



9100

CEN. 13. 10. 1. 75. 20.000

IE MATEMATYCZNE

KOMITET REDAKCYJNY:

K. BORSUK, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, W. SIERPIŃSKI,
H. STEINHAUS, W. ŚLEBODZIŃSKI i A. ZYGMUND

TOM VIII

STEFAN BANACH

MECHANIKA

W ZAKRESIE SZKÓŁ AKADEMICKICH

Tom I

Wydanie trzecie niezmienione

Z ZASIŁKIEM DEPARTAMENTU NAUKI MINISTERSTWA OŚWIATY



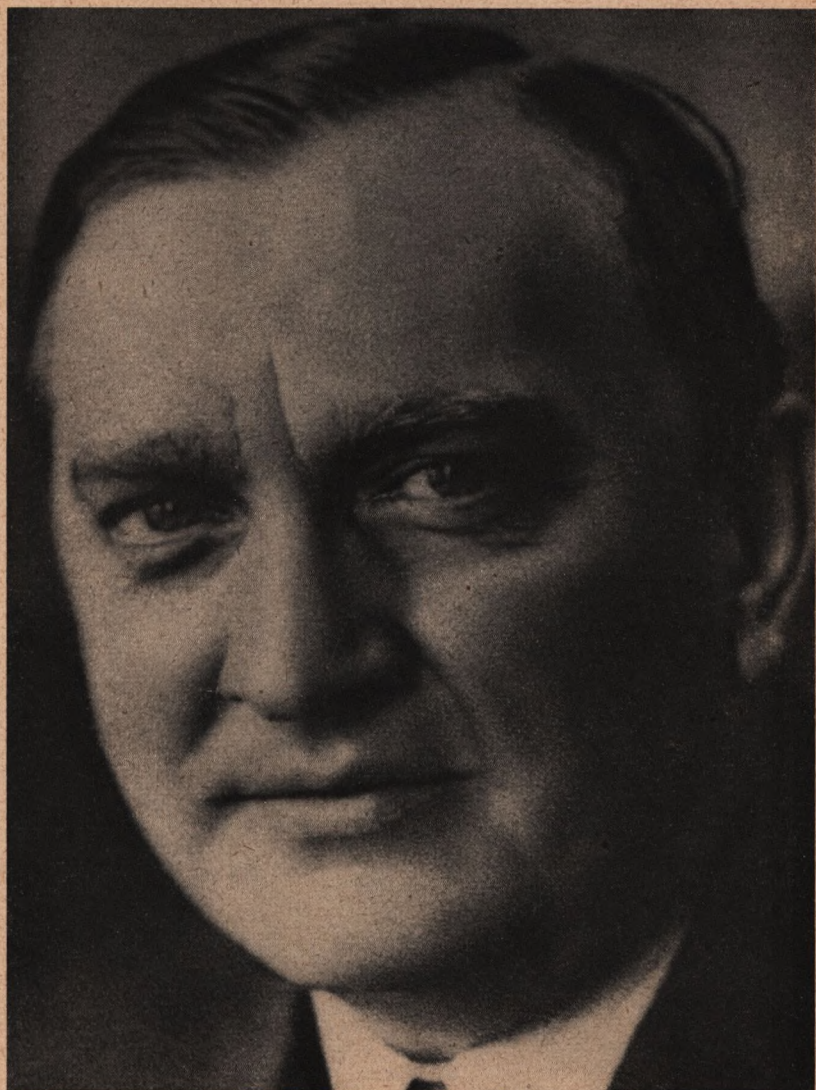
SPÓŁDZIELNIA WYDAWNICZO-OŚWIATOWA „CZYTELNIK”

1950



ST. BANACH. MECHANIKA

Tom 1



Stefan Banach

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:

K. BORSUK, B. KNASTER, K. KURATOWSKI, W. SIERPIŃSKI,
H. STEINHAUS, W. ŚLEBODZIŃSKI i A. ZYGMUND

TOM VIII

STEFAN BANACH

MECHANIKA

W ZAKRESIE SZKÓŁ AKADEMICKICH

Tom 1

Wydanie trzecie niezmienione

Z ZASIŁKIEM WYDZIAŁU NAUKI MINISTERSTWA OŚWIATY



»CZYTELNIK«

SPÓŁDZIELNIA WYDAWNICZO - OŚWIATOWA

1949

UP - Kraków BG



1050156078



Wydanie pierwsze 1938
Wydanie drugie odbite sposobem
fotomechanicznym 1947

Wydanie trzecie ofsetowe 1949



9100

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE

All rights reserved

Spółdzielnia Wydawniczo Oświatowa „Czytelnik”
Tłoczono w Drukarni Nr 3 „Czytelnika” w Krakowie
Zam. T. I. Nr 695. 26. 8. 1949. Papier ofsetowy 61×86 — 80 g. 4200.
Druk uk. 18. 9. 1950
M-54718

ERRATA.

stronica, wiersz:	jest:	ma być:
20 ³	<i>wziętej</i>	<i>wzięty</i>
89 ₉	mimośród	mimośród liniowy
93 ₁₃	V	v
„	$2\pi/T$	$2\pi/T$
103 ³	$\cos a$	$\cos a$
150 ¹⁵	1,3 m a 1,7 m	1,3 mm a 1,7 mm
„	$x=1,8$ cm	$x=1,8$ mm
163 ⁸	yz	xz
165 ¹⁴	$y=\pm a$	$y=\pm a$
169 ₁₄	D_{xy}	D_z
173 ¹	statyczne bezwładności	statyczne i bezwładności
272 ₂	$-R_{1y} \bar{d} \cos a$	$-R_{1y} l \cos a$
272 ₁	$-R_{1y} \bar{d}$	$-R_{1y} l$
292 ¹⁷	(rys. 1) (rys. 2)	(rys. 2) (rys. 1)
305 ₁₁	$A_1 A_2$	$A_0 A_1$
359 ₄	$r \times \dot{\omega}$	$\bar{r} \times \dot{\omega}$
405 ²	str. 396	str. 403 (por. str. 396)
461 ¹⁴	(4)	(3)
523 ₄	$\int_{t_1}^{t_2}$	$\int_{t_2}^{t_1}$

ROZDZIAŁ I

TEORIA WEKTORÓW

I. Działania na wektorach

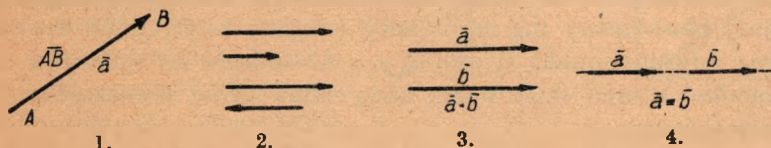
§ 1. Określenia wstępne. Wielkości, które możemy określić przy pomocy jednej liczby rzeczywistej, nazywamy *skalarami*. Skalarem jest więc masa, praca, energia kinetyczna i t. p.

Wektorem nazywamy odcinek, w którym wyróżniony jest początek i koniec. Do wektorów zaliczamy punkty i nazywamy je *wektorami zerowymi*.

Wielkości takie jak np. prędkość, przyspieszenie, siła, możemy przedstawić przy pomocy wektorów. Wektor oznaczamy bądź jedną literą z kreską u góry np. $\vec{a}$, bądź symbolem $\overline{AB}$, gdzie A oznacza początek, zaś B koniec (rys. 1). Na rysunku koniec wektora zaznaczamy strzałką. Początek wektora nazywamy także *punktem zaczepienia*.

Długością lub *wartością bezwzględną* wektora $\overline{AB}$ nazywamy długość odcinka AB i oznaczamy ją przez $|\overline{AB}|$.

Dwa wektory mające ten sam kierunek (t. zn. równoległe) mogą mieć *zwroty* zgodne lub przeciwne (rys. 2).



Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ mające równe długości, kierunki i zwroty nazywamy *równymi* (rys. 3), pisząc

$$\vec{a} = \vec{b}.$$

Dwa wektory mające równe długości i kierunki, lecz zwroty przeciwne, nazywamy *przeciwnymi*. Wektor przeciwny do $\vec{a}$ oznaczamy przez $-\vec{a}$ (p. str. 4, rys. 3).

Położeniem wektora nazywamy prostą, na której wektor leży.

Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ równe i mające to samo położenie (t. zn. leżące na jednej prostej) nazywamy wektorami *równoważnymi* (str. 1, rys. 4):

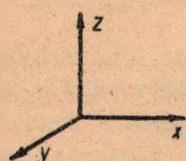
$$\vec{a} = \vec{b}.$$

Dwa wektory zerowe uważamy za równe i równoważne.

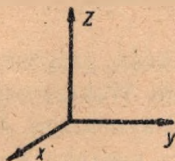
Wektory równe oznaczać będziemy często jedną i tą samą literą (gdy nie będzie obawy pomyłki).

Rzutem wektora $\vec{a}$ na prostą (lub płaszczyznę) nazywamy wektor, którego początkiem jest rzut początku wektora $\vec{a}$, zaś końcem rzut jego końca.

Przypuśćmy, że mamy dany w przestrzeni układ współrzędnych $O(x, y, z)$ prostokątny lub skośnokątny. Obróćmy oś x około O



1.



2.

w płaszczyźnie xy o kąt $< \pi$ tak, by dodatnia część osi x padła na dodatnią część osi y . Jeżeli dla widza znajdującego się po tej stronie płaszczyzny xy , po której leży dodatnia część osi z , ruch ten odbywa się zgodnie z ruchem wskazówek zegara,

wówczas układ $O(x, y, z)$ nazywamy *lewoskrętnym*, w przeciwnym razie *prawoskrętnym*.

W książce tej używać będziemy stale układu prostokątnego lewoskrętnego (t. j. jak na rys. 1, a nie 2).

Powiadamy, że układ wektorów $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ nie równoległych do jednej płaszczyzny ma *zwrot lewy* (wzgl. *prawy*), jeżeli prowadząc przez dowolny punkt O osie x, y, z równoległe do wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i zgodnie z nimi skierowane, otrzymamy układ lewoskrętny (wzgl. prawoskrętny).

§ 2. Współrzędne wektora. Niechaj $\vec{a}$ będzie dowolnym wektorem, zaś $\vec{a}'$ rzutem jego na daną oś x .

Współrzedną wektora $\vec{a}$ względem osi x nazywamy liczbę, którą oznaczamy przez a_x , określoną jak następuje: $a_x = |\vec{a}'|$, jeżeli $\vec{a}'$ ma zgodny kierunek z osią x , zaś $a_x = -|\vec{a}'|$ w przypadku przeciwnym.

Mamy oczywiście

$$(1) \quad a_x = |\vec{a}| \cos \alpha,$$

gdzie α oznacza kąt między wektorem $\vec{a}$ a osią x (str. 3, rys. 2).

Przypuśćmy, że mamy dany prostokątny układ współrzędnych (x, y, z) . Oznaczając współrzędne wektora $\vec{a}$ względem osi układu przez a_x, a_y, a_z , zaś kąty, jakie $\vec{a}$ tworzy z osiami przez α, β, γ (rys. 1), otrzymamy na mocy (1):

$$(I) \quad a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

A więc: *wektory równe mają równe współrzędne względem osi układu.*

Ponieważ według znanego wzoru z geometrii analitycznej jest $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, więc na mocy (I)

$$(II) \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$(III) \quad \cos \alpha = a_x / |\vec{a}|, \quad \cos \beta = a_y / |\vec{a}|, \quad \cos \gamma = a_z / |\vec{a}|.$$

Z równań (II) i (III) wynika, że współrzędne wektora określają jego długość, kierunek i zwrot.

A więc dwa wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, mające odpowiednio równe współrzędne względem osi układu prostokątnego (t. zn. dla których $a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$), są równe.

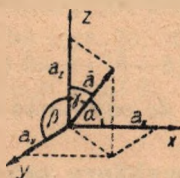
Jeżeli wektor $\vec{a}$ leży w płaszczyźnie xy (rys. 2), to

$$(IV) \quad a_x = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \sin \alpha,$$

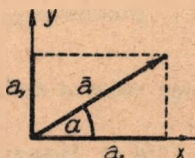
$$(V) \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \cos \alpha = a_x / |\vec{a}|, \quad \sin \alpha = a_y / |\vec{a}|.$$

Często (gdy pomyłka jest wykluczona) rzutami wektora $\vec{a}$ na osie układu nazywamy także współrzędne a_x, a_y, a_z .

Łatwo można okazać, że jeżeli punkty A i A' mają współrzędne odpowiednio x, y, z i x', y', z' , to wektor $\vec{a} = \vec{AA'}$ ma współrzędne: $a_x = x' - x, a_y = y' - y$ i $a_z = z' - z$.



1.



2.

§ 3. Suma i różnica wektorów. Sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy każdy wektor, który daje się otrzymać w sposób następujący:

Z dowolnego punktu O kreślimy wektor równy wektorowi $\vec{a}$, z końca tego wektora drugi wektor równy wektorowi $\vec{b}$; wektor, którego początkiem jest O , końcem zaś koniec drugiego wektora, nazywamy *sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$* (str. 4, rys. 1) i oznaczamy przez

$$\vec{a} + \vec{b}.$$

Dla wektorów przeciwnych (rys. 3) otrzymamy więc w szczególności

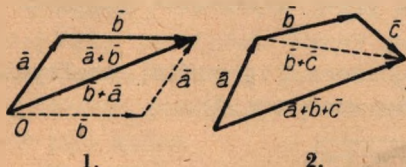
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0.$$

Sumę kilku wektorów np. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ otrzymujemy, tworząc sumę $\vec{b} + \vec{c}$, a następnie dodając otrzymaną sumę do wektora $\vec{a}$ (rys. 2).

Do sumy wektorów stosuje się prawa przemienności i łączności. A więc:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a},$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$



1.

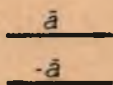
2.

Z praw tych wynika, że suma ilużkolwiek wektorów nie zmienia się, jeżeli zmienimy porządek składników lub jeżeli kilka z nich zastąpimy ich sumą. Np.:

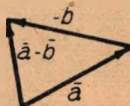
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{e} + (\vec{b} + \vec{d}).$$

Różnicę $\vec{a} - \vec{b}$ określamy jako sumę $\vec{a} + (-\vec{b})$.
Zatem wedle definicji

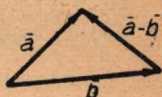
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



3.



4.



5.

Rys. 4 i 5 przedstawiają, jak wyznacza się różnicę.
Ponieważ

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{b} = \vec{a},$$

więc różnica dodana do odjemnika daje w wyniku odjemną.

§ 4. Iloczyn wektora przez liczbę. Iloczynem wektora $\vec{a}$ przez liczbę m nazywamy wektor, który ma ten sam kierunek co $\vec{a}$, długość $|m|$ razy większą, a zwrot zgodny z $\vec{a}$ lub przeciwny, zależnie od tego czy $m > 0$, czy $m < 0$. Iloczyn $\vec{a}$ przez m oznaczamy przez

$$m\vec{a}.$$

Jeżeli $m = 0$ lub $\vec{a} = 0$, to $m\vec{a} = 0$.

Mamy oczywiście (p. str. 5, rys. 1 dla $m = 2$):

$$(-m)\vec{a} = -m\vec{a}.$$

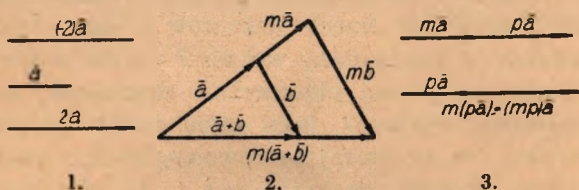
Wynika stąd, że

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

Dla iloczynu łatwo dowieść prawa rozdzielności sumy względem iloczynu i prawa łączności:

$$m(\bar{a} + \bar{b}) = m\bar{a} + m\bar{b}, \quad (m + p)\bar{a} = m\bar{a} + p\bar{a}, \quad m(p\bar{a}) = (mp)\bar{a},$$

gdzie m i p oznaczają liczby (rys. 2 i 3). Z powyższych praw wynikają zwykle reguły algebryczne dodawania i mnożenia.



Dzielenie wektora przez liczbę (różną od zera) określamy jako mnożenie przez odwrotność tej liczby. A więc:

$$\frac{\bar{a}}{m} = \frac{1}{m} \bar{a}.$$

§ 5. Współrzędne sumy i iloczynu. Łatwo można okazać, że rzut (na prostą lub płaszczyznę) sumy wektorów równa się sumie rzutów tych wektorów (rys. 4). A więc:

$$\text{Rzut}(\bar{a} + \bar{b}) = \text{Rzut } \bar{a} + \text{Rzut } \bar{b}.$$

Podobnie rzut iloczynu wektora przez liczbę równa się iloczynowi rzutu wektora przez tę liczbę (rys. 5). A więc:

$$\text{Rzut}(m\bar{a}) = m \text{ Rzut } \bar{a}.$$

Jeżeli wektor $\bar{a}$ ma współrzędne a_x, a_y, a_z , a wektor $\bar{b}$ ma współrzędne b_x, b_y, b_z , wówczas wektor $\bar{s} = \bar{a} + \bar{b}$ ma współrzędne $s_x = a_x + b_x, s_y = a_y + b_y, s_z = a_z + b_z$.

Wynika to z twierdzenia o rzucie sumy.

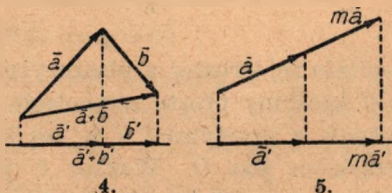
Podobnie z twierdzenia o rzucie iloczynu wektora przez liczbę wynika, że wektor $\bar{c} = m\bar{a}$ ma współrzędne $c_x = ma_x, c_y = ma_y, c_z = ma_z$.

Jeżeli np. $\bar{d} = 5\bar{a} - 3\bar{b} - 2\bar{c}$, to:

$$d_x = 5a_x - 3b_x - 2c_x,$$

$$d_y = 5a_y - 3b_y - 2c_y,$$

$$d_z = 5a_z - 3b_z - 2c_z.$$



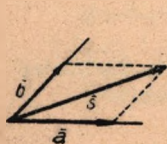
§ 6. Rozkład wektora. Sumę wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o wspólnym początku, lecz różnym położeniu (tj. nie leżących na jednej prostej), przedstawia przekątna równoległoboku zbudowanego na tych wektorach. Podobnie sumę trzech wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, o wspólnym początku, lecz nie leżących na jednej płaszczyźnie, przedstawia przekątna równoległościanu zbudowanego na tych wektorach.

Na powyższych twierdzeniach opiera się rozkład danego wektora na sumę dwóch lub trzech wektorów o danych kierunkach.

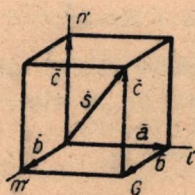
Przypuśćmy, że mamy dany wektor $\vec{s}$ i dwie proste l i m nie równoległe, leżące w pewnej płaszczyźnie równoległej do $\vec{s}$. Jeżeli chcemy przedstawić wektor $\vec{s}$ jako sumę dwóch wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ równoległych do l i m , to tworzymy równoległobok o bokach równoległych do l i m , którego przekątną jest $\vec{s}$. W tym celu kreślimy z początku i końca wektora $\vec{s}$ proste równoległe do l i m . Boki otrzymanego równoległoboku wyznaczają wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (rys. 1).

Łatwo zauważyć, że taki rozkład jest możliwy w jeden tylko sposób.

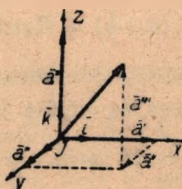
Podobnie, jeżeli dany jest wektor $\vec{s}$ i trzy proste l , m , n nie równoległe do jednej płaszczyzny i chcemy przedstawić wektor $\vec{s}$ jako sumę trzech wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ równoległych do l , m , n , to budujemy równoległościan o krawędziach równoległych do l , m , n ,



1.



2.



3.

którego przekątną jest $\vec{s}$. Kreślimy zatem z początku O wektora $\vec{s}$ proste l' , m' , n' równoległe do l , m , n ; następnie z końca wektora $\vec{s}$ prostą równoległą do n aż do punktu G przecięcia tej prostej z płaszczyzną prostych l' , m' ; wreszcie z punktu G kreślimy proste równoległe do l i m . Punkty przecięcia tych prostych z prostymi l' i m' są końcami wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, których początkiem jest O . Wektor $\vec{c}$ jest równy wektorowi łączącemu punkt G z końcem wektora $\vec{s}$ (rys. 2).

Jeden tylko taki rozkład jest możliwy, ponieważ istnieje jeden tylko równoległościan o krawędziach równoległych do l , m , n i o przekątnej $\vec{s}$.

Szczególnym przypadkiem takiego rozkładu jest przedstawienie wektora przy pomocy wektorów jednostkowych. Oznaczamy rzuty wektora $\vec{a}$ na osie układu (x, y, z) przez $\vec{a}', \vec{a}'', \vec{a}'''$. Mamy oczywiście (str. 6, rys. 3):

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}'' + \vec{a}'''.$$

Obierzmy na osiach układu wektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ o długości 1, skierowane zgodnie z odpowiednimi osiami. Z określenia współrzędnych a_x, a_y, a_z (§ 2, str. 2) wynika, że

$$\vec{a}' = a_x \vec{i}, \quad \vec{a}'' = a_y \vec{j}, \quad \vec{a}''' = a_z \vec{k}.$$

Zatem

$$(I) \quad \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Wektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ nazywamy wektorami jednostkowymi. Wzór (I) wyraża wektor $\vec{a}$ przy pomocy współrzędnych i wektorów jednostkowych.

§ 7. Iloczyn skalarowy. Iloczynem skalarowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tworzących kąt φ (p. rys. obok), nazywamy liczbę $|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$.

Iloczyn skalarowy oznaczamy przez $\vec{a} \cdot \vec{b}$ lub $\vec{a}\vec{b}$. Zatem

$$(I) \quad \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Iloczyn skalarowy jest zerem nie tylko w przypadku gdy $\vec{a} = 0$ lub $\vec{b} = 0$, lecz także gdy $\vec{a} \perp \vec{b}$, wtedy bowiem $\varphi = \pi/2$, więc $\cos \varphi = 0$.

Jeżeli zaś $\vec{a} \neq 0$ i $\vec{b} \neq 0$, to iloczyn skalarowy może być dodatni lub ujemny zależnie od tego, czy φ jest kątem ostrym czy rozwartym.

Iloczyn nie zależy od porządku czynników. Mamy bowiem

$$\vec{b}\vec{a} = |\vec{b}| |\vec{a}| \cos \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = \vec{a}\vec{b}.$$

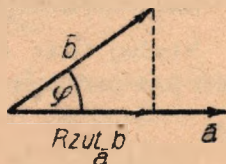
Wyrażenie $|\vec{b}| \cos \varphi$ przedstawia rzut wektora $\vec{b}$ na oś wyznaczoną przez wektor $\vec{a}$ i zgodnie z nim skierowaną. Rzut ten nazywamy *rzutem $\vec{b}$ na kierunek $\vec{a}$* i oznaczamy przez $\text{Rzut}_{\vec{a}} \vec{b}$. Zatem:

$$\text{Rzut}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cos \varphi, \quad \text{Rzut}_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Na mocy więc (I):

$$(1) \quad \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \text{Rzut}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \text{Rzut}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Zatem iloczyn skalarowy równa się iloczynowi długości jednego wektora przez rzut drugiego na kierunek pierwszego.



Prawo rozdzielności. Na mocy określenia iloczynu mamy

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = |\bar{c}| \text{Rzut}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}).$$

Ponieważ $\text{Rzut}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{a} + \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{b}$, więc

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = |\bar{c}| \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{a} + |\bar{c}| \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{b}.$$

Lecz $|\bar{c}| \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{a} = \bar{a}\bar{c}$ i $|\bar{c}| \text{Rzut}_{\bar{c}}\bar{b} = \bar{b}\bar{c}$; zatem

$$(II) \quad (\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}.$$

Podobnie postępując, otrzymamy

$$(III) \quad (\bar{a} - \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} - \bar{b}\bar{c}.$$

A więc dla sumy i różnicy zachodzi prawo rozdzielności względem iloczynu. Wynikają stąd zwyczajne prawa mnożenia sumy przez sumę.

$$\text{Np. } (\bar{a} + \bar{b})(\bar{c} + \bar{d}) = (\bar{a} + \bar{b})\bar{c} + (\bar{a} + \bar{b})\bar{d} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{d}.$$

Prawo łączności. Niechaj m oznacza jakąkolwiek liczbę. Zatem

$$(m\bar{a})\bar{b} = |\bar{b}| \text{Rzut}_{\bar{b}}(m\bar{a}) = m\bar{b} \text{Rzut}_{\bar{b}}\bar{a}, \quad \text{skąd } (m\bar{a})\bar{b} = m(\bar{a}\bar{b}).$$

Niechaj teraz m, n oznaczają liczby. Na mocy poprzedniego wzoru jest $(m\bar{a})(n\bar{b}) = m\{\bar{a} \cdot (n\bar{b})\} = m\{n(\bar{a}\bar{b})\}$, więc

$$(IV) \quad (m\bar{a})(n\bar{b}) = (mn)(\bar{a}\bar{b}).$$

Wynikają stąd zwykle prawa mnożenia wielomianu przez wielomian.

$$\text{Np. } (2\bar{a} - 3\bar{b})5\bar{c} = 10\bar{a}\bar{c} - 15\bar{b}\bar{c}, \quad (4\bar{a} - 2\bar{b})(3\bar{c} + \bar{d}) = 12\bar{a}\bar{c} - 6\bar{b}\bar{c} + 4\bar{a}\bar{d} - 2\bar{b}\bar{d}.$$

Kwadrat wektora. Kwadrat skalarowy $\bar{a}^2$ określamy jako iloczyn $\bar{a} \cdot \bar{a}$. Zatem $\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}| |\bar{a}| \cos 0$, więc, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$, stąd $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

Otrzymujemy stąd:

$$(V) \quad \begin{aligned} (\bar{a} + \bar{b})^2 &= (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2, \\ (\bar{a} - \bar{b})^2 &= (\bar{a} - \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}^2 - 2\bar{a}\bar{b} + \bar{b}^2, \\ (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) &= \bar{a}^2 - \bar{b}^2. \end{aligned}$$

Dwa pierwsze wzory możemy napisać w postaci:

$$(VI) \quad \begin{aligned} |\bar{a} + \bar{b}|^2 &= |\bar{a}|^2 + 2|\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi + |\bar{b}|^2, \\ |\bar{a} - \bar{b}|^2 &= |\bar{a}|^2 - 2|\bar{a}| |\bar{b}| \cos \varphi + |\bar{b}|^2. \end{aligned}$$

Wzory te wyrażają t. zw. *twierdzenie Carnota*, znane z trygonometrii.

Przedstawienie analityczne iloczynu skalarowego. Niech $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ oznaczają wektory jednostkowe (str. 7). Z określenia iloczynu skalarowego otrzymujemy:

$$(2) \quad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0.$$

Przedstawiając wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ w postaci $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $b_x = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ (p. str. 7), możemy iloczyn $\vec{a}\vec{b}$ napisać w postaci

$$\vec{a}\vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k})(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}).$$

Wymnażając w myśl reguł mnożenia i opierając się na wzorach (2), dostajemy

$$(VII) \quad \vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Wzór powyższy pozwala obliczyć iloczyn skalarowy dwóch wektorów, gdy znane są ich współrzędne.

Jeżeli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są do siebie prostopadłe, to $\vec{a}\vec{b} = 0$, zatem

$$(VIII) \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Naodwrot, jeżeli $\vec{a}\vec{b} = 0$, to wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są do siebie prostopadłe, o ile są różne od zera. Zatem wzór (VIII) przedstawia *warunek prostopadłości* wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (różnych od zera).

§ 8. Iloczyn wektorowy. Iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy wektor $\vec{c}$ spełniający warunki następujące:

1) Długość. Jeżeli φ oznacza kąt, jaki tworzą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$, to

$$(I) \quad |\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

2) Kierunek. Wektor $\vec{c}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

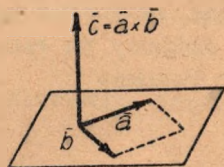
Jeżeli więc np. wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wychodzą z jednego punktu, to wektor $\vec{c}$ jest prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (p. rysunek).

3) Zwrot. Zwrot układu wektorów $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ jest zgodny z przyjętym układem współrzędnych, t. zn. lewy.

Iloczyn wektorowy oznaczamy przez

$$\vec{a} \times \vec{b}.$$

Ze wzoru (I) wynika, że $|\vec{c}|$ jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{a} = 0$ lub $\vec{b} = 0$ lub $\varphi = 0$ lub $\varphi = \pi$.



Zatem: *iloczyn wektorowy jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z czynników jest zerem, lub gdy czynniki są do siebie równoległe.*

Jeżeli iloczyn jest zerem, to odpadają oczywiście warunki 2) i 3). W szczególności mamy

$$(II) \quad \vec{a} \times \vec{a} = 0.$$

Uwaga. Wartość bezwzględna iloczynu wektorowego wynosi $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$ (p. wzór (I)). Wyrażenie to przedstawia pole równoległoboku zbudowanego na wektorach odpowiednio równych wektorom $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i wychodzących z jednego punktu (p. rys. na str. 9).

Zmiana porządku czynników. Jeżeli zmienimy porządek czynników, to otrzymamy iloczyn

$$\vec{b} \times \vec{a}.$$

Iloczyn $\vec{a} \times \vec{b}$ ma (na mocy określenia iloczynu) długość i kierunek te same, co iloczyn $\vec{b} \times \vec{a}$, lecz zwrot przeciwny. Zatem

$$(III) \quad \vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}).$$

A więc: wraz ze zmianą porządku czynników zmienia się znak iloczynu wektorowego.

Prawo łączności. Opierając się na określeniu iloczynu wektorowego, łatwo można wykazać następujące związki (gdzie m i n oznaczają liczby):

$$(IV) \quad m(\vec{a} \times \vec{b}) = (m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}),$$

$$(V) \quad (m\vec{a}) \times (n\vec{b}) = (mn)(\vec{a} \times \vec{b}).$$

$$\text{Np. } 3\vec{a} \times \vec{b} = 3(\vec{a} \times \vec{b}); \quad 2\vec{a} \times 3\vec{b} = 6(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Prawo rozdzielności względem sumy. Dla iloczynu wektorowego zachodzą wzory:

$$(VI) \quad \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}; \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Wyprowadzimy najpierw wzór pierwszy. Możemy oczywiście przyjąć, że $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ mają wspólny początek O .

Załóżmy na razie, że $|\vec{c}|=1$. Poprowadźmy przez O płaszczyznę $\Pi \perp \vec{c}$. Połóżmy

$$(1) \quad \vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$

i oznaczmy przez $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{s}'$ rzuty wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{s}$ na płaszczyznę Π (p. rys. na str. 11). Mamy oczywiście

$$(2) \quad \vec{s}' = \vec{a}' + \vec{b}'.$$

Niechaj φ będzie kątem zawartym między $\vec{c}$ i $\vec{a}$. Zatem $|\vec{a}'| = |\vec{a}| \sin \varphi = |\vec{a}| |\vec{c}| \sin \varphi$, gdyż założyliśmy, że $|\vec{c}| = 1$. A więc

$$(3) \quad |\vec{a}'| = |\vec{c} \times \vec{a}| \quad \text{i podobnie} \quad |\vec{b}'| = |\vec{c} \times \vec{b}|, \quad |\vec{s}'| = |\vec{c} \times \vec{s}|.$$

Obróćmy teraz wektory $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{s}'$ o 90° w płaszczyźnie Π około O od ręki lewej ku prawej, względem człowieka mającego stopy w początku, zaś głowę w końcu wektora $\vec{c}$. Otrzymamy wektory $\vec{a}''$, $\vec{b}''$, $\vec{s}''$. Będzie na mocy (2)

$$(4) \quad \vec{s}'' = \vec{a}'' + \vec{b}'',$$

$$(5) \quad |\vec{a}''| = |\vec{a}'|, \quad |\vec{b}''| = |\vec{b}'|, \quad |\vec{s}''| = |\vec{s}'|.$$

Wektor $\vec{a}''$ jest prostopadły do $\vec{a}$ i $\vec{c}$; zwrot układu wektorów $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{a}''\}$ jest lewy. Ponieważ nadto na mocy (3) i (5) mamy $|\vec{a}''| = |\vec{c} \times \vec{a}|$, więc $\vec{a}'' = \vec{c} \times \vec{a}$ i podobnie $\vec{b}'' = \vec{c} \times \vec{b}$, $\vec{s}'' = \vec{c} \times \vec{s}$. Na mocy więc (4) i (1) otrzymujemy

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}.$$

Wzór powyższy udowodniliśmy przy założeniu, że $|\vec{c}| = 1$. Udowodnimy go teraz w przypadku ogólnym. Niechaj $\vec{h}$ będzie wektorem o długości 1, zgodnie skierowanym z wektorem $\vec{c}$. Zatem

$$(6) \quad |\vec{h}| = 1 \quad \text{i} \quad \vec{c} = |\vec{c}| \vec{h},$$

skąd na mocy prawa łączności

$$(7) \quad \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| \vec{h} \times (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}| \{ \vec{h} \times (\vec{a} + \vec{b}) \}.$$

Ale na mocy wzoru udowodnionego dla przypadku $|\vec{c}| = 1$ i na mocy prawa łączności jest kolejno:

$$|\vec{c}| \{ \vec{h} \times \vec{a} + \vec{h} \times \vec{b} \} = |\vec{c}| \{ (\vec{h} \times \vec{a}) + (\vec{h} \times \vec{b}) \} = (|\vec{c}| \vec{h}) \times \vec{a} + (|\vec{c}| \vec{h}) \times \vec{b},$$

skąd na mocy (6) i (7) otrzymujemy już w całej ogólności:

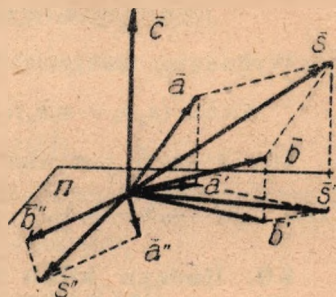
$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}.$$

Drugi ze wzorów (VI) możemy otrzymać z pierwszego, stosując wzór (III):

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = -\{ \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) \} = -\{ \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} \} = -(\vec{c} \times \vec{a}) - (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Ze wzoru (VI) wynika łatwo wzór

$$(VII) \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}.$$



$$\begin{aligned}\text{Np. } (2\bar{a} - 3\bar{b}) \times (5\bar{c} + 2\bar{d}) &= 10\bar{a} \times \bar{c} + 4\bar{a} \times \bar{d} - 15\bar{b} \times \bar{c} - 6\bar{b} \times \bar{d}. \\ (\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) &= \bar{a} \times \bar{a} - \bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{a} - \bar{b} \times \bar{b} = -2\bar{a} \times \bar{b}. \\ (3\bar{a} + 2\bar{b}) \times (5\bar{a} - 2\bar{b}) &= -16\bar{a} \times \bar{b}.\end{aligned}$$

Współrzędne iloczynu wektorowego. Oznaczając przez $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ wektory jednostkowe (str. 7), mamy:

$$(8) \quad \bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0,$$

$$(9) \quad \bar{i} \times \bar{j} = -(\bar{j} \times \bar{i}) = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = -(\bar{k} \times \bar{j}) = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = -(\bar{i} \times \bar{k}) = \bar{j}.$$

Kładąc

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k},$$

otrzymamy

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}).$$

Wykonując mnożenie, dostajemy na mocy (8) i (9):

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k}.$$

Dla $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ jest więc

$$(VIII) \quad c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x.$$

§ 9. Iloczyn kilku wektorów. 1° Weźmy najpierw pod uwagę iloczyn $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$. Kładąc $\bar{r} = \bar{b} \times \bar{c}$, otrzymamy

$$\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{a}\bar{r} = a_x r_x + a_y r_y + a_z r_z.$$

Ponieważ $r_x = b_y c_z - b_z c_y$ i. t. d., więc

$$\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

Wzór powyższy możemy napisać w postaci

$$(I) \quad \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Ze znanych własności wyznaczników wynika łatwo wzór

$$(II) \quad \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c}(\bar{a} \times \bar{b}).$$

Przypuśćmy, że wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ mają początek w początku układu. Z geometrii analitycznej wiadomo, że objętość V czworoscianu o krawędziach $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ wynosi $\frac{1}{6}$ wartości wyznacznika (I). A więc $V = \frac{1}{6} \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$.

Zatem: warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (o wspólnym początku) leżały w jednej płaszczyźnie, jest, by $V=0$, czyli by $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})=0$.

Jeżeli zaś nie zakładamy, że $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ mają wspólny początek, to — jak łatwo widzieć — warunek $\bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})=0$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ były równoległe do jednej płaszczyzny.

2° Weźmy teraz pod uwagę iloczyn $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$. Oznaczmy ten iloczyn przez $\bar{u}$ i połóżmy $\bar{r} = \bar{b} \times \bar{c}$. Zatem

$$u_x = a_y r_z - a_z r_y = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z).$$

Dodając i odejmując składnik $a_x b_x c_x$, otrzymamy

$$u_x = b_x(a_x c_x + a_y c_y + a_z b_z) - c_x(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z),$$

skąd $u_x = b_x(\bar{a}\bar{c}) - c_x(\bar{a}\bar{b})$ i podobnie $u_y = b_y(\bar{a}\bar{c}) - c_y(\bar{a}\bar{b})$, $u_z = b_z(\bar{a}\bar{c}) - c_z(\bar{a}\bar{b})$. Zatem

$$(III) \quad \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b}).$$

3° Ze wzorów (I), (II) i (III) wynikają wzory następujące:

$$(IV) \quad (\bar{a} \times \bar{b})(\bar{c} \times \bar{d}) = (\bar{a}\bar{c})(\bar{b}\bar{d}) - (\bar{a}\bar{d})(\bar{b}\bar{c}),$$

$$(V) \quad (\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d}) = \bar{b}[\bar{a}(\bar{c} \times \bar{d})] - \bar{a}[\bar{b}(\bar{c} \times \bar{d})].$$

§ 10. Funkcje wektorowe. Jeżeli każdej liczbie t przedziału (t', t'') przypisany jest wektor $\bar{w}$, wówczas powiadamy, że w przedziale (t', t'') określoną mamy *funkcję wektorową* i piszemy

$$(1) \quad \bar{w} = \bar{F}(t),$$

Współrzędne w_x , w_y , w_z są również funkcjami (już w zwykłym sensie czyli *liczbowymi*) zmiennej t . Zatem:

$$(2) \quad w_x = f(t), \quad w_y = \varphi(t), \quad w_z = \psi(t).$$

Powyższe trzy funkcje określają dokładnie funkcję wektorową (1).

Granica. Powiadamy, że funkcja wektorowa (1) ma *granice* $\bar{w}_0$ dla t dążącego do t_0 , co piszemy

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{F}(t) = \bar{w}_0,$$

gdy

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = w_{0,x}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = w_{0,y} \quad \text{ i } \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = w_{0,z}.$$

Ciągłość. Funkcja wektorowa (1) jest ciągła dla t_0 , jeżeli $\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{F}(t) = \bar{w}_0$, gdzie $\bar{w}_0 = \bar{F}(t_0)$.

Oczywiście zachodzą wówczas związki:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0), \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = \psi(t_0).$$

Funkcje f, φ, ψ są więc wtedy ciągłe dla $t = t_0$. Na odwrót, jeżeli f, φ, ψ są ciągłe dla t_0 , to funkcja wektorowa $\bar{w} = \bar{F}(t)$ jest również ciągła dla t_0 .

Pochodna. Oznaczamy przez Δt przyrost zmiennej t , a przez $\Delta \bar{w}$ odpowiedni przyrost wektora $\bar{w}$. Więc $\bar{w} + \Delta \bar{w} = \bar{F}(t + \Delta t)$, zatem $\Delta \bar{w} = \bar{F}(t + \Delta t) - \bar{F}(t)$, skąd

$$\frac{\Delta \bar{w}}{\Delta t} = \frac{\bar{F}(t + \Delta t) - \bar{F}(t)}{\Delta t}.$$

Granicę $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{w}}{\Delta t}$ nazywamy *pochodną* funkcji $\bar{F}(t)$ w punkcie t .

Pochodną oznaczamy przez $\frac{d\bar{w}}{dt}$, $\bar{w}'$ lub $\bar{F}'(t)$.

Ponieważ wektor $\Delta \bar{w}$ ma współrzędne

$$\Delta w_x = f(t + \Delta t) - f(t), \quad \Delta w_y = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t), \quad \Delta w_z = \psi(t + \Delta t) - \psi(t),$$

więc

$$w'_x = f'(t), \quad w'_y = \varphi'(t), \quad w'_z = \psi'(t).$$

Pochodne wyższych rzędów określamy w zwykły sposób: a więc drugą pochodną jako pochodną pierwszej pochodnej, trzecią pochodną jako pochodną drugiej pochodnej i t. d. Wyższe pochodne oznaczamy przez

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dt^2}, \quad \frac{d^3 \bar{w}}{dt^3}, \quad \dots \quad \text{lub} \quad \bar{w}'', \bar{w}''', \dots \quad \text{i t. d.}$$

Łatwo wykazać, że

$$w''_x = f''(t), \quad w''_y = \varphi''(t), \quad w''_z = \psi''(t) \quad \text{i t. d.}$$

Jeżeli funkcje $\bar{w} = \bar{F}(t)$ i $\bar{v} = \bar{G}(t)$ mają pochodne, to zachodzą wzory:

$$(I) \quad \frac{d(\bar{w} \pm \bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{w}}{dt} \pm \frac{d\bar{v}}{dt},$$

$$(II) \quad \frac{d(m\bar{w})}{dt} = m \frac{d\bar{w}}{dt} \quad (\text{gdzie } m \text{ jest liczbą}),$$

$$(III) \quad \frac{d(\bar{w}\bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{w}}{dt} \bar{v} + \bar{w} \frac{d\bar{v}}{dt},$$

$$(IV) \quad \frac{d(\bar{w} \times \bar{v})}{dt} = \frac{d\bar{w}}{dt} \times \bar{v} + \bar{w} \times \frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Wyprowadzimy wzór (III). Mamy $\Delta(\bar{w}\bar{v}) = (\bar{w} + \Delta\bar{w})(\bar{v} + \Delta\bar{v}) - \bar{w}\bar{v}$, więc

$$\frac{\Delta(\bar{w}\bar{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta\bar{w}}{\Delta t} \bar{v} + \bar{w} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} + \Delta\bar{w} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t},$$

skąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy (III).

Funkcje wektorowe wielu zmiennych. Możemy również rozpatrywać funkcje wektorowe wielu zmiennych. Np. funkcja wektorowa

$$\bar{w} = \bar{F}(\xi, \eta, \zeta)$$

jest funkcją trzech zmiennych ξ, η, ζ . Rzuty wektora $\bar{w}$ są wówczas określone pewnymi funkcjami

$$w_x = f(\xi, \eta, \zeta), \quad w_y = \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad w_z = \psi(\xi, \eta, \zeta).$$

Granice, ciągłość i pochodne cząstkowe funkcji wektorowych kilku zmiennych łatwo już podać, wzorując się na przypadku jednej zmiennej.

§ 11. Moment wektora. Moment wektora względem punktu. Przypuśćmy, że mamy dany wektor $\overline{AB}$ i punkt O . *Momentem wektora $\overline{AB}$ względem punktu O* nazywamy wektor $\bar{M}$, spełniający warunki następujące:

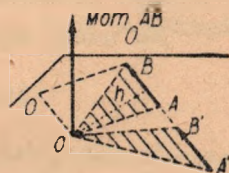
(1) $|\bar{M}|$ równa się podwójnemu polu trójkąta OAB czyli

$$|\bar{M}| = |\overline{AB}| \cdot h,$$

gdzie h oznacza odległość punktu O od $\overline{AB}$.

(2) Kierunek wektora $\bar{M}$ jest prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez O i $\overline{AB}$.

(3) Układ wektorów $(\overline{AB}, \overline{OA}, \bar{M})$ ma zwrot zgodny z układem współrzędnych, t. j. zwrot lewy.



Moment wektora AB względem punktu O oznaczać będziemy symbolem

$$\text{Mom}_O \overline{AB}.$$

Moment jest zerem tylko w przypadkach, gdy $\overline{AB} = 0$ lub gdy przedłużenie wektora $\overline{AB}$ przechodzi przez O . Jeżeli moment jest zerem, wówczas warunki (2) i (3) odpadają.

Dla wektorów równoważnych (str. 2) zachodzi następujące

Twierdzenie 1. *Wektory równoważne mają względem tego samego punktu momenty równe.*

Dowód. Przyjmijmy, że $AB \equiv A'B'$. Zatem wektory $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ są równe i leżą na tej samej prostej. Łatwo stwierdzić, że momenty obu wektorów względem O mają ten sam kierunek i zwrot. Mają również tę samą długość, gdyż trójkąty OAB i $OA'B'$ mają równe powierzchnie (równe podstawy i wspólną wysokość). A więc $\text{Mom}_O \overline{AB} = \text{Mom}_O \overline{A'B'}$, c. b. d. d.

Moment jako iloczyn wektorowy. Weźmy pod uwagę iloczyn wektorowy $\overline{AB} \times \overline{OA}$. Zauważmy, że iloczyn powyższy ma ten sam kierunek i zwrot, co $\text{Mom}_O \overline{AB}$. Mamy również $|\overline{AB} \times \overline{OA}| = |\text{Mom}_O \overline{AB}|$. Bez względu bowiem wartość iloczynu równa się polu równoległoboku $OABC$ (p. rys. na str. 15), zatem podwójnemu polu trójkąta OAB . A więc

$$\text{Mom}_O \overline{AB} = \overline{AB} \times \overline{OA}.$$

Gdybyśmy zamiast wektora $\overline{AB}$ wzięli wektor równoważny $\overline{A'B'}$, wówczas mielibyśmy

$$\text{Mom}_O \overline{A'B'} = \overline{A'B'} \times \overline{OA'}.$$

Na mocy więc poprzedniego twierdzenia

$$\text{Mom}_O \overline{AB} = \overline{A'B'} \times \overline{OA'} = \overline{AB} \times \overline{OA'}.$$

A więc: jeżeli A' jest dowolnym punktem na prostej, na której leży wektor $\overline{AB}$, wówczas

$$\text{Mom}_O \overline{AB} = \overline{AB} \times \overline{OA'}.$$

Twierdzenie 2. Jeżeli dwa wektory równe mają względem pewnego punktu równe momenty, to są równoważne.

Dowód. Zakładamy, że

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \quad \text{ i } \quad \text{Mom}_O \overline{AB} = \text{Mom}_O \overline{A'B'}.$$

Zatem $\overline{AB} \times \overline{OA} = \overline{A'B'} \times \overline{OA'}$, skąd $\overline{AB} \times \overline{OA} = \overline{AB} \times \overline{OA'}$, więc $\overline{AB} \times (\overline{OA} - \overline{OA'}) = 0$. Ponieważ zaś $\overline{OA} - \overline{OA'} = \overline{A'A}$, więc

$$\overline{AB} \times \overline{A'A} = 0.$$

Lecz $\overline{AB} \times \overline{A'A} = \text{Mom}_{A'} \overline{AB}$, więc

$$\text{Mom}_{A'} \overline{AB} = 0.$$

Wynika stąd, że punkt A' leży na przedłużeniu wektora $\overline{AB}$. Ponieważ nadto $\overline{AB}$ jest równoległy do $\overline{A'B'}$, więc $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ leżą na tej samej prostej.

