby bowiem $\overline{P} \neq 0$, to przyjmując, że $\overline{\delta s}$ ma kierunek i zwrot siły $\overline{P}$, mielibyśmy $\overline{P}\,\overline{\delta s} = |\overline{P}| \cdot |\overline{\delta s}| \neq 0$ wbrew (14).

Sprawdziliśmy więc zasadę prac przygotowanych w przypadku punktu swobodnego.

Przykład 3. Punkt materialny A, poddany działaniu siły $\overline{P}$, ma pozostawać na powierzchni S. W położeniu równowagi praca przygotowana jest $\delta' L = \overline{P}\,\overline{\delta s} = 0$, gdzie $\overline{\delta s}$ jest przesunięciem przygotowanym, a więc wektorem dowolnym, leżącym w płaszczyźnie Π, stycznej do powierzchni S w punkcie A (str. 424). Wynika stąd, że $\overline{P} \perp \Pi$. Na odwrót, jeżeli $\overline{P} \perp \Pi$, to oczywiście $\delta' L = \overline{P}\,\overline{\delta s} = 0$, więc punkt A jest w położeniu równowagi.

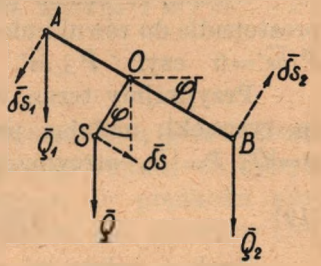
Przyjmijmy teraz, że punkt A ma pozostawać po jednej stronie powierzchni S. Więzy są zatem jednostronne. Przy równowadze mamy więc $\delta' L = \overline{P}\,\overline{\delta s} \leqslant 0$ na każdym przesunięciu przygotowanym. Jeżeli $\overline{\delta s}$ leży w płaszczyźnie stycznej Π, wówczas jest przesunięciem odwracalnym (str. 429), a zatem $\overline{P}\,\overline{\delta s} = 0$. Wynika stąd, że $\overline{P} \perp \Pi$.

Najogólniejszym przesunięciem przygotowanym jest każdy wektor (o początku A), skierowany ku tej stronie powierzchni S, po której leży punkt A. Ponieważ $\overline{P}\,\overline{\delta s} \leqslant 0$, więc $\overline{P}$ ma zwrot w kierunku powierzchni S (t. zn. przyciska punkt A do powierzchni S). Na odwrót, jeżeli $\overline{P} \perp \Pi$ i $\overline{P}$ ma zwrot w kierunku powierzchni S, wówczas, jak łatwo widzieć, $\delta' L = \overline{P}\,\overline{\delta s} \leqslant 0$ na każdym przesunięciu przygotowanym. Punkt znajduje się zatem w położeniu równowagi.

Przykład 4. Punkt materialny A, poddany działaniu siły $\bar{P}$, ma pozostawać na linii C. W położeniu równowagi praca przygotowana jest $\delta' L = \bar{P}\bar{\delta s} = 0$ na każdym przesunięciu przygotowanym $\bar{\delta s}$. Ponieważ $\bar{\delta s}$ jest wektorem dowolnym, stycznym do C w punkcie A, więc $\bar{P}$ jest prostopadłe do C.

Na odwrót, jeżeli $\bar{P}$ jest prostopadłe do C, to oczywiście $\bar{P}\bar{\delta s} = 0$, więc punkt jest w położeniu równowagi.

Przykład 5. Na dźwignię AB działają ciężary $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$ uczepione w punktach A, B oraz ciężar dźwigni $\bar{Q}$, zaczepiony w środku S jej masy. Siły działające leżą w jednej płaszczyźnie pionowej, prostopadłej do osi obrotu w punkcie O, przyczem $OS \perp AB$. Wyznaczyć w położeniu równowagi kąt φ, jaki OS tworzy z pionem (por. przykład 1, str. 278).



Oznaczmy przez $\bar{\delta s}_1, \bar{\delta s}_2, \bar{\delta s}$ przesunięcia przygotowane punktów zaczepienia A, B, S. Dźwignia może się jedynie obracać około swojej osi. Prędkości możliwe — a co za tym idzie — przesunięcia przygotowane punktów A, B, S są prostopadłe do OA, OB, OS. Oznaczając przez $\delta\omega$ dowolną prędkość kątową, mamy zatem:

$$(15) \qquad |\bar{\delta s}_1| = OA\,\delta\omega, \qquad |\bar{\delta s}_2| = OB\,\delta\omega, \qquad |\bar{\delta s}| = OS\,\delta\omega.$$

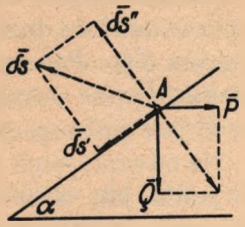
W położeniu równowagi praca przygotowana jest zerem czyli $\bar{Q}_1\bar{\delta s}_1 + \bar{Q}_2\bar{\delta s}_2 + \bar{Q}\bar{\delta s} = 0$. Obliczając iloczyny skalarowe i oznaczając wartości bezwzględne sił przez Q_1, Q_2, Q, otrzymamy na mocy (15) $(Q_1 \cdot OA\cos\varphi + Q \cdot OS\sin\varphi - Q_2 \cdot OB\cos\varphi)\delta\omega = 0$, skąd po podzieleniu przez $\delta\omega$

$$(16) \qquad \operatorname{tg}\varphi = (Q_2 \cdot OB - Q_1 \cdot OA)/Q \cdot OS.$$

Wzór (16) otrzymaliśmy poprzednio na innej drodze (por. wzór (6), str. 279).

Przykład 6. Na równi pochyłej, nachylonej pod kątem α do poziomu, znajduje się punkt ciężki A, który pozostaje w równowadze pod wpływem siły $\bar{P}$, mającej kierunek poziomy. Wyznaczyć siłę $\bar{P}$ przy założeniu, że nie ma tarcia.

Oznaczmy przez $\bar{Q}$ ciężar ciała, a przez $\overline{\delta s}$ dowolne przesunięcie przygotowane. Praca przygotowana jest $\delta' L = \bar{Q}\overline{\delta s} + \bar{P}\cdot\overline{\delta s}$. Aby zachodziła równowaga, musi być na każdym przesunięciu przygotowanym $\delta' L \leqslant 0$ czyli



$$\bar{Q}\,\overline{\delta s} + \bar{P}\,\overline{\delta s} \leqslant 0. \tag{17}$$

Weźmy najpierw pod uwagę przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s'}$ mające kierunek równi pochyłej. Przy tym założeniu $\overline{\delta s'}$ jest przesunięciem odwracalnym, zatem (17) przyjmie postać równości

$$\bar{Q}\,\overline{\delta s'} + \bar{P}\,\overline{\delta s'} = 0. \tag{18}$$

Niechaj Π będzie płaszczyzną pionową, przechodzącą przez A prostopadle do równi i niech $\overline{\delta s'} \perp \Pi$. Zatem $\bar{Q}\overline{\delta s'} = 0$, skąd na mocy (2) $\bar{P}\cdot\overline{\delta s'} = 0$ czyli $\bar{P} \perp \overline{\delta s'}$. A więc $\bar{P}$ leży w płaszczyźnie Π.

Przyjmijmy teraz, że $\overline{\delta s'}$ leży na równi i w płaszczyźnie Π (p. rysunek); nadając przesunięciu $\overline{\delta s'}$ zwrot ku dołowi i kładąc $Q = |\bar{Q}|$, $P = |\bar{P}|$, otrzymamy z (18)

$$Q|\overline{\delta s'}|\sin\alpha \pm P|\overline{\delta s'}|\cos\alpha = 0. \tag{19}$$

Znak $\pm$ zależy od zwrotu siły $\bar{P}$. Z równości (19) wynika, że należy obrać znak —. A więc siła $\bar{P}$ musi przyciskać punkt do równi. Przy znaku — otrzymamy z (19)

$$P = Q\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{20}$$

Wyznaczyliśmy więc kierunek, zwrot i wielkość siły $\bar{P}$ przy założeniu równowagi. Z (20) łatwo wynika, że suma $\bar{Q} + \bar{P}$ jest prostopadła do równi.

Aby wykazać, że równowaga rzeczywiście zajdzie, należy stwierdzić, że warunek (17) zachodzi dla każdego przesunięcia przygotowanego. Aby to udowodnić, rozłóżmy dowolne przesunięcie przygotowane $\overline{\delta s}$ na dwa przesunięcia: $\overline{\delta s''}$ prostopadłe do równi i $\overline{\delta s'}$ leżące na równi. Praca sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ na przesunięciu $\overline{\delta s'}$ jest zerem, gdyż $\bar{P} + \bar{Q} \perp \overline{\delta s'}$. Przesunięcie $\overline{\delta s''}$ i suma $\bar{P} + \bar{Q}$ mają ten sam kierunek, lecz zwroty przeciwne, więc praca sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ na $\overline{\delta s''}$ jest ujemna. Wynika stąd, że praca sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$ na przesunięciu $\overline{\delta s}$ jest ujemna. Związek (17) zachodzi więc dla każdego przesunięcia przygotowanego. Zatem siły $\bar{Q}$ i $\bar{P}$ równoważą się.

Przykład 7. Ciało sztywne. Opierając się na zasadzie prac przygotowanych, wyprowadzimy teraz warunki równowagi sił działających na ciało sztywne.

Ciało swobodne. Niech na ciało sztywne swobodne działają siły $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$ o początkach $A_1,\ldots,A_n$. Nadajmy ciału dowolne przesunięcia przygotowane i oznaczmy przez $\overline{\delta s_1},\ldots,\overline{\delta s_n}$ przesunięcia punktów $A_1,\ldots,A_n$. Praca przygotowana wynosi zatem na mocy (I), str. 436,

$$\delta' L=\overline{P}_1\overline{\delta s_1}+\ldots+\overline{P}_n\overline{\delta s_n}. \tag{21}$$

W przykładzie 4, str. 431, zajmowaliśmy się przesunięciami przygotowanymi ciała sztywnego.

Niech przesunięciem przygotowanym ciała będzie translacja (str. 431); punkty doznają więc równych przesunięć $\overline{\delta u}$. Na mocy (21) mamy $\delta' L=\overline{P}_1\overline{\delta u}+\ldots+\overline{P}_n\overline{\delta u}=(\overline{P}_1+\ldots+\overline{P}_n)\overline{\delta u}$. Kładąc $\overline{P}=\overline{P}_1+\ldots+\overline{P}_n$, otrzymamy

$$\delta' L=\overline{P}\,\overline{\delta u}. \tag{22}$$

Niech O będzie dowolnym punktem ciała, a l osią przechodzącą przez O. Nadajmy ciału przesunięcie przygotowane, w którym punkty doznają przesunięć proporcjonalnych do prędkości przy obrocie ciała około osi l z prędkością kątową $\overline{\delta\omega}$. Na mocy (26), str. 431, otrzymamy

$$\overline{\delta s_i}=\overline{OA_i}\times\overline{\delta\omega} \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

skąd na mocy (21) $\delta' L=\overline{P}_1(\overline{OA_1}\times\overline{\delta\omega})+\ldots+\overline{P}_n(\overline{OA_n}\times\overline{\delta\omega})$. Ponieważ $\overline{a}(\overline{b}\times\overline{c})=\overline{c}(\overline{a}\times\overline{b})$ (wzór (II), str. 12), więc

$$\delta' L=\overline{\delta\omega}(\overline{P}_1\times\overline{OA_1})+\ldots+\overline{\delta\omega}(\overline{P}_n\times\overline{OA_n}).$$

Lecz $\overline{P}_1\times\overline{OA_1}=\mathrm{Mom}_O\overline{P}_1$ i t.d. Zatem

$$\delta' L=\overline{\delta\omega}(\mathrm{Mom}_O\overline{P}_1+\ldots+\mathrm{Mom}_O\overline{P}_n)=\overline{\delta\omega}\cdot\overline{M}, \tag{23}$$

gdzie $\overline{M}$ jest momentem ogólnym sił względem O.

Oznaczmy przez $\delta\omega$ współrzędną $\overline{\delta\omega}$ względem osi l, a przez φ kąt, jaki $\overline{M}$ tworzy z osią l. Wówczas $\overline{\delta\omega}\cdot\overline{M}=\delta\omega|\overline{M}|\cos\varphi$. Ponieważ moment sił działających względem osi l wynosi $M_l=|\overline{M}|\cos\varphi$, więc na mocy (23)

$$\delta' L=M_l\delta\omega. \tag{24}$$

Najogólniejsze przesunięcie przygotowane ciała sztywnego jest złożeniem przesunięć, określonych przez wzory (25) i (26), str. 431. Zatem na najogólniejszym przesunięciu przygotowanym jest

$$\delta' L = \overline{P} \cdot \overline{\delta u} + M_l \delta\omega, \tag{25}$$

gdzie $\overline{P}$ oznacza sumę wszystkich sił działających, M_l moment względem dowolnej osi l, $\overline{\delta u}$ dowolny wektor, a $\delta\omega$ dowolną liczbę.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia warunków równowagi. Załóżmy, że układ sił działających jest w równowadze. Zatem praca przygotowana $\delta' L$ jest zerem na każdym przesunięciu przygotowanym. Nadając ciału dowolne przesunięcie $\overline{\delta u}$, mamy na mocy (22) $\overline{P}\overline{\delta u} = 0$, skąd wynika, że

$$\overline{P} = 0, \tag{26}$$

gdyby bowiem było $\overline{P} \neq 0$, to obierając $\overline{\delta u}$ w kierunku $\overline{P}$, mielibyśmy $\overline{P}\overline{\delta u} \neq 0$.

Obierzmy teraz dowolnie punkt O i oś l przechodzącą przez O. Dla każdego $\delta\omega$ jest na mocy (24) $M_l \delta\omega = 0$, więc $M_l = 0$. Ponieważ l jest osią dowolną, przechodzącą przez O, więc moment ogólny względem O jest

$$\overline{M} = 0. \tag{27}$$

Udowodniliśmy w ten sposób, że równości (26) i (27) są warunkami **koniecznymi** równowagi sił działających. Wykażemy teraz, że są one również warunkami **wystarczającymi**.

Jeżeli bowiem zachodzą równości (26) i (27), to praca przygotowana, podana w najogólniejszym przypadku wzorem (25), jest oczywiście zerem.

Otrzymaliśmy tedy warunki równowagi ciała sztywnego swobodnego, wyprowadzone na innej drodze na str. 248.

Rozpatrzymy z kolei kilka przypadków równowagi ciała nieswobodnego.

Ciało mające punkt stały. Niech ciało ma punkt O unieruchomiony. Ruch chwilowy ciała może więc być tylko obrotem około osi przechodzącej przez O. Zatem praca przygotowana wyraża się wzorem (24).

Jeżeli siły działające równoważą się, wówczas $\delta' L = 0$, skąd na mocy (24) jest $M_l \delta\omega = 0$. Ponieważ $\delta\omega$ jest dowolne, więc $M_l = 0$,

gdzie l jest osią dowolną, przechodzącą przez O. Wynika stąd, że moment ogólny względem O sił działających na ciało jest $\bar{M}=0$.

Na odwrót, jeżeli $\bar{M}=0$, wówczas $M_l=0$ względem każdej osi l przechodzącej przez O. Na mocy więc (24) jest stale $\delta' L=0$.

A więc: układ sił działających na ciało, mające jeden punkt O unieruchomiony, jest w równowadze wtedy i tylko wtedy, gdy moment ogólny sił względem O jest zerem.

Warunek powyższy otrzymaliśmy poprzednio innym sposobem (str. 274).

Ciało płasko prowadzone (str. 276). Niechaj Π będzie płaszczyzną kierowniczą ciała płasko prowadzonego. Ruch chwilowy ciała jest albo ruchem postępowym z prędkością równoległą do Π, albo ruchem obrotowym wkoło osi l prostopadłej do Π. Praca przygotowana wyraża się zatem wzorem (22), gdzie $\delta u \| \Pi$, albo wzorem (24), gdzie $l \perp \Pi$. W przypadku równowagi otrzymamy zatem $\bar{P}\delta u=0$ dla $\delta u \| \Pi$ i $M_l \delta\omega=0$ dla $l \perp \Pi$. Wynika stąd, że

$$\bar{P} \perp \Pi \quad \text{i} \quad M_l=0 \quad \text{dla} \quad l \perp \Pi. \tag{28}$$

Łatwo stwierdzić, że otrzymany warunek równoważny jest warunkowi, by rzuty sił na płaszczyznę kierowniczą Π tworzyły układ równoważny zeru. Jeżeli zachodzi warunek (28), wówczas z (22) i (24) wynika, że praca przygotowana jest zerem. Warunek (28) jest więc konieczny i wystarczający dla równowagi sił działających.

Ciało mające oś stałą. Załóżmy, że ciało ma oś l unieruchomioną. W tym przypadku ciało może się obracać tylko około osi l. Praca przygotowana wyraża się zatem wzorem (24). Warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił działających jest więc na mocy (24) $\delta' L=M_l \delta\omega=0$ czyli $M_l=0$ ($\delta\omega$ jest bowiem dowolne).

Warunek ten otrzymaliśmy poprzednio na str. 276.

Ciało mające stałą oś skrętu. Załóżmy, że ciało może się tylko obracać około pewnej osi l oraz przesuwać wzdłuż niej, jak np. kula nawleczona na prosty pręt sztywny. Ruch chwilowy ciała jest więc złożeniem ruchu postępowego o prędkości mającej kierunek osi l i ruchu obrotowego około tej osi, a zatem jest skrętem około osi l. W najogólniejszym przypadku praca przygotowana określona jest więc wzorem (25), w którym δu ma kierunek osi l, zaś $\delta\omega$ jest dowolne.

Jeżeli zachodzi równowaga, to na mocy (25)

$$\delta' L = \overline{P\delta u} + M_l \delta\omega = 0. \tag{29}$$

Przyjmując $\overline{\delta u} = 0$ i $\delta\omega \neq 0$, dostaniemy $M_l = 0$, jeżeli zaś przyjmiemy $\delta\omega = 0$, otrzymamy z (29) $\overline{P\delta u} = 0$. Ponieważ δu ma kierunek osi l, więc $\overline{P} \perp l$.

Na odwrót, jeżeli $M_l = 0$ i $\overline{P} \perp l$, wówczas na mocy (29) jest oczywiście $\delta' L = 0$.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi ciała mogącego się około stałej osi obracać i wzdłuż niej przesuwać jest, by suma sił była prostopadła do osi i moment sił względem osi był zerem.*

Śruba. Ciało sztywne, które może się tylko tak poruszać, że pewna linia śrubowa w ciele przesuwa się po sobie, nazywamy *śrubą*.

Oś śruby może się tylko przesuwać po sobie, a zatem prędkości punktów osi mają kierunek osi. Wynika stąd (str. 336), że ruch chwilowy jest skrętem chwilowym około osi śruby.

Oznaczając przez $\overline{u}$ prędkość ruchu postępowego chwilowego, przez $\overline{\omega}$ prędkość kątową chwilową, a przez h skok śruby, mamy na mocy (15), str. 338,

$$|\overline{u}| / |\overline{\omega}| = h/2\pi. \tag{30}$$

Ponieważ $\overline{u}$ i $\overline{\omega}$ mają kierunek osi l śruby, więc oznaczając przez u i ω współrzędne względem osi l wektorów $\overline{u}$ i $\overline{\omega}$, otrzymamy z (30)

$$u = \varepsilon h\omega/2\pi, \tag{31}$$

gdzie $\varepsilon = +1$, jeżeli śruba jest lewoskrętna, zaś $\varepsilon = -1$, jeżeli jest prawoskrętna.

Praca przygotowana wyraża się wzorem (25), w którym $\delta\omega$ jest dowolne, a $\overline{\delta u}$ ma kierunek osi l śruby, przyczem na mocy (31)

$$\delta u = \varepsilon h \delta\omega/2\pi, \tag{32}$$

gdzie δu jest współrzędną $\overline{\delta u}$ względem osi l.

Oznaczając przez P_l rzut $\overline{P}$ na oś l, mamy $\overline{P\delta u} = P_l \delta u$. Na mocy więc (25) i (32)

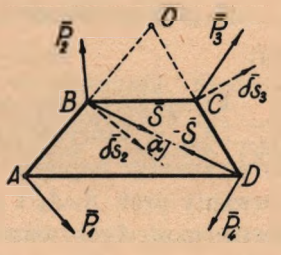
$$\delta' L = (\varepsilon P_l h/2\pi + M_l)\delta\omega. \tag{33}$$

Z zasady prac przygotowanych wynika na mocy (33), że *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił działających na śrubę jest to, by siły spełniały równanie*

$$M_l/P_l = -\varepsilon h/2\pi. \tag{34}$$

Przykład 8. Wyznaczanie napięć w prętach kratownicy. Metoda kinematyczna. Na zasadzie prac przygotowanych opiera się pewna metoda wyznaczania napięć w prętach kratownicy. Metodę tę przedstawimy najpierw na przykładzie.

Na kratownicę płaską działają siły $\bar{P}_1,\ldots,\bar{P}_4$ zaczepione w węzłach i będące w równowadze. Aby wyznaczyć napięcie np. w pręcie BD, usuwamy ten pręt. Pozostały układ prętów będzie nadal w równowadze, jeżeli w punktach B i D przyłożymy siły $\bar{S}$ i $-\bar{S}$ równe napięciom usuniętego pręta w tych dwu punktach.



Nadajmy układowi prętów AB,BC,CD,DA dowolne przesunięcie przygotowane i oznaczmy przez $\delta\bar{s}_1,\ldots,\delta\bar{s}_4$ przesunięcia punktów $A,\ldots,D$. Praca przygotowana będzie więc zerem czyli

$$\bar{P}_1\delta\bar{s}_1+\bar{P}_2\delta\bar{s}_2+\bar{P}_3\delta\bar{s}_3+\bar{P}_4\delta\bar{s}_4+\bar{S}\delta\bar{s}_2-\bar{S}\delta\bar{s}_4=0,$$

skąd

$$\bar{S}(\delta\bar{s}_2-\delta\bar{s}_4)=-(\bar{P}_1\delta\bar{s}_1+\bar{P}_2\delta\bar{s}_2+\bar{P}_3\delta\bar{s}_3+\bar{P}_4\delta\bar{s}_4). \tag{35}$$

Położmy $S=\pm|\bar{S}|$, gdzie znak zależy od tego, czy napięcie $\bar{S}$ jest rozciąganiem czy ściskaniem, i oznaczmy przez δr rzut różnicy $\delta\bar{s}_2-\delta\bar{s}_4$ na kierunek $\overline{BD}$. Przy tych oznaczeniach lewa strona równości (35) wynosi $S\delta r$. Jeżeli więc przesunięcia przygotowane obierzemy w ten sposób, by mieć $\delta r\neq 0$, otrzymamy z (35)

$$S=-(\bar{P}_1\delta\bar{s}_1+\bar{P}_2\delta\bar{s}_2+\bar{P}_3\delta\bar{s}_3+\bar{P}_4\delta\bar{s}_4)/\delta r. \tag{36}$$

Szukane przesunięcie przygotowane otrzymamy, przyjmując, że punkty A i D są unieruchomione; zatem:

$$\delta\bar{s}_1=0, \qquad \delta\bar{s}_4=0. \tag{37}$$

Ruch chwilowy pręta BD (przy założeniu, że A i D są nieruchome) jest obrotem chwilowym około środka O, który jest punktem przecięcia się prostych AB i DC (por. przykład 4, str. 330).

Przesunięcia $\overline{\delta s_2}$ i $\overline{\delta s_3}$ są proporcjonalne do prędkości punktów B i C przy obrocie pręta BC około O. Zatem $\overline{\delta s_2}$ i $\overline{\delta s_3}$ są prostopadłe odpowiednio do AB i DC, oraz

$$|\overline{\delta s_3}|/|\overline{\delta s_2}| = OC/OB. \tag{38}$$

Niech P_2' i P_3' oznaczają rzuty sił $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$ na kierunki $\overline{\delta s_2}$ i $\overline{\delta s_3}$, zaś α kąt między $\overline{\delta s_2}$ a $\overline{BD}$. Zatem:

$$\overline{P}_2\overline{\delta s_2} = P_2'|\overline{\delta s_2}|, \quad \overline{P}_3\overline{\delta s_3} = P_3'|\overline{\delta s_3}|, \quad \delta r = |\overline{\delta s_2}|\cos\alpha. \tag{39}$$

Z (36) otrzymamy na mocy (37)-(39)

$$S = -(P_2'\cdot OB + P_3'\cdot OC)/OB\cos\alpha. \tag{40}$$

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego kratownicy o węzłach $A_1,\ldots,A_n$, w których działają siły $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$ będące w równowadze. By wyznaczyć napięcie w pręcie kratownicy łączącym węzły A_r i A_s, usuwamy pręt A_rA_s i przykładamy do węzłów A_r i A_s siły $\overline{S}$ i $-\overline{S}$, równe napięciom usuniętego pręta w A_r i A_s. Ponieważ układ pozostałych prętów jest w równowadze, więc siły $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n,\overline{S},-\overline{S}$ równoważą się. Praca przygotowana jest tedy zerem. Oznaczając przez $\overline{\delta s_1},\ldots,\overline{\delta s_n}$ przesunięcia przygotowane węzłów $A_1,\ldots,A_n$ (przy założeniu, że pręt A_rA_s został usunięty), otrzymamy

$$\overline{P}_1\overline{\delta s_1}+\ldots+\overline{P}_n\overline{\delta s_n}+\overline{S}\,\overline{\delta s_r}-\overline{S}\,\overline{\delta s_s}=0. \tag{41}$$

Kładąc więc $S=\pm|\overline{S}|$ (gdzie znak zależy od tego, czy S jest rozciąganiem, czy ściskaniem) i oznaczając przez δr rzut $\overline{\delta s_r}-\overline{\delta s_s}$ na kierunek $\overline{A_rA_s}$, otrzymamy z (41)

$$S\delta r = -(P_1\overline{\delta s_1}+\ldots+\overline{P}_n\overline{\delta s_n}). \tag{42}$$

Jeżeli przesunięcia przygotowane potrafimy obrać tak, by było $\delta r\neq 0$ (t. zn. by $\overline{\delta s_r}\neq\overline{\delta s_s}$ i różnica $\overline{\delta s_r}-\overline{\delta s_s}$ nie była prostopadła do A_rA_s), wówczas z (42) będziemy mogli wyznaczyć S.

Otóż można okazać, że jeżeli kratownica jest wyznaczalna statycznie (str. 301), to przesunięcie przygotowane o żądanych własnościach zawsze istnieje.

Oznaczmy przez $x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n$ współrzędne węzłów $A_1,\ldots,A_n$, a przez d_{ij} długości prętów A_iA_j. Zatem

$$(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2-d_{ij}^2=0. \tag{43}$$

Niech $\delta x_i, \delta y_i$ będą rzutami przesunięcia przygotowanego punktu A_i.

Wówczas na mocy (43)

$$(44) \qquad (x_l - x_j)(\delta x_l - \delta x_j) + (y_l - y_j)(\delta y_l - \delta y_j) = 0.$$

Jeżeli usuniemy pręt $A_r A_s$, to przesunięcia przygotowane węzłów określone są równaniami (44) (wśród których nie występuje równanie odpowiadające prętowi $A_r A_s$); możemy z nich wyrachować przesunięcia.

Podana metoda wyznaczania napięć w prętach kratownicy nosi nazwę *metody kinematycznej*.

Metodę kinematyczną można stosować zarówno do kratownic płaskich jak i przestrzennych.

Istnieją również metody graficzne wyznaczania prędkości możliwych (a co za tym idzie, przesunięć przygotowanych $\delta s_1, \ldots, \delta s_n$) węzłów kratownicy przy pomocy t. zw. *planów prędkości (przesunięć przygotowanych)*.

§ 4. Wyznaczanie położenia równowagi w polu sił.

Jednym z głównych zagadnień, z jakimi spotykamy się przy badaniu równowagi układu punktów materialnych, jest wyznaczanie położenia równowagi układu w danym polu sił.

Podamy tu rozwiązanie tego zagadnienia dla więzów obustronnych. Dla więzów jednostronnych rozwiązanie jest znacznie bardziej złożone, ograniczymy się więc tylko do pewnego przykładu (p. str. 453, przykład 2).

Niech więzy układu punktów $A_1, \ldots, A_n$ będą określone równaniami

$$(1) \qquad F_j(x_1, \ldots, z_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Załóżmy, że układ znajduje się w polu sił, t. zn. że siły $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$, działające na punkty $A_1, \ldots, A_n$ są funkcjami zmiennych $x_1, \ldots, z_n$. A więc:

$$(2) \qquad P_{ix} = \Phi_i(x_1, \ldots, z_n), \qquad P_{iy} = \Psi_i(x_1, \ldots, z_n), \qquad P_{iz} = X_i(x_1, \ldots, z_n).$$

Przesunięcia przygotowane spełniają równania (I), str. 428:

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_l} \delta x_l + \frac{\partial F_j}{\partial y_l} \delta y_l + \frac{\partial F_j}{\partial z_l} \delta z_l \right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

W położeniu równowagi mamy na mocy zasady prac przygotowanych

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} (P_{ix} \delta x_i + P_{iy} \delta y_i + P_{iz} \delta z_i) = 0.$$

Ponieważ równań (3) jest m, więc możemy wyznaczyć m spośród n niewiadomych $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, nadając pozostałym $k=3n-m$ niewiadomym dowolnie obrane wartości $\delta h_1, \ldots, \delta h_k$. Wyznaczając przez nie niewiadome $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ z równań (3) i podstawiając w (4), otrzymamy po uporządkowaniu równanie

$$a_1\delta h_1 + a_2\delta h_2 + \ldots + a_k\delta h_k = 0, \tag{5}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_k$ są pewnymi liczbami zależnymi od położenia układu, t.j. od współrzędnych $x_1, \ldots, z_n$.

W położeniu równowagi równość (5) ma zachodzić dla każdego układu liczb $\delta h_1, \ldots, \delta h_k$. Przyjmując $\delta h_1 = 1$, $\delta h_2 = 0$, $\ldots$, $\delta h_k = 0$, dostaniemy $a_1 = 0$. Podobnie postępując, otrzymamy:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots, \quad a_k = 0. \tag{6}$$

Na odwrót, jeżeli w pewnym położeniu układu spełnione są równości (6), to zachodzi oczywiście równanie (5), a zatem dane położenie układu jest położeniem równowagi. Równości (6) określają więc położenie równowagi układu.

Z równań (6) i (1), których jest razem $k+m=3n$, możemy wyznaczyć na ogół $3n$ niewiadomych współrzędnych $x_1, \ldots, z_n$, odpowiadających położeniu równowagi układu.

Mnożniki Lagrange'a. Podamy jeszcze inną metodę wyznaczania położeń równowagi układu, zwaną *metodą mnożników Lagrange'a*.

Oznaczmy lewe strony równań (3) przez $W_1, \ldots, W_m$, zaś lewą stronę równania (4) przez W

Uważając $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ za niewiadome, możemy powiedzieć, że w położeniu równowagi każde rozwiązanie równań $W_1=0, \ldots, W_m=0$ spełnia równanie $W=0$. Ze znanego więc twierdzenia teorii równań liniowych wynika, że W można przedstawić liniowo przy pomocy $W_1, \ldots, W_m$, t.zn. że istnieją takie liczby $a_1, \ldots, a_m$, że dla dowolnych $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$ jest tożsamościowo

$$W = a_1W_1 + \ldots + a_mW_m.$$

Kładąc $\lambda_1 = -a_1, \ldots, \lambda_m = -a_m$, możemy powyższą tożsamość napisać w postaci

$$W + \lambda_1W_1 + \ldots + \lambda_mW_m = 0 \quad \text{lub} \quad W + \sum_{j=1}^{m} \lambda_jW_j = 0. \tag{7}$$

Pisząc zamiast $W_1,\ldots,W_m$ i W lewe strony równań (3) i (4), otrzymamy

$$(8)\quad \sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\delta x_i+P_{i_y}\delta y_i+P_{i_z}\delta z_i)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial F_j}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial F_j}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0.$$

Porządkując prawą stronę równania (8) według $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$, dostaniemy

$$(9)\quad \sum_{i=1}^{n}\left[\left(P_{i_x}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right)\delta x_i+\left(P_{i_y}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial y_i}\right)\delta y_i+\left(P_{i_z}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial z_i}\right)\delta z_i\right]=0.$$

Równość (7), a więc i (9) zachodzi dla dowolnych $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$; zatem współczynniki przy $\delta x_1,\ldots,\delta z_n$ muszą być zerami:

$$(I)\quad P_{i_x}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i}=0,\qquad P_{i_y}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial y_i}=0,\qquad P_{i_z}+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial z_i}=0$$

$$(i=1,2,\ldots,n).$$

Udowodniliśmy więc, że w położeniu równowagi można dobrać takie liczby $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ by zachodziły równania (I).

Na odwrót, jeżeli w pewnym położeniu układu można dobrać liczby $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, spełniające równania (I), to zachodzi równość (9), a więc i (8) czyli (7). Ponieważ dla przesunięć przygotowanych jest na mocy (3) $W_1=0,\ \ldots,\ W_m=0$, więc z (7) dostajemy $W=0$ czyli (4). Położenie dane jest zatem położeniem równowagi.

A więc: *warunkiem koniecznym i dostatecznym dla równowagi sił w pewnym położeniu układu jest to, by istniał układ liczb* $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ *spełniający równania* (I).

Z równań (1) i (I), których razem jest $3n+m$, możemy wyznaczyć na ogół $3n+m$, niewiadomych, t. j. $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, oraz współrzędne $x_1,\ldots,z_n$, określające położenie równowagi.

Liczby $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ nazywamy *mnożnikami Lagrange'a.*

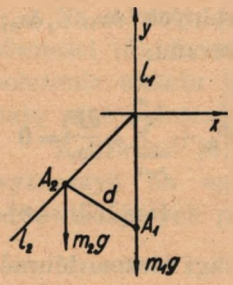
Uwaga. Oznaczając przez $\bar{R}_1,\ldots,\bar{R}_n$ siły reakcyjne w położeniu równowagi, mamy oczywiście $\bar{P}_i+\bar{R}_i=0$, czyli:

$$P_{i_x}+R_{i_x}=0, \qquad P_{i_y}+R_{i_y}=0, \qquad P_{i_z}+R_{i_z}=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Porównując z (I), dostaniemy:

$$\text{(II)} \quad R_{i_x}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad R_{i_y}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial y_i}, \quad R_{i_z}=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F_j}{\partial z_i} \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Przykład 1. Dwa punkty materialne ciężkie A_1 i A_2 o masach m_1 i m_2 połączone są prętem sztywnym o długości d (bez masy) i pozostawać mają na dwóch prostych l_1 i l_2. Prosta l_1 jest pionowa, a prosta l_2 przecina l_1 i tworzy z nią kąt $\varphi=45^0$. Wyznaczyć położenie równowagi, zakładając, że nie ma tarcia.



Obierzmy punkt przecięcia prostych l_1, l_2 za początek układu współrzędnych (x,y), przyjmując płaszczyznę, w której te proste leżą, za płaszczyznę xy, zaś oś l_1 za oś y (ze zwrotem ku górze).

Równania prostych l_1 i l_2 są $x=0$ i $y=x$. Zatem współrzędne x_1,y_1 i x_2,y_2 spełniają równania:

$$\text{(10)} \qquad x_1=0, \qquad y_2-x_2=0.$$

Ponieważ $A_1A_2=d$, więc

$$\text{(11)} \qquad x_2^2+(y_1-y_2)^2-d^2=0.$$

Równania (10 i (11) określają więzy układu.

Przesunięcia przygotowane spełniają równania, które otrzymamy z (10) i (11):

$$\text{(12)} \qquad \delta x_1=0, \qquad \delta y_2-\delta x_2=0, \qquad x_2\delta x_2+(y_1-y_2)(\delta y_1-\delta y_2)=0.$$

Siłami działającymi są ciężary punktów. Rzuty ciężarów na osie układu współrzędnych wynoszą odpowiednio $0,-m_1g$ i $0,-m_2g$. Praca przygotowana sił działających równa się $\delta'L=-m_1g\delta y_1-m_2g\delta y_2$. W położeniu równowagi jest $\delta'L=0$, a więc

$$\text{(13)} \qquad m_1\delta y_1+m_2\delta y_2=0.$$

Załóżmy, że $y_1-y_2\neq 0$. Obierając dowolnie δy_2, dostaniemy z (12):

$$\delta x_1=0, \quad \delta x_2=\delta y_2, \quad \delta y_1=(y_1-y_2-x_2)\delta y_2/(y_1-y_2). \tag{14}$$

Podstawiając w (13), otrzymamy po uwolnieniu się od mianownika

$$[m_1(y_1-y_2-x_2)+m_2(y_1-y_2)]\delta y_2=0. \tag{15}$$

Ponieważ δy_2 jest dowolne, więc równość (15) zajdzie tylko w przypadku, gdy

$$m_1(y_1-y_2-x_2)+m_2(y_1-y_2)=0. \tag{16}$$

Rozwiązując układ równań (10), (11), (16), otrzymamy współrzędne w położeniu równowagi:

$$x_1=0, \quad y_1=-(2m_1+m_2)d/a, \quad x_2=-(m_1+m_2)d/a=y_2,$$

gdzie $a=\sqrt{(m_1+m_2)^2+m_1^2}$.