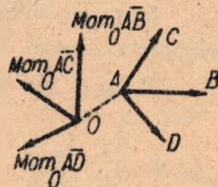
Moment sumy wektorów o wspólnym początku. Załóżmy, że dane są wektory $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ (t. j. oba o początku w punkcie A). Niechaj $\overline{AD}$ będzie ich sumą.

Mamy

$$\text{Mom}_O \overline{AD} = \overline{AD} \times \overline{OA} = (\overline{AB} + \overline{AC}) \times \overline{OA},$$

zatem $\text{Mom}_O \overline{AD} = \overline{AB} \times \overline{OA} + \overline{AC} \times \overline{OA}$, więc

$$\text{Mom}_O \overline{AD} = \text{Mom}_O \overline{AB} + \text{Mom}_O \overline{AC}.$$



Podobny wzór otrzymamy dla sumy kilku wektorów. A więc: suma momentów kilku wektorów o wspólnym początku równa się momentowi ich sumy o tym samym początku.

Współrzędne momentu. Położenie wektora $\vec{a}$ jest określone, jeśli dane są jego rzuty i współrzędne x, y, z dowolnego punktu A prostej l , na której wektor $\vec{a}$ leży. Niechaj x_0, y_0, z_0 będą współrzędnymi punktu O . Mamy

$$\text{Mom}_O \vec{a} = \vec{a} \times \overline{OA}.$$

Rzuty wektora $\overline{OA}$ wynoszą $x - x_0, y - y_0, z - z_0$. Zatem, oznaczając przez $\vec{M}$ moment względem O , otrzymamy:

$$(I) \quad \begin{aligned} M_x &= a_y(z - z_0) - a_z(y - y_0), & M_y &= a_z(x - x_0) - a_x(z - z_0), \\ M_z &= a_x(y - y_0) - a_y(x - x_0). \end{aligned}$$

Jeżeli w szczególności punkt O jest początkiem układu, to $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$, a więc

$$(II) \quad M_x = a_y z - a_z y, \quad M_y = a_z x - a_x z, \quad M_z = a_x y - a_y x.$$

Przypuśćmy, że $\bar{a} = \bar{a}'$. Zatem, oznaczając przez $\bar{M}$ i $\bar{M}'$ momenty wektorów względem dowolnego punktu, mamy $\bar{a} = \bar{a}'$, $\bar{M} = \bar{M}'$ czyli

$$a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z, \quad M_x = M'_x, \quad M_y = M'_y, \quad M_z = M'_z.$$

Na odwrót, jeżeli zachodzą powyższe równości, to $\bar{a} = \bar{a}'$ i $\bar{M} = \bar{M}'$, zatem na mocy twierdzenia 2, str. 17, wektory $\bar{a}$ i $\bar{a}'$ są równoważne.

A więc: rzuty wektora $\bar{a}$ i rzuty momentu $\bar{M}$ względem dowolnego punktu wyznaczają długość, kierunek, zwrot i położenie wektora $\bar{a}$.

Moment wektora względem prostej. Niech dane będą wektor $\bar{a}$ i prosta l . Poprowadźmy przez dowolny punkt O prostą l płaszczyznę Π prostopadłą do l . Utwórzmy rzut $\bar{a}'$ wektora $\bar{a}$ na płaszczyznę Π .

Moment wektora $\bar{a}'$ względem O nazywamy *momentem wektora $\bar{a}$ względem prostej l* i oznaczamy symbolem $\text{Mom}_l \bar{a}$.

$\text{Mom}_l \bar{a}$ nie zależy oczywiście od obioru punktu O .

$\text{Mom}_l \bar{a}$ jest zerem tylko w następujących przypadkach:

1° gdy $\bar{a} = 0$,

2° gdy $\bar{a} \parallel l$, gdyż wtedy $\bar{a}' = 0$,

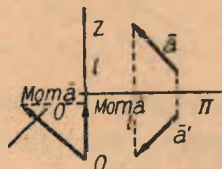
3° gdy przedłużenie $\bar{a}$ przecina l , gdyż wtedy przedłużenie $\bar{a}'$ przechodzi przez O .

Jeżeli d oznacza odległość $\bar{a}$ od l , zaś φ kąt między $\bar{a}$ i l , to łatwo można okazać, że

$$(III) \quad |\text{Mom}_l \bar{a}| = d |\bar{a}| \sin \varphi.$$

Obierzmy prostą l za oś z , płaszczyznę Π za płaszczyznę xy . Połóżmy $\bar{M} = \text{Mom}_O \bar{a}$ i $\bar{L} = \text{Mom}_l \bar{a}$. Ponieważ $\bar{a}'$ ma rzuty $a'_x = a_x$, $a'_y = a_y$, $a'_z = 0$, więc $L_x = 0$, $L_y = 0$ i $L_z = a_x y - a_y x$, gdzie x, y, z są współrzędnymi początku wektora $\bar{a}$. Widzimy więc, że $M_z = L_z$.

A zatem: $\text{Mom}_l \bar{a}$ jest rzutem na prostą l momentu wektora $\bar{a}$ względem dowolnego punktu tej prostej.



II. Układy wektorów

§ 12. Moment ogólny układu wektorów. Niech dany będzie układ wektorów:

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n.$$

Oznaczmy przez $\vec{s}$ *sumę układu* (t. j. sumę wektorów układu). A więc

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n.$$

Obierzmy dowolny punkt O .

Momentem ogólnym lub krótko *momentem układu względem O* nazywamy sumę momentów poszczególnych wektorów względem O . Oznaczamy go przez

$$\bar{M}_O.$$

Mamy więc

$$\bar{M}_O = \text{Mom}_O \vec{a}_1 + \text{Mom}_O \vec{a}_2 + \dots + \text{Mom}_O \vec{a}_n.$$

Moment ogólny czasem oznaczamy też przez

$$\text{Mom}_O(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n).$$

Obierzmy inny punkt O' . Mamy

$$\bar{M}_{O'} = \text{Mom}_{O'} \vec{a}_1 + \text{Mom}_{O'} \vec{a}_2 + \dots + \text{Mom}_{O'} \vec{a}_n.$$

Ponieważ $\text{Mom}_O \vec{a}_1 = \vec{a}_1 \times \overrightarrow{OA_1}$, gdzie A_1 jest początkiem wektora $\vec{a}_1$ i t. d., więc

$$\bar{M}_{O'} = \vec{a}_1 \times \overrightarrow{O'A_1} + \vec{a}_2 \times \overrightarrow{O'A_2} + \dots$$

Lecz $\overrightarrow{O'A_1} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_1}$ i t. d., zatem

$$\bar{M}_{O'} = \vec{a}_1 \times (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_1}) + \vec{a}_2 \times (\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_2}) + \dots$$

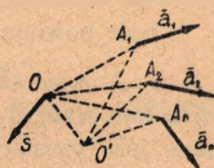
Po wymnożeniu otrzymujemy:

$$(1) \quad \bar{M}_{O'} = (\vec{a}_1 \times \overrightarrow{O'O} + \vec{a}_2 \times \overrightarrow{O'O} + \dots) + (\vec{a}_1 \times \overrightarrow{OA_1} + \vec{a}_2 \times \overrightarrow{OA_2} + \dots).$$

Lecz $\vec{a}_1 \times \overrightarrow{O'O} + \vec{a}_2 \times \overrightarrow{O'O} + \dots = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots) \times \overrightarrow{O'O} = \vec{s} \times \overrightarrow{O'O}$. Suma zawarta w drugim nawiasie równości (1) przedstawia moment układu względem O . Zatem

$$(I) \quad \bar{M}_{O'} = \vec{s} \times \overrightarrow{O'O} + \bar{M}_O.$$

Iloczyn $\vec{s} \times \overrightarrow{O'O}$ jest momentem względem O' sumy układu wektorów o początku O .



A więc: jeżeli zmieniamy punkt, względem którego wyznaczamy ogólny moment układu, wówczas moment ten zmienia się o moment sumy układu zaczepionej w dawnym punkcie, wziętej względem nowego punktu.

Z twierdzenia powyższego wynikają następujące wnioski:

1. Jeżeli suma układu jest zerem, to moment ogólny jest stały (t. j. nie zależy od punktu, względem którego się go wyznacza).

Jeżeli bowiem $\bar{s} = 0$, wówczas $\bar{s} \times \overline{O'O} = 0$, więc $\bar{M}_O = \bar{M}_{O'}$.

2. Jeżeli momenty ogólne względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej są równe, to suma układu jest zerem.

Założmy bowiem, że momenty ogólne względem punktów O, O', O'' nie leżących na jednej prostej są równe. Zatem

$$\bar{M}_O = \bar{M}_{O'} = \bar{M}_{O'}, \text{ skąd } \bar{s} \times \overline{O'O} = 0 \text{ i } \bar{s} \times \overline{O''O} = 0.$$

Jeżeli więc $\bar{s} \neq 0$, to $\bar{s} \parallel \overline{OO'}$ i $\bar{s} \parallel \overline{OO''}$, co niemożliwe, gdy O, O', O'' nie leżą na jednej prostej.

3. Jeśli punkt, względem którego wyznaczamy moment ogólny, przesuwa się wzdłuż prostej równoległej do sumy układu, wówczas moment nie ulega zmianie.

Jeśli bowiem $\bar{s} \parallel \overline{O'O}$, to $\bar{s} \times \overline{O'O} = 0$, więc $\bar{M}_O = \bar{M}_{O'}$.

4. Iloczyn skalarowy momentu ogólnego przez sumę układu jest wielkością stałą (t. j. nie zależy od punktu, względem którego moment jest wyznaczony).

Pomnóżmy bowiem obustronnie równość (I) skalarowo przez $\bar{s}$. Otrzymamy $\bar{s} \bar{M}_O = \bar{s}(\bar{s} \times \overline{O'O}) + \bar{s} \bar{M}_O$, lecz $\bar{s} \times \overline{O'O} \perp \bar{s}$, zatem $\bar{s}(\bar{s} \times \overline{O'O}) = 0$, skąd

$$\bar{s} \bar{M}_O = \bar{s} \bar{M}_{O'}.$$

Iloczyn skalarowy momentu ogólnego przez sumę nazywa się parametrem układu.

5. Rzut momentu na kierunek sumy jest wielkością stałą (przy czym zakłada się, że suma jest różna od zera).

Mamy bowiem na mocy wniosku 4 i określenia iloczynu skalarowego $|\bar{s}| \text{Rzut}_s \bar{M}_O = |\bar{s}| \text{Rzut}_s \bar{M}_{O'}$, skąd

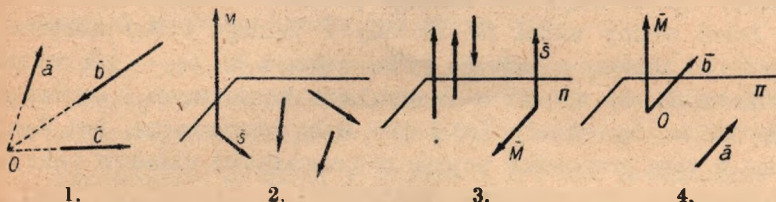
$$\text{Rzut}_s \bar{M}_O = \text{Rzut}_s \bar{M}_{O'}.$$

§ 13. Parametr. Wyznaczymy obecnie parametr (t. j. iloczyn skalarowy momentu ogólnego przez sumę) dla pewnych układów występujących często w mechanice.

Układem *środkowym* lub *centralnym* nazywamy układ, w którym przedłużenia poszczególnych wektorów przechodzą przez pewien stały punkt O , zwany *środkiem* (rys. 1).

Moment układu względem środka jest zerem, gdyż moment każdego wektora jest zerem. Zatem i parametr jest zerem.

A więc: *parametr układu środkowego jest zerem.*



Układem *plaskim* nazywamy układ, w którym wszystkie wektory leżą w jednej płaszczyźnie Π (rys. 2).

Moment ogólny układu względem dowolnego punktu O płaszczyzny Π jest prostopadły do Π , gdyż momenty poszczególnych wektorów względem O są prostopadłe do Π . Ponieważ suma leży w płaszczyźnie Π , więc suma jest prostopadła do momentu ogólnego. Wynika stąd, że parametr jest zerem.

A więc: *parametr układu płaskiego jest zerem.*

Układem *równoległym* nazywamy układ, w którym wszystkie wektory są równoległe (rys. 3).

Jeżeli suma $\bar{s}$ jest zerem, to parametr jest oczywiście równy zeru. Załóżmy więc, że $\bar{s} \neq 0$. Obierzmy dowolny punkt O . Momenty poszczególnych wektorów względem O leżą w płaszczyźnie Π prostopadłej do wektorów układu i przechodzącej przez O . Zatem moment ogólny leży również w płaszczyźnie Π . Ponieważ $\bar{s} \perp \Pi$, więc $\bar{s}$ jest prostopadłe do momentu ogólnego, wobec czego parametr jest zerem.

A więc: *parametr układu równoległego jest zerem.*

Założmy teraz, że wektory $\bar{a}$ i $\bar{b}$ są *skośne* (t. j. nie leżące w jednej płaszczyźnie). Niechaj O będzie początkiem wektora $\bar{b}$ (rys. 4).

Moment $\bar{M}$ układu $(\bar{a}, \bar{b})$ względem O równy jest oczywiście $\text{Mom}_O \bar{a}$. Parametr K wynosi $K = \bar{M} \bar{s} = \bar{M}(\bar{a} + \bar{b}) = \bar{M} \bar{a} + \bar{M} \bar{b}$. Lecz $\bar{M} = \text{Mom}_O \bar{a}$ jest prostopadły do płaszczyzny Π przechodzącej

przez O i wektor $\bar{a}$. Ponieważ w płaszczyźnie Π leży wektor $\bar{a}$, zaś nie leży wektor $\bar{b}$, więc moment $\bar{M}$ jest prostopadły do $\bar{a}$, nie jest natomiast prostopadły do $\bar{b}$, skąd na mocy ostatniej równości $K = \bar{M}\bar{b} \neq 0$.

A więc: parametr układu złożonego z dwóch wektorów skośnych jest różny od zera.

§ 14. Układy równoważne. Dwa układy wektorów $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots)$ i $(\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots)$ nazywamy *równoważnymi*, jeżeli mają równe sumy i równe momenty ogólne względem każdego punktu.

Jeżeli mamy układ $(\bar{a})$ złożony z jednego tylko wektora $\bar{a}$ i układ $(\bar{a}')$ złożony z jednego tylko wektora $\bar{a}'$, to — jak wynika z twierdzenia 2, str. 17 — warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by układy $(\bar{a})$ i $(\bar{a}')$ były równoważne, jest $\bar{a} = \bar{a}'$. A więc w tym przypadku pojęcie równoważności układów pokrywa się z pojęciem równoważności wektorów.

W przypadku ogólnym mamy następujące twierdzenia:

1. Jeżeli dwa układy mają równe sumy i równe momenty ogólne względem pewnego punktu, to układy te są równoważne.

Wynika to ze wzoru (I), str. 19. Jeżeli bowiem momenty względem punktu O są równe i sumy są równe, to momenty względem każdego punktu O' będą równe, gdyż przy zastąpieniu punktu O przez O' ulegną one równym zmianom w obu układach.

2. Jeżeli dwa układy mają względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej równe momenty, to układy te są równoważne.

Jeżeli bowiem oznaczymy przez O_1, O_2, O_3 punkty, względem których momenty ogólne obu układów są równe, zaś przez $\bar{s}$ i $\bar{s}'$ sumy tych układów, to otrzymamy ze wzoru (I), str. 19, $\bar{s} \times \overline{O_1 O_2} = \bar{s}' \times \overline{O_1 O_2}$ i $\bar{s} \times \overline{O_1 O_3} = \bar{s}' \times \overline{O_1 O_3}$, skąd

$$(\bar{s} - \bar{s}') \times \overline{O_1 O_2} = 0 \quad \text{i} \quad (\bar{s} - \bar{s}') \times \overline{O_1 O_3} = 0.$$

Gdyby było $\bar{s} - \bar{s}' \neq 0$, to mielibyśmy $\bar{s} - \bar{s}' \parallel \overline{O_1 O_2}$ i $\bar{s} - \bar{s}' \parallel \overline{O_1 O_3}$, co niemożliwe, bo O_1, O_2, O_3 nie leżą na jednej prostej. Jest zatem $\bar{s} - \bar{s}' = 0$, czyli $\bar{s} = \bar{s}'$, skąd na mocy poprzedniego twierdzenia wynika równoważność układów.

Z określenia parametru wnosimy natychmiast, że układy równoważne mają równe parametry.

Twierdzenie odwrotne jest oczywiście fałszywe.

Układy równoważne zeru. Jeżeli suma układu jest zerem, to — jak wiemy — moment ogólny jest stały. Otóż jeżeli suma układu jest zerem i moment ogólny jest zerem, układ nazywamy *układem równoważnym zeru*.

Układ równoważny zeru jest równoważny wektorowi zerowemu.

Aby przekonać się, czy układ jest równoważny zeru, wystarczy zbadać, czy jego suma i moment względem jakiegoś dowolnego punktu są równe zeru.

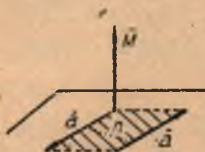
Z twierdzenia 2, str. 20 wynika łatwo, że *układ jest równoważny zeru, jeżeli moment ogólny układu względem trzech punktów nie leżących na jednej prostej jest równy zeru*.

Układ trzech wektorów równoważnych zeru. Jeżeli układ złożony z trzech wektorów, jest równoważny zeru, to przedłużenia tych wektorów przechodzą przez jeden punkt (lub wektory są równoległe).

Przyjmijmy, że układ wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jest równoważny zeru. Moment ogólny względem A (początku wektora $\vec{a}$) jest więc zerem, skąd $\text{Mom}_A \vec{b} + \text{Mom}_A \vec{c} = 0$, a więc $\text{Mom}_A \vec{b} = -\text{Mom}_A \vec{c}$. Wynika stąd, że wektory $\vec{b}$ i $\vec{c}$ leżą w płaszczyźnie Π przechodzącej przez A . Ponieważ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, więc $\vec{c} = -\vec{b} - \vec{a}$, zatem $\vec{a}$ także leży w płaszczyźnie Π . Oznaczmy przez O punkt, w którym przecinają się wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ponieważ moment ogólny układu względem O redukuje się do momentu wektora $\vec{c}$ względem O , więc $\text{Mom}_O \vec{c} = 0$, zatem $\vec{c}$ przechodzi również przez O . Wreszcie, jeżeli $\vec{a} \parallel \vec{b}$, to również $\vec{a} \parallel \vec{c}$, bo $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$ (p. str. 21, rys. 1).

§ 15. Para wektorów. Parą wektorów nazywamy układ złożony z dwu wektorów $\vec{a}$ i $-\vec{a}$ równoległych, lecz przeciwnie skierowanych i równych co do długości.

Ponieważ suma pary wektorów jest równa zeru, więc moment pary jest stały. Obliczając go względem początku wektora $\vec{a}$, widzimy, że moment wektora $\vec{a}$ jest zerem, moment zaś wektora $-\vec{a}$, jest prostopadły do płaszczyzny pary i równy polu równoległoboku zbudowanego na wektorach wchodzących w skład pary.



A więc: *moment pary wektorów jest równy polu równoległoboku zbudowanego na wektorach pary i jest prostopadły do płaszczyzny pary*.

Jeżeli wektory pary leżą na tej samej prostej, to oczywiście moment jest zerem.

Jeśli h oznacza odległość wektorów $\vec{a}$ i $-\vec{a}$ zaś $\vec{M}$ moment pary, to

$$(1) \quad |\vec{M}| = |\vec{a}| \cdot h.$$

Do danego wektora $\vec{M}$ można zawsze znaleźć parę o momencie równym $\vec{M}$. Wystarczy na płaszczyźnie prostopadłej do $\vec{M}$ obrać dowolny równoległobok o polu równym $|\vec{M}|$. Przeciwniegi boki, odpowiednio skierowane, utworzą szukaną parę wektorów. Oczywiście, zadanie to możemy rozwiązać na nieskończenie wiele sposobów.

Dwie pary o równych momentach tworzą układy równoważne. Jeżeli więc parę wektorów dowolnie przesuniemy lub skrećimy w płaszczyźnie pary, to otrzymamy parę równoważną.

§ 16. Redukcja układu wektorów. Niech dany będzie układ S złożony z wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Zajmiemy się wyznaczeniem najprostszego układu równoważnego układowi S .

Obierzmy dowolny punkt O . Oznaczmy przez $\vec{s}$ sumę układu S , przez $\vec{M}$ moment ogólny względem O . Weźmy pod uwagę układ R złożony z pary $(\vec{a}, -\vec{a})$ o momencie równym $\vec{M}$ i z wektora $\vec{s}$ o początku O . Układy R i S są oczywiście równoważne, bo mają sumy równe $\vec{s}$ i momenty względem O równe $\vec{M}$.

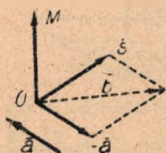
A więc: *każdy układ wektorów równoważny jest układowi złożonemu ze sumy o początku w dowolnym punkcie O i pary o momencie równym momentowi układu względem O .*

Jest to t. zw. *twierdzenie o redukcji*. Punkt O nazywamy *środkiem redukcji*.

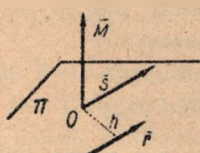
Parę $(\vec{a}, -\vec{a})$ możemy tak dobrać, by punkt O był początkiem wektora $-\vec{a}$. Zastąpmy wektory $\vec{s}$ i $-\vec{a}$ ich sumą $\vec{b}$ o początku O (rys. 1). Układ złożony z wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest oczywiście równoważny układowi S .

Zatem: *każdy układ wektorów równoważny jest układowi dwu wektorów, z których jeden ma początek w punkcie dowolnie obranym.*

Wszelki układ wektorów jest więc równoważny pewnemu



1.



2.

układowi złożonemu z wektora i pary, lub z dwóch wektorów. Zajmiemy się teraz wyznaczeniem warunków, przy których dany układ jest równoważny jednemu tylko wektorowi lub jednej parze.

Rozpatrzmy kolejno przypadki, w których parametr układu jest różny od zera i równy zeru.

1^o Parametr różny od zera. Układ złożony z jednego wektora lub jednej pary jest układem płaskim, ma zatem parametr $K=0$. Jeżeli więc parametr układu S jest różny od zera, to układ S nie może być równoważny jednemu wektorowi ani parze wektorów, ponieważ układy równoważne mają równe parametry.

Załóżmy teraz, że układ S o parametrze $K \neq 0$ równoważny jest układowi R złożonemu z dwu wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Parametr układu R jest zatem także różny od zera. Wynika stąd, że wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nie mogą leżeć w jednej płaszczyźnie, są więc skośne (p. § 13, str. 21 i 22).

Zatem: jeżeli parametr układu jest różny od zera, to układ jest równoważny układowi dwu wektorów skośnych.

2^o Parametr równy zeru, suma różna od zera. Przypuśćmy, że parametr K układu S jest zerem, zaś suma $\vec{s} \neq 0$. Obierzmy dowolny punkt O i oznaczmy przez $\vec{M}$ moment układu S względem O . Ponieważ $K = \vec{M}\vec{s} = 0$, więc $\vec{M} \perp \vec{s}$. Przeprowadźmy przez O płaszczyznę Π prostopadłą do $\vec{M}$ (str. 24, rys. 2). Na Π możemy obrać wektor $\vec{r}$ równy wektorowi $\vec{s}$, tak, by $\text{Mom}_O \vec{r} = \vec{M}$. Odległość h wektora $\vec{r}$ od O dostaniemy z równości $|\vec{M}| = h|\vec{r}|$. Łatwo zauważyć, że układ S równoważny jest wektorowi $\vec{r}$.

A więc: jeżeli parametr układu jest równy zeru, zaś suma różna od zera, to układ równoważny jest jednemu wektorowi.

Wektor $\vec{r}$, któremu równoważny jest cały układ S , nazywa się *wektorem wypadkowym* lub krótko *wypadkową* układu S .

Nie należy mieszać sumy z wypadkową. Suma ma tylko określoną długość, kierunek i zwrot; wypadkowa ma ponadto określone położenie, t. j. prostą, na której leży.

3^o Parametr i suma równe zeru. Założmy wreszcie, że zarówno parametr jak suma układu są równe zeru. Na mocy twierdzenia o redukcji wynika stąd, że układ jest równoważny parze wektorów. Ponieważ suma jest zerem, więc moment ogólny $\vec{M}$ jest stały.

Jeżeli $\vec{M} \neq 0$, wówczas para wektorów jest najprostszym układem równoważnym danemu. Jeżeli zaś $\vec{M} = 0$, to ponieważ z założenia suma równa się zeru, więc układ jest równoważny zeru, czyli wektorowi zerowemu.

A więc: układ o parametrze i sumie równych zeru jest równoważny parze wektorów lub wektorowi zerowemu, zależnie od tego czy moment ogólny jest różny od zera czy równy zeru.

Powyższe wyniki zebrane są w następującej tabelce:

Parametr	Suma	Moment	Najprostszy układ równoważny
$K \neq 0$	—	—	wektor i para lub dwa wektory skośne
$K = 0$	$\bar{s} \neq 0$	—	wektor wypadkowy
	$\bar{s} = 0$	$\bar{M} \neq 0$	para wektorów
	$\bar{s} = 0$	$\bar{M} = 0$	wektor zerowy

Wynikają z nich łatwo twierdzenia następujące:

1. Jeżeli moment układu jest zerem względem pewnego punktu O , to układ ma wypadkową o początku w O .

2. Układ środkowy ma wypadkową zaczepioną w środku.

Twierdzenia te wynikają z twierdzenia o redukcji (str. 24), jeżeli za środek redukcji wziąć punkt O (wzgl. środek układu).

3. Układ płaski ma wypadkową albo jest równoważny parze.

4. Układ równoległy ma wypadkową albo jest równoważny parze.

Twierdzenia 3 i 4 otrzymujemy od razu z tabelki, gdyż w obu przypadkach parametr K jest zerem.

§ 17. Oś środkowa. Skrętnik. Niech dany będzie układ S o sumie różnej od zera. Wyznamy miejsce geometryczne punktów, względem których moment ogólny jest równoległy do $\bar{s}$ (lub $=0$).

Obierzmy w tym celu dowolny punkt O . Niechaj $\bar{M}_O = \overline{OA}$ będzie momentem ogólnym układu względem punktu O , zaś $\overline{OB}$ rzutem $\bar{M}_O$ na $\bar{s}$.

Wyznamy teraz punkt O' , względem którego moment sumy $\bar{s}$ o początku w O , równa się $\overline{AB}$. Punkt taki znajdziemy w odległości d od O na prostej prostopadłej w punkcie O do $\overline{AB}$ i $\bar{s}$, gdzie d spełnia warunek:

$$d \cdot |\bar{s}| = |\overline{AB}|.$$

Mamy zatem $\text{Mom}_O \bar{s} = \overline{AB}$ czyli

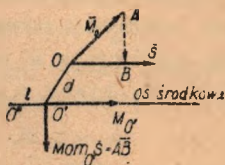
$$\bar{s} \times \overline{O'O} = \overline{AB},$$

więc na mocy (I), str. 19

$$\bar{M}_O = \bar{s} \times \overline{O'O} + \bar{M}_O,$$

skąd

$$\bar{M}_O = \overline{AB} + \overline{OA} = \overline{OB}.$$



A więc $\bar{M}_O$ jest równoległy do $\bar{s}$ (lub $=0$, gdy $\bar{M}_O \perp \bar{s}$).

Przeprowadźmy przez O' prostą l równoległą do sumy $\bar{s}$. Dla dowolnego punktu O'' prostej l zachodzi związek $\bar{s} \parallel \overline{O'O''}$, więc $\bar{s} \times \overline{O'O''} = 0$, skąd $\bar{M}_O = \bar{M}_{O'}$ (p. str. 20, wniosek 3).

A więc: moment ogólny względem dowolnego punktu prostej l jest równoległy do $\bar{s}$ (lub $=0$).

Punkty poza prostą l nie posiadają powyższej własności. Jeżeli bowiem dla jakiegoś punktu O_1 moment $\bar{M}_{O_1}$ jest równoległy do $\bar{s}$ lub równy zeru, to na mocy twierdzenia 5, str. 20, mamy $\text{Bzut}_{\bar{s}} \bar{M}_{O_1} = \text{Rzut}_{\bar{s}} \bar{M}_O$. Zatem $\bar{M}_{O_1} = \bar{M}_O$. Wynika stąd na mocy wzoru (I), str. 19, że $\bar{s} \times \overline{O'O_1} = 0$, czyli że $\bar{s} \parallel \overline{O'O_1}$. Punkt O_1 leży więc na prostej l .

Udowodniliśmy zatem, że szukanym miejscem geometrycznym jest prosta równoległa do $\bar{s}$. Prosta tę nazywamy *osią środkową* układu.

Oś środkowa układu jest to więc prosta o tej własności, że moment ogólny względem dowolnego jej punktu jest równoległy do sumy lub równy zeru.

A więc: układ, którego suma jest różna od zera, posiada jedną (i tylko jedną) oś środkową.

Układ złożony z wektora i pary o momencie równoległym do wektora nazywamy *skrętnikiem*.

W szczególności skrętnikiem nazywamy jeden wektor lub parę.

Obierając punkt na osi środkowej, widzimy, że na mocy tw. o redukcji, str. 24, układ redukuje się do skrętnika. Jeśli suma układu jest zerem, to układ redukuje się do pary wektorów, a więc również do skrętnika.

Zatem: *wszelki układ jest równoważny pewnemu skrętnikowi.*

§ 18. Środek wektorów równoległych. Niech dany będzie układ wektorów równoległych $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ o sumie różnej od zera. Oznaczmy przez $\bar{w}$ wektor o długości 1, równoległy do wektorów układu. Wektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ możemy przedstawić w postaci

$$\bar{a}_1 = a_1 \bar{w}, \quad \bar{a}_2 = a_2 \bar{w}, \quad \dots, \quad \bar{a}_n = a_n \bar{w}$$

gdzie liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ są co do wartości bezwzględnej równe długościom wektorów $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$. Zatem $\bar{s} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \bar{w}$. Ponieważ $\bar{s} \neq 0$, więc $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$.

Obierzmy dowolny punkt O' i oznaczmy przez $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ wektory $\overline{O'A_1}, \overline{O'A_2}, \dots, \overline{O'A_n}$, gdzie $A_1, A_2, \dots, A_n$ są początkami wektorów $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$. A więc

$$\bar{M}_{O'} = a_1 \bar{w} \times \bar{r}_1 + a_2 \bar{w} \times \bar{r}_2 + \dots + a_n \bar{w} \times \bar{r}_n$$

czyli

$$(1) \quad \bar{M}_{O'} = \bar{w} \times \sum a_i \bar{r}_i.$$

Obierzmy punkt O tak, by

$$(2) \quad \bar{r} = \overline{O'O} = \frac{\sum a_i \bar{r}_i}{\sum a_i}.$$

Na mocy wzoru (I), str. 19, jest

$$(3) \quad \bar{M}_O = \bar{s} \times \overline{OO'} + \bar{M}_{O'}.$$

Ponieważ

$$\bar{s} \times \overline{OO'} = (\sum a_i \bar{w}) \times (-\bar{r}) = -\bar{w} \times \bar{r} \sum a_i,$$

więc według (2) jest $\bar{s} \times \overline{OO'} = -\bar{w} \times \sum a_i \bar{r}_i$. Stąd na mocy (1) i (3) wynika, że $\bar{M}_O = 0$.

Zatem wypadkowa układu przechodzi przez O (str. 26, tw. 1).

Zauważmy, że wedle (2) położenie punktu O nie zależy od kierunku $\bar{w}$ wektorów $\bar{a}_i$. Jeżeli więc skrócimy wektory $\bar{a}_i$ około ich punktów zaczepienia, to wypadkowa znowu przejdzie przez O .

Punkt O nazywa się *środkiem układu wektorów* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$.

Jeżeli współrzędne początków A_i oznaczmy przez x_i, y_i, z_i , współrzędne zaś środka przez x_0, y_0, z_0 , to obierając punkt O' w początku układu, otrzymamy na mocy (2)

$$(4) \quad x_0 = \frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}, \quad y_0 = \frac{\sum a_i y_i}{\sum a_i}, \quad z_0 = \frac{\sum a_i z_i}{\sum a_i}.$$

§ 19. Przekształcenia elementarne układu. Następujące przekształcenia układu wektorów nazywamy *elementarnymi*:

a) dodanie do układu (lub usunięcie z niego) dwóch wektorów leżących na jednej prostej, równych co do długości, lecz przeciwnie skierowanych,

b) dodanie do układu (lub usunięcie z niego) kilku wektorów o wspólnym początku i o sumie równej zeru.

Przekształcenia elementarne nie zmieniają oczywiście sumy ani momentu układu. Stosując zatem do układu przekształcenia elementarne, otrzymamy zawsze układy z nim równoważne. Przekształcenia elementarne grają ważną rolę w teorii ciała sztywnego.

Łatwo wykazać, że przy pomocy przekształceń elementarnych możemy:

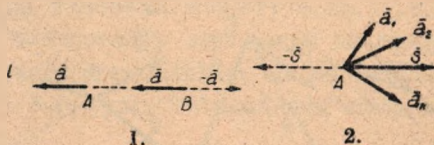
1) punkt zaczepienia wektora przesunąć do dowolnie obranego punktu na prostej, na której wektor leży,

2) kilka wektorów o wspólnym początku zastąpić ich sumą o tym samym początku,

3) jeden wektor zastąpić kilkoma wektorami o tym samym początku co wektor dany i o sumie równej wektorowi danemu.

Dowód: 1) Przypuśćmy, że wśród wektorów danego układu występuje wektor $\vec{a}$ o początku A .

Obierzmy na prostej l , na której $\vec{a}$ leży, dowolny punkt B . Dodajmy do układu dwa wektory $\vec{a}$ i $-\vec{a}$ o początku B . Wykonaliśmy więc przekształcenie elementarne (a). Usuńmy teraz z układu wektory: $\vec{a}$ (o początku A) i $-\vec{a}$. Będzie to przekształcenie elementarne (b). Operacje, jakie wykonaliśmy na układzie, sprowadzają się do przesunięcia punktu zaczepienia wektora $\vec{a}$ z A do B (p. rys. 1).



2) Przypuśćmy, że punkt A jest początkiem wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Dodajmy do układu dwa wektory o początku A : wektor $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$ i wektor $-\vec{s}$ (przekształcenie elementarne (a)). Usuńmy teraz wektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, -\vec{s}$ (przekształcenie elementarne (b)). Operacje, jakie wykonaliśmy, sprowadzają się do zastąpienia wektorów $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ich sumą $\vec{s}$ (p. rys. 2).

3) dowodzi się podobnie.

Udowodnimy teraz następujące twierdzenia:

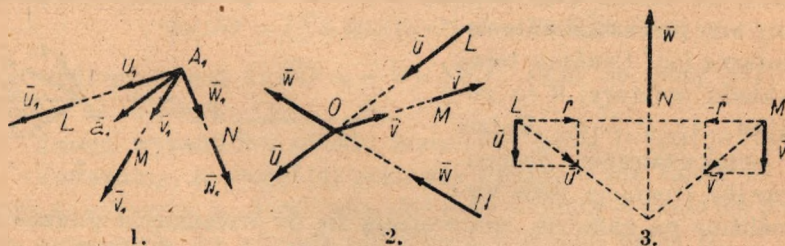
Twierdzenie 1. *Wszelki układ wektorów można sprowadzić przy pomocy przekształceń elementarnych do układu z nim równoważnego, złożonego z trzech wektorów.*

Dowód. Przypuśćmy, że mamy układ wektorów $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ zaczepionych odpowiednio w punktach $A_1, A_2, \dots, A_n$. Obierzemy trzy dowolne punkty L, M, N nie leżące na jednej prostej i takie, by w płaszczyźnie przechodzącej przez L, M, N nie leżał żaden z punktów $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Ponieważ proste A_1L, A_1M i A_1N nie leżą w jednej płaszczyźnie, więc wektor $\bar{a}_1$ możemy zastąpić trzema wektorami $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1$ o początku A_1 , leżącymi na prostych A_1L, A_1M, A_1N , przyczem oczywiście $\bar{a}_1 = \bar{u}_1 + \bar{v}_1 + \bar{w}_1$ (rys. 1). Wektory $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1$ możemy przesunąć wzdłuż prostych, na których leżą, odpowiednio do punktów L, M, N . W ten sposób zastąpiliśmy wektor $\bar{a}_1$ wektorami $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1$ zaczepionymi w punktach L, M, N . Podobnie zastąpimy każdy z wektorów $\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ trzema wektorami zaczepionymi w L, M, N .

Wektory o początku L zastąpmy teraz ich sumą $\bar{u}$, zaczepioną również w L . Podobnie wektory o początkach M i N zastąpmy sumami $\bar{v}$ i $\bar{w}$ zaczepionymi odpowiednio w M i N .

W ten sposób przy pomocy przekształceń elementarnych sprowadziliśmy dany układ do układu złożonego z trzech wektorów, c. b. d. o.



Twierdzenie 2. *Układ równoważny zeru można przy pomocy przekształceń elementarnych sprowadzić do wektora zerowego.*

Dowód. Załóżmy, że układ $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ jest równoważny zeru. Na mocy tw. 1 możemy go zastąpić przy pomocy przekształceń elementarnych układem złożonym z trzech wektorów $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, zaczepionych odpowiednio w punktach L, M, N . Układ $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ jest równoważny zeru, bo jest równoważny układowi danemu (przekształcenia elementarne nie zmieniają bowiem sumy ani momentu).

Na mocy twierdzenia ze str. 23, wektory $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ są albo równoległe albo ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie O (str. 30, rys. 2). W drugim przypadku możemy punkty zaczepienia wektorów $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ przenieść do O , a następnie wektory te usunąć, gdyż suma ich jest zerem.

Założmy więc, że wektory $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ są równoległe (str. 30, rys. 3). Gdyby $\bar{u} + \bar{v} = 0$, byłoby oczywiście $\bar{w} = 0$. Układ sprowadzałby się zatem do pary $\bar{u}, \bar{v}$. Ponieważ moment jest zerem, więc wektory $\bar{u}$ i $\bar{v}$ leżałyby na tej samej prostej; ponieważ nadto $\bar{u} + \bar{v} = 0$, więc moglibyśmy wektory $\bar{u}$ i $\bar{v}$ usunąć. Niech więc $\bar{u} + \bar{v} \neq 0$. Dodajmy dwa wektory $\bar{r}$ i $-\bar{r}$ leżące na prostej LM i zaczepione odpowiednio w L i M . Wektory $\bar{u}$ i $\bar{r}$ o początku L możemy zastąpić ich sumą $\bar{u}'$ zaczepioną również w L . Podobnie wektory $\bar{v}$ i $-\bar{r}$ możemy zastąpić ich sumą $\bar{v}'$ zaczepioną w M . Wektory $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}$ nie są równoległe, zatem wektory $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}$ możemy jak poprzednio usunąć. A więc układ równoważny zeru sprowadziliśmy przy pomocy przekształceń elementarnych do wektora zerowego, c. b. d. o.

Twierdzenie 3. *Jeżeli dwa układy wektorów są równoważne, to przy pomocy przekształceń elementarnych można jeden układ przeprowadzić w drugi.*

Dowód. Założmy, że układ wektorów $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ zaczepionych w punktach $A_1, A_2, \dots, A_n$ jest równoważny układowi wektorów $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_r)$ zaczepionych w punktach $B_1, B_2, \dots, B_r$.

Dodajmy do pierwszego układu wektory $\bar{b}_1, -\bar{b}_1$ o początku B_1 , wektory $\bar{b}_2, -\bar{b}_2$ o początku B_2 itd. Ponieważ wektory $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, -\bar{b}_1, -\bar{b}_2, \dots, -\bar{b}_r$ tworzą układ równoważny zeru, więc na mocy tw. 2 możemy układ ten przy pomocy przekształceń elementarnych usunąć, t. j. zastąpić wektorem zerowym. Po usunięciu zostanie układ $(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_r)$.

ROZDZIAŁ II

KINEMATYKA PUNKTU

I. Ruch względem układu odniesienia

§ 1. Czas. W kinematyce oprócz pojęć znanych z geometrii występuje pojęcie *czasu*. W rozważaniach kinematyki teoretycznej wystarczy przyjąć, że każdej chwili przypisana jest pewna liczba t , przyczem chwili wcześniejszej przypisana jest mniejsza liczba niż późniejszej; ponadto przy tym przyporządkowaniu każdej liczbie t odpowiadać ma, na odwrót, pewna chwila: liczbie większej chwila późniejsza.

Dla kinematyki teoretycznej jest zupełnie obojętne, w jaki sposób powyższe przyporządkowanie zostało określone. W zagadnieniach konkretnych postępujemy w sposób następujący. Obieramy dowolną *jednostkę czasu*, np. sekundę, i dowolną chwilę, którą nazywamy *chwilą początkową*. Chwili początkowej przypisujemy liczbę 0. Każdej innej chwili przyporządkowujemy liczbę t , której bezwzględna wartość równa się liczbie sekund, jakie upłynęły między chwilą początkową a daną; liczba t jest dodatnią dla chwil późniejszych od początkowej, ujemną zaś dla chwil wcześniejszych.

§ 2. Układ odniesienia. W kinematyce przyjmujemy, że dany jest pewien układ współrzędnych zwany *układem odniesienia*.

Ciało porusza się względem układu odniesienia, jeżeli zmieniają się współrzędne punktów ciała. Zadaniem kinematyki jest opis ruchu ciała względem układu odniesienia, polegający na podaniu współrzędnych punktów tego ciała dla każdej chwili czasu.

Dla kinematyki jest rzeczą obojętną, jak został obrany układ odniesienia. W zagadnieniach konkretnych obieramy układ odniesienia związany z pewnymi ciałami jak np. z ziemią, słońcem, gwiazdami stałymi i t. p.

Ruch ciała zależy od układu odniesienia. Względem jednego układu odniesienia ciało może być w spoczynku, względem innego zaś w ruchu. Podróżny siedzący w wagonie kolejowym jest względem wagonu (tj. układu odniesienia związanego z wagonem) w spoczynku, a względem ziemi jest w ruchu.

Wylania się pytanie czy w zadaniach konkretnych nie można badać ruchu ciała niezależnie od innych ciał. Ruch taki byłby t. zw. ruchem bezwzględnym (absolutnym). Okazuje się jednak (z uwagi na to, że punkty przestrzeni są nierozróżnialne), że przy pomocy pomiarów odległości i twierdzeń geometrycznych niepodobna stwierdzić w żaden sposób, czy ciało badane w dwu chwilach zmieniło swoje położenie czy nie. Pojęcie ruchu absolutnego jest więc bezużyteczne. Musimy się zatem ograniczyć do badania ruchu względnego, t. j. ruchu ciała względem innych ciał.

§ 3. Ruch punktu. Zajmiemy się na początku ruchem jednego punktu. Opis ruchu ciała sprowadza się bowiem do opisu ruchu jego punktów. Nadto w wielu przypadkach opis ruchu ciała sprowadza się praktycznie do podania ruchu jednego jego punktu, np. gdy wymiary ciała są drobne w stosunku do przebywanej drogi (ruch ziemi wkoło słońca, ruch kuli karabinowej) lub jeżeli ruch jednego punktu wyznacza ruch całego ciała (np. ruch wagonu).

Oznaczmy współrzędne poruszającego się punktu M względem pewnego układu odniesienia przez x, y, z . Współrzędne x, y, z zależą od czasu, są więc funkcjami zmiennej t :

$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t).$$

Funkcje te dają nam opis ruchu punktu M względem przyjętego układu odniesienia. Znając je, możemy podać współrzędne x, y, z punktu M w każdej chwili t .

O funkcjach f, φ i ψ zakładamy, że są ciągłe wraz z pierwszą i drugą pochodną w pewnym przedziale $\langle t_0, t_1 \rangle$, w którym ruch badamy.

Ruch punktu można określić przy pomocy jednej funkcji wektorowej. Połóżmy $\vec{r} = \overline{OM}$ (O początek układu). Zatem

$$\vec{r} = \vec{F}(t).$$

Powyższa funkcja wektorowa opisuje ruch w zupełności, podając dla każdej chwili czasu wektor $\vec{r}$, a więc położenie punktu M .

Zauważmy, że funkcje f, φ i ψ podają składowe wektora $\vec{r}$.

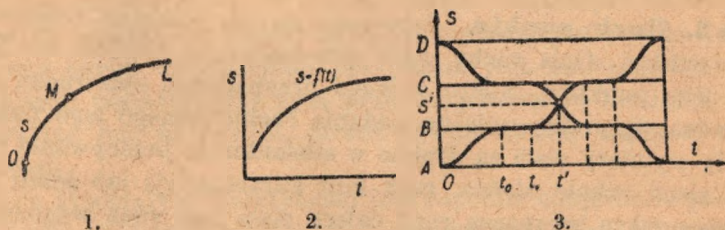
Linie, jaką zakresła punkt podczas ruchu nazywamy *torem* lub *trajektorią*.

Przypuśćmy, że torem punktu jest łuk L . Nadajmy łukowi temu pewien zwrot i obierzmy na nim dowolny punkt O , który nazwiemy *początkiem* (rys. 1). Położenie punktu M na łuku L będzie wyznaczone przez podanie liczby s , której bezwzględna wartość równa się długości łuku OM , przy czym liczba s jest dodatnia lub ujemna zależnie od tego, czy zwrot łuku OM jest zgodny ze zwrotem obranym na L czy nie. Liczbę s nazywamy *współrzedną łukową* punktu M na łuku L .

Ruch punktu M po łuku L będzie wyznaczony również funkcją

$$s=f(t),$$

podającą w każdej chwili t współrzedną łukową s punktu M .



§ 4. Wykres ruchu. Niechaj ruch punktu po krzywej L określony będzie funkcją $s=f(t)$. Obierzmy dwie osie prostopadłe s i t .

Wykres funkcji $s=f(t)$ nazywamy *wykresem* lub *diagramem* ruchu (rys. 2).

Na rys. 3 mamy wykres ruchu dwóch pociągów, z których jeden biegnie od stacji A do stacji D (przez stacje B , C), drugi zaś od stacji D do A . Z wykresu odczytujemy np., że w chwili 0 pociąg wyjechał ze stacji A i przybył do B w chwili t_0 . Stację B opuścił w chwili t_1 i t. d. Współrzedne (t', s') punktu przecięcia obu wykresów przedstawiają chwilę i miejsce spotkania obu pociągów.

§ 5. Prędkość. Załóżmy, że punkt poruszający się po krzywej L znajdował się w chwili t w punkcie A , a w chwili $t+\Delta t$ w punkcie B .

Wektor $\overline{AB}$ nazywamy *przesunięciem* poruszającego się punktu w czasie Δt . Iloraz

$$(1) \quad \overline{AB}/\Delta t = \overline{AC}$$

Prędkość jako pochodna drogi. Niech wreszcie ruch punktu po torze L określony będzie funkcją $s=f(t)$, gdzie s oznacza współrzędną łukową. Ponieważ prędkość jest styczna do toru, więc dla wyznaczenia prędkości w punkcie A wystarczy podać wielkość i zwrot prędkości. Z określenia prędkości wynika, że

$$|\bar{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{AB}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{AB}}{\Delta s} \right| \cdot \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right|,$$

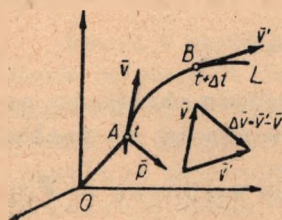
gdzie $|\Delta s|$ oznacza długość łuku AB . Ponieważ $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\overline{AB}}{\Delta s} \right| = 1$, więc

$$|\bar{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = |\dot{s}|.$$

Wykreślmy w punkcie A styczną i nadajmy jej zwrot zgodny ze zwrotem obranym na krzywej L . Jeżeli $\dot{s} > 0$, wówczas dla małych $\Delta t > 0$ jest $\Delta s > 0$; zatem punkt porusza się po torze w kierunku dodatnim, więc $\bar{v}$ ma zwrot zgodny ze zwrotem stycznej. Podobnie, jeżeli $\dot{s} < 0$, to $\bar{v}$ ma zwrot przeciwny do zwrotu stycznej. Jeżeli więc przez v oznaczmy współrzędną wektora prędkości względem stycznej, której nadaliśmy zwrot zgodny ze zwrotem toru, to

$$(IV) \quad v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

§ 6. Przyspieszenie. Załóżmy, że w chwili t punkt był w A i miał prędkość $\bar{v}$, zaś w chwili $t + \Delta t$ był w B i miał prędkość $\bar{v}'$. Połóżmy $\Delta \bar{v} = \bar{v}' - \bar{v}$.



Granice $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{p}$ nazywamy *wektorem przyspieszenia* lub krótko *przyspieszeniem* w chwili t .

Niech ruch określony będzie funkcjami $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$. Mamy $p_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$.

Ponieważ $v_x = f'(t)$ i $v'_x = f'(t + \Delta t)$, więc $\Delta v_x = v'_x - v_x = f'(t + \Delta t) - f'(t)$. Zatem $p_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f'(t + \Delta t) - f'(t)}{\Delta t} = f''(t)$; podobnie $p_y = \varphi''(t)$ i $p_z = \psi''(t)$.

Pochodne $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ oznaczamy przez $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$. Stąd:

$$(I) \quad p_x = \ddot{x}, \quad p_y = \ddot{y}, \quad p_z = \ddot{z}.$$

Zatem: rzuty przyspieszenia na osie układu równają się drugim pochodnym współrzędnych poruszającego się punktu.

Jeżeli ruch określony jest funkcją wektorową

$$\vec{r} = \vec{F}(t),$$

to — jak wynika z definicji drugiej pochodnej — mamy:

$$(II) \quad \vec{p} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Przykład 1. Punkt porusza się w płaszczyźnie w ten sposób, że jego współrzędne w chwili t wyrażają się wzorami:

$$(1) \quad x = a \cos kt, \quad y = b \sin kt \quad (a > 0, b > 0, k > 0).$$

Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie, oraz tor.

Mamy tutaj

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ak \sin kt, & \dot{y} &= bk \cos kt, \\ \ddot{x} &= -ak^2 \cos kt, & \ddot{y} &= -bk^2 \sin kt, \end{aligned}$$

a więc wartość bezwzględna prędkości będzie $|\vec{v}| = k \sqrt{a^2 \sin^2 kt + b^2 \cos^2 kt}$, zaś wartość bezwzględna przyspieszenia $|\vec{p}| = k^2 \sqrt{a^2 \cos^2 kt + b^2 \sin^2 kt}$.

Aby otrzymać tor punktu, należy znaleźć związek między współrzędnymi x, y , t. zn. wyrugować czas t . Dzielimy równania (1) odpowiednio przez a i b , podnosząc do kwadratu i dodając, otrzymujemy

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

A więc tor jest elipsą o osiach $2a, 2b$. Wektor prędkości jest oczywiście styczny do elipsy. Współrzędne wektora przyspieszenia można, z uwagi na równania (1), napisać w postaci:

$$\ddot{x} = -k^2 x, \quad \ddot{y} = -k^2 y, \quad \text{skąd} \quad |\vec{p}| = k^2 \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \ddot{y}/\ddot{x} = y/x.$$

Wektor przyspieszenia jest zatem proporcjonalny do odległości od początku układu i zawsze skierowany ku początkowi układu.

Przykład 2. Wyznaczyć prędkość, przyspieszenie i tor punktu, którego ruch określony jest równaniami

$$(2) \quad x = \frac{a}{2}(1 + \cos t), \quad y = \frac{a}{2} \sin t, \quad z = a \sin \frac{t}{2} \quad (a > 0).$$

Różniczkując, otrzymujemy

$$\dot{x} = -\frac{a}{2} \sin t, \quad \dot{y} = \frac{a}{2} \cos t, \quad \dot{z} = \frac{a}{2} \cos \frac{t}{2},$$

$$\ddot{x} = -\frac{a}{2} \cos t, \quad \ddot{y} = -\frac{a}{2} \sin t, \quad \ddot{z} = -\frac{a}{4} \sin \frac{t}{2},$$

$$\text{skąd } |\vec{v}| = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{t}{2}} \quad \text{ i } \quad |\vec{p}| = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{t}{2}}.$$

Aby wyznaczyć tor punktu, należy z równań (2) wyrugować czas, co da nam dwa związki między x, y, z określające krzywą przestrzenną, po której się punkt porusza. Rugowanie to w ogólności przedstawia duże trudności rachunkowe, w tym przykładzie jednak łatwo daje się przeprowadzić. Podnosząc równania (2) do kwadratu i dodając, otrzymujemy

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Podobnie, z pierwszych dwu równań (2) wynika, że

$$(x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2.$$

Z równań otrzymanych widzimy, że tor punktu jest krzywą przekroju kuli i walca kołowego.

Przykład 3. Ruch jednostajny prostoliniowy. Punkt porusza się w ten sposób, że przyspieszenie jest stale zerem. Zakładamy więc, że $\vec{p} = 0$. Zatem

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Wynika stąd po scałkowaniu, że

$$(3) \quad \dot{x} = c_1, \quad \dot{y} = c_2, \quad \dot{z} = c_3,$$

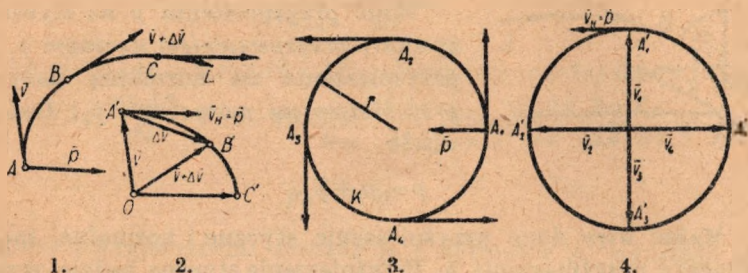
gdzie c_1, c_2, c_3 oznaczają pewne stałe. Całkując jeszcze raz, otrzymamy

$$(4) \quad x = c_1 t + d_1, \quad y = c_2 t + d_2, \quad z = c_3 t + d_3.$$

Tutaj d_1, d_2, d_3 oznaczają również pewne stałe. Równania (4) przedstawiają parametrycznie równanie linii prostej. Z równań (3) wynika, że wektor prędkości jest stały. Ruch więc odbywa się po linii prostej z prędkością stałą. Ruch taki nazywamy ruchem *jednostajnym prostoliniowym*.

Zauważmy, że założenie $\vec{p} = 0$ równoważne jest z założeniem, że wektor prędkości jest stały. Mamy bowiem $\vec{p} = \vec{v}$. Jeżeli więc $\vec{v} = \text{const.}$, to $\vec{p} = 0$ i na odwrót, jeżeli $\vec{p} = 0$, to $\vec{v} = 0$, zatem $\vec{v} = \text{const.}$

Hodograf. Niechaj punkt porusza się po krzywej L (rys. 1). Obierzmy dowolny punkt O . Dla każdej chwili t wykreślmy z punktu O wektor prędkości, jaką punkt ruchomy ma w danej chwili (rys. 2). Końce tych prędkości utworzą krzywą H zwaną *hodografem*.



Na hodografie oznaczyliśmy przez A', B', C' końce prędkości, jakie punkt poruszający się po krzywej L ma w A, B, C . Jeżeli więc punkt porusza się po torze L , to koniec odpowiedniej prędkości porusza się po hodografie.

Oznaczmy przez $\bar{v}_H$ prędkość punktu na hodografie w A' . Z określenia prędkości mamy $\bar{v}_H = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{A'B'}}{\Delta t}$. Lecz $\overline{A'B'} = \Delta \bar{v}$, więc

$$\bar{v}_H = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \bar{p}.$$

Zatem: *przyśpieszenie poruszającego się punktu równa się prędkości odpowiedniego punktu na hodografie.*

Przykład 4. Jeżeli punkt porusza się po linii prostej, to kierunek prędkości jest stały. Zatem hodograf jest też linią prostą.

Przykład 5. Załóżmy, że punkt porusza się po kole K z prędkością stałą co do wartości bezwzględnej (rys. 3).

Hodograf będzie kołem (rys. 4). Punkt po hodografie będzie poruszał się również z prędkością stałą co do wartości bezwzględnej.

Ponieważ prędkość punktu A'_1 na hodografie jest styczna do hodografu, zatem jest prostopadła do $\bar{v}_1$. Wynika stąd, że przyśpieszenie punktu poruszającego się po kole K jest skierowane ku środkowi koła i jest stałe co do wartości bezwzględnej.

§ 7. Rozkład przyspieszenia na styczne i normalne.

Ruch po torze płaskim. Niech ruch punktu A po torze L określony będzie funkcją $s = f(t)$, gdzie s oznacza współrzędną łukową. Wykreślmy w punkcie A styczną t i normalną n . Nadajmy stycznej

zwrot zgodny ze zwrotem krzywej L , zaś normalnej zwrot ku środkowi krzywizny.

Rzut przyspieszenia $\bar{p}$ na styczną nazywamy przyspieszeniem stycznym $\bar{p}_t$. Rzut przyspieszenia na normalną nazywamy przyspieszeniem normalnym $\bar{p}_n$. Jest oczywiście

$$(I) \quad \bar{p} = \bar{p}_t + \bar{p}_n.$$

Mając więc dane przyspieszenie styczne i normalne, możemy wyznaczyć przyspieszenie $\bar{p}$. Przyspieszenie styczne będzie określone przez podanie współrzędnej p_t względem stycznej. Podobnie, współrzędna p_n względem normalnej określa przyspieszenie normalne.

Oznaczmy przez $\Delta\alpha$ kąt ostry zawarty między stycznymi w punkcie A o współrzędnej łukowej s w bliskim od A punkcie B o współrzędnej łukowej $s + \Delta s$. Załóżmy, że $\Delta s > 0$. Mamy wówczas

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{\rho},$$

gdzie ρ oznacza promień krzywizny. Jak wiemy, $\bar{p} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$; zatem

$$p_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{Rzut}_t \Delta \bar{v}}{\Delta t},$$

gdzie $\text{Rzut}_t \Delta \bar{v}$ oznacza współrzędną $\Delta \bar{v}$ względem stycznej t . Lecz $\text{Rzut}_t \Delta \bar{v} = \text{Rzut}_t (\bar{v} + \Delta \bar{v}) - \text{Rzut}_t \bar{v}$. A więc $\text{Rzut}_t \Delta \bar{v} = (v + \Delta v) \cos \Delta\alpha - v$. Stąd

$$(1) \quad p_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v + \Delta v) \cos \Delta\alpha - v}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta\alpha - 1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \Delta\alpha.$$

Lecz

$$(2) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta\alpha - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta\alpha - 1}{\Delta\alpha} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Ze znanej reguły na obliczanie symbolów nieoznaczonych otrzymujemy

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta\alpha - 1}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta\alpha - 1}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{-\sin \Delta\alpha}{1} = 0.$$

Zatem na mocy (2) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta \alpha - 1}{\Delta t} = 0 \cdot \frac{1}{\varrho} v = 0$, skąd na mocy (1):

$$p_t = dv/dt = s.$$

Przejdźmy teraz do obliczenia p_n . Mamy

$$p_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Rz_{ut_n} \Delta \bar{v}}{\Delta t}.$$

Lecz $Rz_{ut_n} \Delta \bar{v} = Rz_{ut_n}(\bar{v} + \Delta \bar{v}) - Rz_{ut_n} \bar{v} = (v + \Delta v) \sin \Delta \alpha$. Więc $p_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (v + \Delta v) \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta t}$. Ponieważ $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta \alpha}{\Delta \alpha} \cdot \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = 1 \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot v$, więc

$$p_n = v^2/\varrho.$$

Zatem przyspieszenia: styczne p_t i normalne p_n wyrażają się wzorami

$$(II) \quad p_t = dv/dt = s, \quad p_n = v^2/\varrho,$$

gdzie ϱ jest promieniem krzywizny.

Ponieważ przyspieszenie styczne jest prostopadłe do przyspieszenia normalnego, więc

$$(III) \quad |p| = \sqrt{p_t^2 + p_n^2}.$$

Ze wzoru (1) wynika, że $p_n \geq 0$. Zatem przyspieszenie normalne ma zawsze zwrot ku środkowi krzywizny.

Zauważmy, że przyspieszenie styczne zależy tylko od zmiany wartości bezwzględnej prędkości, a nie zależy od zmiany jej kierunku. Przyspieszenie styczne jest wtedy i tylko wtedy stałe zerem, gdy $v = \text{const}$.

Przyspieszenie normalne zależy od promienia krzywizny ϱ , zatem od zmiany kierunku prędkości. Przyspieszenie normalne jest stałe zerem, jeżeli stałe $v=0$ lub $1/\varrho=0$. W pierwszym przypadku punkt jest w spoczynku, w drugim ruch odbywa się po linii prostej.

Przykład. Punkt porusza się po kole o promieniu r z prędkością v stałą co do wartości bezwzględnej. Zatem na mocy (1)

$$p_t = dv/dt = 0, \quad p_n = v^2/r = \text{const}$$

A więc przyspieszenie jest wówczas stałe skierowane ku środkowi i stałe co do wartości bezwzględnej (por. str. 39. przykład 5).

Ruch po torze przestrzennym. Niech punkt porusza się po torze przestrzennym L . Oznaczmy przez $\vec{v}$ prędkość punktu w A , przez $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ prędkość jego w B .

Przeprowadźmy przez styczną w punkcie A płaszczyznę Π równoległą do stycznej w punkcie B . Na tej płaszczyźnie leżą wektory $\vec{v}$ i $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ wykreślone z punktu A . Zatem w płaszczyźnie Π leży wektor $\Delta\vec{v}/\Delta t$. Gdy punkt B dąży do punktu A , płaszczyzna Π zmierza do t. zw. *płaszczyzny ściśle stycznej* w punkcie A . Wynika stąd, że przyspieszenie $\vec{p} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ leży w płaszczyźnie ściśle stycznej.

A więc: *wektor przyspieszenia leży w płaszczyźnie ściśle stycznej.*

Na płaszczyźnie ściśle stycznej leży styczna. Prosta prostopadłą do stycznej i leżącą w płaszczyźnie ściśle stycznej nazywamy *normalną główną*. Na normalnej głównej leży środek krzywizny. Tworząc rzuty przyspieszenia na styczną i normalną, otrzymamy analogicznie do wzoru (I), otrzymanego przy ruchu płaskim:

$$\vec{p} = \vec{p}_t + \vec{p}_n.$$

Nadając stycznej zwrot zgodny ze zwrotem krzywej, zaś normalnej zwrot ku środkowi krzywizny, otrzymamy postępując jak poprzednio

$$p_t = dv/dt = \dot{s} \quad \text{ i } \quad p_n = v^2/\rho,$$

gdzie ρ oznacza promień krzywizny.

Wzory powyższe są identyczne ze wzorami (II) w przypadku toru płaskiego.

Przykład 1. Ruch jednostajny. Niech punkt A porusza się po krzywej L , na której obrany jest zwrot i początek O . Załóżmy że prędkość punktu A jest stała co do wielkości (t. j. co do wartości bezwzględnej). Ruch taki nazywamy *ruchem jednostajnym* po krzywej L .

Zakładamy tedy, że $v = \dot{s} = \text{const}$. Całkując, otrzymamy

$$(3) \quad s = vt + s_0.$$

Podstawiając $t=0$, dostajemy $s=s_0$. A więc stała s_0 oznacza współrzędną łukową punktu A w chwili $t=0$.

Ruch jednostajny jest określony funkcją pierwszego stopnia względem t . Na odwrót, dowolna funkcja pierwszego stopnia $s = at + b$ określa ruch jednostajny z prędkością $v = \dot{s} = a$. Ponadto $s_0 = b$.

Na mocy (3) mamy

$$p_t = v = \dot{s} = 0, \quad p_n = v^2/\varrho.$$

Ponieważ przyspieszenie styczne jest zerem, więc przyspieszenie ma stale kierunek ku środkowi krzywizny. Wielkość przyspieszenia wynosi p_n . Zatem przyspieszenie jest co do wielkości odwrotnie proporcjonalne do promienia krzywizny ϱ (czyli wprost proporcjonalne do krzywizny $K = 1/\varrho$).

Jeżeli w szczególności punkt porusza się ruchem jednostajnym po kole o promieniu r , wówczas $\varrho = r$, a więc

$$p_n = v^2/r.$$

Zatem: jeżeli punkt porusza się po kole ruchem jednostajnym, to przyspieszenie jest stale co do wielkości i skierowane ku środkowi koła.

Przykład 2. Ruch jednostajnie przyspieszony. Punkt poruszający się po krzywej L ma stałe przyspieszenie styczne. Ruch taki nazywamy *ruchem jednostajnie przyspieszonym* po krzywej L .

Zakładając, że $p_t = p = \text{const.}$, dostajemy $\dot{s} = p_t = p$, więc

$$(4) \quad \dot{s} = v = pt + c_1, \quad s = \frac{1}{2}pt^2 + c_1t + c_2.$$

Ruch jednostajnie przyspieszony jest określony funkcją $s = f(t)$ drugiego stopnia względem t . Na odwrót, dowolna funkcja drugiego stopnia $s = at^2 + bt + c$ określa ruch jednostajnie przyspieszony. Mamy bowiem, różniczkując:

$$p_t = \dot{s} = 2a = \text{const.}$$

Przyjmijmy, że w ruchu jednostajnie przyspieszonym określonym funkcją (4) punkt w chwili $t=0$ miał prędkość $v=v_0$ i współrzedną łukową $s=s_0$.

Kładąc $t=0$, otrzymujemy z (4) $v_0 = c_1$, $s_0 = c_2$. Wstawiając w równania (4), otrzymamy

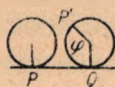
$$v = pt + v_0, \quad s = \frac{1}{2}pt^2 + v_0t + s_0.$$

W szczególności, jeżeli $v_0 = 0$ i $s_0 = 0$, dostaniemy

$$v = pt \quad \text{ i } \quad s = \frac{1}{2}pt^2.$$

Przykład 3. Ruch po cykloidzie. Niech koło o promieniu r toczy się po prostej. Zbadać ruch dowolnego punktu na obwodzie koła.

Założmy, że dany punkt P obwodu koła jest początkowo punktem styczności koła i prostej. Obierzmy ten punkt za początek układu, zaś prostą za oś x -ów. Jeżeli koło obróci się o kąt φ , punkt



zajmie nowe położenie $P'(x, y)$.

Aby wyrazić współrzędne x, y jako funkcje kąta φ , zauważmy, że nowe położenie punktu

możemy otrzymać, najpierw obracając koło dokoła środka o kąt φ w kierunku wskazówki zegara, a następnie przesuwając je wzdłuż osi x -ów o odcinek PQ równy łukowi $P'Q$ należącemu do kąta φ , którego długość wynosi $r\varphi$. Zatem $x = -r \sin \varphi + r\varphi$, $y = r - r \cos \varphi$, czyli:

$$x = r(\varphi - \sin \varphi), \quad y = r(1 - \cos \varphi).$$

Po wykonaniu przez koło pełnego obrotu, t. j. dla $\varphi = 2\pi$, punkt P znowu jest punktem styczności, poczem ruch powtarza się. Wykonując wykres, otrzymujemy krzywą złożoną z przystających łuków, zwaną *cykloidą*.

Założmy, że koło obraca się jednostajnie, t. j. że kąt φ jest proporcjonalny do czasu: $\varphi = \omega t$ (gdzie ω stałe). Równania ruchu punktu P są wówczas

$$x = r(\omega t - \sin \omega t), \quad y = r(1 - \cos \omega t).$$

Różniczkując je dwukrotnie względem czasu, otrzymujemy składowe prędkości i przyspieszenia

$$\begin{aligned} \dot{x} &= r\omega(1 - \cos \omega t), & \dot{y} &= r\omega \sin \omega t \\ \ddot{x} &= r\omega^2 \sin \omega t, & \ddot{y} &= r\omega^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Stąd

$$(5) \quad |\vec{v}| = \sqrt{r^2\omega^2(2 - 2\cos \omega t)} = 2r\omega \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right|, \quad |\vec{p}| = r\omega^2.$$

Ze względu na to, że po wykonaniu pełnego obrotu ruch powtarza się, możemy się ograniczyć do przedziału czasu $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$. Ze wzorów powyższych widzimy, że wielkość przyspieszenia punktu P jest stała, natomiast wielkość prędkości zmienia się. Mianowicie w chwili $t=0$ oraz $t=2\pi/\omega$, t. j. gdy punkt znajduje się na prostej, prędkość równa się zeru, zaś w chwili $t=\pi/\omega$ t. j. gdy punkt osiąga położenie najwyższe, prędkość jest największa i wynosi $2r\omega$.

Nadajmy cykloidzie zwrot zgodny z ruchem punktu. W czasie $0 \leq t \leq 2\pi/\omega$ mamy $v = |\vec{v}|$, zatem na mocy (5)

$$v = 2r\omega \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Przyspieszenie styczne będzie więc

$$p_t = \dot{v} = r\omega^2 \cos \frac{\omega t}{2}.$$

Aby wyznaczyć przyspieszenie normalne, obliczamy krzywiznę według znanego wzoru

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{r^2\omega^3(1 - \cos \omega t)}{8r^3\omega^3 \sin^3 \omega t/2} = \frac{1}{4r \sin \omega t/2}.$$

Zatem

$$p_n = v^2/\rho = r\omega^2 \sin \frac{\omega t}{2}.$$

Droga przebyta przez punkt do chwili t równa się, z uwagi na to, że $ds = v dt$,

$$s = \int_0^t ds = \int_0^t v dt = \int_0^t 2r\omega \sin \frac{\omega t}{2} dt = 4r \left(1 - \cos \frac{\omega t}{2}\right).$$

W szczególności dla $t = 2\pi/\omega$ otrzymujemy długość toru cykloidy przy pełnym obrocie koła. Długość ta wynosi $8r$.

§ 8. Prędkość i przyspieszenie kątowe. Niech punkt A porusza się po kole o promieniu r i środku M . Obierzmy zwrot na kole i punkt początkowy O (rys. 1). Oznaczmy przez φ kąt między promieniami MA i MO liczony zgodnie z obranym zwrotem. Mamy $s = r\varphi$, zatem

$$(1) \quad \dot{s} = r\dot{\varphi} \quad \text{ i } \quad \ddot{s} = r\ddot{\varphi}.$$

Pochodną $\dot{\varphi}$ nazywamy *prędkością kątową* i oznaczamy zazwyczaj przez ω .

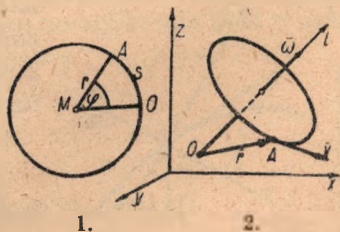
Pochodną $\ddot{\varphi}$ nazywamy *przyspieszeniem kątowym* i oznaczamy przez ϵ .

Mamy oczywiście $\dot{\varphi} = \omega$ i $\ddot{\varphi} = \epsilon$. Na mocy (1) jest więc

$$(I) \quad v = r\omega \quad \text{ i } \quad p_t = r\epsilon,$$

a ponieważ $p_n = v^2/r$, więc

$$(II) \quad p_n = r\omega^2.$$



Wektor prędkości kątovej. Niech punkt obraca się około pewnej osi l , t. zn. porusza się po kole leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do l , którego środkiem jest punkt przebiecia tej płaszczyzny osią l (str. 45, rys. 2).

Niechaj punkt w pewnej chwili t ma prędkość kątową ω . Oznaczmy przez $\bar{\omega}$ wektor położony na osi l o długości ' ω '. Zwrot wektora $\bar{\omega}$ obierzmy tak, aby człowiek, mający głowę w końcu, a stopy w początku wektora, widział ruch od ręki prawej ku lewej.

Wektor $\bar{\omega}$ nazywamy *wektorem prędkości kątovej*.

Łatwo sprawdzić, że prędkość $\bar{v}$ punktu A równa się momentowi $\bar{\omega}$ względem A :

$$(2) \quad \bar{v} = \text{Mom}_A \bar{\omega}.$$

Jeżeli przez $\bar{r}$ oznaczmy wektor $\overline{OA}$, gdzie O jest dowolnym punktem na prostej l , to $\bar{v} = \bar{\omega} \times \overline{AO}$, więc

$$(III) \quad \bar{v} = \bar{r} \times \bar{\omega}.$$

Oznaczając przez $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ rzuty wektora $\bar{\omega}$ na osie układu, przez x, y, z współrzędne punktu A i przez x_0, y_0, z_0 współrzędne punktu O , otrzymujemy

$$(IV) \quad \begin{aligned} v_x &= \omega_z(y - y_0) - \omega_y(z - z_0), & v_y &= \omega_x(z - z_0) - \omega_z(x - x_0), \\ v_z &= \omega_y(x - x_0) - \omega_x(y - y_0). \end{aligned}$$

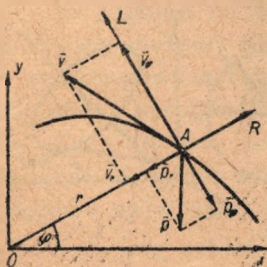
Jeżeli w szczególności l przechodzi przez początek układu, to przyjmując $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, otrzymamy

$$(V) \quad v_x = \omega_z y - \omega_y z, \quad v_y = \omega_x z - \omega_z x, \quad v_z = \omega_y x - \omega_x y.$$

§ 9. Ruch płaski w układzie bieżunowym. Jeżeli punkt porusza się w płaszczyźnie xy , to położenie punktu wyznaczone jest w zupełności przez długość odcinka $OA = r$, zwanego *promieniem wodzącym*, oraz kąt φ , jaki odcinek OA tworzy z osią x -ów. Ruch punktu określony więc będzie dwiema funkcjami

$$r = F(t), \quad \varphi = f(t).$$

Ponieważ $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, więc tworząc pochodne względem czasu t , dostaniemy:



$$(1) \quad \dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi,$$

$$(2) \quad \ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \varphi - r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi, \\ \ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} \cos \varphi - r\ddot{\varphi} \sin \varphi + r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi.$$

Z równań (1) i (2) możemy wyznaczyć $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$, znając $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$ i na odwrót. Z równania (1) otrzymamy

$$(3) \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2,$$

$$(4) \quad \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2 + y^2},$$

Często wygodnem jest rozkładać prędkość i przyspieszenie nie w kierunkach osi współrzędnych, lecz w kierunku promienia wodzącego i kierunku do niego prostopadłym, przyczem zwrot dodatni w tych kierunkach obieramy jak na rysunku. Składowe te nazywamy odpowiednio składową *radialną* i *transwersalną*.

Jeżeli a_x, a_y są współrzędnymi dowolnego wektora $\vec{a}$ wychodzącego z punktu $A(r, \varphi)$, to rzutując ten wektor na oś AR oraz AL , otrzymujemy jako składową radialną a_r i transwersalną a_φ :

$$a_r = a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi, \quad a_\varphi = -a_x \sin \varphi + a_y \cos \varphi.$$

Stosując te wzory do wektorów prędkości i przyspieszenia, otrzymujemy na mocy równań (1) i (2):

$$(I) \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi},$$

$$(II) \quad p_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad p_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}).$$

Przykład. Punkt porusza się po linii spiralnej $r = a + b\varphi$ w ten sposób, że kąt φ jest proporcjonalny do czasu t . Jest więc $\varphi = \omega t$, gdzie ω jest współczynnikiem proporcjonalności. Wówczas $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{r} = b\dot{\varphi} = b\omega$ i $\ddot{r} = 0$, skąd

$$v_r = b\omega, \quad p_r = -(a + b\omega t)\omega^2, \quad v_\varphi = (a + b\omega t)\omega, \quad p_\varphi = 2b\omega^2.$$

§ 10. Prędkość polowa. Niechaj ruch odbywa się w płaszczyźnie xy . Oznaczmy przez ΔS pole zakresłone przez promień wodzący r w czasie od t do $t + \Delta t$. Ze wzoru na obliczenie pola w układzie biegunowym współrzędnych otrzymamy

$$\Delta S = \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi + \Delta \varphi} r^2 d\varphi,$$

skąd, na podstawie twierdzenia o wartości średniej,

$$(1) \quad \Delta S = \frac{1}{2} r_s^2 \Delta \varphi,$$

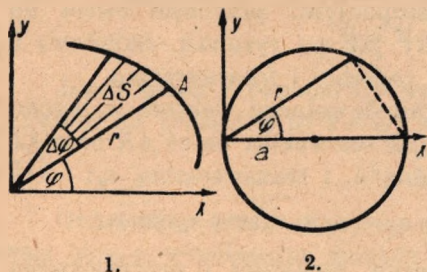
gdzie r_s oznacza wartość pośrednią między maximum a minimum promienia r w czasie od t do $t + \Delta t$.

Granice $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ nazywamy *prędkością polową* i oznaczamy ją przez A . Zatem na mocy (1) jest

$$(I) \quad A = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}.$$

Ze wzorów (4) str. 47 otrzymujemy $\varphi = \frac{1}{r^2}(xy - yx)$. Zatem na mocy (I)

$$(II) \quad A = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$



1.

2.

Przykład. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu poruszającego się po kole $x^2 - 2ax + y^2 = 0$ ze stałą prędkością polową h .

Równanie danego koła we współrzędnych biegunowych jest $r = 2a \cos \varphi$. Warunek stałości prędkości polowej wyraża się równaniem

$$(2) \quad \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = h, \text{ czyli } \varphi = 2h/r^2.$$

Różniczkując równanie koła, otrzymujemy

$$\dot{r} = -2a\dot{\varphi} \sin \varphi = -\frac{4ah}{r^2} \sin \varphi.$$

Zatem

$$v_r = -\frac{4ah}{r^2} \sin \varphi, \quad v_\varphi = \frac{2h}{r}.$$

Z uwagi na to, że prędkość polowa jest stała, wzór (II), str. 47, $p_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi})$, pociąga $p_r = 0$. Zatem przyspieszenie ma zawsze kierunek promienia wodzącego.

Różniczkując pierwsze z równań (2), otrzymujemy $2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} = 0$,

więc $\ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} = -\frac{16ah^2}{r^5} \sin \varphi$; różniczkując zaś $\dot{r}$, dostajemy

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -2a\ddot{\varphi} \sin \varphi - 2a\dot{\varphi}^2 \cos \varphi = -2a \sin \varphi \frac{16ah^2}{r^5} \sin \varphi - 2a \cos \varphi \frac{4h^2}{r^4} = \\ &= -\frac{32a^2h^2}{r^5} \sin^2 \varphi - 4a^2 \cos^2 \varphi \frac{4h^2}{r^5} = -\frac{16a^2h^2}{r^5} (1 + \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Ponieważ $r\dot{\varphi}^2 = r \frac{4h^2}{r^4} = r^2 \frac{4h^2}{r^5} = 4a^2 \cos^2 \varphi \frac{4h^2}{r^5} = \frac{16a^2 h^2}{r^5} \cos^2 \varphi$, więc ze wzoru $p_r = r - r\dot{\varphi}^2$ otrzymujemy

$$p_r = -32a^2 h^2 / r^5. \quad \dots$$

§ 11. Wymiary wielkości kinematycznych. Miara prędkości, przyspieszenia i t. p. zależy od jednostek długości i czasu. Zajmiemy się pytaniem, jak zmieniają się te miary, gdy jednostki długości i czasu będą ulegały zmianom.

Obierzmy dowolnie jednostkę długości L i jednostkę czasu T . Przypuśćmy, że punkt w ruchu jednostajnym przebył drogę długości sL w czasie tT (jeżeli np. L oznacza cm, zaś T sek, to $sL = s$ cm, $tT = t$ sek). Miara prędkości v przy jednostkach L i T wynosi

$$v = s/t.$$

Obierzmy teraz nowe jednostki długości i czasu L' , T' . Załóżmy, że między nowymi jednostkami a poprzednimi zachodzą związki

$$(1) \quad L = \lambda L', \quad T = \tau T',$$

gdzie λ i τ wskazują, ile jednostek nowych mieszczą jednostki stare. Oznaczając przez s' , t' , v' miary długości, czasu i prędkości w nowych jednostkach, otrzymamy

$$v' = s'/t'.$$

Ponieważ $sL = s\lambda L'$, zaś $tT = t\tau T'$, więc $s' = s\lambda$, $t' = t\tau$, skąd $v' = \frac{s\lambda}{t\tau} = \frac{s}{t} \cdot \frac{\lambda}{\tau}$, a więc

$$v' = v \frac{\lambda}{\tau} \quad (\text{lub} \quad v' = v \lambda \tau^{-1}).$$

Jednostkę prędkości (t. j. prędkość, której miara wynosi 1) przy jednostkach L i T oznaczamy przez

$$\frac{L}{T} \quad \text{lub} \quad LT^{-1}.$$

Prędkość, której miara wynosi v , oznaczamy przez

$$v \frac{L}{T} \quad \text{lub} \quad v LT^{-1}.$$

Np. $5 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-1}$ oznacza prędkość, której miara wynosi 5, jeżeli za jednostkę długości przyjmiemy cm a za jednostkę czasu sek.

Założmy teraz, że obraliśmy nowe jednostki długości i czasu, L' i T' , związane z dawnymi przez równania (1). Podstawmy w wyrażeniu vLT^{-1} zamiast L i T odpowiednio $\lambda L'$ i $\tau T'$, a następnie przekształćmy otrzymane wyrażenie tak, jak gdyby litery L' i T' oznaczały liczby. Otrzymamy:

$$vLT^{-1} = v\lambda L'\tau^{-1}T'^{-1} = v\lambda\tau^{-1}L'T'^{-1}.$$

Podstawmy $v' = v\lambda\tau^{-1}$. Zatem

$$vLT^{-1} = v'L'T'^{-1}.$$

Zauważmy, że v' jest według definicji miarą prędkości przy jednostkach L' i T' ; zatem wyrażenie $v'L'T'^{-1}$ przedstawia prędkość przy jednostkach długości i czasu L', T' .

Widzimy stąd, że symbol LT^{-1} pozwala wyznaczyć rachunkiem formalnym miarę prędkości przy zmianie jednostki.

Przykład. Wyznaczyć miarę prędkości 12 cm. sek^{-1} przy jednostkach m i min.

Mamy $\text{cm} = 0.01\text{ m}$, $\text{sek} = 1/60\text{ min}$. Rachując formalnie, otrzymamy

$$12\text{ cm. sek}^{-1} = 12 \cdot 0.01\text{ m} \cdot (1/60\text{ min})^{-1} = 12 \cdot 0.01 \cdot 60\text{ m. min}^{-1} = 7.2\text{ m. min}^{-1}.$$

A więc 7,2 jest miarą danej prędkości przy jednostkach m i min.

Wyrażenie LT^{-1} , w którym L i T nie oznaczają szczególnych jednostek, lecz są symbolami dowolnych jednostek długości i czasu, nazywamy *wymiarem prędkości*.

Ogólne określenie wymiaru. Pojęcie wymiaru podane wyżej dla prędkości można uogólnić na inne wielkości, jak np. przyspieszenie, prędkość i przyspieszenie kątowe, etc.

Wymiarem jakiejkolwiek wielkości A nazywać będziemy wyrażenie

$$L^{\alpha} T^{\beta},$$

gdzie wykładniki α, β są liczbami spełniającymi warunek: jeżeli a jest miarą wielkości A przy jednostkach długości i czasu L, T , zaś a' jej miarą przy jednostkach L', T' związanych z L i T równaniami (1), to

$$(2) \quad a' = a\lambda^{\alpha}\tau^{\beta}.$$

Wymiar wielkości A oznaczamy przez $[A]$. Zatem

$$[A] = L^{\alpha} T^{\beta},$$

Jednostkę wielkości A przy jednostkach długości i czasu L, T oznaczamy przez $L^\alpha T^\beta$. Jeżeli więc a jest miarą wielkości A przy jednostce $L^\alpha T^\beta$, to wielkość tę oznaczamy przez

$$aL^\alpha T^\beta.$$

Założmy teraz, że wprowadziliśmy nowe jednostki długości i czasu L', T' związane z poprzednimi przez równania (1), str. 49. Rachując formalnie, otrzymujemy $aL^\alpha T^\beta = a(\lambda L')^\alpha (\tau T')^\beta = a\lambda^\alpha L'^\alpha \tau^\beta T'^\beta$, więc $aL^\alpha T^\beta = (a\lambda^\alpha \tau^\beta) L'^\alpha T'^\beta$. Stąd, oznaczając przez a' miarę danej wielkości przy jednostkach L', T' , dostajemy na mocy (2)

$$(3) \quad aL^\alpha T^\beta = a' L'^\alpha T'^\beta.$$

A więc rachunek formalny pozwala wyznaczyć miarę przy zmianie jednostek.

Przykład. Wymiar przyspieszenia jest LT^{-2} (co można stwierdzić podobnie jak przy prędkości). Przedstawić przyspieszenie $5 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-2}$ przy jednostkach m i min.

Ponieważ $\text{cm} = 0,01 \text{ m}$, $\text{sek} = 1/60 \text{ min}$, więc $\lambda = 0,01$, $\tau = 1/60$, $\alpha = 1$, $\beta = -2$, skąd na mocy (3) $5 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-2} = 5(0,01 \text{ m})(1/60 \text{ min})^{-2} = 5 \cdot 0,01 \cdot 60^2 \text{ m} \cdot \text{min}^{-2}$, czyli $5 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-2} = 180 \text{ m} \cdot \text{min}^{-2}$.

A zatem 180 jest miarą danego przyspieszenia w jednostkach m i min.

Wyznaczanie wymiaru. Do wyznaczania wymiarów pomocnym jest następujące

Twierdzenie. Niech dane będą wielkości A, B , dla których

$$(4) \quad [A] = L^\alpha T^\beta, \quad [B] = L^\gamma T^\delta,$$

oraz trzecia wielkość C uzależniona od A i B w taki sposób, że oznaczając przez a, b, c miary wielkości A, B, C wyrażone w dowolnych jednostkach L i T , mamy zawsze

$$(5) \quad c = ga^p b^q,$$

gdzie liczby g, p, q nie zależą od jednostek L i T .

Przy tych założeniach jest

$$(I) \quad [C] = L^{p\alpha + q\gamma} T^{p\beta + q\delta}.$$

Wzór ten można napisać jeszcze inaczej. Wymiar $[C]$ możemy otrzymać, rachując formalnie jak następuje:

$$[C] = (L^\alpha T^\beta)^p (L^\gamma T^\delta)^q = L^{p\alpha} T^{p\beta} L^{q\gamma} T^{q\delta} = L^{p\alpha + q\gamma} T^{p\beta + q\delta};$$

wzorowi (I) możemy więc również nadać postać

$$[C] = [A]^p [B]^q.$$

Dowód. Obierzmy nowe jednostki L' i T' związane z poprzednimi przez równania (1), str. 49. Oznaczmy przez a', b', c' miary wielkości A, B, C przy nowych jednostkach. Mamy wedle założenia (5) $c' = ga'^p b'^q$. Na mocy (4) jest $a' = \lambda^\alpha \tau^\beta a$ i $b' = \lambda^\gamma \tau^\delta b$, zatem $c' = g(\lambda^\alpha \tau^\beta a)^p (\lambda^\gamma \tau^\delta b)^q = \lambda^{p\alpha + q\gamma} \tau^{p\beta + q\delta} c$, a stąd w myśl definicji wymiaru wynika wzór (I), c. b. d. d.

Z twierdzenia powyższego wypływają następujące wnioski:

Wniosek 1. Jeżeli wzór (5) ma postać

$$\begin{array}{lll} c = ab, & \text{to} & [C] = [A][B] = L^{\alpha+\gamma} T^{\beta+\delta} \\ c = a/b, & „ & [C] = [A]/[B] = L^{\alpha-\gamma} T^{\beta-\delta} \\ c = a^p, & „ & [C] = [A]^p = L^{\alpha p} T^{\beta p}. \end{array}$$

Przykłady: 1. Prędkość wyraża się wzorem $v = s/t$. Zatem

$$[v] = [s]/[t] = L/T = LT^{-1}.$$

2. Przyspieszenie p w ruchu jednostajnie przyspieszonym wyraża się wzorem $p = v/t$. Zatem

$$[p] = [v]/[t] = LT^{-1}/T = LT^{-2}.$$

Podobny wynik otrzymamy, opierając się na wzorze $s = \frac{1}{2}pt^2$. Obliczamy z niego $p = 2s/t^2$. Zatem

$$[p] = [s]/[t]^2 = L/T^2 = LT^{-2}.$$

3. Prędkość kątowna jest $\omega = d\varphi/dt$. Wymiar kąta φ jest $L^0 T^0$, gdyż miara łukowa φ nie zależy od jednostek długości. Zatem

$$[\omega] = 1/T = T^{-1}.$$

4. Przyspieszenie kątowe jest $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2$, więc

$$[\varepsilon] = 1/T^2 = T^{-2}.$$

Wniosek 2. Pewne stałe mogą zależeć od wyboru jednostek długości i czasu. Możemy wtedy mówić o *wymiarze* tych *stałych*.

Przykład. Np. w pewnym ruchu przyspieszenie jest co do wartości proporcjonalne do kwadratu prędkości. Oznaczając współczynnik proporcjonalności przez k , mamy

$$p = kv^2.$$

Przy jednostkach cm, sek jest $k = 2$. Obliczyć k przy jednostkach m i min. Mamy $k = p/v^2$, zatem $[k] = [p]/[v]^2 = LT^{-2}/(LT^{-1})^2$, więc $[k] = L^{-1}$, skąd

$$2\text{cm}^{-1} = 2(1/100\text{m})^{-1} = 200\text{m}^{-1}.$$

W układzie jednostek m i min jest więc $k = 200$.

II. Zmiana układu odniesienia

§ 12. Związek między współrzędnymi. Prędkość i przyspieszenie punktu zależą od układu odniesienia, względem którego badamy ruch punktu. Ruch tego samego punktu będzie więc opisany odmiennie przez dwóch obserwatorów, którzy poruszają się względem siebie.

Jeżeli np. jedziemy pociągiem, wówczas podróżni jadący z nami są względem nas w spoczynku. Dla obserwatora stojącego przy torze podróżni poruszają się z prędkością pociągu. Możemy to wypowiedzieć w ten sposób: względem układu odniesienia związanego z pociągiem podróżni są w spoczynku, a względem układu odniesienia związanego z ziemią podróżni poruszają się z prędkością pociągu.

Ruchy planet i słońca względem układu odniesienia związanego z ziemią są bardzo skomplikowane. Kopernik zrobił odkrycie, że ruchy planet przedstawiają się o wiele prościej, jeżeli jako układ odniesienia obierzemy układ związany ze słońcem.

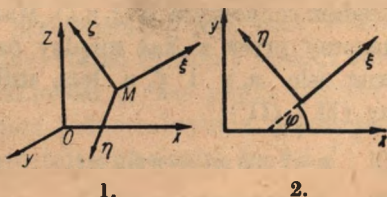
Niech dany będzie układ odniesienia $O(x, y, z)$ i drugi jeszcze układ $M(\xi, \eta, \zeta)$ poruszający się względem poprzedniego (rys. 1). Dla odróżnienia układ (x, y, z) nazywać będziemy układem stałym, a układ (ξ, η, ζ) ruchomym. Ruch tego samego punktu będzie przedstawiał się rozmaicie w obu układach.

Zajmiemy się zadaniem wyznaczenia ruchu punktu A względem jednego układu, gdy znany jest ten ruch względem innego układu.

Zadanie powyższe jest bardzo ważne i spotykamy się z nim w wielu przypadkach.

Oznaczmy przez x_0, y_0, z_0 współrzędne początku M w układzie $O(x, y, z)$, a przez ξ_0, η_0, ζ_0 współrzędne początku O w układzie $M(\xi, \eta, \zeta)$. Niechaj $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_3$ będą kątami między osiami obu układów, jak wskazuje tabelka:

osie	ξ	η	ζ
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3



Jeżeli x, y, z i ξ, η, ζ są współrzędnymi punktu A odpowiednio w układzie pierwszym i drugim, wówczas, jak wiadomo z geometrii analitycznej,

$$\begin{aligned} (I) \quad x &= x_0 + \xi \cos \alpha_1 + \eta \cos \alpha_2 + \zeta \cos \alpha_3 \\ y &= y_0 + \xi \cos \beta_1 + \eta \cos \beta_2 + \zeta \cos \beta_3 \\ z &= z_0 + \xi \cos \gamma_1 + \eta \cos \gamma_2 + \zeta \cos \gamma_3 \\ (I') \quad \xi &= \xi_0 + x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1 \\ \eta &= \eta_0 + x \cos \alpha_2 + y \cos \beta_2 + z \cos \gamma_2 \\ \zeta &= \zeta_0 + x \cos \alpha_3 + y \cos \beta_3 + z \cos \gamma_3. \end{aligned}$$

Ruch układu $M(\xi, \eta, \zeta)$ względem $O(x, y, z)$ będzie znany, jeżeli dla każdej chwili t podane będą współrzędne x_0, y_0, z_0 i kąty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_3$. Zatem współrzędne x_0, y_0, z_0 i kąty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_3$ są funkcjami czasu t . Jeżeli ruch punktu A względem układu $M(\xi, \eta, \zeta)$ określony jest funkcjami $\xi=f(t)$, $\eta=\varphi(t)$, $\zeta=\psi(t)$, wówczas ruch względem układu $O(x, y, z)$ otrzymamy ze wzorów (I)

$$x = x_0 + f(t) \cos \alpha_1 + \varphi(t) \cos \alpha_2 + \psi(t) \cos \alpha_3$$

i podobnie dla y, z .

Jeżeli ruch punktu A odbywa się w płaszczyźnie Π , to obiegając osie x, y i ξ, η w tej płaszczyźnie i oznaczając przez φ kąt między osiami x a ξ (str. 53, rys. 2), otrzymamy:

$$\begin{aligned} (II) \quad x &= x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, & y &= y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \\ (II') \quad \xi &= \xi_0 + x \cos \varphi + y \sin \varphi, & \eta &= \eta_0 - x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned}$$

Jeżeli kierunki osi układu ruchomego $M(\xi, \eta, \zeta)$ nie zmieniają się, powiadamy, że układ ten porusza się ruchem *postępowym*.

W tym przypadku kąty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_3$ są stałe.

Mówimy, że układ ruchomy obraca się około osi l z prędkością kątową ω , jeżeli punkty położone na osiach ξ, η, ζ obracają się około osi l z prędkością kątową ω .

Niech układ $M(\xi, \eta, \zeta)$ obraca się około osi ζ z prędkością kątową ω . Przyjmijmy, że w chwili $t=0$ układ stały $O(x, y, z)$ pokrywał się z układem ruchomym $M(\xi, \eta, \zeta)$. Mamy zatem $x_0=y_0=z_0=\xi_0=\eta_0=\zeta_0=0$. Oznaczmy przez φ kąt między osiami x, ξ . Oczywiście $\varphi=\omega t$. Ponieważ osie x, y i ξ, η leżą stale w jednej płaszczyźnie, więc na mocy (II i II'):

$$\begin{aligned} (III) \quad x &= \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t, & y &= \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t, & z &= \zeta \\ (III') \quad \xi &= x \cos \omega t + y \sin \omega t, & \eta &= -x \sin \omega t + y \cos \omega t, & \zeta &= z. \end{aligned}$$

Przykład 1. Ruch punktu względem układu stałego określony jest równaniami

$$(1) \quad x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t,$$

a więc tor punktu jest elipsą o równaniu $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Jak przedstawia się ruch tego punktu w układzie ruchomym o tym samym początku, jeżeli układ ten obraca się w kierunku dodatnim z prędkością kątową ω ?