Załóżmy teraz, że $y_1-y_2=0$. Na mocy (11) mamy $x_2^2-d^2=0$, skąd $x_2\neq 0$. Ostatnie z równań (12) daje wobec tego $\delta x_2=0$, a więc drugie z równań (12) daje $\delta y_2=0$. Przesunięciem przygotowanym jest zatem na mocy (12) przesunięcie:

$$\delta x_1=0, \quad \delta x_2=0, \quad \delta y_2=0, \quad \delta y_1 \textit{ dowolne}.$$

Warunek równowagi (13) przyjmie więc postać $m_1\delta y_1=0$. Równość ta nie jest jednak spełniona, gdyż δy_1 jest dowolne.

A więc: położenie, w którym $y_1-y_2=0$, nie jest położeniem równowagi.

Przykład 2. Punkt ciężki o masie m, poddany działaniu siły $\bar{P}$, ma pozostawać na powierzchni kuli

$$x^2+y^2+z^2-r^2=0. \tag{17}$$

Zakładamy, że oś z ma kierunek pionowy i zwrot ku górze. Wyznaczyć położenie równowagi, przyjmując, że tarcie nie występuje.

Przesunięcie przygotowane $\delta x, \delta y, \delta z$ spełnia równanie, które otrzymujemy, różniczkując (17):

$$x\delta x+y\delta y+z\delta z=0. \tag{18}$$

Praca przygotowana siły $\bar{P}$ wynosi $P_x\delta x+P_y\delta y+P_z\delta z$, siły zaś ciężkości $-mg\delta z$. W położeniu równowagi mamy zatem

$$\delta' L=P_x\delta x+P_y\delta y+(P_z-mg)\delta z=0. \tag{19}$$

Stosując metodę mnożników Lagrange'a (wzór (I), str. 451) i zastępując 2λ przez λ, otrzymamy równania następujące:

$$(20) \qquad P_x+\lambda x=0, \qquad P_y+\lambda y=0, \qquad P_z-mg+\lambda z=0.$$

Z równań (17) i (20) możemy wyznaczyć λ oraz współrzędne x,y,z położenia równowagi.

Obliczając x,y,z z równań (20) i wstawiając w (17), dostaniemy:

$$(21) \qquad \lambda=\pm\sqrt{P_x^2+P_y^2+(P_z-mg)^2}/r.$$

Znając λ, otrzymamy z (20):

$$(22) \qquad x=-P_x/\lambda, \qquad y=-P_y/\lambda, \qquad z=-(P_z-mg)/\lambda.$$

Ponieważ na λ dostaliśmy dwie wartości (21), więc istnieć będą dwa położenia równowagi.

Załóżmy teraz, że punkt ma pozostawać wewnątrz lub na powierzchni kuli (17). Więzy są tedy jednostronne, i współrzędne punktu muszą spełniać związek

$$(23) \qquad x^2+y^2+z^2-r^2\leqslant 0.$$

W położeniu równowagi na powierzchni kuli przesunięcia przygotowane określone są nierównością

$$(24) \qquad x\delta x+y\delta y+z\delta y\leqslant 0.$$

Praca przygotowana spełnia zatem nierówność

$$(25) \qquad P_x\delta x+P_y\delta y+(P_z-mg)\delta z\leqslant 0.$$

Dla przesunięć przygotowanych odwracalnych, t. j. spełniających równanie (18), praca przygotowana jest zerem, a więc zachodzi równość (19). Wynika stąd, że położeniem równowagi na powierzchni kuli może być tylko jedno z położeń, podanych przez wzory (21) i (22). Aby stwierdzić, które z nich jest położeniem równowagi, należy zbadać, dla którego z nich związek (24) pociąga za sobą (25).

Zakładając, że przesunięcie przygotowane spełnia warunek (24), otrzymujemy na mocy (22) po podstawieniu w (24)

$$(26) \qquad -[P_x\delta x+P_y\delta y+(P_z-mg)\delta z]/\lambda\leqslant 0.$$

Widzimy stąd, że wzór (25) będzie spełniony tylko wtedy, gdy $-1/\lambda>0$, t.zn. gdy $\lambda<0$.

A więc wzory (21) i (22) określają położenie równowagi, przy czym we wzorze (21) należy przyjąć znak $-$

§ 5. Współrzędne uogólnione Lagrange'a. Parametry układu. Położenie układu punktów lub ciał sztywnych określamy przy pomocy pewnych liczb. Liczby te mogą być w szczególności współrzędnymi punktów względem pewnego układu prostokątnego współrzędnych; w wielu jednak przypadkach mogą mieć inne znaczenie.

Położenie punktu na płaszczyźnie możemy podać np. zarówno przy pomocy współrzędnych prostokątnych x,y, jak biegunowych r,φ i t. p. W szczególności, położenie układu złożonego z dwóch punktów A_1,A_2, których odległość d jest stała i które mają pozostawać w płaszczyźnie xy, możemy określić, podając bądź współrzędne x_1,y_1 i x_2,y_2 tych punktów, bądź np. współrzędne x_0,y_0 środka odcinka A_1A_2 i kąt φ, jaki ten odcinek tworzy z osią x. Znając x_0, y_0 i φ, wyznaczamy współrzędne punktów A_1,A_2 ze wzorów:

$$x_1=x_0-\tfrac{1}{2}d\cos\varphi, \qquad y_1=y_0-\tfrac{1}{2}d\sin\varphi$$
$$x_2=x_0+\tfrac{1}{2}d\cos\varphi, \qquad y_2=y_0+\tfrac{1}{2}d\sin\varphi.$$

Podobnie określić możemy położenie ciała sztywnego w przestrzeni, obierając dowolny układ współrzędnych (ξ,η,ζ), sztywnie z ciałem związany, i podając współrzędne x_0,y_0,z_0 początku układu (ξ,η,ζ) względem układu stałego (x,y,z) oraz kąty $\alpha_1,\ldots,\gamma_3$, jakie osie ξ,η,ζ tworzą z osiami x,y,z układu stałego. Współrzędne punktów ciała wyznaczone są wówczas wzorami (I), str. 54.

Położenie ciała sztywnego mającego oś nieruchomą, określone jest przez jedną liczbę φ, oznaczającą kąt, o jaki należy ciało obrócić około osi, aby przeszło w dane położenie z pewnego położenia początkowego. Obierając oś obrotu za oś z i oznaczając przez ξ,η,ζ współrzędne dowolnego punktu w położeniu początkowym, zaś przez x,y,z współrzędne tegoż punktu po obrocie o kąt φ, mamy:

$$x=\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi, \qquad y=\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi, \qquad z=\zeta.$$

Niech dany będzie układ holonomiczny skleronomiczny, złożony z n punktów materialnych.

Załóżmy, że każdemu położeniu układu punktów, które jest zgodne z więzami i bliskie położeniu, jakie badamy, przyporządkowany jest układ k liczb $q_1,\ldots,q_k$ w taki sposób, że różnym położeniom układu punktów przyporządkowane są różne układy liczb $q_1,\ldots,q_k$. Z założenia tego wynika, że współrzędne $x_1,y_1,z_1,\ldots,x_n,y_n,z_n$ punktów układu są funkcjami zmiennych $q_1,\ldots,q_k$:

$$x_1=f_1(q_1,\ldots,q_k), \quad y_1=\varphi_1(q_1,\ldots,q_k), \quad z_1=\psi_1(q_1,\ldots,q_k),$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$
$$x_n=f_n(q_1,\ldots,q_k), \quad y_n=\varphi_n(q_1,\ldots,q_k), \quad z_n=\psi_n(q_1,\ldots,q_k).$$

Powyższe związki zapisujemy krócej w postaci:

$$(\mathrm{I}) \quad x_i=f_i(q_1,\ldots,q_k), \quad y_i=\varphi_i(q_1,\ldots,q_k), \quad z_i=\psi_i(q_1,\ldots,q_k) \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

O funkcjach f_i, φ_i, ψ_i zakładamy na ogół, że są w pewnym obszarze zmiennych $q_1,\ldots,q_k$ ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi i że ponadto różnym układom liczb $q_1,\ldots,q_k$ odpowiadają w tym obszarze różne układy liczb $x_1,\ldots,z_n$.

Liczby $q_1,\ldots,q_k$ nazywamy *parametrami układu* albo *współrzędnymi uogólnionymi Langrange'a*.

Dla odróżnienia nazywamy współrzędne $x_1,\ldots,z_n$ względem pewnego układu inercjalnego *współrzędnymi naturalnymi*.

Są one oczywiście szczególnym przypadkiem współrzędnych Langrange'a.

Parametry nazywamy *niezależnymi*, jeżeli każdemu układowi zmiennych $q_1,\ldots,q_k$ funkcje (I) przyporządkowują położenia układu zgodne z więzami.

W przypadku więzów obustronnych możemy na ogół obrać parametry niezależne. Niech bowiem więzy układu określone będą funkcjami:

$$(1) \qquad F_j(x_1,\ldots,z_n)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m).$$

Z równań (1) możemy na ogół wyznaczyć m niewiadomych, znając pozostałych $k=3n-m$. Obierając więc dowolnie k zmiennych spośród $x_1,\ldots,z_n$ i oznaczając je przez $q_1,\ldots,q_k$, będziemy mogli zmienne $x_1,\ldots,z_n$ przedstawić jako funkcje zmiennych $q_1,\ldots,q_k$ w postaci (I). Ponieważ dowolnie obranym wartościom $q_1,\ldots,q_k$ odpowiadają zmienne $x_1,\ldots,z_n$ spełniające układ równań (1), więc parametry są niezależne.

Liczbę $k=3n-m$ nazwaliśmy liczbą stopni swobody układu (str. 423).

A więc: *liczba parametrów niezależnych równa się liczbie stopni swobody układu.*

Jeżeli parametry są zależne, wówczas w przypadku więzów obustronnych muszą zachodzić między parametrami $q_1, \ldots, q_k$ określającymi zgodne z więzami położenie układu, pewne związki:

$$\Phi_j(q_1, \ldots, q_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \varrho). \tag{2}$$

Obierając dowolnie pewnych $k-\varrho$ parametrów, możemy przy ich pomocy wyznaczyć pozostałe ze związków (2). Obrane parametry będą parametrami niezależnymi.

W przypadku więzów jednostronnych parametry, określające położenia układu zgodne z więzami, muszą oprócz związków postaci (2) spełniać jeszcze pewne nierówności kształtu

$$\Psi_r(q_1, \ldots, q_k) \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s). \tag{3}$$

Jeżeli parametry są niezależne, wówczas funkcje (I) określają więzy układu, gdyż podają wszystkie jego położenia zgodne z więzami. Jeżeli zaś parametry są zależne, wówczas oprócz funkcji (I) należy podać związki (2) i (3), którym muszą czynić zadość parametry, odpowiadające położeniom układu zgodnym z więzami.

Przykład 1. Punkt ma pozostawać na powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2=r^2$. Obierając dowolnie x i y, mamy dla półkuli górnej $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$. Jeżeli więc położymy

$$x = q_1, \qquad y = q_2, \qquad \text{to} \qquad z = \sqrt{r^2-q_1^2-q_2^2}. \tag{4}$$

Liczby q_1 i q_2 są parametrami niezależnymi.

Przykład 2. Punkt materialny A ma pozostawać na powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$. Oznaczając przez q_1, q_2, q_3 cosinusy kątów, jakie wektor $\overline{OA}$ (gdzie O oznacza początek układu współrzędnych) tworzy z osiami współrzędnych, mamy:

$$x = rq_1, \qquad y = rq_2, \qquad z = rq_3. \tag{5}$$

Parametry q_1, q_2, q_3 są zależne, muszą bowiem oczywiście spełniać równanie

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2-1=0; \tag{6}$$

z równania tego (gdy $z \geqslant 0$) otrzymujemy $q_3=\sqrt{1-q_1^2-q_2^2}$, skąd przez podstawienie w (5):

$$x_1 = rq_1, \qquad y = rq_2, \qquad z = r\sqrt{1-q_1^2-q_2^2}. \tag{7}$$

W przedstawieniu (7) parametry q_1 i q_2 są niezależne.

Przesunięcia przygotowane. Niech więzy określone będą parametrycznie funkcjami:

$$(II)\qquad x_i=f_i(q_1,\dots,q_k),\quad y_i=\varphi_i(q_1,\dots,q_k),\quad z_i=\psi_i(q_1,\dots,q_k)\quad (i=1,2,\dots,n).$$

Załóżmy, że parametry są niezależne.

Jeżeli nadamy układowi dowolny ruch zgodny z więzami, wówczas $q_1,\dots,q_k$ będą funkcjami czasu. Różniczkując (II), otrzymamy:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_i&=\frac{\partial f_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\dots+\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{y}_i=\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\dots+\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_k}\dot{q}_k,\\ \dot{z}_i&=\frac{\partial \psi_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\dots+\frac{\partial \psi_i}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad (i=1,2,\dots,n). \end{aligned}$$

Na odwrót, jeżeli przyjmiemy, że $q_1,\dots,q_k$ są dowolnymi funkcjami czasu, wówczas wzory (II) określają ruch układu zgodny oczywiście z więzami; równania (8) podają więc prędkości punktów układu w tym ruchu. Wynika stąd, że jeżeli układ znajduje się w pewnym położeniu, określonym parametrami $q_1,\dots,q_k$, to wszelkie układy prędkości możliwych w tym położeniu otrzymamy z (8), podstawiając zamiast $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k$ wartości dowolne. Przyjmując:

$$\delta x_1=\dot{x}_1,\quad \dots,\quad \delta z_n=\dot{z}_n,$$
$$\delta q_1=\dot{q}_1,\quad \dots,\quad \delta q_k=\dot{q}_k,$$

i pisząc $\frac{\partial x_i}{\partial q_1}$ zamiast $\frac{\partial f_i}{\partial q_1}$ i t. d., otrzymamy z (8):

$$(III)\qquad \begin{aligned} \delta x_i&=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1+\dots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k, \qquad \delta y_i=\frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1+\dots+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k,\\ \delta z_i&=\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1+\dots+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k \qquad (i=1,2,\dots,n). \end{aligned}$$

Podstawiając we wzorach (III) dowolne wartości $\delta q_1,\dots,\delta q_k$, otrzymamy przesunięcia przygotowane układu. Na odwrót, każde przesunięcie przygotowane układu dostaniemy przez podstawienie odpowiednich wartości $\delta q_1,\dots,\delta q_k$.

Zauważmy, że układ wzorów (III) możemy otrzymać, tworząc formalnie różniczkę układu wzorów (II), a następnie pisząc δx_i, δy_i, δz_i zamiast dx_i, dy_i, dz_i, oraz $\delta q_1,\dots,\delta q_k$ zamiast $dq_1,\dots,dq_k$.

W przykładzie 1, str. 457, mamy ze wzorów (4):

$$\delta x=\delta q_1,\qquad \delta y=\delta q_2,\qquad \delta z=-(q_1\delta q_1+q_2\delta q_2)/\sqrt{1-q_1^2-q_2^2}.$$

Obierając dowolnie wartości δq_1 i δq_2, otrzymamy przesunięcie przygotowane $\delta x, \delta y, \delta z$ w położeniu odpowiadającym parametrom q_1 i q_2.

Jeżeli $q_1,\ldots,q_k$ są parametrami zależnymi i zachodzą między nimi związki postaci (2), str. 457, to $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ nie są we wzorach (III) liczbami dowolnymi, lecz — jak można okazać (por. dowód wzoru (15), str. 428) — muszą spełniać układ równań

$$\text{(IV)}\qquad \frac{\partial \Phi_j}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial \Phi_j}{\partial q_k}\delta q_k=0 \qquad (j=1,2,\ldots,\varrho).$$

W przykładzie 2, str. 457, mamy ze wzorów (5):

$$\delta x=r\delta q_1,\qquad \delta y=r\delta q_2,\qquad \delta z=r\delta q_3,$$

przyczem, na mocy (6), str. 457, zachodzi między $\delta q_1,\delta q_2,\delta q_3$ związek

$$q_1\delta q_1+q_2\delta q_2+q_3\delta q_3=0.$$

Można okazać (por. dowód wzoru (II), str. 434), że jeżeli więzy są jednostronne i oprócz związków (2), str. 457, zachodzą związki (3), str. 457, to $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ muszą spełniać oprócz (IV) te spośród związków

$$\text{(V)}\qquad \frac{\partial \Psi_r}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial \Psi_r}{\partial q_k}\delta q_k\leqslant 0 \qquad (r=1,2,\ldots,s),$$

dla których w danym położeniu układu zachodzi równość $\Phi_r=0$.

Praca przygotowana. Siły uogólnione. Niech więzy układu określone będą parametrycznie przez równania:

$$\text{(9)}\qquad x_i=f_i(q_1,\ldots,q_k),\quad y_i=\varphi_i(q_1,\ldots,q_k),\quad z_i=\psi_i(q_1,\ldots,q_k)\quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Przesunięcia przygotowane wyrażają się wzorami (III), str. 458. Jeżeli parametry są niezależne, wówczas $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ są liczbami dowolnymi. W przeciwnym razie zachodzą między nimi pewne związki (IV) i (V).

Podstawiając w (I'), str. 436, zamiast $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$ wyrażenia (III), str. 458, otrzymamy

$$\text{(10)}\qquad \delta' L=\sum_{i=1}^{n}\left[P_{ix}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k\right)+\right.$$
$$\left.+P_{iy}\left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k\right)+P_{iz}\left(\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\delta q_k\right)\right].$$

Porządkując według $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$, dostaniemy

$$\delta q_1 \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right) + \ldots$$

$$\ldots + \delta q_k \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right).$$

Oznaczmy przez $Q_1, \ldots, Q_k$ sumy, występujące jako spółczynniki przy $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$:

(VI)
$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \right),$$

co zapisujemy krócej

(VI′)
$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(P_{i_x} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + P_{i_y} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + P_{i_z} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Otrzymamy stąd na mocy (10) $\delta' L = Q_1 \delta q_1 + \ldots + Q_k \delta q_k$ czyli

(VII)
$$\delta' L = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j.$$

Wyrażenia $Q_1, \ldots, Q_k$, określone wzorami (VI) i (VI′), nazywamy *składowymi siły uogólnionej* lub krótko *siłami uogólnionymi.*

Porównując wzór (VII) ze wzorem (I′), str. 436, widzimy, że praca przygotowana wyraża się przy pomocy składowych Q_j siły uogólnionej i przesunięć δq_j w podobny sposób jak przy pomocy składowych $P_{i_x}, P_{i_y}, P_{i_z}$ i przesunięć $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$.

Warunki równowagi. Niech więzy układu holonomicznego skleronomicznego określone będą przy pomocy parametrów $q_1, \ldots, q_k$. Warunek (II), str. 439, równowagi układu przyjmie na mocy (VII) postać

(VIII)
$$\delta' L = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j \leqslant 0.$$

Jeżeli więzy są obustronne, wówczas ((III), str. 439)

$$\text{(IX)} \qquad \delta' L = \sum_{j=1}^{k} Q_j \delta q_j = 0.$$

Siły uogólnione $Q_1, \ldots, Q_k$ występujące we wzorach (VIII) i (IX), określone są wzorami (VI) i (VI').

Jeżeli parametry $q_1, \ldots, q_k$ są niezależne, to $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ są dowolne. Na mocy więc (IX), przyjmując $\delta q_1 = 1$ oraz $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_k = 0$, dostaniemy $Q_1 = 0$ i podobnie $Q_2 = 0, \ldots, Q_k = 0$.

A więc: *jeżeli parametry, określające położenie układu holonomicznego skleronomicznego są niezależne (i tarcie nie występuje), to warunkiem koniecznym i wystarczającym dla równowagi sił działających jest, by siły uogólnione były zerami*:

$$\text{(X)} \qquad Q_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

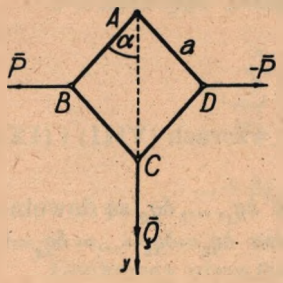
Jeżeli zaś parametry $q_1, \ldots, q_k$ są zależne i spełniają związki (2) lub (4), str. 457, wówczas $\delta q_1, \ldots, \delta q_k$ nie są liczbami dowolnymi, lecz muszą czynić zadość związkom (IV) lub (V), str. 459. Położenie równowagi wyznaczamy wtedy podobnie jak dla współrzędnych naturalnych, t.j. w sposób podany na str. 449.

Uwaga. Współrzędne naturalne są szczególnym przypadkiem współrzędnych uogólnionych. Jeżeli więc współrzędnymi naturalnymi punktów układu są $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$, to kładąc:

$$x_1 = q_1, \qquad y_1 = q_2, \qquad z_1 = q_3, \quad \ldots, \quad z_n = q_{3n},$$

możemy stosować wzory (I)-(X) § niniejszego. Wyniki otrzymane w tym § są więc uogólnieniem odpowiednich wyników dla współrzędnych naturalnych.

Przykład 3. Cztery pręty równej długości a, leżące w płaszczyźnie pionowej, połączone są przegubowo w A, B, C i D. Przegub A jest unieruchomiony, zaś C może się poruszać tylko po prostej pionowej l, przechodzącej przez A. W przegubach B i D zaczepione są siły poziome $\bar{P}$ i $-\bar{P}$, w przegubie zaś C siła pionowa $\bar{Q}$ (mająca zwrot ku dołowi). Wyznaczyć położenie równowagi, pomijając ciężary prętów i zakładając, że nie ma tarcia oraz że pręty mogą się poruszać tylko w płaszczyźnie pionowej, w której leżą siły $\bar{P}$ i $\bar{Q}$.



Przyjmijmy A za początek układu współrzędnych (x, y) płaszczyzny pionowej, w której leżą pręty, a oś l za oś y (ze zwrotem ku dołowi). Położenie układu będzie wówczas określone przez podanie kąta α między prętem AB a osią y. Zatem α jest parametrem układu.

Z rysunku widać, że współrzędne x_1, y_1, x_2, y_2 i x_3, y_3 węzłów B, C i D są następujące:

$$(11)\qquad \begin{aligned} x_1 &= -a\sin\alpha, & x_2 &= 0, & x_3 &= a\sin\alpha,\\ y_1 &= a\cos\alpha, & y_2 &= 2a\cos\alpha, & y_3 &= a\cos\alpha. \end{aligned}$$

Praca przygotowana wynosi

$$(12)\qquad \delta' L = -P\delta x_1 + Q\delta y_2 + P\delta x_3,$$

gdzie $P=|\bar{P}|$ i $Q=|\bar{Q}|$. Na mocy (11) mamy:

$$\delta x_1 = -a\cos\alpha\,\delta\alpha, \qquad \delta y_2 = -2a\sin\alpha\,\delta\alpha, \qquad \delta x_3 = a\cos\alpha\,\delta\alpha.$$

Podstawiając te wartości w (12), dostaniemy

$$(13)\qquad \delta' L = 2a(P\cos\alpha - Q\sin\alpha)\delta\alpha.$$

W położeniu równowagi jest $\delta' L=0$, więc $2a(P\cos\alpha - Q\sin\alpha)\delta\alpha=0$; zatem $P\cos\alpha - Q\sin\alpha = 0$ czyli

$$\operatorname{tg}\alpha = P/Q.$$

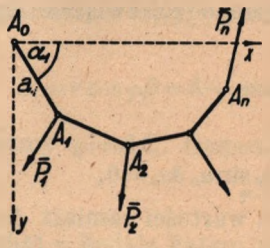
Przykład 4. Dany jest układ prętów $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$, połączonych przegubowo w $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Na układ działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n$ o początkach w $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Punkt A_0 jest unieruchomiony. Wyznaczyć położenie równowagi, przyjmując, że pręty i siły leżą w jednej płaszczyźnie.

Przyjmijmy punkt A_0 za początek układu współrzędnych (x, y) tej płaszczyzny i oznaczmy przez $a_1, a_2, \ldots, a_n$ długości prętów, przez $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ kąty między prętami a osią x, wreszcie przez $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ współrzędne punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (str. 463, rys. 1). Mamy:

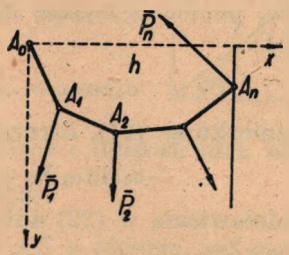
$$(14)\qquad x_1 = a_1\cos\alpha_1, \quad x_2 = a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2, \ldots, x_n = a_1\cos\alpha_1 + \ldots + a_n\cos\alpha_n,$$

$$(15)\qquad y_1 = a_1\sin\alpha_1, \quad y_2 = a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2, \ldots, y_n = a_1\sin\alpha_1 + \ldots + a_n\sin\alpha_n.$$

Z (14) i (15) wynika, że kąty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ określają położenie układu prętów. Zatem zmienne $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są parametrami układu, a ponieważ nie zachodzą między nimi żadne związki, więc są parametrami niezależnymi.



1.



2.

Różniczkując (14) i (15), otrzymamy:

$$(16)\qquad \delta x_1 = -a_1 \sin\alpha_1 \delta\alpha_1, \quad \ldots, \quad \delta x_n = -a_1 \sin\alpha_1 \delta\alpha_1 - \ldots - a_n \sin\alpha_n \delta\alpha_n$$

$$(17)\qquad \delta y_1 = a_1 \cos\alpha_1 \delta\alpha_1, \quad \ldots, \quad \delta y_n = a_1 \cos\alpha_1 \delta\alpha_1 + \ldots + a_n \cos\alpha_n \delta\alpha_n.$$

W położeniu równowagi praca przygotowana wynosi

$$(18)\qquad \delta' L = (P_{1_x}\delta x_1 + P_{1_y}\delta y_1) + \ldots + (P_{n_x}\delta x_n + P_{n_y}\delta y_n) = 0.$$

Podstawiając wartości (16) i (17) w (18), dostaniemy po uporządkowaniu

$$(19)\qquad \begin{aligned} &a_1[-(P_{1_x}+\ldots+P_{n_x})\sin\alpha_1 + (P_{1_y}+\ldots+P_{n_y})\cos\alpha_1]\delta\alpha_1 + \\ &+a_2[-(P_{2_x}+\ldots+P_{n_x})\sin\alpha_2 + (P_{2_y}+\ldots+P_{n_y})\cos\alpha_2]\delta\alpha_2 + \ldots \\ &\ldots + a_n[-P_{n_x}\sin\alpha_n + P_{n_y}\cos\alpha_n]\delta\alpha_n = 0. \end{aligned}$$

Współczynniki przy $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_n$ są siłami uogólnionymi $Q_1, \ldots, Q_n$. Ponieważ równość (19) zachodzi dla każdego układu liczb $\delta\alpha_1, \ldots, \delta\alpha_n$, więc siły uogólnione są zerami. Zatem:

$$(20)\qquad \begin{aligned} &-(P_{1_x}+\ldots+P_{n_x})\sin\alpha_1 + (P_{1_y}+\ldots+P_{n_y})\cos\alpha_1 = 0, \\ &-(P_{2_x}+\ldots+P_{n_x})\sin\alpha_2 + (P_{2_y}+\ldots+P_{n_y})\cos\alpha_2 = 0, \\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-P_{n_x}\sin\alpha_n + P_{n_y}\cos\alpha_n = 0. \end{aligned}$$

Z równań (20) obliczamy łatwo tangensy kątów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Ponieważ tangensy są równe dla kątów różniących się o 180^0, więc otrzymujemy wiele rozwiązań.

Jeżeli w pewnym spośród równań (20) współczynniki przy sin i cos są zerami, to odpowiedni kąt możemy obrać dowolnie.

Załóżmy teraz, że punkt A_n ma znajdować się na prostej l o równaniu $x=h$, jak np. gdy koniec A_n pręta $A_{n-1}A_n$ jest pierścieniem nasuniętym na drut sztywny, mający położenie prostej l (str. 463, rys. 2). Przy tym założeniu parametry $a_1,\ldots,a_n$ nie będą niezależne, ponieważ będzie musiał zachodzić związek $x_n=h$ czyli wobec (14)

$$a_1\cos a_1+\ldots+a_n\cos a_n-h=0. \tag{21}$$

Różniczkując (21), otrzymamy

$$-a_1\sin a_1\,\delta a_1+\ldots-a_n\sin a_n\,\delta a_n=0; \tag{22}$$

przez podstawienie w (22) dowolnych wartości zamiast $\delta a_1,\ldots,\delta a_{n-1}$ otrzymamy

$$\delta a_n=-(a_1\sin a_1\,\delta a_1+\ldots+a_{n-1}\sin a_{n-1}\,\delta a_{n-1})/a_n\sin a_n. \tag{23}$$

Z uwagi na (22) równanie (19) przyjmie postać

$$\begin{aligned} &a_1[-(P_{1_x}+\ldots+P_{n-1,x})\sin a_1+(P_{1_y}+\ldots+P_{n_y})\cos a_1]\,\delta a_1+\ldots\\ &\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\ &\ldots+a_{n-1}[-P_{n-1,x}\sin a_{n-1}+(P_{n-1,y}+P_{n_y})\cos a_{n-1}]\,\delta a_{n-1}+\\ &\quad+a_n P_{n_y}\cos a_n\,\delta a_n=0. \end{aligned} \tag{24}$$

Podstawiając w (24) wartość z (23), dostaniemy po uporządkowaniu

$$\begin{aligned} &a_1[-(P_{1_x}+\ldots+P_{n-1,x}+P_{n_y}\cot a_n)\sin a_1+(P_{1_y}+\ldots+P_{n_y})\cos a_1]\delta a_1+\ldots\\ &\ldots+a_{n-1}[-(P_{n-1,x}+P_{n_y}\cot a_n)\sin a_{n-1}+(P_{n-1,y}+P_{n_y})\cos a_{n-1}]\delta a_{n-1}=0. \end{aligned}$$

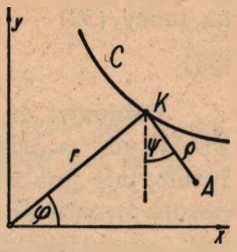
Ponieważ $\delta a_1,\ldots,\delta a_{n-1}$ są liczbami dowolnymi, więc współczynniki przy nich są zerami. Otrzymamy więc układ $n-1$ równań:

$$\begin{aligned} &-(P_{1_x}+\ldots+P_{n-1,x}+P_{n_y}\cot a_n)\sin a_1+(P_{1_y}+\ldots+P_{n_y})\cos a_1=0,\\ &\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\ &-(P_{n-1,x}+P_{n_y}\cot a_n)\sin a_{n-1}+(P_{n-1,y}+P_{n_y})\cos a_{n-1}=0. \end{aligned}$$

Równania te w połączeniu z równaniem (21) stanowią układ n równań, z którego możemy wyznaczyć n niewiadomych $a_1,\ldots,a_n$.

Przykład 5. Na krzywą C, leżącą w płaszczyźnie pionowej xy, nasunięty jest pierścień ciężki K o masie m_1. Przez pierścień przewinięta jest nić (nierozciągliwa i bez masy), uczepiona jednym końcem w początku O układu współrzędnych i dźwigającą na drugim końcu punkt ciężki A o masie m_2. Wyznaczyć położenie równowagi, zakładając, że nie ma tarcia.

Niech krzywa C ma we współrzędnych biegunowych równanie



$$r=f(\varphi). \tag{25}$$

Współrzędne x_1, y_1 punktu K wynoszą zatem:

$$x_1=r\cos\varphi, \qquad y_1=r\sin\varphi. \tag{26}$$

Położmy $\varrho=AK$. Oznaczając przez l długość nici, mamy

$$r+\varrho-l\leqslant 0. \tag{27}$$

Niechaj ψ będzie kątem między AK a pionem, zaś x_2, y_2 współrzędnymi punktu A. Zatem $x_2=x_1+\varrho\sin\psi$, $y_2=y_1-\varrho\cos\psi$, skąd na mocy (26):

$$x_2=r\cos\varphi+\varrho\sin\psi, \qquad y_2=r\sin\varphi-\varrho\cos\psi. \tag{28}$$

Równania (26) i (28) określają więzy układu przez parametry $r, \varrho, \varphi, \psi$, między którymi zachodzą związki (25) i (27).

Praca przygotowana wynosi $\delta' L=-m_1 g\delta y_1-m_2 g\delta y_2$. W położeniu równowagi jest $\delta' L\leqslant 0$, więc

$$m_1\delta y_1+m_2\delta y_2\geqslant 0. \tag{29}$$

Gdy nić nie jest napięta, punkt A jest swobodny, więc δy_2 może być dowolne. Przyjmując w tym przypadku $\delta y_1=0$ i $\delta y_2<0$, otrzymalibyśmy $m_1\delta y_1+m_2\delta y_2<0$ wbrew (29), co dowodzi, że układ nie może być w równowadze przy nici nie napiętej.

Załóżmy więc, że nić jest napięta (t. j. że we wzorze (27) zachodzi równość) oraz że $r>0$ i $\varrho>0$; z (26) i (28) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \delta y_1&=\delta r\sin\varphi+r\cos\varphi\delta\varphi,\\ \delta y_2&=\delta r\sin\varphi+r\cos\varphi\delta\varphi-\delta\varrho\cos\psi+\varrho\delta\psi\sin\psi. \end{aligned} \tag{30}$$

Na mocy (25) i (27) zachodzą między δr, $\delta\varphi$ i $\delta\varrho$ związki:

$$\delta r=f'(\varphi)\delta\varphi, \qquad \delta r+\delta\varrho\leqslant 0, \tag{31}$$

natomiast $\delta\psi$ jest dowolne.

Podstawiając do (29) zamiast $\delta y_1, \delta y_2$ wyrażenia z (30), otrzymamy

$$(m_1+m_2)\sin\varphi\delta r+(m_1+m_2)r\cos\varphi\delta\varphi-m_2\delta\varrho\cos\psi+m_2\varrho\delta\psi\sin\psi\geqslant 0. \tag{32}$$

Na mocy (31) możemy przyjąć, że $\delta r=0$, $\delta\varphi=0$ i $\delta\varrho=0$, skąd

na mocy (32)

$$m_2\varrho\delta\psi\sin\psi\geqslant 0. \tag{33}$$

Ponieważ $\delta\psi$ jest dowolne, więc nierówność (33) zajdzie tylko wtedy, gdy $m_2\varrho\sin\psi=0$ czyli gdy $\sin\psi=0$, a więc dla $\psi=0$ i $\psi=\pi$. Intuicyjnie jest jasnym, że w położeniu równowagi może być tylko $\psi=0$, równość bowiem $\psi=\pi$ znaczy, że A znajduje się nad K, co jest oczywiście niemożliwe w położeniu równowagi. Wynika to również ze związku (32), przyjmując bowiem na mocy (31) $\delta r=0$, $\delta\varphi=0$, $\delta\varrho<0$ i $\delta\psi=0$, otrzymalibyśmy z (32) $-m_2\delta\varrho\cos\psi\geqslant 0$, a ponieważ $\delta\varrho<0$, więc $\cos\psi\geqslant 0$, skąd $\psi\neq\pi$.

Udowodniliśmy zatem, że w położeniu równowagi jest $\psi=0$, t. zn. że A znajduje się pod K. Podstawiając $\psi=0$ w (32), otrzymujemy na mocy (25) i (31)

$$(m_1+m_2)(f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi)\delta\varphi-m_2\delta\varrho\geqslant 0. \tag{34}$$

Na mocy (31) możemy przyjąć

$$\delta r+\delta\varrho=0 \quad \text{czyli} \quad \delta\varrho=-\delta r=-f'(\varphi)\delta\varphi,$$

gdzie $\delta\varphi$ jest dowolne. Podstawiając w (34), dostaniemy wówczas

$$[(m_1+m_2)(f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi)+m_2f'(\varphi)]\delta\varphi\geqslant 0.$$

Ponieważ $\delta\varphi$ jest dowolne, więc związek powyższy zajdzie tylko wówczas, gdy

$$(m_1+m_2)(f'(\varphi)\sin\varphi+f(\varphi)\cos\varphi)+m_2f'(\varphi)=0. \tag{35}$$

Równanie (35) pozwala wyznaczyć kąt φ w położeniu równowagi.