Zakładamy przytem, że w chwili początkowej $t=0$ oba układy się pokrywają.

Otóż oznaczając przez ξ, η współrzędne dowolnego punktu względem układu ruchomego, mamy

$$\xi = x \cos \omega t + y \sin \omega t, \quad \eta = -x \sin \omega t + y \cos \omega t,$$

gdyż na mocy założenia kąt φ zawarty między osiami x, ξ wynosi tu ωt . Podstawiając po prawej stronie tych wzorów wyrażenia (1), otrzymujemy równania krzywej opisanej przez punkt w układzie ruchomym

$$\xi = a \cos^2 \omega t + b \sin^2 \omega t, \quad \eta = (b - a) \sin \omega t \cos \omega t,$$

czyli, z uwagi na związki $\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2 \omega t}{2}$, $\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2 \omega t}{2}$

i $\sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2 \omega t$:

$$\xi = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos 2 \omega t, \quad \eta = \frac{b-a}{2} \sin 2 \omega t,$$

skąd

$$\left[\xi - \frac{a+b}{2} \right]^2 + \eta^2 = \left(\frac{a-b}{2} \right)^2.$$

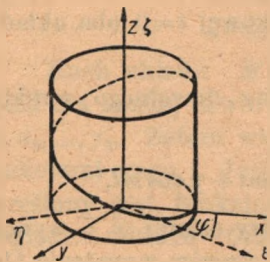
A więc: ze względu na układ ruchomy punkt opisuje koło, gdy $a \neq b$, zaś znajduje się w spoczynku, gdy $a = b$.

Przykład 2. Ruch po linii śrubowej. Ważnym przykładem ruchu punktu po krzywej przestrzennej jest *ruch śrubowy*, który powstaje w sposób następujący. Układ ruchomy (ξ, η, ζ) obraca się z prędkością kątową stałą ω około osi ζ , zaś punkt porusza się względem układu ruchomego ruchem jednostajnym z prędkością c po prostej $\xi = r$, $\eta = 0$ (t. j. po prostej równoległej do osi ζ i przecinającej oś ξ w punkcie $\xi = r$).

Ruch taki powstaje np. gdy walec obraca się około swej osi z prędkością kątową ω , zaś punkt porusza się po tworzącej walca ruchem jednostajnym.

Niech w chwili $t=0$ układ stały (x, y, z) pokrywa się z układem ruchomym (ξ, η, ζ) , zaś punkt ruchomy ma współrzędne $r, 0, 0$. Na mocy (III)

$$(2) \quad x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t, \quad z = ct.$$



Równania powyższe możemy również odczytać wprost z rysunku. Przedstawiają one parametryczne równania linii śrubowej. Ruch punktu odbywa się więc po linii śrubowej. Różniczkując (2) otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -r\omega \sin \omega t, & \dot{y} &= r\omega \cos \omega t, & \dot{z} &= c \\ \ddot{x} &= -r\omega^2 \cos \omega t, & \ddot{y} &= -r\omega^2 \sin \omega t, & \ddot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Zatem

$$\bar{v} = \sqrt{r^2 \omega^2 + c^2}, \quad \bar{p} = r\omega^2.$$

A więc: w ruchu śrubowym prędkość i przyspieszenie są stałe co do wartości bezwzględnej.

§ 13. Związek między prędkościami. Prędkość punktu A względem układu stałego (x, y, z) nazywamy *prędkością bezwzględną* i oznaczamy przez $\bar{v}_b$.

Prędkość punktu względem układu ruchomego nazywamy *prędkością względną* i oznaczamy przez $\bar{v}_w$.

Wyobraźmy sobie, że punkt A , którego ruch badamy, związany jest z układem ruchomym (ξ, η, ζ) sztywnie, t. zn. że jego współrzędne ξ, η, ζ nie zmieniają się. Przy tym założeniu punkt A ,łączony z układem ruchomym, posiadałby pewną prędkość względem układu stałego. Prędkość tę nazywamy *prędkością unoszenia* i oznaczamy przez $\bar{v}_u$.

Możemy także powiedzieć, że prędkością unoszenia punktu A w chwili danej nazywamy prędkość punktu złączonego z układem ruchomym i pokrywającego się w chwili tej z punktem A .

Przypuśćmy np., że po korytarzu pociągu biegnie podróżny. Za układ stały obierzmy układ związany z ziemią, za układ ruchomy — układ związany z pociągiem.

Człowiek stojący przy torze będzie obserwował ruch podróżnego względem układu stałego, a człowiek siedzący w wagonie — względem układu ruchomego.

Prędkość podróżnego, jaką zaobserwuje człowiek stojący przy torze, będzie prędkością *bezwzględną*. Prędkość, jaką zaobserwuje człowiek siedzący w pociągu, będzie prędkością *względą*. Prędkością *unoszenia* będzie prędkość tego punktu podłogi korytarza, którego dotyka w danej chwili podróżny biegnący przez korytarz.

Prędkość unoszenia będzie więc w tym przypadku prędkością pociągu. Prędkość bezwzględna będzie większa lub mniejsza od prędkości unoszenia zależnie od tego, czy podróżny biegnie w kierunku ruchu pociągu, czy przeciwnie.

Zajmiemy się teraz związkami zachodzącymi między prędkością bezwzględną, względną i unoszenia.

Punkt *A* ma względem układu stałego współrzędne x, y, z . Zatem rzuty prędkości bezwzględnej na osie układu stałego będą:

$$(1) \quad v_{b_x} = \dot{x}, \quad v_{b_y} = \dot{y}, \quad v_{b_z} = \dot{z}.$$

Podobnie, rzuty prędkości względnej na osie układu ruchomego będą

$$(2) \quad v_{w_\xi} = \dot{\xi}, \quad v_{w_\eta} = \dot{\eta}, \quad v_{w_\zeta} = \dot{\zeta}.$$

Aby porównać prędkość bezwzględną ze względną, utwórzmy rzuty prędkości względnej na osie układu stałego. Otrzymamy

$$(3) \quad v_{w_x} = \dot{\xi} \cos \alpha_1 + \dot{\eta} \cos \alpha_2 + \dot{\zeta} \cos \alpha_3 \quad \text{i t. d.}$$

Na mocy (1), str. 54, współrzędne x, y, z względem układu stałego wynoszą

$$x = x_0 + \xi \cos \alpha_1 + \eta \cos \alpha_2 + \zeta \cos \alpha_3 \quad \text{i t. d.}$$

Różniczkując powyższy wzór, dostaniemy więc na mocy (1)

$$(4) \quad v_{b_x} = \dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{\xi} \frac{d \cos \alpha_1}{dt} + \dot{\eta} \frac{d \cos \alpha_2}{dt} + \dot{\zeta} \frac{d \cos \alpha_3}{dt} + \xi \cos \alpha_1 + \eta \cos \alpha_2 + \zeta \cos \alpha_3.$$

Prędkość unoszenia otrzymamy, zakładając, że punkt *A* jest związany z układem ruchomym sztywnie, t. zn., że współrzędne ξ, η, ζ

są stałe, czyli że $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$. Na mocy więc (4) rzuty prędkości unoszenia na osie układu (x, y, z) wyniosą

$$(5) \quad v_{u_x} = \dot{x}_0 + \xi \frac{d \cos \alpha_1}{dt} + \eta \frac{d \cos \alpha_2}{dt} + \zeta \frac{d \cos \alpha_3}{dt} \quad \text{i t. d.}$$

Na mocy (3) i (5) otrzymujemy z (4) $v_{b_x} = v_{u_x} + v_{w_x}$ i podobnie $v_{b_y} = v_{u_y} + v_{w_y}$, $v_{b_z} = v_{u_z} + v_{w_z}$, czyli

$$(I) \quad \bar{v}_b = \bar{v}_u + \bar{v}_w.$$

Udowodniliśmy więc, że *prędkość bezwzględna równa się sumie prędkości unoszenia i prędkości względnej*.

Gdy układ ruchomy porusza się ruchem postępowym, kąty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_3$ są stałe, zatem pochodne $\frac{d \cos \alpha_1}{dt}, \frac{d \cos \alpha_2}{dt}, \dots, \frac{d \cos \gamma_3}{dt}$ są zerami. Ze wzoru (5) otrzymujemy przeto

$$v_{u_x} = \dot{x}_0, \quad v_{u_y} = \dot{y}_0, \quad v_{u_z} = \dot{z}_0.$$

Jeżeli więc $\bar{v}_0$ jest prędkością początku układu ruchomego, to

$$\bar{v}_u = \bar{v}_0.$$

Zatem: *jeżeli układ porusza się ruchem postępowym, to prędkość unoszenia jest dla wszystkich punktów ta sama i równa się prędkości początku układu*.

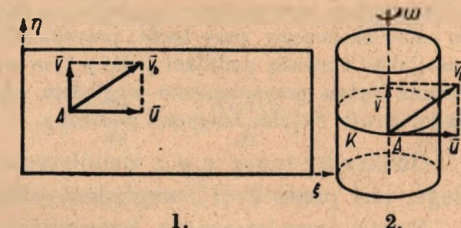
Uwaga. O punkcie A mówimy, że wykonywa dwa ruchy równocześnie: jeden z prędkością względną, a drugi z prędkością unoszenia. Ruch względem układu stałego nazywamy *ruchem złożonym* z obu ruchów składowych albo ich ruchem *wypadkowym*.

Prędkość ruchu wypadkowego jest więc sumą prędkości ruchów składowych. Aby prędkość ruchu wypadkowego była określona, wystarczy podać prędkość ruchów składowych; nie potrzeba przy tym podawać, która z prędkości jest względna, a która jest prędkością unoszenia.

Przykład 1. Pociąg porusza się z prędkością $\bar{u}$; po podłodze wagonu toczy się punkt A z prędkością $\bar{v}$ względem podłogi. Jaka jest prędkość punktu A względem ziemi?

Przyjmijmy, że osie układu (x, y, z) związane są z ziemią, zaś osie ξ, η, ζ z wagonem (rys. 1).

Prędkością unoszenia punktu A jest więc $\vec{u}$. Taką bowiem prędkość miałby punkt A względem ziemi, gdyby był w spoczynku względem wagonu. Prędkość względna punktu A niechaj wynosi $\vec{v}$. Zatem jego prędkość bezwzględna $\vec{v}_b$ (t. j. prędkość względem ziemi) wyniesie



$$\vec{v}_b = \vec{u} + \vec{v}.$$

Przykład 2. Walec obraca się około osi z prędkością kątową ω . Punkt A porusza się po tworzącej walca z prędkością $\vec{v}$ (względem tworzącej). Jaka jest prędkość bezwzględna punktu A ?

Prędkość względna wynosi $\vec{v}$. Aby wyznaczyć prędkość unoszenia, zauważmy, że gdyby punkt A był z walcem związany, wówczas poruszałby się po kole K z prędkością kątową ω (rys. 2). Jeżeli więc r oznacza promień podstawy walca, to prędkość unoszenia $\vec{u}$ jest styczna do koła K i $|\vec{u}| = r\omega$. Prędkość bezwzględna $\vec{v}_b$ wynosi zatem $\vec{v}_b = \vec{v} + \vec{u}$, a ponieważ $\vec{v} \perp \vec{u}$, więc

$$|\vec{v}_b| = \sqrt{v^2 + u^2} = \sqrt{v^2 + r^2 \omega^2} \quad (v = |\vec{v}|, \quad u = |\vec{u}|).$$

§ 14. Związki między przyspieszeniami. Zajmiemy się teraz związkami zachodzącymi między przyspieszeniami punktu względem różnych układów. Przyjmijmy, że mamy dwa układy: stały (x, y, z) i ruchomy (ξ, η, ζ) .

Przyspieszenie punktu A względem układu stałego nazywamy *przyspieszeniem bezwzględnym* $\vec{p}_b$.

Przyspieszenie punktu względem układu ruchomego nazywamy *przyspieszeniem względnym* $\vec{p}_w$.

Przyspieszenie, jakie by punkt A posiadał (względem układu stałego), gdyby z układem ruchomym był związany sztywnie, nazywamy *przyspieszeniem unoszenia* $\vec{p}_u$.

Możemy również powiedzieć, że przyspieszeniem unoszenia nazywamy przyspieszenie takiego punktu związanego z układem ruchomym, który w danej chwili pokrywa się z punktem A .

Jeżeli np. po korytarzu wagonu biegnie podróżny i za układ stały obierzemy układ związany z ziemią, za ruchomy zaś — związany z wagonem, to: przyspieszeniem bezwzględnym podróżnego będzie przyspieszenie, jakie zaobserwuje człowiek stojący przy torze, przyspieszeniem względnym będzie przyspieszenie, jakie zauważą podróżni jadący tym wagonem, wreszcie przyspieszeniem unoszenia będzie przyspieszenie względem ziemi tego punktu podłogi, którego w danej chwili dotyka biegnący podróżny.

Oznaczmy przez x, y, z współrzędne punktu A względem układu stałego, zaś przez ξ, η, ζ względem układu ruchomego.

Rzuty przyspieszenia bezwzględnego $\bar{p}_b$ na osie x, y, z są:

$$(1) \quad p_{b_x} = \ddot{x}, \quad p_{b_y} = \ddot{y}, \quad p_{b_z} = \ddot{z}.$$

Rzuty przyspieszenia względnego $\bar{p}_w$ na osie ξ, η, ζ są:

$$(2) \quad p_{w_\xi} = \ddot{\xi}, \quad p_{w_\eta} = \ddot{\eta}, \quad p_{w_\zeta} = \ddot{\zeta}.$$

Utwórzmy rzuty wektora $\bar{p}_w$ na osie układu stałego. Otrzymamy

$$(3) \quad p_{w_x} = \ddot{\xi} \cos \alpha_1 + \ddot{\eta} \cos \alpha_2 + \ddot{\zeta} \cos \alpha_3 \quad \text{i t. d.}$$

Na mocy (I), str. 54, mamy

$$(4) \quad x = x_0 + \xi \cos \alpha_1 + \eta \cos \alpha_2 + \zeta \cos \alpha_3 \quad \text{i t. d.}$$

Przyspieszenie unoszenia otrzymamy, zakładając, że punkt A jest sztywnie związany z układem ruchomym, czyli że ξ, η, ζ są stałe, a więc że pochodne $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}, \ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$ są równe zeru.

Rzuty wektora $\bar{p}_u$ na osie x, y, z otrzymamy, różniczkując dwukrotnie równanie (4) przy założeniu, że ξ, η, ζ są stałymi:

$$(5) \quad p_{u_x} = \dot{x}_0 + \xi \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} + \eta \frac{d^2 \cos \alpha_2}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 \cos \alpha_3}{dt^2} \quad \text{i t. d.}$$

Jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ są stałe, to $p_{u_x} = \dot{x}_0$.

A więc: jeżeli układ porusza się ruchem postępowym, to przyspieszenie unoszenia jest dla wszystkich punktów równe przyspieszeniu początku układu.

Zróżniczkujmy dwukrotnie równanie (4). Otrzymamy

$$(6) \quad \begin{aligned} \ddot{x} = \ddot{x}_0 + \xi \frac{d^2 \cos \alpha_1}{dt^2} + \eta \frac{d^2 \cos \alpha_2}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 \cos \alpha_3}{dt^2} + \\ + \ddot{\xi} \cos \alpha_1 + \ddot{\eta} \cos \alpha_2 + \ddot{\zeta} \cos \alpha_3 + \\ + 2 \left(\dot{\xi} \frac{d \cos \alpha_1}{dt} + \dot{\eta} \frac{d \cos \alpha_2}{dt} + \dot{\zeta} \frac{d \cos \alpha_3}{dt} \right) \end{aligned} \quad \text{i t. d.}$$

Wedle (3) i (5) wyrażenia w pierwszym i w drugim wierszu oznaczają rzuty $\bar{p}_u$ i $\bar{p}_w$ na osie x, y, z .

Oznaczmy przez $\bar{p}_C$ wektor, którego rzuty na osie x, y, z wyrażają się wzorami

$$(7) \quad p_{C_x} = 2 \left(\xi \frac{d \cos a_1}{dt} + \eta \frac{d \cos a_2}{dt} + \zeta \frac{d \cos a_3}{dt} \right) \quad \text{i t. d.}$$

Wektor $\bar{p}_C$ nazywamy *przyśpieszeniem Coriolisa*.

Wzór (6) na mocy (1), (3), (5) i (7) możemy napisać w postaci $p_b = p_{u_x} + p_{w_x} + p_{C_x}$. Podobnie otrzymamy $p_{b_y} = p_{u_y} + p_{w_y} + p_{C_y}$ i $p_{b_z} = p_{u_z} + p_{w_z} + p_{C_z}$. Możemy więc napisać

$$(I) \quad \bar{p}_b = \bar{p}_u + \bar{p}_w + \bar{p}_C.$$

A więc: *przyśpieszenie bezwzględne równa się sumie przyśpieszeń: unoszenia, względnego i Coriolisa*.

Przyśpieszenie Coriolisa. Aby uzmysłowić sobie znaczenie przyśpieszenia Coriolisa, wykreślmy z początku M układu ruchomego wektor prędkości względnej $\bar{MB} = \bar{v}_w$. Współrzędne punktu B względem układu (ξ, η, ζ) wynoszą $v_{w_\xi}, v_{w_\eta}, v_{w_\zeta}$ czyli ξ, η, ζ . Wyobraźmy sobie, że punkt B jest sztywnie związany z układem (ξ, η, ζ) . Prędkość $\bar{u}$ punktu B względem układu stałego (x, y, z) równa się zatem jego prędkości unoszenia (bo jego prędkość względna jest zerem). Pisząc ξ, η, ζ zamiast ξ, η, ζ , otrzymamy więc na mocy (5), str. 58:

$$u_x = x_0 + \xi \frac{d \cos a_1}{dt} + \eta \frac{d \cos a_2}{dt} + \zeta \frac{d \cos a_3}{dt} \quad \text{i t. d.}$$

Porównując ze wzorem (7), otrzymamy:

$$u_x = \dot{x}_0 + \frac{1}{2} p_{C_x}, \quad u_y = \dot{y}_0 + \frac{1}{2} p_{C_y}, \quad u_z = \dot{z}_0 + \frac{1}{2} p_{C_z}.$$

Jeżeli więc przez $\bar{v}_0$ oznaczymy prędkość początku układu ruchomego, to $\bar{u} = \bar{v}_0 + \frac{1}{2} \bar{p}_C$, zatem

$$(II) \quad \bar{p}_C = 2(\bar{u} - \bar{v}_0).$$

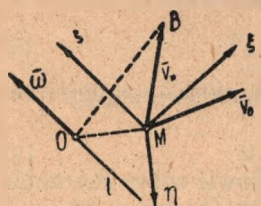
Różnica $\bar{u} - \bar{v}_0$ jest to prędkość punktu B względem początku M układu ruchomego (ξ, η, ζ) (por. § 14, str. 65, (I)).

A więc: aby otrzymać przyspieszenie Coriolisa, wykreślamy z początku układu ruchomego wektor prędkości względnej $\vec{v}_w$ i wyobrażamy sobie, że wektor ten jest związany sztywnie z układem ruchomym.

Przyspieszenie Coriolisa równa się podwojonej prędkości końca wektora $\vec{v}_w$ względem jego początku.

Wynika stąd, że przyspieszenie Coriolisa jest zerem, jeżeli prędkość względna jest zerem lub jeżeli układ ruchomy porusza się ruchem postępowym.

W tych bowiem przypadkach początek i koniec wektora $\vec{v}_w$ ma tę samą prędkość. Można to również łatwo odczytać ze wzoru (7), kładąc $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ lub $a_1=\text{const.}$, $a_2=\text{const.}$, $a_3=\text{const.}$ i t. d.



Niech układ (ξ, η, ζ) obraca się około pewnej osi l z prędkością kątową $\bar{\omega}$. Zachowując poprzednie znakowanie i obierając dowolny punkt O na osi l , otrzymamy

$$\bar{u} = \overline{OB} \times \bar{\omega}, \quad \bar{v}_0 = \overline{OM} \times \bar{\omega}.$$

$$\text{Zatem } \bar{p}_C = 2(\bar{u} - \bar{v}_0) = 2(\overline{OB} - \overline{OM}) \times \bar{\omega}.$$

Lecz $\overline{OB} - \overline{OM} = \vec{v}_w$. A więc

$$(III) \quad \bar{p}_C = 2\vec{v}_w \times \bar{\omega}.$$

Widzimy więc, że przyspieszenie Coriolisa równa się podwojonemu iloczynowi wektorowemu wektora prędkości względnej i prędkości kątowej.

Przyspieszenie Coriolisa jest tedy prostopadłe do osi obrotu i prędkości względnej i wynosi

$$|\bar{p}_C| = 2|\bar{\omega}||\vec{v}_w| \sin \alpha,$$

gdzie α jest kątem między osią obrotu a prędkością względną. Wynika stąd, że przyspieszenie Coriolisa jest zerem (poza tym, gdy $\vec{v}_w=0$), wówczas gdy $\alpha=0$, t. j. gdy wektor $\vec{v}_w$ jest równoległy do $\bar{\omega}$.

Wykażemy później (w rozdziale VII), że w każdej chwili prędkości punktów związanych sztywnie z układem ruchomym (ξ, η, ζ) są takie, jak gdyby układ wykonywał dwa ruchy równocześnie: jeden ruch postępowy z prędkością początku układu, a drugi obrotowy około pewnej osi, przechodzącej przez początek układu, z prędkością kątową $\bar{\omega}$.

Tę oś obrotu nazywamy *osią chwilowego obrotu*; $\bar{\omega}$ nazywamy *chwilową prędkością kątową*.

W każdym momencie czasu może być inna oś chwilowego obrotu i inne $\bar{\omega}$. A więc, oznaczając przez $\bar{v}_0$ prędkość początku układu M , otrzymamy na prędkość unoszenia $\bar{v}_u$ punktu A wzór

$$\bar{v}_u = \bar{v}_0 + \overline{MA} \times \bar{\omega}.$$

Jeżeli więc przez B oznaczymy koniec wektora prędkości względnej wykreślonej z początku układu, zaś przez $\bar{u}$ (jak poprzednio) prędkość unoszenia punktu B , to, $\bar{u} = \bar{v}_0 + \overline{MB} \times \bar{\omega} = \bar{v}_0 + \bar{v}_w \times \bar{\omega}$, skąd na mocy (II), str. 61

$$(IV) \quad \bar{p}_C = 2 \bar{v}_w \times \bar{\omega}.$$

Wzór (IV) przedstawia przyśpieszenie Coriolisa w przypadku ogólnym.

Przyśpieszenie Coriolisa jest więc zerem: 1^o gdy $\bar{\omega} = 0$, (t. j. gdy układ porusza się ruchem postępowym), 2^o gdy $\bar{v}_w = 0$, 3^o gdy $\bar{\omega} \parallel \bar{v}_w$.

Przykład 1. Pociąg porusza po torze prostolinijnym z przyśpieszeniem $\bar{p}$. Po podłodze wagonu porusza się punkt z przyśpieszeniem $\bar{a}$ względem wagonu. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu względem ziemi.

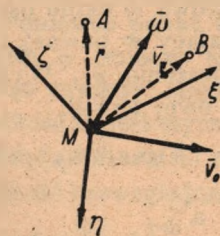
Przyśpieszenie względne jest $\bar{p}_w = \bar{a}$, przyśpieszenie unoszenia $\bar{p}_u = \bar{p}$. Ponieważ układ odniesienia związany z wagonem porusza się ruchem postępowym, więc przyśpieszenie Coriolisa $\bar{p}_C = 0$. Zatem przyśpieszenie bezwzględne (t. j. przyśpieszenie względem ziemi) wynosi

$$\bar{p}_b = \bar{a} + \bar{p}.$$

Przykład 2. Walce o promieniu r obraca się około osi z prędkością kątową ω . Po tworzącej walca porusza się punkt A z prędkością stałą $\bar{v}$ względem tworzącej. Wyznaczyć przyśpieszenie punktu A względem układu stałego.

Obierzmy układ ruchomy związany z walcem, przyjmując oś walca za oś ζ . Gdyby punkt A był sztywnie związany z układem (ξ, η, ζ) , wówczas posuwałby się po kole K z prędkością kątową ω . Przyśpieszenie unoszenia $\bar{p}_u$ jest więc skierowane ku środkowi koła K i $|\bar{p}_u| = r\omega^2$. Przyśpieszenie względne $\bar{p}_w = 0$, wedle założenia. Ponieważ prędkość względna $\bar{v}_w = \bar{v}$ jest równoległa do osi obrotu, więc przyśpieszenie Coriolisa $\bar{p}_C = 0$. Zatem

$$\bar{p}_b = \bar{p}_u.$$



Przykład 3. Płaszczyzna pozioma obraca się z prędkością kątową ω około osi pionowej. Po płaszczyźnie porusza się punkt A , mający w pewnej chwili względem płaszczyzny prędkość $\vec{v}_w$ i przyspieszenie $\vec{p}_w$. Wyznaczyć przyspieszenie względem układu stałego w owej chwili.

Oznaczmy przez O punkt przecięcia osi obrotu z płaszczyzną ruchomą. Gdyby punkt A był z płaszczyzną ruchomą związany, wówczas posuwałby się po kole o środku O i promieniu $OA = r$ z prędkością kątową ω . Zatem przyspieszenie unoszenia $\vec{p}_u$ skierowane jest do punktu O i $|\vec{p}_u| = r\omega^2$.

Aby wyznaczyć przyspieszenie Coriolisa $\vec{p}_c$, obierzmy punkt O za początek układu ruchomego, związanego z płaszczyzną ruchomą i wykreślmy z punktu O wektor $\vec{OB} = \vec{v}_w$. Ponieważ prędkość punktu O jest zerem, więc $\frac{1}{2}\vec{p}_c$ równa się prędkości punktu B . Zatem $\vec{p}_c \perp \vec{v}_w$ i $|\vec{p}_c| = 2OB \omega = 2|\vec{v}_w|\omega$.

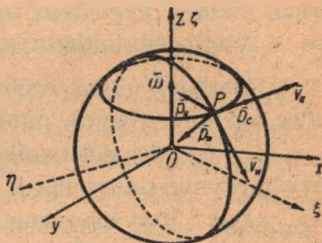
To samo oczywiście otrzymalibyśmy, opierając się na wzorze $\vec{p}_c = 2\vec{v}_w \times \vec{\omega}$ i na tym, że wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ ma kierunek osi obrotu, jest więc do płaszczyzny ruchomej prostopadły.

Przyspieszenie bezwzględne otrzymamy, dodając do siebie wektory $\vec{p}_w$, $\vec{p}_u$ i $\vec{p}_c$.

Przykład 4. Kula o promieniu r obraca się dookoła stałej osi ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$. Po wielkim kole, przechodzącym przez oś obrotu, porusza się punkt P ze stałą prędkością c . Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie tego punktu względem układu stałego (x, y, z) .

Niech ξ, η, ζ oznacza układ ruchomy, którego oś ζ jest ta sama co dla układu stałego, zaś płaszczyzna $\xi\zeta$ jest płaszczyzną południka, po którym porusza się punkt P . Układ ten obraca się wraz z kulą dookoła osi z ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$ (którą na rysunku przedstawia wektor narysowany na osi z).

Prędkość punktu P względem układu ruchomego, t. j. prędkość względna $\vec{v}_w$, jest wektorem o długości c , stycznym do południka (po



którym porusza się P). Prędkość unoszenia $\bar{v}_u$ równa się prędkości punktu równoleżnika przechodzącego przez P . Ponieważ punkt ten porusza się po kole o promieniu $\varrho = r \cos \varphi$, gdzie φ oznacza szerokość geograficzną tego równoleżnika (t. j. kąt zawarty między promieniem OP a płaszczyzną równika), więc prędkość $\bar{v}_u$ jest styczna do równoleżnika i wynosi $\varrho \omega = r \omega \cos \varphi$. Prędkości $\bar{v}_w$ i $\bar{v}_u$ są do siebie prostopadłe, zatem $|\bar{v}_b| = \sqrt{c^2 + r^2 \omega^2 \cos^2 \varphi}$. Prędkość bezwzględna $\bar{v}_b$ tworzy z południkami kąt ϑ określony wzorem $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{|\bar{v}_u|}{|\bar{v}_w|} = \frac{r \omega}{c} \cos \varphi$.

Ponieważ punkt P porusza się po południku ze stałą prędkością c , więc przyspieszenie względne $\bar{p}_w$ jest skierowane ku środkowi kuli i $|\bar{p}_w| = c^2/r$. Podobnie, przyspieszenie unoszenia $\bar{p}_u$ jest skierowane ku środkowi równoleżnika (przechodzącego przez P) i $|\bar{p}_u| = \varrho \omega^2 = r \omega^2 \cos \varphi$. Przyspieszenie Coriolisa $\bar{p}_C = 2 \bar{v}_w \times \bar{\omega}$ jest prostopadłe do $\bar{\omega}$ i $\bar{v}_w$, zatem jest prostopadłe do płaszczyzny południka i ma ten sam zwrot co $\bar{v}_u$. Ponieważ, jak łatwo widzieć, kąt zawarty między $\bar{\omega}$ a $\bar{v}_w$ wynosi $\pi - \varphi$, więc $|\bar{p}_C| = 2|\bar{v}_w||\bar{\omega}| \sin \varphi = 2c \omega \sin \varphi$. Dodając wektory $\bar{p}_w$, $\bar{p}_u$ i $\bar{p}_C$, otrzymamy przyspieszenie bezwzględne $\bar{p}_b$.

§ 15. Wyznaczanie ruchu względnego. Dotychczas zajmowaliśmy się wyznaczaniem ruchu względem układu stałego, mając dany ruch względem układu ruchomego. Często spotykamy się z zagadnieniem odwrotnym, t. zn. mamy znaleźć ruch względem układu ruchomego, znając ten ruch względem układu stałego.

Ze wzorów (I), str. 58 i 61, otrzymujemy na prędkość względną i przyspieszenie względne:

$$(I) \quad \bar{v}_w = \bar{v}_b - \bar{v}_u, \quad \bar{p}_w = \bar{p}_b - \bar{p}_u - \bar{p}_C.$$

A więc: *prędkość względną otrzymamy, dodając do prędkości bezwzględnej prędkość unoszenia ze zwrotem przeciwnym. Przyspieszenie względne otrzymamy, dodając do przyspieszenia bezwzględnego przyspieszenie unoszenia i Coriolisa ze zwrotami przeciwnymi.*

Ruch względem punktu. Niech punkty A_1 i A_2 poruszają się względem pewnego układu stałego (x, y, z) z prędkościami $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$. Umieścmy w A_2 początek układu ruchomego (ξ, η, ζ) i założmy, że układ ten porusza się ruchem postępowym.

Ruch punktu A_1 względem układu (ξ, η, ζ) nazywać będziemy *ruchem względnym względem punktu A_2 .*

Taki ruch zauważyłby obserwator poruszający się ruchem postępowym wraz z punktem A_2 .

Oznaczmy przez $\bar{v}_{1,2}$ prędkość punktu A_1 względem punktu A_2 , t. zn. względem układu (ξ, η, ζ) . Ponieważ prędkość unoszenia równa się prędkości $\bar{v}_2$ punktu A_2 , zaś prędkość bezwzględna wynosi $\bar{v}_1$, więc $\bar{v}_1 = \bar{v}_{1,2} + \bar{v}_2$, skąd $\bar{v}_{1,2} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$ lub

$$(II) \quad \bar{v}_{1,2} = \bar{v}_1 + (-\bar{v}_2).$$

Oznaczając przez $\bar{p}_{1,2}$ przyspieszenie punktu A_1 względem A_2 , t. j. względem układu (ξ, η, ζ) , otrzymamy z uwagi na to, że przyspieszenie Coriolisa jest zerem, $\bar{p}_{1,2} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2$ lub

$$(III) \quad \bar{p}_{1,2} = \bar{p}_1 + (-\bar{p}_2).$$

A więc: *prędkość (przyspieszenie) punktu A_1 względem A_2 otrzymamy, dodając do prędkości (przyspieszenia) punktu A_1 prędkość (przyspieszenie) punktu A_2 ze zwrotem przeciwnym.*

Przykład 1. Punkty A_1 i A_2 poruszają się odpowiednio po osiach x i y ruchem jednostajnym z prędkościami c_1 i c_2 . Wyznaczyć prędkość punktu A_1 względem A_2 .

Szukana prędkość $\bar{v}_{1,2}$ jest różnicą prędkości punktu A_1 i punktu A_2 . A więc $\bar{v}_{1,2} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$. Rzuty prędkości $\bar{v}_{1,2}$ na osie x i y wynoszą c_1 i $-c_2$. Zatem

$$|\bar{v}_{1,2}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

Przykład 2. Punkt A_1 porusza się po kole o promieniu r ruchem jednostajnym, zaś punkt A_2 porusza się w ten sposób, że znajduje się zawsze na drugim końcu średnicy przechodzącej przez A_1 . Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu A_1 względem A_2 .

Oczywiście prędkości i przyspieszenia obu punktów są równe co do wartości i mają zwroty przeciwne. Oznaczając przez $\bar{v}$ i $\bar{p}$ prędkość i przyspieszenie punktu A_1 , otrzymamy

$$\bar{v}_{1,2} = \bar{v} - (-\bar{v}) = 2\bar{v} \quad \text{i} \quad \bar{p}_{1,2} = \bar{p} - (-\bar{p}) = 2\bar{p}.$$

Ponieważ $|\bar{v}_{1,2}| = \text{const.}$, więc przyspieszenie styczne ruchu względnego jest zerem; zatem $\bar{p}_{1,2}$ jest przyspieszeniem normalnym. Stąd $|\bar{p}_{1,2}| = |\bar{v}_{1,2}|^2 / \varrho = 4|\bar{v}|^2 / \varrho$, a ponieważ $|\bar{p}_{1,2}| = 2|\bar{p}| = 2|\bar{v}|^2 / r$, więc

$$4|\bar{v}|^2 / \varrho = 2|\bar{v}|^2 / r \quad \text{czyli} \quad \varrho = 2r.$$

A więc ruch punktu A_1 względem A_2 odbywa się po kole o środku A_2 o promieniu $2r$, z prędkością dwa razy większą od prędkości punktu A_2 .

Przykład 3. Po osi x porusza się ciało A z prędkością stałą u , wyrzucając co T sekund drobne ciała, biegnące po osi x ruchem jednostajnym z prędkością c . Niechaj ν oznacza częstość emisji (t. j. ilość ciałek wyrzucanych na sekundę), zaś λ odległość dwóch po sobie wyrzuconych ciałek. Mamy oczywiście $\nu = 1/T$.

Ponieważ prędkość względna ciała wyrzuconego jest względem A $c - u$, więc po czasie T odległość ciała od A wynosi $\lambda = (c - u)T$. Zatem

$$(1) \quad \nu = (c - u)/\lambda.$$

Przypuśćmy teraz, że po osi x porusza się obserwator B z prędkością stałą v . Oznaczmy przez ν' częstość względną emisji (t. j. ilość ciałek na sekundę, napotykaną przez obserwatora), a przez T' czas między spotkaniami dwu kolejnych ciałek. Ponieważ prędkość ciałek względem B wynosi $c - v$, więc $\lambda = (c - v)T'$. Zatem

$$(2) \quad \nu' = (c - v)/\lambda.$$

Na mocy (1) i (2) otrzymujemy

$$(3) \quad \nu' = \nu(c - v)/(c - u) = \nu(1 - v/c)/(1 - u/c).$$

Założmy, że prędkość c jest wielka w porównaniu z prędkościami u i v .

Ponieważ dla małych x mamy $1/(1 - x) = 1 + x$, więc na mocy (3) jest $\nu' = \nu(1 - v/c)(1 + u/c) = \nu[1 - (v - u)/c - vu/c^2]$. Opuszczając ostatni wyraz w nawiasie jako bardzo mały w porównaniu z pozostałymi, otrzymujemy w końcu

$$(4) \quad \nu' = \nu[1 - (v - u)/c].$$

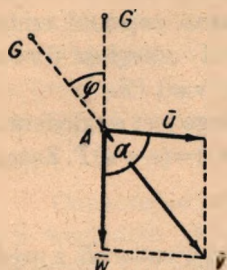
W szczególności, jeżeli $u = 0$, dostaniemy

$$(5) \quad \nu' = \nu(1 - v/c).$$

Przykład 4. W przestrzeni porusza się rój drobnych ciałek z prędkością stałą $\bar{v}$. Poprzez rój porusza się ciało A z prędkością $\bar{u}$. Prędkość względna ciałek względem A wynosi więc $\bar{w} = \bar{v} - \bar{u}$. Oznaczmy przez w , v i u bezwzględne wartości tych prędkości, przez φ kąt między $\bar{w}$ i $\bar{v}$, a przez α kąt między $\bar{w}$ i $\bar{u}$. Z trójkąta o bokach $\bar{v}$, $-\bar{u}$, $\bar{w}$ otrzymujemy

$$(6) \quad \sin \varphi = \frac{u}{v} \sin \alpha.$$

Podamy zastosowanie powyższego wzoru.



Jako układ stały obierzmy układ związany ze słońcem i gwiazdami stałymi. Pewna gwiazda G wysyła ku ziemi promienie światła biegnące z prędkością $\bar{v}$ ($v=300.000$ km/sek). Ziemia porusza się z prędkością $\bar{u}$ ($u=30$ km/sek). Promienie światła mają więc względem ziemi prędkość względną $\bar{w}$. Obserwator na ziemi, chcąc zobaczyć gwiazdę G , musi ustawić lunetę w kierunku prędkości względnej $\bar{w}$. Będzie więc widział G pozornie w miejscu G' . Kąt φ , wskazujący odchylenie od prawdziwego kierunku, możemy wyliczyć z (6).

Ponieważ v jest wielkie w porównaniu z u , więc kąt φ jest bardzo mały. Ze wzoru (6) otrzymamy

$$\sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{10.000}.$$

Dla $\alpha=\pi/2$ (t. j. $\sin \alpha=1$) otrzymujemy dla kąta φ jako wartość maksymalną $\varphi=22''$.

Przykład 5. Po okręgu koła o środku O poruszają się punkty A_1 i A_2 z prędkościami kątowymi ω_1 i ω_2 względem pewnego układu stałego. Obierzmy osie ξ, η układu ruchomego w płaszczyźnie koła, przyjmując O za początek, zaś prostą OA_2 za oś ξ .

Prędkość kątową punktu A_1 względem obranego układu ruchomego nazywamy *prędkością kątową (względną) punktu A_1 względem punktu A_2* ; oznaczamy ją przez $\omega_{1,2}$.

Łatwo można okazać, że

$$(7) \quad \omega_{1,2} = \omega_1 - \omega_2.$$

Przypuśćmy, że punkty A_1 i A_2 poruszają się z prędkościami kątowymi stałymi. Oznaczając przez T_1, T_2 odpowiednio czasy obiegu punktów A_1, A_2 w układzie stałym, zaś przez $T_{1,2}$ czas obiegu punktu A_1 względem A_2 (t. j. czas obiegu punktu A_1 w układzie ruchomym), otrzymamy: $T_1 = 2\pi/\omega_1$, $T_2 = 2\pi/\omega_2$, $T_{1,2} = 2\pi/\omega_{1,2}$. Zatem na mocy (7)

$$(8) \quad 1/T_{1,2} = 1/T_1 - 1/T_2.$$

Czas obiegu dużej wskazówki na zegarku wynosi $T_1=1$ godz, małej $T_2=12$ godz. Ze wzoru (8) dostajemy: $1/T_{1,2}=1-\frac{1}{12}$, skąd $T_{1,2}=\frac{12}{11}$ godz $= 1$ godz 5 min 27 sek. Zatem wskazówki pokrywają się co 1 godz 5 min 27 sek.

Podróżnikowi odbywającemu podróż naokoło ziemi w kierunku z zachodu na wschód wydaje się, że podróż jego trwała n dób, ponieważ w ciągu podróży miał n dni i n nocy. Wróciwszy jednak do miejsca, z którego podróż rozpoczął, stwierdza, że podróż trwała nie n , lecz n' dób. Jaki jest związek między n a n' ?

Oznaczmy przez T_1 okres podróży, a przez T_2 czas pozornego obiegu słońca naokoło ziemi. Zatem $T_1=n'$ i $T_2=-1$ (gdyż słońce obraca się pozornie dokoła ziemi ze wschodu na zachód t. j. w kierunku przeciwnym do kierunku podróży). Podróżnik przyjmował za dobę pozorną okres czasu między jednym a drugim przejściem słońca przez południk zmienny, na którym się znajdował. Ponieważ w ciągu n dni pozornych było n' dni prawdziwych, więc doba pozorna wynosi n'/n prawdziwych. Stąd $T_{1,2}=n'/n$. Na mocy więc (8)

$$n/n'=1/n'+1 \quad \text{czyli} \quad n'=n-1.$$

Zatem prawdziwych dni upłynęło o 1 mniej niż pozornych.

Gdyby podróżnik szedł ze wschodu na zachód, to (jak łatwo widzieć) prawdziwych dni upłynęłoby o 1 więcej niż pozornych.

ROZDZIAŁ III

DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

I. Dynamika punktu swobodnego

§ 1. Podstawowe pojęcia dynamiki. Przedmiotem badań dynamiki jest ruch ciał pod wpływem sił, które ruch ten wywołują.

W kinematyce wszystkie układy odniesienia są, jak już wiemy, równouprawnione; jest rzeczą obojętną, jak mierzymy czas (t. j. jakie przedziały czasu uważamy za równe). Prawa dynamiki natomiast, wypowiedziane przez Newtona, ważne są nie dla każdego układu odniesienia i nie dla każdego pomiaru czasu.

Układ inercjalny, czas bezwzględny. Układ odniesienia, dla którego przy pewnym pomiarze czasu zachodzą prawa dynamiki newtonowskiej, nazywamy *układem inercjalnym*, odpowiedni zaś pomiar czasu — pomiarem *czasu absolutnego*, a ruch ciała względem układu inercjalnego — *ruchem absolutnym*.

Ściśle biorąc, nie znamy dotychczas przykładu ani układu inercjalnego ani czasu absolutnego. W wielkiej liczbie zagadnień możemy jednak obrać takie układy odniesienia i takie metody mierzenia czasu, że stosowanie praw dynamiki doprowadza do wyników dość mało różniących się od doświadczenia, aby błędy można było praktycznie pominąć.

Jeżeli np. badamy ruch drobnych ciał w pobliżu ziemi w krótkim przeciągu czasu, to wyniki będą naogół wystarczająco dokładne, gdy za układ inercjalny przyjmimy układ odniesienia związany z ziemią, zaś mierzenie czasu absolutnego oprzemy na założeniu, że ziemia względem gwiazd stałych obraca się około swej osi w równych czasach o równe kąty.

W innych jednak zagadnieniach (jak np. wahadło Foucaulta, giroskop, ruch planet) stosowanie praw dynamiki do układu odniesienia związanego z ziemią nie prowadzi już do równie dobrych wyników. Znacznie lepsze wyniki otrzymamy tu, przyjmując za układ inercjalny układ odniesienia, którego początek znajduje się w słońcu, osie zaś skierowane są ku gwiazdom stałym.

Prócz poprzednio wspomnianego mierzenia czasu, opartego na jednostajności ruchu obrotowego ziemi około swej osi, istnieją jeszcze inne metody mierzenia czasu, które podaje astronomia.

W dynamice zakładamy, że *dany mamy układ inercjalny i czas absolutny*.

Masa i siła. W dynamice występują nowe pojęcia, jak np. masa i siła. Przyjmujemy, że są one czytelnikowi znane z fizyki i nie będziemy bliżej wchodzić w ich określenia. Podamy tylko te ich własności, jakie zakładamy o nich w dynamice.

Masa ciała wyraża się liczbą dodatnią, zależną od obioru jednostki masy t. j. od obioru dowolnego ciała, którego masę oznaczamy liczbą 1.

Stosunek mas dwóch ciał nie zależy od obioru jednostki.

Jeżeli więc przez m_1 i m_2 oznaczymy masy dwóch ciał przy pewnej jednostce, zaś przez m'_1 i m'_2 masy tych ciał przy innej jednostce, to

$$m_1/m_2 = m'_1/m'_2.$$

Niech np. masa pewnego ciała A wynosi m , jeżeli za jednostkę obierzemy masę ciała B . Przyjmijmy ponadto, że masa ciała A wynosi m' , ciała zaś B wynosi m'' , jeżeli za jednostkę obierzemy masę innego ciała C . Stosunek mas ciał A i B wynosi zatem $m/1$, gdy jednostką jest masa ciała B , zaś m'/m'' , gdy jednostką jest masa ciała C . Jest więc na mocy założenia $m/1 = m'/m''$, skąd

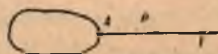
$$m' = mm''.$$

Możemy zatem, znając masy ciał przy pewnej jednostce, obliczyć je przy innej jednostce.

Masa ciała jest niezależna od czasu, t. zn. że dane ciało ma w każdej chwili tę samą masę.

Siłę uważamy za wyznaczoną, jeżeli podana jest jej wielkość (wartość bezwzględna), kierunek, zwrot i punkt zaczepienia. Siłę, działającą na ciało, może nam uzmysłowić nitka napięta lub sprężyna rozciągnięta, przyczepiona do ciała (p. rysunek).

Siły, których wielkość wyraża się liczbą 0, nazywamy *siłami zerowymi*. Przy siłach zerowych nie rozróżniamy kierunku ani zwrotu.



Wielkość siły niezerowej wyraża się liczbą dodatnią, zależną od jednostki siły, t. j. od obioru dowolnej siły (niezerowej), której wielkość oznaczamy liczbą 1.

Stosunek wielkości dwóch sił (niezerowych) nie zależy od obioru jednostki.

Opierając się na tym, możemy z wielkości siły przy pewnej jednostce wyznaczyć jej wielkość przy innej jednostce.

Siłę, działającą na ciało, przedstawiamy jako *wektor*. Obieramy w tym celu dowolną jednostkę długości i dowolną jednostkę siły. Siłę daną przedstawia wektor, którego długość wyraża się tą samą liczbą co wielkość siły, zaś początek, kierunek i zwrot są te same, co początek, kierunek i zwrot siły. Wektor mający np. 5 jednostek długości przedstawia siłę mającą 5 jednostek siły. Siłę zerową przedstawia wektor zerowy.

Działania na siłach określamy jako działania na wektorach, które przedstawiają te siły. Jeżeli np. wektory $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ przedstawiają pewne siły, wówczas sumą tych sił nazywamy siłę, którą przedstawia wektor $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$.

Momentem siły (przedstawionej przez wektor $\vec{P}$) względem punktu O nazywamy moment wektora $\vec{P}$ względem O .

Punkt materialny. W dynamice zajmujemy się najpierw ruchem punktów, a następnie ruchem ciał. Podobnie jak w kinematyce, punkt będziemy niekiedy uważali za model ciała (np. w przypadku, gdy rozmiary ciała są drobne w stosunku do toru).

Masę punktu nazywamy masę ciała, które dany punkt przedstawia; sam punkt nazywamy wówczas *punktem materialnym*.

Jeżeli siła działa na ciało, którego obrazem jest punkt materialny A , wówczas siłę tę przedstawiamy w postaci wektora o początku w A .

Siła, działająca na punkt materialny, może się zmieniać w czasie zarówno co do wielkości, jak co do kierunku i zwrotu.

§ 2. Prawa dynamiki Newtona. Prawa dynamiki, wypowiedziane przez Newtona, podają związki, jakie zachodzą w ruchu absolutnym między masą, przyspieszeniem i siłami, działającymi na punkt materialny.

Prawa ruchu. Niech układ odniesienia (x, y, z) będzie układem inercyjnym, zaś t niech oznacza czas absolutny. Przy tych założeniach prawa ruchu możemy wypowiedzieć jak następuje:

I. Jeżeli m oznacza masę punktu materialnego, p przyspieszenie w chwili t , $\vec{P}$ sumę sił działających na punkt materialny w chwili t , to

$$(1) \quad m \vec{p} = K \vec{P},$$

gdzie K oznacza pewną liczbę (dodatnią), zależną tylko od obioru jednostek długości, czasu, masy i siły (a więc niezależną od czasu, masy i siły).

Z równości (1) wynika, że

$$(2) \quad m |\bar{p}| = K |\bar{P}|.$$

Jeżeli więc ze wspomnianych jednostek trzy obierzemy dowolnie, to czwartą możemy zawsze tak dobrać, by $K=1$. Obierzmy np. dowolnie jednostki czasu, długości i masy, a za jednostkę siły obierzmy taką siłę, która punktowi o masie 1 nadaje przyspieszenie 1. Przy tych jednostkach dla $m=1$ i $\bar{P}=1$ mamy $|\bar{p}|=1$, zatem ze wzoru (2) otrzymamy $K=1$. Związek (1) przyjmie wtedy postać

$$(1) \quad m \bar{p} = \bar{P}.$$

Na przyszłość będziemy stale zakładać, że jednostki są tak dobrane, by $K=1$. Prawo Newtona będziemy więc zawsze przyjmowali w postaci (I).

Tworząc rzuty na osie układu otrzymamy na mocy (I):

$$(II) \quad m p_x = P_x, \quad m p_y = P_y, \quad m p_z = P_z.$$

Równości (I) i (II) są oczywiście równoważne.

Ponieważ $\bar{p} = d\bar{v}/dt$, zaś m jest liczbą stałą, więc $m\bar{p} = d(m\bar{v})/dt$. Zatem związek (I) możemy napisać również w postaci

$$(III) \quad d(m\bar{v})/dt = \bar{P}.$$

Wektor $m\bar{v}$ nazywamy *pędem* (ilością ruchu).

A więc: *pochodna pędu (względem czasu) równa się sumie sił działających na punkt materialny.*

Niech na punkt materialny o masie m działają siły, których suma $\bar{P}$ w pewnym okresie czasu stale jest zerem. Wtedy $m\bar{p}=0$, więc przyspieszenie $\bar{p}=0$, i punkt porusza się wówczas ruchem jednostajnym prostoliniowym (lub jest w spoczynku). Mamy więc następujące prawo, zwane *prawem bezwładności Newtona*:

II. *Jeżeli na punkt materialny w pewnym okresie czasu działają siły o sumie 0, to punkt jest w spoczynku albo w ruchu jednostajnym prostoliniowym.*

Na odwrót, jeżeli punkt jest w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym, to przyspieszenie $\bar{p}=0$, a ponieważ na mocy prawa (I) jest $m\bar{p}=\bar{P}$, więc suma sił działających $\bar{P}$ jest zerem.

Siły działające na punkt materialny pochodzą zazwyczaj z działania innych punktów materialnych na dany punkt. Dla sił tych Newton podał prawo następujące, zwane *prawem akcji i reakcji*:

III. *Jeżeli punkt materialny A działa na punkt materialny B z pewną siłą, to również punkt B działa wówczas na punkt A z siłą równą co do wielkości i kierunku, ale o zwrocie przeciwnym; siły z jakimi punkty A i B działają na siebie są zawsze skierowane wzdłuż prostej AB, łączącej te punkty.*

Jeżeli siła z jaką punkt A działa na punkt B ma zwrot ku A (a więc siła, z jaką punkt B działa na A, ma zwrot ku B), to mówimy, że punkty A i B *przyciągają się*; w przypadku przeciwnym mówimy, że punkty te się *odpychają*.

Równowaga punktu i sił. Jeżeli punkt materialny jest w spoczynku, to powiadamy, że jest w *równowadze*. O siłach $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$ mówimy, że są w *równowadze* lub że się *równoważą*, jeżeli ich suma jest zerem, t. zn. jeżeli $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = 0$.

Jeżeli więc punkt materialny jest w równowadze, to siły działające na ten punkt również są w równowadze. Jeżeli natomiast siły działające na punkt materialny w pewnym okresie czasu są w równowadze, to w tym okresie czasu przyspieszenie $\vec{p} = 0$, zatem punkt jest bądź w równowadze, bądź w ruchu jednostajnym prostoliniowym.

Siła bezwładności. Zasada d'Alemberta. Prawo (I) możemy napisać również w postaci

$$(IV) \quad \vec{P} + (-m\vec{p}) = 0.$$

Wektor $-m\vec{p}$ o początku w punkcie m nazywamy *siłą bezwładności*.

Nie należy sądzić, że wektor $-m\vec{p}$ przedstawia siłę działającą na punkt materialny m . Tylko dla wygody nazywamy ten wektor siłą (bezwładności). Na punkt m działają tylko siły, których suma wynosi $\vec{P}$.

Związek (IV) możemy wypowiedzieć jak następuje:

Siły działające na punkt materialny są w równowadze z siłą bezwładności.

Powyższe sformułowanie jest równoważne I prawu Newtona i nosi nazwę *zasady d'Alemberta*. Zasada ta daje duże usługi przy badaniu ruchu punktów t. zw. nieswobodnych.

§ 3. Układy jednostek dynamicznych. Zasadniczymi jednostkami, jakie przyjmujemy w dynamice, są jednostki długości czasu i masy. Przy pomocy tych jednostek określamy jednostkę siły. Za jednostkę siły obieramy mianowicie siłę, która masie 1 nadaje przyspieszenie 1.

Układ fizyczny *cgs*. Otóż za jednostkę długości przyjmuje się *centymetr* (cm), masy *gram* (g), za jednostkę czasu *sekundę* (sek) i siły *dynę* (dyn).

Pierwotnie metr ($m=100$ cm) miał przedstawiać jedną czterdziestomilionową część południka ziemskiego. Przy obliczeniach jednak popełniono pewien niewielki błąd. Dzisiaj metr określamy przy pomocy długości wzorca przechowywanego w Paryżu. Podobnie jednostka masy 1 g miała być pierwotnie masą 1 cm³ wody chemicznie czystej przy 4° C pod ciśnieniem 760 mm rtęci. Obecnie jednak przyjmujemy za 1 kilogram ($kg=1000$ g) masę wzorca platynowego, przechowywanego w Paryżu.

Jednostkę czasu 1 sek określamy z pomocą t. zw. średniej doby słonecznej, której wyznaczeniem zajmuje się astronomia. Średnia doba słoneczna = 24 godzin (godz), godzina = 60 minut (min), minuta = 60 sek.

Jednostką siły 1 dyn jest siła, która masie 1 g nadaje przyspieszenie 1 cm · sek⁻².

Układ zasadniczych jednostek (centymetr, gram, sekunda) nazywamy krótko *układem fizycznym cgs*.

Mierzenie mas i sił. Drobne ciała w pobliżu ziemi, puszczane swobodnie, spadają ku ziemi pionowo ruchem jednostajnie przyspieszonym (jeżeli pominiemy opór powietrza). Przyspieszenie to (zwane *ziemskim*) jest w danym miejscu na ziemi dla wszystkich ciał jednakowe, zmienia się jednak wraz z szerokością geograficzną. Oznacza się je przez *g*. U nas przyspieszenie ziemskie wynosi w przybliżeniu $g=981$ cm · sek⁻².

Niechaj *m* oznacza masę drobnego ciała. Siłę skierowaną pionowo w dół, o wielkości $Q=mg$, nazywamy *ciężarem* tego ciała.

Ciężar jest więc proporcjonalny do masy ciała; ciała mające równe ciężary (w tym samym miejscu na ziemi) mają równe masy i na odwrót.

Przy pomocy przyrządu zwanego *wagą* (którego zasadę poznamy w rozdz. VI), możemy porównywać ciężary dwóch ciał. Ponieważ

z równości ciężarów wynika równość mas, więc przy pomocy wagi możemy pośrednio porównywać masy ciał. Wynika stąd, że przy pomocy wagi możemy *mierzyć*, t. j. wyznaczać *masy* ciał.

Sily mierzymy sposobem *dynamicznym* lub *statycznym*.

Sposób dynamiczny opiera się na I prawie Newtona ($\bar{P}=m\bar{p}$). Ze wzoru tego możemy wyznaczyć siłę $\bar{P}$, gdy znamy masę ciała m i przyspieszenie $\bar{p}$, jakie mu siła $\bar{P}$ nadaje.

Sposób statyczny opiera się na tym, że pod działaniem sił ciała zmieniają swój kształt (odkształcają się). Ze znajomości odkształceń możemy w pewnych przypadkach wnioskować o wielkości sił, wywołujących te odkształcenia. Jeżeli np. na sprężynkę, zawieszoną pionowo, działa w dolnym jej końcu siła skierowana pionowo w dół, wówczas sprężynka się wydłuża. Wydłużenie jest (przy małych siłach) proporcjonalne do wielkości siły działającej. Przyrządy służące do statycznego mierzenia sił nazywamy *dynamometrami*.

Układ techniczny jednostek. W technice rozpowszechniony jest t. zw. *układ techniczny* jednostek. W układzie technicznym przyjmuje się za jednostki zasadnicze jednostki długości, czasu i siły. Jednostkę długości jest 1 m, czasu 1 sek, a siły 1 kilogram (kg). Jest to ciężar 1 dcm³ wody (w normalnych warunkach) pod 45° szerokości geograficznej północnej (gdzie przyspieszenie ziemskie $g=981 \text{ cm} \cdot \text{sek}^{-2}=9,81 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-2}$).

Jeżeli we wzorze $|\bar{P}|=m|\bar{p}|$ położymy $|\bar{P}|=1$ i $|\bar{p}|=1$, dostaniemy $m=1$. A zatem jednostką masy będzie masa, której siła 1 kg nadaje przyspieszenie $1 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-2}$.

Niech m będzie masą ciała, Q jego ciężarem (pod 45° szer. geogr. płn.) i położymy $g=9,81 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-2}$. Zatem $Q=mg$, więc

$$(1) \quad m = Q/g = Q/9,81.$$

Ze wzoru powyższego możemy wyznaczyć masę ciała w jednostkach układu technicznego, gdy znamy ciężar ciała. Ponieważ ciężar 9,81 dcm³ wody (pod 45° szer. geogr. płn.) wynosi 9,81 kg, więc jednostkę masy w układzie technicznym przedstawia masa 9,81 dcm³ wody.

W układzie *cgs* masa 9,81 dcm³ wody wynosi 9,81 kg (masy) = 9810 g (masy). Zatem:

$$(2) \quad \text{Jedn. masy w ukl. techn.} = 9,81 \text{ kg (masy)} = 9810 \text{ g (masy)}.$$

Aby znaleźć związek między jednostką siły (kg) w układzie technicznym a jednostką siły (dyną) w układzie *cgs*, zauważmy, że

1 dm³ wody (t. j. masa 1000 g) spada na ziemię pod wpływem swego ciężaru 1 kg z przyspieszeniem 981 cm·sek⁻². Zatem 1 kg (siły) = = 1000·981 dyn, skąd

$$(3) \quad 1 \text{ kg (siły)} = 981.000 \text{ dyn.}$$

Wymiary wielkości dynamicznych. W dynamice występują jeszcze inne wielkości (np. praca, energia kinetyczna i t. p.), których jednostki określamy, podobnie jak jednostkę siły, przy pomocy jednostek zasadniczych, t. j. długości, masy i czasu. Podobnie jak dla wielkości kinematycznych (por. Rozdz. II, § 11), można wprowadzić dla wielkości dynamicznych pojęcie wymiaru. Znajomość wymiaru danej wielkości pozwala w łatwy sposób wyznaczyć miarę tej wielkości przy zmianie zasadniczych jednostek.

Przypuśćmy, że obraliśmy dwa układy jednostek długości, masy i czasu, które oznaczmy odpowiednio przez L, M, T i L', M', T' i że między tymi jednostkami zachodzą związki

$$(4) \quad L = \lambda L', \quad M = \mu M', \quad T = \tau T'.$$

Niechaj miara jakiejś wielkości dynamicznej A wynosi a przy jednostkach L, M, T , zaś a' przy jednostkach L', M', T' .

Jeżeli można dobrać takie liczby α, β, γ , żeby dla każdego dwóch układów jednostek L, M, T i L', M', T' spełniających związki (4) zachodził związek

$$(5) \quad a' = a \lambda^\alpha \mu^\beta \tau^\gamma,$$

to *wymiarem* wielkości A nazywamy wyrażenie

$$(6) \quad L^\alpha M^\beta T^\gamma.$$

Wymiar wielkości A oznaczamy przez $[A]$, a jednostkę wielkości A przy jednostkach L, M, T przedstawiamy symbolem $L^\alpha M^\beta T^\gamma$.

Wielkość A wynosi zatem $a L^\alpha M^\beta T^\gamma$ przy jednostkach L, M, T , zaś $a' L'^\alpha M'^\beta T'^\gamma$ przy jednostkach L', M', T' , skąd

$$(7) \quad a L^\alpha M^\beta T^\gamma = a' L'^\alpha M'^\beta T'^\gamma.$$

Opierając się na wzorach (4) i rachując formalnie, dostaniemy $a L^\alpha M^\beta T^\gamma = a (\lambda L')^\alpha (\mu M')^\beta (\tau T')^\gamma$, skąd

$$(8) \quad a L^\alpha M^\beta T^\gamma = (a \lambda^\alpha \mu^\beta \tau^\gamma) L'^\alpha M'^\beta T'^\gamma.$$

Ze wzorów (7) i (8) otrzymujemy przez przyrównanie wzór (5). W ten sposób przy pomocy rachunku formalnego możemy, znając

wymiar wielkości A , otrzymać jej miarę przy zmianie jednostek długości, masy i czasu.

Czytelnik łatwo uogólni twierdzenie podane na str. 51, które daje duże usługi przy wyznaczaniu wymiaru.

Przykład 1. Siła o wielkości (wartości bezwzględnej) P , działając na punkt materialny o masie m , nadaje mu przyspieszenie o wielkości p . Zatem $P = mp$, skąd $[P] = [m] \cdot [p]$. Ponieważ $[m] = M$ i $[p] = LT^{-2}$, więc

$$(I) \quad [siła] = L M T^{-2}.$$

Jednostką siły w układzie *cgs* jest dyna. Zatem

$$(II) \quad \text{dyn} = \text{cm} \cdot \text{g} \cdot \text{sek}^{-2}.$$

Przykład 2. Siłę o wielkości 6 m kg min^{-2} przedstawić w układzie *cgs*.

Mamy

$$\begin{aligned} 6 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{min}^{-2} &= 6 (100 \text{ cm}) \cdot (1000 \text{ g}) \cdot (60 \text{ sek})^{-2} = \\ &= (6 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 60^{-2}) \cdot (\text{cm g sek}^{-2}) = 166\frac{2}{3} \text{ dyn.} \end{aligned}$$

§ 4. Równania ruchu. Jednym z głównych zagadnień dynamiki jest wyznaczenie ruchu punktu materialnego, gdy dana jest masa m tego punktu i siła $\vec{P}$, działająca na ten punkt. W najprostszym przypadku siła $\vec{P}$ może być podana, jako funkcja czasu, t. zn. że dane są funkcje:

$$(1) \quad P_x = F(t), \quad P_y = \Phi(t), \quad P_z = \Psi(t),$$

określające w każdej chwili t (pewnego okresu czasu) rzuty siły $\vec{P}$ na osie układu.

Spotykamy się jednak z przypadkami bardziej skomplikowanymi. Zdarzyć się może, że jakiś obszar D ma tę własność, że na dany punkt materialny, umieszczony gdziekolwiek w obszarze D , działa pewna siła $\vec{P}$.

Jeżeli siła $\vec{P}$ zależy tylko od położenia punktu, a nie zależy od niczego więcej (np. prędkości), to obszar D nazywamy *polem sił*.

Przykładem pola sił jest pole grawitacyjne ziemskie: na dany bowiem punkt materialny umieszczony w pobliżu ziemi, działa siła ciężkości zależna tylko od położenia tego punktu (a niezależna od prędkości).

W polu sił jest więc siła $\bar{P}$ funkcją współrzędnych x, y, z danego punktu. Pole jest określone, jeżeli są dane funkcje:

$$(2) \quad P_x = F(x, y, z), \quad P_y = \Phi(x, y, z), \quad P_z = \Psi(x, y, z),$$

wyznaczające w każdym punkcie pola rzuty siły $\bar{P}$. Jeżeli więc badamy ruch punktu w polu sił, to mamy do czynienia z siłą, która zależy od położenia punktu.

Jeżeli punkt materialny porusza się w pewnym ośrodku (np. w powietrzu), wówczas na punkt materialny oprócz innych sił działa również siła oporu, jaki ośrodek przeciwstawia ruchowi. Siła ta zależy między innymi od prędkości punktu materialnego. W tym przypadku mamy więc siłę zależną również od prędkości punktu.

W najogólniejszym przypadku przyjmować będziemy, że siła $\bar{P}$ zależy od czasu, położenia i prędkości punktu. Zakładać więc będziemy, że siła $\bar{P}$ działająca na punkt materialny określona jest funkcjami:

$$(3) \quad P_x = F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad P_y = \Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \quad P_z = \Psi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t),$$

których wartościami są rzuty tej siły, zależne od współrzędnych położenia punktu (x, y, z) i jego prędkości $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, oraz od czasu t .

O funkcjach (3) zakładamy zazwyczaj, że są ciągle i mają pochodne cząstkowe ciągle w pewnym obszarze zmiennych $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$.

Oczywiście, że w poszczególnych zagadnieniach siła $\bar{P}$ nie musi zależeć od wszystkich zmiennych $x, y, \dots, t$, lecz od niektórych może być niezależna.

Teoretycznie jest do pomyślenia, że siła $\bar{P}$ może zależeć od wyższych pochodnych (np. od drugich, trzecich, i t. d.) zmiennych x, y, z . Z przypadkami takimi nie spotykamy się jednak w zagadnieniach praktycznych i nie będziemy ich tu rozważać.

Niechaj ruch punktu materialnego dany będzie przez funkcje:

$$(4) \quad x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t).$$

Na mocy równości (II), str. 73, otrzymujemy:

$$(I) \quad m\ddot{x} = P_x, \quad m\ddot{y} = P_y, \quad m\ddot{z} = P_z.$$

Jeżeli założymy, że P_x, P_y, P_z są funkcjami kształtu (3), równania (I) przyjmą postać

$$(II) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{y} &= \Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t), \\ m\ddot{z} &= \Psi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \end{aligned}$$

Powyższe równania przedstawiają układ równań różniczkowych rzędu drugiego, przyczem szukanymi funkcjami są funkcje (4).

Przypuśćmy, że badamy ruch w otoczeniu pewnej chwili t_0 . Załóżmy, że w chwili t_0 punkt miał współrzędne x_0, y_0, z_0 , zaś prędkość jego miała rzuty $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. Załóżmy nadto, że funkcje (3) są funkcjami ciągłymi, posiadającymi ciągle pochodne cząstkowe w otoczeniu wartości $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, t_0$.

Z teorii równań różniczkowych wiadomo, że przy powyższych założeniach istnieje jeden i tylko jeden układ funkcyj (4) ciągłych wraz z pierwszymi i drugimi pochodnymi w otoczeniu chwili t_0 , spełniających równania (II) oraz związki:

$$(5) \quad f(t_0) = x_0, \quad \varphi(t_0) = y_0, \quad \psi(t_0) = z_0; \quad f'(t_0) = \dot{x}_0, \quad \varphi'(t_0) = \dot{y}_0, \quad \psi'(t_0) = \dot{z}_0.$$

Układ ten, jako jedyny układ funkcyj (4) czyniący zadość wszystkim żądanym warunkom, wyznacza więc ruch punktu materialnego, mającego w chwili t_0 współrzędne x_0, y_0, z_0 i prędkość o rzutach $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$.

Widzimy stąd, że *ruch punktu jest w zupełności wyznaczony przez podanie masy punktu, sił działających na niego i t. zw. warunków początkowych* (t. j. jego położenia i prędkości w chwili początkowej t_0).

Równania (II) noszą nazwę *równań ruchu Newtona*.

Przykład. Siła zależna tylko od czasu. Niech siła $\bar{P}$ zależy tylko od czasu i dana będzie przez funkcje (1). Równania ruchu (II) będą więc miały postać:

$$m\ddot{x} = F(t), \quad m\ddot{y} = \Phi(t), \quad m\ddot{z} = \Psi(t).$$

Dzieląc przez m i całkując obustronnie, otrzymamy dla $t_0 = 0$:

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt + c_1, \quad \dot{y} = \frac{1}{m} \int_0^t \Phi(t) dt + c_2, \quad \dot{z} = \frac{1}{m} \int_0^t \Psi(t) dt + c_3.$$

Przyjmijmy, że dla $t=0$ mamy $\dot{x}=\dot{x}_0, \dot{y}=\dot{y}_0, \dot{z}=\dot{z}_0$ (warunki początkowe). Podstawiając w powyższych równaniach $t=0$, dostaniemy $c_1=\dot{x}_0, c_2=\dot{y}_0, c_3=\dot{z}_0$. Zatem:

$$(6) \quad \dot{x} = F_1(t) + \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \Phi_1(t) + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \Psi_1(t) + \dot{z}_0,$$

gdzie $F_1(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt$ i t. d. Całkując równania (6), otrzymamy:

$$(7) \quad x = \int_0^t F_1(t) dt + \dot{x}_0 t + c_1, \quad y = \int_0^t \Phi_1(t) dt + \dot{y}_0 t + c_2, \quad z = \int_0^t \Psi_1(t) dt + \dot{z}_0 t + c_3.$$

Przyjmijmy teraz, że dla $t=0$ jest $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Zatem z równań (7), kładąc $t=0$, dostaniemy $c_1=x_0$, $c_2=y_0$, $c_3=z_0$. A więc

$$(8) \quad x = F_2(t) + \dot{x}_0 t + x_0, \quad y = \Phi_2(t) + \dot{y}_0 t + y_0, \quad z = \Psi_2(t) + \dot{z}_0 t + z_0,$$

gdzie $F_2(t) = \int_0^t F_1(t) dt$ i t. d. Z równań (8) wynika, że ruch będzie określony, jeżeli w chwili początkowej $t=0$ podamy położenie punktu (t. j. x_0, y_0, z_0) i prędkość początkową (t. j. $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$).

§ 5. Ruch pod wpływem siły ciężkości. Niech na punkt materialny o masie m działa siła $\bar{P}$ stała co do wielkości, kierunku i zwrotu.

Z tym przypadkiem mamy do czynienia, badając ruch drobnych ciał w pobliżu ziemi i przyjmując za układ inercjalny układ związany z ziemią. Jeżeli pominiemy opór powietrza, to na ciało wyrzucone działać będzie tylko siła ciężkości, którą na małej przestrzeni uważać możemy za stałą.

Niech $\bar{P}$ oznacza siłę ciężkości. Zatem $|\bar{P}| = mg$ (g przyspieszenie ziemskie). Obierzmy układ (x, y, z) w ten sposób, by oś z była zwrócona pionowo ku górze. Zatem:

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -mg.$$

Równania ruchu Newtona (str. 79, wzory (II)) przyjmą więc postać: $m\ddot{x}=0$, $m\ddot{y}=0$, $m\ddot{z}=-mg$ czyli:

$$(1) \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g.$$

Całkując powyższe równania, otrzymamy:

$$(2) \quad \dot{x} = c_1, \quad \dot{y} = c_2, \quad \dot{z} = -gt + c_3.$$

Całkując jeszcze raz, dostaniemy:

$$(3) \quad x = c_1 t + c'_1, \quad y = c_2 t + c'_2, \quad z = \frac{1}{2} g t^2 + c_3 t + c'_3.$$

Liczby $c_1, c_2, c_3, c'_1, c'_2, c'_3$ oznaczają stałe całkowania, które wyznaczymy, znając warunki początkowe, t. j. współrzędne x_0, y_0, z_0 i rzuty $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ prędkości $\bar{v}_0$ punktu ruchomego w chwili początkowej t_0 . Bez szkody dla ogólności możemy założyć, że $t_0=0$; ponadto (dobierając odpowiednio układ współrzędnych) możemy przyjąć, że w chwili $t_0=0$ punkt znajdował się w początku układu, zaś prędkość $\bar{v}_0$ leżała w płaszczyźnie pionowej zx .

Zakładamy więc, że dla $t=0$ jest $x_0=0$, $y_0=0$, $z_0=0$ i $\dot{y}_0=0$.

Wstawiając $t=0$ w równania (2) i (3), otrzymamy:

$$c_1=\dot{x}_0, \quad c_2=\dot{y}_0=0, \quad c_3=\dot{z}_0; \quad c'_1=x_0=0, \quad c'_2=y_0=0, \quad c'_3=z_0=0.$$

Równania (2) i (3) przyjmują więc postać:

$$(2') \quad \dot{x}=\dot{x}_0, \quad \dot{y}=0, \quad \dot{z}=-gt+\dot{z}_0,$$

$$(3') \quad x=\dot{x}_0 t, \quad y=0, \quad z=-\frac{1}{2}gt^2+\dot{z}_0 t.$$

Ponieważ jest stale $y=0$, więc ruch odbywa się w płaszczyźnie pionowej zx .

Rozpatrzmy dwa przypadki: t. zw. rzut pionowy i rzut ukośny.

Rzut pionowy. Załóżmy, że w chwili $t=0$ prędkość $\bar{v}_0$ miała kierunek pionowy (lub była zerem), a więc że $\dot{x}_0=0$. Kładąc $\dot{z}=v$ i $\dot{z}_0=v_0$, otrzymamy z (2') i (3'):

$$(4) \quad \dot{x}=0, \quad \dot{y}=0, \quad x=0, \quad y=0,$$

$$(5) \quad v=-gt+v_0, \quad z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t.$$

Ponieważ jest stale $x=0$ i $y=0$, więc punkt porusza się po osi z t. j. po pionie. Mamy nadto $\dot{v}=p=-g$.

A więc: jeżeli prędkość początkowa ma kierunek pionowy (lub jest zerem), wówczas punkt pod wpływem siły ciężkości porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym po pionie.

Przyjmijmy, że $v_0 > 0$, t. j. że w chwili początkowej prędkość miała zwrot ku górze (np. że wyrzuciliśmy punkt pionowo w górę z prędkością v_0). Oznaczmy przez h wysokość rzutu, t. j. wzniesienie maksymalne, jakie punkt osiągnie. Aby otrzymać h , należy obliczyć maksimum funkcji $z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t$. Dostaniemy

$$(6) \quad h=v_0^2/2g \quad \text{w chwili} \quad t=v_0/g.$$

Rzut ukośny. Załóżmy, że prędkość $\bar{v}_0 (\neq 0)$ tworzy z osią x kąt $\alpha \neq \pm \pi/2$. Kładąc $\bar{v}_0=v_0$, dostaniemy $\dot{x}_0=v_0 \cos \alpha$, $\dot{z}_0=v_0 \sin \alpha$. Na mocy więc (2') i (3'):

$$(7) \quad \dot{x}=v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}=0, \quad \dot{z}=-gt+v_0 \sin \alpha$$

$$(8) \quad x=v_0 t \cos \alpha, \quad y=0, \quad z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t \sin \alpha.$$

Ponieważ $\cos \alpha \neq 0$ i $v_0 \neq 0$, więc na mocy pierwszego z równań (8) $t=x/v_0 \cos \alpha$, skąd

$$(9) \quad z=-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

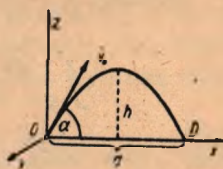
Równanie powyższe jest równaniem paraboli.

A więc: punkt w rzucie ukośnym porusza się po paraboli.

Parabola ta przecina oś x w punktach O i D . Długość odcinka $OD=d$ nazywamy *odległością rzutu*.

Aby wyliczyć d , podstawiamy $z=0$ w (9).
Otrzymamy

$$(10) \quad d = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$



A więc: *maksymalna odległość rzutu przy danej prędkości początkowej v_0 wypada dla kąta $\alpha = \pi/4 = 45^\circ$.*

Aby otrzymać wysokość rzutu h , należy obliczyć maximum funkcji (9). Dostaniemy

$$(11) \quad h = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g \quad \text{dla} \quad x = v_0^2 \sin 2\alpha / 2g.$$

§ 6. Ruch w ośrodku stawiającym opór. Punkt materialny, poruszający się w ośrodku takim jak np. powietrze, napotyka na opór. Doświadczenie okazuje, że opór powietrza daje się wyrazić przez siłę zależną tylko od prędkości punktu (przy ciałach opór zależy jeszcze od kształtu ciała). Opór ma kierunek prędkości, ale zwrot przeciwny. Wielkość oporu zależy od wielkości prędkości, a nie zależy od jej kierunku. Oznaczmy wielkość oporu przez Γ , a wielkość prędkości przez v . Możemy więc napisać

$$\Gamma = f(v).$$

Funkcja f jest rosnącą, przyczem $f(0)=0$. Dla prędkości mniejszych od prędkości głosu (wynoszącej w powietrzu 333 m/sek) możemy z dużą dokładnością przyjąć, że

$$(1) \quad \Gamma = \lambda v^2,$$

gdzie λ jest współczynnikiem zależnym od temperatury i gęstości powietrza.

Rzut pionowy. Rozpatrzmy przypadek spadania punktu. Załóżmy, że punkt spada po osi z , której nadajmy zwrot pionowo w dół. Zatem współrzędna prędkości $\dot{z} = v > 0$. Opór jest skierowany ku górze, więc rzut jego na oś z jest ujemny. Przyjmując, że wielkość oporu wyraża się wzorem (1), otrzymujemy, kładąc $\lambda = km$:

$$(2) \quad m \ddot{z} = m \frac{dv}{dt} = mg - kmv^2.$$

Stąd $\frac{dv}{g - kv^2} = dt$, a więc

$$(3) \quad \int \frac{dv}{g - kv^2} = \int dt = t.$$

Kładąc $v_{\infty} = \sqrt{\frac{g}{k}}$, dostaniemy

$$\int \frac{dv}{g - kv^2} = \frac{1}{k} \int \frac{dv}{v_{\infty}^2 - v^2} = \frac{1}{2kv_{\infty}} \log \frac{v_{\infty} + v}{v_{\infty} - v} + c,$$

gdzie c jest stałą całkowania. Na mocy więc (3)

$$(4) \quad \frac{1}{2kv_{\infty}} \log \frac{v_{\infty} + v}{v_{\infty} - v} + c = t.$$

Załóżmy, że w chwili początkowej $t=0$ prędkość wynosiła $v=0$. Podstawiając $v=0$ i $t=0$ we wzorze (4), dostaniemy $c=0$. Zatem

$$(5) \quad v = \frac{e^{2kv_{\infty}t} - 1}{e^{2kv_{\infty}t} + 1} v_{\infty} = \left(1 - \frac{2}{e^{2kv_{\infty}t} + 1}\right) v_{\infty}.$$

Ze wzoru (5) wynika, że stale $v < v_{\infty}$.

A więc: *prędkość punktu spadającego pionowo w ośrodku stawiającym opór nie wzrasta nieograniczenie, lecz jest stale mniejsza od prędkości granicznej v_{∞} .*

Po pewnym czasie prędkość v mało się różni od v_{∞} i punkt spada ruchem prawie jednostajnym. Zaobserwować to możemy na kropkach deszczu.

Rzut ukośny. Załóżmy obecnie, że punkt porusza się w płaszczyźnie pionowej xz . Przyjmijmy ogólnie, że wielkość oporu wynosi $\Gamma = f(v)$. Oznaczając opór przez $\bar{\Gamma}$, otrzymamy więc $\bar{\Gamma} = -\frac{f(v)}{v} \bar{v}$,

skąd $\Gamma_x = -\frac{f(v)}{v} v_x$ i $\Gamma_z = -\frac{f(v)}{v} v_z$. Zatem:

$$\Gamma_x = -\frac{f(v)}{v} \dot{x}, \quad \Gamma_z = -\frac{f(v)}{v} \dot{z}.$$

Równania ruchu będą więc miały postać

$$m\ddot{x} = -\frac{f(v)}{v} \dot{x}, \quad m\ddot{z} = mg - \frac{f(v)}{v} \dot{z}, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}.$$

Rozwiązaniem powyższych równań zajmuje się t. zw. balistyka zewnętrzna. Zadanie to jest bardzo trudne, gdyż wartości funkcji $f(v)$ znamy tylko z pomiarów.

§ 7. Moment ilości ruchu. Niech punkt materialny A o masie m porusza się z prędkością $\vec{v}$. Wektor $m\vec{v}$ o początku w A nazwaliśmy *pędem* albo *ilością ruchu* (str. 73). Jeżeli x, y, z są współrzednymi punktu A , to rzuty pędu na osie układu wynoszą odpowiednio $m\dot{x}, m\dot{y}, m\dot{z}$.

Oznaczmy przez $\vec{K}$ moment ilości ruchu $m\vec{v}$ względem początku układu. Zatem (str. 18, wzór (II)):

$$(1) \quad K_x = m(\dot{y}z - \dot{z}y), \quad K_y = m(\dot{z}x - \dot{x}z), \quad K_z = m(\dot{x}y - \dot{y}x).$$

Utwórzmy pochodną (względem czasu) momentu ilości ruchu. Otrzymamy:

$$(2) \quad \dot{K}_x = m(\ddot{y}z - \ddot{z}y), \quad \dot{K}_y = m(\ddot{z}x - \ddot{x}z), \quad \dot{K}_z = m(\ddot{x}y - \ddot{y}x).$$

Załóżmy, że układ odniesienia jest układem inercyjnym, a na punkt A działa siła $\vec{P}$. Wówczas $m\ddot{x} = P_x$, $m\ddot{y} = P_y$, $m\ddot{z} = P_z$, skąd na mocy (2)

$$(3) \quad \dot{K}_x = P_y z - P_z y, \quad \dot{K}_y = P_z x - P_x z, \quad \dot{K}_z = P_x y - P_y x.$$

Wyrażenia, stojące po prawych stronach równań (3), przedstawiają momenty siły $\vec{P}$ względem osi układu. Oznaczając więc przez $\vec{M}$ moment siły $\vec{P}$ względem początku układu, mamy na mocy (3):

$$(4) \quad \dot{K}_x = M_x, \quad \dot{K}_y = M_y, \quad \dot{K}_z = M_z.$$

Równania powyższe możemy napisać w postaci jednego równania wektorowego:

$$(5) \quad \dot{\vec{K}} = \vec{M}.$$

Za początek układu mogliśmy obrać punkt dowolny.

A więc: *pochodna momentu ilości ruchu względem dowolnego punktu stałego równa się momentowi siły działającej względem tego punktu.*

Z równań (4) wynika również, że *pochodna momentu ilości ruchu względem dowolnej osi stalej równa się momentowi siły względem tej osi.*

Zasada zachowania pól. Przypuśćmy, że moment siły $\vec{P}$ względem pewnej osi l jest stale zerem; albo więc kierunek siły $\vec{P}$ przecina oś l , albo siła $\vec{P}$ jest do osi l równoległa. Obierzmy oś l za oś z . Mamy zatem $M_z = 0$. Na mocy (4) jest więc $\dot{K}_z = 0$, czyli $K_z = \text{const}$. Stąd na mocy (1) otrzymujemy

$$(6) \quad m(\dot{x}y - \dot{y}x) = \text{const.} \quad \text{czyli} \quad \dot{x}y - \dot{y}x = \text{const.}$$

Niechaj A' będzie rzutem punktu A na płaszczyznę xy . Punkt A' ma współrzędne x, y . Zatem prędkość połowa (str. 17) punktu A' wynosi $-\frac{1}{2}(\dot{x}y - y\dot{x})$. Ze wzoru (6) wynika, że prędkość połowa punktu A' jest stała.

A więc: jeżeli moment siły względem pewnej osi jest stale zerem, to moment ilości ruchu względem tej osi jest stały i prędkość połowa rzutu ruchu na płaszczyznę prostopadłą do tej osi jest stała.

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania momentu ilości ruchu* lub *zasady zachowania pól*.

§ 8. Ruch środkowy. Jeżeli punkt materialny porusza się w ten sposób, że jego przyspieszenie w każdej chwili ma kierunek przechodzący przez pewien stały punkt O , to ruch punktu nazywamy *ruchem środkowym*, punkt zaś O *środkiem ruchu*.

Np. ruch jednostajny punktu po okręgu koła jest ruchem środkowym, gdyż przyspieszenie jest stale skierowane ku środkowi koła, będącemu w tym przypadku środkiem ruchu (str. 43).

Ponieważ przyspieszenie ma kierunek siły działającej na punkt materialny, więc w ruchu środkowym kierunek siły przechodzi przez środek ruchu.

Pole sił w którym kierunki sił przechodzą przez pewien stały punkt O nazywamy *polem środkowym*, a punkt O *środkiem pola*.

Punkt o masie M umieszczony nieruchomo w stałym punkcie O i przyciągający inny punkt o masie m z siłą, która zależy tylko od wzajemnej odległości tych punktów, wytwarza pole sił. Pole to jest polem środkowym, gdyż siła działająca na punkt m ma — wedle prawa akcji i reakcji (str. 74, III) — kierunek przechodzący przez punkt M .

Punkt materialny porusza się w polu środkowym ruchem środkowym; środek ruchu leży oczywiście w środku pola.

Obierzmy początek układu współrzędnych w środku pola. Ponieważ kierunek siły przechodzi stale przez początek układu, więc jej moment względem każdej osi jest zerem. Na mocy zasady zachowania pól ruch rzutu punktu na każdą płaszczyznę układu ma wówczas prędkość połową stałą, zatem:

$$(1) \quad \dot{y}z - z\dot{y} = a, \quad \dot{z}x - x\dot{z} = b, \quad \dot{x}y - y\dot{x} = c,$$

gdzie a, b, c są pewnymi stałymi. Mnożąc równanie pierwsze obustronnie przez x , drugie przez y , trzecie przez z i dodając stronami, otrzymamy

$$(2) \quad ax + by + cz = 0.$$

Widzimy więc, że współrzędne punktu spełniają stale równanie (2). Jest ono równaniem płaszczyzny, przechodzącej przez początek układu (t. j. przez środek pola). Zatem punkt porusza się w płaszczyźnie, przechodzącej przez początek układu.

Jeżeli na tej płaszczyźnie obierzemy osie x, y , wówczas z (1) wynika, że prędkość polowa w płaszczyźnie ruchu jest stała; promienie wodzące zakreślają więc w równych czasach równe pola.

A zatem: *tor ruchu środkowego jest torem płaskim, leżącym w płaszczyźnie przechodzącej przez środek; promienie wodzące, wychodzące ze środka, zakreślają w równych czasach równe pola.*

Udowodnimy teraz twierdzenie odwrotne:

Jeżeli tor punktu jest płaski, a promienie wodzące, wychodzące z pewnego stałego punktu O (leżącego w płaszczyźnie toru), zakreślają w równych czasach równe pola, wówczas kierunek siły działającej przechodzi stale przez punkt O .

Dowód. Obierzmy początek układu w O , zaś osie x, y w płaszczyźnie ruchu. Punkt porusza się więc w płaszczyźnie xy . Ponieważ prędkość polowa jest stała, więc $\dot{x}y - y\dot{x} = \text{const}$. Różniczkując obustronnie, dostaniemy $\ddot{x}y - y\ddot{x} = 0$, więc $(m\ddot{x})y - (m\ddot{y})x = 0$, skąd

$$(3) \quad P_x y - P_y x = 0.$$

Ponieważ $\ddot{z} = 0$, więc $P_z = m\ddot{z} = 0$. Siła $\vec{P}$ leży zatem w płaszczyźnie xy ; na mocy (3) moment siły $\vec{P}$ względem O jest zerem, więc kierunek siły $\vec{P}$ przechodzi przez O , c. b. d. d.

Uwaga. Załóżmy, że prędkość polowa w ruchu środkowym jest zerem. Wtedy $\dot{x}y - y\dot{x} = 0$ lub (we współrzędnych biegunowych) $r^2\dot{\varphi} = 0$. Wynika stąd, że albo jest stale $r = 0$, t. zn. że punkt jest w spoczynku, albo jest stale $\dot{\varphi} = 0$ czyli $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, t. zn., że punkt porusza się po prostej przechodzącej przez środek (i nachylonej do osi x pod kątem φ_0).

A więc: *jeżeli w ruchu środkowym prędkość polowa jest zerem, to punkt porusza się po prostej przechodzącej przez środek.*

Jeżeli zaś założymy, że prędkość polowa jest różną od zera, to $r^2\dot{\varphi} \neq 0$, czyli $r \neq 0$.

A więc: *jeżeli w ruchu środkowym prędkość polowa jest różną od zera, to punkt nigdy nie przechodzi przez środek.*

Wzór Bineta. Punkt A o masie m porusza się w środkowym polu sił w płaszczyźnie xy z prędkością połową różną od zera. Wprowadźmy współrzędne biegunowe r, φ . Oznaczmy przez P rzut siły $\bar{P}$ na promień wodzący $\overline{OA}$. Zatem $P_x = P \cos \varphi$ i $P_y = P \sin \varphi$, więc $P_x \cos \varphi + P_y \sin \varphi = P$, skąd

$$(4) \quad P = m(\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi).$$

Ponieważ $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$, więc (por. str. 47, wzór (2))

$$\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$

skąd na mocy (4)

$$(5) \quad P = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2).$$

Oznaczmy prędkość połową przez $\frac{1}{2}c$. Z założenia jest $\frac{1}{2}c \neq 0$. Ponieważ we współrzędnych biegunowych prędkość połowa wynosi $\frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ (str. 47), więc

$$(6) \quad r^2\dot{\varphi} = c \quad \text{czyli} \quad \dot{\varphi} = c/r^2.$$

Przypuśćmy, że tor ma równanie $r = f(\varphi)$. Zatem

$$(7) \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{c}{r^2} = -c \frac{d(1/r)}{d\varphi},$$

więc

$$(8) \quad \ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -c^2 \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} \frac{1}{r^2}.$$

Ze wzoru (5) na mocy (6) i (8) otrzymujemy:

$$P = m \left(-\frac{c^2}{r^2} \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} - \frac{c^2}{r^3} \right),$$

zatem

$$(I) \quad P = -\frac{mc^2}{r^2} \left(\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right).$$

Wzór powyższy nosi nazwę *wzoru Bineta*.

Wzór ten z kształtu toru pozwala wyznaczyć siłę, działającą w ruchu środkowym. Na odwrót, znając siłę P jako funkcję zmiennych r i φ , możemy wyznaczyć tor.

§ 9. Ruchy planet. Prawa Keplera. Opierając się na obserwacjach, podał Kepler następujące trzy prawa odnoszące się do ruchów planet:

1) Planety krążą po elipsach, w których ognisku znajduje się słońce.

2) Promienie wodzące, wychodzące ze słońca zakreślają w równych czasach równe pola.

3) Kwadraty czasów obiegu dwóch planet są do siebie w stosunku takim, jak trzecie potęgi ich średnich odległości od słońca (przyczem przez średnią odległość rozumie się połowę wielkiej osi elipsy, po której krąży planeta).

Trzecie prawo nie jest zupełnie ściśle. Przyczynę tego poznamy później. Zauważmy jeszcze, że prawa Keplera mają charakter ściśle kinematyczny.

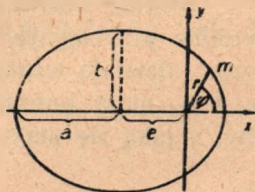
Wnioski z praw Keplera. Z praw Keplera wyprowadził Newton (przy pomocy dynamiki) prawo, określające siły, które wywołują ruch planet. Z pierwszych dwóch praw Keplera wynika mianowicie, że planety krążą po torach płaskich z prędkością połową stałą. Na mocy więc twierdzenia odwrotnego ze str. 87, siły działające na planety są siłami środkowymi, których kierunki przechodzą przez słońce.

Obierzmy w płaszczyźnie ruchu planety osie x, y , umieszczając początek układu w słońcu jako ognisku elipsy, po której planeta krąży. Za kierunek osi x obierzmy kierunek wielkiej osi elipsy i nadajmy osi x taki zwrot, by środek elipsy leżał w części ujemnej osi x . Oznaczmy oś wielką elipsy przez $2a$, oś małą przez $2b$, a mimośród przez $2e$. Równanie elipsy we współrzędnych biegunowych będzie wówczas miało postać

$$(1) \quad r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi},$$

gdzie

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$



Ze wzoru Bineta (str. 88, (I)) możemy otrzymać siłę, działającą na planetę. Mamy mianowicie na mocy (1) $\frac{1}{r} = \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{a(1-\varepsilon^2)}$, skąd

$$\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} = -\frac{\varepsilon\cos\varphi}{a(1-\varepsilon^2)}, \text{ a więc na mocy (2) i wzoru Bineta}$$

$$(3) \quad P = -\frac{mc^2 a}{b^2 r^2}.$$

Pole elipsy wynosi $ab\pi$; oznaczając przez T czas obiegu planety, otrzymamy z uwagi na to, że $\frac{1}{2}c$ jest prędkością połową, $\frac{1}{2}c = ab\pi/T$, czyli $c = 2ab\pi/T$. Na mocy zatem (3) dostaniemy

$$(4) \quad P = -\frac{4\pi^2 m a^3}{r^2 T^2}.$$

Ponieważ $P < 0$, więc siła jest skierowana ku słońcu.

Na mocy trzeciego prawa Keplera mamy dla dwóch planet $T^2/T_1^2 = a^3/a_1^3$, czyli $a^3/T^2 = a_1^3/T_1^2$. Iloraz a^3/T^2 ma zatem stałą wartość dla wszystkich planet. Kładąc

$$(5) \quad \mu = a^3/T^2,$$

otrzymamy z (4)

$$(6) \quad P = -\frac{4\pi^2 \mu m}{r^2}.$$

A więc: *siła, pod której wpływem planeta się porusza, jest skierowana ku słońcu i wprost proporcjonalna (co do wielkości) do masy planety, a odwrotnie do kwadratu odległości od słońca.*

Prawo ogólnego ciążenia. Wynik powyższy, wyprowadzony z praw Keplera, nasunął Newtonowi przypuszczenie, że siła działająca na planetę pochodzi ze wzajemnego przyciągania się planety i słońca. Myśl tę uogólnił Newton w postaci prawa powszechnej grawitacji czyli ogólnego ciążenia:

Dwa jakiegokolwiek punkty materialne przyciągają się z siłami, których wielkość jest wprost proporcjonalna do mas, a odwrotnie do kwadratu odległości tych punktów.

Według prawa akcji i reakcji, siły, z jakimi się punkty materialne przyciągają, są co do wielkości równe, przeciwnie skierowane i działają wzdłuż prostej łączącej te punkty. Oznaczając przez m_1 i m_2 masy punktów, przez r ich odległość, a przez P wielkość siły, z jaką się przyciągają, otrzymamy więc

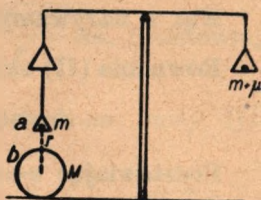
$$(I) \quad P = K \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

gdzie K jest pewną stałą, t.zw. *stałą ciążenia*, zależną tylko od jednostek długości, masy i czasu.