Na odwrót, jeżeli zachodzi równanie (35), to spełniona być musi nierówność (34). Oznaczmy bowiem przez W lewą stronę tej nierówności. Na mocy (35) jest $W=-m_2f'(\varphi)\delta\varphi-m_2\delta\varrho$, skąd na mocy (31) $W=-m_2(\delta r+\delta\varrho)$. Ponieważ wobec (31) jest $\delta r+\delta\varrho\leqslant 0$, więc $W\geqslant 0$. Jeżeli tedy kąt φ spełnia równanie (35), to zachodzi równowaga.

Zbadamy jeszcze dla jakiej krzywej C równowaga zachodzi przy każdej wartości kąta φ, t. zn. w przypadku, gdy równanie (35) staje się tożsamością.

Zauważmy w tym celu, że lewa strona równania (35) jest pochodną funkcji $f(\varphi)[(m_1+m_2)\sin\varphi+m_2]$; zatem

$$f(\varphi)[(m_1+m_2)\sin\varphi+m_2]=c=\text{const.}$$

Ponieważ na mocy (1) jest $r=f(\varphi)$, więc

$$r=\frac{c}{(m_1+m_2)\sin\varphi+m_2}. \tag{36}$$

Jeżeli $c\neq 0$, $m_1>0$ i $m_2>0$, to równanie powyższe jest równaniem dolnej gałęzi hyperboli, której osią rzeczywistą jest oś y.

Równowaga w polu potencjalnym. Załóżmy, że siły $\overline{P}_1,\ldots,\overline{P}_n$ mają potencjał V. Zatem ((III), str. 214):

$$P_{ix}=\frac{\partial V}{\partial x_i},\qquad P_{iy}=\frac{\partial V}{\partial y_i},\qquad P_{iz}=\frac{\partial V}{\partial z_i}. \tag{37}$$

Podstawiając te wartości do wzoru (VI'), str. 460, dostaniemy

$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right). \tag{38}$$

Potencjał V jest funkcją zmiennych $x_1,\ldots,z_n$. Wyrażając je przez parametry $q_1,\ldots,q_k$, możemy więc przyjąć, że V jest funkcją parametrów $q_1,\ldots,q_k$. Ze znanego wzoru z rachunku różniczkowego na pochodną cząstkową funkcji złożonej wynika, że prawa strona równania (38) jest pochodną cząstkową $\partial V/\partial q_j$. Zatem

$$Q_j=\partial V/\partial q_j \qquad (j=1,2,\ldots,k). \tag{XI}$$

Porównując (37) i (XI), widzimy, że składowe sił uogólnionych wyrażają się podobnie jak składowe sił względem współrzędnych naturalnych.

A więc: *jeżeli pole sił jest polem potencjalnym, to składowe sił uogólnionych są pochodnymi cząstkowymi potencjału względem współrzędnych uogólnionych.*

Ze wzorów (VII), str. 460, i (XI) otrzymujemy

$$\delta' L=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial V}{\partial q_j}\delta q_j. \tag{39}$$

Na mocy (18), str. 430, możemy więc napisać

$$\delta' L=\delta V, \tag{XII}$$

gdzie V uważamy za funkcję zmiennych $q_1,\ldots,q_k$.

Wzór (XII) ma tę samą postać co wzór (I''), str. 437. Różnica polega na tym, że we wzorze (I'') uważamy V za funkcję współrzędnych naturalnych $x_1,\ldots,z_n$, zaś we wzorze (XII) za funkcję parametrów $q_1,\ldots,q_k$.

Uwaga. Znaczenie wyrażenia δV uzmysławia rozumowanie następujące. Nadajmy układowi w danym położeniu w chwili t dowolny ruch zgodny z więzami. Parametry $q_1,\ldots,q_k$ oraz potencjał V będą więc funkcjami czasu. Mamy

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial V}{\partial q_j}\dot{q}_j. \tag{40}$$

Ponieważ możemy przyjąć, że $\dot{q}_j=\delta q_j$ dla $j=1,2,\ldots$, więc na mocy (40) mamy $\delta V=dV/dt$. Tym sposobem δV przedstawia szybkość zmiany (t.j. pochodną) potencjału przy dowolnym ruchu zgodnym z więzami, jaki nadajemy układowi.

Z zasady prac przygotowanych wynika na mocy (XII), że warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi układu jest, by

$$\delta V\leqslant 0. \tag{XIII}$$

W szczególności więc, *położeniem równowagi układu jest położenie, w którym potencjał osiąga maximum, a w przypadku więzów obustronnych również położenie, w którym potencjał osiąga minimum.*

Jeżeli bowiem układowi nadamy dowolny ruch zgodny z więzami w chwili, gdy V osiąga maximum, to po czasie Δt przyrost potencjału będzie $\Delta V\leqslant 0$, skąd $dV/dt\leqslant 0$ (przyczem nierówność $dV/dt<0$ zachodzić może w położeniu brzeżnym przy więzach jednostronnych), a zatem $\delta V\leqslant 0$ (w myśl uwagi o znaczeniu δV). Jeżeli zaś więzy są obustronne i V ma wartość minimum, to $dV/dt=0$, skąd $\delta V=0$.

Jeżeli na układ punktów materialnych działają tylko siły ciężkości, wówczas potencjał wynosi ((13), str. 215)

$$V=-mgz_0, \tag{41}$$

gdzie m oznacza masę całkowitą układu, zaś z_0 współrzędną środka masy przy założeniu, że oś z ma zwrot pionowy ku górze.

Położeniem równowagi będzie więc każde położenie, w którym V jest maximum czyli z_0 minimum. Jeżeli więzy są obustronne, to położeniem równowagi będzie prócz tego każde położenie, w którym V jest minimum czyli z_0 maximum.

Jeżeli punkt ciężki A zawieszony jest na nici nierozciągliwej, uwiązanej w początku O, to ekstrema potencjału V wystąpią wówczas, gdy nić jest napięta i ma kierunek pionowy. Maximum jest wtedy, gdy A znajduje się pod O, minimum zaś, gdy A jest nad O. Oczywistym jest, że położenie równowagi występuje tylko wtedy, gdy V ma wartość maximum (t. j. gdy A jest pod O).

Przykład 6. Dwa punkty materialne A_1 i A_2 ciężkie o masach m_1 i m_2 połączone są nicią nierozciągliwą, przewiniętą przez krążek. Punkt m_2 ma pozostawać na prostej pionowej l. Jaki kąt φ tworzy nić z prostą l w położeniu równowagi, jeżeli nie ma tarcia (str. 195, rys. 1)?

Przyjmijmy oś l za oś z, nadając jej zwrot ku górze, a punkt osi, znajdujący się na wysokości krążka, za początek układu współrzędnych. Oznaczmy przez s długość nici, przez a odległość krążka od osi l, przez z_1 i z_2 współrzędne punktów A_1 i A_2, a przez z_0 współrzędne środka masy. Mamy:

$$z_1 = -(s - a/\sin\varphi), \qquad z_2 = -a\operatorname{ctg}\varphi.$$

Ponieważ $mz_0 = m_1z_1 + m_2z_2$, gdzie $m = m_1 + m_2$, więc

$$z_0 = [-m_1(s - a/\sin\varphi) - m_2a\operatorname{ctg}\varphi]/m.$$

Aby wyznaczyć extremum z_0, przyrównujemy pochodną $dz_0/d\varphi$ do zera:

$$-m_1a\cos\varphi/\sin^2\varphi + m_2a/\sin^2\varphi = 0,$$

skąd

$$\cos\varphi = m_2/m_1. \tag{42}$$

Łatwo zbadać, że dla wartości φ, spełniającej równanie (42), z_0 jest minimum. Równanie (42) określa więc położenie równowagi (gdy $m_2 < m_1$).

Inny sposób rozwiązania podany jest w przykładzie 2, str. 195.

ROZDZIAŁ X

DYNAMIKA UKŁADÓW HOLONOMICZNYCH

§ 1. Układy holonomiczne. W tym rozdziale zajmiemy się dynamiką pewnych układów nieswobodnych. Wyprowadzimy dla nich równania ruchu, w których nie będą występowały reakcje.

Niech dany będzie układ n punktów materialnych. Niech więzy układu polegają na tym, że w każdej chwili pewne tylko położenia układu są możliwe. Nie zakładamy (jak w rozdz. IX), że w każdej chwili możliwe są jedne i te same położenia: zbiór możliwych położeń układu może się zmieniać wraz z czasem.

Przykładem jest punkt mogący pozostawać na płaszczyźnie ruchomej lub linii ruchomej, np. kulka nawinięta na drut, który się porusza lub zmienia kształt.

Jeżeli w chwili t więzy są obustronne (str. 421), wówczas współrzędne $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ punktów układu muszą w chwili t spełniać pewne równania (str. 423):

$$(1) \qquad F_1(x_1, \ldots, z_n, t) = 0, \quad \ldots, \quad F_m(x_1, \ldots, z_n, t) = 0,$$

które zapisujemy krócej:

$$(I) \qquad F_j(x_1, \ldots, z_n, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Jeżeli w chwili t więzy są jednostronne, to oprócz (I) zachodzą związki ((9), str. 422)

$$(II) \qquad \Phi_r(x_1, \ldots, z_n, t) \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Układ, którego więzy dają się przedstawić przy pomocy związków postaci (I) i (II) nazywamy *holonomicznym*.

Jeżeli funkcje F_j i Φ_r nie zależą od czasu t, mówimy, że *więzy są niezależne od czasu*, układ zaś nazywamy *skleronomicznym*.

W rozdz. IX, badaliśmy warunki równowagi układów holonomicznych skleronomicznych. Więzy takich układów dają się określić związkami postaci (I), str. 423, i (9), str. 422:

$$(I') \qquad F_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(II') \qquad \Phi_r(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n) \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Jeżeli choć jedna z funkcyj w (I) lub (II) zależy od czasu t, mówimy, że więzy *zależne są od czasu*, układ zaś nazywamy *reonomicznym*.

Łatwo zauważyć, że układ skleronomiczny jest szczególnym przypadkiem reonomicznego; innymi słowy równania (I') i (II') są szczególnym przypadkiem równań (I) i (II).

O funkcjach F_j, Φ_r zakładamy na ogół, że są ciągłe i że mają pochodne cząstkowe ciągłe w pewnym obszarze zmiennych

$$x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t.$$

O równaniach (I), (I'), (II), (II') mówimy, że przedstawiają *więzy w postaci skończonej*.

Podobnie jak w układach skleronomicznych (str. 423), zakładamy, że funkcje (I) są od siebie niezależne i że $m < 3n$, a liczbę $k = 3n - m$ nazywamy *liczbą stopni swobody* danego układu.

Przykład. Niech punkt materialny $A(x, y, z)$ ma pozostawać na powierzchni pewnej kuli, poruszającej się ruchem postępowym jednostajnym.

Oznaczmy przez r promień kuli, przez ξ_0, η_0, ζ_0 współrzędne środka kuli w chwili $t = 0$, przez ξ, η, ζ w chwili t, a przez a, b, c rzuty prędkości ruchu postępowego na osie współrzędnych. W chwili t mamy $\xi = \xi_0 + at$, $\eta = \eta_0 + bt$ i $\zeta = \zeta_0 + ct$. Kula ma więc w chwili t równanie $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 - r^2 = 0$ czyli

$$(2) \qquad (x - \xi_0 - at)^2 + (y - \eta_0 - bt)^2 + (z - \zeta_0 - ct)^2 - r^2 = 0.$$

Współrzędne punktu A muszą tedy spełniać w każdej chwili równanie (2); jest ono postaci $F(x, y, z, t) = 0$, zatem więzy są obustronne, zależne od czasu, a więc układ jest holonomiczny reonomiczny.

Jeżeli założymy, że punkt A ma pozostawać wewnątrz lub na powierzchni kuli, wówczas więzy wyrażą się nierównością

$$(3) \qquad (x - \xi_0 - at)^2 + (y - \eta_0 - bt)^2 + (z - \zeta_0 - ct)^2 - r^2 \leqslant 0,$$

a więc będą w tym przypadku jednostronne.

§ 2. Układy anholonomiczne. Nie zawsze więzy obustronne układu dają się przedstawić w postaci skończonej (I) lub (I').

Przypuśćmy np. że każdemu punktowi A przestrzeni przyporządkowany jest wektor $\bar{H}$, którego rzuty są zależne od współrzędnych x,y,z punktu A. Zatem:

$$(1) \qquad H_x=\alpha(x,y,z), \qquad H_y=\beta(x,y,z), \qquad H_z=\gamma(x,y,z),$$

gdzie α,β,γ są danymi funkcjami.

Załóżmy, że punkt materialny może się poruszać tylko w taki sposób, że prędkość jego w każdym położeniu jest prostopadła do $\bar{H}$. Oznaczmy przez $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ rzuty prędkości $\bar{v}$ punktu materialnego. W każdej chwili będzie więc musiał zachodzić związek $\bar{H}\bar{v}=0$ czyli

$$(2) \qquad \alpha(x,y,z)\dot{x}+\beta(x,y,z)\dot{y}+\gamma(x,y,z)\dot{z}=0.$$

Jeżeli istnieje taka funkcja $F(x,y,z)$, że jej pochodne cząstkowe są równe odpowiednim funkcjom α,β,γ, to równanie (2) możemy napisać w postaci $dF/dt=0$ czyli $F=\text{const.}=c$ lub

$$(3) \qquad F(x,y,z)-c=0.$$

Na odwrót, jeżeli zachodzi równanie (3), to różniczkując je, otrzymamy (2). Równania (2) i (3) są więc w tym przypadku równoważne, a zatem więzy są holonomiczne, ponieważ dają się przedstawić w postaci skończonej (3).

Jeżeli jednak funkcje α,β,γ nie są pochodnymi cząstkowymi jednej funkcji, to równanie (2) może nie być równoważne żadnemu równaniu postaci (3). W tym przypadku więzy nie dadzą się więc przedstawić w postaci skończonej i układ nie jest układem holonomicznym. Mówimy wówczas, że układ jest *anholonomiczny*.

Równanie (2) piszemy zazwyczaj w postaci

$$(4) \qquad \alpha(x,y,z)\,dx+\beta(x,y,z)\,dy+\gamma(x,y,z)\,dz=0.$$

Ogólniejszą postać mają równania

$$(5) \qquad \alpha(x,y,z,t)\,dx+\beta(x,y,z,t)\,dy+\gamma(x,y,z,t)\,dz+\varepsilon(x,y,z,t)\,dt=0.$$

Równanie (5) jest równoważne równaniu

$$(6) \qquad \alpha\dot{x}+\beta\dot{y}+\gamma\dot{z}+\varepsilon=0,$$

gdzie $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ są danymi funkcjami zmiennych x,y,z i t. Stanowi ono warunek konieczny, jakiemu muszą czynić zadość prędkości punktów układu. Układami anholonomicznymi zajmować się bliżej nie będziemy.

§ 3. Przesunięcia przygotowane. Na str. 428 określiliśmy przesunięcie przygotowane układów holonomicznych skleronomicznych. Zajmiemy się teraz układami reonomicznymi.

Punkt na powierzchni. Niech punkt $A(x,y,z)$ ma pozostawać na powierzchni ruchomej S, której równanie w chwili t jest

$$F(x,y,z,t)=0. \tag{1}$$

Współrzędne punktu A spełniają więc w chwili t równanie (1).

Przesunięciem przygotowanym nazywamy każde przesunięcie $\overline{\delta s}$ punktu A o rzutach $\delta x, \delta y, \delta z$, spełniające równanie

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z=0. \tag{2}$$

Widzimy stąd, że przesunięcie przygotowane jest takie, jak gdyby powierzchnia S była nieruchoma i miała położenie, które zajmuje w chwili t. Zatem przesunięciem przygotowanym jest dowolny wektor, styczny w chwili t do powierzchni S w punkcie A (str. 425).

Nadajmy punktowi A dowolny ruch zgodny z więzami. Współrzędne punktu będą więc spełniały równanie (1). Tworząc pochodną względem czasu t, otrzymamy z (1)

$$\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial F}{\partial t}=0. \tag{3}$$

Oznaczając przez $\bar{v}$ prędkość punktu A, otrzymamy z (3)

$$\frac{\partial F}{\partial x}v_x+\frac{\partial F}{\partial y}v_y+\frac{\partial F}{\partial z}v_z+\frac{\partial F}{\partial t}=0. \tag{4}$$

Porównując (2) i (4), widzimy, że nie możemy przyjąć $\delta x=v_x$, $\delta y=v_y$ i $\delta z=v_z$, czyli $\overline{\delta s}=\bar{v}$, chyba że $\partial F/\partial t=0$.

A więc, w układach reonomicznych przesunięcia przygotowane nie są na ogół proporcjonalne do prędkości możliwych (jak w układach skleronomicznych), t. zn. wyrażają się innymi wektorami niż prędkości możliwe.

W szczególności przesunięciem przygotowanym jest na mocy (2) przesunięcie $\overline{\delta s}=0$ (t. j. $\delta x=0$, $\delta y=0$, $\delta z=0$); z (4) zaś wynika, że jeżeli $\partial F/\partial t\neq 0$, to $\bar{v}=0$ nie jest prędkością możliwą.

Uwaga. Różniczka zupełna funkcji (1) wynosi

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial t}dt.$$

Jeżeli utworzymy różniczkę przy założeniu, że $t=\text{const.}$, wówczas $dt=0$, zatem

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz.$$

A więc równanie (2) otrzymamy, różniczkując obustronnie (1) przy założeniu, że czas $t=\text{const.}$, a następnie pisząc zamiast dx, dy, dz odpowiednio $\delta x, \delta y, \delta z$.

W przykładzie na str. 471 przesunięcie przygotowane spełnia równanie, jakie otrzymamy, różniczkując równanie (2), str. 471, przy założeniu, że $t=\text{const.}$ Dostaniemy:

$$(x-\xi_0-at)\delta x+(y-\eta_0-bt)\delta y+(z-\zeta_0-ct)\delta z=0.$$

Obierając dowolnie $\delta y, \delta z$, możemy wyznaczyć δx z powyższego wzoru.

Punkt na linii. Niech punkt materialny A ma pozostawać na linii ruchomej C, która w chwili t ma równania:

$$F_1(x,y,z,t)=0, \qquad F_2(x,y,z,t)=0. \tag{7}$$

Przesunięciem przygotowanym punktu A w chwili t nazywamy każde przesunięcie $\overline{\delta s}$ (o rzutach $\delta x, \delta y, \delta z$), które spełnia równania:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\delta z=0, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial z}\delta z=0. \tag{8}$$

Zatem przesunięcie przygotowane jest takie, jak gdyby linia C była nieruchoma i miała to położenie, które zajmuje w chwili t. Przesunięciem przygotowanym jest więc dowolny wektor styczny w chwili t do krzywej C w punkcie A (str. 426).

I w tym przypadku przesunięcie przygotowane nie jest na ogół proporcjonalne do prędkości możliwej. Na mocy bowiem (7) prędkość możliwa $\overline{v}$ spełnia równania (które otrzymujemy, tworząc pochodną równań (7)):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_1}{\partial x}v_x+\frac{\partial F_1}{\partial y}v_y+\frac{\partial F_1}{\partial z}v_z+\frac{\partial F_1}{\partial t}=0,\\ &\frac{\partial F_2}{\partial x}v_x+\frac{\partial F_2}{\partial y}v_y+\frac{\partial F_2}{\partial z}v_z+\frac{\partial F_2}{\partial t}=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Jeżeli $\partial F_1/\partial t\neq 0$ lub $\partial F_2/\partial t\neq 0$, to na mocy (8) i (9) nie możemy przyjąć $\delta x=v_x$, $\delta y=v_y$, $\delta z=v_z$ czyli $\overline{\delta s}=\overline{v}$.

Zauważmy jeszcze, że równania (8) otrzymamy, tworząc przy założeniu $t=\text{const}$. różniczkę równań (7) i pisząc $\delta x, \delta y, \delta z$ zamiast dx, dy, dz.

Przykład 1. Punkt materialny A ma pozostawać na paraboli obracającej się około osi z ze stałą prędkością kątową ω (dodatnią, jeżeli obrót odbywa się od ręki prawej ku lewej). W chwili $t=0$ parabola znajduje się w płaszczyźnie xz i ma równanie $z=x^2$.

Parabola zatoczy paraboloidę obrotową $z=x^2+y^2$. Położenie paraboli w chwili t otrzymamy jako przekrój paraboloidy płaszczyzną $x\sin\omega t+y\cos\omega t=0$. Współrzędne punktu A spełniają zatem równania:

$$x^2+y^2-z=0, \qquad x\sin\omega t+y\cos\omega t=0. \tag{11}$$

Przesunięcie przygotowane $\delta x, \delta y, \delta z$ spełnia równości, które otrzymamy, różniczkując (11) przy założeniu $t=\text{const}$. Zatem:

$$2x\delta x+2y\delta y-\delta z=0, \qquad \delta x\sin\omega t+\delta y\cos\omega t=0.$$

Jeżeli $\omega t\neq\pi/2$ i $\omega t\neq 3\pi/2$, to:

$$\delta y=-\delta x\,\mathrm{tg}\,\omega t, \qquad \delta z=2(x-y\,\mathrm{tg}\,\omega t)\delta x,$$

gdzie δx jest dowolne.

Układy punktów. Niech dany będzie układ holonomiczny, którego więzy określone są równaniami

$$F_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t)=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, m). \tag{12}$$

Przesunięciem przygotowanym układu w chwili t w położeniu $(x_1, \ldots, z_n)$ zgodnym z więzami, nazywamy każde przesunięcie $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$, spełniające równania:

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_l}\delta x_l+\frac{\partial F_j}{\partial y_l}\delta y_l+\frac{\partial F_j}{\partial z_l}\delta z_l\right)=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, m). \tag{I}$$

O równaniach (I) zakładamy, że w każdej chwili t są od siebie liniowo niezależne; innymi słowy zakładamy, że spośród niewiadomych $\delta x_l, \delta y_l, \delta z_l$ możemy obrać $k=3n-m$ niewiadomych dowolnie, a pozostałych m wyznaczyć z równań (I).

Równania (I) mają postać podobną jak dla układów skleronomicznych (por. (I), str. 428). Przesunięcia przygotowane układu w chwili t są więc takie, jak gdyby więzy nie zależały od czasu i były stale takimi, jak w chwili t.

Równania (I) otrzymamy, tworząc przy założeniu $t=\text{const.}$ różniczkę z równań (12) i pisząc następnie zamiast $dx_1, \ldots, dz_n$ odpowiednio $\delta x_1, \ldots, \delta z_n$.

W przypadku układów reonomicznych nie możemy powiedzieć, że przesunięcia przygotowane są proporcjonalne do prędkości możliwych. Nadajmy bowiem układowi dowolny ruch zgodny z więzami. Różniczkując (12), otrzymamy

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial z_n}\dot{z}_n + \frac{\partial F_j}{\partial t} = 0 \qquad (j=1,2,\ldots,m). \tag{13}$$

Oznaczając przez $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ prędkości punktów, możemy napisać (13) w postaci

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}v_{ix} + \frac{\partial F_j}{\partial y_i}v_{iy} + \frac{\partial F_j}{\partial z_i}v_{iz}\right) + \frac{\partial F_j}{\partial t} = 0 \qquad (j=1,2,\ldots,m). \tag{14}$$

Porównując (14) z (I) widzimy, że nie możemy na ogół przyjąć $\delta x_1 = v_{1x}, \ldots, \delta z_n = v_{nz}$, jak w przypadku układów skleronomicznych.

Jeżeli oprócz równań (12) zachodzą jeszcze związki ((II), str. 470)

$$\Phi_r(x_1, \ldots, z_n, t) \leqslant 0 \qquad (r=1,2,\ldots,s), \tag{15}$$

to przesunięcie przygotowane musi oprócz (I) spełniać te ze związków

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Phi_r}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial \Phi_r}{\partial z_i}\delta z_i\right) \leqslant 0, \qquad (r=1,2,\ldots,s), \tag{II}$$

dla których w danym położeniu układu w chwili t zachodzą równości $\Phi_r = 0$ (por. (II), str. 434).

Współrzędne uogólnione. Niech położenia układu holonomicznego określone będą przy pomocy parametrów $q_1, \ldots, q_k$ (str. 455).

Jeżeli układ jest reonomiczny, to funkcje, które określają współrzędne naturalne $x_1, \ldots, z_n$, odpowiadające parametrom $q_1, \ldots, q_k$, są zależne od czasu. Zatem ((I), str. 456):

$$x_i = f_i(q_1, \ldots, q_k, t), \quad y_i = \varphi_i(q_1, \ldots, q_k, t), \quad z_i = \psi_i(q_1, \ldots, q_k, t) \quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{16}$$

Jeżeli parametry są niezależne, to każdemu układowi zmiennych $q_1, \ldots, q_k$ pewnego obszaru tych zmiennych (który może zależeć

od t) odpowiada położenie układu zgodne z więzami. Jeżeli zaś parametry są zależne, to w przypadku więzów obustronnych muszą być spełnione pewne równania (2), str. 457:

$$\Phi_r(q_1, \ldots, q_k, t) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s), \tag{17}$$

a w przypadku więzów jednostronnych parametry muszą czynić zadość nierówności (3), str. 457:

$$\Psi_r(q_1, \ldots, q_k, t) \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, \varrho). \tag{18}$$

W szczególności, gdy funkcje (16)-(18) nie zależą od czasu t, układ jest skleronomiczny.

Jeżeli układ się porusza, to parametry $q_1, \ldots, q_k$ zależą od czasu t. Ruch układu będzie więc wyznaczony przez podanie funkcyj:

$$q_1 = q_1(t), \quad \ldots, \quad q_k = q_k(t), \tag{19}$$

określających w każdej chwili t wartości parametrów układu. Współrzędne naturalne otrzymamy, podstawiając funkcje (19) w funkcje (16). Jeżeli parametry są zależne i spełniają równania (17), ewentualnie również nierówności (18), wówczas funkcje (19) muszą także spełniać te związki.

Niechaj położenia układu holonomicznego określone będą parametrycznie przy pomocy funkcyj (16). Przesunięcie przygotowane układu w chwili t w pewnym położeniu zgodnym z więzami otrzymamy, przyjmując, że więzy są niezależne od czasu i takie, jakimi były w chwili t. Na mocy więc (III), str. 458, dostaniemy:

$$\text{(III)} \quad \delta x_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta y_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad \delta z_i = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wzory (III) otrzymamy, tworząc przy założeniu $t = \text{const.}$ różniczkę z (16) i pisząc następnie $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i, \delta q_j$ zamiast dx_i, dy_i, dz_i, dq_j.

Jeżeli parametry są niezależne, to δq_j są w (III) dowolne. Jeżeli zaś parametry, określające położenia układu zgodne z więzami, spełniają związki (17), to δq_j w (III) nie są dowolne, lecz muszą czynić zadość równaniom ((IV), str. 459)

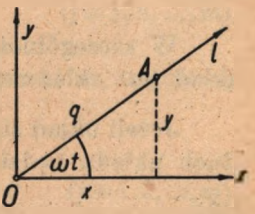
$$\text{(IV)} \quad \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Phi_r}{\partial q_j} \delta q_j = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

Jeżeli wreszcie parametry muszą spełniać oprócz równań (17) pewne nierówności (18), to δq_j muszą oprócz (IV) spełniać te ze związków

$$\text{(V)} \qquad \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \Psi_r}{\partial q_j} \delta q_j \leqslant 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, \varrho),$$

dla których w danym położeniu układu w chwili t zachodzą równania $\Psi_r = 0$ ((V), str. 459).

Przykład 2. Punkt materialny A ma pozostawać na prostej l leżącej w płaszczyźnie xy i przechodzącej przez początek układu O. Prosta l obraca się około O ze stałą prędkością kątową ω.



Przyjmijmy punkt O za początek układu współrzędnych i nadajmy prostej l zwrot dowolny. Oznaczmy przez q współrzędną punktu A względem osi l; załóżmy wreszcie, że w chwili t oś l pokrywała się z osią x. Na współrzędne x, y punktu A otrzymamy wtedy wzory:

$$\text{(20)} \qquad x = q\cos\omega t, \qquad y = q\sin\omega t.$$

Zmienna q określa położenie punktu w chwili t, jest więc parametrem. Różniczkując równania (20) przy założeniu, że $t = \text{const.}$, dostaniemy:

$$\text{(21)} \qquad \delta x = \delta q\cos\omega t, \qquad \delta y = \delta q\sin\omega t.$$

§ 4. Zasada d'Alemberta. Równowaga sił. Dotychczas pojęcie równowagi sił działających określiliśmy dla układów skleronomicznych. Wedle podanej definicji (str. 438) siły działające są w równowadze, jeżeli układ punktów, mimo działania tych sił, może pozostawać w spoczynku.

To określenie równowagi nie nadaje się jednak dla układów reonomicznych.

Jeżeli np. układ punktów materialnych ma stale pozostawać na pewnej płaszczyźnie poziomej, poruszającej się pionowo w górę ruchem jednostajnym, to oczywiście układ w żadnym razie nie może pozostawać w spoczynku. W myśl poprzedniej definicji nie moglibyśmy więc o żadnym układzie sił powiedzieć, że jest w równowadze.

Zasada prac przygotowanych (str. 439) podaje warunek konieczny i wystarczający równowagi sił dla układów skleronomicznych (jeżeli nie ma tarcia). Otóż dla układów reonomicznych (gdy nie ma tarcia) przyjmujemy zasadę prac przygotowanych za definicję równowagi sił działających: powiemy więc, że *siły działające na układ holonomiczny reonomiczny (w którym nie występuje tarcie) są w równowadze w pewnej chwili t, jeżeli na każdym przesunięciu przygotowanym w chwili t praca przygotowana sił jest zerem lub liczbą ujemną.*

Przy tej definicji zasada prac przygotowanych stosuje się więc do układów holonomicznych zarówno skleronomicznych jak i reonomicznych.

Zasada d'Alemberta. Niech na układ holonomiczny utworzony z n punktów materialnych $A(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ działają siły $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n$. Oznaczmy przez $m_1, \ldots, m_n$ masy, a przez $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ przyśpieszenia tych punktów.

Wektory $-m_1\bar{p}_1, \ldots, -m_n\bar{p}_n$ nazwaliśmy *siłami bezwładności* (str. 74). Jeżeli układ jest swobodny, to w myśl zasady d'Alemberta (str. 192) siły działające równoważą się z siłami bezwładności. Otóż doświadczenie okazuje, że zasada d'Alemberta sprawdza się również dla układów nieswobodnych holonomicznych, w których nie występuje tarcie. Możemy więc ją wypowiedzieć, jak następuje:

Siły działające na punkty układu holonomicznego (w którym nie ma tarcia) *równoważą się w każdej chwili z siłami bezwładności.*

Siły $\bar{P}_l - m_l\bar{p}_l$ (gdzie $l = 1, 2, \ldots, n$) są przeto w równowadze. Oznaczając przez δs_l przesunięcia przygotowane, otrzymamy ((I), str. 436 i (II), str. 439)

$$\text{(I)} \qquad \sum_{l=1}^{n} (\bar{P}_l - m_l\bar{p}_l)\overline{\delta s_l} \leqslant 0.$$

W przypadku więzów obustronnych (lub przesunięć odwracalnych) mamy

$$\text{(I')} \qquad \sum_{l=1}^{n} (\bar{P}_l - m_l\bar{p}_l)\overline{\delta s_l} = 0.$$

Oznaczając przez $\ddot{x}_l, \ddot{y}_l, \ddot{z}_l$ rzuty przyśpieszenia $\bar{p}_l$, zaś przez $\delta x_l, \delta y_l, \delta z_l$ rzuty przesunięcia δs_l, wzory (I) i (I') możemy napisać w postaci ((II), str. 439)

$$\text{(II)} \qquad \sum_{l=1}^{n} [(P_{l_x} - m_l\ddot{x}_l)\delta x_l + (P_{l_y} - m_l\ddot{y}_l)\delta y_l + (P_{l_z} - m_l\ddot{z}_l)\delta z_l] \leqslant 0,$$

a w przypadku więzów obustronnych mamy ((III), str. 439)

$$(II') \qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i]=0.$$

Zasada d'Alemberta sprowadza więc zagadnienia dynamiki do zagadnień statyki. Zasadę tę udowodnić możemy w wielu przykładach. W przypadkach, gdy tarcie jest zdefiniowane, przyjmujemy ją za prawo stwierdzone doświadczalnie. W przypadku zaś ogólnym mówimy, że tarcia nie ma, jeżeli do danego układu stosuje się zasada d'Alemberta.

Uwaga. Załóżmy, że układ jest swobodny. Zatem $\delta x_l, \delta y_l, \delta z_l$ są liczbami dowolnymi. Ponieważ równanie (II') ma zachodzić dla każdego układu liczb $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, więc współczynniki przy tych liczbach muszą być zerami. Zatem:

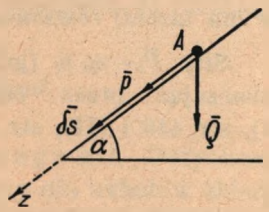
$$P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i=0, \qquad P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i=0, \qquad P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i=0$$

czyli

$$m_i\ddot{x}_i=P_{i_x}, \qquad m_i\ddot{y}_i=P_{i_y}, \qquad m_i\ddot{z}_i=P_{i_z} \qquad (i=1,2,\ldots,n).$$

Równania powyższe są oczywiście równaniami ruchu Newtona ((II), str. 190).

Przykład 1. Punkt materialny ciężki A o masie m spada (bez tarcia) po równi pochyłej, nachylonej do poziomu pod kątem α. Wyznaczyć ruch punktu.



Oznaczając przez $\bar{p}$ przyśpieszenie, przez $\bar{Q}$ ciężar punktu A, zaś przez $\bar{\delta s}$ przesunięcie przygotowane, otrzymamy z zasady d'Alemberta (I)

$$(1) \qquad (\bar{Q}-m\bar{p})\,\bar{\delta s}\leqslant 0.$$

Przyjmijmy za oś z linię największego spadku na równi, nadając jej zwrot ku dołowi. Niech $\bar{\delta s}$ ma kierunek osi z. Oznaczając rzuty δs i $\bar{p}$ na oś z przez δs i p oraz biorąc pod uwagę, że $\bar{\delta s}$ jest przesunięciem odwracalnym, otrzymamy

$$(\bar{Q}-m\bar{p})\,\bar{\delta s}=0 \qquad \text{czyli} \qquad \bar{Q}\,\bar{\delta s}-m\bar{p}\,\bar{\delta s}=0,$$

skąd $mg\,\delta s\sin\alpha-mp\,\delta s=0$, a więc

$$(2) \qquad m(g\sin\alpha-p)\,\delta s=0.$$

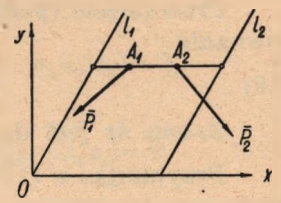
Ponieważ równanie (2) zachodzi dla każdego δs, więc mamy $g\sin\alpha - p = 0$ czyli

$$p = g\sin\alpha. \tag{3}$$

Równanie (3) określa przyśpieszenie punktu. Łatwo okazać, że przy tym przyśpieszeniu związek (1) zachodzi dla każdego δs (leżącego na równi lub nie).

Przykład 2. Dwa punkty materialne A_1, A_2 o masach m_1, m_2 nasunięte są na drut sztywny (bez masy), którego końce pozostawać mają na dwóch prostych równoległych l_1, l_2. Na punkty działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ leżące w płaszczyźnie prostych l_1, l_2. Wyznaczyć ruch punktów przy założeniu, że nie ma tarcia.

Łatwo zauważyć, że pręt będzie miał kierunek stały. Obierzmy osie x, y w płaszczyźnie prostych l_1, l_2, nadając osi x kierunek pręta, i oznaczmy współrzędne punktów przez x_1, y_1 i x_2, y_2. Więzy będą zatem określone równaniem



$$y_1 - y_2 = 0. \tag{4}$$

Na mocy zasady d'Alemberta ((II'), str. 480), otrzymamy

$$(P_{1_x} - m_1\ddot{x}_1)\delta x_1 + (P_{1_y} - m_1\ddot{y}_1)\delta y_1 + (P_{2_x} - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 + (P_{2_y} - m_2\ddot{y}_2)\delta y_2 = 0. \tag{5}$$

Z równania (4) mamy $\delta y_1 - \delta y_2 = 0$ czyli $\delta y_1 = \delta y_2$. Podstawiając tę wartość w (5), dostaniemy

$$(P_{1_x} - m_1\ddot{x}_1)\delta x_1 + (P_{2_x} - m_2\ddot{x}_2)\delta x_2 + (P_{1_y} - m_1\ddot{y}_1 + P_{2_y} - m_2\ddot{y}_2)\,\delta y_1 = 0. \tag{6}$$

Ponieważ δx_1, δx_2, δy_1 są liczbami dowolnymi, więc ich współczynniki w równaniu (6) muszą być zerami. Zatem:

$$m_1\ddot{x}_1 = P_{1_x}, \qquad m_2\ddot{x}_2 = P_{2_x}, \tag{7}$$

$$m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 = P_{1_y} + P_{2_y}. \tag{8}$$

Z (4) mamy $\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = 0$ czyli $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2$. Równanie (8) możemy więc napisać w postaci

$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 = P_{1_y} + P_{2_y}. \tag{9}$$

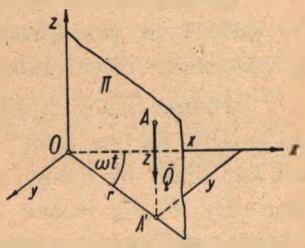
Równania (7), (9) i (4) wyznaczają ruch punktów.

Przykład 3. Płaszczyzna pionowa Π, przechodząca przez oś z skierowaną pionowo w górę, obraca się około z ze stałą prędkością kątową ω. Na płaszczyźnie Π ma pozostawać punkt ciężki A o masie m. Wyznaczyć ruch tego punktu, przyjmując, że nie ma tarcia.

Załóżmy, że w chwili $t=0$ płaszczyzna Π miała położenie płaszczyzny xz. Równaniem płaszczyzny Π w chwili t będzie więc

(10) $$y\cos\omega t - x\sin\omega t = 0.$$

Współrzędne x, y punktu A muszą więc spełniać równanie (10). Ponieważ siła ciężkości ma rzuty na osie układu: $0, 0, -mg$, więc z zasady d'Alemberta wynika, że



(11) $$-m\ddot{x}\delta x - m\ddot{y}\delta y + (-mg - m\ddot{z})\delta z = 0.$$

Przesunięcie przygotowane $\delta x, \delta y, \delta z$ spełnia na mocy (10) równanie

(12) $$\delta y\cos\omega t - \delta x\sin\omega t = 0.$$

Zatem δz jest dowolne, zaś δx i δy spełniają równanie (12).

Przyjmując w (11) $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, otrzymamy $(-mg - m\ddot{z})\delta z = 0$. Ponieważ δz jest dowolne, więc $-mg - m\ddot{z} = 0$ czyli

(13) $$\ddot{z} = -g,$$

skąd $z = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + c'$, gdzie c i c' są pewnymi stałymi.

Z (11) i (13) otrzymamy $\ddot{x}\delta x + \ddot{y}\delta y = 0$ czyli

(14) $$\ddot{x}\delta x\cos\omega t + \ddot{y}\delta y\cos\omega t = 0,$$

skąd na mocy (12) $(\ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\sin\omega t)\delta x = 0$, a ponieważ δx jest dowolne, więc

(15) $$\ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\sin\omega t = 0.$$

Połóżmy $r = OA'$, gdzie A' oznacza rzut A na płaszczyznę xy. Zatem:

(16) $$x = r\cos\omega t, \qquad y = r\sin\omega t,$$

skąd

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\omega t - 2\dot{r}\omega\sin\omega t - r\omega^2\cos\omega t, \quad \ddot{y} = \ddot{r}\sin\omega t + 2\dot{r}\omega\cos\omega t - r\omega^2\sin\omega t$$

i przez podstawienie w (15) $\ddot{r} - r\omega^2 = 0$, a więc (por. przykład 4, str. 141) $r = c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t}$ czyli na mocy (16):

$$x = (c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t})\cos\omega t, \qquad y = (c_1e^{\omega t} + c_2e^{-\omega t})\sin\omega t.$$

Stałe c, c', c_1, c_2 wyznaczamy z danych początkowych.

§ 5. Praca i energia kinetyczna w układach skleronomicznych. Niech układ holonomiczny skleronomiczny, złożony z n punktów materialnych o masach $m_1,\dots,m_n$ i o współrzędnych $x_1,y_1,z_1,\dots,x_n,y_n,z_n$, poddany będzie działaniu sił $\bar{P}_1,\dots,\bar{P}_n$.

Załóżmy na razie, że więzy są obustronne.

Z zasady d'Alemberta mamy dla każdego przesunięcia przygotowanego $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i$

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\,\delta z_i]=0.$$

Ponieważ układ jest skleronomiczny, więc prędkości punktów możemy przyjąć za przesunięcia przygotowane (str. 427). Kładąc zatem $\dot{x}_i=\delta x_i$, $\dot{y}_i=\delta y_i$, $\dot{z}_i=\delta z_i$, otrzymamy z (1)

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\,\dot{x}_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\,\dot{y}_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\,\dot{z}_i]=0$$

czyli

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\dot{x}_i+P_{i_y}\dot{y}_i+P_{i_z}\dot{z}_i)-\sum_{i=1}^{n}m_i(\ddot{x}_i\dot{x}_i+\ddot{y}_i\dot{y}_i+\ddot{z}_i\dot{z}_i)=0.$$

Energia kinetyczna układu wyraża się wzorem

$$E=\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2),$$

skąd $\dot{E}=\sum m_i(\ddot{x}_i\dot{x}_i+\ddot{y}_i\dot{y}_i+\ddot{z}_i\dot{z}_i)$. Na mocy zatem (3) jest

$$\dot{E}=\sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\dot{x}_i+P_{i_y}\dot{y}_i+P_{i_z}\dot{z}_i).$$

Całkując to równanie obustronnie od t_0 do t, otrzymamy

$$(4)\qquad \int_{t_0}^{t}\dot{E}dt=\int_{t_0}^{t}dt\sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\dot{x}_i+P_{i_y}\dot{y}_i+P_{i_z}\dot{z}_i).$$

Lewa strona wzoru (4) równa jest $E-E_0$, gdzie E oznacza energię kinetyczną w chwili t, a E_0 w chwili t_0, prawa zaś strona wyraża pracę $L_{t_0,t}$ sił działających od chwili t_0 do t ((II), str. 211). Zatem

$$(5)\qquad E-E_0=L_{t_0,t}.$$

Równanie (5) wyraża *zasadę równowartości pracy sił działających i energii kinetycznej*.

Odrzućmy teraz założenie obustronności więzów. Przyjmijmy, że oprócz związków wyrażających się równościami, współrzędne punktów układu mają spełniać nierówności ((15), str. 476):

$$(6)\qquad \Phi_r(x_1,\dots,z_n)\leqslant 0 \qquad (r=1,2,\dots,\varrho).$$

Zasada d'Alemberta ma w tym przypadku postać

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i+(P_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i+(P_{iz}-m_i\ddot{z}_i)\,\delta z_i]\leqslant 0.$$

Załóżmy, że prędkość zmienia się podczas ruchu w sposób ciągły.

Jeżeli w pewnej chwili t' (gdzie $t_0\leqslant t'\leqslant t$) położenie układu nie jest brzeżne t. zn. że w nierównościach (6) zachodzą znaki $<$, wówczas nierówności (6) nie dają żadnych warunków na przesunięcia przygotowane (str. 476). Przesunięcia przygotowane są w tym przypadku odwracalne; zachodzi zatem równanie (1), a następnie (2). Jeżeli zaś w chwili t' (gdzie $t_0<t'<t$) układ zajmuje położenie brzeżne, t. zn. że dla pewnego r zachodzi równość

$$\Phi_r(x_1,\ldots,z_n)=0,$$

to wobec założenia, że funkcje $x_1,\ldots,z_n$ mają pochodne ciągłe względem czasu t, funkcja Φ_r będzie miała również pochodną ciągłą. Ponieważ zaś jest stale $\Phi_r\leqslant 0$, więc w chwili t' funkcja Φ_r osiąga maximum. Wynika stąd, że dla $t=t'$ jest $\dot{\Phi}_r=0$, więc

$$(8)\qquad \frac{\partial\Phi_r}{\partial x_1}\dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial\Phi_r}{\partial z_n}\dot{z}_n=0.$$

Na mocy (8) przesunięcie przygotowane $\delta x_1=\dot{x}_1,\ldots,\delta z_n=\dot{z}_n$ jest przesunięciem odwracalnym. Dla przesunięcia tego zachodzi przeto równanie (1), a tym samym i (2).

Udowodniliśmy zatem, że w każdej chwili t' (gdzie $t_0<t'<t$) spełnione jest równanie (2), z którego — rozumując jak poprzednio, wyprowadzimy wzór (4).

A więc: *do układów holonomicznych skleronomicznych stosuje się zasada równowartości pracy sił działających i energii kinetycznej* (przyczem dla więzów jednostronnych zachodzi to wtedy, gdy prędkości punktów zmieniają się w sposób ciągły).

Jeżeli siły działające mają potencjał V, to $L_{t_0,t}=V-V_0$, gdzie V i V_0 oznaczają odpowiednio potencjały w chwilach t i t_0. Z (5) mamy zatem $E-E_0=V-V_0$ czyli $E-V=E_0-V_0$. Oznaczając stałą E_0-V_0 przez h, otrzymamy

$$(9)\qquad E-V=h.$$

Wyrażenie $-V$ nazwaliśmy energią potencjalną i oznaczyliśmy przez U (str. 220). Zatem

$$(10)\qquad E+U=h.$$

Sumę $E+U$ nazwaliśmy *energią całkowitą układu* (str. 220).

A więc: *do układów holonomicznych skleronomicznych stosuje się zasada zachowania energii całkowitej* (przy założeniu, że w przypadku więzów jednostronnych prędkości zmieniają się w sposób ciągły).

Uwaga. W układach reonomicznych zasada równowartości pracy i energii kinetycznej na ogół nie zachodzi.

Jeżeli np. punkt ma pozostawać na krzywej ruchomej i na punkt nie działają żadne siły, to energia kinetyczna punktu może się pomimo to zmieniać zależnie od ruchu krzywej.

W układach reonomicznych przyrost energii kinetycznej zależy również od pracy sił reakcyjnych, która na ogół nie jest zerem.

§ 6. Równania Lagrange'a pierwszego rodzaju. Niech dany będzie układ holonomiczny n punktów materialnych $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$. Oznaczmy przez $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_n$ siły działające na punkty układu, a przez $m_1, \ldots, m_n$ masy tych punktów. Załóżmy, że więzy są obustronne, określone równaniami ((I), str. 470):

$$F_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

Przesunięcia przygotowane układu spełniają równania:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial F_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial F_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{2}$$

Na mocy zasady d'Alemberta ((II'), str. 480) mamy:

$$\sum_{i=1}^{n} [(P_{ix} - m_i \ddot{x}_i)\, \delta x_i + (P_{iy} - m_i \ddot{y}_i)\, \delta y_i + (P_{iz} - m_i \ddot{z}_i)\, \delta z_i] = 0. \tag{3}$$

Równanie (3) zachodzi dla każdego układu liczb $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, spełniającego układ równań (2). Z rozważań na str. 450 wynika, że dla każdej chwili t istnieją takie liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, że będą spełnione równania (I), str. 451 (gdzie zamiast P_{ix} należy podstawić $P_{ix} - m_i \ddot{x}_i$ i t. d.):

$$\begin{aligned} P_{ix} - m_i \ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i} &= 0, \\ P_{iy} - m_i \ddot{y}_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial y_i} &= 0, \\ P_{iz} - m_i \ddot{z}_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial z_i} &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{4}$$

Liczby $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ zależą od t, są więc funkcjami czasu; zatem $\lambda_1 = \lambda_1(t), \ldots, \lambda_m = \lambda_m(t)$. Z (4) dostajemy:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= P_{ix} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \\ m_i\ddot{y}_i &= P_{iy} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial y_i}, \\ m_i\ddot{z}_i &= P_{iz} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial z_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \end{aligned}$$

Równania (I) noszą nazwę *równań Langrange'a pierwszego rodzaju.*

Niech siły $\bar{P}_i$ dane będą jako funkcje zmiennych $x_1, \ldots, z_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n, t$ określających położenie układu w chwili t. Z równań (I) i (1) możemy zatem wyznaczyć niewiadome funkcje czasu $x_1, \ldots, z_n$, określające ruch układu, oraz funkcje $\lambda_1 = \lambda_1(t), \ldots, \lambda_m = \lambda_m(t)$. Funkcyj niewiadomych jest tyle, ile równań, t. j. $3n + m$.

Oznaczmy przez $\bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_n$ siły, których rzuty określone są równościami:

$$\text{(II)} \qquad R_{ix} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial x_i}, \quad R_{iy} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial y_i}, \quad R_{iz} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Na mocy (I) i (II) mamy:

$$\text{(5)} \qquad m_i\ddot{x}_i = P_{ix} + R_{ix}, \quad m_i\ddot{y}_i = P_{iy} + R_{iy}, \quad m_i\ddot{z}_i = P_{iz} + R_{iz} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Oznaczając przez $\bar{p}_i$ przyśpieszenie punktu A_i, możemy (5) napisać w postaci

$$\text{(6)} \qquad m_i\bar{p}_i = \bar{P}_i + \bar{R}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Z (6) wynika, że siły $\bar{R}_i$ są reakcjami. Jeżeli bowiem dołożymy je do sił działających, to będziemy mogli na mocy (6) uważać układ za swobodny. A więc reakcje są określone związkami (II).

Przykład 1. Niech punkt o masie m, poddany działaniu siły $\bar{P}$, ma pozostawać na powierzchni o równaniu

$$\text{(7)} \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Równania (I) Lagrange'a przyjmą postać:

$$\text{(8)} \qquad m\ddot{x} = P_x + \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad m\ddot{y} = P_y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad m\ddot{z} = P_z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Z równań (7) i (8) możemy otrzymać niewiadome funkcje czasu x, y, z i λ.

Równania (8) otrzymaliśmy na innej drodze (por. (I), str. 129).

Niechaj teraz punkt ma pozostawać na powierzchni ruchomej o równaniu

$$F(x,y,z,t)=0. \tag{9}$$

Równania (I) Lagrange'a będą miały wówczas również postać (8).

Przykład 2. Niech punkt materialny o masie m ma pozostawać na kuli, której środek jest początkiem układu współrzędnych, a promień r zmienia się wraz z czasem t. Niech

$$r=at+r_0, \tag{10}$$

gdzie liczby a i r_0 są dane. Współrzędne punktu spełniają zatem równanie

$$x^2+y^2+z^2-(at+r_0)^2=0. \tag{11}$$

Załóżmy, że na punkt nie działają żadne siły. Równania (8) przyjmą wtedy postać:

$$m\ddot{x}=2\lambda x, \qquad m\ddot{y}=2\lambda y, \qquad m\ddot{z}=2\lambda z. \tag{12}$$

Z równań (12) wynika, że kierunek przyśpieszenia przechodzi przez początek układu współrzędnych. Zatem ruch będzie ruchem środkowym (str. 86) i będzie się przeto odbywał w płaszczyźnie przechodzącej przez początek układu współrzędnych (str. 87).

Przyjmijmy, że płaszczyzną ruchu jest płaszczyzna xz. Zatem

$$y=0. \tag{13}$$

Wprowadźmy w płaszczyźnie xz współrzędne biegunowe r, φ:

$$x=r\cos\varphi, \qquad z=r\sin\varphi. \tag{14}$$

Ponieważ prędkość polowa jest stała, więc na mocy (I), str. 48,

$$r^2\dot{\varphi}=\text{const.}=c, \tag{15}$$

skąd na mocy (10) $\dot{\varphi}=c/(at+r_0)^2$. Całkując, dostaniemy

$$\varphi=-c/(at+r_0)a+c_1. \tag{16}$$

Zakładając, że dla $t=0$ jest $\varphi=0$, otrzymamy z (16) $c_1=c/r_0a$ czyli

$$\varphi=ct/r_0(at+r_0). \tag{17}$$

Równania (14), (10) i (17) określają ruch punktu. Stałą c otrzymamy z (15), znając np. dla $t=0$ prędkość kątową $\dot{\varphi}$.

§ 7. Równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Zajmiemy się obecnie równaniami ruchu, w których występować będą tylko współrzędne uogólnione.

Niech dany będzie układ holonomiczny n punktów materialnych, których współrzędne naturalne $x_1,\dots,z_n$, określone są parametrami $q_1,\dots,q_k$ przy pomocy funkcyj:

$$(1)\quad x_i=f_i(q_1,\dots,q_k,t),\quad y_i=\varphi_i(q_1,\dots,q_k,t),\quad z_i=\psi_i(q_1,\dots,q_k,t)\quad (i=1,2,\dots,n).$$

Oznaczmy przez $m_1,\dots,m_n$ masy punktów układu.

Załóżmy, że siły działające $\bar{P}_1,\dots,\bar{P}_n$ zależne są od położenia układu, prędkości punktów i czasu t.

Na mocy zasady d'Alemberta mamy

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n}[(P_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(P_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(P_{iz}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i]\leqslant 0.$$

Zauważmy, że

$$(3)\quad \begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}[(P_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(P_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(P_{iz}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i)]=\\&=\sum_{i=1}^{n}(P_{ix}\delta x_i+P_{iy}\delta y_i+P_{iz}\delta z_i)-\sum_{i=1}^{n}m_i(\ddot{x}_i\delta x_i+\ddot{y}_i\delta y_i+\ddot{z}_i\delta z_i).\end{aligned}$$

Pierwsza suma po prawej stronie równania (3) przedstawia pracę przygotowaną $\delta' L$ sił działających. Możemy ją na mocy (VII), str. 460, napisać w postaci

$$(4)\quad \delta' L=\sum_{i=1}^{n}(P_{ix}\delta x_i+P_{iy}\delta y_i+P_{iz}\delta z_i)=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j,$$

gdzie Q_j (dla $j=1,2,\dots,k$) są składowymi siły uogólnionej. Na mocy (VI'), str. 460, mamy więc

$$(5)\quad Q_j=\sum_{i=1}^{n}\left(P_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+P_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+P_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)\qquad (j=1,2,\dots,k).$$

Tworząc pochodną równań (1) względem czasu t, otrzymamy

$$(6)\quad \dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\dots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t}\qquad (i=1,2,\dots,n)$$

i podobne wzory dla $\dot{y}_i,\dot{z}_i$.

Na mocy założenia, rzuty P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} są funkcjami czasu t oraz zmiennych $x_1,\dots,z_n$, $\dot{x}_1,\dots,\dot{z}_n$, które możemy wyrazić na mocy (1) i (6) przy pomocy zmiennych $q_1,\dots,q_k$, $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k$. Z (5) wynika więc, że Q_j możemy również uważać za funkcje zmiennych $q_1,\dots,q_k$, $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k$, t:

$$Q_j=Q_j(q_1,\dots,q_k,\ \dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k,\ t) \qquad (j=1,2,\dots,k). \tag{7}$$

Pierwszą sumę po prawej stronie równania (3) możemy więc na mocy (4) i (7) wyrazić przy pomocy współrzędnych uogólnionych.

Zajmiemy się teraz drugą sumą, stojącą po prawej stronie równania (3). Z (1) otrzymujemy ((III), str. 477):

$$\delta x_i=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j,\quad \delta y_i=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j,\quad \delta z_i=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j,\quad (i=1,2,\dots,n). \tag{8}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}m_i(\ddot{x}_i\delta x_i+\ddot{y}_i\delta y_i+\ddot{z}_i\delta z_i)&=\\ =\sum_{i=1}^{n}m_i\Big(\ddot{x}_i\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j+\ddot{y}_i\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j+\ddot{z}_i\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j\Big)&=\\ =\sum_{j=1}^{k}\delta q_j\sum_{i=1}^{n}m_i\Big(\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\ddot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\Big).&\end{aligned} \tag{9}$$

Na mocy (6) możemy $\dot{x}_i$ (i podobnie $\dot{y}_i,\dot{z}_i$) uważać za funkcje zmiennych $q_1,\dots,q_k$, $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k$ oraz czasu t. Przyjmując, że $\dot{x}_i$ oznacza prawą stronę równości (6) i że $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k$ są odrębnymi zmiennymi, utwórzmy pochodne cząstkowe względem $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k$. Otrzymamy:

$$\partial\dot{x}_i/\partial\dot{q}_1=\partial x_i/\partial q_1,\quad \dots,\quad \partial\dot{x}_i/\partial\dot{q}_k=\partial x_i/\partial q_k \tag{10}$$

czyli

$$\partial\dot{x}_i/\partial\dot{q}_j=\partial x_i/\partial q_j \qquad (j=1,2,\dots,k). \tag{11}$$

Tworząc pochodne cząstkowe równań (6) względem q_j (i uważając przytem $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k$ za odrębne zmienne), otrzymamy

$$\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1\partial q_j}\dot{q}_1+\dots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\partial q_j}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 x_i}{\partial t\,\partial q_j}. \tag{12}$$

Z drugiej strony mamy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_1}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}. \tag{13}$$

Ponieważ porządek różniczkowania nie wpływa na wynik, więc z (12) i (13) dostajemy

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right). \tag{14}$$

Zauważmy, że

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)=\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\dot{x}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right); \tag{15}$$

na mocy więc (11) i (14) otrzymujemy stąd wzór

$$\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \tag{16}$$

i podobne wzory dla zmiennych y_i, z_i. Ze wzorów tych dostaniemy dla dowolnego j:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\ddot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)=\\ &=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)-\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_j}\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Energia kinetyczna układu wynosi

$$E=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2). \tag{18}$$

Podstawmy do (18) za $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ prawe strony równości (6) i analogicznych równości dla $\dot{y}_i, \dot{z}_i$. Przedstawimy w ten sposób E jako funkcję zmiennych $q_1,\ldots,q_k,\ \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k, t$:

$$E=E(q_1,\ldots,q_k,\ \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k,t). \tag{19}$$

Uważając $q_j, \dot{q}_j, t$ za odrębne zmienne, otrzymamy z (19) i (18)

$$\frac{\partial E}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_j}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_j}\right), \tag{20}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}+\dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j}+\dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j}\right). \tag{21}$$

Z (17) dostaniemy na mocy (20) i (21)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\ddot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\ddot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}, \tag{22}$$

skąd na mocy (9)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i\delta x_i+\ddot{y}_i\delta y_i+\ddot{z}_i\delta z_i)=\sum_{j=1}^{k}\delta q_j\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}\right]. \tag{23}$$

Z równań (3), (4) i (23) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n}[(P_{ix}-m_i\ddot{x}_i)\,\delta x_i+(P_{iy}-m_i\ddot{y}_i)\,\delta y_i+(P_{iz}-m_i\ddot{z}_i)\,\delta z_i]= \tag{24}$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\delta q_j\left[Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial E}{\partial q_j}\right].$$

Z zasady d'Alemberta (2) wynika więc, że

$$\sum_{j=1}^{k}\delta q_j\left[Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial E}{\partial q_j}\right]\leqslant 0. \tag{I}$$

Związki (24) i (I) zachodzą zarówno wtedy, gdy parametry $q_1,\ldots,q_k$ są zależne lub nie, jak i wtedy, gdy więzy są jednostronne lub obustronne.

W przypadku więzów obustronnych nierówność (I) przybiera postać równości:

$$\sum_{j=1}^{k}\delta q_j\left[Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial E}{\partial q_j}\right]=0. \tag{I'}$$

Załóżmy, że parametry są niezależne. Zatem $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ są liczbami dowolnymi. Wynika stąd, że współczynniki przy δq_j w (I') są zerami, a więc że

$$Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial E}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,k), \tag{25}$$

czyli

$$\text{(II)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}=Q_j \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Równania (II) noszą nazwę równań *Lagrange'a drugiego rodzaju*.

Występują w nich tylko współrzędne uogólnione.

Z równań (II) możemy wyznaczyć $q_1,\ldots,q_k$ jako funkcje czasu t; pozwalają więc one wyznaczyć ruch bez przechodzenia do współrzędnych naturalnych.

Załóżmy teraz, że parametry nie są niezależne, lecz że muszą spełniać związki (17), str. 477:

$$\text{(25)} \qquad \Phi_r(q_1,\ldots,q_k,t)=0 \qquad (r=1,2,\ldots,s).$$

Przesunięcia przygotowane δq_j spełniają zatem równości (IV), str. 477,

$$\text{(26)} \qquad \sum_{j=1}^{k}\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_j}\delta q_j=0 \qquad (r=1,2,\ldots,s).$$

Równości (I') zachodzą dla każdego układu liczb δq_j spełniających (26). Z rozważań podobnych jak na str. 450 wynika, że do każdej chwili t można dobrać liczby $\lambda_1,\ldots\lambda_s$, spełniające równania:

$$Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)+\frac{\partial E}{\partial q_j}+\sum_{r=1}^{s}\lambda_r\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,k)$$

czyli

$$\text{(II')} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}=Q_j+\sum_{r=1}^{s}\lambda_r\frac{\partial \Phi_r}{\partial q_j} \qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Mnożniki Lagrange'a λ_r są zależne od czasu, są więc funkcjami zmiennej t; zatem $\lambda_r=\lambda_r(t)$.

Równania (II') łącznie z (25) pozwalają wyznaczyć niewiadome funkcje czasu $q_1,\ldots,q_k$ i $\lambda_1(t),\ldots,\lambda_s(t)$. Równań tych jest razem $k+s$, t. j. tyleż co funkcyj niewiadomych.

Uwaga. Przy układaniu równań (II) należy najpierw przedstawić E i Q_j jako funkcje zmiennych $q_1,\ldots,q_k,\ \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k,t$.

Aby otrzymać Q_j, podstawiamy we wzorze na pracę przygotowaną $\delta' L=\Sigma(P_{i_x}\delta x_i+P_{i_y}\delta y_i+P_{i_z}\delta z_i)$ zamiast $\delta x_i,\delta y_i,\delta z_i,x_i,y_i,z_i,\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i$ wyrażenia, jakie dostajemy z (1), a następnie porządkujemy według $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$. Współczynniki przy $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ będą składowymi Q_j siły uogólnionej.

Podstawiając następnie we wzorze na energię kinetyczną $E=\frac{1}{2}\Sigma m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)$ zamiast $\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i$ pochodne, jakie dostajemy, różniczkując (1) względem t, otrzymamy E jako funkcję zmiennych $q_1,\ldots,q_k,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k,t$.

Wyznaczywszy E i Q_j jako funkcje zmiennych $q_1,\ldots,q_k,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k,t$, tworzymy pochodne: $\partial E/\partial q_j$ oraz $\partial E/\partial\dot{q}_j$ i wreszcie $\frac{d}{dt}(\partial E/\partial\dot{q}_j)$. Podstawiając w (II), dostajemy równania Lagrange'a.

Równania Lagrange'a w polu potencjalnym. Załóżmy, że siły działające $\bar{P}_1,\ldots,\bar{P}_n$ posiadają potencjał V w każdej chwili t. Potencjał V jest więc funkcją zmiennych $x_1,\ldots,z_n,t$; ponadto:

$$P_{ix}=\partial V/\partial x_i,\quad P_{iy}=\partial V/\partial y_i,\quad P_{iz}=\partial V/\partial z_i,\qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{27}$$

skąd na mocy (5)

$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\right),\qquad (j=1,2,\ldots,k). \tag{28}$$

Wyrażając w V współrzędne $x_1,\ldots,z_n$ przez $q_1,\ldots,q_k$ przy pomocy (1), możemy V uważać za funkcję zmiennych $q_1,\ldots,q_k$ i czasu t. Z (28) dostaniemy więc

$$Q_j=\partial V/\partial q_j\qquad (j=1,2,\ldots,k). \tag{29}$$

Z (29) i (27) widzimy, że składowe Q_j siły uogólnionej wyrażają się podobnie jak składowe sił $\bar{P}_i$. Możemy więc V uważać za *potencjał uogólniony* sił Q_j.

Z (II) i (29) dostaniemy $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E}{\partial q_j}=\frac{\partial V}{\partial q_j}$ czyli

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial(E+V)}{\partial q_j}=0\qquad (j=1,2,\ldots,k). \tag{30}$$

Ponieważ V nie zależy od pochodnych $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k$, więc $\partial V/\partial\dot{q}_j=0$. Zatem

$$\partial E/\partial\dot{q}_j=\partial(E+V)/\partial\dot{q}_j\qquad (j=1,2,\ldots,k). \tag{31}$$

Z (30) i (31) dostaniemy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(E+V)}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial(E+V)}{\partial q_j}=0\qquad (j=1,2,\ldots k). \tag{32}$$

Sumę energii kinetycznej i potencjału, t.j. $E+V$, nazywamy *potencjałem kinetycznym*.

Kładąc

$$W = E + V, \tag{33}$$

otrzymamy na mocy (32)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial W}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{III}$$

Równania Lagrange'a drugiego rodzaju przyjmują więc postać (III) w przypadku, gdy siły posiadają w każdej chwili potencjał (lub — co na jedno wychodzi — potencjał kinetyczny).

Współrzędne cykliczne. Współrzędną q_j (gdzie j jest pewną liczbą) nazywamy *cykliczną*, jeżeli potencjał kinetyczny W nie zależy od q_j, t.zn. jeżeli

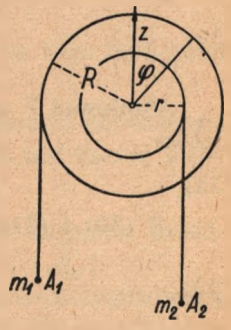
$$\partial W / \partial q_j = 0. \tag{34}$$

Jeżeli q_j jest współrzędną cykliczną, wówczas z równań (III) i (34) otrzymamy $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right) = 0$, skąd

$$\partial W / \partial \dot{q}_j = \text{const.} = c. \tag{35}$$

Równanie (35) jest równaniem różniczkowym rzędu pierwszego. Jeżeli więc jakaś współrzędna q_j jest cykliczna, to odpowiednie jej równanie w równaniach (III) Lagrange'a możemy zastąpić równaniem różniczkowym (35) rzędu pierwszego.

Przykład 1. Dwa krążki o promieniach R i r osadzone są na wspólnej osi. Na krążkach tych zawieszone są na niciach nierozciągliwych dwa punkty materialne ciężkie A_1 i A_2 o masach m_1 i m_2. Wyznaczyć ruch układu, przyjmując, że nie ma tarcia.



Załóżmy, że ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej. Nadajmy osi z kierunek pionowy w górę. Oznaczmy przez z_1 i z_2 współrzędne punktów m_1 i m_2 w chwili t, zaś przez z_1^0 i z_2^0 w chwili początkowej $t = 0$. Niech φ oznacza kąt obrotu krążków, licząc od położenia początkowego. Przyjmując kąt obrotu za dodatni przy zwrocie od ręki lewej ku prawej, otrzymamy:

$$z_1 = z_1^0 + R\varphi, \qquad z_2 = z_2^0 - r\varphi. \tag{36}$$

Kąt φ wyznacza więc położenie układu; możemy zatem przyjąć φ za parametr.

Niech I_1 i I_2 będą momentami bezwładności krążków względem wspólnej osi. Energia kinetyczna wynosi

$$E=\tfrac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2+\tfrac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2+\tfrac{1}{2}I_1\omega^2+\tfrac{1}{2}I_2\omega^2, \tag{37}$$

gdzie ω oznacza prędkość kątową krążków. Na mocy (36) mamy $\dot{z}_1=R\dot{\varphi}$ i $\dot{z}_2=-r\dot{\varphi}$, a ponadto $\omega=\dot{\varphi}$. Kładąc $I=I_1+I_2$, otrzymamy z (37)

$$E=\tfrac{1}{2}(m_1R^2+m_2r^2+I)\dot{\varphi}^2.$$

Potencjał siły ciężkości wynosi

$$V=-m_1gz_1-m_2gz_2=-m_1g(z_1^0+R\varphi)-m_2g(z_2^0-r\varphi),$$

a więc potencjał kinetyczny $W=E+V$:

$$W=\tfrac{1}{2}(m_1R^2+m_2r^2+I)\dot{\varphi}^2-m_1g(z_1^0+R\varphi)-m_2g(z_2^0-r\varphi),$$

skąd:

$$\partial W/\partial\varphi=-(m_1R-m_2r)g, \qquad \partial W/\partial\dot{\varphi}=(m_1R^2+m_2r^2+I)\dot{\varphi}. \tag{38}$$

Równanie Lagrange'a (III), str. 494, ma w naszym przypadku postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial W}{\partial\varphi}=0;$$

wobec (38) będzie więc $(m_1R^2+m_2r^2+I)\ddot{\varphi}+(m_1R-m_2r)g=0$ czyli

$$\ddot{\varphi}=(m_2r-m_1R)g/(m_1R^2+m_2r^2+I). \tag{39}$$

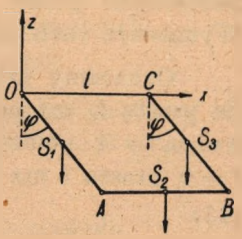
Przyśpieszenie kątowe jest zatem stałe.

Z (36) mamy $\ddot{z}_1=R\ddot{\varphi}$ i $\ddot{z}_2=-r\ddot{\varphi}$; punkty materialne będą się więc poruszały ruchem jednostajnie przyśpieszonym.

W szczególności, gdy $R=r$, mamy *maszynę Atwooda* (str. 197 i 376).

Przykład 2. Układ złożony z trzech prętów sztywnych OA, AB, BC o równej długości l i równej masie m porusza się pod wpływem siły ciężkości w płaszczyźnie pionowej Π. Pręty są połączone przegubowo w A i B, zaś unieruchomione w O i C, przy czem O i C leżą na prostej poziomej oraz $OC=l$.

Obierzmy w płaszczyźnie Π osie x i z, przyjmując O za początek układu i nadając osi x kierunek poziomy OC, zaś osi z zwrot ku górze. Oznaczmy przez φ kąt, jaki pręty OA i CB tworzą z pionem, a przez S_1, S_2, S_3 środki ciężkości prętów (przyjmując, że leżą one w środkach geometrycznych tych prętów).



Kąt φ określa położenie układu prętów; zatem φ jest parametrem. Ruch chwilowy prętów OA i BC jest obrotem chwilowym około O i C z prędkością kątową $\dot{\varphi}$. Pręt AB porusza się ruchem postępowym (por. przykład 1, str. 322) z prędkością $\bar{v}$ punktu A, przyczem $|\bar{v}|=l|\dot{\varphi}|$. Energia kinetyczna układu wynosi zatem

$$E=\tfrac{1}{2}I\dot{\varphi}^2+\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2+\tfrac{1}{2}I\dot{\varphi}^2=(I+\tfrac{1}{2}ml^2)\dot{\varphi}^2, \tag{40}$$

gdzie I oznacza moment bezwładności pręta względem końca. Współrzędne z_1, z_2, z_3 środków ciężkości S_1, S_2, S_3 wynoszą:

$$z_1=-\tfrac{1}{2}l\cos\varphi, \qquad z_2=-l\cos\varphi, \qquad z_3=-\tfrac{1}{2}l\cos\varphi,$$

zatem potencjał siły ciężkości

$$V=-mg(z_1+z_2+z_3)=2mgl\cos\varphi. \tag{41}$$

Potencjał kinetyczny $W=E+V$ wyniesie więc na mocy (40) i (41)

$$W=(I+\tfrac{1}{2}ml^2)\dot{\varphi}^2+2mgl\cos\varphi, \tag{42}$$

skąd

$$\partial W/\partial\varphi=-2mgl\sin\varphi, \qquad \partial W/\partial\dot{\varphi}=2(I+\tfrac{1}{2}ml^2)\dot{\varphi}. \tag{43}$$

Równania Lagrange'a (III), str. 494, przyjmą postać

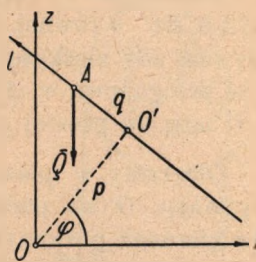
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial W}{\partial\varphi}=0,$$

na mocy (43) będzie więc $2(I+\frac{1}{2}ml^2)\ddot{\varphi}+2mgl\sin\varphi=0$ czyli

$$\ddot{\varphi}=-\frac{mgl}{I+\frac{1}{2}ml^2}\sin\varphi. \tag{44}$$

Porównując równanie (44) z równaniem wahadła matematycznego ((I), str. 132) widzimy, że dany układ prętów będzie się wahał jak wahadło matematyczne o długości $(I+\frac{1}{2}ml^2)/ml$.

Przykład 3. Prosta l leży w płaszczyźnie pionowej xz i obraca się około początku układu współrzędnych O ze stałą prędkością kątową ω. Na prostej l ma pozostawać punkt ciężki A o masie m. Wyznaczyć ruch punktu A.