Z równania (I) mamy $K = Pr^2/m_1 m_2$, zatem $[K] = [P][r]^2/[m_1][m_2]$, więc $[K] = L^3 M^{-1} T^{-2}$. Pomiarzy okazały, że w układzie cgs:

$$K = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sek}^{-2}.$$

Stałą ciężenia można zmierzyć przy pomocy t.zw. *wagi Jolly'ego*. Jest to waga, która po jednej stronie ma dwie szalki, górną i dolną, a po drugiej jedną. Ciało a o masie m kładziemy na szalce górnej i równoważymy je na szali przeciwnej ciężarkiem o masie m . Ciało a przenosimy następnie na szalkę dolną; równowaga nie zostanie przez to zachwiana. Jeżeli jednak pod szalkę dolną podstawimy ciało b o masie M , waga się przechyli. Żeby równowagę przywrócić, musimy do ciężarka m dolożyć ciężarek o masie μ .



W doświadczeniu ciało b było kulą ołowianą. Ponieważ, jak można okazać, kula jednorodna przyciąga punkt materialny położony zewnątrz tak, jak gdyby jej całkowita masa była skupiona w środku, więc oznaczając przez r odległość środka kuli od ciała a , mamy $KmM/r^2 = \mu g$ czyli

$$K = \mu g r^2 / m M.$$

Masa ziemi. Można okazać, że kula złożona z warstw współśrodkowych o gęstości stałej przyciąga punkt położony zewnątrz tak, jak gdyby cała jej masa skupiona była w środku kuli. Przyjmując, że ziemia spełnia powyższe założenie, i oznaczając przez M masę ziemi, przez R jej promień, a przez Q ciężar ciała o masie m (na powierzchni ziemi), otrzymamy $Q = K m M / R^2$. Ponieważ $Q = mg$, więc $mg = K m M / R^2$, czyli

$$(7) \quad M = g R^2 / K.$$

Przyjmując $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-2}$, $R = 6300 \text{ km}$, $K = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sek}^{-2}$, otrzymamy (po zamianie m i km na cm)

$$M = 6 \cdot 10^{27} \text{ g}.$$

Gęstość ziemi otrzymujemy ze wzoru

$$\rho = M / \frac{4}{3} R^3 \pi = 3g / 4 K R \pi = 5,6 \text{ g cm}^{-3}.$$

Równanie Keplera. Zajmiemy się teraz wyznaczaniem położenia planety w danej chwili czasu. Obierzmy układ współrzędnych w płaszczyźnie ruchu planety, jak na str. 89. Elipsa, po której krąży planeta, ma we współrzędnych prostokątnych równanie

$$(x + e)^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1.$$

Wprowadźmy kąt pomocniczy u , określony przez równania:

$$(II) \quad (x+c)/a = \cos u, \quad y/b = \sin u.$$

Kąt u nazywamy *anomaliją mimośrodową*.

Równania (II) określają kąt u jednoznacznie. Z (II) dostajemy:

$$x = a(\cos u - e/a), \quad y = b \sin u.$$

Podstawiając $\varepsilon = e/a$, $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, otrzymujemy stąd:

$$(8) \quad x = a(\cos u - \varepsilon), \quad y = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \sin u.$$

Promień r otrzymujemy z równania

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2(1 - \varepsilon \cos u)^2.$$

Zatem

$$(III) \quad r = a(1 - \varepsilon \cos u).$$

Kąt φ , jaki r tworzy z osią x , nazywamy *anomaliją prawdziwą*.

Z równania elipsy we współrzędnych biegunowych (str. 89, (1)) dostaniemy $r\varepsilon \cos \varphi = a(1 - \varepsilon^2) - r$, więc

$$r\varepsilon(1 + \cos \varphi) = (1 - \varepsilon)[a(1 + \varepsilon) - r],$$

skąd na mocy (III), $r(1 + \cos \varphi) = a(1 - \varepsilon)(1 + \cos u)$. Ponieważ

$1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ i $1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}$, więc

$$(IV) \quad \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{a(1 - \varepsilon)} \cos \frac{u}{2} \quad \text{i podobnie} \quad \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{a(1 + \varepsilon)} \sin \frac{u}{2};$$

stąd

$$(V) \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}.$$

Wzory (IV) i (V) wyznaczają jednoznacznie φ przy pomocy u .

Przypuśćmy, że w chwili $t=0$ jest $u=0$, a więc $\varphi=0$. Pole elipsy wynosi $ab\pi$. Jeżeli T oznacza czas obiegu planety, wówczas prędkość polowa wynosi $ab\pi/T$. Promień wodzący zakreśli więc w czasie od 0 do t pole $\frac{ab\pi}{T} t$. Pole to możemy również przedstawić w postaci całki

$$(9) \quad \frac{ab\pi}{T} t = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} r^2 d\varphi.$$

Różniczkując (V), otrzymamy $\frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \frac{du}{\cos^2 \frac{u}{2}}$. Na mocy więc (IV) $d\varphi = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \frac{a(1-\varepsilon)}{r} du = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{r} du$. Podstawiając w (9) otrzymamy $\frac{ab\pi}{T} t = \frac{a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2} \int_0^u r du$, skąd na mocy (III),

$$\frac{ab\pi}{T} t = \frac{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2} (u - \varepsilon \sin u).$$

Stąd z uwagi na to, że $a^2\sqrt{1-\varepsilon^2} = ab$, dostaniemy

$$(VI) \quad u - \varepsilon \sin u = 2\pi t/T.$$

Wyrażenie $2\pi t/T$ nazywamy *anomaliją średnią*.

Równanie (VI) nosi nazwę *równania Keplera*.

Przy pomocy równania Keplera możemy dla każdej chwili t wyznaczyć u , a następnie przy pomocy równań (III), (IV), (V) promień r i kąt φ . Astronomia podaje liczne metody rozwiązywania równania Keplera.

W astronomii anomalję mimośrodową u oznacza się zazwyczaj literą E , anomalję prawdziwą φ literą V , a anomalję średnią $2\pi t/T$ literą M .

§ 10. Praca. Przypuśćmy, że punkt materialny przesunął się z punktu A do B i że podczas tego przesunięcia działała nań (oprócz być może innych sił) siła $\vec{P}$.

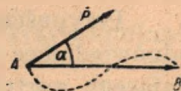
Siła stała. Załóżmy, że siła $\vec{P}$, działająca na punkt materialny podczas jego ruchu od A do B , była stała co do wielkości, kierunku i zwrotu (choć ruch mógł się odbywać po linii krzywej).

Pracą siły $\vec{P}$ na przesunięciu $\overline{AB}$ nazywamy iloczyn skalarowy

$$\vec{P} \cdot \overline{AB}.$$

Jeżeli więc pracę oznaczymy przez L , to

$$(I) \quad L = \vec{P} \cdot \overline{AB}.$$



Niechaj α będzie kątem zawartym między $\vec{P}$ i $\overline{AB}$. Zatem

$$(II) \quad L = |\vec{P}| \cdot |\overline{AB}| \cos \alpha.$$

Praca może być liczbą dodatnią, ujemną lub zerem. Praca siły $\vec{P}$ jest zerem, jeżeli $\vec{P}=0$ lub $\vec{AB}=0$ (t. zn. gdy nie ma przesunięcia) lub jeżeli $\alpha = \pi/2$ (t. zn. gdy siła jest prostopadła do przesunięcia). Jeżeli $\vec{P} \neq 0$, $\vec{AB} \neq 0$ i $\cos \alpha \neq 0$ to praca jest liczbą dodatnią lub ujemną, zależnie od tego czy α jest kątem ostrym czy rozwartym.

Jeżeli $\alpha = 0$ lub $\alpha = \pi$ (t. zn. jeżeli siła ma kierunek przesunięcia), mamy

$$L = \pm |\vec{P}| \cdot |\vec{AB}|,$$

przyczem znak zależy od tego, czy siła i przesunięcie mają zwroty zgodne czy przeciwne.

Z twierdzeń o iloczynie skalarowym (rozdz. I, str. 7) wynika, że praca siły $\vec{P}$ na przesunięciu $\vec{AB}$ równa się iloczynowi przesunięcia i rzutu siły na kierunek przesunięcia lub iloczynowi siły i rzutu przesunięcia na kierunek siły.

Należy zwrócić uwagę, że — według określenia — *praca nie zależy od czasu, w jakim punkt materialny przesunął się od A do B.*

Oznaczmy rzuty przesunięcia $\vec{AB}$ na osie układu przez $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Na mocy więc (I)

$$(1) \quad L = P_x \Delta x + P_y \Delta y + P_z \Delta z.$$

Jeżeli punkt A ma współrzędne x_0, y_0, z_0 , zaś B x_1, y_1, z_1 , to $\Delta x = x_1 - x_0$ i t. d. Zatem

$$(2) \quad L = P_x(x_1 - x_0) + P_y(y_1 - y_0) + P_z(z_1 - z_0).$$

Siła zmienna. Załóżmy teraz, że punkt porusza się po krzywej C określonej parametrycznie przez funkcje:

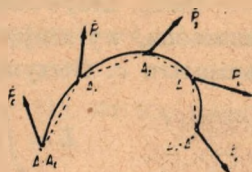
$$(3) \quad x = f(\sigma), \quad y = \varphi(\sigma), \quad z = \psi(\sigma) \quad (\sigma' \leq \sigma \leq \sigma'').$$

Przypuśćmy przytem, że jeżeli $\sigma_1 < \sigma_2$, to położenie punktu odpowiadające wartości σ_1 jest wcześniejsze od położenia odpowiadającego wartości σ_2 .

Założmy dalej, że na punkt działa siła zmienna $\vec{P}$, której rzuty w dowolnym punkcie toru o współrzędnych x, y, z dane są przez funkcje:

$$(4) \quad P_x = F(x, y, z), \quad P_y = \Phi(x, y, z), \quad P_z = \Psi(x, y, z).$$

O funkcjach F, Φ, Ψ zakładamy oczywiście, że są określone w każdym punkcie toru. Utwórzmy dowolny podział δ odcinka $\sigma'\sigma''$ przy pomocy punktów $\sigma'=\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n=\sigma''$. Niechaj tym wartościom parametru σ odpowiadają na krzywej C punkty:



$$A' = A_0(x_0, y_0, z_0), \quad A_1(x_1, y_1, z_1), \quad \dots, \quad A_n(x_n, y_n, z_n) = A''.$$

Na mocy (3) jest:

$$(5) \quad x_i = f(\sigma_i), \quad y_i = \varphi(\sigma_i), \quad z_i = \psi(\sigma_i) \quad \text{dla } i=0, 1, \dots, n.$$

Położmy:

$$(6) \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta z_i = z_{i+1} - z_i \quad (i=0, 1, \dots, n-1).$$

Oznaczmy wreszcie przez $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$ siły działające w punktach $A_0, A_1, \dots, A_n$. Na mocy (4) jest:

$$(7) \quad P_{ix} = F(x_i, y_i, z_i), \quad P_{iy} = \Phi(x_i, y_i, z_i), \quad P_{iz} = \Psi(x_i, y_i, z_i).$$

Gdyby siła $\bar{P}$ na przesunięciach $A_0A_1, A_1A_2, \dots$ była stała i odpowiednio równa $\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots$, to prace na poszczególnych przesunięciach wyrażałyby się wzorami:

$$L_0 = P_{0x}\Delta x_0 + P_{0y}\Delta y_0 + P_{0z}\Delta z_0,$$

$$L_1 = P_{1x}\Delta x_1 + P_{1y}\Delta y_1 + P_{1z}\Delta z_1,$$

$$\dots \dots \dots$$

Kładąc $L' = L_0 + L_1 + \dots$, otrzymamy więc

$$(8) \quad L' = \sum_{i=0}^{n-1} (P_{ix}\Delta x_i + P_{iy}\Delta y_i + P_{iz}\Delta z_i).$$

Wyrażenie stojące po prawej stronie powyższej równości zależy oczywiście od podziału δ odcinka $\sigma'\sigma''$.

Jeżeli L' dąży do pewnej granicy dla każdego ciągu normalnego¹⁾ podziałów $\{\delta_k\}$ odcinka $\sigma'\sigma''$, to granicę tę nazywamy *pracą siły $\bar{P}$ po krzywej C* (albo *wzdłuż krzywej C*).

Wyrażenie (8) możemy więc uważać za wartość przybliżoną pracy L siły $\bar{P}$.

Granicą wyrażenia (8) jest tak zwana całka krzywolinijna²⁾ po krzywej C :

$$(III) \quad L = \int_C (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

¹⁾ t. j. takiego, w którym długość największego odcinka podziału dąży do zera. Por. S. Banach, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, T. II, Lwów, str. 69.

²⁾ tamże, str. 187 i 196.

Całkę krzywoliniijną możemy zamienić na zwyczajną całkę oznaczoną, wyrażając zmienne x, y, z funkcjami (3) przy pomocy parametru σ . Otrzymamy wówczas

$$L = \int_{\sigma'}^{\sigma''} [P_x f'(\sigma) + P_y \varphi'(\sigma) + P_z \psi'(\sigma)] d\sigma,$$

gdzie $P_x = F(f(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma))$, $P_y = \Phi(f(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma))$ i t. d. Jeżeli w szczególności σ oznacza czas t , wówczas $f'(\sigma) = \dot{x}$, $\varphi'(\sigma) = \dot{y}$, $\psi'(\sigma) = \dot{z}$.
Zatem

$$(IV) \quad L = \int_{t'}^{t''} [P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z}] dt.$$

Ponieważ $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ są rzutami prędkości $\bar{v}$, więc $P_x \dot{x} + P_y \dot{y} + P_z \dot{z} = \bar{P} \bar{v}$.
Zatem

$$(V) \quad L = \int_{t'}^{t''} (\bar{P} \bar{v}) dt.$$

Uwaga. Wzór (III) jest słuszny, gdy położenia punktu ruchomego na krzywej następują po sobie w porządku, który odpowiada wzrostowi parametru σ . Jeżeli jednak jest przeciwnie, t. zn. jeżeli $\sigma_1 > \sigma_2$, to położenie odpowiadające σ_1 jest późniejsze od położenia odpowiadającego σ_2 i wówczas należy we wzorze (III) zamiast dx, dy, dz podstawić $-dx, -dy, -dz$. Otrzymamy wtedy

$$L = - \int_C (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Jeżeli więc punkt materialny poruszał się po krzywej C od A' do A'' i siła $\bar{P}$ wykonała pracę L , to gdy punkt poruszać się będzie po krzywej C od A'' do A' (przyczem położenia będą następowały po sobie w porządku odwrotnym niż poprzednio), ta sama siła $\bar{P}$ wykona pracę $-L$.

Praca sumy sił. Przypuśćmy, że punkt materialny, poruszając się po krzywej C , był pod działaniem dwóch sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$. Położmy $\bar{R} = \bar{P} + \bar{Q}$. Oznaczmy przez L pracę siły $\bar{R}$, przez L' pracę siły $\bar{P}$ i przez L'' pracę siły $\bar{Q}$. Wówczas $L = \int_C (R_x dx + R_y dy + R_z dz) =$
 $= \int_C [(P_x + Q_x) dx + (P_y + Q_y) dy + (P_z + Q_z) dz] = \int_C (P_x dx + P_y dy + P_z dz) +$
 $+ \int_C (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) = L' + L'',$ a więc

$$(VI) \quad L = L' + L''.$$

Możemy zatem powiedzieć, że *praca sumy dwóch (lub kilku) sił na pewnej krzywej równa się sumie prac poszczególnych sił na tej krzywej*.

Wymiar i jednostki pracy. Na mocy (II), str. 93, mamy $[praca] = [siła] \cdot [droga] = LMT^{-2}L$, a więc

$$[praca] = L^2 M T^{-2}.$$

Jednostką pracy w układzie *cgs* jest *erg*. Jest to praca, jaką wykona siła 1 dyn na drodze 1 cm. Zatem

$$\text{erg} = \text{cm}^2 \cdot \text{g} \cdot \text{sek}^{-2}.$$

Większą jednostką jest *Joule* (J) = 10^7 erg. W układzie technicznym jednostką pracy jest *kilogramometr* (kgm). Jest to praca siły 1 kg na drodze 1 m. Ponieważ 1 kg (siły) = 981000 dyn, a 1 m = 100 cm, więc

$$\text{kgm} = 9,81 \cdot 10^7 \text{ erg} = 9,81 \text{ J}.$$

§ 11. Pole sił potencjalne. Obszar D nazwaliśmy (str. 78) *polem sił*, jeżeli na punkt materialny, gdziekolwiek w obszarze D umieszczony, działa siła zależna tylko od położenia tego punktu.

Pole sił jest określone przez podanie funkcji:

$$(1) \quad P_x = F(x, y, z), \quad P_y = \Phi(x, y, z), \quad P_z = \Psi(x, y, z),$$

które wyznaczają rzuty siły działającej $\bar{P}$ w punkcie o współrzędnych x, y, z .

Natężenie pola. Może się zdarzyć, że siła $\bar{P}$ jest proporcjonalna do masy m punktu materialnego. Wówczas siłę działającą na jednostkę masy (t. j. siłę $\bar{P}/m$) w pewnym punkcie pola nazywamy *natężeniem pola* w tym punkcie.

Przykładem takiego pola jest pole grawitacyjne ziemskie. Ciężar ciała jest proporcjonalny do masy ciała. Na powierzchni ziemi natężenie pola jest co do wielkości równe g (przyspieszeniu ziemskiemu).

Linie sił. Na specjalną uwagę zasługują pewne krzywe w polu sił, zwane *liniami sił*. Są to krzywe o tej własności, że styczna w dowolnym punkcie ma kierunek siły działającej w tym punkcie. Np. w polu grawitacyjnym ziemskim liniami sił są linie pionowe. Linie sił są określone układem równań różniczkowych:

$$(2) \quad dx/P_x = dy/P_y = dz/P_z.$$

Określenie pola potencjalnego. Gdy w polu sił punkt materialny przesunie się od punktu A do punktu B po jakimś łuku AB , wówczas praca siły działającej $\vec{P}$ (str. 95, (III)) wynosi

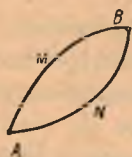
$$(I) \quad L = \int_{AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Praca zależy będzie na ogół nie tylko od punktów A i B , lecz także od przebytej drogi, t. j. od łuku AB . W mechanice ważną rolę odgrywają pola, w których praca zależy tylko od punktów A i B , a nie zależy od łuku AB . Jeżeli więc w takim polu punkt materialny przesuwać się będzie od A do B po rozmaitych torach, to siła $\vec{P}$ wykona zawsze tę samą pracę. Pola takie nazywamy *polami potencjalnymi lub zachowawczymi (konserwatywnymi)*.

A więc: polem potencjalnym jest takie pole sił, w którym praca nie zależy od drogi przejścia, lecz tylko od punktu początkowego i końcowego.

Jeżeli w polu potencjalnym punkt odbył drogę zamkniętą (czyli wyszedł z punktu A i powrócił do A), to praca wykonana wzdłuż tej drogi jest zerem. Praca bowiem w polu potencjalnym zależy tylko od punktu początkowego i końcowego, więc jeśli się one pokrywają, to praca jest taka, jak gdyby punkt wogóle się nie poruszył.

Na odwrót, jeżeli pole sił ma tę własność, że praca po każdej drodze zamkniętej jest zerem, to pole jest polem potencjalnym. Obierzmy bowiem dwa dowolne punkty A, B i łuki AMB, ANB . Oznaczmy przez L' pracę na łuku AMB , a przez L'' na łuku ANB . Praca po linii zamkniętej $AMBNA$ jest wedle założenia zerem. Pracę tą można przedstawić jako sumę prac: od A do B po łuku AMB i od B do A po łuku BNA . Ponieważ praca po łuku BNA równa się $-L''$ więc $L' + (-L'') = 0$, skąd $L' = L''$. Zatem praca po obu łukach jest ta sama.



Możemy więc powiedzieć, że *na to aby pole sił było polem potencjalnym, potrzeba i wystarcza, by praca po wszelkiej linii zamkniętej była w nim zerem.*

Potencjał. Obierzmy dowolny układ współrzędnych (x, y, z) i punkt A w polu potencjalnym. Jeżeli będziemy uważać punkt A za stały, to praca L_{AB} , gdzie B jest dowolnym punktem pola, będzie

zależać tylko od współrzędnych x, y, z punktu B . Zatem praca L_{AB} będzie funkcją współrzędnych x, y, z . Oznaczając tę funkcję przez $V(x, y, z)$, otrzymamy

$$(3) \quad L_{AB} = V(x, y, z).$$

Funkcję $V(x, y, z)$ nazywamy *funkcją sił* albo *potencjałem*.

Weźmy pod uwagę jakiś punkt B' o współrzędnych x', y', z' . Praca po dowolnej linii $ABB'A$ jest zerem. Zatem $L_{AB} + L_{BB'} + L_{B'A} = 0$. Lecz $L_{B'A} = -L_{AB'} = -V(x', y', z')$. Więc na mocy (3) $V(x, y, z) + L_{BB'} - V(x', y', z') = 0$, skąd

$$(II) \quad L_{BB'} = V(x', y', z') - V(x, y, z).$$

Wzór (II) możemy wypowiedzieć, jak następuje:

Przy przejściu od jednego punktu do drugiego praca równa się różnicy potencjałów w tych punktach.

Potencjał określiliśmy w zależności od obioru punktu A . Gdybyśmy obrali inny punkt $A'(x', y', z')$, to potencjał wyraziłby się inną funkcją $V'(x, y, z)$. Ponieważ na mocy określenia potencjału mamy dla dowolnego punktu $B(x, y, z)$

$$V'(x, y, z) = L_{A'B} = V(x, y, z) - V(x', y', z'),$$

więc

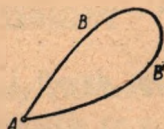
$$V(x, y, z) - V'(x, y, z) = V(x', y', z') = \text{const.}$$

A więc różnica obu funkcji V i V' jest stała. Widzimy stąd, że w polu sił potencjał jest funkcją określoną tylko po za pewną stałą (podobnie jak całka nieoznaczona). Stała ta jednak, jak wskazuje wzór (II), nie gra roli, ponieważ na wielkość pracy wpływa jedynie różnica potencjałów w dwóch punktach.

Wymiar potencjału. Ponieważ na mocy określenia potencjał równa się pracy, więc wymiar potencjału jest taki, jak wymiar pracy. Zatem

$$[\text{potencjał}] = L^2 M T^{-2}.$$

Jednostki pracy są również jednostkami potencjału.



Związek między siłą a potencjałem. Przesuńmy punkt materialny z punktu $A(x_0, y, z)$ do punktu $B(x, y, z)$ po prostej równoległej do osi x . Praca wynosi więc na mocy (I) i (II):

$$L_{AB} = V(x, y, z) - V(x_0, y, z) \quad \text{lub} \quad L_{AB} = \int_{AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz).$$

Ponieważ punkt przesunął się po prostej równoległej do osi x , więc $dy=0$ i $dz=0$. Zatem $L_{AB} = \int_{AB} P_x dx = \int_{x_0}^x P_x dx$, skąd

$$V(x, y, z) - V(x_0, y, z) = \int_{x_0}^x P_x dx.$$

Tworząc pochodną cząstkową względem x , dostaniemy $\partial V / \partial x = P_x$; analogiczne wzory otrzymamy dla pozostałych pochodnych cząstkowych.

A więc: *pochodne cząstkowe potencjału równają się odpowiednio rzutom siły na osie układu, t. j.*

$$(III) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = P_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = P_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = P_z.$$

Na odwrót, jeżeli założymy, że w danym polu sił istnieje funkcja V spełniająca związki (III), wówczas pole jest polem potencjalnym. Niech bowiem pewna funkcja V spełnia związki (III). Zatem, praca od punktu $A(x_1, y_1, z_1)$ do punktu $B(x_2, y_2, z_2)$ po dowolnym łuku AB wynosi:

$$L_{AB} = \int_{AB} (P_x dx + P_y dy + P_z dz) = \int_{AB} \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right).$$

Ponieważ wyrażenie zawarte w nawiasie ostatniej całki jest różniczką zupełną dV , więc otrzymujemy wzór

$$(4) \quad L_{AB} = \int_{AB} dV = V(x_2, y_2, z_2) - V(x_1, y_1, z_1),$$

wyrażający, że praca nie zależy od drogi, lecz tylko od punktu początkowego i końcowego. Na mocy (4) funkcja V jest tedy potencjałem.

A więc: jeżeli dla pola sił istnieje funkcja V spełniająca równania (III), wówczas to pole sił jest polem potencjalnym, zaś funkcja V jest potencjałem.

Powierzchnie potencjalne. Gdy c jest dowolną stałą, powierzchnię określoną równaniem

$$(5) \quad V(x, y, z) = c$$

nazywamy *powierzchnią potencjalną*.

A więc: *powierzchnia potencjalna jest to taka powierzchnia, na której potencjał ma wartość stałą.*

W geometrii różniczkowej dowodzi się, że dostawy kierunkowe $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ normalnej do powierzchni (5) w punkcie (x, y, z) spełniają warunki:

$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z},$$

skąd na mocy (III) str. 100,

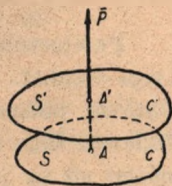
$$\cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma = P_x : P_y : P_z.$$

Ponieważ dostawy kierunkowe $\cos \alpha'$, $\cos \beta'$, $\cos \gamma'$ siły $\vec{P}$ spełniają podobne warunki: $\cos \alpha' : \cos \beta' : \cos \gamma' = P_x : P_y : P_z$, więc siła $\vec{P}$ ma kierunek normalny do powierzchni potencjalnej.

A zatem: *w każdym punkcie powierzchni potencjalnej siła działająca jest prostopadła do tej powierzchni.* Wynika stąd, że linie sił są prostopadłe do powierzchni potencjalnych.

Obierzmy dwie powierzchnie potencjalne S i S' , dość bliskie, o potencjałach c i c' , gdzie $c' > c$. Z dowolnego punktu A powierzchni S wykreślimy normalną do tej powierzchni aż do przecięcia A' z powierzchnią S' .

Praca przy przesunięciu od A do A' wynosi $L_{AA'} = c' - c > 0$. Ponieważ praca jest dodatnia, więc siła $\vec{P}$ ma zwrot przesunięcia $\overline{AA'}$.



A więc: *siła zwrócona jest względem powierzchni potencjalnej w stronę wzrostu potencjału.*

W przybliżeniu mamy $L_{AA'} = |\vec{P}| AA' = c' - c$ czyli $|\vec{P}| = (c' - c) / AA'$.

A więc: *na jednej i tej samej powierzchni potencjalnej siła jest w przybliżeniu odwrotnie proporcjonalna do odcinka normalnej, zawartego między tą powierzchnią a powierzchnią potencjalną dość bliską.*

§ 12. Przykłady pól potencjalnych. Rozpatrzmy obecnie kilka rodzajów pól potencjalnych, z którymi często mamy do czynienia w praktyce.

Pole stałe. Jeżeli siła $\vec{P}$ jest w pewnym polu stała co do wielkości, kierunku i zwrotu, to pole takie nazywamy *polem stałym*.

Pole grawitacyjne ziemskie w małym otoczeniu danego punktu na ziemi jest polem stałym.

Obierzmy układ współrzędnych (x, y, z) , nadając osi z kierunek siły $\vec{P}$, zwrot zaś przeciwny. Kładąc $|\vec{P}| = mg$, otrzymamy

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -mg.$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja

$$V = -mgz$$

jest potencjałem. Mamy bowiem

$$\partial V / \partial x = 0 = P_x, \quad \partial V / \partial y = 0 = P_y, \quad \partial V / \partial z = -mg = P_z.$$

A więc: *pole stałe jest polem potencjalnym*.

Praca od punktu $A(x_1, y_1, z_1)$ do punktu $B(x_2, y_2, z_2)$ po dowolnej drodze wynosi $L_{AB} = -mgz_2 - (-mgz_1)$, więc

$$(1) \quad L_{AB} = mg(z_1 - z_2).$$

Przy założeniu, że siła $\vec{P}$ jest siłą ciężkości, jasnym jest, że $z_1 - z_2 = h$ jest różnicą poziomów, na których znajdują się punkty A i B . Kładąc więc $|\vec{P}| = Q = mg$, otrzymamy

$$L_{AB} = Qh.$$

Powierzchnia potencjalna ma równanie $V = \text{const.}$, zatem $-mgz = \text{const.}$ czyli $z = \text{const.}$ A więc powierzchniami potencjalnymi są płaszczyzny poziome (t. j. prostopadłe do kierunku siły). Ponieważ linie sił są prostopadłe do powierzchni potencjalnych, więc liniami sił są proste równoległe do osi z , t. j. linie pionowe.

Pole środkowe czyli *centralne*. Jeżeli w polu sił kierunek siły przechodzi zawsze przez pewien stały punkt O , to pole nazywa się *środkowym* lub *centralnym*, a sam punkt O *środkiem pola* (str. 86).

Załóżmy, że w danym polu środkowym wielkość siły w dowolnym punkcie A zależy tylko od odległości r punktu A od środka O . Oznaczmy przez P rzut siły $\vec{P}$ działającej w A na kierunek $\overline{OA}$. Zatem P jest funkcją r . Połóżmy

$$P = f(r).$$

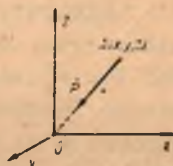
Obierzmy początek układu współrzędnych w O . Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu A , a przez a kąt, jaki $\overline{OA}$ tworzy z osią x , otrzymamy $\cos a = x/r$. Zatem

$$(2) \quad P_x = P \cos a = P \frac{x}{r} \quad \text{i podobnie} \quad P_y = P \frac{y}{r}, \quad P_z = P \frac{z}{r}.$$

Położmy $V = \int P dr = \int f(r) dr$. Ponieważ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, więc $\partial r / \partial x = x/r$, $\partial r / \partial y = y/r$ i $\partial r / \partial z = z/r$. Zatem

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f(r) \frac{x}{r} = P \frac{x}{r} = P_x,$$

i analogicznie $\frac{\partial V}{\partial y} = P_y$, $\frac{\partial V}{\partial z} = P_z$. Pole nasze jest



więc polem potencjalnym i funkcja V jest potencjałem.

A więc: *pole środkowe, w którym siła zależy tylko od odległości punktu od środka, jest polem potencjalnym i potencjał wyraża się wzorem*

$$(3) \quad V = \int P dr.$$

Ponieważ potencjał w punkcie A jest funkcją odległości r punktu A od środka O , więc na kulach o środku O potencjał ma wartość stałą. Powierzchniami potencjalnymi będą więc tutaj kule o środku O . Liniami sił są oczywiście proste przechodzące przez punkt O .

Pole grawitacyjne Newtonowskie. Przypuśćmy, że punkt o masie m jest przyciągany z siłą $\overline{P}$ przez stały punkt o masie M według prawa ciążenia Newtona (str. 90, (I)), t. zn. że

$$|\overline{P}| = K m M / r^2.$$

Ponieważ siła skierowana jest ku punktowi M , więc pole jest polem środkowym, którego środkiem jest punkt M . Zatem, wedle określenia liczby P , $P = -K m M / r^2$.

Mamy $V = \int P dr = - \int K m M dr / r^2$. Zatem

$$(4) \quad V = K m M / r.$$

A więc praca po dowolnym łuku $A'A$ wynosi $L_{A'A} = K m M (1/r - 1/r')$, gdzie r i r' oznaczają odległości punktów A i A' od środka. Jeżeli w szczególności punkt A' obierzemy w nieskończoności czyli położymy $r' = \infty$, to otrzymamy

$$(5) \quad L_{\infty A} = K m M / r = V.$$

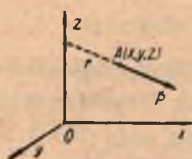
A więc: w polu grawitacyjnym Newtonowskim potencjał w punkcie A równa się pracy, jaką wykonałaby siła $\vec{P}$, sprowadzając punkt materialny z nieskończoności do A .

Pole osiowe. Pole sił o tej własności, że w każdym punkcie pola kierunek siły przecina pod kątem prostym pewną stałą prostą l , nazywamy polem osiowym, a prostą l nazywamy osią pola.

Założmy, że wielkość siły $\vec{P}$, działającej w dowolnym punkcie A , zależy tylko od odległości r punktu A od osi pola. Połóżmy $P = -|\vec{P}|$ lub $P = |\vec{P}|$ zależnie od tego, czy siła $\vec{P}$ ma zwrot ku osi l czy przeciwnie. Ponieważ wielkość siły $\vec{P}$ jest funkcją r (t. j. odległości punktu A od osi l), więc możemy napisać

$$P = f(r).$$

Obierzmy układ współrzędnych, przyjmując oś pola za oś z . Łatwo zauważyć, że rzuty siły $\vec{P}$ działającej w punkcie $A(x, y, z)$



wynoszą $P_x = P \frac{x}{r}$, $P_y = P \frac{y}{r}$ i $P_z = 0$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Połóżmy

$$V = \int P dr = \int f(r) dr.$$

Zatem $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = P \frac{x}{r} = P_x$. Podobnie $\frac{\partial V}{\partial y} = P_y$. Ponieważ V nie zależy od z (gdyż r nie zależy od z), więc $\frac{\partial V}{\partial z} = 0 = P_z$.

Wynika stąd, że pole dane jest polem potencjalnym, zaś V jest potencjałem.

A więc: pole osiowe, w którym wielkość siły zależy tylko od odległości punktu od osi, jest polem potencjalnym i potencjał wynosi

$$(6) \quad V = \int P dr.$$

Łatwo zauważyć, że powierzchniami potencjalnymi są tutaj walce, których wspólną osią jest oś pola. Liniami sił są proste przecinające oś pola pod kątem prostym.

Jeżeli np. $P = m\omega^2 r$ (ω stałe) wówczas $V = \int P dr = \int m\omega^2 r dr$, więc $V = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2)$. Powierzchnie potencjalne otrzymamy, kładąc $V = \text{const.}$, zatem $\frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) = \text{const.}$, więc $x^2 + y^2 = \text{const.}$; jest to równanie walca o osi z .

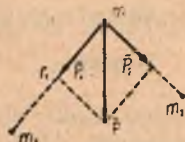
Suma pól potencjalnych. Niechaj w pewnym obszarze D danych będzie kilka pól o siłach $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$. Pole w obszarze D o sile $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots$ nazywa się *sumą pól sił* $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$.

Jeżeli pola sił $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ są potencjalne, to — jak łatwo okazać — suma pól jest również polem potencjalnym, którego potencjał V równa się sumie potencjałów $V_1, V_2, \dots$ poszczególnych pól.

Położmy bowiem $V = V_1 + V_2 + \dots$. Mamy $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x} + \dots = P_{1x} + P_{2x} + \dots = P_x$ i analogicznie $\frac{\partial V}{\partial y} = P_y, \frac{\partial V}{\partial z} = P_z$. A więc V jest potencjałem sumy danych pól.

Przypuśćmy np., że punkt o masie m przyciągany jest wedle prawa Newtona przez dwa stałe punkty o masach m_1 i m_2 z siłami $\vec{P}_1$ i $\vec{P}_2$. Siła więc wypadkowa będzie $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$. Na str. 103 wykazaliśmy, że siły $\vec{P}_1$ i $\vec{P}_2$ mają potencjał. Zatem wedle (4), str. 103, oznaczając przez r_1, r_2 odległości punktu m od m_1 i m_2 , otrzymamy:

$$V_1 = K \frac{mm_1}{r_1} \quad \text{ i } \quad V_2 = K \frac{mm_2}{r_2}.$$



Siła $\vec{P}$ ma więc potencjał $V = V_1 + V_2$. Zatem $V = Km \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right)$.

Podobnie, jeżeli punkt o masie m przyciągany jest wedle prawa Newtona przez n punktów stałych o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$, wówczas

$$(7) \quad V = Km \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \dots + \frac{m_n}{r_n} \right),$$

gdzie $r_1, r_2, \dots, r_n$ oznaczają odpowiednio odległości punktu m od punktów $m_1, m_2, \dots, m_n$.

§ 13. Energia kinetyczna i potencjalna. Niech na punkt materialny $A(x, y, z)$ o masie m działa siła $\vec{P}$. Zatem (str. 79, (I)):

$$m\ddot{x} = P_x, \quad m\ddot{y} = P_y, \quad m\ddot{z} = P_z.$$

Pomnożmy obie strony pierwszego równania przez $\dot{x}$, drugiego przez $\dot{y}$, trzeciego przez $\dot{z}$ i dodajmy następnie równania stronami. Otrzymamy

$$(1) \quad m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z}.$$

Oznaczmy przez v wartość bezwzględną prędkości punktu A . Zatem $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, skąd $d(v^2)/dt = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})$, a więc

$d(\frac{1}{2}mv^2)/dt = m(\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z})$. Wstawiając to w równanie (1), otrzymamy

$$d(\frac{1}{2}mv^2)/dt = P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z}.$$

Całkując obustronnie (względem t) od chwili początkowej t_0 do chwili t , dostaniemy

$$(2) \quad \int_{t_0}^t \frac{d(\frac{1}{2}mv^2)}{dt} dt = \int_{t_0}^t [P_x\dot{x} + P_y\dot{y} + P_z\dot{z}] dt.$$

Niechaj v_0 będzie wartością bezwzględną prędkości w chwili początkowej t_0 ; lewa strona równania (2) wynosi więc $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ a prawa strona równa się (str. 96, (IV)) pracy, jaką wykonała siła $\vec{P}$ w czasie od t_0 do t . Oznaczmy tę pracę przez $L_{t,t}$. Równanie (2) możemy więc napisać w postaci

$$(3) \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = L_{t,t}.$$

Wyrażenie $\frac{1}{2}mv^2$ nazywamy *energiją kinetyczną punktu*.

Kładąc

$$(4) \quad E = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

otrzymamy:

$$(I) \quad E - E_0 = L_{t,t}.$$

A więc: *przyrost energii kinetycznej w pewnym czasie równa się pracy siły działającej w tym czasie.*

Twierdzenie to nosi nazwę *zasady równowartości pracy i energii kinetycznej*.

W szczególności, jeżeli praca siły $\vec{P}$ jest stale zerem, to $E - E_0 = 0$ czyli $E = E_0$, więc na mocy (4) $v = v_0$. Punkt ma zatem wówczas prędkość stałą co do wielkości. Jeżeli więc siła jest np. stale prostopadła do toru, to punkt porusza się ruchem jednostajnym. Przykładem jest ruch jednostajny punktu po kole pod wpływem siły stałej co do wielkości i skierowanej ku środkowi koła.

Niech teraz punkt porusza się w polu potencjalnym. Oznaczmy przez V i V_0 potencjały jakie punkt posiada odpowiednio w chwilach t i t_0 . Zatem $L_{t,t} = V - V_0$, skąd na mocy (I) $E - E_0 = V - V_0$ czyli

$$(5) \quad E - V = E_0 - V_0.$$

Wyrażenie $E - V$ nazywamy *energiją potencjalną*.

Kładąc $-V=U$ i $-V_0=U_0$, otrzymamy

$$(II) \quad E + U = E_0 + V_0 = \text{const.}$$

Sumę energii kinetycznej i potencjalnej t. j. wyrażenie $E+U$ nazywamy *energiją całkowitą*.

A więc: *jeżeli punkt porusza się w polu potencjalnym, wówczas jego energia całkowita jest stała.*

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania energii całkowitej*.

Wymiar energii kinetycznej i potencjalnej. Na mocy (4) jest $[E]=[m][v^2]$, więc

$$[\text{energia kinetyczna}] = L^2 M T^{-2}.$$

A zatem energia kinetyczna ma wymiar pracy. Jednostki pracy są więc również jednostkami energii kinetycznej.

Energia potencjalna ma na mocy określenia wymiar potencjału, zatem ma również wymiar pracy (str. 99).

§ 14. Ruch punktu przyciąganego przez masę nieruchomą. Ruch po krzywej rzędu drugiego. Niech punkt materialny A o masie m przyciągany będzie przez punkt nieruchomy o masie M z siłą $\bar{P}$, działającą według prawa Newtona. Umieścimy w punkcie M początek O układu współrzędnych. Oznaczając (jak na str. 103) przez P rzut siły na kierunek $\overline{OA}$, otrzymamy

$$(1) \quad P = -K \frac{mM}{r^2}.$$

Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu A , otrzymamy (str. 103): $P_x = P \frac{x}{r} = -K \frac{mM}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$ i t. d. Równania ruchu punktu A są więc

$$(I) \quad m\ddot{x} = -K \frac{mM}{r^2} \frac{x}{r}, \quad m\ddot{y} = -K \frac{mM}{r^2} \frac{y}{r}, \quad m\ddot{z} = -K \frac{mM}{r^2} \frac{z}{r}.$$

W naszym przypadku siła $\bar{P}$ ma potencjał $V = KmM/r$ (str. 103), zatem energia potencjalna $U = -KmM/r$. Na mocy zasady zachowania energii całkowitej $\frac{1}{2}mv^2 - KmM/r = \text{const.}$, skąd kładąc $\mu = KM$,

$$(2) \quad v^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \quad \text{gdzie } h = \text{const.}$$

Ponieważ w rozważanym przypadku ruch jest ruchem środkowym (str. 86), więc tor jest płaski. Przyjmijmy więc, że ruch odbywa się w płaszczyźnie xy i że prędkość polowa jest różna od zera.

Ze wzoru Bineta (str. 88, (I)) otrzymamy na mocy (1)

$$(3) \quad -\frac{KmM}{r^2} = -\frac{mc^3}{r^2} \left[\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right],$$

a ponieważ $KM = \mu$, więc

$$(4) \quad \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{c^2}.$$

Podstawmy $u = 1/r$. Otrzymujemy

$$(5) \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}.$$

Rozwiązaniem szczególnym powyższego równania jest $u = \mu/c^2$.

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$ jest — jak łatwo stwierdzić — postaci $u = a \cos \varphi + b \sin \varphi$. Ogólnym więc rozwiązaniem równania (5) będzie

$$u = \mu/c^2 + a \cos \varphi + b \sin \varphi,$$

gdzie a i b są dowolnymi stałymi. Kładąc $a = \varrho \cos \varphi_0$, $b = \varrho \sin \varphi_0$ (gdzie ϱ i φ_0 są dowolnymi stałymi) i podstawiając z powrotem $1/r = u$, otrzymamy rozwiązanie ogólne równania (4)

$$(6) \quad 1/r = \mu/c^2 + \varrho \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Otóż ogólne równanie krzywej rzędu drugiego, gdy biegun jest w ognisku, ma kształt

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos(\varphi - \varphi_0),$$

gdzie p jest parametrem, ε mimośrodem, zaś φ_0 kątem, jaki oś krzywej tworzy z osią układu. Równanie więc (6) jest równaniem krzywej rzędu drugiego. Z przyrównania dostajemy

$$(7) \quad p = c^2/\mu \quad \text{ i } \quad \varepsilon = \varrho c^2/\mu.$$

Krzywa taka jest elipsą, hyperbolą lub parabolą, zależnie od tego czy $\varepsilon < 1$, $\varepsilon > 1$ lub $\varepsilon = 1$. Aby rozpoznać rodzaj krzywej, musimy obliczyć stałą ϱ . Wyznaczymy ją ze wzoru (2). Mamy

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$. Ponieważ $\frac{1}{2}c$ jest prędkością polową, więc $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}r^2 \dot{\varphi}$ czyli $\dot{\varphi} = c/r^2$; zatem (str. 88, wzór (7)) $v^2 = c^2 \left(\frac{d(1/r)}{d\varphi} \right)^2 + \frac{c^2}{r^2}$. Na mocy (6) otrzymujemy tedy

$$(8) \quad v^2 = \frac{\mu^2}{c^2} + 2\mu\varrho \cos(\varphi - \varphi_0) + c^2\varrho^2.$$

Wyrażając r przez φ przy pomocy wzoru (6) i wstawiając we wzór (2), otrzymujemy $v^2 = 2\mu^2/c^2 + 2\mu\varrho \cos(\varphi - \varphi_0) + h$, skąd przez przyrównanie ze wzorem (8)

$$(9) \quad \varrho = \sqrt{\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{h}{c^2}},$$

a więc na mocy (7)

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{hc^2}{\mu^2}}.$$

Zatem $\varepsilon \neq 1$ zależnie od tego czy $h \neq 0$. Kładąc $t = t_0$, $v = v_0$, $r = r_0$, otrzymujemy ze wzoru (2) $h = v_0^2 - 2\mu/r_0$; zatem:

$$h \neq 0 \text{ zależnie od tego czy } v_0^2 \neq 2\mu/r_0.$$

Wynika stąd, że rodzaj krzywej nie zależy od kierunku prędkości, lecz tylko od jej wielkości.

Rodzaj krzywej możemy więc wyznaczyć, znając jedno położenie punktu i szybkość jego w tym położeniu.

Komety np. poruszają się w obrębie układu słonecznego pod wpływem przyciągania przez słońce, krążą więc (względem słońca) po krzywych rzędu drugiego.

Założmy obecnie, że punkt porusza się po elipsie o równaniu $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p} \cos(\varphi - \varphi_0)$. Ze wzoru Bineta (3) dostaniemy

$-\frac{KMm}{r^2} = -\frac{c^2 m}{p r^2}$ czyli $KM = \frac{c^2}{p}$. Niech a i b będą osiami elipsy, zaś T czasem obiegu. Prędkość polowa będzie wówczas $\frac{1}{2}c = ab\pi/T$. Ponieważ $p = b^2/a$, więc $KM = 4\pi^2 a^3/T^2$, skąd

$$(10) \quad a^3/T^2 = KM/4\pi^2.$$

Wynika stąd, że stosunek a^3/T^2 zależy tylko od masy ciała przyciągającego, a nie od masy poruszającego się punktu.

Gdyby słońce było w spoczynku, to stosunek a^3/T^2 byłby dla planet wielkością stałą (tak jak tego wymaga trzecie prawo Keplera). Słońce nie jest jednak w spoczynku, ponieważ jest przyciągane przez planety. Stąd pochodzą odchylenia od prawa Keplera.

Sprawą tą zajmujemy się później przy t. zw. zagadnieniu dwóch ciał (rozdz. V).

Ruch po linii prostej. Zbadajmy jeszcze przypadek szczególny, gdy prędkość połowa jest zerem. Ruch wtedy odbywa się po prostej przechodzącej przez środek pola, t. j. przez punkt M (str. 87). Ponieważ v oznacza wartość bezwzględną prędkości, więc

$$(11) \quad v = |\dot{r}|.$$

Przypuśćmy, że dla $t=0$ jest $r=r_0$, $v=v_0$. Z równości (2), str. 107, wynika

$$(12) \quad v^2 = 2\mu r^{-1} + h,$$

skąd

$$(13) \quad h = v_0^2 - 2\mu r_0^{-1}.$$

Założmy, że w chwili początkowej $t=0$ prędkość poruszającego się punktu zwrócona była od punktu M , czyli że punkt się oddalał. Dla $t=0$ jest więc $\dot{r} > 0$.

Rozpatrzmy dwa przypadki zależnie od tego, czy $h \geq 0$, czy $h < 0$.

1°. $h \geq 0$. Na mocy (12) jest stale $v^2 \geq 2\mu r^{-1}$, więc $v^2 > 0$; zatem stale $v > 0$. Wynika stąd, że punkt nigdy się nie zatrzyma i ciągle będzie oddalał się od M . Będzie więc stale $\dot{r} > 0$, skąd na mocy (11) $v = \dot{r}$ przez cały czas ruchu. Z (12) otrzymujemy

$$(14) \quad \dot{r} = v = \sqrt{2\mu r^{-1} + h} \quad \text{czyli} \quad dr / \sqrt{2\mu r^{-1} + h} = dt.$$

Zatem

$$(15) \quad \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{2\mu r^{-1} + h}} = t.$$

Z równości powyższej wynika, że gdy t dąży do ∞ , r także dąży do ∞ , a więc punkt oddala się do nieskończoności.