Oznaczmy przez O' rzut punktu O na prostą l, zaś przez φ kąt między OO' a osią x i połóżmy $p=OO'=\text{const}$. Przyjmijmy, że w chwili $t=0$ prosta l ma kierunek osi z. Zatem

$$\varphi=\omega t. \tag{45}$$

Nadajmy prostej l zwrot dowolny i oznaczmy przez q współrzędną punktu A na osi l, przyjmując za początek punkt O' tej osi. Współrzędne x i z punktu A wynoszą zatem:

$$x=p\cos\omega t-q\sin\omega t, \qquad z=p\sin\omega t+q\cos\omega t. \tag{46}$$

Układ jest więc reonomiczny, zaś q jest parametrem.

Praca przygotowana wyraża się wzorem $\delta' L=-mg\delta z$ (oś z ma zwrot pionowy ku górze). Ponieważ na mocy (46) jest $\delta z=\delta q\cos\omega t$, więc $\delta' L=-mg\delta q\cos\omega t$. Siła uogólniona wynosi zatem

$$Q=-mg\cos\omega t. \tag{47}$$

Obliczymy teraz energię kinetyczną E. Różniczkując (46), otrzymamy:

$$\dot{x}=-(p\omega+\dot{q})\sin\omega t-q\omega\cos\omega t, \qquad \dot{z}=(p\omega+\dot{q})\cos\omega t-q\omega\sin\omega t,$$

zatem

$$E=\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{z}^2)=\tfrac{1}{2}m[(p\omega+\dot{q})^2+q^2\omega^2], \tag{48}$$

skąd

$$\partial E/\partial q=mq\omega^2, \qquad \partial E/\partial\dot{q}=m(p\omega+\dot{q}). \tag{49}$$

Na mocy (II), str. 492, równanie Lagrange'a ma w naszym przypadku postać $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q$, skąd na mocy (49) i (47) otrzymamy $m\ddot{q}-mq\omega^2=-mg\cos\omega t$ czyli

$$\ddot{q}-q\omega^2=-g\cos\omega t. \tag{50}$$

Równanie jednorodne $\ddot{q}-q\omega^2=0$ ma rozwiązanie ogólne $q=c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}$, gdzie c_1 i c_2 są stałymi dowolnymi. Rozwiązaniem szczególnym równania (50) jest, jak łatwo stwierdzić, $q=g\cos\omega t/2\omega^2$. Rozwiązaniem ogólnym równania (50) jest więc

$$q=c_1e^{\omega t}+c_2e^{-\omega t}+\frac{g}{2\omega^2}\cos\omega t. \tag{51}$$

Stałe c_1 i c_2 wyznaczamy z warunków początkowych.

Równania (46) i (51) wyznaczają ruch punktu.

Uwaga. Ciężar ma potencjał $V=-mgz$, zatem na mocy (46) $V=-mg(p\sin\omega t+q\cos\omega t)$. Potencjał kinetyczny $W=E+V$ równa się więc na mocy (48)

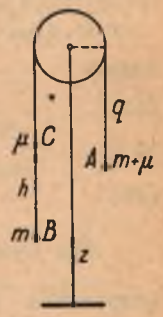
$$W=\tfrac{1}{2}m[(p\omega+\dot{q})^2+q^2\omega^2]-mg(p\sin\omega t+q\cos\omega t). \tag{52}$$

Na mocy (III), str. 494, mamy $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial W}{\partial q}=0$, skąd na mocy (52) otrzymamy równanie (50).

Przykład 4. Dwa punkty materialne ciężkie A i B o masach $m+\mu$ i m zawieszone są na końcach nici nierozciągliwej i nieważkiej, przewiniętej przez krążek (maszyna Atwooda, str. 197 i 376). Po stronie ciężarka B porusza się wzdłuż nici owad C o masie μ. Oznaczając przez h rzut wektora $\overline{BC}$ na oś z mającą początek w środku krążka i kierunek pionowy w dół, mamy

(53) $$h=f(t),$$

gdzie $f(t)$ jest funkcją daną. Wyznaczyć ruch układu punktów A,B,C.



Niech z_1, z_2, z_3 będą współrzędnymi punktów A, B, C, l długością nici, r promieniem krążka, a I momentem bezwładności krążka względem środka. Przyjmując za parametr q współrzędną z_1, mamy:

(54) $$z_1=q, \quad z_2=l-q-r\pi, \quad z_3=l-q-r\pi+f(t),$$

skąd $$\delta z_1=\delta q, \quad \delta z_2=-\delta q, \quad \delta z_3=-\delta q.$$

Praca przygotowana sił ciężkości równa jest

$$\delta' L=(m+\mu)\,g\delta z_1+mg\delta z_2+\mu g\delta z_3=(m+\mu)\,g\delta q-mg\delta q-\mu g\delta q=0,$$

zatem siła uogólniona jest

(55) $$Q=0.$$

Energia kinetyczna E wynosi

(56) $$E=\tfrac{1}{2}(m+\mu)\,\dot{z}_1^2+\tfrac{1}{2}m\dot{z}_2^2+\tfrac{1}{2}\mu\dot{z}_3^2+\tfrac{1}{2}I\omega^2,$$

gdzie ω oznacza prędkość kątową krążka. Z (54) mamy:

(57) $$\dot{z}_1=\dot{q}, \quad \dot{z}_2=-\dot{q}, \quad \dot{z}_3=-\dot{q}+\dot{f}.$$

Ponieważ $r|\omega|=|\dot{z}_1|=|\dot{q}|$, więc $\omega^2=\dot{q}^2/r^2$, skąd na mocy (56) i (57)

$$E=\tfrac{1}{2}(m+\mu)\,\dot{q}^2+\tfrac{1}{2}m\dot{q}^2+\tfrac{1}{2}\mu(\dot{q}-\dot{f})^2+\tfrac{1}{2}I\dot{q}^2/r^2.$$

Stąd

(58) $$\frac{\partial E}{\partial q}=0, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}}=(2m+2\mu+I/r^2)\dot{q}-\mu\dot{f}.$$

Równania Lagrange'a (II), str. 492, przyjmą postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E}{\partial q}=Q.$$

Na mocy (55) i (58) otrzymujemy stąd

$$(2m+2\mu+I/r^2)\,\ddot{q}-\mu\ddot{f}=0 \tag{59}$$

i po scałkowaniu

$$(2m+2\mu+I/r^2)q-\mu f(t)=c_1t+c_2. \tag{60}$$

Stałe c_1 i c_2 wyznaczymy z danych początkowych. Załóżmy, że w chwili początkowej $t=0$ było:

$$f(0)=0, \qquad \dot{f}(0)=0, \qquad z_1=q=q_0, \qquad \dot{z}_1=\dot{q}=0.$$

Z równania (60) i jego pochodnej otrzymamy:

$$c_2=(2m+2\mu+I/r^2)q_0, \qquad c_1=0. \tag{61}$$

Kładąc $k=2m+2\mu+I/r^2$, dostaniemy z (60) i (61) $q=\frac{\mu}{k}f(t)+q_0$, a zatem na mocy (54):

$$z_1=\frac{\mu}{k}f(t)+q_0, \qquad z_3=l-r\pi-q_0+\frac{k-\mu}{k}f(t). \tag{62}$$

Ponieważ $k-\mu>0$, więc z (62) wynika, że jeżeli owad C będzie się wspinał po nici w górę, to ciężarek A będzie również wznosił się w górę. W chwili, gdy owad dojdzie do krążka, t.j. do wysokości $z_3=0$, będzie, jak wynika z (62),

$$z_1=q_0-\frac{\mu}{k-\mu}(l-r\pi-q_0).$$

Przykład 5. Punkt materialny A o masie m porusza się w płaszczyźnie xy pod wpływem siły środkowej $\bar{P}$, której rzut P na promień wodzący OA (gdzie O oznacza początek układu współrzędnych) jest funkcją odległości $r=OA$ i wynosi

$$P=f(r). \tag{63}$$

Wprowadźmy współrzędne biegunowe r,φ. Współrzędne x,y punktu A wyrażą się więc wzorami:

$$x=r\cos\varphi, \qquad y=r\sin\varphi. \tag{64}$$

Współrzędne biegunowe r,φ są zatem parametrami niezależnymi.

Z (64) otrzymamy po zróżniczkowaniu:

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\varphi-r\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \dot{y}=\dot{r}\sin\varphi+r\dot{\varphi}\cos\varphi.$$

Energia kinetyczna wynosi więc

$$E=\tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2). \tag{65}$$

Ponieważ pole jest środkowe i siła zależy od odległości, więc pole jest potencjalne (str. 102). Zatem na mocy (63) i (3), str. 103, potencjał wyniesie

$$V=\int P dr=\int f(r)dr, \tag{66}$$

a potencjał kinetyczny $W=E+V$, na mocy (65) i (66),

$$W=\tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)+\int P dr. \tag{67}$$

Ponieważ potencjał kinetyczny W nie zależy od φ, więc φ jest współrzędną cykliczną, skąd (str. 494) $\partial W/\partial\dot{\varphi}=\text{const.}$ czyli

$$mr^2\dot{\varphi}=\text{const.} \tag{68}$$

Równanie Lagrange'a dla współrzędnej r ma postać ((III), str. 494, z r zamiast q_j)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial W}{\partial r}=0. \tag{69}$$

Z (67) dostajemy

$$m\ddot{r}-mr\dot{\varphi}^2-P=0. \tag{70}$$

Z (68) mamy $\dot{\varphi}=\text{const.}/mr^2=c/r^2$, gdzie c jest pewną stałą. Wstawiając tę wartość $\dot{\varphi}$ w (70), dostaniemy $m(\ddot{r}-c^2/r^3)=P$ czyli

$$\ddot{r}-c^2/r^3=f(r)/m.$$

Z powyższego równania możemy wyznaczyć r jako funkcję czasu t.

Przykład 6. Ruch punktu na powierzchni obrotowej. Krzywa leżąca na płaszczyźnie xz o równaniu

$$z=f(x), \tag{71}$$

zatoczyła obrót około osi z, tworząc powierzchnię obrotową S. Równaniem powierzchni S jest więc równanie

$$z=f(\sqrt{x^2+y^2}). \tag{72}$$

Wprowadźmy współrzędne biegunowe r,φ w płaszczyźnie xy.

Wówczas:

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,\qquad z=f(r). \tag{73}$$

Zmienne r, φ są więc parametrami niezależnymi.

Na powierzchni S ma pozostawać punkt materialny o masie m, poddany działaniu siły P. Wyznaczyć równania Langrange'a drugiego rodzaju.

Wyznaczymy najpierw siły uogólnione. Z równań (73) mamy:

$$\delta x=\delta r\cos\varphi-r\delta\varphi\sin\varphi,\qquad \delta y=\delta r\sin\varphi+r\delta\varphi\cos\varphi,\qquad \delta z=f'(r)\delta r. \tag{74}$$

Praca przygotowana wynosi

$$\delta' L=P_x\delta x+P_y\delta y+P_z\delta z. \tag{75}$$

Podstawiając (74) w (75), otrzymamy

$$\delta' L=(P_x\cos\varphi+P_y\sin\varphi+P_z f'(r))\delta r+(-P_x\sin\varphi+P_y\cos\varphi)r\delta\varphi. \tag{76}$$

Współczynniki stojące przy δr i $\delta\varphi$ są siłami uogólnionymi. Oznaczmy je przez Q_r i Q_φ. Zatem:

$$Q_r=P_x\cos\varphi+P_y\sin\varphi+P_z f'(r),\qquad Q_\varphi=(-P_x\sin\varphi+P_y\cos\varphi)r. \tag{77}$$

Przejdziemy teraz do wyznaczenia energii kinetycznej. Różniczkując (73), dostaniemy:

$$\dot x=\dot r\cos\varphi-r\dot\varphi\sin\varphi,\qquad \dot y=\dot r\sin\varphi+r\dot\varphi\cos\varphi,\qquad \dot z=f'(r)\dot r. \tag{78}$$

Energia kinetyczna E wynosi $E=\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)$, skąd na mocy (78)

$$E=\tfrac{1}{2}m[(1+f'^2(r))\dot r^2+r^2\dot\varphi^2], \tag{79}$$

a stąd

$$\partial E/\partial r=m[f'(r)f''(r)\dot r^2+r\dot\varphi^2],\qquad \partial E/\partial\varphi=0, \tag{80}$$

$$\partial E/\partial\dot r=m[1+f'^2(r)]\dot r,\qquad \partial E/\partial\dot\varphi=mr^2\dot\varphi. \tag{81}$$

Z równań (II), str. 492, kładąc $q_1=r$, $q_2=\varphi$, $Q_1=Q_r$, $Q_2=Q_\varphi$, otrzymamy na mocy (80) i (81):

$$m\frac{d}{dt}[(1+f'^2(r))\dot r]-m[f'(r)f''(r)\dot r^2+r\dot\varphi^2]=Q_r, \tag{82}$$

$$md(r^2\dot\varphi)/dt=Q_\varphi. \tag{83}$$

Siły uogólnione Q_r i Q_φ podane są wzorami (77).

Przyjmijmy, że ruch odbywa się w polu potencjalnym, np. w polu sił ciężkości. Potencjał będzie wówczas $V=-mgz$ (gdy oś z ma zwrot pionowy ku górze). Na mocy więc (73) mamy

$$V=-mgf(r), \tag{84}$$

skąd dla potencjału kinetycznego $W=E+V$:

$$\frac{\partial W}{\partial r}=\frac{\partial E}{\partial r}-mgf'(r), \qquad \frac{\partial W}{\partial \dot r}=\frac{\partial E}{\partial \dot r}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \varphi}=0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \dot\varphi}=\frac{\partial E}{\partial \dot\varphi}.$$

Wynika stąd, że współrzędna φ jest cykliczną. Równania (III), str 494, przyjmą dla współrzędnej r postać

$$\frac{d}{dt}[(1+f'^2(r))\dot r]-[f'(r)f''(r)\dot r^2+r\dot\varphi^2-gf'(r)]=0. \tag{85}$$

Ponieważ φ jest współrzędną cykliczną, więc $\partial W/\partial\dot\varphi=\text{const.}$ czyli

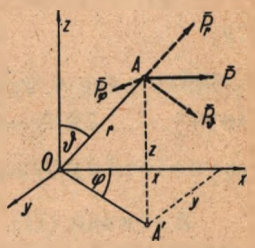
$$r^2\dot\varphi=\text{const.}=c. \tag{86}$$

Z twierdzenia o zachowaniu energii całkowitej (str. 107) wynika, że $E-V=\text{const.}$, więc na mocy (79) i (84)

$$[1+f'^2(r)]\dot r^2+r^2\dot\varphi^2+gf(r)=\text{const.}=c_1. \tag{87}$$

Z równań rzędu pierwszego (86) i (87) możemy wyznaczyć ruch punktu.

Przykład 7. Współrzędne biegunowe. Ruch punktu materialnego swobodnego $A(x,y,z)$, poruszającego się pod wpływem siły $\bar P$, zbadamy w układzie biegunowym r,ϑ,φ, gdzie $r=OA$, O oznacza początek układu współrzędnych (x,y,z), ϑ jest kątem między OA a osią z, zaś φ między osią x a rzutem OA' odcinka OA na płaszczyznę xy.



Mamy:

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y=r\sin\vartheta\sin\varphi,\quad z=r\cos\vartheta. \tag{88}$$

Ponieważ punkt materialny jest swobodny, więc parametry r,ϑ,φ są niezależne. Z (88) dostajemy:

$$\begin{aligned}\delta x&=\delta r\sin\vartheta\cos\varphi+r\delta\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi-r\delta\varphi\sin\vartheta\sin\varphi,\\ \delta y&=\delta r\sin\vartheta\sin\varphi+r\delta\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi+r\delta\varphi\sin\vartheta\cos\varphi,\\ \delta z&=\delta r\cos\vartheta-r\delta\vartheta\sin\vartheta.\end{aligned} \tag{89}$$

Praca przygotowana równa się $\delta' L = P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z$, skąd na mocy (89)

$$(90)\quad \delta' L = (P_x \sin\vartheta\cos\varphi + P_y \sin\vartheta\sin\varphi + P_z\cos\vartheta)\delta r + r(P_x\cos\vartheta\cos\varphi + P_y\cos\vartheta\sin\varphi - P_z\sin\vartheta)\delta\vartheta + r\sin\vartheta(-P_x\sin\varphi + P_y\cos\varphi)\delta\varphi.$$

Współczynniki przy δr, $\delta\vartheta$ i $\delta\varphi$ są składowymi siły uogólnionej. Oznaczmy je przez Q_r, Q_ϑ i Q_φ. Zatem:

$$(91)\quad \begin{aligned} Q_r &= P_x\sin\vartheta\cos\varphi + P_y\sin\vartheta\sin\varphi + P_z\cos\vartheta,\\ Q_\vartheta &= r(P_x\cos\vartheta\cos\varphi + P_y\cos\vartheta\sin\varphi - P_z\sin\vartheta),\\ Q_\varphi &= r\sin\vartheta(-P_x\sin\varphi + P_y\cos\varphi). \end{aligned}$$

Niech II będzie płaszczyzną przechodzącą przez OA i oś z. Poprowadźmy z punktu A prostopadle do OA osie Θ,Φ: oś Θ w płaszczyźnie II, zaś oś Φ prostopadle do II. Nadajmy osiom zwroty w kierunku wzrostu kątów ϑ, φ i oznaczmy przez $P_r, P_\vartheta, P_\varphi$ składowe siły P w kierunku osi $\overline{OA}$, Θ, Φ. Łatwo wykazać, że na mocy (91) jest:

$$(92)\quad Q_r = P_r, \qquad Q_\vartheta = rP_\vartheta, \qquad Q_\varphi = r\sin\vartheta P_\varphi.$$

Energia kinetyczna wynosi $E = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$. Pochodne $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ otrzymamy z (89), pisząc $\dot{r},\dot{\vartheta},\dot{\varphi}$ zamiast $\delta r,\delta\vartheta,\delta\varphi$. Podstawiając otrzymane wartości, dostaniemy

$$(93)\quad E = \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + r^2\dot{\vartheta}^2),$$

skąd

$$(94)\quad \partial E/\partial r = mr(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2), \quad \partial E/\partial\vartheta = mr^2\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad \partial E/\partial\varphi = 0,$$

$$(95)\quad \partial E/\partial\dot{r} = m\dot{r}, \qquad \partial E/\partial\dot{\vartheta} = mr^2\dot{\vartheta}, \qquad \partial E/\partial\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta.$$

Przyjmując w równaniach Lagrange'a (II), str. 492:

$$q_1 = r, \qquad q_2 = \varphi, \qquad q_3 = \vartheta,$$

dostaniemy na mocy (94) i (95):

$$(96)\quad \begin{aligned} m\ddot{r} - mr(\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) &= Q_r,\\ m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta) &= Q_\varphi,\\ m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) - mr^2\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta &= Q_\vartheta. \end{aligned}$$

Równania (96) są równaniami ruchu we współrzędnych biegunowych przestrzennych.

§ 8. Równania kanoniczne Hamiltona. Niech $q_1,\dots,q_k$ będą parametrami niezależnymi. Energia kinetyczna E jest w ogólnym przypadku funkcją zmiennych $q_1,\dots,q_k$, $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k$ i czasu t. Uważając te zmienne za niezależne, połóżmy

$$\text{(I)}\qquad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}=p_j \qquad (j=1,2,\dots,k).$$

Wyrażenia (I) nazywamy *impulsami uogólnionymi.*

Na mocy (I), p_j są funkcjami zmiennych $q_1,\dots,q_k,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k,t$; możemy więc napisać

$$\text{(1)}\qquad p_j=\Phi_j(q_1,\dots,q_k,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k,t) \qquad (j=1,2,\dots,k).$$

Można udowodnić przy dość ogólnych założeniach, że równania (1) dają się rozwiązać względem zmiennych $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k$. Zatem

$$\text{(2)}\qquad \dot{q}_j=\bar{\Phi}_j(q_1,\dots,q_k,p_1,\dots,p_k,t) \qquad (j=1,2,\dots,k).$$

Potencjał kinetyczny $W=E+V$ jest funkcją zmiennych $q_1,\dots,q_k,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k,t$:

$$\text{(3)}\qquad W=F(q_1,\dots,q_k,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k,t).$$

Podstawiając (2) w (3), dostaniemy

$$\text{(4)}\qquad W=\bar{F}(q_1,\dots,q_k,p_1,\dots,p_k,t).$$

Funkcja $\bar{F}$ jest więc funkcją złożoną z funkcji F za pośrednictwem funkcyj $\bar{\Phi}_j$. Z twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej otrzymamy:

$$\text{(5)}\qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_i}=\frac{\partial F}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial p_i}=\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \qquad (i=1,2,\dots,k).$$

Ponieważ V nie zależy od pochodnych $\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k$, więc $\partial V/\partial \dot{q}_j=0$; z uwagi na to, że $W=V+E$, mamy

$$\text{(6)}\qquad \partial W/\partial \dot{q}_j=\partial E/\partial \dot{q}_j.$$

Na mocy więc (I) i (3) mamy $\partial F/\partial \dot{q}_j=p_j$. Z (5) dostaniemy zatem:

$$\text{(7)}\qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial q_i}=\frac{\partial F}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{k}p_j\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial \bar{F}}{\partial p_i}=\sum_{j=1}^{k}p_j\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \qquad (i=1,2,\dots,k).$$

Położmy

$$H=\sum_{j=1}^{k} p_j\dot{q}_j-W \tag{II}$$

i przyjmijmy, że $\dot{q}_j$ i W są funkcjami zmiennych $q_1,\ldots,q_k, p_1,\ldots,p_k, t$, t. zn. że oznaczają funkcje (2) i (4). Wówczas

$$H=\sum_{j=1}^{k} p_j\dot{q}_j-\overline{F}. \tag{8}$$

Tworząc pochodne cząstkowe, otrzymamy z (8):

$$\frac{\partial H}{\partial q_i}=\sum_{j=1}^{k} p_j\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial q_i}-\frac{\partial\overline{F}}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i+\sum_{j=1}^{k} p_j\frac{\partial\dot{q}_j}{\partial p_i}-\frac{\partial\overline{F}}{\partial p_i}, \tag{9}$$

na mocy więc (7):

$$\partial H/\partial q_i=-\partial F/\partial q_i, \qquad \partial H/\partial p_i=\dot{q}_i. \tag{10}$$

Równania Lagrange'a (III), str. 494, mają postać

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial W}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,k). \tag{11}$$

Na mocy (I) i (6) jest $\partial W/\partial\dot{q}_j=p_j$. Z równania (11) dostaniemy

$$\dot{p}_j=\partial W/\partial q_j \qquad (j=1,2,\ldots,k), \tag{12}$$

skąd na mocy (3) $\partial F/\partial q_j=\dot{p}_j$, a więc na mocy (10):

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i=1,2,\ldots,k). \tag{III}$$

Równania (III) nazywamy *równaniami kanonicznymi Hamiltona*, a funkcję H *funkcją Hamiltona*.

Zmienne p_i czyli impulsy uogólnione są więc określone równaniami (I), a funkcja H równaniami (II). W równaniach (III) funkcja H jest funkcją zmiennych q_i, p_i, t. Równania (III) tworzą zatem układ równań różniczkowych rzędu pierwszego, gdzie funkcjami niewiadomymi są q_i i p_i jako funkcje czasu t.

Badanie ruchu układów posiadających potencjał sprowadza się więc do badania równań różniezkowych postaci (III). Stąd nazwa równań kanonicznych.

Układy skleronomiczne. Załóżmy, że układ jest skleronomiczny. Na mocy (I), str. 504, mamy więc

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j. \tag{13}$$

Niechaj współrzędne naturalne wyrażone będą funkcjami:

$$x_i = f_i(q_1, \ldots, q_k), \quad y_i = \varphi_i(q_1, \ldots, q_k), \quad z_i = \psi_i(q_1, \ldots, q_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Zatem

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k. \tag{15}$$

Tworząc pochodną cząstkową względem $\dot{q}_j$, dostaniemy:

$$\partial \dot{x}_i / \partial \dot{q}_j = \partial x_i / \partial q_j, \text{ i podobnie } \partial \dot{y}_i / \partial \dot{q}_j = \partial y_i / \partial q_j, \quad \partial \dot{z}_i / \partial \dot{q}_j = \partial z_i / \partial q_j. \tag{16}$$

Mamy

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2), \tag{17}$$

więc

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_j} \right),$$

skąd na mocy (16)

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right),$$

a stąd

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j =$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\dot{x}_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + \dot{y}_i \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) + \dot{z}_i \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial z_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \right].$$

Na mocy więc (15) jest $\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = 2E,$

skąd na mocy (13)

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \dot{q}_j = 2E. \tag{18}$$

Z (II), str. 504, i (18) dostaniemy

$$H = 2E - W. \tag{19}$$

W myśl określenia ((33), str. 494), mamy $W=E+V$, gdzie V jest potencjałem. Z (19) wynika więc, że

$$H=E-V. \tag{20}$$

Otóż $E-V$ jest energią całkowitą układu.

A więc: *w układach skleronomicznych funkcja Hamiltona H oznacza energię całkowitą układu.*

Załóżmy, że potencjał V nie zależy od czasu. H jest wtedy funkcją tylko zmiennych $q_1,\dots,q_k, p_1,\dots,p_k$. Zatem

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right). \tag{21}$$

Z równań (III) otrzymujemy $\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i=-\dot{p}_i\dot{q}_i+\dot{q}_i\dot{p}_i=0$, skąd na mocy (21) $dH/dt=0$ czyli $H=\text{const}$.

Udowodniliśmy więc, że jeżeli układ skleronomiczny porusza się w polu potencjalnym, to podlega zasadzie zachowania energii całkowitej.

Przykład 1. Punkt materialny swobodny o masie m porusza się w polu potencjalnym o potencjale V.

Przyjmijmy za parametry współrzędne naturalne x,y,z. Impulsy uogólnione określone będą związkami (I), str. 504, jeżeli za q_1,q_2,q_3 podstawimy x,y,z. Zatem:

$$p_1=\partial E/\partial\dot{x}, \qquad p_2=\partial E/\partial\dot{y}, \qquad p_3=\partial E/\partial\dot{z}. \tag{22}$$

Ponieważ $E=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$, więc:

$$p_1=m\dot{x}, \qquad p_2=m\dot{y}, \qquad p_3=m\dot{z}. \tag{23}$$

Widzimy stąd, że p_1,p_2,p_3 są rzutami pędu na osie układu. Wyznaczając z (23) $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$, otrzymamy

$$E=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2). \tag{24}$$

Ponieważ układ jest skleronomiczny, więc funkcja Hamiltona H oznacza jego energię całkowitą. Zatem $H=E-V$, skąd na mocy (24)

$$H=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)-V.$$

Stąd $\partial H/\partial p_1 = p_1/m$ i t. d., $\partial H/\partial x = -\partial V/\partial x$ i t. d. Równania (III) Hamiltona przyjmą więc postać:

$$\dot{p}_1 = \partial V/\partial x, \qquad \dot{p}_2 = \partial V/\partial y, \qquad \dot{p}_3 = \partial V/\partial z, \tag{25}$$

$$\dot{x} = p_1/m, \qquad \dot{y} = p_2/m, \qquad \dot{z} = p_3/m. \tag{26}$$

Wyznaczając p_1, p_2, p_3 z (26) i wstawiając w (25), otrzymamy równania Newtona:

$$m\ddot{x} = \partial V/\partial x, \qquad m\ddot{y} = \partial V/\partial y, \qquad m\ddot{z} = \partial V/\partial z.$$

Przykład 2. Punkt materialny o masie m ma pozostawać na powierzchni walca obrotowego $x^2 + y^2 = r^2$. Na punkt działa siła sprężysta $\bar{P}$ o rzutach:

$$P_x = -k^2 mx, \qquad P_y = -k^2 my, \qquad P_z = -k^2 mz, \tag{27}$$

gdzie k jest pewną stałą.

Siła sprężysta — jak łatwo stwierdzić — posiada potencjał

$$V = -\tfrac{1}{2}k^2 m(x^2 + y^2 + z^2). \tag{28}$$

Wprowadźmy w płaszczyźnie xy współrzędne biegunowe r, φ. Zatem $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$, skąd wobec $r = \text{const.}$ mamy $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2\dot{\varphi}^2$.

Energia kinetyczna równa się więc

$$E = \tfrac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \tfrac{1}{2}m(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \tag{29}$$

Zmienne φ, z możemy przyjąć za parametry niezależne. Oznaczając przez p_1 i p_2 odpowiednie impulsy uogólnione i pisząc φ, z zamiast q_1, q_2, otrzymamy z (I) $\partial E/\partial\dot{\varphi} = p_1$ i $\partial E/\partial\dot{z} = p_2$, skąd na mocy (29):

$$p_1 = mr^2\dot{\varphi}, \qquad p_2 = m\dot{z}. \tag{30}$$

Wyznaczając $\dot{\varphi}$ oraz $\dot{z}$ z (30) i podstawiając w (29), otrzymamy

$$E = \frac{1}{2m}[p_1^2/r^2 + p_2^2].$$

Na mocy (28) jest $V = -\tfrac{1}{2}k^2 m(r^2 + z^2)$, więc funkcja Hamiltona ((20), str. 507) przyjmie postać

$$H = E - V = \frac{1}{2m}[p_1^2/r^2 + p_2^2] + \frac{1}{2}k^2 m(r^2 + z^2). \tag{31}$$

Równania Hamiltona (III) są zatem:

$$\dot{p}_1 = -\partial H/\partial \varphi, \qquad \dot{p}_2 = -\partial H/\partial z, \qquad \dot{\varphi} = \partial H/\partial p_1, \qquad \dot{z} = \partial H/\partial p_2,$$

a więc na mocy (31):

$$(32) \qquad \dot{p}_1 = 0, \qquad \dot{p}_2 = -k^2 m z, \qquad \dot{\varphi} = p_1/mr^2, \qquad \dot{z} = p_2/m.$$

Dwa ostatnie z równań (32) równoważne są równaniom (30).

Pierwsze z równań (32) daje $p_1 = \text{const.}$, więc na mocy (30) jest $mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$ czyli $\dot{\varphi} = \text{const.}$ Rzut punktu na płaszczyznę poziomą będzie więc obiegał podstawę walca ruchem jednostajnym.

Drugie z równań (32) daje na mocy (30) $m\ddot{z} = -k^2 m z$ czyli $\ddot{z} + k^2 z = 0$. Porównując je z równaniem (2), str. 112, widzimy, że rzut punktu na oś z będzie wykonywał ruch harmoniczny prosty.

ROZDZIAŁ XI

ZASADY WARIACYJNE MECHANIKI

§ 1. Wariacja bez wariacji czasu. W tym paragrafie podamy niektóre wiadomości z rachunku wariacyjnego potrzebne do zrozumienia następnych rzeczy.

Wariacja funkcji. Weźmy pod uwagę ruch punktu po osi x, określony funkcją

$$x = x(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{1}$$

Niech dana będzie funkcja

$$T = F(x, \dot{x}, t), \tag{2}$$

ciągła i mająca pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu ciągłe w pewnym obszarze D zmiennych $x, \dot{x}, t$.

Weźmy następnie pod uwagę dowolny ruch po osi x, określony funkcją

$$\bar{x} = \bar{x}(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{3}$$

Załóżmy, że można dobrać taką liczbę $\varepsilon > 0$, że jeżeli:

$$|\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon, \qquad |\dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}(t)| < \varepsilon \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1), \tag{4}$$

to funkcja T i jej pochodne cząstkowe będą funkcjami ciągłymi w przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$, gdy za x i $\dot{x}$ podstawić w (2) odpowiednio $\bar{x}(t)$ i $\dot{\bar{x}}(t)$.

Połóżmy:

$$\delta x = \bar{x} - x, \qquad \delta \dot{x} = \dot{\bar{x}} - \dot{x}, \tag{5}$$

gdzie x i $\bar{x}$ oznaczają funkcje $x(t)$ i $\bar{x}(t)$. Zatem δx i $\delta \dot{x}$ są funkcjami czasu t, określonymi w przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$.

Należy zwrócić uwagę na różnicę w znaczeniu symbolu δx w rozdziałach IX i X a obecnie. Poprzednio symbol δx oznaczał liczbę, obecnie zaś funkcję czasu t.

Na mocy (5) mamy:

$$\text{(I)} \qquad \delta\dot{x}=\frac{d(\delta x)}{dt},$$

$$\text{(6)} \qquad \bar{x}=x+\delta x, \qquad \dot{\bar{x}}=\dot{x}+\delta\dot{x}.$$

Niech

$$\bar{T}=F(\bar{x},\dot{\bar{x}},t)=F(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t),$$

gdzie x oznacza funkcję (1), zaś δx określone jest przez (5). Ze wzoru Tylora dostaniemy

$$\text{(7)} \qquad \bar{T}-T=F(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)-F(x,\dot{x},t)=\frac{\partial T}{\partial x}\delta x+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}+R.$$

Resztę R możemy napisać w postaci

$$\text{(8)} \qquad R=(|\delta x|+|\delta\dot{x}|)\eta,$$

gdzie η jest funkcją czasu t i zależy od $x, \delta x, \delta\dot{x}$, przyczem η dąży jednostajnie do 0, gdy funkcje δx i $\delta\dot{x}$ również dążą jednostajnie do 0. Jeżeli więc $|\delta x|$ i $|\delta\dot{x}|$ są małe, to $|\eta|$ jest małe, a zatem $|R|$ jest małe w wyższym jeszcze stopniu. Wyrażamy to krócej, mówiąc, że R jest „*nieskończenie małe*" w porównaniu z $|\delta x|+|\delta\dot{x}|$.

Połóżmy

$$\text{(II)} \qquad \delta T=\frac{\partial T}{\partial x}\delta x+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\delta\dot{x}.$$

Na mocy więc (7)

$$\text{(9)} \qquad \bar{T}-T=\delta T+R.$$

Wyrażenie δT nazywamy *wariacją funkcji* $T=F(x,\dot{x},t)$ *w miejscu* $x=x(t)$ lub *dla funkcji* $x=x(t)$.

We wzorze (II) funkcja δx jest dowolną funkcją czasu, mającą pierwszą i drugą pochodną ciągłą w przedziale $\langle t_0,t_1\rangle$. Wynika to z (5), gdzie $\bar{x}$ jest dowolną funkcją, mającą pierwszą i drugą pochodną ciągłą. Symbol $\delta\dot{x}$ oznacza na mocy (I) pochodną funkcji δx względem czasu t.

Wariacja δT zależy więc od funkcyj x i δx.

Dla odróżnienia będziemy nazywali δx *wariacją zmiennej (lub funkcji)* x *niezależnej*, a δT *wariacją zmiennej (lub funkcji)* T *zależnej*.

Ruch zaś $\bar{x}=\bar{x}(t)=x+\delta x$ nazywać będziemy *ruchem porównawczym*.

Wariacja δT oznacza więc w przybliżeniu przyrost funkcji T, gdy od punktu w chwili t w ruchu danym przechodzimy do punktu w tejże chwili t w ruchu porównawczym. Różnica R między wariacją δT a przyrostem prawdziwym $\bar{T}-T$ jest na mocy (8) „nieskończenie małą“ w porównaniu z sumą $|\delta x|+|\delta \dot{x}|$.

Ponieważ badamy przyrost funkcji T w ruchu danym i porównawczym w tej samej chwili t, więc wariację δT nazywamy również *wariacją bez wariacji czasu*, dla odróżnienia od innego rodzaju wariacji, którą poznamy później.

Wariację δT otrzymujemy, tworząc formalnie różniczkę funkcji $F(x,\dot{x},t)$ przy założeniu $t=\text{const.}$ (t. zn. $dt=0$) i pisząc następnie δ zamiast d. Często zamiast δT piszemy $\delta F(x,\dot{x},t)$ lub krótko δF.

Przykład 1. Niech

$$T=a\dot{x}^2+\beta\dot{x}^2t+\gamma t^2,$$

gdzie α,β,γ są stałymi. Mamy:

$$\frac{\partial T}{\partial x}=2a\dot{x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=2\beta\dot{x}t,$$

zatem na mocy (II)

$$\delta T=2a\dot{x}\delta x+2\beta\dot{x}t\delta\dot{x},$$

gdzie δx jest funkcją dowolną.

Wariacja całki. Weźmy pod uwagę całkę

$$I=\int_{t_0}^{t_1} F(x,\dot{x},t)\,dt \tag{10}$$

i niech

$$\bar{I}=\int_{t_0}^{t_1} F(x+\delta x,\ \dot{x}+\delta\dot{x},t)\,dt.$$

Mamy

$$\bar{I}-I=\int_{t_0}^{t_1}[F(x+\delta x,\dot{x}+\delta\dot{x},t)-F(x,\dot{x},t)]\,dt,$$

na mocy więc (7) i (II)

$$\bar{I}-I=\int_{t_0}^{t_1}\delta F\,dt+\int_{t_0}^{t_1}R\,dt. \tag{11}$$

Wyrażenie $\int_{t_0}^{t_1}\delta F\,dt$ nazywamy *wariacją całki* (10) i oznaczamy przez δI.

A więc, w myśl określenia

$$\text{(III)} \qquad \delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} F\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta F\,dt.$$

Podobnie jak poprzednio wariacja całki (10) przedstawia w przybliżeniu przyrost całki, gdy od ruchu danego przechodzimy do ruchu porównawczego. Różnica między przyrostem prawdziwym a wariacją δI jest „nieskończenie małą“ w porównaniu z $|\delta x|+|\delta \dot{x}|$.

Wariacja pochodnej. Niech dana będzie funkcja

$$\text{(12)} \qquad x = \Phi(q,t).$$

Załóżmy, że q jest pewną funkcją czasu t, więc

$$\text{(13)} \qquad q = q(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Uważając q we wzorze (12) za zmienną funkcję niezależną, otrzymamy na wariację zmiennej zależnej x wzór

$$\text{(14)} \qquad \delta x = \frac{\partial x}{\partial q}\,\delta q,$$

gdzie δq oznacza dowolną funkcję ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle t_0, t_1\rangle$.

Utwórzmy pochodną (12). Dostaniemy

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t};$$

wariacja $\delta \dot{x}$ tej funkcji wynosi więc

$$\delta \dot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}\,\delta \dot{q}.$$

Z uwagi na to, że na mocy (12) pochodne $\partial x/\partial q$ i $\partial x/\partial t$ nie zależą od $\dot{q}$, gdyż x nie zależy od $\dot{q}$, otrzymamy

$$\text{(15)} \qquad \delta \dot{x} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\,\dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q\,\partial t}\right)\delta q + \frac{\partial x}{\partial q}\,\delta \dot{q}.$$

Tworząc pochodną (14) względem t, dostaniemy

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\,\dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q\,\partial t}\right)\delta q + \frac{\partial x}{\partial q}\,\delta \dot{q},$$

skąd na mocy (15)

$$\text{(16)} \qquad \delta \dot{x} = \frac{d(\delta x)}{dt}.$$

Porównując (16) ze wzorem (I), widzimy, że oba wzory mają tę samą postać. Różnica leży w tym, że we wzorze (I) x jest zmienną niezależną, zaś w (16) zależną.

Wzór (I) zachodzi więc niezależnie od tego, czy x jest zmienną zależną, czy niezależną. Wynika stąd, że *wariacja jest przemienna z pochodną*, t. zn. że otrzymamy jeden i ten sam wynik, tworząc najpierw wariację, a potem pochodną, lub na odwrót.

Wariacja funkcji złożonej. Niech będą dane funkcje:

$$T=F(x,\dot{x},t), \tag{17}$$

$$x=\Phi(q,t). \tag{18}$$

Przyjmijmy, że q jest funkcją zmiennej t:

$$q=q(t) \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1). \tag{19}$$

Tworząc pochodną (18), otrzymamy

$$\dot{x}=\frac{\partial x}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial x}{\partial t}. \tag{20}$$

Podstawiając w (17) zamiast x i $\dot{x}$ ich wartości z (18) i (20), otrzymamy T jako funkcję zmiennych $q, \dot{q}, t$ czyli

$$T=\Psi(q,\dot{q},t), \tag{21}$$

a więc jako jej wariację

$$\delta T=\frac{\partial T}{\partial q}\delta q+\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}. \tag{22}$$

Z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej otrzymujemy:

$$\frac{\partial T}{\partial q}=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \dot{q}}+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}, \tag{23}$$

a na mocy (18):

$$\frac{\partial x}{\partial \dot{q}}=0. \tag{24}$$

Podstawiając (24) w (23), a następnie w (22), otrzymamy

$$\delta T=\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\right)\delta q+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}=\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\delta q\right)+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\delta q+\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right).$$

Łatwo stwierdzić, że wyrażenia w ostatnich dwóch nawiasach są wariacjami funkcyj (18) i (20), równają się więc δx i $\delta\dot{x}$. Zatem

$$\delta T=\frac{\partial T}{\partial x}\delta x+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}. \tag{25}$$

Wzór (25) przedstawia wariację funkcji złożonej (21), przyczem δx i $\delta \dot{x}$ oznaczają wariacje funkcji (18) i (20). Zauważmy, że (25) przedstawia również wariację funkcji (17). Widzimy stąd, że wzór (25), t. j. wzór (II), str. 511, zachodzi niezależnie od tego, czy x jest zmienną funkcją zależną, czy niezależną.

Podobnie dla różniczki przy $t=\text{const.}$ wzór

$$dT=\frac{\partial T}{\partial x}dx+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}d\dot{x}$$

zachodzi niezależnie od tego, czy x i $\dot{x}$ są zmiennymi zależnymi, czy nie.

Zauważmy, że we wzorze (25) $\delta \dot{x}$ jest na mocy (16) pochodną δx.

Układy punktów. Określimy teraz wariację w przypadku układu punktów.

Niech będzie dany układ n punktów materialnych

$$A_1(x_1,y_1,z_1),\quad \ldots,\quad A_n(x_n,y_n,z_n).$$

Weźmy pod uwagę dowolny ruch układu (zgodny z więzami lub nie), określony funkcjami:

$$x_i=x_i(t),\quad y_i=y_i(t),\quad z_i=z_i(t),\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ i=1,2,\ldots,n). \tag{26}$$

Niech będzie dana funkcja

$$T=F(x_1,\ldots,x_n,\ y_1,\ldots,y_n,\ z_1,\ldots,z_n,\ \dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n,\ \dot{y}_1,\ldots,\dot{y}_n,\ \dot{z}_1,\ldots,\dot{z}_n,t). \tag{27}$$

Wariacją funkcji (27) dla ruchu określonego funkcjami (26) nazywamy wyrażenie

$$\begin{aligned}\delta T=&\frac{\partial T}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial x_n}\delta x_n+\frac{\partial T}{\partial y_1}\delta y_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial y_n}\delta y_n+\frac{\partial T}{\partial z_1}\delta z_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial z_n}\delta z_n+\\&+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\delta \dot{x}_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n}\delta \dot{x}_n+\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}\delta \dot{y}_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_n}\delta \dot{y}_n+\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_1}\delta \dot{z}_1+\ldots+\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_n}\delta \dot{z}_n,\end{aligned} \tag{28}$$

co piszemy krócej

$$\delta T=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial T}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial T}{\partial z_i}\delta z_i+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\delta \dot{x}_i+\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\delta \dot{y}_i+\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}\delta \dot{z}_i\right), \tag{IV}$$

gdzie $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są dowolnymi funkcjami ciągłymi wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle t_0,t_1\rangle$, przyczem:

$$\frac{d(\delta x_i)}{dt}=\delta \dot{x}_i,\qquad \frac{d(\delta y_i)}{dt}=\delta \dot{y}_i,\qquad \frac{d(\delta z_i)}{dt}=\delta \dot{z}_i\qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{V}$$

Pochodne $\partial T/\partial x_1, \ldots, \partial T/\partial \dot{z}_n$ są pochodnymi cząstkowymi funkcji (27), w których zamiast $x_1, \ldots, \dot{z}_n$ podstawiono odpowiednio funkcje (26) i ich pochodne.

Podobnie jak poprzednio wariacja δT oznacza w przybliżeniu przyrost funkcji T, gdy od położenia układu w chwili t w ruchu danym przechodzimy do położenia układu w tej samej chwili t w ruchu porównawczym:

$$\bar{x}_i = x_i + \delta x_i, \quad \bar{y}_i = y_i + \delta y_i, \quad \bar{z}_i = z_i + \delta z_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Różnica między przyrostem prawdziwym a wariacją jest — jak łatwo okazać — „nieskończenie małą“ w porównaniu z sumą

$$\sum_{i=1}^{n} (|\delta x_i| + |\delta y_i| + |\delta z_i| + |\delta \dot{x}_i| + |\delta \dot{y}_i| + |\delta \dot{z}_i|).$$

Zauważmy, że wariację δT otrzymamy, tworząc różniczkę funkcji T przy założeniu $t = \text{const.}$ (t. j. przy $dt = 0$) i pisząc następnie δ zamiast d.

Niech teraz dana będzie całka

$$I = \int_{t_0}^{t_1} T \, dt, \tag{29}$$

gdzie T oznacza funkcję (27).

Wariacją całki (29) dla ruchu określonego przez (26) nazywamy wyrażenie

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta T \, dt. \tag{30}$$

A więc

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta T \, dt. \tag{VI}$$

Przykład 2. Wyznaczyć wariację energii kinetycznej

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Mamy:

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial y_i} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial z_i} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{y}_i} = m_i \dot{y}_i, \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i,$$

zatem

$$\delta E = \sum m_i (\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \dot{y}_i \delta \dot{y}_i + \dot{z}_i \delta \dot{z}_i).$$

Przykład 3. Wyznaczyć wariację funkcji $\sqrt{T}$, gdzie T jest funkcją określoną przez wzór (27).

Tworząc różniczkę przy założeniu $t=\text{const.}$, mamy

$$d\sqrt{T}=dT/2\sqrt{T}, \qquad \text{skąd} \qquad \delta\sqrt{T}=\delta T/2\sqrt{T}.$$

Załóżmy, że współrzędne naturalne $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ określone są przy pomocy parametrów $q_1, \ldots, q_k$ funkcjami:

$$(31)\quad x_i=f_i(q_1,\ldots,q_k,t),\ y_i=\varphi_i(q_1,\ldots,q_k,t),\ z_i=\psi_i(q_1,\ldots,q_k,t)\quad (i=1,\ldots,n).$$

Nie zakładamy przy tym, że parametry są zależne, ani że są niezależne. Niech

$$(32)\qquad q_1=q_1(t),\quad \ldots,\quad q_k=q_k(t)\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

będą dowolnymi funkcjami ciągłymi wraz z ich pierwszymi i drugimi pochodnymi w przedziale $\langle t_0, t_1\rangle$. Funkcje (32) łącznie z (33) określają pewien ruch układu, który może być zgodny z więzami lub nie. Różniczkując (31), otrzymamy

$$(33)\qquad \dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\dot{q}_1+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial x_i}{\partial t},$$

i podobne wzory dla $\dot{y}_i$ oraz $\dot{z}_i$. Podstawmy w (27) zamiast x_i, y_i, z_i funkcje (31), zaś zamiast $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ funkcje (33). Otrzymamy T w postaci funkcji zmiennych $q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k, t$:

$$(34)\qquad T=\overline{F}(q_1,\ldots,q_k,\ \dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_k,t).$$

Postępując podobnie jak w dowodzie twierdzenia o wariacji funkcji złożonej (p. wzór (25), str. 514), można okazać, że wariacja funkcji (34) również wyraża się wzorem (28) lub (IV), gdzie $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są wariacjami funkcyj (31), zaś $\delta\dot{x}_i, \delta\dot{y}_i, \delta\dot{z}_i$ wariacjami funkcyj (33) i analogicznych dla $\dot{y}_i, \dot{z}_i$.

Ponadto, podobnie jak w dowodzie twierdzenia o wariacji pochodnej (p. wzór (16), str. 513) można dowieść, że zachodzić będą również wzory (V), w których x_i, y_i, z_i oznaczają funkcje (31).

Utwórzmy wariacje funkcyj (31). Otrzymamy:

$$(35)\qquad \delta x_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k,\qquad \delta y_i=\frac{\partial y_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\delta q_k,$$

$$\delta z_i=\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\delta q_k.$$

Porównując (35) ze wzorami (III), str. 477, określającymi przesunięcia przygotowane, widzimy, że mają one tę samą postać formalną.

§ 2. Zasada Hamiltona. Ruch rzeczywisty. Niech na punkty $A_1(x_1, y_1, z_1), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n)$ układu n punktów materialnych działają odpowiednio siły $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n$. Załóżmy, że układ jest holonomiczny (bez tarcia) i że więzy są obustronne, określone związkami:

$$F_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

Weźmy pod uwagę dowolny układ funkcyj:

$$x_i = x_i(t), \qquad y_i = y_i(t), \qquad z_i = z_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

ciągłych wraz z pierwszymi i drugimi pochodnymi w przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$. Funkcje (2) określają pewien ruch układu.

Jeżeli równości (1) spełnione są w każdej chwili t, gdy za $x_1, \ldots, z_n$ podstawić funkcje (2), mówimy, że funkcje (2) określają *ruch* układu *zgodny z więzami* czyli *ruch możliwy*.

Ruch układu, jaki odbędzie się w rzeczywistości pod działaniem sił $\bar{P}_1, \ldots, \bar{P}_n$, nazywamy *ruchem rzeczywistym*.

Ruchy rzeczywiste mogą być rozmaite, gdyż zależy to od warunków początkowych.

Ruch rzeczywisty jest oczywiście zawsze możliwym, gdyż spełnia związki (1). Na odwrót jednak, nie każdy ruch możliwy jest ruchem rzeczywistym.

Jeżeli np. punkt ciężki ma znajdować się stale na prostej pionowej l (bez tarcia), to ruchem rzeczywistym jest ruch, w którym przyśpieszenie jest skierowane pionowo w dół i równa się co do wielkości przyśpieszeniu ziemskiemu. Natomiast ruchem zgodnym z więzami jest każdy ruch, w którym punkt pozostaje na prostej l, w szczególności ruch jednostajny oraz ruch, w którym przyśpieszenie nie jest stałe; ruchy te nie są oczywiście ruchami rzeczywistymi.

Z zasady d'Alemberta wynika, że spośród ruchów zgodnych z więzami ten tylko jest ruchem rzeczywistym, który spełnia w każdej chwili równanie (II′), str. 480:

$$\sum_{i=1}^{n} [(P_{ix} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (P_{iy} - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (P_{iz} - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] = 0, \tag{3}$$

gdzie $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są przesunięciami przygotowanymi.

Zasada d'Alemberta wyraża więc *cechę charakterystyczną ruchów rzeczywistych*, wyróżniającą je spośród wszystkich ruchów zgodnych z więzami.

Podobnie, równania Lagrange'a (str. 485 i 488) i Hamiltona (str. 504), wyodrębniają ruchy rzeczywiste ze zbioru wszystkich ruchów zgodnych z więzami. Poznamy jednak w tym rozdziale inne jeszcze cechy charakterystyczne ruchów rzeczywistych, wyrażone przy pomocy całek i wariacji. Są to t. zw. *zasady wariacyjne (całkowe)*.

Ruch porównawczy. Weźmy pod uwagę dowolny ruch układu zgodny z więzami, określony funkcjami (2), oraz ruch porównawczy:

$$x_i+\delta x_i, \qquad y_i+\delta y_i, \qquad z_i+\delta z_i \qquad (i=1,2,\ldots,n). \tag{4}$$

Obierzmy wariacje $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ tak, by wariacje funkcyj (1) dla danego ruchu (2) były zerami:

$$\delta F_j=\frac{\partial F_j}{\partial x_1}\delta x_1+\ldots+\frac{\partial F_j}{\partial z_n}\delta z_n=0, \qquad (j=1,2,\ldots,m). \tag{5}$$

Porównując równania (5) z równaniami (I), str. 475, widzimy, że $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi układu.

Jeżeli $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są bardzo małe, to z (5) wynika, że w przybliżeniu

$$F_j(x_1+\delta x_1,\ldots,z_n+\delta z_n,t)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m), \tag{6}$$

czyli że ruch porównawczy jest w przybliżeniu ruchem zgodnym z więzami. Wyrażamy to, mówiąc, że ruch porównawczy (4) dla „nieskończenie małych" wariacyj $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, spełniających równania (5), jest zgodny z więzami (por. str. 430).

Załóżmy, że współrzędne naturalne określone są przy pomocy parametrów $q_1,\ldots,q_k$ funkcjami:

$$x_i=f_i(q_1,\ldots,q_k,t),\ y_i=\varphi_i(q_1,\ldots,q_k,t),\ z_i=\psi_i(q_1,\ldots,q_k,t) \quad (i=1,2,\ldots,n). \tag{7}$$

Załóżmy dalej, że parametry, określające zgodne z więzami położenia układu, spełniać muszą związki:

$$\Phi_r(q_1,\ldots,q_k,t)=0 \qquad (r=1,2,\ldots,s). \tag{8}$$

Weźmy pod uwagę dowolny układ funkcyj ciągłych wraz z pierwszymi i drugimi pochodnymi w przedziale $\langle t_0,t_1\rangle$:

$$q_1=q_1(t), \quad \ldots, \quad q_k=q_k(t) \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1). \tag{9}$$

Załóżmy wreszcie, że funkcje (8) stają się tożsamościowo zerami, gdy za $q_1,\ldots,q_k$ podstawimy funkcje (9).

Przy tych założeniach, podstawiając w funkcje (7) funkcje (9), otrzymamy funkcje czasu t, określające ruch zgodny z więzami.

Weźmy pod uwagę ruch porównawczy $q_1+\delta q_1, \ldots, q_k+\delta q_k$ i obierzmy $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ tak, by dla danego ruchu (9) wariacje funkcyj (8) były zerami:

$$\delta\Phi_r=\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_k}\delta q_k=0 \qquad (r=1,2,\ldots,s). \tag{10}$$

Porównując (10) ze wzorami (IV), str. 477, widzimy, że wariacje $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ są w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi.

Jeżeli $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ są bardzo małe, to na mocy (10) otrzymujemy w przybliżeniu

$$\Phi_r(q_1+\delta q_1,\ldots,q_k+\delta q_k,t)=0 \qquad (r=1,2,\ldots,s). \tag{11}$$

Ruch (11) będzie więc w przybliżeniu również zgodny z więzami. W myśl przyjętego na str. 519 sposobu wyrażania się, możemy zatem powiedzieć, że jeżeli $\delta q_1,\ldots,\delta q_k$ są „nieskończenie małe“ i spełniają równania (10), to ruch porównawczy jest zgodny z więzami.

Zasada Hamiltona dla współrzędnych naturalnych. Niech na układ n punktów materialnych $A_1(x_1,y_1,z_1),\ldots,A_n(x_n,y_n,z_n)$ o masach $m_1,\ldots,m_n$ działają siły $P_1,\ldots,P_n$ zależne od zmiennych $x_1,\ldots,z_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{z}_n,t$.

A więc:

$$P_{ix}=F_i(x_1,\ldots,z_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{z}_n,t), \quad P_{iy}=\Phi_i, \quad P_{iz}=\Psi_i. \tag{12}$$

Załóżmy, że układ jest holonomiczny (bez tarcia) i że więzy są obustronne. Weźmy pod uwagę dowolne funkcje:

$$x_l=x_l(t), \qquad y_l=y_l(t), \qquad z_l=z_l(t) \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1), \tag{13}$$

określające ruch układu zgodny z więzami.

Energia kinetyczna ruchu (13) wynosi

$$E=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}m_l(\dot{x}_l^2+\dot{y}_l^2+\dot{z}_l^2). \tag{14}$$

Utwórzmy wariację energii kinetycznej dla ruchu (13) (por. przykład 2, str. 516):

$$\delta E=\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i\delta\dot{x}_i+\dot{y}_i\delta\dot{y}_i+\dot{z}_i\delta\dot{z}_i). \tag{15}$$

Ale

$$\dot{x}_i\delta\dot{x}_i=\dot{x}_i\frac{d\,\delta x_i}{dt}=\frac{d(\dot{x}_i\delta x_i)}{dt}-\ddot{x}_i\delta x_i \tag{16}$$

i podobne wzory zachodzą dla $\dot{y}_i\delta\dot{y}_i$ oraz $\dot{z}_i\delta\dot{z}_i$. Podstawiając te wartości w (15), dostaniemy więc

$$\delta E=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i\delta x_i+\dot{y}_i\delta y_i+\dot{z}_i\delta z_i)-\sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i\delta x_i+\ddot{y}_i\delta y_i+\ddot{z}_i\delta z_i). \tag{17}$$

Przyjmijmy

$$\delta' L=\sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\delta x_i+P_{i_y}\delta y_i+P_{i_z}\delta z_i), \tag{18}$$

gdzie $P_{i_x}, P_{i_y}, P_{i_z}$ oznaczają funkcje (12), w których zamiast x_i, y_i, z_i i $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ podstawiono odpowiednio funkcje (13) i ich pochodne. Ze wzorów (17) i (18) otrzymamy

$$\begin{aligned}\delta' L+\delta E=&\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i\delta x_i+\dot{y}_i\delta y_i+\dot{z}_i\delta z_i)+\\ &+\sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i)].\end{aligned} \tag{19}$$

Całkując obustronnie od t_0 do t_1, otrzymamy stąd

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}[\delta' L+\delta E]dt=&\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i\delta x_i+\dot{y}_i\delta y_i+\dot{z}_i\delta z_i)\Big|_{t_0}^{t_1}+\\ &+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i]\,dt.\end{aligned} \tag{20}$$

Symbol $\Big|_{t_0}^{t_1}$ oznacza tu, jak zwykle, że należy podstawić za t najpierw t_1, a następnie t_0, i odjąć od siebie otrzymane wartości.

Dotychczas nie opieraliśmy się na zasadach mechaniki. Wzór (20) zachodzi więc dla dowolnego ruchu (zgodnego z więzami lub nie), określonego funkcjami (13), o ile tylko funkcje (12) są określone dla tego ruchu.

Załóżmy teraz, że ruch (13) jest ruchem rzeczywistym i że wariacje $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi.

Z zasady d'Alemberta wynika, że w każdej chwili t będzie wówczas

$$(21) \qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\delta y_i+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\delta z_i]=0.$$

Ze wzoru (20) otrzymamy

$$(22) \qquad \int_{t_0}^{t_1}(\delta' L+\delta E)\,dt=\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i\delta x_i+\dot{y}_i\delta y_i+\dot{z}_i\delta z_i)\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Załóżmy ponadto, że w ruchu (13) i w ruchu porównawczym układ zajmuje to samo położenie w chwilach t_0 i t_1; t. zn. że $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są zerami dla $t=t_0$ i $t=t_1$.

Przy tym założeniu prawa strona równości (22) staje się zerem i otrzymamy

$$(\mathrm{I}) \qquad \int_{t_0}^{t_1}(\delta' L+\delta E)\,dt=0.$$

A więc: *dla ruchu rzeczywistego zachodzi równość* (I), *jeżeli wariacje $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi i równają się zeru dla $t=t_0$ i $t=t_1$.*

Twierdzenie to nazywamy *zasadą Hamiltona.*

Zasada Hamiltona podaje więc pewną cechę ruchów rzeczywistych. Udowodnimy, że *cecha ta jest charakterystyczna*, t. zn. że spośród ruchów zgodnych z więzami tylko ruchy rzeczywiste spełniają zasadę Hamiltona. Wystarczy w tym celu dowieść, że ruch zgodny z więzami i spełniający zasadę Hamiltona spełnia również zasadę d'Alemberta.

Dowód. Załóżmy, że ruch zgodny z więzami, określony funkcjami (13), spełnia zasadę Hamiltona (I). Gdyby ruch ten nie spełniał zasady d'Alemberta w pewnej chwili t' (gdzie $t_0<t'<t_1$), to możnaby było znaleźć takie liczby $\overline{\delta x_i}, \overline{\delta y_i}, \overline{\delta z_i}$, określające w chwili t' przesunięcie przygotowane układu, że byłoby

$$(23) \qquad \sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x}-m_i\ddot{x}_i)\overline{\delta x_i}+(P_{i_y}-m_i\ddot{y}_i)\overline{\delta y_i}+(P_{i_z}-m_i\ddot{z}_i)\overline{\delta z_i}]\neq 0 \text{ dla } t=t'.$$

Obierzmy wariacje $\delta' x_i, \delta' y_i, \delta' z_i$ tak, żeby w każdej chwili t określały przesunięcie przygotowane układu i żeby w chwili t' było:

$$\delta' x_i = \overline{\delta x_i}, \qquad \delta' y_i = \overline{\delta y_i}, \qquad \delta' z_i = \overline{\delta z_i};$$

stąd na mocy (23)

$$(24) \qquad \sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \bar{x}) \delta' x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i) \delta' y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i) \delta' z_i] = A \neq 0$$

dla $t = t'$.

Przypuśćmy np., że $A > 0$ dla $t = t'$. Z ciągłości ruchu wynika, że w pewnym małym przedziale $\langle t', t'' \rangle$ jest także $A > 0$.

Zatem

$$(25) \qquad A > 0, \qquad \text{gdy} \qquad t' \leqslant t \leqslant t''.$$

Niech $\alpha(t)$ będzie dowolną funkcją ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$, dodatnią dla $t' < t < t''$, a poza tym równą 0. Połóżmy:

$$\delta x_i = \alpha(t) \delta' x_i, \qquad \delta y_i = \alpha(t) \delta' y_i, \qquad \delta z_i = \alpha(t) \delta' z_i.$$

Stąd na mocy (24) i (25)

$$(26) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} [(P_{i_x} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (P_{i_y} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (P_{i_z} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] dt = \int_{t_0}^{t_1} A \alpha(t) dt = \int_{t'}^{t''} A \alpha(t) dt > 0.$$

Ponieważ wariacje $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ przedstawiają w każdej chwili t przesunięcia przygotowane i z założenia są zerami dla $t = t_0$ i $t = t_1$, więc ze wzoru (20) otrzymujemy na mocy (26)

$$\int_{t_1}^{t_0} (\delta' L + \delta E) dt > 0,$$

wbrew założeniu, że ruch dany spełnia zasadę Hamiltona.

Udowodniliśmy w ten sposób, że *zasady d'Alemberta i Hamiltona są równoważne.*

Przykład. Punkt ciężki o masie m ma pozostawać na kuli $x^2+y^2+z^2-r^2=0$. Mamy (przyjmując oś z skierowaną pionowo w górę):

$$\delta' L=-mg\delta z, \qquad \delta E=m(\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y}+\dot{z}\delta\dot{z}),$$

zatem na mocy zasady Hamiltona (I), str. 522,

$$\int_{t_0}^{t_1}[-g\delta z+\dot{x}\delta\dot{x}+\dot{y}\delta\dot{y}+\dot{z}\delta\dot{z}]\,dt=0.$$

Wzór ten zachodzi dla ruchu rzeczywistego przy założeniu, że $\delta x, \delta y, \delta z$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi, t. zn. spełniającymi równanie

$$x\delta x+y\delta y+z\delta z=0,$$

a ponadto, że stają się zerem w chwilach $t=t_0$ i $t=t_1$.

Zasada Hamiltona dla współrzędnych uogólnionych. Niech współrzędne naturalne określone będą parametrami $q_1,\ldots,q_k$ przy pomocy funkcyj:

(27) $$x_i=f_i(q_1,\ldots,q_k,t),\ y_i=\varphi_i(q_1,\ldots,q_k,t),\ z_i=\psi_i(q_1,\ldots,q_k,t),\ i=1,2,\ldots,n.$$

Załóżmy, że parametry, określające położenia układu zgodne z więzami, spełniają równania

(28) $$\Phi_r(q_1,\ldots,q_k,t)=0 \qquad (r=1,2,\ldots,s)$$

i weźmy pod uwagę dowolny ruch rzeczywisty układu określony funkcjami:

(29) $$q_l=q_l(t) \qquad (i=1,2,\ldots,k).$$

Wariacje funkcyj (27) dla powyższego ruchu wynoszą

(30) $$\delta x_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k$$

i podobnie δy_i oraz δz_i.

Załóżmy dalej, że δq_i są w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi, t. zn. że spełniają równania (IV), str. 477:

(31) $$\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_1}\delta q_1+\ldots+\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_k}\delta q_k=0 \qquad (r=1,2,\ldots,s);$$

zatem $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są również przesunięciami przygotowanymi (str. 477).

Załóżmy wreszcie, że δq_l są zerami dla $t=t_0$ i $t=t_1$; z (30) wynika, że również $\delta x_l, \delta y_l, \delta z_l$ będą zerami dla $t=t_0$ i $t=t_1$. Ponieważ zaś wariacja jest przemienna z pochodną (str. 513), więc wariacje pierwszych pochodnych funkcyj (27), t. j. $\delta \dot{x}_l, \delta \dot{y}_l, \delta \dot{z}_l$, równe są pochodnym funkcyj $\delta x_l, \delta y_l, \delta z_l$.

Na mocy (15) i (18), str. 521, możemy zasadę Hamiltona (1), str. 522, napisać w postaci:

$$(32)\qquad \int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\delta x_i+P_{i_y}\delta y_i+P_{i_z}\delta z_i)+\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i\delta\dot{x}_i+\dot{y}_i\delta\dot{y}_i+\dot{z}_i\delta\dot{z}_i)\Big]dt=0,$$

gdzie x_l, y_l, z_l są funkcjami określającymi ruch rzeczywisty, $\delta x_l, \delta y_l, \delta z_l$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi, przyjmującymi wartość 0 w chwilach $t=t_0$ i $t=t_1$, zaś $\delta \dot{x}_l, \delta \dot{y}_l, \delta \dot{z}_l$ są pochodnymi funkcyj $\delta x_l, \delta y_l, \delta z_l$. Jak wynika z rozważań przykładu 3, str. 517, równanie (32) będzie również spełnione, jeżeli założymy, że funkcje x_l, y_l, z_l, dane wzorami (27) i (29), określają ruch rzeczywisty, zaś δx_l i $\delta \dot{x}_l$ są wariacjami funkcyj (27) i ich pochodnych, przyczem δq_l są przesunięciami przygotowanymi, równymi 0 dla $t=t_0$ i $t=t_1$.

Przy tych założeniach mamy ((4), str. 488)

$$(33)\qquad \delta' L=\sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\delta x_i+P_{i_y}\delta y_i+P_{i_z}\delta z_i)=\sum_{j=1}^{k}Q_j\delta q_j,$$

gdzie Q_j oznaczają składowe siły uogólnionej. Ponadto z twierdzenia o wariacji funkcji złożonej (str. 514) mamy

$$(34)\qquad \sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i\delta\dot{x}_i+\dot{y}_i\delta\dot{x}_i+\dot{z}_i\delta\dot{z}_i)=\delta\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)\Big)=\delta E,$$

gdzie funkcje x_l, y_l, z_l dane są wzorami (27) i (29), określającymi ruch rzeczywisty, $\delta x_i, \delta y_l, \delta z_i$ są wariacjami pochodnych funkcyj (27), zaś E energią kinetyczną, wyrażoną przy pomocy parametrów $q_1, \ldots, q_k$. Na mocy (32), (33) i (34) zasadę Hamiltona możemy więc napisać w postaci (I), str. 522, gdzie $\delta' L$ określone jest wzorem (33), zaś energia kinetyczna E wyrażona jest przy pomocy współrzędnych uogólnionych $q_1, \ldots, q_k$.

A więc: *Zasada Hamiltona zachodzi również dla współrzędnych uogólnionych przy założeniu, że δq_i są przesunięciami przygotowanymi, równymi 0 dla $t=t_0$ i $t=t_1$.*

Zasada Hamiltona w polu potencjalnym. Załóżmy, że siły posiadają potencjał V. Zatem ((1), str. 437)

$$\delta' L = \delta V. \tag{35}$$

Z zasady Hamiltona otrzymamy więc

$$\int_{t_0}^{t_1} [\delta V + \delta E]\, dt = 0 \qquad \text{czyli} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \delta(V+E)\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (V+E)\, dt = 0.$$

Wyrażenie $W = E + V$ nazwaliśmy potencjałem kinetycznym (str. 493). Zatem

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} W\, dt = 0. \tag{II}$$

A więc: *wariacja całki z potencjału kinetycznego jest równa zeru dla ruchu rzeczywistego, jeżeli wariacje $\delta x_l, \delta y_l, \delta z_l$ przedstawiają w każdej chwili przesunięcie przygotowane układu oraz są zerami w chwilach $t = t_0$ i $t = t_1$.*

Wzór (35) zachodzi dla współrzędnych uogólnionych (por. (39), str. 467). Ponieważ zasada Hamiltona również zachodzi dla współrzędnych uogólnionych, więc (II) jest spełnione dla ruchu rzeczywistego przy założeniu, że potencjał kinetyczny W wyrażony jest przy pomocy parametrów $q_1, \ldots, q_k$, zaś wariacja została utworzona dla ruchu rzeczywistego, przyczem δq_l są przesunięciami przygotowanymi, równymi zeru dla $t = t_0$ i $t = t_1$.

Układy holonomiczne skleronomiczne w polu potencjalnym. Niech dany będzie układ holonomiczny skleronomiczny, w którym siły posiadają potencjał

$$V = V(x_1, \ldots, z_n). \tag{36}$$

Załóżmy, że ruch układu określony funkcjami:

$$x_l = x_l(t), \quad y_l = y_l(t), \quad z_l = z_l(t) \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \quad i = 1, 2, \ldots, n) \tag{37}$$

jest ruchem rzeczywistym, dla którego energia kinetyczna w $\langle t_0, t_1 \rangle$ nie znika, t. zn.:

$$E \neq 0 \quad \text{dla} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{38}$$

Na mocy zasady Hamiltona (I), str. 522, i (35) mamy

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_l + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_l + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_l \right) + \sum_{i-1}^{n} m_i (\dot{x}_i \delta \dot{x}_i + \dot{y}_i \delta \dot{y}_i + \dot{z}_i \delta \dot{z}_l) \right] dt = 0, \tag{39}$$

gdzie $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi i równają się zeru w chwilach $t=t_0$ i $t=t_1$. Niech

$$t=\vartheta(\tau) \qquad (\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1) \tag{40}$$

będzie dowolną funkcją zmiennej τ, ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle \tau_0, \tau_1 \rangle$ i spełniającą warunki:

$$\vartheta(\tau_0)=t_0, \qquad \vartheta(\tau_1)=t_1, \qquad \vartheta'(\tau)>0 \qquad (\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1), \tag{41}$$

gdzie ϑ' oznacza pochodną względem τ. Podstawiając (40) w (37), otrzymamy:

$$x_i=x_i(\vartheta(\tau))=\xi_i(\tau), \quad y_i=\eta_i(\tau), \quad z_i=\zeta_i(\tau), \quad (\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1; i=1,2,\ldots,n). \tag{42}$$

Funkcje (42) przedstawiają parametrycznie tory punktów układu przy pomocy parametru τ.

Oznaczając przez x_i', y_i', z_i' pochodne funkcyj (42), zaś przez t' pochodną funkcji (40) względem parametru τ, otrzymamy:

$$\dot{x}_i=x_i'/t', \qquad \dot{y}_i=y_i'/t', \qquad \dot{z}_i=z_i'/t', \tag{43}$$

skąd dla energii kinetycznej

$$E=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)}{t'^2}. \tag{44}$$

Z zasady zachowania energii całkowitej mamy

$$E-V=h, \qquad \text{gdzie} \qquad h=\text{const.}, \tag{45}$$

skąd na mocy (44)

$$t'=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2)}{h+V}}. \tag{46}$$

Wzór (46) zachodzi, gdyż $h+V=E$ na mocy (45), zaś $E \neq 0$ na mocy (38).

Przyjmujemy, że współrzędne x_i, y_i, z_i występujące w V (por. wzór (36)) wyrażone są we wzorze (46) przez funkcje (42). Wariacje $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, które są funkcjami zmiennej t, możemy uważać na mocy (40) za funkcje zmiennej τ.

Oznaczając przez $\delta x_i', \delta y_i', \delta z_i'$ pochodne względem τ, otrzymamy:

$$\delta \dot{x}_i = \delta x_i'/t', \qquad \delta \dot{y}_i = \delta y_i'/t', \qquad \delta \dot{z}_i = \delta z_i'/t'. \tag{47}$$

Wyrażając w (39) zmienną t przez τ przy pomocy funkcji (40), dostaniemy na mocy (41), (43) i (47)

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\delta z_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\dot{x}_i \delta x_i' + \dot{y}_i \delta y_i' + \dot{z}_i \delta z_i')}{t'^2} \right] t' d\tau = 0, \tag{48}$$

gdzie x_i, y_i, z_i, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ są funkcjami zmiennej τ. Wzór (48) możemy napisać w postaci

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\delta V \cdot t' + \frac{1}{t'} \delta \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \right] d\tau = 0, \tag{49}$$

przyczem pojęcie wariacji należy rozumieć jak poprzednio, lecz zamiast t występuje obecnie τ. Podstawiając (46) w (49), otrzymamy

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\frac{\delta V}{\sqrt{h+V}} \sqrt{\tfrac{1}{2}\sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)} + \sqrt{h+V} \cdot \frac{\delta \sum \tfrac{1}{2} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)}{\sqrt{\sum \tfrac{1}{2} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)}} \right] d\tau = 0. \tag{50}$$

Łatwo stwierdzić, że wyrażenie pod całką równe jest wariacji $2\delta\left[\sqrt{h+V}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)}\right]$, skąd na mocy (50)

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\sqrt{h+V} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)} \right] d\tau = 0. \tag{I}$$

Z założeń co do $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ wynika, że wzór (I) zachodzi dla dowolnych funkcyj $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ parametru τ, które dla każdej wartości τ są przesunięciami przygotowanymi w położeniu układu, określonym funkcjami (42), i które są zerami dla $\tau = \tau_0$ oraz $\tau = \tau_1$. Wariacja utworzona jest dla funkcyj (42), określających tory punktów układu w ruchu rzeczywistym.