2°. $h < 0$. W tym przypadku istnieje takie $r=r_1$, dla którego $v=0$. Wartość r_1 otrzymamy z (12), kładąc $v=0$ i $r=r_1$. Dostaniemy

$$(16) \quad r_1 = -2\mu/h.$$

Latwo okazać, że $r_1 > r_0$. Mamy bowiem $2\mu > 2\mu - r_0 v_0^2 = r_0(2\mu r_0^{-1} - v_0^2) = r_0(-h)$. Ponieważ $h < 0$, więc $-2\mu/h > r_0$, zatem na mocy (16) jest $r_1 > r_0$.

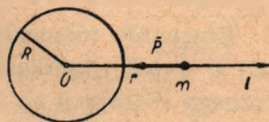
Na początku ruchu, dopóki $r < r_1$, punkt będzie się więc oddalał od M . W tym okresie będzie więc stale $\dot{r} > 0$, zatem na mocy (11) $\dot{r} = v$ i wskutek tego będą zachodziły wzory (14) i (15).

Podstawiając we wzorze (15) zamiast górnej granicy całkowania r wartość r_1 , otrzymamy chwilę t_1 , dla której $r=r_1$. Zatem

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{2\mu r^{-1} + h}} = t_1.$$

Dla $t=t_1$ będziemy mieli $v=0$, a dla $t>t_1$ punkt będzie się z powrotem zbliżał do M .

Przyjmując, że ziemia jest kulą złożoną z warstw jednorodnych (t. j. o stałej gęstości), współśrodkowych, można okazać, że ziemia przyciąga punkt materialny zewnętrzny tak, jak gdyby cała masa ziemi skupiona była w jej środku O . Otrzymane wyniki możemy więc stosować do ruchu ciał przyciąganych przez ziemię, oznaczając przez M masę ziemi (skupioną w jej środku O) i zakładając, że początek układu znajduje się w punkcie O , zaś poruszający się punkt materialny nad powierzchnią ziemi, t. zn. że $r \geq R$, gdzie R jest promieniem ziemi.



Przykład. Załóżmy, że punkt materialny został wyrzucony z powierzchni ziemi pionowo do góry z prędkością v_0 . Zatem $r_0=R$ i na mocy (13) $h=v_0^2-2\mu R^{-1}$. Ze wzoru (7) str. 91, wynika, że $\mu=KM=gR^2$, gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. Zatem

$$h=v_0^2-2gR.$$

Jeżeli $v_0 < \sqrt{2gR}$, to $h < 0$, a więc punkt spadnie z powrotem na ziemię. Jeżeli natomiast $v_0 \geq \sqrt{2gR}$, to $h \geq 0$, a więc punkt nie powróci więcej na ziemię.

Przyjmując $R=6300\text{ km}$, $g=9,81\text{ m}\cdot\text{sek}^{-2}$, otrzymamy $\sqrt{2gR}=12\text{ km}\cdot\text{sek}^{-1}$. Zatem, jeżeli ciało wyrzucimy w górę z prędkością $v_0 \geq 12\text{ km}\cdot\text{sek}^{-1}$, to nie spadnie nigdy z powrotem na ziemię. Wynik ten nie uwzględnia jednak oporu powietrza.

§ 15. Ruch harmoniczny. Ruch harmoniczny prosty. Niech w polu środkowym na punkt materialny o masie m działa siła $\bar{P}$, skierowana stale ku środkowi O i której wielkość jest proporcjonalna do odległości punktu od O .

Siłę $\bar{P}$ nazywamy wówczas *siłą sprężystą*.

Założmy na razie, że punkt porusza się po osi x , której O jest początkiem. Oznaczając przez x współrzędną punktu m , zaś przez P współrzędną siły, będziemy więc mieli

$$(1) \quad P = -\lambda^2 x,$$

gdzie λ^2 jest współczynnikiem proporcjonalności. Zatem $m\ddot{x} = -\lambda^2 x$. Kładąc $k^2 = \lambda^2/m$, otrzymamy $\ddot{x} = -k^2 x$ czyli

$$(2) \quad \ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Z równania (2) wynika, że przyspieszenie punktu ma wielkość proporcjonalną do odległości punktu od początku O i zwrot stale ku O .

Ruch, mający tę własność nazywamy ruchem *harmonicznym* (lub *drgającym*) *prostym*.

Równanie różniczkowe (2) jest równaniem liniowym drugiego rzędu o współczynnikach stałych. Pierwiastki równania charakterystycznego $r^2 + k^2 = 0$ są $r_{1,2} = \pm ki$. Ogólnym więc rozwiązaniem równania (2) jest

$$(3) \quad x = c_1 \sin kt + c_2 \cos kt.$$

Pisząc stałe c_1, c_2 w postaci $c_1 = a \cos kt_0$, $c_2 = -a \sin kt_0$, (gdzie a i t_0 są dowolnymi stałymi, przyczem $a \geq 0$), otrzymamy

$$(4) \quad x = a \sin k(t - t_0),$$

skąd, zaczynając rachubę czasu od chwili t_0 ,

$$(I) \quad x = a \sin kt.$$

Stałą a nazywamy *amplitudą*.

Ponieważ $|\sin kt| \leq 1$, więc amplituda a wyraża największe odchylenie punktu od O . Dla $t = \pm \pi/2k$ dostajemy $x = \pm a$. Torem punktu jest więc odcinek od $-a$ do a . Położmy

$$(5) \quad T = 2\pi/k.$$

Wówczas $a \sin k(t + T) = a \sin(kt + 2\pi) = a \sin kt$. Na mocy więc (I) punkt zajmie to samo położenie w czasie t i $t + T$. Ruch jest zatem *okresowy* (czyli *periodyczny*) o *okresie* T .

Wstawiając w (I) zamiast k wartość wyznaczoną z (5), otrzymamy

$$(II) \quad x = a \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Jeżeli n oznacza ilość okresów na 1 sek, to $n = 1/T$. Na mocy więc (II)

$$(III) \quad x = a \sin 2n\pi t.$$

Różniczkując (II), otrzymamy:

$$(6) \quad \dot{x} = v = \frac{2a\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad \ddot{x} = p = -\frac{4a\pi^2}{T^2} \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Na mocy (II) i (6) możemy ułożyć następującą tabelkę, podającą położenie, prędkość i przyspieszenie punktu dla $t=0, \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T$ i T :

t	0	$\frac{1}{4}T$	$\frac{1}{2}T$	$\frac{3}{4}T$	T
x	0	a	0	$-a$	0
v	$2a\pi/T$	0	$-2a\pi/T$	0	$2a\pi/T$
p	0	$-4a\pi^2/T^2$	0	$4a\pi^2/T^2$	0

Z tabelki tej widzimy, że w ciągu okresu T punkt porusza się od początku układu O do punktu $x=a$, następnie wraca przez punkt O i dochodzi do punktu $x=-a$, następnie powraca do O i t. d. Największa prędkość jest w O , natomiast na krańcach toru (t. j. w punktach $x=\pm a$) prędkość jest zerem. Przyspieszenie zaś jest największe na krańcach, t. j. dla $x=\pm a$; w O przyspieszenie jest zerem.

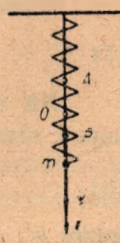
Przykład. W dolnym końcu sprężyny zawieszonej pionowo przyczepiona jest kulka o masie m . Niech O oznacza punkt w którym jest ona w spoczynku (w równowadze). Jeżeli kulkę odechylimy wzdłuż linii pionowej od położenia równowagi, to kulka zacznie się wahać pionowo. Jeżeli masa sprężyny jest mała, to możemy w przybliżeniu przyjąć, że sprężyna działa na kulkę z siłą $\bar{P}$ proporcjonalną do wydłużenia (wzgl. skrócenia) i skierowaną stale ku punktowi A_0 , w którym znajdował się koniec sprężyny nierozciągniętej przed zawieszeniem kulki.

Obierzmy w punkcie O początek osi x , skierowanej pionowo w dół. Kładąc $A_0O = d$, otrzymamy

$$P = -\lambda^2(x+d),$$

gdzie λ jest liczbą stałą, zależną od sprężyny. Ponieważ w O kulka jest w równowadze i $P = -\lambda^2 d$ (bo $x=0$), zatem $-\lambda^2 d + mg = 0$, skąd $\lambda^2 = mg/d$. Podczas ruchu jest $m\ddot{x} = P + mg = -\lambda^2(x+d) + mg$, więc $m\ddot{x} + \lambda^2 x = 0$ czyli $\ddot{x} + k^2 x = 0$, gdzie

$$k^2 = \lambda^2/m = g/d$$



Na mocy (I), str. 112, rozwiązaniem powyższego równania jest $x = a \sin kt$, zatem

$$x = a \sin \sqrt{\frac{g}{d}} t.$$

Kulka będzie więc odbywała ruch harmoniczny prosty około punktu O . Na mocy (5) okres ruchu wynosi

$$T = 2\pi/k = 2\pi\sqrt{d/g} = 2\pi\sqrt{m/\lambda}.$$

Okres ruchu zależy więc od masy punktu.

Ruch harmoniczny płaski. Niechaj punkt porusza się w polu sił środkowym, w którym siła $\bar{P}$ ma zwrot ku środkowi pola i jest (co do wielkości) proporcjonalna do odległości punktu od środka.

Obierzmy w środku pola początek O układu współrzędnych. Ponieważ ruch środkowy jest ruchem płaskim, więc możemy przyjąć, że odbywa się w płaszczyźnie xy .

Według prawa Newtona jest $m\bar{p} = \bar{P}$, gdzie $\bar{p}$ oznacza przyspieszenie punktu. Przyspieszenie ma więc zwrot ku środkowi pola i jest (co do wielkości) proporcjonalne do odległości punktu od środka.

Ruch mający tę własność nazywamy ruchem *harmonicznym płaskim*, a siłę $\bar{P}$ siłą *sprężystą* (por. str. 111).

Na mocy założenia mamy

$$P_x = -\lambda^2 x \quad \text{i} \quad P_y = -\lambda^2 y,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Równania ruchu będą miały postać

$$m\ddot{x} = -\lambda^2 x, \quad m\ddot{y} = -\lambda^2 y.$$

Kładąc, jak poprzednio $k^2 = \lambda^2/m$, otrzymamy

$$(7) \quad \ddot{x} = -k^2 x, \quad \ddot{y} = -k^2 y.$$

Na str. 112, wzór (4), wykazaliśmy, że rozwiązaniem powyższych równań jest:

$$(8) \quad x = a' \sin k(t - t_0), \quad y = a'' \sin k(t - t_0'),$$

gdzie a' , a'' , t_0 , t_0' są dowolnymi stałymi.

Jak łatwo sprawdzić, ruch ten jest również ruchem okresowym w okresie $T = 2\pi/k$.

Z równań (8) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} a''x \cos kt_0'' - a'y \cos kt_0' &= a'a'' \cos kt \sin k(t_0'' - t_0'), \\ a''x \sin kt_0'' - a'y \sin kt_0' &= a'a'' \sin kt \sin k(t_0'' - t_0'). \end{aligned}$$

Podnosząc do kwadratu i dodając stronami, otrzymamy

$$(9) \quad a''^2 x^2 + a''^2 y^2 - 2 a'a'' xy \cos k(t_0'' - t_0') = [a'a'' \sin k(t_0'' - t_0')]^2.$$

Jeżeli $a'=0$, lub $a''=0$, lub $t_0'' - t_0' = n\pi/k$ (gdzie n całkowite), to równanie (9) jest równaniem linii prostej. W pozostałych przypadkach (9) jest równaniem elipsy, której środek leży w początku układu.

A więc: *ruch harmoniczny płaski odbywa się po prostej, przechodzącej przez środek pola, lub po elipsie, której środek leży w środku pola.*

Ruch harmoniczny płaski, odbywający się po prostej, jest oczywiście ruchem harmonicznym prostym.

Ruch harmoniczny tłumiony. Niech na punkt materialny, poruszający się po osi x , działa oprócz siły sprężystej $\bar{P}$ (t. j. proporcjonalnej do odległości od środka i skierowanej ku środkowi), jeszcze siła $\bar{Q}$ (tłumiąca czyli hamująca ruch), co do wielkości proporcjonalna do prędkości, lecz wprost przeciwnie skierowana niż prędkość.

Ruch, jaki punkt będzie wówczas wykonywał, nazywamy ruchem *harmonicznym tłumionym*.

Oznaczając przez P i Q współrzędne sił $\bar{P}$ i $\bar{Q}$, możemy napisać:

$$(10) \quad P = -\lambda^2 x \quad \text{ i } \quad Q = -2\mu \dot{x},$$

gdzie λ^2 i $\mu > 0$ są współczynnikami proporcjonalności. Zatem $m\ddot{x} = -\lambda^2 x - 2\mu \dot{x}$. Kładąc

$$(11) \quad \lambda^2/m = k^2 \quad \text{ i } \quad \mu/m = \varepsilon,$$

otrzymamy więc

$$(IV) \quad \ddot{x} + 2\varepsilon \dot{x} + k^2 x = 0.$$

Równanie (IV) jest równaniem liniowym o współczynnikach stałych rzędu drugiego. Jego równaniem charakterystycznym jest

$$(12) \quad r^2 + 2\varepsilon r + k^2 = 0,$$

skąd

$$(13) \quad r_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Rozpatrzmy tu trzy przypadki, zależnie od tego czy wyróżnik $\varepsilon^2 - k^2$ jest ujemny, dodatni czy równy zeru.

1°. $\varepsilon^2 - k^2 < 0$. Przypadek ten występuje, gdy ε jest małe, t. j. gdy siła hamująca $\bar{Q}$ jest mała. Połóżmy

$$(14) \quad \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = k_1.$$

Zatem, na mocy (13) $r_{1,2} = -\varepsilon \pm ik_1 t$. Rozwiązaniem ogólnym równania (IV) jest więc w tym przypadku

$$x = e^{-\varepsilon t} (c_1 \sin k_1 t + c_2 \cos k_2 t).$$

Pisząc stałe c_1, c_2 , w postaci $c_1 = A \cos k_1 t_0$ i $c_2 = -A \sin k_1 t_0$, gdzie $A > 0$ i t_0 są dowolnymi stałymi, otrzymamy

$$(15) \quad x = A e^{-\varepsilon t} \sin k_1 (t - t_0).$$

Obierzmy, jako nowy początek czasu, chwilę t_0 ; podstawmy zatem $t - t_0 = t'$. Dołączymy $x = A e^{-\varepsilon (t' + t_0)} \sin k_1 t'$; pisząc z powrotem t zamiast t' i kładąc $A e^{-\varepsilon t_0} = a$, otrzymamy

$$(V) \quad x = a e^{-\varepsilon t} \sin k_1 t, \text{ gdzie } a > 0.$$

Wykres powyższej funkcji podany jest na rysunku. Aby wyznaczyć ekstrema tej funkcji, należy obliczyć miejsca zerowe pochodnej $\dot{x} = a e^{-\varepsilon t} (k_1 \cos k_1 t - \varepsilon \sin k_1 t)$. Będzie więc $\dot{x} = 0$ dla tych wartości t , dla których

$$(16) \quad \operatorname{tg} k_1 t = k_1 / \varepsilon.$$

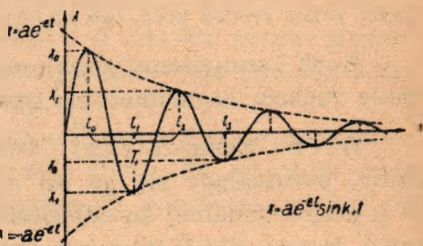
Jeżeli t_0 jest najmniejszym pierwiastkiem dodatnim równania (16), to pozostałe pierwiastki mają postać

$$(17) \quad t_n = t_0 + n\pi / k_1,$$

gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą. Badając znak drugiej pochodnej, stwierdzamy, że maximum występuje dla n parzystych, a minimum dla n nieparzystych. Wynika stąd, że w chwilach t_n pochodna $\dot{x}$ zmienia znak, a więc prędkość zmienia zwrot.

Chwile t_n nazywamy *chwilami zwrotu*, odpowiednie zaś położenia poruszającego się punktu — *punktami zwrotu*.

Punkty zwrotu wypadają okresowo co π / k_1 sek, i to kolejno, raz na prawo, raz na lewo od początku 0.



Czas $T_1 = 2\pi/k_1$ nazywamy jak wprzód *okresem ruchu*.

Czas $\frac{1}{2}T_1 = \pi/k_1$ między dwiema chwilami zwrotu nazywa się *okresem drgania*.

Na mocy (17) mamy więc

$$(18) \quad t_n = t_0 + \frac{1}{2} n T_1.$$

Weźmy pod uwagę dwa po sobie następujące punkty zwrotu x_n, x_{n+1} , odpowiadające chwilom t_n, t_{n+1} . Na mocy (V) i (18) jest:

$$|x_n| = a e^{-\varepsilon(t_0 + \frac{1}{2} n T_1)} |\sin k_1 t_0|, \quad |x_{n+1}| = a e^{-\varepsilon(t_0 + \frac{1}{2} (n+1) T_1)} |\sin k_1 t_0|,$$

skąd

$$|x_{n+1}|/|x_n| = e^{-\frac{1}{2} \varepsilon T_1}.$$

Wynika stąd, że współrzędne x_n maleją do zera (co do modułu) według postępu geometrycznego.

A więc: jeżeli siła hamująca jest mała, to maksymalne odchylenia punktu następują po sobie w równych odstępach czasu (okres drgania) i maleją do zera według postępu geometrycznego.

2°. $\varepsilon^2 - k^2 > 0$. Przypadek ten występuje gdy siła tłumiąca jest duża. Łatwo stwierdzić, że pierwiastki równania charakterystycznego (13) są w tym przypadku ujemne. Oznaczając je przez $-\varrho_1$ i $-\varrho_2$, otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania (IV) w postaci

$$(VI) \quad x = A e^{-\varrho_1 t} + B e^{-\varrho_2 t},$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi oraz $\varrho_1 > 0$ i $\varrho_2 > 0$.

Gdy czas t wzrasta, to x szybko dąży do zera. Nie trudno, sprawdzić, że istnieje co najwyżej jeden punkt zwrotu. Prędkość jest więc co najwyżej raz tylko zerem.

3°. $\varepsilon^2 - k^2 = 0$. Przy tym założeniu równanie charakterystyczne (13) ma pierwiastek podwójny $-\varepsilon$. Rozwiązanie ogólne równania (IV) ma postać

$$(VII) \quad x = e^{-\varepsilon t} (At + B),$$

gdzie A i B są stałymi dowolnymi.

Gdy czas wzrasta, x dąży szybko do zera. Podobnie jak poprzednio, istnieje co najwyżej jeden punkt zwrotu, a więc prędkość staje się zerem co najwyżej raz tylko.

Ruch harmoniczny wymuszony. Niech na punkt materialny, poruszający się po osi x , działa oprócz siły sprężystej $\bar{P}$ i tłumiącej $\bar{Q}$ jeszcze siła $\bar{R}$, skierowana wzdłuż osi x i zależna tylko od czasu.

Współrzędna siły $\bar{R}$ będzie więc

$$R = mw f(t),$$

gdzie w jest stałe.

Przypuśćmy, że siła $\bar{R}$ jest periodyczna, np. że

$$(19) \quad R = mw \sin(\alpha t + \beta),$$

gdzie α i β są stałe. Równanie ruchu ma więc postać (por. (IV), str. 115):

$$(20) \quad \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + k^2x = w \sin(\alpha t + \beta),$$

gdzie znaczenie stałych ε i k jest takie same jak poprzednio. Aby otrzymać rozwiązanie ogólne równania (20), wyznaczamy jedno szczególne postaci

$$(21) \quad x = b \sin(\alpha t + \gamma).$$

W celu wyznaczenia stałych b i γ , podstawmy (21) w (20). Dostaniemy

$$(22) \quad (k^2 - \alpha^2)b \sin(\alpha t + \gamma) + 2\alpha\varepsilon b \cos(\alpha t + \gamma) = w \sin(\alpha t + \beta).$$

Kładąc raz $\alpha t + \gamma = 0$, drugi raz $\alpha t + \gamma = \pi/2$, dostaniemy

$$(23) \quad 2\alpha\varepsilon b = w \sin(\beta - \gamma), \quad (k^2 - \alpha^2)b = w \cos(\beta - \gamma),$$

skąd

$$(24) \quad b^2 = \frac{w^2}{(k^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\varepsilon^2}, \quad \operatorname{tg}(\beta - \gamma) = \frac{2\alpha\varepsilon}{k^2 - \alpha^2},$$

a z równości tych wyznaczamy już b i γ .

Opierając się na (24), łatwo stwierdzić, że funkcja (21) spełnia równanie (20) tożsamościowo dla każdego t .

Rozpatrzmy przypadek $\varepsilon^2 - k^2 < 0$. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + k^2x = 0$ podaje wzór (15), str. 116. Zatem ogólnym rozwiązaniem równania (20) jest

$$(25) \quad x = Ae^{-\varepsilon t} \sin k_1(t - t_0) + b \sin(\alpha t + \gamma), \quad \text{gdzie } k_1 = \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}.$$

Gdy t wzrasta, pierwszy składnik dąży szybko do zera i ruch staje się w przybliżeniu harmonicznym o równaniu

$$x = b \sin(\alpha t + \gamma).$$

Amplitudą tego ruchu jest b . Siła $\bar{R}$ jest siłą periodyczną o okresie $T' = 2\pi/a$. Okres ruchu harmonicznego tłumionego wynosi $T_1 = 2\pi/k_1$. Przypuśćmy, że okresy T' i T_1 mało się różnią od siebie, czyli że a mało się różni od k_1 . Jeżeli siła tłumiąca jest mała, to ε jest małe, więc $k_1 = \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}$ mało się różni od k . Zatem i k mało się będzie różniło od a . Na mocy więc (24) może być b wielkie nawet wówczas, gdy w jest małe (t. zn. gdy siła $\bar{R}$ jest mała).

Widzimy stąd, że *małą siłą periodyczną, o okresie zbliżonym do okresu ruchu, możemy wywołać wielkie odchylenia punktu od środka, gdy siła tłumiąca jest mała.*

Oddział żołnierzy, przechodzących przez most krokiem miarowym, wywołuje drgania (własne) mostu. Jeżeli okresy kroków i drgania mostu mało się różnią od siebie, to odchylenia mostu mogą stać się szybko tak duże, że most się załamie. Podobnie gdy automobil doznaje na złej drodze wstrząsów, drobnych nawet, ale których okres jest zbliżony do okresu drgań (własnych) jego resorów, to wahania mogą stać się tak wielkie, że resor pęknie.

Krzywe Lissajous. Niech na punkt materialny działa siła $\bar{P}$, której rzuty na osie układu są (co do wielkości) proporcjonalne do współrzędnych punktu i skierowane ku początkowi układu. Możemy więc przyjąć, że:

$$P_x = -\lambda_1^2 x, \quad P_y = -\lambda_2^2 y, \quad P_z = -\lambda_3^2 z,$$

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ są stałe. Równania ruchu mają postać:

$$m\ddot{x} = -\lambda_1^2 x, \quad m\ddot{y} = -\lambda_2^2 y, \quad m\ddot{z} = -\lambda_3^2 z.$$

Kładąc $\lambda_1^2/m = k_1^2$, $\lambda_2^2/m = k_2^2$ i $\lambda_3^2/m = k_3^2$, otrzymamy więc:

$$(26) \quad \ddot{x} = -k_1^2 x, \quad \ddot{y} = -k_2^2 y, \quad \ddot{z} = -k_3^2 z.$$

Rozwiązaniem powyższych równań (por. str. 112, wzór (4)) są funkcje:

$$(27) \quad x = a_1 \sin k_1(t - t'_0), \quad y = a_2 \sin k_2(t - t''_0), \quad z = a_3 \sin k_3(t - t'''_0).$$

Okresy tych funkcji wynoszą (str. 112, wzór (5)):

$$(28) \quad T_1 = 2\pi/k_1, \quad T_2 = 2\pi/k_2, \quad T_3 = 2\pi/k_3.$$

Jeżeli ruch jest okresowy o okresie T , to ilorazy $T:T_1$, $T:T_2$, $T:T_3$ muszą być liczbami całkowitymi. Zatem ilorazy $T_1:T_2$, $T_1:T_3$ i $T_2:T_3$ (lub ze względu na (28) ilorazy $k_2:k_1$, $k_3:k_1$ i $k_3:k_2$) muszą być liczbami wymiernymi. Jeżeli więc nie wszystkie te ilorazy są liczbami wymiernymi, to ruch nie jest ruchem okresowym.

W przypadku ruchu na płaszczyźnie, tory ruchu określonego równaniami (27) noszą nazwę *krzywych Lissajous*; odgrywają one ważną rolę w akustyce.

Przykład. Ruch odbywa się w płaszczyźnie xy . Niech $k_2:k_1=2$ i $t_0 = t'_0 = 0$.

Kładąc $k_1 = k$ i $k_2 = 2k$, otrzymamy zatem na mocy (27):

$$x = a_1 \sin kt \quad \text{ i } \quad y = a_2 \sin 2kt.$$

Ponieważ $y = 2a_2 \sin kt \cos kt$, więc $\sin kt = x/a_1$ i $\cos kt = a_1 y / 2a_2 x$, skąd $(x/a_1)^2 + (a_1 y / 2a_2 x)^2 = 1$, czyli

$$4a_1^2 x^4 - 4a_1^2 a_2^2 x^2 + a_1^4 y^2 = 0.$$

Tor będzie więc krzywą rzędu czwartego.

§ 16. Warunki równowagi w polu sił. Jeżeli w pewnym polu sił punkt materialny jest w punkcie A w równowadze, to oczywiście siła $\bar{P}$ działająca w A równa się zeru. Na odwrót, jeżeli w pewnym punkcie $A(x_0, y_0, z_0)$ pola, siła $\bar{P} = 0$, to punkt materialny umieszczony w A w chwili $t = t_0$ bez prędkości początkowej (t. zn. $\bar{v}_0 = 0$) pozostanie stale w spoczynku t. j. w równowadze. Wynika to stąd, że warunki początkowe wyznaczają ruch jednoznacznie, a spoczynek (t. j. ruch określony równaniami $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$) spełnia warunki początkowe i równanie $m\bar{p} = \bar{P}$; mamy bowiem stale $\bar{p} = 0$ i $\bar{P} = 0$.

W polu potencjalnym pochodne cząstkowe potencjału V równe są, jak wiemy, rzutom siły na osie układu (§ 11, str. 100). Jeżeli więc punkt A jest położeniem równowagi, wówczas w punkcie A :

$$(1) \quad \partial V / \partial x = 0, \quad \partial V / \partial y = 0, \quad \partial V / \partial z = 0.$$

Równania powyższe zachodzą w szczególności w tych punktach, w których występują maxima lub minima potencjału.

A więc: *punkty, w których występują ekstrema potencjału, są położeniami równowagi.*

Położenia równowagi mogą jednak występować również w takich punktach, w których potencjał nie ma ekstremum; równania (1) przedstawiają bowiem tylko warunki konieczne istnienia ekstremum.

Równowaga stała. Niech w polu sił punkt materialny znajduje się w równowadze w punkcie A .

Powiadamy, że *równowaga jest stała*, jeżeli punkt materialny po małym przesunięciu z punktu A i po otrzymaniu małej energii kinetycznej początkowej, będzie poruszał się stale w niewielkiej odległości od A i posiadał stale małą energię kinetyczną. Ściślej mówiąc, równowaga w A jest stała, jeżeli do każdych dwu liczb $R > 0$ i $\varepsilon > 0$ można dobrać takie liczby $R_0 > 0$ i $\varepsilon_0 > 0$, że punkt materialny, znajdujący się gdziekolwiek w odległości mniejszej niż R_0 od A , będzie po otrzymaniu energii kinetycznej początkowej mniejszej niż ε_0 poruszał się w odległości od A stale mniejszej niż R i posiadał energię kinetyczną stale mniejszą niż ε .

Jeżeli równowaga w punkcie A nie jest stała, mówimy, że w punkcie tym jest *równowaga niestała*.

Twierdzenie Dirichleta. W polu potencjalnym punkt, w którym potencjał osiąga maximum właściwe, jest położeniem równowagi stałej.

Dowód. Niech w pewnym polu potencjalnym potencjał V osiąga maximum właściwe w punkcie A (mówi się, że funkcja osiąga w punkcie A *maximum właściwe*, jeżeli w pewnym otoczeniu tego punktu największą wartość przyjmuje tylko w punkcie A).

Załóżmy, że w punkcie A potencjał ma wartość 0; możemy to zawsze uzyskać przez dodanie odpowiedniej stałej, ponieważ potencjał określony jest tylko z dokładnością do pewnej stałej (str. 99).

Weźmy dowolne $R > 0$ i $\varepsilon > 0$. Bez szkody dla ogólności do wodu możemy też obrać R tak małe, by w kuli K o środku A i promieniu R potencjał był wszędzie po za A ujemny. Oznaczmy przez L maksimum potencjału na powierzchni kuli K ; zatem $L < 0$.

Niech teraz ε_0 będzie dowolną liczbą, spełniającą nierówności:

$$(2) \quad \varepsilon_0 > 0, \quad \varepsilon_0 < -\frac{1}{2}L, \quad \varepsilon_0 < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Ponieważ w A potencjał jest zerem, więc istnieje taka kula K_0 o środku A i promieniu $R_0 < R$, że

$$(3) \quad -\varepsilon_0 < V \leq 0 \quad \text{w kuli } K_0.$$

Umieśćmy punkt materialny gdziekolwiek w odległości $< R_0$ od A (t. j. w kuli K_0) i nadajmy mu energię kinetyczną początkową

$$(4) \quad E_0 < \varepsilon_0.$$

Na mocy (5), str. 106, jest podczas ruchu stale

$$(5) \quad E - V = E_0 - V_0.$$

Ponieważ na mocy (3) jest $-\varepsilon_0 < V_0$, więc wobec (5) i (4) jest

$$(6) \quad E - V < 2\varepsilon_0.$$

Z uwagi na to, że $E \geq 0$, otrzymujemy $-V \leq 2\varepsilon_0$, skąd na mocy (2) $-V < -L$, czyli $V > L$. A więc punkt materialny nigdy nie przekroczy powierzchni kuli K (bo potencjał na niej jest $\leq L$); ruch jego będzie się tedy odbywał wewnątrz kuli K , t. j. w odległości od A mniejszej niż R . Ponieważ ponadto w kuli K jest stale $V \leq 0$, czyli $-V \geq 0$, więc na mocy (6) jest $E < 2\varepsilon_0$, skąd na mocy (1) $E < \varepsilon$. A więc w A jest równowaga stała, c. b. d. d.

Przykład. Weźmy pod uwagę pole sił, w którym $P_x = -k^2x$, $P_y = -k^2y$, $P_z = -k^2z$. Pole to jest więc polem potencjalnym o potencjale $V = -\frac{1}{2}k^2r^2$, gdzie $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Punkt $A(0, 0, 0)$ jest położeniem równowagi stałej, bo w punkcie tym potencjał osiąga wartość największą 0, a poza tym jest ujemny.

Stalość równowagi w A udowodnimy teraz bezpośrednio.

Niech dane będą dowolne liczby $R > 0$ i $\varepsilon > 0$. Umieścimy punkt materialny w odległości r_0 od A i nadajmy mu energię kinetyczną E . Zatem $E + \frac{1}{2}k^2r^2 = E_0 + \frac{1}{2}k^2r_0^2$, skąd

$$(7) \quad E \leq E_0 + \frac{1}{2}k^2r_0^2.$$

Ponadto $\frac{1}{2}k^2r^2 \leq E_0 + \frac{1}{2}k^2r_0^2$ czyli

$$(8) \quad r \leq \sqrt{\frac{2}{k^2} E_0 + r_0^2}.$$

Jeżeli więc dobierzemy ε_0 i R_0 tak, by było równocześnie

$$\varepsilon_0 + \frac{1}{2}k^2R_0^2 < \varepsilon \quad \text{ i } \quad \sqrt{\frac{2}{k^2} \varepsilon_0 + R_0^2} < R,$$

to otrzymamy dla wszelkich $E_0 < \varepsilon_0$ i $r_0 < R_0$ na mocy (7) i (8) $E < \varepsilon$ i $r < R$. Udowodniliśmy więc, że równowaga w A jest stała.

II Dynamika punktu nieswobodnego.

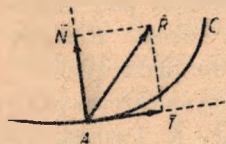
§ 17. Równania ruchu. Dotychczas badaliśmy ruch punktu materialnego *swobodnego*, t. j. takiego, który mógł wykonywać dowolne ruchy przy odpowiednich siłach. Spotykamy się jednak również z zagadnieniami, w których ruchy punktu podlegają pewnym ograniczeniom, takim np., że punkt musi stale pozostawać na pewnej linii, powierzchni i t. p.

Przykład. Wyobraźmy sobie, że drobna kulka nawleczona jest na sztywny drut (np. w kształcie koła). Jakimikolwiek siłami działalibyśmy na kulkę, będzie ona mogła wykonywać jedynie takie ruchy, przy których pozostanie stale na drucie. Zagadnienie sprowadza się więc w tym przypadku do badania ruchu punktu materialnego, który ma pozostawać stale na pewnej linii.

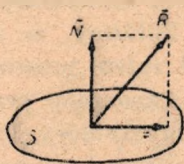
Punkt taki nazywamy *nieswobodnym*, a warunki ograniczające, jakim muszą czynić zadość ruchy punktu nieswobodnego, nazywamy *więzami*.

Reakcja. Przy rozpatrywaniu ruchu punktów nieswobodnych będziemy zakładali, że na punkt nieswobodny działa (oprócz danych sił) pewna dodatkowa siła, która sprawia, że punkt zachowuje więzy. Tę dodatkową siłę nazywamy *reakcją* (oddziaływaniem).

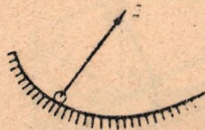
Reakcję przypisujemy działaniu na punkt materialny ciał wywołujących więzy. Reakcją drutu jest więc np. siła, z jaką drut przeciwstawia się porzuceniu go przez nawleczoną na niego kulkę.



1.



2.



3.

Niech punkt materialny nieswobodny A ma pozostawać stale na krzywej C (rys. 1). Niech reakcja w pewnym położeniu punktu A będzie $\vec{R}$. Składową $\vec{N}$ reakcji, prostopadłą do stycznej, nazywamy *reakcją normalną*, składową $\vec{T}$ styczną nazywamy *reakcją styczną* lub *tarciem*.

Podobnie, jeżeli punkt ma pozostawać stale na pewnej powierzchni S (rys. 2), to składową reakcji prostopadłą do powierzchni S nazywamy *reakcją normalną*, składową zaś styczną *reakcją styczną* lub *tarciem*.

Ilekoć więc zakładamy, że nie ma tarcia, to przyjmujemy tym samym, że reakcja jest prostopadła do krzywej (powierzchni). Gdy nie ma tarcia, mówimy też, że krzywa (powierzchnia) jest *gładka*.

Jeżeli o punkcie A , leżącym po pewnej stronie powierzchni, zakładamy tylko, że nie może przejść na drugą jej stronę (choć może porzucić tę powierzchnię), to reakcję uważamy za skierowaną w tę stronę powierzchni, z której znajduje się punkt (str. 123, rys. 3).

Gdy np. kulka leży na stole, wówczas reakcja stołu skierowana jest ku górze.

Równania ruchu. Reakcję określiliśmy jako siłę dodatkową, która sprawia, że punkt nieswobodny zachowuje więzy. Jeżeli więc do siły działającej $\vec{P}$ dodamy reakcję $\vec{R}$, to będziemy mogli uważać punkt materialny za punkt swobodny. Oznaczając przez m masę, a przez $\vec{p}$ przyspieszenie punktu, otrzymamy więc

$$(I) \quad m\vec{p} = \vec{P} + \vec{R}.$$

W ten sposób badanie ruchu punktu nieswobodnego sprowadzamy do badania ruchu punktu swobodnego. Jeżeli o reakcji $\vec{R}$ przyjmiemy jeszcze pewne założenia specjalne, np. że nie ma tarcia, to (jak okażemy później) równanie (I) wystarcza do wyznaczenia ruchu.

Przykład. Niech punkt o masie m spada pod wpływem ciężaru $Q = mg$ po płaszczyźnie, nachylonej do poziomu pod kątem α .

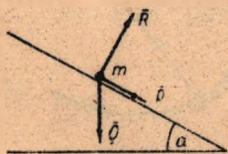
Załóżmy, że nie ma tarcia. Reakcja $\vec{R}$ jest zatem prostopadła do płaszczyzny.

Oznaczając przez $\vec{p}$ przyspieszenie punktu, mamy na mocy (I) $m\vec{p} = \vec{Q} + \vec{R}$. Tworząc rzuty na płaszczyznę pochyłą i kładąc $p = |\vec{p}|$, otrzymamy $mp = mg \sin \alpha$, skąd

$$p = g \sin \alpha.$$

Energia kinetyczna. Przyrost energii kinetycznej punktu nieswobodnego równa się sumie prac siły działającej $\vec{P}$ i reakcji $\vec{R}$. Przy założeniu braku tarcia reakcja jest prostopadła do toru, zatem praca reakcji równa się zeru. Wynika stąd, że gdy nie ma tarcia, przyrost energii kinetycznej równa się jedynie pracy wykonanej przez siłę $\vec{P}$.

W szczególności, jeżeli nie ma tarcia, to suma energii kinetycznej i potencjalnej punktu poruszającego się w polu potencjalnym jest stała.



§ 18. Ruch punktu nieswobodnego po krzywej.

Ruch po krzywej płaskiej. Załóżmy, że punkt A o masie m ma pozostawać na krzywej płaskiej C i że siła $\bar{P}$ działająca na punkt leży w płaszczyźnie krzywej C . Przypuśćmy, że nie ma tarcia, t. zn. że reakcja $\bar{R}$ jest prostopadła do krzywej.

Oznaczając przez p przyspieszenie punktu, mamy więc (por. wzór (I), str. 124)

$$(1) \quad m\bar{p} = \bar{P} + \bar{R}.$$

Nadajmy stycznej t zwrot zgodny ze zwrotem krzywej, a normalnej n zwrot ku środkowi krzywizny (rys. 1). Niechaj p_t, p_n, P_t, P_n będą rzutami przyspieszenia p i siły $\bar{P}$ na styczną i normalną zaś R rzutem reakcji $\bar{R}$ na normalną. Z równania (1) otrzymamy, tworząc rzuty na styczną i normalną:

$$(2) \quad mp_t = P_t, \quad mp_n = P_n + R.$$

Niech v oznacza rzut prędkości na styczną, zaś ρ promień krzywizny. Wówczas (str. 41):

$$p_t = \dot{v}, \quad p_n = v^2/\rho,$$

skąd na mocy (2):

$$(I) \quad m\dot{v} = P_t, \quad m v^2/\rho = P_n + R.$$

Pierwsze z równań (I) pozwala wyznaczyć ruch, znając siłę $\bar{P}$ lub jej rzut P_t . Równanie to możemy także napisać w innej jeszcze postaci. mianowicie:

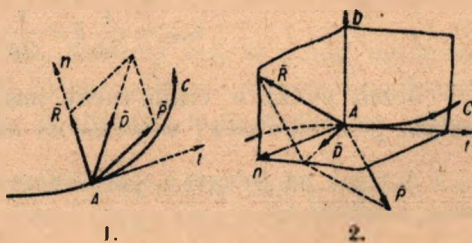
$$(3) \quad m\ddot{s} = P_t,$$

gdzie s oznacza współrzędną łukową na krzywej C .

Drugie z równań (I) pozwala obliczyć reakcję $\bar{R}$, znając prędkość v .

Ruch po krzywej przestrzennej. Załóżmy, że tor jest krzywą przestrzenną C i że nie ma tarcia.

Nadajmy stycznej t zwrot zgodny ze zwrotem krzywej, normalnej głównej n zwrot ku środkowi krzywizny, wreszcie binormalnej b zwrot taki, by układ (t, n, b) miał zwrot zgodny z układem współrzędnych (rys. 2).



Utwórzmy rzuty na styczną, na normalną główną i na binormalną. Ponieważ rzut przyspieszenia na binormalną (str. 12) i rzut $\bar{R}$ na styczną są zerami, więc otrzymamy z równania $m\bar{p} = \bar{P} + \bar{R}$:

$$\text{skąd} \quad mp_t = P_t, \quad mp_n = P_n + R_n, \quad 0 = P_b + R_b,$$

$$(II) \quad m\dot{v} = P_t, \quad mv^2/\varrho = P_n + R_n, \quad P_b + R_b = 0.$$

Pierwsze z równań (II) pozwala wyznaczyć ruch, z dwóch zaś pozostałych równań (II) możemy obliczyć składowe R_n i R_b , a więc reakcję $\bar{R}$.

Ruch punktu nieswobodnego ciężkiego. Niech na punkt materialny nieswobodny o masie m działa siła ciężkości. Załóżmy, że nie ma tarcia. Potencjał siły ciężkości wynosi $V = -mgz$ (oś z skierowana pionowo w górę). Na mocy zasady zachowania energii całkowitej otrzymamy więc $\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{const.}$ lub po uproszczeniu

$$(III) \quad v^2 + 2gz = h.$$

Stałą h możemy wyznaczyć, znając prędkość v_0 i współrzędną z_0 w pewnej chwili t_0 . Dostaniemy

$$(4) \quad h = v_0^2 + 2gz_0, \quad \text{skąd} \quad v^2 + 2gz = v_0^2 + 2gz_0.$$

Z (III) wynika $2gz \leq h$, zatem $z \leq h/2g$. Maksymalna więc wysokość, na jaką punkt może się wznieść, wynosi

$$(5) \quad z_{\max} = \frac{1}{2g} h = \frac{1}{2g} v_0^2 + z_0.$$

Jeżeli punkt w ciągu ruchu znajduje się kilka razy na tym samym poziomie $z = z'$, wówczas na mocy (III) mamy $v^2 = h - 2gz'$.

A więc: na jednym i tym samym poziomie punkt ma jedną i tę samą prędkość.

Przykład 1. Punkt spada po krzywej C o równaniu $z = f(x)$, położonej w płaszczyźnie pionowej xz . Załóżmy, że w czasie $t=0$ punkt znajduje się w punkcie $A(x_0, z_0)$ i ma prędkość $\bar{v}_0 = 0$.

Oznaczając przez s współrzędną łukową, dostaniemy więc na mocy (4), z uwagi na to, że $v = \dot{s}$,

$$\dot{s}^2 + 2gz = 2gz_0 \quad \text{czyli} \quad \dot{s}^2 = 2g(z_0 - z).$$

Obierzmy na krzywej C zwrot zgodny z początkowym ruchem punktu (t.j. zwrot ku dołowi). Aż do chwili, gdy punkt mate-

rialny dojdzie do punktu B , położonego na tej samej wysokości co punkt A (rys. 1), mamy $\dot{s} = \sqrt{2g(z_0 - z)}$, więc $ds \sqrt{2g(z_0 - z)} = dt$. Ponieważ $ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$, więc

$$(6) \quad \int_{x_0}^{\xi} \sqrt{\frac{1 + f'^2(x)}{2g(f(x_0) - f(x))}} dx = t.$$

Wzór powyższy podaje czas, w którym punkt materialny osiągnie punkt D o współrzędnych $x = \xi$, $y = f(\xi)$. Jeżeli x_1 oznacza odciętą punktu B , to dla $x_0 \leq \xi < x_1$ całką (6) ma wartość skończoną, więc czas t jest skończony. Dla $\xi = x_1$ funkcja podcałkowa staje się nieskończoną, bo z założenia $z_0 = f(x_0) = f(x_1)$. W tym przypadku wartość całki może być więc skończona lub nieskończona. Wynika stąd, że punkt materialny może dojść do punktu B lub nie: zależy to będzie od kształtu krzywej C . Łatwo okazać, że jeżeli styczna w punkcie B nie jest pozioma (t. zn. jeżeli $f'(x_1) \neq 0$), wówczas wartość całki (6) jest skończona, więc punkt materialny osiągnie punkt B .

Przykład 2.

Niech punkt zsuwa się w płaszczyźnie pionowej po krzywej C , której część $BEDF$ jest kołem o środku O i promieniu r . Załóżmy, że nie ma tarcia. Załóżmy też, że punkt nie musi stale pozostawać na krzywej C , hyleby tylko nie przeszedł na drugą jej stronę; reakcja będzie więc skierowana w tę stronę, po której punkt się znajduje (rys. 2).

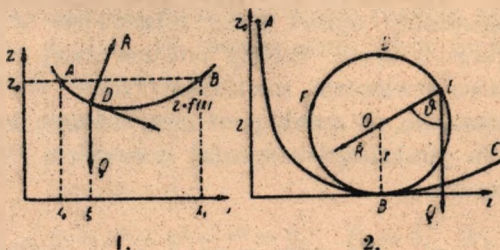
Zapytajmy się, z jakiej wysokości z_0 należy punkt opuścić bez prędkości początkowej, ażeby obiegł okrąg $BEDF$.

Oberzmy na kole punkt E dowolnie. Oznaczmy przez v prędkość punktu w E , przez ϑ kąt, jaki tworzy z pionem promień OE . Zatem na mocy (I), str. 125, jest $mv^2/r = mg \cos \vartheta + R$, czyli

$$R = \frac{m}{r} (v^2 - gr \cos \vartheta).$$

Ponieważ $R \geq 0$ (gdyż reakcja musi być skierowana w stronę punktu, t. j. ku środkowi koła), więc

$$(7) \quad v^2 - gr \cos \vartheta \geq 0.$$



Ponieważ punkt opuścił wysokość z_0 bez prędkości początkowej, więc oznaczając przez z współrzędną punktu E , będziemy mieli $v^2 + 2gz = 2gz_0$. Wyznaczając stąd v^2 i wstawiając w (7), otrzymamy $2gz_0 - 2gz - gr \cos \vartheta \geq 0$, skąd

$$(8) \quad z_0 \geq z + \frac{1}{2} r \cos \vartheta.$$

Nierówność (8) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym, jaki musi spełniać wysokość z_0 , aby punkt obiegił okrąg $BDEF$. Prawa strona tej nierówności osiąga maksymalną wartość w najwyższym punkcie koła, w którym $z = 2r$ i $\vartheta = 0$. Wstawiając te wartości w (8), dostaniemy

$$z_0 \geq 5r/2.$$

Jeżeli więc spuścimy punkt materialny z wysokości $z_0 \geq 5r/2$, to punkt obiegnie koło.

Jeżeli zaś $z_0 < 5r/2$, to w pewnym punkcie koła nasz punkt materialny opuści koło, mianowicie w tym punkcie, w którym, $z_0 = z + \frac{1}{2} r \cos \vartheta$. Gdyby bowiem dalej poruszał się po kole, to, jak łatwo stwierdzić, mielibyśmy $R < 0$, co jest niemożliwe, gdyż to by oznaczało, że punkt jest przyciskany do krzywej. Po opuszczeniu koła punkt będzie spadał oczywiście tylko pod wpływem swego ciężaru.