Ponieważ we wzorze (I) nie występuje czas t, więc wzór ten wyraża pewną własność torów ruchu rzeczywistego.

Niech w szczególności układ redukuje się do jednego punktu x, y, z o masie m, poruszającego się bez działania sił. Zatem $V = 0$. Z (I) otrzymamy

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\tau = 0.$$

Ponieważ element łuku jest $ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,d\tau$, więc

$$\delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} ds=0. \tag{51}$$

Przyjmijmy, że punkt ma pozostawać na powierzchni S. Krzywe o własności (51) są to t. zw. *linie geodetyczne*. W geometrii różniczkowej dowodzi się, że najkrótszą linią na powierzchni, łączącą dwa dostatecznie bliskie punkty linii geodetycznej, jest łuk tej linii. Z (51) wynika zatem, że *ruch punktu na powierzchni bez działania sił odbywa się zawsze po liniach geodetycznych*.

Uwaga. Wzór (I) wyprowadza się zwykle łatwiej z t. zw. *zasady Maupertuis* (str. 537). Trzeba się jednak oprzeć wówczas na pewnych twierdzeniach z rachunku wariacyjnego, o których nie zakładamy, że są czytelnikowi znane.

§ 8. Wariacja z wariacją czasu. Wariacja funkcji. Niech będzie dany ruch punktu po osi x, określony funkcją

$$x=x(t) \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1). \tag{1}$$

Weźmy pod uwagę dowolny ruch porównawczy

$$\bar{x}=\bar{x}(t) \qquad (t_0'\leqslant t\leqslant t_1'), \tag{2}$$

gdzie chwile t_0' i t_1' mogą być inne niż t_0 i t_1. Oznaczmy przez Δt dowolną funkcję czasu t, ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle t_0, t_1\rangle$ i spełniającą nierówność

$$t_0'\leqslant t+\Delta t\leqslant t_1' \qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1). \tag{3}$$

Niech wreszcie

$$\Delta x=\bar{x}(t+\Delta t)-x(t); \tag{I}$$

Δx jest więc funkcją czasu t i oznacza przyrost współrzędnej x, gdy od punktu A w ruchu danym w chwili t przechodzimy do punktu A' w ruchu porównawczym w chwili $t+\Delta t$. Tworząc pochodną (I), otrzymamy

$$\frac{d(\Delta x)}{dt}=[\dot{\bar{x}}(t+\Delta t)]\left(1+\frac{d(\Delta t)}{dt}\right)-\dot{x}(t),$$

skąd

$$\dot{\bar{x}}(t+\Delta t)=\left[\frac{d(\Delta x)}{dt}+\dot{x}(t)\right]\Big/\left(1+\frac{d(\Delta t)}{dt}\right).$$

Odejmując obustronnie $\dot{x}(t)$, dostaniemy stąd po łatwych przekształceniach

$$\dot{\bar{x}}(t+\Delta t)-\dot{x}(t)=\frac{d(\Delta x)}{dt}-\dot{x}(t)\frac{d(\Delta t)}{dt}+\varepsilon, \tag{4}$$

gdzie

$$\varepsilon=\eta\frac{d(\Delta t)}{dt}, \qquad \eta=-\left(\frac{d(\Delta x)}{dt}-\dot{x}(t)\frac{d(\Delta t)}{dt}\right)\Big/\left(1+\frac{d(\Delta t)}{dt}\right). \tag{5}$$

Jeżeli więc Δx, Δt i ich pochodne dążą do 0 jednostajnie, to η dąży do 0 jednostajnie. Zatem R jest „nieskończenie małą“ w porównaniu z $|d(\Delta x)/dt|+|d(\Delta t)/dt|$.

Niech

$$\Delta\dot{x}=\frac{d(\Delta x)}{dt}-\dot{x}\frac{d(\Delta t)}{dt}. \tag{II}$$

Na mocy więc (4)

$$\dot{\bar{x}}(t+\Delta t)-\dot{x}(t)=\Delta\dot{x}+\varepsilon. \tag{6}$$

Lewa strona równości (6) oznacza przyrost prędkości punktów A i A', t. j. przyrost prędkości, gdy od punktu A w chwili t w ruchu danym przechodzimy do punktu A' w chwili $t+\Delta t$ w ruchu porównawczym. Zatem $\Delta\dot{x}$ przedstawia nam ten przyrost w przybliżeniu, z różnicą „nieskończenie małą“ w porównaniu z sumą $|d(\Delta x)/dt|+|d(\Delta t)/dt|$.

Zauważmy, że na mocy (6) jest na ogół

$$\Delta\dot{x}\neq\frac{d(\Delta x)}{dt}. \tag{II'}$$

Niech będzie dana funkcja

$$T=F(x,\dot{x},t). \tag{7}$$

Oznaczmy przez T wartość funkcji (7) w ruchu danym w chwili t, zaś przez $\bar{T}$ wartość tej funkcji w ruchu porównawczym w chwili $t+\Delta t$. Zatem różnica tych wartości wynosi

$$\bar{T}-T=F\big(\bar{x}(t+\Delta t),\dot{\bar{x}}(t+\Delta t),t+\Delta t\big)-F\big(x(t),\dot{x}(t),t\big). \tag{8}$$

Ze wzoru Tylora otrzymamy

$$\bar{T}-T=\frac{\partial T}{\partial x}\big(\bar{x}(t+\Delta t)-x(t)\big)+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\big(\dot{\bar{x}}(t+\Delta t)-\dot{x}(t)\big)+\frac{\partial T}{\partial t}\Delta t+R, \tag{9}$$

gdzie reszta R jest „nieskończenie małą“ wyższego rzędu, niż przyrosty $\bar{x}(t+\Delta t)-x(t)$, $\dot{\bar{x}}(t+\Delta t)-\dot{x}(t)$ i Δt.

Na mocy (I), (6) i (9) otrzymamy

$$\bar{T}-T=\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\Delta \dot{x}+\frac{\partial T}{\partial t}\Delta t+R', \tag{10}$$

gdzie $R'=R+\varepsilon\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}$, a więc gdzie R' jest „nieskończenie małe“ w porównaniu z

$$|\Delta x|+|\Delta t|+|d(\Delta x)/dt|+|d(\Delta t)/dt|. \tag{11}$$

Połóżmy

$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\Delta \dot{x}+\frac{\partial T}{\partial t}\Delta t. \tag{III}$$

Na mocy (10) mamy $\bar{T}-T=\Delta T+R'$; zatem ΔT oznacza w przybliżeniu przyrost funkcji T, gdy od punktu A w chwili t w ruchu danym przechodzimy do punktu A' w chwili $t+\Delta t$ w ruchu porównawczym, przyczem popełniony błąd jest „nieskończenie mały“ w porównaniu z (11).

Wyrażenie ΔT nazywamy *wariacją wraz z wariacją czasu* funkcji T dla ruchu $x=x(t)$, zaś funkcję Δt nazywamy *wariacją czasu*.

Dla $\Delta t=0$ będziemy mieli na mocy (I) i (5), str. 510, $\Delta x=\delta x$, a na mocy (II) i (I), str. 511, $\Delta \dot{x}=\delta \dot{x}$. Z (III) dostaniemy więc

$$\Delta T=\frac{\partial T}{\partial x}\delta x+\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}$$

czyli $\Delta T=\delta T$.

W przypadku więc, gdy $\Delta t=0$, wariacja wraz z wariacją czasu przechodzi w wariację zwykłą.

Przykład. Utworzyć wariację wraz z wariacją czasu dla funkcji

$$T=\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2+\alpha x t,$$

gdzie α i m są stałymi.

Mamy

$$\Delta T=\alpha t\Delta x+m\dot{x}\Delta \dot{x}+\alpha x\Delta t,$$

na mocy więc (II)

$$\Delta T=\alpha t\Delta x+m\dot{x}\frac{d\Delta x}{dt}+\alpha x\Delta t-m\dot{x}^2\frac{d(\Delta t)}{dt}.$$

Układy punktów. Niech ruch układu n punktów materialnych określony będzie funkcjami:

$$(12)\qquad x_i=x_i(t),\qquad y_i=y_i(t),\qquad z_i=z_i(t),\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1;\ i=1,2,\ldots,n)$$

i niech dana będzie funkcja

$$(13)\qquad T=F(x_1,\ldots,z_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{z}_n,t).$$

Weźmy pod uwagę dowolny ruch porównawczy

$$(14)\qquad \bar{x}_i=\bar{x}_i(t),\qquad \bar{y}_i=\bar{y}_i(t),\qquad \bar{z}_i=\bar{z}_i(t),\qquad (t'_0\leqslant t\leqslant t'_1;\ i=1,2,\ldots,n).$$

Niech Δt będzie dowolną funkcją czasu t, ciągłą wraz z pierwszą i drugą pochodną w przedziale $\langle t_0,t_1\rangle$ i spełniającą warunek

$$(15)\qquad t'_0\leqslant t+\Delta t\leqslant t'_1\qquad (t_0\leqslant t\leqslant t_1).$$

Położmy:

$$(IV)\qquad \Delta x_i=\bar{x}_i(t+\Delta t)-x_i(t),\quad \Delta y_i=\bar{y}_i(t+\Delta t)-y_i(t),\quad \Delta z_i=\bar{z}_i(t+\Delta t)-z_i(t),$$

$$(V)\qquad \Delta\dot{x}_i=\frac{d(\Delta x_i)}{dt}-\dot{x}_i\frac{d(\Delta t)}{dt},\quad \Delta\dot{y}_i=\frac{d(\Delta y_i)}{dt}-\dot{y}_i\frac{d(\Delta t)}{dt},\quad \Delta\dot{z}_i=\frac{d(\Delta z_i)}{dt}-\dot{z}_i\frac{d(\Delta t)}{dt}.$$

Wyrażenia $\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i$ oznaczają przyrosty współrzędnych, zaś $\Delta\dot{x}_i,\Delta\dot{y}_i,\Delta\dot{z}_i$ przybliżone przyrosty pochodnych tych współrzędnych, gdy od położenia układu w chwili t w ruchu danym przechodzimy do położenia układu w chwili $t+\Delta t$ w ruchu porównawczym. Przy tym przybliżeniu błąd jest „nieskończenie mały" w porównaniu z

$$(16)\qquad \left|\frac{d(\Delta x_1)}{dt}\right|+\left|\frac{d(\Delta y_1)}{dt}\right|+\ldots+\left|\frac{d(\Delta z_n)}{dt}\right|+\left|\frac{d(\Delta t)}{dt}\right|.$$

Oznaczmy przez T wartość funkcji (13) w ruchu danym w chwili t, a przez $\bar{T}$ jej wartość w chwili $t+\Delta t$ w ruchu porównawczym. Kładąc

$$(VI)\qquad \Delta T=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\Delta x_i+\frac{\partial T}{\partial y_i}\Delta y_i+\frac{\partial T}{\partial z_i}\Delta z_i+\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}\Delta\dot{x}_i+\frac{\partial T}{\partial\dot{y}_i}\Delta\dot{y}_i+\frac{\partial T}{\partial\dot{z}_i}\Delta\dot{z}_i\right)+\frac{\partial T}{\partial t}\Delta t$$

i postępując jak poprzednio, otrzymamy

$$(17)\qquad \bar{T}-T=\Delta T+R,$$

gdzie R jest „nieskończenie małą" w porównaniu z sumą

$$(18)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left(|\Delta x_i|+|\Delta y_i|+|\Delta z_i|+\left|\frac{d(\Delta x_i)}{dt}\right|+\left|\frac{d(\Delta y_i)}{dt}\right|+\left|\frac{d(\Delta z_i)}{dt}\right|\right)+|\Delta t|+\left|\frac{d(\Delta t)}{dt}\right|.$$

Wyrażenie ΔT nazywamy *wariacją wraz z wariacją czasu* funkcji T dla ruchu (12) układu punktów.

Wariacja ΔT przedstawia zatem w przybliżeniu przyrost funkcji T, gdy od położenia układu w chwili t w ruchu danym przechodzimy do położenia układu w chwili $t+\Delta t$ w ruchu porównawczym, przyczem różnica między przyrostem prawdziwym a ΔT jest „nieskończenie mała“ w porównaniu z (18).

Dla $\Delta t=0$ jest na mocy (IV), (V), (5), str. 510, i (I), str. 511:

$$\Delta x_i=\delta x_i, \quad \Delta y_i=\delta y_i, \quad \Delta z_i=\delta z_i, \quad \Delta \dot{x}_i=\delta \dot{x}_i, \quad \Delta \dot{y}_i=\delta \dot{y}_i, \quad \Delta \dot{z}_i=\delta \dot{z}_i,$$

skąd na mocy (VI) $\Delta T=\delta T$.

W przypadku więc, gdy $\Delta t=0$, wariacja wraz z wariacją czasu przechodzi w wariację zwykłą.

Wariacja wraz z wariacją czasu całki. Niech dana będzie całka

$$I=\int_{t_0}^{t_1} T\,dt, \tag{19}$$

gdzie T oznacza funkcję (13). Oznaczmy przez Δt_0 i Δt_1 wartości funkcji Δt w chwilach t_0 i t_1.

Niech I będzie wartością całki (19) dla ruchu danego, zaś $\bar{I}$ wartością tejże całki dla ruchu porównawczego, wziętej w granicach od $t_0+\Delta t_0$ do $t_1+\Delta t_1$, t.j.

$$\bar{I}=\int_{t_0+\Delta t_0}^{t_1+\Delta t_1} T_1\,dt, \tag{20}$$

gdzie T_1 oznacza wartość funkcji T w chwili t w ruchu porównawczym. Podstawiając w (20) $t+\Delta t$ zamiast t, otrzymamy

$$\bar{I}=\int_{t_0}^{t_1} \bar{T}\left(1+\frac{d(\Delta t)}{dt}\right)dt, \tag{21}$$

gdzie $\bar{T}$ oznacza wartość funkcji T w chwili $t+\Delta t$ w ruchu porównawczym.

Na mocy (19) i (21) otrzymamy

$$\bar{I}-I=\int_{t_0}^{t_1}\left[(\bar{T}-T)+\bar{T}\frac{d(\Delta t)}{dt}\right]dt;$$

skąd na mocy (17) po łatwych przekształceniach

$$\bar{I} - I = \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta T + T \frac{d(\Delta t)}{dt} \right] dt + R', \tag{22}$$

gdzie

$$R' = \int_{t_0}^{t_1} \left[(\Delta T + R) \frac{d(\Delta t)}{dt} + R \right] dt. \tag{23}$$

Łatwo stwierdzić, że R' jest „nieskończenie małe“ w porównaniu z (18). Połóżmy

$$\Delta I = \Delta \int_{t_0}^{t_1} T\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta T + T \frac{d(\Delta t)}{dt} \right] dt. \tag{VII}$$

Wyrażenie ΔI nazywamy *wariacją wraz z wariacją czasu całki* I.

Na mocy (22) i (VII) mamy

$$\bar{I} - I = \Delta I + R', \tag{24}$$

ΔI przedstawia więc w przybliżeniu przyrost całki (19), gdy od danego ruchu przechodzimy do ruchu porównawczego, przyczem w ruchu porównawczym obliczamy całkę w granicach $t_0 + \Delta t_0$, $t_1 + \Delta t_1$. Różnica między ΔI a przyrostem prawdziwym jest „nieskończenie mała“ w porównaniu z (18).

W przypadku, gdy $\Delta t = 0$, wariacja wraz z wariacją czasu przechodzi — jak łatwo zauważyć — w wariację zwykłą.

§ 4. Zasada Maupertuis (najmniejszego działania). Przekształcenie Höldera. Niech układ punktów materialnych $A_1(x_1, y_1, z_1)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$ o masach m_1, ..., m_n poddany będzie działaniu sił $\bar{P}_1$, ..., $\bar{P}_n$, zależnych od x_1, ..., z_n, $\dot{x}_1$, ..., $\dot{z}_n$, t. A więc:

$$P_{ix} = F_i(x_1, \ldots, z_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{z}_n, t), \qquad P_{iy} = \Phi_i, \qquad P_{iz} = \Psi_i. \tag{1}$$

Załóżmy, że układ jest holonomiczny bez tarcia i że więzy są obustronne.

Weźmy pod uwagę dowolny ruch układu zgodny z więzami lub nie, określony funkcjami:

$$x_l = x_l(t), \quad y_l = y_l(t), \quad z_l = z_l(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1;\ i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Energia kinetyczna wynosi

$$E = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} m_l (\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2 + \dot{z}_l^2). \tag{3}$$

Utwórzmy wariację energii kinetycznej wraz z wariacją czasu dla ruchu (2):

$$\Delta E = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i \Delta\dot{x}_i + \dot{y}_i \Delta\dot{y}_i + \dot{z}_i \Delta\dot{z}_i). \tag{4}$$

Wyrażając $\Delta\dot{x}_i, \Delta\dot{y}_i, \Delta\dot{z}_i$ przy pomocy wzorów (V), str. 532, dostaniemy

$$\Delta E = \sum_{i=1}^{n} m_i\left[\dot{x}_i \frac{d(\Delta x_i)}{dt} + \dot{y}_i \frac{d(\Delta y_i)}{dt} + \dot{z}_i \frac{d(\Delta z_i)}{dt}\right] - 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}. \tag{5}$$

Przenosząc ostatni wyraz z prawej strony na lewą i całkując, otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta E + 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n} m_i\left[\dot{x}_i\frac{d(\Delta x_i)}{dt} + \dot{y}_i\frac{d(\Delta y_i)}{dt} + \dot{z}_i\frac{d(\Delta z_i)}{dt}\right]dt. \tag{6}$$

Całkując przez części, otrzymamy $\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_i \frac{d(\Delta x_i)}{dt} = \dot{x}_i \Delta x_i\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}_i \Delta x_i\, dt$

i podobne wzory otrzymamy dla y_i i z_i. Stosując je do prawej strony równania (6), otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta E + 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right]dt = \tag{7}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i \Delta x_i + \dot{y}_i \Delta y_i + \dot{z}_i \Delta z_i)\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i(\ddot{x}_i \Delta x_i + \ddot{y}_i \Delta y_i + \ddot{z}_i \Delta z_i)\right]dt.$$

Położmy

$$\Delta' L = \sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\Delta x_i + P_{i_y}\Delta y_i + P_{i_z}\Delta z_i). \tag{8}$$

Całkując wzór (8) i dodając do obu stron równania (7), dostaniemy

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta' L + \Delta E + 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right]dt = \sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i \Delta x_i + \dot{y}_i \Delta y_i + \dot{z}_i \Delta z_i)\Big|_{t_0}^{t_1} + \tag{I}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1}\sum_{i=1}^{n}[(P_{i_x} - m_i\ddot{x}_i)\Delta x_i + (P_{i_y} - m_i\ddot{y}_i)\Delta y_i + (P_{i_z} - m_i\ddot{z}_i)\Delta z_i]\,dt.$$

Wzór (I) nosi nazwę *przekształcenia Höldera.*

Zachodzi on dla każdego ruchu zgodnego z więzami lub nie (o ile tylko funkcje (1) są dla tego ruchu określone).

Jeżeli zamiast wariacji Δ wraz z wariacją czasu przyjmiemy wariację zwykłą δ, t.zn. jeżeli położymy $\Delta t=0$, to — jak łatwo widzieć — otrzymamy wzór (20), str. 521.

Postać ogólniejsza zasady Hamiltona. Załóżmy, że funkcje (2) określają ruch rzeczywisty. Załóżmy ponadto, że funkcje $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ są w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi układu.

Na mocy zasady d'Alemberta wyrażenie pod całką po prawej stronie równości (I) jest zerem. Zatem

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta' L+\Delta E+2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right]dt=\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i\Delta x_i+\dot{y}_i\Delta y_i+\dot{z}_i\Delta z_i)\Bigg|_{t_0}^{t_1}.$$

Załóżmy, że $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ są zerami dla $t=t_0$ i $t=t_1$. Prawa strona ostatniej równości będzie więc zerem. Otrzymamy zatem

$$\text{(II)}\qquad \int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta' L+\Delta E+2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right]dt=0.$$

Równanie (II) *zachodzi dla ruchu rzeczywistego przy założeniu, że* $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ *są w każdej chwili* t *przesunięciami przygotowanymi i równają się* 0 *dla* $t=t_0$ *i* $t=t_1$, *zaś* Δt *jest dowolne.*

W przypadku, gdy $\Delta t=0$, wariacja Δ zamieni się na wariację δ. Łatwo zauważyć, że (II) przyjmie wówczas postać zasady Hamiltona (I), str. 522. Postać (II) zasady wariacyjnej jest zatem od niej ogólniejsza. Nie przedstawia ona jednak ogólniejszej własności. Na mocy bowiem (5) i (8) możemy napisać (II) w postaci

$$\text{(9)}\qquad \int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{i=1}^{n}(P_{i_x}\Delta x_i+P_{i_y}\Delta y_i+P_{i_z}\Delta z_i)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i\frac{d(\Delta x_i)}{dt}+\dot{y}_i\frac{d(\Delta y_i)}{dt}+\dot{z}_i\frac{d(\Delta z_i)}{dt}\right)\right]dt=0.$$

Ponieważ $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ są to funkcje dowolne, przedstawiające przesunięcia przygotowane i znikające dla $t=t_0$ i $t=t_1$, zaś Δt wcale we wzorze (9) nie występuje, więc pisząc $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ zamiast $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$, otrzymamy z (9) zasadę Hamiltona.

Równanie (II) jest więc zasadzie Hamiltona równoważne.

Zasada Maupertuis. Równanie (II) zachodzi dla dowolnego Δt, zaś $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ mają jedynie być w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi, znikającymi dla $t=t_0$ i $t=t_1$.

Załóżmy teraz, że $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ i Δt są tak dobrane, aby spełniony był ponadto warunek

(III) $$\Delta' L = \Delta E.$$

Na mocy (5) i (8) warunek (III) możemy napisać w postaci

(10) $$\sum_{i=1}^{n} (P_{i_x} \Delta x_i + P_{i_y} \Delta y_i + P_{i_z} \Delta z_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\dot{x}_i \frac{d(\Delta x_i)}{dt} + \dot{y}_i \frac{d(\Delta y_i)}{dt} + \dot{z}_i \frac{d(\Delta z_i)}{dt} \right) - 2E \frac{d(\Delta t)}{dt}.$$

Z (II) i (III) otrzymamy

(11) $$\int_{t_0}^{t_1} \left[2\Delta E + 2E \frac{d(\Delta t)}{dt} \right] = 0,$$

skąd na mocy wzoru (VII), str. 534,

(IV) $$\Delta \int_{t_0}^{t_1} E \, dt = 0.$$

A więc: *wariacja wraz z wariacją czasu całki z energii kinetycznej jest dla ruchu rzeczywistego zerem, jeżeli $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi, równymi 0 dla $t=t_0$ i $t=t_1$, i jeżeli zachodzi warunek* (III) (t. zn. jeżeli praca przygotowana na przesunięciu $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ równa jest wariacji wraz z wariacją czasu energii kinetycznej).

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady Maupertuis* lub *zasady najmniejszego działania*.

Oznaczając przez ds_i element łuku, po którym porusza się punkt m_i, a przez v_i prędkość punktu, mamy $ds_i = v_i \, dt$. Zatem

$$\int_{t_0}^{t_1} E \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \right) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \, ds_i.$$

Wyrażenie $m_i v_i$ jest *pędem („działaniem")*.

Opierając się na (IV), można dowieść, że przy pewnych założeniach całka z energii kinetycznej ma dla ruchu rzeczywistego najmniejszą wartość pośród ruchów spełniających pewne warunki. Stąd nazwa *zasady najmniejszego działania*.

Załóżmy, że pewien ruch zgodny z więzami spełnia zasadę Maupertuis, i ponadto, że energia kinetyczna nie znika w $\langle t_0, t_1\rangle$:

$$E \neq 0 \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{12}$$

Niech funkcje $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ będą w każdej chwili t przesunięciami przygotowanymi, równymi 0 dla $t=t_0$ i $t=t_1$ a poza tym funkcjami dowolnymi. Obierzmy Δt tak, by zachodziła równość (III), lub — co na jedno wychodzi — równanie (10). Możemy więc na mocy (12) i (10) przyjąć

$$\Delta t = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2E}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{x}_i \frac{d(\Delta x_i)}{dt} + \dot{y}_i \frac{d(\Delta y_i)}{dt} + \dot{z}_i \frac{d(\Delta z_i)}{dt}\right) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x}\Delta x_i + P_{i_y}\Delta y_i + P_{i_z}\Delta z_i)\right] dt. \tag{13}$$

Dla tak dobranych $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i, \Delta t$ zachodzi wzór (IV), zatem i (11). Na mocy (III) i (11)

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[2\Delta E + 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right]dt = \int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta' L + \left(\Delta' L + 2E\frac{d(\Delta t)}{dt}\right)\right]dt = 0,$$

skąd na mocy (10) otrzymamy wzór (9), w którym $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ spełniają te same warunki co $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ w zasadzie Hamiltona. Ponieważ, jak udowodniliśmy (str. 536), (9) jest równoważne zasadzie Hamiltona, więc dany ruch jest ruchem rzeczywistym. Widzimy zatem, że spośród ruchów zgodnych z więzami, dla których $E \neq 0$, tylko ruchy rzeczywiste spełniają zasadę Maupertuis.

A więc: *zasada Maupertuis przedstawia własność charakterystyczną tych ruchów rzeczywistych, dla których* $E \neq 0$.

Załóżmy, że ruch odbywa się w polu potencjalnym o potencjale V. Zatem:

$$\partial V/\partial x_i = P_{i_x}, \qquad \partial V/\partial y_i = P_{i_y}, \qquad \partial V/\partial z_i = P_{i_z},$$

$$\Delta' L = \sum_{i=1}^{n} (P_{i_x}\Delta x_i + P_{i_y}\Delta y_i + P_{i_z}\Delta z_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\Delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\Delta z_i\right).$$

Ponieważ V jest funkcją tylko współrzędnych x_i, y_i, z_i, więc $\Delta' L = \Delta V$, a zatem możemy warunek (III) napisać w postaci $\Delta V = \Delta E$ czyli

$$\Delta(E - V) = 0. \tag{III'}$$

Uwaga 1. Założenie $E \neq 0$ jest istotne, t. zn. że jeżeli ruch zgodny z więzami spełnia zasadę Maupertuis, a warunek $E \neq 0$ nie jest spełniony, to ruch może nie być ruchem rzeczywistym.

Niech np. dany będzie jakiś układ skleronomiczny. Weźmy pod uwagę ruch, w którym od chwili t_0 do chwili t_1 układ jest w spoczynku w pewnym położeniu zgodnym z więzami. Mamy zatem stale $E=0$, skąd na mocy (4) również stale $\Delta E=0$. Wynika stąd, że wzór (11), a zatem i wzór (IV), będzie spełniony dla dowolnych $\Delta x_l, \Delta y_l, \Delta z_l, \Delta t$, w szczególności więc również dla tych, które spełniają wzór (III), lub — co na jedno wychodzi — wzór (10). Dany ruch spełnia przeto zasadę Maupertuis. Jest jednak oczywistym, że przy odpowiednim doborze sił, spoczynek nie jest możliwy, t. zn. że spoczynek nie jest ruchem rzeczywistym.

Uwaga 2. Gdybyśmy wariację wraz z wariacją czasu zastąpili w zasadzie Maupertuis przez wariację zwykłą, t. zn. przyjęli $\Delta t=0$, pisząc δ zamiast Δ, to wzory (III) i (IV) przybrałyby postać:

$$\delta' L = \delta E, \tag{14}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E\,dt = 0 \quad \text{czyli} \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta E\,dt = 0. \tag{15}$$

A więc: dla ruchu rzeczywistego zachodzi wzór (15) przy założeniu że $\delta x_l, \delta y_l, \delta z_l$ są w każdej chwili przesunięciami przygotowanymi, równymi 0 dla $t=t_0$ i $t=t_1$ i spełniającymi warunek (14).

Tak wypowiedziana zasada nie przedstawiałaby jednak cechy charakterystycznej ruchów rzeczywistych. Zakładając bowiem np., że na układ nie działają żadne siły, mielibyśmy $\delta' L=0$. Zatem warunek (14) przyjąłby postać $\delta E=0$ i pociągałby przeto wzór (15) dla każdego ruchu zgodnego z więzami. W tym więc przypadku każdy ruch zgodny z więzami, a nie tylko ruch rzeczywisty, spełniałby wzór (15) czyli zasadę Maupertuis, w której wariację Δ zastąpiono wariacją zwykłą δ.

Widzimy stąd, że istotnym w zasadzie Maupertuis jest również i to, że wariację tworzymy wraz z wariacją czasu.

Uwaga 3. Dla ruchu podanego we współrzędnych uogólnionych można udowodnić, że *w układach holonomicznych skleronomicznych zachodzi zasada Maupertuis w postaci* (IV) *przy założeniu, że energia E wyrażona jest również we współrzędnych uogólnionych, a wariacje* Δq_j

są przesunięciami przygotowanymi, równymi 0 *dla* $t = t_0$ *i* $t = t_1$ *i spełniającymi warunek* (III), *w którym* $\Delta' L = \Sigma Q_j \Delta q_j$ (t. j. wyrażony przy pomocy sił uogólnionych Q_j).

Dla układów reonomicznych i współrzędnych uogólnionych wzór (IV) nie zachodzi i zasadę Maupertuis podaje się dla nich w innej postaci.

W KRAKOWIE

DODATEK

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE RZĘDU DRUGIEGO O WSPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH

Tak nazywamy równania kształtu

$$y''+ay'+by=\varphi(x), \tag{I}$$

gdzie a,b są danymi liczbami rzeczywistymi, $\varphi(x)$ funkcją znaną; szukaną zaś jest funkcja $y=f(x)$, spełniająca (I).

Równanie (I), w którym funkcja $\varphi(x)$ jest zerem, nazywamy *równaniem jednorodnym*.

Równanie jednorodne ma więc postać

$$y''+ay'+by=0. \tag{II}$$

Aby rozwiązać równanie jednorodne (II), przyjmujemy

$$y=e^{rx}, \tag{1}$$

gdzie r jest liczbą tak dobraną, aby równanie (II) było spełnione.

Różniczkując (1), otrzymamy:

$$y'=re^{rx}, \qquad y''=r^2e^{rx}. \tag{2}$$

Podstawiając (1) i (2) w (II) otrzymamy

$$r^2e^{rx}+are^{rx}+be^{rx}=0,$$

skąd po podzieleniu przez e^{rx}

$$r^2+ar+b=0. \tag{III}$$

Równanie (III) nazywamy *równaniem charakterystycznym* dla (II).

Postać rozwiązania równania jednorodnego (II) zależy od tego, czy pierwiastki r_1, r_2 równania charakterystycznego (III) są rzeczywiste (równe lub różne), czy zespolone. Rozpatrzmy więc 3 przypadki:

1° **Pierwiastki r_1, r_2 są rzeczywiste i różne.** Najogólniejszym rozwiązaniem równania (II) jest wówczas

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \tag{3}$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi liczbami stałymi.

2° **Pierwiastki r_1, r_2 są rzeczywiste i równe.** Najogólniejszym rozwiązaniem równania (II) jest wtedy

$$y = (c_1 x + c_2) e^{r_1 x}, \tag{4}$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi stałymi.

3° **Pierwiastki r_1, r_2 są zespolone.** Ponieważ równanie (III) ma współczynniki a, b rzeczywiste, więc r_1, r_2 są liczbami sprzężonymi. Przyjmijmy:

$$r_1 = \alpha + \beta i, \qquad r_2 = \alpha - \beta i.$$

Najogólniejszym rozwiązaniem (II) jest w tym przypadku

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x), \tag{5}$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi stałymi.

Aby znaleźć rozwiązanie ogólne równania (I), staramy się znaleźć najpierw jakieś jedno szczególne rozwiązanie tego równania. Jeżeli nam się to uda i $y = \varphi(x)$ jest tym szczególnym rozwiązaniem, to rozwiązujemy następnie równanie jednorodne (II). Najogólniejsze rozwiązanie równania (I) otrzymujemy, dodając rozwiązanie szczególne $\varphi(x)$ do rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (II).

Przykład 1. Rozwiązać równania:

(a) $y'' - 3y' + 2y = 0$; (b) $y'' + 2y' + y = 0$; (c) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Równaniami charakterystycznymi są:

(a) $r^2 - 3r + 2 = 0$; (b) $r^2 + 2r + 1 = 0$; (c) $r^2 - 2r + 5 = 0$.

Pierwiastki powyższych równań wynoszą:

(a) $r_1 = 1$, $r_2 = 2$; (b) $r_1 = r_2 = -1$, (c) $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$.

Najogólniejsze rozwiązania mają więc postać:

(a) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$; (b) $y = (c_1 x + c_2) e^{-x}$; (c) $y = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

Przykład 2. Rozwiązać równanie

$$y''-3y'+2y=4x^2. \tag{d}$$

Staramy się znaleźć rozwiązanie postaci

$$y=ax^2+bx+c. \tag{6}$$

Aby wyznaczyć a,b i c, podstawiamy (6) do (d). Dostaniemy po utworzeniu pochodnych:

$$2a-3(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=4x^2,$$

skąd

$$2ax^2+(-6a+2b)x+(2a-3b+2c)=4x^2.$$

Porównując współczynniki, otrzymamy:

$$2a=4, \qquad -6a+2b=0, \qquad 2a-3b+2c=0,$$

zatem:

$$a=2, \qquad b=6, \qquad c=7.$$

Na mocy więc (6) rozwiązaniem szczególnym równania (d) jest

$$y=2x^2+6x+7. \tag{7}$$

Równanie jednorodne $y''-3y'+2y=0$ ma rozwiązanie ogólne

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x} \tag{8}$$

(przykład 1(a)). Najogólniejszym rowziązaniem równania (d) jest więc na mocy (7) i (8)

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}+2x^2+6x+7,$$

gdzie c_1, c_2 są dowolnymi stałymi.

SKOROWIDZ NAZW

Liczby oznaczają stronice.

Absolutny p. *Bezwzględny.*
Akcji i reakcji prawo 74.
Alembert p. *D'Alembert.*
Amplituda 112.
Anholonomiczny układ 472.
Anomalia mimośrodowa 92, prawdziwa 92, średnia 93.
Atwooda maszyna 197, 376, (495).

Bineta wzór 88.
Bezwzględna prędkość 56, siła 137, wartość siły 71, — wektora 1, *-e* przyśpieszenie 59, *-y* czas 70, ruch 33, 70.
Bezwładności elipsoida 166, moment 159, osie 166, prawo 73, ramię 160, siła 74.
Biegun wieloboku sił 254.
Brzeżne położenie układu 422.

Całkowita energia 107, 220, masa 154, praca 211.
Cardana zawieszenie 414.
Centralny p. *Środkowy.*
Centymetr 75.
C g s układ 75.
Charakterystyczne równanie 541.
Chasle'a twierdzenie 318.
Chropowata powierzchnia 368.
Chwila początkowa 32, 80, zwrotu 116.
Chwilowa prędkość ruchu postępowego 325,—kątowa 325, *-y* ruch 325,— obrotowy (około punktu) 332,— postępowy 325, — płaski 326, — przestrzenny 334, — śrubowy czyli skręt 335.
Ciało gładkie 263, jednorodne 170, niesswobodne 261, płasko prowadzone 276, (315), swobodne 235, sztywne 235.
Ciągłość funkcji wektorowej 14.
Ciążenia czyli grawitacji prawo 90, stała 90, pole Newtonowskie 103.
Ciężar czyli siła ciężkości 75, (81), — ciała 244.
Ciśnienie 263.
Coriolisa przyśpieszenie 61, siła 137.
Culmanna metoda 304.
Cremony plan sił 302, odwrotny 303.
Cykliczna współrzędna 494.
Cykloida 44.
Czas 32, bezwzględny 70.

D'Alemberta zasada 74, (192, 365, 479).
Decymalna p. *Dziesiętna.*
Dewiacja p. *Zboczenie.*
Diagram p. *Wykres.*
Dirichleta twierdzenie 121.
Długość wektora 1, wahadła zredukowana 378.
Doskonale chropowata powierzchnia 368.
Drgający czyli harmoniczny ruch płaski 114, prosty 112, tłumiony 115, wymuszony 118.
Dwustronne p. *Obustronne.*
Dyna 75.
Dynamiczny sposób mierzenia sił 76, współczynnik tarcia 368.
Dynamometr 76.
Działające siły 261, 438.
Działania na siłach 72, najmniejszego zasada 537.
Dzielenie wektora przez liczbę 5.
Dziesiętna waga 297.
Dźwignia 278.

Elementarne przekształcenia 29.
Elipsoida bezwładności 166, — środkowa 166.
Energia całkowita punktu 107, — układu 220, kinetyczna punktu 106, — układu 218, — ciała 364, potencjalna punktu 106, — układu 220.
Eulera kąty 355, równania 399, twierdzenie I 314, II 316.

Fizyczne jednostki *c g s* 75, wahadło 377.
Foucaulta giroskop 414, wahadło 150.
Funkcja Hamiltona 505, sił czyli potencjał 99, 214, wektorowa 13 *-e* niezależne 423.

Geodetyczna linia 529.
Gęstość 170, liniowa 172, powierzchniowa 171, w punkcie 170.
Giroskop Foucaulta 414.
Gładka krzywa 124, powierzchnia 124, (368), *-i* przegub 293. *-ie* ciało 263.
Główna prosta normalna 42.
Grafostatyka 253.
Gram 75.

Granica funkcji wektorowej 13.
Grawitacji (czyli *ciążenia*) powszechnej prawo 90, — pole Newtonowskie 103, — stała 90.
Guldina reguła pierwsza 177, druga 178.
Gwiazdy podwójne 227.

Hamiltona funkcja 505, równania kanoniczne 505, zasada 522.
Hamująca p. *Tłumiąca*.
Harmoniczny p. *Drgający*.
Hipotezy równowagi sił 239.
Hodograf 39.
Holonomiczne więzy 421, 422, *-y* układ 422, 470.
Hölderа przekształcenie 535.

Iloczyn skalarowy 7, wektora przez liczbę 4, wektorowy 9.
Ilość ruchu czyli *pęd* 73.
Impuls uogólniony 504.
Inercjalny układ odniesienia 70.

Jednorodne ciało 170, równanie 541.
Jednostajny ruch 42, (— prostolinijny 38), *-ie* przyśpieszony ruch 43.
Jednostki c g s 75, techniczne 76.
Jednostkowe wektory 7.
Jednostronne więzy 422.
Jolly'ego waga 91.
Joule 97.

Kanoniczne równania Hamiltona 505.
Kąt obrotu 311, *-y* Eulera 355.
Kątowa prędkość 45, (322), — chwilowa 62, (325), *-e* przyśpieszenie 45.
Keplera prawa 89, (227), równanie 93.
Kierownicza płaszczyzna 276, (315).
Kierunek siły 71, wektora 1.
Kilogram masy 75, siły 76.
Kilogramometr 97.
Kinematyczna metoda 449.
Kinetyczna energia (ciała) 364, (punktu) 106, (układu) 218, *-y* potencjał 493.
Konserwatywne czyli *zachowawcze*. p. *Potencjalne*.
Königa twierdzenie 218, (364).
Kratownica 298. statycznie wyznaczalna 301.
Krętu układu 202, 204, — ciała 362, (394).
Krzywa gładka 124, Lissajous 120, łańcuchowa 308.
Kulisty punkt 166.

Lagrange'a mnożniki 451, równania (pierwszego rodzaju) 486, (drugiego rodzaju) 492, 494, współrzędne uogólnione 456.
Lewoskrętny układ współrzędnych 2.
Liczba stopni swobody 423, (456, 471).
Lina czyli *sznur* 306.
Linia geodetyczna 529, materialna 171, sił 97, środków chwilowych 340, śrubowa 56, 338, węzłów 355.
Liniowa gęstość 172, *-y* układ (punktów materialnych) 157.
Lissajous krzywe 120.

Łańcuch 305, *-owa* krzywa 308.
Łożysko szyjne 281.
Łukowa współrzędna 34.

Masa 71, całkowita 154, punktu 72, ziemi 91, zmienna 231, zredukowana 160.
Maszyna Atwooda 197, 376, (495).
Materialna linia 171, powierzchnia 171, *-y* punkt 72.
Maupertuis zasada 537.
Maximum właściwe 121.
Metoda Culmanna 304, kinematyczna 449, mnożników Lagrange'a 450, Rittera 304.
Mierzenie sił statyczne 76, dynamiczne 76.
Mimośrodowa anomalia 92.
Mnożniki Lagrange'a 451.
Moment bezwładności ogólny 159, ilości ruchu czyli pędu (kręt) 85, 202, siły (względem osi) 237, (względem punktu) 236, 238, skręcający 288, statyczny bryły, linii, powierzchni 174, — ciała 173, — punktu 153, — układu 154, stopnia drugiego 160, — pierwszego 154, wektora (względem punktu) 15, (względem prostej) 18, układu wektorów (ogólny) 19, zboczenia (ogólny) 159, (względem osi) 169, zginający 288.
Możliwa prędkość 424, *-e* przesunięcie 424, 427, *-y* ruch 518, układ prędkości 427.

Nadliczbowy pręt kratownicy 298.
Najmniejszego działania zasada czyli zasada Maupertuis 537.
Napięcie 288, 292, — nici 194, 264.
Natężenie pola 97.
Naturalne współrzędne 456.
Newtona pole grawitacyjne 103, prawa 72, 73, 74, równania ruchu (79), 80, 190.
Niemożliwa prędkość 424, *-e* przesunięcie 424, 427, *-y* układ prędkości 427.
Nieodwracalne przesunięcie 434.
Nieskończenie małe 511.
Niestała równowaga 121.
Nieswobodne ciało sztywne 261, *-y* punkt materialny 123, układ 193.
Niewyznaczalność statyczna 281.
Niezależne funkcje 423, parametry 456.
Niezmienna płaszczyzna 228.

Normalna prosta główna 42, reakcja 123, 263, 367, *-e* przyśpieszenie 40, *-y* ciąg podziałów 95.

Obrót chwilowy 62, 325, 326, 332, 334, około osi 311, 322, — ciała (pod działaniem sił) 375, około punktu 313, 316, — ciała (pod działaniem sił) 401, 408.
Obrotowy ruch ciała 322.
Obustronne więzy 421.
Oddziaływanie p. *Reakcja.*
Odległość rzutu 83.
Odniesienia układ 32, 53.
Odpychanie 74.
Odśrodkowa czyli *unoszenia* siła 137, złożona czyli *Coriolisa* siła 137.
Odwracalne przesunięcie 429.
Odwrotny plan sił 303.
Ogniwo łańcucha 305.
Okres ruchu harmonicznego prostego 112, — tłumionego 117.
Oś bezwładności 166, obrotu 311, — chwilowego 62, 325, pola 104, skrętu 320, — chwilowego 336, środkowa układu wektorów 27, — obrotu chwilowego 336.

Para wektorów 23, zerowa (sił) 241,
Parametr układu (wektorów) 21, (punktów materialnych) 456, *-y* niezależne 456.
Periodyczny p. *Ruch* okresowy.
Perturbacja p. *Zaburzenie.*
Pęd czyli *ilość ruchu* 73, ciała 361, ogólny układu 198.
Plan sił Cremony 302, odwrotny 303, prędkości (przesunięć przygotowanych) 449.
Płaska kratownica 298, *-i* ruch 276, 313, 326, układ (punktów) 157, (sił) 242, (wektorów) 21, *-o* prowadzone ciało 276, 315.
Płaszczyzna kierownicza 276, (315), niezmienna 228, ściśle styczna 42, środkowa 166, symetrii układu punktów 158.
Pochodna wektora 14, krętu (układu) 205, (ciała) 397.
Początek ruchu 34, — czyli *punkt zaczepienia* (siły) 71, 236, (wektora) 1.
Początkowa chwila 32, 80.
Podpora 263.
Podwójne gwiazdy 227.
Pole grawitacyjne ziemskie 78, — Newtonowskie 103, osiowe 104, potencjalne czyli zachowawcze 98, 214, stałe 102, sił 78, 214, środkowe 102.
Polowa prędkość 48.
Połączenie przegubowe 292.
Położenie brzeżne układu 422, wektora 2.
Porównawczy ruch 511, 519.
Postępowy ruch (ciała) 320, — chwilowy 325.
Potencjalna energia (punktu) 106, (układu) 220, — powierzchnia 101, *-e* czyli zachowawcze pole 98, 214.
Potencjał czyli funkcja sił 99, 214, kinetyczny 493, sił wewnętrznych 215, siły ciężkości 102, 215, układu sił 214, uogólniony 493.
Powierzchnia doskonale chropowata 368, gładka 124, (368), materialna 171, osi środkowych 340, potencjalna 101.
Powierzchniowa gęstość 171.
Praca całkowita 211, przygotowana 436, siły 93, 95, równa zeru 94, 212, przy toczeniu 214, tarcia 368, względna 140, 221.
Prawdziwa anomalia 92.
Prawo akcji i reakcji 74, grawitacji powszechnej czyli ciążenia 90, ruchu planet Keplera 89, ruchu Newtona 72, bezwładności 73, akcji i reakcji 74, składania i rozkładania sił 240, składania przesunięć 311.
Prawoskrętny układ współrzędnych 2.
Precesja regularna 350, 357.
Prędkość 35, bezwzględna 56, kątowa 45, (322), chwilowa kątowa (62), 325, ruchu postępowego 321, — chwilowa 325, możliwa czyli zgodna z więzami 424, 427, polowa 48, ruchu średnia 35, unoszenia 56, (335), względna 56.
Pręty nadliczbowe 298, przegubowo połączone 292.
Promień wodzący 46.
Prosta normalna główna 42, symetrii układu punktów 158.
Prostopadłe wektory 9.
Prosty ruch harmoniczny czyli drgający 112.
Przeciwne wektory 1.
Przegub 292, gładki 293.
Przekształcenia elementarne 29, Höldera 535.
Przestrzenna kratownica 298, *-y* ruch ciała 332.
Przesunięcie punktu 34, ciała 310, możliwe (punktu) 424, (układu) 427, odwracalne 429, przygotowane (punktu) 425, (473, 474), (układu) 427, 429, (473, 475), równoległe czyli translacja 310.
Przyciąganie 74.
Przygotowana praca 436, *-e* przesunięcie 425, 427, 429, (473, 474, 475).
Przyśpieszenie 36, bezwzględne 59, Coriolisa 61, kątowe 45, normalne 40, punktów ciała 357, styczne 40, unoszenia 59, względne 59, ziemskie 75.
Punkt kulisty 166, materialny 72, — nieswobodny 123, — swobodny 123, zaczepienia (wektora) 1, (siły) 71, zwrotu 116.

Radialna składowa 47.
Rakieta 232.
Ramię bezwładności 160, — siły 237.
Reakcja 123, (193), 261, 438, normalna 123, 263, 367, styczna czyli tarcie 123, 263, 271. 367.
Redukcja układu (wektorów) 24, (sił) 241.
Regularna precesja 350, 357.
Reguła Guldina pierwsza 177, druga 178.
Reonomiczny układ 471.
Rittera metoda 304.
Rozciąganie 288, 292.
Rozkład wektora 6.
Równania charakterystyczne 541, Eulera 399, kanoniczne Hamiltona 505, jednorodne 541, Keplera 93, Lagrange'a pierwszego rodzaju 486, — drugiego rodzaju 492. — w polu potencjalnym 494, ruchu Newtona (79), 80, 190.
Równoległe przesunięcie 310, *-y* układ (wektorów) 21, (sił) 242.
Równowaga 74, niestała 121, stała 121, (134), względna 142, — sił (74), 238, (248), 438, 479.
Równowartości pracy i energii kinetycznej zasada 106, 219, 483.
Równoważne wektory 2, układy 22. — zeru 23,
Różnica wektorów 4.
Ruch bezwzględny 33, 70, chwilowy 325, — obrotowy, postępowy 325, — przestrzenny 332, — względny 348, — śrubowy 335, harmoniczny czyli drgający płaski 114, — prosty 112, — tłumiony 115, — wymuszony 118, jednostajnie przyśpieszony 43, jednostajny (38), 42, możliwy 518, — obrotowy 322, okresowy czyli periodyczny 112, planet 89, płaski 276, 313, porównawczy 511, 519, postępowy (138), 320, rzeczywisty 518, środkowy 86, śrubowy 55, 335, wypadkowy 58, 343, względem ziemi 146, względny 65, 348, zgodny z więzami 518, złożony 58.
Ruchoma linia środków chwilowych 340, powierzchnia osi środkowych 340, *-y* stożek osi chwilowych 340.
Rzeczywisty ruch 518.
Rzut wektora 2, 7.

Sekunda 75.
Siła 71, bezwładności 74, bezwzględna 137, ciężkości 75, Coriolisa czyli odśrodkowa złożona 137, działająca 261, 438, hamująca czyli tłumiąca 115, sprężysta 111, ścinająca czyli zginająca 288, unoszenia czyli odśrodkowa 137, uogólniona 460, wewnętrzna 191, 235, 288, 290, względna 137, zaburzająca 229, zerowa 71, zewnętrzna 191, 236, 290.
Skalar 1, *-owy* iloczyn 7.
Skleronomiczny układ 422.
Składania i rozkładania sił prawo 240, przesunięć prawo 311, *-e* ruchów 58, 346.
Składowa normalna 123. 263, radialna 47, ściskająca 288, siły uogólnionej 460, styczna czyli tarcie 123, 263, transwersalna 47, zginająca 288.
Skok śruby 338.
Skręcający moment 288.
Skręt ciała 319, — chwilowy 335.
Skrętnik 27.
Sprężysta siła 111.
Stała ciążenia 90, linia (środków chwilowych) 340, powierzchnia osi środkowych 340, równowaga 121. (134), *-e* pole potencjalne 102, *-y* stożek osi chwilowych 340.
Statyczna wyznaczalność kratownicy 301, zadania 281, *-y* moment (ciała) 173, (figur geometrycznych) 174, (punktu) 153, (układu) 154, współczynnik tarcia 271, sposób mierzenia sił 76.
Stopień swobody 423, (471).
Stożek tarcia 271, osi chwilowych 340.
Styczna ściśle płaszczyzna 43, składowa reakcja czyli tarcie 123, 263, *-e* przyśpieszenie 40.
Suma wektorów 3, układu wektorów 19.
Swobodne ciało sztywne 235, *-y* punkt materialny 123, układ 190.
Sznur 306, *-owy* wielobok 255.
Sztywne ciało 235, *-y* układ 194.
Szyjne łożysko 281.

Ścinająca czyli *zginająca* siła 288.
Ściskanie 288, 292.
Ściśle styczna płaszczyzna 42.
Ślizganie 339.
Średnia anomalia 93, prędkość 35.
Środek ciśnień 264. (284), masy czyli środek ciężkości 154, 174, obrotu chwilowego 327, pola 86, przyśpieszeń 358, sił 242, symetrii 158, redukcji 24, ruchu 86, uderzeń 386, układu wektorów 21, 28, wahań 378.
Środkowa elipsoida bezwładności 166, oś 27, — bezwładności 166, — obrotu chwilowego 336, płaszczyzna 166, *-e* pole 86, — potencjalne 102, *-y* czyli centralny ruch 86, układ wektorów 21.
Śruba 446.
Śrubowa linia 55, 338, *-y* ruch 55, 338, — chwilowy 335.

Tarcie 123, 263, 271, 367, 440.
Techniczny układ jednostek 76.
Teoria perturbacji (228).
Tłumiąca czyli hamująca siła 115.
Tłumiony ruch harmoniczny 115.
Toczenie 214, 339.
Tor 34.
Trajektoria 34.
Translacja p. *Przesunięcie*.
Transwersalna składowa 47.
Twierdzenie Chasle'a 318, Dirichleta 121, Eulera I 314, II 316, Königa 218, 364, o redukcji 24, 346.

Uderzeń środek 386.
Układ jednostek (fizyczny *c g s*) 75, (techniczny) 76, odniesienia 32, 53, inercjalny 70, par (sił) 244, prędkości możliwych 427, punktów materialnych 154, (190). — anholonomiczny 472, — holonomiczny 422, 470, — liniowy 157, — płaski 157, — nieswobodny 193, — reonomiczny 471, — skleronomiczny 422, 470, — swobodny 190, — symetryczny 158, — sztywny 194, sił (płaski) 242, (równoległy) 242, (równoważny zeru) 248, wektorów 2, 19, — centralny czyli środkowy 21, — płaski 21, — równoległy 21, — równoważny 22, — zeru 23, współrzędnych (prawoskrętny) 2, (lewoskrętny) 2.
Unoszenia prędkość 56, przyśpieszenie 59, siła 137.
Uogólnione współrzędne Lagrange'a 456, siły 460, *-y* impuls 504, potencjał 493.

Waga 279, dziesiętna 297, Jolly'ego 91.
Wahadło matematyczne 131, fizyczne 377, Foucaulta 150.
Wariacja bez wariacji czasu 511, 515, — całki 512, 516, — funkcji 511, 515, — funkcji złożonej 514, — pochodnej 513, zmiennej niezależnej 511, — zależnej 511, czasu 531, z wariacją czasu (funkcji) 531, 533, (całki) 534.
Wariacyjne zasady (całkowe) 519.
Wartość bezwzględna (wektora) 1, siły czyli wielkość siły 71.
Warunki prostopadłości (wektorów) 9, równowagi (sił) 133, 248, 367, 439, 479, (momentów) 250, (rzutów) 250.
Wektor 1, jednostkowy 7, prędkości 35, — kątowej 46, (322), — średniej 35, przesunięcia 34, 310, przyśpieszenia 36, wypadkowy 25, zerowy 1.
Wektorowa funkcja 13.
Wewnętrzne siły 191, 235, 288, 290.
Węzeł kratownicy 298.
Wielkość siły 71.
Wielobok sił 254, sznurowy 255, zamykający się 256.
Więzy 123, (193), 261, holonomiczne 421, 470, — jednostronne 422, — niezależne od czasu 421, 422, 470, — obustronne 421, w postaci skończonej 422, 471, zależne od czasu 471.
Wiotka lina 306.
Wirtualny p. *Przygotowany*.
Wodzący promień 46.
Współczynnik tarcia dynamiczny 368, — statyczny 271.
Współrzędne cykliczne 494, łukowe 34, naturalne 456, wektora 2, uogólnione Lagrange'a 456.
Wykres ruchu 34.
Wymiar energii 107, potencjału 99, pracy 97, stałych 52, wielkości kinematycznych 50, — dynamicznych 77.
Wymuszony ruch harmoniczny 118.
Wypadkowa sił ciężkości czyli ciężar 244, układu wektorów 25, *-y* ruch 58, 343.
Wyznaczalność statyczna (kratownicy) 301, (zadań) 281.
Względna prędkość 56, — kątowa 68, praca 140, równowaga 142, siła 137, *-e* przyśpieszenie 59, *-y* ruch 65, — chwilowy 348.
Wzór Bineta 88.

Zaburzająca siła 229.
Zaburzeń teoria 228.
Zachowawcze pole 98, 214.
Zacinanie 273.
Zaczepienia punkt 71.
Zagadnienie 2 ciał (109), 225, *n* ciał 228, statycznie niewyznaczalne 281.
Zasada d'Alemberta 74, (192, 365, 479), Hamiltona 522, krętu 206, 366, Maupertuis czyli najmniejszego działania 537, prac przygotowanych 439, równowartości pracy i energii kinetycznej 106, 219, 366, 483, zachowania energii (całkowitej) 107, 220, (kinetycznej) 106, 220, — krętu 206, (366), — pędu 200, — pól czyli momentu ilości ruchu 86, 206, *-y* wariacyjne (całkowe) 519.
Zawieszenie Cardana 414.
Zboczenia moment (ogólny) 159, (względem osi) 169.
Zewnętrzne siły 191, 236, 290.
Zerowa para sił 241, *-y* wektor 1.
Zginająca siła 288, składowa 288, *-y* moment 288.
Zgodna z więzami prędkość 424, *-y z więzami* ruch 518.
Zmienna masa 231.
Zredukowana długość 378, masa 160.
Zwrot siły 71, układu wektorów 2, wektora 1, *-u* chwila 116, punkt 116.

SPIS RZECZY.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

PRZEDMOWA III
ERRATA VI

ROZDZIAŁ I. **TEORIA WEKTORÓW.**

I. Działania na wektorach.

§ 1. **Określenia wstępne** 1
§ 2. **Współrzędne wektora** 2
§ 3. **Suma i różnica wektorów** 3
§ 4. **Iloczyn wektora przez liczbę** 4
§ 5. **Współrzędne sumy i iloczynu** 5
§ 6. **Rozkład wektora** 6
§ 7. **Iloczyn skalarowy.** Prawo rozdzielności. Prawo łączności. Kwadrat wektora. Przedstawienie analityczne iloczynu skalarowego 7
§ 8. **Iloczyn wektorowy.** Zmiana porządku czynników. Prawo łączności. Prawo rozdzielności względem sumy. Współrzędne iloczynu wektorowego 9
§ 9. **Iloczyn kilku wektorów** 12
§ 10. **Funkcje wektorowe.** Granica. Ciągłość. Pochodna. Funkcje wektorowe wielu zmiennych 13
§ 11. **Moment wektora.** Moment wektora względem punktu. Moment jako iloczyn wektorowy. Moment sumy wektorów o wspólnym początku. Współrzędne momentu. Moment wektora względem prostej 15

II. Układy wektorów.

§ 12. **Moment ogólny układu wektorów** 19
§ 13. **Parametr** 21
§ 14. **Układy równoważne.** Układy równoważne zeru. Układ trzech wektorów równoważny zeru 22
§ 15. **Para wektorów** 23
§ 16. **Redukcja układu wektorów.** Twierdzenie o redukcji. Tabelka 24
§ 17. **Oś środkowa. Skrętnik** 26
§ 18. **Środek wektorów równoległych** 28
§ 19. **Przekształcenia elementarne układu** 29

ROZDZIAŁ II. KINEMATYKA PUNKTU.

I. Ruch względem układu odniesienia.

§ 1. **Czas** 32
§ 2. **Układ odniesienia** 32
§ 3. **Ruch punktu** 33
§ 4. **Wykres ruchu** 34
§ 5. **Prędkość.** Prędkość jako pochodna drogi 34
§ 6. **Przyśpieszenie.** Ruch jednostajny prostolinijny. Hodograf 36
§ 7. **Rozkład przyśpieszenia na styczne i normalne.** Ruch po torze płaskim. Ruch po torze przestrzennym. Ruch jednostajny. Ruch jednostajnie przyśpieszony. Ruch po cykloidzie 40
§ 8. **Prędkość i przyśpieszenie kątowe.** Wektor prędkości kątowej 45
§ 9. **Ruch płaski w układzie biegunowym** 46
§ 10. **Prędkość polowa** 47
§ 11. **Wymiary wielkości kinematycznych.** Ogólne określenie wymiaru. Wyznaczanie wymiaru. 49

II. Zmiana układu odniesienia.

§ 12. **Związek między współrzędnymi.** Ruch po linii śrubowej 53
§ 13. **Związek między prędkościami** 56
§ 14. **Związki między przyśpieszeniami.** Przyśpieszenie Coriolisa 59
§ 15. **Wyznaczanie ruchu względnego.** Ruch względem punktu 65

ROZDZIAŁ III. DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO.

I. Dynamika punktu swobodnego.

§ 1. **Podstawowe pojęcia dynamiki.** Układ inercjalny, czas bezwzględny. Masa i siła. Punkt materialny 70
§ 2. **Prawa dynamiki Newtona.** Prawa ruchu. Równowaga punktu i sił. Siła bezwładności. Zasada d'Alemberta 72
§ 3. **Układy jednostek dynamicznych.** Układ fizyczny *cgs*. Mierzenie mas i sił. Układ techniczny jednostek. Wymiary wielkości dynamicznych. 75
§ 4. **Równania ruchu** 78
§ 5. **Ruch pod wpływem siły ciężkości.** Rzut pionowy. Rzut ukośny . . 81
§ 6. **Ruch w ośrodku stawiającym opór.** Rzut pionowy. Rzut ukośny . . 83
§ 7. **Moment ilości ruchu.** Zasada zachowania pól 85
§ 8. **Ruch środkowy.** Wzór Bineta 86
§ 9. **Ruchy planet.** Prawa Keplera. Wnioski z praw Keplera. Prawo ogólnego ciążenia. Masa ziemi. Równanie Keplera 89
§ 10. **Praca.** Siła stała. Siła zmienna. Praca sumy sił. Wymiar i jednostki pracy 93
§ 11. **Pole sił potencjalne.** Natężenie pola. Linie sił. Określenie pola potencjalnego. Potencjał. Wymiar potencjału. Związek między siłą a potencjałem. Powierzchnie potencjalne 97

CZĘŚĆ DRUGA.

ROZDZIAŁ VI. STATYKA CIAŁA SZTYWNEGO.

I. Ciało swobodne.

§ 1. **Ciało sztywne.** Układy sztywne punktów materialnych 235
§ 2. **Siła.** Punkt zaczepienia siły. Moment siły względem punktu. Moment siły względem osi. Równowaga sił 236
§ 3. **Hipotezy równowagi sił** 239
§ 4. **Przekształcanie układów sił.** Zmiana punktu zaczepienia siły. Prawo składania i rozkładania sił. Układy równoważne. Para sił. Redukcja układu sił. Układ płaski sił. Układ równoległy sił. Siły ciężkości. Układy par. 239
§ 5. **Warunki równowagi sił.** Postać analityczna warunków równowagi. Układ płaski sił 245
§ 6. **Grafostatyka. Wielobok sznurowy.** Składanie sił. Wielobok sznurowy. Wypadkowa części układu 238
§ 7. **Niektóre zastosowania wieloboku sznurowego.** Wyznaczanie reakcyj w punktach podparcia. Wyznaczanie momentu sił. Wyznaczanie środka ciężkości i momentu statycznego figur płaskich 256

II. Ciało nieswobodne.

§ 8. **Warunki równowagi** 261
§ 9. **Reakcje ciał stykających się.** Reakcja normalna i styczna. Podpory. Środek ciśnień. Reakcje nici 262
§ 10. **Tarcie.** 271
§ 11. **Warunki równowagi nie zawierające reakcji.** Ciało o punkcie nieruchomym. Ciało o osi nieruchomej. Ciało płasko prowadzone. Dźwignia. Wyznaczanie reakcyj działających na oś nieruchomą 274
§ 12. **Równowaga ciał ciężkich podpartych.** Ciało podparte w dwóch punktach. Ciało podparte w $n>2$ punktach 282
§ 13. **Siły wewnętrzne** 288

III. Układy ciał.

§ 14. **Warunki równowagi.** 290
§ 15. **Układy prętów.** Napięcia w prętach. Połączenia przegubowe. Układy prętów. Waga dziesiętna 292
§ 16. **Kratownice.** Kratownica płaska. Wyznaczanie napięć w kratownicy przy pomocy rachunku. Wyznaczanie napięć w kratownicy przy pomocy planów sił. Wyznaczanie napięć z pomocą przekrojów . . 298
§ 17. **Równowaga lin ciężkich.** Łańcuch. Lina. Lina obciążona 305

ROZDZIAŁ VII. **KINEMATYKA CIAŁA SZTYWNEGO.**

§ 1. **Przesunięcie i obrót ciała około osi.** Przesunięcie równoległe czyli translacja. Obrót około osi. 310
§ 2. **Przesunięcia punktów ciała w ruchu płaskim.** Obrót około punktu. I Twierdzenie Eulera. Ciało płasko prowadzone 313
§ 3. **Przesunięcia punktów ciała.** II Twierdzenie Eulera. Twierdzenie Chasle'a. Skręt 315
§ 4. **Ruch postępowy i ruch obrotowy około osi.** Ruch postępowy. Ruch obrotowy około osi. 320
§ 5. **Rozmieszczenie prędkości w ciele sztywnym.** Związki między prędkościami punktów ciała. Prędkości punktów linii prostej i płaszczyzny. Ruch chwilowy ciała sztywnego 323
§ 6. **Ruch chwilowy płaski.** Wyznaczanie środka obrotu chwilowego. . . 326
§ 7. **Ruch chwilowy przestrzenny.** Obrót około punktu. Ruch chwilowy w przypadku ogólnym. Prędkość unoszenia. Skręt chwilowy. Wyznaczanie ruchu ciała 332
§ 8. **Toczenie i ślizganie.** Linia środków chwilowych. Stożek osi chwilowych. Powierzchnia osi środkowych 339
§ 9. **Składanie ruchów ciała.** Dwa obroty równoczesne. Składanie kilku obrotów równoczesnych. Ruch względny ciała. Precesja regularna . . . 343
§ 10. **Przedstawienie analityczne ruchu ciała sztywnego.** Prędkość chwilowa kątowa. Oś środkowa. Ruch płaski. Kąty Eulera. Kąty Eulera w precesji regularnej 351
§ 11. **Rozkład przyśpieszeń.** Ruch płaski. Ruch w przestrzeni 357

ROZDZIAŁ VIII. **DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO.**

§ 1. **Praca i energia kinetyczna.** Wielkości dynamiczne. Praca. Energia kinetyczna 361
§ 2. **Równania ruchu.** Ruch środka masy. Zasada krętu. Zasada energii kinetycznej. Zasada d'Alemberta. Ruch postępowy ciała. Warunki równowagi. Reakcje ciał stykających się. Praca tarcia. 365
§ 3. **Obrót około osi stałej.** Maszyna Atwooda. Wahadło fizyczne. Wyznaczanie reakcji na oś obrotu. Oś obrotu osią środkową bezwładności. Środek uderzeń 375
§ 4. **Ruch płaski.** Ruch płaski figury płaskiej. Ruch płaski ciała. 387
§ 5. **Kręt.** Kręt względem środka masy ciała lub względem jego punktu nieruchomego. Pochodna krętu 394
§ 6. **Równania Eulera.** Ruch ciała sztywnego swobodnego 399
§ 7. **Obrót ciała około punktu bez działania sił.** Kręt i energia kinetyczna. Obrót około punktu kulistego. Obrót około punktu, którego elipsoida bezwładności jest elipsoidą obrotową. Wyznaczanie kątów Eulera. Obrót ciała około punktu w przypadku ogólnym 401
§ 8. **Obrót ciała ciężkiego około punktu** 408
§ 9. **Ruch kuli po płaszczyźnie** 411
§ 10. **Giroskop Foucaulta.** Ruch osi symetrii w płaszczyźnie południka. Ruch osi w płaszczyźnie poziomej 414

ROZDZIAŁ IX. **ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH.**

§ 1. **Układy holonomiczne skleronomiczne.** Więzy obustronne. Więzy jednostronne. Stopień swobody układu 420
§ 2. **Przesunięcia przygotowane.** Punkt na powierzchni. Punkt na linii. Układy holonomiczne skleronomiczne. Więzy obustronne. Ciało sztywne swobodne. Punkt unieruchomiony. Oś unieruchomiona. Ruch figury w płaszczyźnie. Więzy jednostronne 424
§ 3. **Zasada prac przygotowanych.** Praca przygotowana. Ciało swobodne. Ciało mające punkt stały. Ciało płasko prowadzone. Ciało mające oś stałą. Ciało mające stałą oś skrętu. Śruba. Wyznaczanie napięć w prętach kratownicy. 436
§ 4. **Wyznaczanie położenia równowagi w polu sił.** Mnożniki Lagrange'a. 449
§ 5. **Współrzędne uogólnione Lagrange'a.** Parametry układu. Przesunięcia przygotowane. Praca przygotowana. Siły uogólnione. Warunki równowagi. Równowaga w polu potencjalnym 455

ROZDZIAŁ X. **DYNAMIKA UKŁADÓW HOLONOMICZNYCH.**

§ 1. **Układy holonomiczne** 470
§ 2. **Układy anholonomiczne** 472
§ 3. **Przesunięcia przygotowane.** Punkt na powierzchni. Punkt na linii. Przykłady. Układy punktów. Współrzędne uogólnione 473
§ 4. **Zasada d'Alemberta.** Równowaga sił. Zasada d'Alemberta. . . . 478
§ 5. **Praca i energia kinetyczna w układach skleronomicznych** 483
§ 6. **Równania Lagrange'a pierwszego rodzaju** 485
§ 7. **Równania Lagrange'a drugiego rodzaju.** Równania Lagrange'a w polu potencjalnym. Współrzędne cykliczne. Ruch punktu na powierzchni obrotowej. Współrzędne biegunowe 488
§ 8. **Równania kanoniczne Hamiltona.** Układy skleronomiczne 504

ROZDZIAŁ XI. **ZASADY WARIACYJNE MECHANIKI.**

§ 1. **Wariacja bez wariacji czasu.** Wariacja funkcji. Wariacja całki. Wariacja pochodnej. Wariacja funkcji złożonej. Układy punktów . . . 510
§ 2. **Zasada Hamiltona.** Ruch rzeczywisty. Ruch porównawczy. Zasada Hamiltona dla współrzędnych naturalnych. Zasada Hamiltona dla współrzędnych uogólnionych. Zasada Hamiltona w polu potencjalnym. Układy holonomiczne skleronomiczne w polu potencjalnym . 518
§ 3. **Wariacja z wariacją czasu.** Wariacja funkcji. Układy punktów. Wariacja wraz z wariacją czasu całki 529
§ 4. **Zasada Maupertuis (najmniejszego działania).** Przekształcenie Höldera. Postać ogólniejsza zasady Hamiltona. Zasada Maupertuis 534

DODATEK. Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego o współczynnikach stałych 541

SKOROWIDZ NAZW 544

CENA 700 ZŁ

UP - Kraków BG
1050156079

MONOGRAFIE MAT

WARSZAWA, PAŃSTWOWY INSTYTU

WROCŁAW, POLITECHNIKA, SEMINARIUM MATEMATYCZNE.

EX LIBRIS
UP Muzeum Podręcznika

I. *S. Banach*, Théorie des opérations linéai
II. *S. Saks*, Théorie de l'intégrale, 1933, X +
III. *K. Kuratowski*, Topologie I, 1933, X + 2
IV. *W. Sierpiński*, Hypothèse du continu, 19
V. *A. Zygmund*, Trigonometrical Series, 193
VI. *S. Kaczmarz und H. Steinhaus*, Theorie d
VI + 300.
VII. *K. Saks*, Theory of the Integral, 1937,
VIII. *S. Banach*, Mechanika I, 1938, VI + 234,
i 1950.
IX. *S. Banach*, Mechanika II, 1938, 235—556, wydania niezmienione
i 1950.
X. *S. Saks* i *A. Zygmund*, Funkcje Analityczne, 1938, VIII + 432, wydanie niezmienione 1948.
XI. *W. Sierpiński*, Zasady Algebry Wyższej, 1946, XII + 438.
XII. *K. Borsuk*, Geometria Analityczna (w druku).
XIII. *W. Sierpiński*, Działania Nieskończone, 1947, XI + 503.
XIV. *W. Sierpiński*, Rachunek Różniczkowy (poprzedzony badaniem funkcji elementarnych), 1947, VII + 262.
XV. *K. Kuratowski*, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego t. I, 1948, 240, wydanie niezmienione 1949.
XVI. *E. Otto*, Geometria Wykreślna (w druku).
XVII. *S. Banach*, Teoria Funkcji Zmiennej Rzeczywistej (w druku).
XVIII. *A. Mostowski*, Logika Matematyczna, 1948, VIII + 388.
XIX. *W. Sierpiński*, Teoria Liczb, nowe wydanie powiększone, 1950, VI + 544.
XX. *K. Kuratowski*, Topologie I, nowe wydanie powiększone, 1948, XII + 452.
XXI. *K. Kuratowski*, Topologie II (w druku).

W PRZYGOTOWANIU:

S. Banach, Mechanics, 2 vol. (English translation).
M. Biernacki, Geometria Różniczkowa.
M. Kac and H. Steinhaus, Independent Functions.
K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego, t. II.
K. Kuratowski i A. Mostowski, Kurs Teorii Mnogości.
E. Marczewski, General Theory of Measure.
S. Mazur, Functional Analysis.
S. Mazurkiewicz, Rachunek Prawdopodobieństwa.
A. Mostowski, Mathematical Logic.
W. Nikliborc, Równania Różniczkowe.
W. Nikliborc, Problème de trois corps.
O. Nikodym, Theory of Vectors and Vector-Fields.
W. Rubinowicz, Wektory i Tensory.
S. Saks and A. Zygmund, Analytic Functions (English translation).
W. Sierpiński, Algèbre des Ensembles.
W. Sierpiński, The Axiom of Choice and the Continuum Hypothesis.
W. Sierpiński, Teoria Mnogości, nowe wydanie powiększone.
W. Siebodziński, Formes différentielles symboliques et leurs applications.
T. Ważewski, Teoria Równań Różniczkowych.
A. Zygmund, Trigonometrical Series, 2 vol. (new edition).