Przykład 3. Punkt o masie m porusza się pod działaniem siły ciężkości po linii śrubowej

$$(9) \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = k\varphi.$$

Mamy

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = r\dot{\varphi} \cos \varphi \quad \text{ i } \quad \dot{z} = k\dot{\varphi},$$

więc $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (r^2 + k^2)\dot{\varphi}^2$, skąd na mocy (III), str. 126, otrzymujemy $(r^2 + k^2)\dot{\varphi}^2 + 2gk\varphi = h$, a zatem $dt/d\varphi = \pm \sqrt{(r^2 + k^2)} \sqrt{(h - 2gk\varphi)}$ i wreszcie

$$t = \pm \frac{1}{gk} \sqrt{r^2 + k^2} \sqrt{h - 2gk\varphi} + c.$$

Znak po prawej stronie i stała c zależą od warunków początkowych. Wyrażając φ przez t i wstawiając w (9), otrzymamy równania ruchu.

§ 19. Ruch punktu nieswobodnego po powierzchni.

Niech na punkt materialny o masie m działa siła $\bar{P}$. Załóżmy, że punkt ma pozostawać stale na powierzchni S o równaniu

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

i że nie ma tarcia. Reakcja $\bar{R}$ jest więc prostopadła do S . Z geometrii różniczkowej wiadomo, że współczynniki kierunkowe normalnej do powierzchni są proporcjonalne do pochodnych cząstkowych $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$. Ponieważ reakcja $\bar{R}$ ma kierunek normalnej, więc:

$$(2) \quad R_x = \lambda \partial F/\partial x, \quad R_y = \lambda \partial F/\partial y, \quad R_z = \lambda \partial F/\partial z,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności zależnym od czasu. Zatem $\lambda = \lambda(t)$.

Z równania $m\bar{p} = \bar{P} + \bar{R}$ otrzymamy na mocy (2):

$$(I) \quad m\ddot{x} = P_x + \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = P_y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = P_z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Równania (1) i (I) wyznaczają łącznie nieznaną funkcję czasu $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$, $z=\psi(t)$ i $\lambda=\lambda(t)$. Po wyznaczeniu tych funkcji możemy reakcję $\bar{R}$ obliczyć z równań (2).

Przykład 1. Punkt ciężki o masie m porusza się po powierzchni walca kołowego (oś z skierowana pionowo w górę)

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Mamy tutaj $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$, $P_x = 0$, $P_y = 0$ i $P_z = -mg$, więc na mocy (I):

$$(3) \quad m\ddot{x} = 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = 2\lambda y, \quad m\ddot{z} = -mg.$$

Trzecie z równań (3) daje po scałkowaniu

$$(4) \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b,$$

gdzie a i b są stałe. Przyjmijmy warunki początkowe dla $t=0$:

$$(5) \quad x_0 = r, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = u, \quad \dot{z}_0 = w,$$

gdzie u i w oznaczają pewne stałe ($\dot{x}_0 = 0$, gdyż w chwili $t=0$ prędkość $\bar{v}_0$ jest styczna do walca, więc prostopadła do osi x). Na mocy (4) i (5) dostajemy $b=0$ i $a=w$, zatem

$$(6) \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + wt.$$

Ponieważ $v^2 + 2gz = v_0^2 + 2gz_0$, więc $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2gz = u^2 + w^2$, skąd na mocy (6) $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (-gt + w)^2 - g^2t^2 + 2wgt = u^2 + w^2$, a zatem

$$(7) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = u^2.$$

A więc rzut punktu na płaszczyznę poziomą porusza się po kole $x^2 + y^2 = r^2$ z prędkością stałą u ; prędkość kątowna wynosi więc $\omega = u/r$. Stąd $x = r \cos (ut/r + \varphi_0)$ i $y = r \sin (ut/r + \varphi_0)$. Ponieważ dla $t=0$ jest według (5) $x_0 = r$ i $y_0 = 0$, więc możemy przyjąć $\varphi_0 = 0$. Dostaniemy zatem:

$$(8) \quad x = r \cos \frac{u}{r} t, \quad y = r \sin \frac{u}{r} t.$$

Równania (6) i (8) określają ruch punktu. Czynniki λ otrzymamy z równań (3), wstawiając zamiast $\ddot{x}$ i $\ddot{y}$ wartości z (8). Dostaniemy $\lambda = -mu^2/2r^2$, skąd na mocy (2):

$$R_x = -\frac{mu^2}{r^2} x, \quad R_y = -\frac{mu^2}{r^2} y, \quad R_z = 0$$

i wreszcie

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \frac{mu^2}{r^2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{mu^2}{r}.$$

A więc: reakcja jest stała co do wielkości i zawsze prostopadła do osi walca.

Przykład 2. Punkt o masie m porusza się pod działaniem siły ciężkości po kuli (oś z skierowana pionowo w górę)

$$(9) \quad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Na mocy więc (I), str. 129:

$$(10) \quad m\ddot{x} = 2\lambda x, \quad m\ddot{y} = 2\lambda y, \quad m\ddot{z} = 2\lambda z - mg.$$

Równania (10) nie dadzą się rozwiązać przy pomocy funkcji elementarnych. Możemy jednak wyprowadzić pewne wnioski, nie rozwiązując tych równań.

Zauważmy, że reakcja $\bar{R}$ jest stale skierowana ku środkowi kuli, a więc, że jej rzut $\bar{R}'$ na płaszczyznę poziomą jest stale skierowany ku początkowi O układu. Rzut $\bar{R}'$ jest więc siłą środkową.

Ponieważ rzut siły ciężkości na płaszczyznę poziomą jest zerem, więc oznaczając przez $\bar{p}'$ rzut przyspieszenia punktu na płaszczyznę poziomą, otrzymamy $m\bar{p}' = \bar{R}'$.

Wynika stąd (str. 86), że ruch rzutu będzie ruchem środkowym. Tor rzutu będzie więc albo linią prostą l , przechodzącą przez początek O , albo krzywą C , która nigdy przez początek nie przejdzie (str. 87).

W przypadku pierwszym ruch samego punktu będzie odbywał się w płaszczyźnie pionowej, której śladem jest l ; punkt będzie więc poruszał się po południku. Przypadek ten zajdzie, jeżeli punktowi nadamy prędkość początkową styczną do południka, wtedy bowiem rzut prędkości (na płaszczyznę xy) będzie skierowany ku początkowi O , prędkość połowa rzutu będzie zerem i tor rzutu będzie linią prostą przechodzącą przez środek O .

W przypadku drugim, gdy tor rzutu jest krzywą C nigdy nie przechodzącą przez O , będziemy mieli, oznaczając przez r_0 i r_1 najmniejszą i największą odległość rzutu od O , $r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2$.

Na mocy (9) jest $z^2 = r^2 - (x^2 + y^2)$, więc $r^2 - r_1^2 \leq z^2 \leq r^2 - r_0^2$ czyli

$$\sqrt{r^2 - r_1^2} \leq |z| \leq \sqrt{r^2 - r_0^2}.$$

Wynika stąd, że punkt będzie krążył po kuli między dwiema płaszczyznami poziomymi. Przypadek ten zajdzie, jeżeli prędkość początkowa $\bar{v}_0$ punktu nie będzie styczna do południka; wtedy bowiem rzut prędkości $\bar{v}_0$ na płaszczyznę xy nie będzie skierowany ku O i prędkość połowa rzutu będzie różna od zera.

§ 20. Wahadło matematyczne. *Wahadłem matematycznym* nazywamy punkt materialny m zawieszony w polu ciężkości na nici niematerialnej i nierozciągliwej, utwierdzonej jednym końcem w punkcie S .

Nić działa na punkt materialny tylko wówczas, gdy jest napięta; reakcja $\bar{R}$ jest skierowana wzdłuż nici ku punktowi S . Odległość punktu m od punktu S jest stale nie większa od długości nici l . Punkt może się zatem poruszać wewnątrz i na powierzchni kuli K o środku S i promieniu l .

Jeżeli przy napiętej nici, tworzącej z pionem SO kąt $< \pi/2$ puścimy wolno punkt m (t. j. bez prędkości początkowej), to punkt będzie się poruszał w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez S , po kole o środku O i promieniu l .

Przyjawszy na kole dowolny zwrot, oznaczmy położenie punktu A (leżącego na dolnej połowie koła) przy pomocy współrzędnej łukowej s , liczonej od najniższego punktu koła O . Oznaczmy przez φ kąt między OS i OA , przyczem znak kąta φ niechaj będzie zgodny ze zwrotem łuku OA . Zatem

$$(1) \quad s = l\varphi.$$

Tworząc rzuty siły ciężkości i reakcji $\vec{R}$ na styczną w punkcie A , otrzymamy $m\ddot{s} = -mg \sin \varphi$, a ponieważ na mocy (1) jest $\ddot{s} = l\ddot{\varphi}$, więc $ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$, a więc

$$(I) \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Przyjmijmy, że w chwili początkowej $t=0$ mieliśmy $\varphi = \varphi_0 > 0$. W ciągu całego ruchu będzie oczywiście $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, gdyż punkt nie może się wznieść do położenia wyższego niż początkowe.

Jeżeli φ_0 jest dość małe, wówczas z wielkim przybliżeniem możemy przyjąć $\varphi = \sin \varphi$. Zatem na mocy (I) otrzymamy $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$, a ponieważ według (1) jest $\varphi = s/l$, więc

$$(2) \quad \ddot{s} + \frac{g}{l}s = 0.$$

Porównując równanie (2) z równaniem ruchu harmonicznego (str. 112), widzimy, że punkt będzie poruszał się ruchem harmonicznym. Okres ruchu w myśl (5), str. 112, i z uwagi, że $k = \sqrt{g/l}$, wynosi

$$(3) \quad T = 2\pi\sqrt{l/g}.$$

Wzór (3) jest wzorem przybliżonym, wyprowadzonym przy założeniu, że kąt φ_0 jest mały. Ciekawem jest, że *okres T nie zależy od kąta wychylenia φ_0 .*

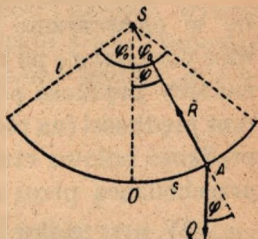
Odrzućmy teraz założenie, że kąt φ_0 jest mały. Pomnóżmy obie strony równania (I) przez $\dot{\varphi}$ i scałkujmy. Otrzymamy:

$$(4) \quad \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l} \cos \varphi + c.$$

Dla $t=0$ jest $\varphi = \varphi_0$ i $\dot{\varphi} = 0$; zatem na mocy (1) jest $\dot{\varphi} = 0$. Z równania (4) dla $t=0$ dostaniemy $0 = \frac{g}{l} \cos \varphi_0 + c$ czyli $c = -\frac{g}{l} \cos \varphi_0$, a więc $\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_0)$ czyli

$$(5) \quad \dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}.$$

Przypuśćmy, że badamy ruch punktu od chwili początkowej $t=0$ do chwili, w której osiągnął on to samo wzniesienie po



przeciwnej stronie prostej OS . Zatem $\dot{\varphi} \leq 0$, a więc wobec (5) będzie

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}, \quad \text{skąd} \quad -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = dt.$$

Oznaczając przez T okres wahan, otrzymamy

$$-\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = \frac{1}{2} T,$$

zatem

$$(6) \quad T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} = 2 \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}.$$

Wprowadźmy nową zmienną u , podstawiając $\sin \frac{1}{2} \varphi = \sin u \sin \frac{1}{2} \varphi_0$. Ponieważ $\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2(\sin^2 \frac{1}{2} \varphi_0 - \sin^2 \frac{1}{2} \varphi)$, otrzymamy

$$(7) \quad T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 u \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_0}}.$$

Obliczając całkę przy pomocy rozwinięcia w szereg¹⁾, dostaniemy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varphi_0\right) + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \left(\frac{1}{2} \varphi_0\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \left(\frac{1}{2} \varphi_0\right) + \dots \right].$$

Dla małych φ_0 otrzymujemy wzór (3), pomijając wyrazy szeregu począwszy od drugiego.

§ 21. Równowaga punktu nieswobodnego. Jeżeli punkt nieswobodny jest w równowadze, znaczy to, że siła działająca $\bar{P}$ równoważy się z reakcją $\bar{R}$. Zatem

$$(I) \quad \bar{P} + \bar{R} = 0.$$

Równanie powyższe przedstawia *warunek konieczny równowagi*.

Gdy punkt ma pozostawać na powierzchni i nie ma tarcia, to — jak wiemy — reakcja jest prostopadła do powierzchni. W przypadku więc równowagi siła działająca $\bar{P}$ musi być również prostopadła do powierzchni.

Na odwrót, jeżeli w pewnej chwili t siła $\bar{P}$ jest prostopadła do powierzchni S , a punkt ma prędkość $\bar{v} = 0$, wówczas $\bar{P} + \bar{R} = 0$,

¹⁾ Por. S. Banach, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, T. II. Lwów, str. 110.

czyli punkt pozostanie w spoczynku. Przypuśćmy bowiem, że $\bar{P} + \bar{R} \neq 0$; punkt posuwałby się więc po pewnej krzywej C , położonej na powierzchni S . Zauważmy, że w chwili t przyspieszenie normalne jest $p_n = v^2/\rho = 0$. Z równania $m\bar{p} = \bar{P} + \bar{R}$, tworząc rzuty na styczną do C , otrzymamy $mp_t = 0$, gdyż $\bar{P}$ i $\bar{R}$ są prostopadłe do stycznej. Ponieważ $p_n = 0$ i $p_t = 0$, więc $\bar{p} = 0$. Zatem byłoby $\bar{P} + \bar{R} = m\bar{p} = 0$ wbrew założeniu.

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi punktu nieswobodnego, mającego pozostawać (bez tarcia) na pewnej powierzchni, jest to, by siła działająca $\bar{P}$ była prostopadła do powierzchni.*

To samo odnosi się do linii krzywej.

Równowaga stała. Równowagę stałą określamy dla punktu nieswobodnego podobnie jak dla punktu swobodnego (str. 120), z tą różnicą, że wychylenie z położenia równowagi ma być zgodne z więzami. Punkt będzie więc w *równowadze stałej*, jeżeli przy małym (i zgodnym z więzami) wychyleniu z położenia równowagi i przy małej energii kinetycznej początkowej punkt ten będzie poruszał się stale w pobliżu położenia równowagi i stale z małą energią kinetyczną.

Równowaga w polu potencjalnym. Niech w polu sił potencjalnym punkt materialny ma pozostawać na pewnej powierzchni S o równaniu $F(x, y, z) = 0$. Założmy, że nie ma tarcia.

Jeżeli w pewnym punkcie $A(x, y, z)$ powierzchni S potencjał V osiąga ekstremum ze względu na punkty tej powierzchni, to punkt A jest położeniem równowagi.

W punkcie A występuje bowiem ekstremum funkcji V z warunkiem ubocznym $F(x, y, z) = 0$. Na mocy więc twierdzenia z teorii maximów i minimów istnieje taka liczba λ , że:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Zatem $P_x + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $P_y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $P_z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0$. Ponieważ zaś $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ są proporcjonalne do współczynników kierunkowych normalnej w A , więc siła $\bar{P}$ ma kierunek normalnej, czyli punkt A jest istotnie położeniem równowagi.

Jeżeli w A występuje maximum właściwe potencjału ze względu na punkty powierzchni S , to punkt A jest położeniem równowagi stałej.

Dowód przebiega podobnie jak na str. 121.

Uwagi powyższe odnoszą się również do przypadku, gdy punkt materialny ma pozostawać na krzywej.

Niech np. punkt ma pozostawać w polu siły ciężkości na powierzchni S o równaniu $z=f(x, y)$ (oś z skierowana pionowo do góry). Położeniami równowagi są te punkty, w których siła ciężkości jest prostopadła do powierzchni, t. j. w których płaszczyzna styczna jest pozioma. Mogą to być punkty najwyższe lub najniższe (ze względu na otoczenie) lub t. zw. punkty siodłowe. Maximum właściwe potencjału $V=-mgz$ występuje w tych punktach, w których funkcja $z=f(x, y)$ osiąga minimum właściwe. W punktach najniższych występuje więc równowaga stała. Punkty A, B są tedy położeniami równowagi stałej; punkt zaś C położeniem równowagi niestabilnej (p. rysunek).



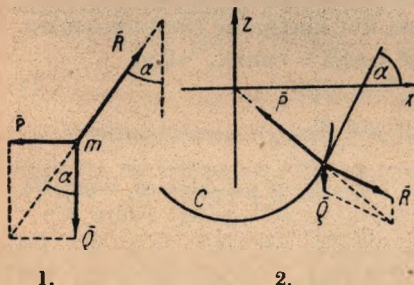
Jeżeli punkt wychylimy z położenia A , np. do A' , i nadamy mu małą prędkość, to będzie on krążył w zagłębieniu koło punktu A z małą prędkością. Jeżeli natomiast punkt wychylimy z położenia C (choćby nieznacznie nawet) do położenia C' , to oczywiście oddali się on od C pod wpływem ciężaru.

Przykład 1. Punkt materialny ciężki, zawieszony na nici tworzącej z pionem kąt α , jest w równowadze pod wpływem siły poziomej $\bar{P}$ (rys. 1). Na punkt działa reakcja nici $\bar{R}$ skierowana wzdłuż nici (ku punktowi zawieszenia), ciężar $\bar{Q}$ i siła $\bar{P}$. Zatem

$$\bar{R} + \bar{Q} + \bar{P} = 0.$$

Kładąc $|\bar{R}|=R$, $|\bar{P}|=P$ i $|\bar{Q}|=mg$, otrzymujemy z trójkąta utworzonego przez siły $\bar{R}$, $\bar{Q}$ i $\bar{P}$

$$P = mg \operatorname{tg} \alpha, \quad R = mg / \cos \alpha.$$



Przykład 2. Na krzywej C o równaniu $z=f(x)$, leżącej w płaszczyźnie ax , znajduje się punkt ciężki, przyciągany ku początkowi układu O z siłą $\bar{P}$, o wielkości proporcjonalnej do odległości punktu od O . W jakim położeniu punkt będzie w równowadze, przy założeniu, że nie ma tarcia?

W położeniu równowagi siła $\bar{P}$, ciężar $\bar{Q}$ i reakcja $\bar{R}$ równoważą się (rys. 2), więc

$$(1) \quad \bar{P} + \bar{Q} + \bar{R} = 0.$$

Rzuty siły $\bar{P}$ na osie układu wynoszą:

$$(2) \quad P_x = -\lambda^2 x, \quad P_z = -\lambda^2 z,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności. Niechaj α oznacza kąt, jaki w położeniu równowagi styczna tworzy z osią x . Rzutując na styczną, otrzymamy z (1) i (2) $-\lambda^2 x \cos \alpha - \lambda^2 z \sin \alpha - mg \sin \alpha = 0$. Dzieląc przez $\cos \alpha$, dostaniemy z uwagi na to, że $\operatorname{tg} \alpha = z'$

$$(3) \quad \lambda^2 x + \lambda^2 z z' + mg z' = 0.$$

Znając funkcję $z = f(x)$, możemy z równania (3) wyznaczyć współrzędną x położenia równowagi.

Jeżeli np. krzywa C jest parabolą $z = x^2 - a$, to na mocy (3) mamy $\lambda^2 x + 2\lambda^2(x^2 - a)x + 2mgx = 0$, skąd

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{\lambda^2(2a-1) - 2mg}{2\lambda^2}}.$$

Rozwiązania $x_{2,3}$ istnieją przy założeniu, że wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie.

Zapytajmy teraz: *jaka to jest krzywa, na której punkt jest w każdym położeniu w równowadze?*

Dla krzywej tej równanie (3) musi być spełnione tożsamościowo. Całkując je, otrzymamy $\frac{1}{2} \lambda^2 x^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 z^2 + mgz = \text{const.}$, skąd

$$x^2 + \left(z + \frac{mg}{\lambda^2}\right)^2 = \text{const.}$$

Krzywą taką jest więc dowolne koło o środku w punkcie $(0, -mg/\lambda^2)$.

III. Dynamika ruchu względnego.

§ 22. Prawa ruchu. Przypuśćmy, że badamy ruch punktu materialnego w układzie (x, y, z) , poruszającym się względem układu inercjalnego. Uważając układ inercjalny (p. str. 70) za stały, zaś układ (x, y, z) za ruchomy, otrzymamy (str. 61):

$$(1) \quad \bar{p}_b = \bar{p}_w + \bar{p}_u + \bar{p}_c \quad \text{czyli} \quad \bar{p}_w = \bar{p}_b - \bar{p}_u - \bar{p}_c,$$

gdzie $\bar{p}_b, \bar{p}_w, \bar{p}_u, \bar{p}_c$ oznaczają przyspieszenia: bezwzględne, względne, unoszenia i Coriolisa. Mnożąc (1) obustronnie przez masę m danego punktu, dostaniemy

$$(2) \quad m\bar{p}_w = m\bar{p}_b - m\bar{p}_u - m\bar{p}_c.$$

Położmy:

$$(1) \quad \bar{P}_b = m\bar{p}_b, \quad \bar{P}_u = -m\bar{p}_u, \quad \bar{P}_c = -m\bar{p}_c.$$

Ponieważ $\bar{p}_b$ jest przyspieszeniem punktu względem układu inercjalnego, więc $\bar{P}_b$ jest wedle prawa Newtona siłą działającą na dany punkt materialny; nazywamy ją *siłą bezwzględną*. Wektor $\bar{P}_u$ nazywamy *siłą unoszenia* lub *siłą odśrodkową*, a wektor $\bar{P}_c$ *siłą Coriolisa* lub *siłą odśrodkową złożoną*.

Należy zwrócić uwagę na to, że wektory $-m\bar{p}_u$ i $-m\bar{p}_c$ nie przedstawiają żadnych sił, lecz nazwaliśmy je tylko ze względów praktycznych siłami unoszenia i Coriolisa.

Na mocy (2) i (1) jest

$$(II) \quad m\bar{p}_w = \bar{P}_b + \bar{P}_u + \bar{P}_c.$$

Według prawa Newtona mamy w układzie inercjalnym $m\bar{p} = \bar{P}$; widzimy, że równanie (II) ma postać podobną.

A więc: *prawa ruchu w układzie ruchomym współrzędnych są takie, jak gdyby układ był układem inercjalnym, pod warunkiem jednak, że do sił działających dodamy siłę unoszenia i siłę Coriolisa.*

Sumę sił: bezwzględnej, unoszenia i Coriolisa nazywamy *siłą względną* i oznaczamy przez $\bar{P}_\lambda$.

Zatem

$$(3) \quad \bar{P}_w = \bar{P}_b + \bar{P}_u + \bar{P}_c.$$

Równanie (II) możemy więc napisać w postaci

$$(III) \quad m\bar{p}_w = \bar{P}_\lambda.$$

Obserwator, będący w spoczynku względem układu ruchomego i przyjmujący go za układ inercjalny, będzie sądził, że siłą działającą na punkt materialny jest właśnie siła względna $\bar{P}_w$. Jeżeli układ rozpoczął ruch w pewnej chwili t_0 , to obserwatorowi będzie się wydawało, że oprócz siły $\bar{P}_b$, działającej poprzednio, zaczęła działać od chwili t_0 nowa siła $\bar{P}_u + \bar{P}_c$. Np. człowiek jadący na karuzeli sądzi, że oprócz siły ciężkości działa na niego jeszcze nowa siła, skierowana od środka ruchu i starająca się zrzucić go z karuzeli (siła odśrodkowa). Dla obserwatora zaś będącego w spoczynku względem układu inercjalnego siły unoszenia i Coriolisa oczywiście nie istnieją.

Jeżeli układ ruchomy porusza się względem pewnego układu inercjalnego ruchem postępowym z prędkością stałą, to $\bar{p}_u = 0$ i $\bar{p}_c = 0$ (p. str. 62); wobec tego $\bar{P}_u = 0$ i $\bar{P}_c = 0$ i na mocy (II)

$$m\bar{p}_w = \bar{P}_b.$$

Do takiego układu ruchomego stosują się zatem prawa Newtona.

A więc: każdy układ współrzędnych, który porusza się względem układu inercjalnego ruchem postępowym z prędkością stałą, jest również układem inercjalnym.

Widzimy stąd, że prawa mechaniki nigdy nie pozwolą rozstrzygnąć, czy dany układ inercjalny jest w spoczynku czy nie.

Jeżeli ruch punktu materialnego badamy w pewnym układzie odniesienia (x, y, z) , to z równania (III) możemy otrzymać siłę względną $\bar{P}_w$. Jeżeli znamy przytem skądinąd siłę bezwzględną $\bar{P}_b$ i zauważymy, że $\bar{P}_b \neq \bar{P}_w$, to wówczas będziemy mogli stwierdzić, że układ (x, y, z) nie jest układem inercjalnym, więc że porusza się względem każdego układu inercjalnego.

§ 23. Przykłady ruchu. Ruch postępowy układu.

Gdy układ porusza się ruchem postępowym, przyspieszenie Coriolisa jest $\bar{p}_c = 0$ (str. 62), więc siła Coriolisa $\bar{P}_c = 0$. Przyspieszenie unoszenia jest dla wszystkich punktów stałe i równa się przyspieszeniu początku układu (względem układu inercjalnego). Zatem siła unoszenia jest stałą. Wynika stąd, że siła unoszenia tworzy pole potencjałne (str. 102). Na mocy (II), str. 137, mamy wówczas

$$(I) \quad m\bar{p}_w = \bar{P}_b + \bar{P}_u.$$

Przykład 1. Płaszczyzna pochyła porusza się ze stałym przyspieszeniem poziomym $\bar{a}$. Na płaszczyźnie pochyłej znajduje się punkt ciężki o masie m . Tarcia nie uwzględniamy. Jakie przyspieszenie względem płaszczyzny pochyłej będzie miał punkt m ?

Siłami bezwzględnymi są: ciężar $\bar{Q}$ i reakcja $\bar{R}$, prostopadła do płaszczyzny pochyłej. Siła unoszenia wynosi $-m\bar{a}$. Obierzmy za oś x -ów prostą przecięcia płaszczyzny pochyłej z płaszczyzną pionową, przechodzącą przez m , i nadajmy jej zwrot ku dołowi (rys. 1). Oznaczając przez α kąt, jaki płaszczyzna pochyła tworzy z poziomem, i tworząc rzuty na oś x -ów, otrzymamy z (I)

$$(1) \quad p = g \sin \alpha - a \cos \alpha,$$

gdzie $p = p_{ux}$, zaś $a = |\bar{a}|$. Wiedzmy stąd, że $p > 0$ lub $p < 0$, zależnie od tego czy $a < g \tan \alpha$ czy $a > g \tan \alpha$.

Przykład 2. Układ (x, y, z) porusza się w polu siły ciężkości ruchem postępowym ze stałym przyspieszeniem poziomym $\bar{a}$. Przyjmijmy, że oś z skierowana jest pionowo w górę, zaś oś x ma kierunek przyspieszenia $\bar{a}$, zwrot zaś przeciwny.

Siła unoszenia jest $\bar{P}_u = -m\bar{a}$; kładąc $a = |\bar{a}|$ otrzymamy $P_{ux} = ma$, $P_{uy} = 0$ i $P_{uz} = 0$. Łatwo zauważyć, że siła unoszenia wytwarza pole potencjalne o potencjale $V_u = max$; potencjał siły ciężkości wynosi $V_g = -mgz$. Siła względna wytwarza więc pole o potencjale

$$(2) \quad V = max - mgz.$$

Jeżeli na punkt materialny działa tylko siła ciężkości $\bar{Q}$, to stosując zasadę zachowania energii całkowitej i kładąc $v = |\bar{v}|$, otrzymamy na mocy (2) $\frac{1}{2}mv^2 - V = \text{const.}$ czyli

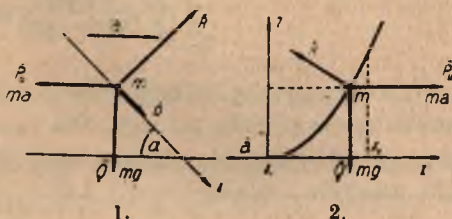
$$(3) \quad v^2 - 2ax + 2gz = h,$$

gdzie h jest pewną stałą.

Przypuśćmy teraz, że badamy ruch punktu nieswobodnego, mającego pozostawać na krzywej leżącej w płaszczyźnie xz o równaniu $z = x^2$ (rys. 2).

Założmy, że dla $t = 0$ jest $x = 0$ i $v = 0$. Jeżeli nie uwzględniamy tarcia, to reakcja jest prostopadła do toru i nie wykonuje pracy. Do ruchu stosuje się więc wzór (3). Z warunków początkowych wynika, że $h = 0$, więc $v^2 - 2ax + 2gx^2 = 0$ czyli

$$(4) \quad v^2 = 2c(a - gx).$$



Ponieważ $v^2 \geq 0$, więc $2x(a - gx) \geq 0$; wynika stąd, że $0 \leq x \leq a/g$. Ruch odbywać się więc będzie po łuku zawartym między odciętymi $x_1 = 0$ a $x_2 = a/g$. Ponieważ $v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \dot{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \dot{x} \sqrt{1 + 4x^2}$, więc na mocy (4) będzie $\dot{x}^2(1 + 4x^2) = 2x(a - gx)$, skąd $\sqrt{\frac{1 + 4x^2}{2x(a - gx)}} dx = dt$, a więc

$$\int_0^x \sqrt{\frac{1 + 4x^2}{2x(a - gx)}} dx = t.$$

Wzór powyższy ważny jest od chwili $t = 0$ aż do chwili gdy punkt osiągnie odciętą $x_2 = a/g$. Dla $x_2 = a/g$ na mocy (4) mamy $v = 0$. Następnie odbywać się będzie ruch powrotny aż do chwili, gdy punkt osiągnie odciętą $x = 0$ i t. d.

Ruch obrotowy układu. Niech układ (x, y, z) obraca się około osi z z prędkością kątową ω stałą. Przyspieszenie unoszenia ma rzuty:

$p_{u_x} = -x\omega^2$, $p_{u_y} = -y\omega^2$ i $p_{u_z} = 0$. Zatem dla siły unoszenia mamy:

$$P_{u_x} = mx\omega^2, \quad P_{u_y} = my\omega^2, \quad P_{u_z} = 0.$$

Łatwo zauważyć, że siła unoszenia wytwarza pole o potencjale

$$(5) \quad V = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Przyspieszenie Coriolisa będzie $\bar{p}_C = 2\bar{v}_w \times \bar{\omega}$ (str. 63). Ponieważ rzuty prędkości względnej na osie x, y, z wynoszą $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, zaś $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$ i $\omega_z = \omega$, więc będzie $p_{C_x} = 2\dot{y}\omega$, $p_{C_y} = -2\dot{x}\omega$ i $p_{C_z} = 0$, skąd

$$P_{C_x} = -2m\dot{y}\omega, \quad P_{C_y} = 2m\dot{x}\omega, \quad P_{C_z} = 0.$$

Równania ruchu będą więc miały postać (str. 137, wzór (11)):

$$(6) \quad m\ddot{x} = P_{b_x} + m\omega^2 x - 2m\dot{y}\omega, \quad m\ddot{y} = P_{b_y} + m\omega^2 y + 2m\dot{x}\omega, \quad m\ddot{z} = P_{b_z}.$$

Pracę siły w ruchu względnym nazywamy *pracą względną*.

Ponieważ $\bar{p}_C$ jest prostopadłe do $\bar{v}_u$, więc $\bar{P}_C$ jest prostopadłe do $\bar{v}_u$; zatem siła Coriolisa nie wykonywa pracy względnej. Praca względna siły względnej sprowadza się więc do pracy siły bezwzględnej i siły unoszenia.

Jeżeli siłą bezwzględną jest siła ciężkości, to przyjmując, że oś z jest skierowana pionowo w górę, otrzymamy jako potencjał siły ciężkości $V_g = -mgz$. Siła ciężkości wraz z siłą unoszenia wytwarza pole potencjalne o potencjale

$$V = -mgz + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2).$$

Jeżeli więc położymy $v = |\vec{v}_w|$, to na mocy zasady równowartości pracy i energii kinetycznej (str. 106) dostaniemy

$$\frac{1}{2}mv^2 - V = \text{const.}, \text{ więc } \frac{1}{2}mv^2 + mgz - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2) = \text{const.}$$

czyli

$$(7) \quad v^2 + 2gz - \omega^2(x^2 + y^2) = h,$$

gdzie h jest stałą.

Jeżeli badamy ruch punktu nieswobodnego po krzywej (lub powierzchni) nieruchomej względem układu (x, y, z) , to przy założeniu, że nie ma tarcia, reakcja nie wykonywa pracy względnej; wzór (7) zachodzi więc również i w tym przypadku.

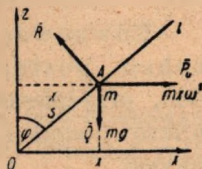
Przykład 3. Krzywa C płaska obraca się około osi pionowej, leżącej w jej płaszczyźnie, ze stałą prędkością kątową ω . Wyznaczyć ruch punktu nieswobodnego poruszającego się po krzywej C pod wpływem siły ciężkości.

Obierzmy za oś obrotu oś z skierowaną pionowo ku górze; za płaszczyznę krzywej C obierzmy płaszczyznę xz . Niechaj krzywa C ma równanie $z = f(x)$. Na mocy (7), wobec $y = 0$, dostaniemy $v^2 + 2gz - \omega^2 x^2 = h$. Zakładając, że dla $t = 0$ jest $x = x_0$, $z = z_0 = f(x_0)$ i $v = 0$, otrzymamy $h = 2gz_0 - \omega^2 x_0^2$. Ponieważ $ds = dx\sqrt{1+f'^2(x)}$, więc $v = \dot{s} = \dot{x}\sqrt{1+f'^2(x)}$; zatem

$$(8) \quad \dot{x}^2(1+f'^2(x)) + 2gf(x) - \omega^2 x^2 = h.$$

Z równania powyższego możemy wyznaczyć x jako funkcję czasu t .

Przykład 4. Niech w szczególności C (z przykładu poprzedniego) będzie prostą l przechodzącą przez początek układu O i nachyloną do osi z pod kątem φ .



Aby wyznaczyć ruch punktu po prostej l , możnaby zastosować wzór (8), podstawiając $z = f(x) = x \operatorname{ctg} \varphi$. Wyprowadzimy jednak równania ruchu bezpośrednio.

Sila unoszenia jest prostopadła do osi z i wynosi $mx\omega^2$. Oznaczmy przez s długość odcinka OA . Ponieważ siła Coriolisa i reakcja są prostopadłe do prostej l , więc rzut siły względnej na l wynosi $-mg \cos \varphi + mx\omega^2 \sin \varphi$. Z uwagi na to że $x = s \sin \varphi$, otrzymamy więc

$$m\ddot{s} = -mg \cos \varphi + ms\omega^2 \sin^2 \varphi$$

czyli

$$(9) \quad \ddot{s} - s\omega^2 \sin^2 \varphi = -g \cos \varphi.$$

Równanie jednorodne $\ddot{s} - s\omega^2 \sin^2 \varphi = 0$ ma rozwiązanie ogólne postaci $s = ae^{\omega t \sin \varphi} + be^{-\omega t \sin \varphi}$. Ponieważ rozwiązaniem szczególnym równania (9) jest $s = \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}$, więc rozwiązaniem ogólnym tego równania będzie

$$(10) \quad s = ae^{\omega t \sin \varphi} + be^{-\omega t \sin \varphi} + \frac{g \cos \varphi}{\omega^2 \sin^2 \varphi}.$$

• Stałe a i b wyznaczmy z warunków początkowych. Jeżeli w szczególności $\varphi = \pi/2$, czyli prosta l jest osią x -ów, to

$$(11) \quad s = ae^{\omega t} + be^{-\omega t}.$$

§ 24. Równowaga względna. Jeżeli punkt materialny jest w równowadze (czyli spoczynku) względem układu ruchomego, to przyspieszenie względne jest $\bar{p}_w = 0$, a prędkość względna $\bar{v}_w = 0$. Wynika stąd, że również przyspieszenie Coriolisa jest $\bar{p}_c = 0$, a zatem i siła Coriolisa $\bar{P}_c = 0$. Z równania (II), str. 137, otrzymamy więc

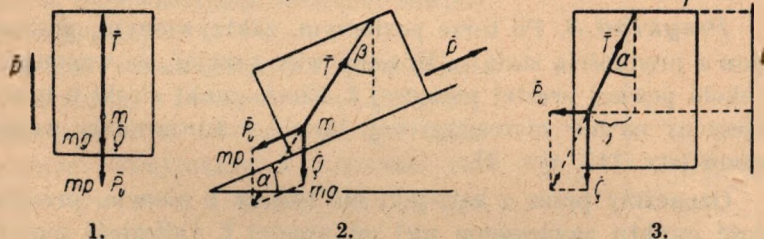
$$(I) \quad \bar{P}_b + \bar{P}_u = 0.$$

A więc: *gdy punkt jest w równowadze względnej, siła bezwzględna równoważy się z siłą unoszenia.*

Równowaga względna w układzie poruszającym się ruchem postępowym. Gdy układ porusza się ruchem postępowym, przyspieszenie unoszenia ma wartość stałą dla wszystkich punktów; stąd i siła unoszenia musi być jednakowa w każdym punkcie.

Jeżeli w szczególności układ ruchomy porusza się ruchem postępowym z prędkością stałą, to $\bar{p}_u = 0$, skąd $\bar{P}_u = 0$ i równanie (I), wyrażające warunek równowagi, sprowadza się do postaci $\bar{P}_b = 0$.

Przykład 1. W windzie, poruszającej się z przyspieszeniem $\bar{p}$, zawieszony jest na nici nierozciągliwej punkt ciężki o masie m . Niechaj nić ma kierunek pionowy i niech punkt pozostaje w równowadze względem windy (t.j. układu związanego z windą). Siły działające, mianowicie ciężar $\bar{Q}$ i napięcie nici $\bar{T}$ znoszą się więc z siłą unoszenia (rys. 1). Połóżmy $p=|\bar{p}|$ i $T=|\bar{T}|$.



Przyspieszenie unoszenia jest $\bar{p}$. Załóżmy, że jest skierowane w górę. Zatem siła unoszenia jest skierowana w dół i wynosi mp . Tworząc rzuty sił na oś skierowaną pionowo w górę, otrzymamy $T - mg - mp = 0$ czyli $T = mg + mp$. Napięcie nici jest więc większe niż ciężar. Gdybyśmy trzymali ciało w ręce, uczulibyśmy pozorny wzrost ciężaru.

Na odwrót, jeżeli przyspieszenie jest skierowane w dół, to $T = mg - mp$; napięcie nici jest więc mniejsze niż ciężar i ciało w tym przypadku wydaje się lżejsze.

Wreszcie, jeżeli $p = 0$, to $T = mg$. A więc podczas ruchu jednostajnego windy napięcie nici równe jest ciężarowi.

Przykład 2. Wagon kolejki zębatej porusza się z przyspieszeniem $\bar{p}$ po torze nachylonym do poziomu pod kątem α . Punkt materialny, zawieszony na nici nierozciągliwej, znajduje się w równowadze względem wagonu. Niech β oznacza kąt odchylenia nici od pionu.

Ciężar punktu $\bar{Q}$ i napięcie nici $\bar{T}$ równoważą się z siłą unoszenia $\bar{P}_u$ (rys. 2), zatem

$$(1) \quad \bar{T} + \bar{Q} + \bar{P}_u = 0.$$

Przyspieszenie unoszenia jest $\bar{p}$. Załóżmy, że jest skierowane w górę. $\bar{P}_u$ jest więc skierowane w dół i $|\bar{P}_u| = m|\bar{p}|$. Tworząc rzuty na oś poziomą i pionową, otrzymamy z (1):

$$(2) \quad T \sin \beta - mp \cos \alpha = 0, \quad T \cos \beta - mp \sin \alpha - mg = 0,$$

gdzie $T = |\bar{T}|$ i $p = |\bar{p}|$. Z równań (2) otrzymujemy:

$$T = m \sqrt{p^2 + g^2 + 2pg \sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{p \cos \alpha}{g + p \sin \alpha}.$$

Gdy w szczególności $\alpha=0$, t. zn. gdy tor jest poziomy, będzie $T = m \sqrt{p^2 + g^2}$ i $\operatorname{tg} \beta = p/g$. Możemy więc w wagonie kolejowym wyznaczyć z kąta wychylenia nitki od pionu przyspieszenie wagonu: mamy bowiem $p = g \operatorname{tg} \beta$.

Przykład 3. Po torze poziomym, zakrzywionym, porusza się wagon z prędkością stałą v . Możemy więc przyjąć, że wagon obraca się około pewnej prostej pionowej l . Niech punkt ciężki o masie m , zawieszony na nici nierozciągliwej, będzie w równowadze względem wagonu (str. 143, rys. 3).

Oznaczmy przez α kąt, jaki nić tworzy z pionem, przez r odległość punktu zawieszenia nici od prostej l . Odległość punktu m od osi l wynosi więc $r' = r + x = r + d \sin \alpha$ (gdzie d długość nici). Przyspieszenie unoszenia p_u punktu m jest prostopadłe do l i jest skierowane ku l , przyczem $|p_u| = v^2/(r+x)$. Siła unoszenia, mająca zwrot przeciwny, wynosi zatem $|\bar{P}_u| = mv^2/(r+x)$. Ponieważ ciężar $\bar{Q}$ i napięcie nici $\bar{T}$ równoważą się z siłą unoszenia, więc z trójkąta sił otrzymamy

$$\operatorname{tg} \alpha = |\bar{P}_u|/|\bar{Q}| = v^2/g(r+x).$$

Gdy x jest małe w stosunku do r , to $\operatorname{tg} \alpha = v^2/gr$.

Przykład 4. Punkt nieswobodny ciężki o masie m ma pozostać na krzywej C , obracającej się z prędkością kątową ω około stałej prostej pionowej l . Tarcia nie uwzględniamy. W jakim położeniu punkt będzie w równowadze względem krzywej C ?

Obierzmy układ ruchomy (x, y, z) obracający się wraz z krzywą C około osi l z prędkością kątową ω , przyjmując l za oś z -ów skierowaną ku górze. Niech krzywa C , będąca w spoczynku względem układu (x, y, z) , dana będzie parametrycznie przy pomocy funkcji:

$$(3) \quad x = f(\sigma), \quad y = \varphi(\sigma), \quad z = \psi(\sigma).$$

W położeniu równowagi względnej ciężar $\bar{Q}$, reakcja $\bar{R}$ i siła unoszenia $\bar{P}_u$ równoważą się. Zatem suma $\bar{Q} + \bar{P}_u$ jest prostopadła do krzywej C . Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu w położeniu równowagi względnej, otrzymamy więc $p_{ux} = -x\omega^2$, $p_{uy} = -y\omega^2$ i $p_{uz} = 0$, skąd $P_{ux} = mx\omega^2$, $P_{uy} = my\omega^2$ i $P_{uz} = 0$. Suma $\bar{P}_u + \bar{Q}$ ma zatem rzuty: $mx\omega^2$, $my\omega^2$ i $-mg$.

Współczynniki kierunkowe stycznej są proporcjonalne do pochodnych $x'=f'(\sigma)$, $y'=\varphi'(\sigma)$, $z'=\psi'(\sigma)$. Z warunku prostopadłości $\bar{P}_u + \bar{Q}$ do stycznej wynika tedy (po skróceniu przez m), że

$$(4) \quad xx'\omega^2 + yy'\omega^2 - gz' = 0.$$

Z równania powyższego możemy wyznaczyć wartość parametru σ , odpowiadającą położeniu równowagi względnej.

Jeżeli w szczególności krzywa C jest krzywą płaską o równaniu $z=\psi(x)$, leżącą w płaszczyźnie xz , wówczas dla położenia równowagi otrzymamy z równania (4) (kładąc $x=\sigma$, $y=0$ i $z=\psi(\sigma)$) lub bezpośrednio z rysunku:

$$(5) \quad \operatorname{tg} \alpha = \psi'(x) = x\omega^2/g.$$

Jeżeli np. krzywa C ma równanie $z = -\sqrt{r^2 - x^2}$ (czyli jest dolną częścią koła $x^2 + z^2 = r^2$), to z (5) dostaniemy $x/\sqrt{r^2 - x^2} = x\omega^2/g$, skąd $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm \sqrt{r^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$. Rozwiązania $x_{2,3}$ istnieją tylko wtedy, gdy $r^2 - \frac{g^2}{\omega^4} \geq 0$, t. zn. gdy $\omega \geq \sqrt{g/r}$.

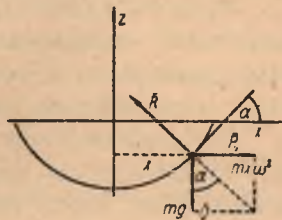
Zapytajmy teraz, *jakie to są krzywe, na których punkt jest w każdym położeniu w równowadze względnej.*

Dla krzywych tych równanie (4) musi być spełnione tożsamościowo, t. j. dla każdej wartości parametru σ . Otrzymamy tedy z (4) $\frac{1}{2} \frac{d[x^2 + y^2]}{d\sigma} \omega^2 - g \frac{dz}{d\sigma} = 0$. Całkując, dostajemy $(x^2 + y^2)\omega^2/2 - gz = \text{const.}$ czyli

$$(6) \quad z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + c,$$

gdzie $c = \text{const.}$

Równanie (6) przedstawia zbiór paraboloid obrotowych, powstałych przez obrót paraboli $z = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$ dookoła osi z . Na mocy (6) krzywa, leżąca na którejkolwiek z tych paraboloid, spełnia równanie (4) tożsamościowo. Krzywe płaskie, spełniające równanie (4), otrzymamy, tworząc przekrój paraboloidy dowolną płaszczyzną. Jako przekroje dostaniemy elipsy i parabole. W szczególności, przekrój płaszczyzną pionową $y=0$ będzie parabolą o równaniu $z = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + c$.



§ 25. Ruch względem ziemi. Siła ciężkości. Przyjmijmy za układ inercjalny układ, którego początek znajduje się w słońcu, a osie skierowane są ku gwiazdom stałym. Ziemia nie jest w spoczynku względem tego układu. Badając ruch punktu w ciągu krótkiego czasu, możemy się ograniczyć do ruchu obrotowego ziemi tylko około pewnej osi.

Niech punkt zawieszony na nici w pewnym miejscu powierzchni ziemi będzie względem ziemi w spoczynku. Siłami bezwzględными są: przyciąganie ziemi $\vec{A}$ i napięcie nici $\vec{T}$ (równe co do wielkości i kierunku ciężarowi, lecz o zwrocie przeciwnym).

Przyciąganie ziemi nie jest równe ciężarowi, bo w przeciwnym razie równowazyłoby się ono z napięciem nici i punkt byłby w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym. To jednak nie zachodzi, gdyż punkt obraca się wraz z ziemią około jej osi.

Stosując warunki równowagi względnej (§ 24, str. 142) do układu związanego z ziemią, możemy powiedzieć, że przyciąganie ziemi $\vec{A}$ i napięcie nici $\vec{T}$ równoważą się z siłą unoszenia $\vec{P}_u$. A więc

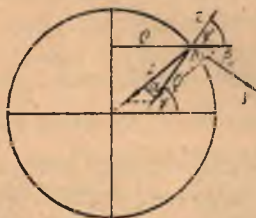
$$\vec{A} + \vec{T} + \vec{P}_u = 0.$$

Ponieważ ciężar ciała $\vec{Q} = -\vec{T}$, więc $\vec{A} - \vec{Q} + \vec{P}_u = 0$, skąd

$$(I) \quad \vec{Q} = \vec{A} + \vec{P}_u.$$

A więc: ciężar jest wypadkową siły odśrodkowej (siły unoszenia) i siły przyciągania ziemi.

Wielkość i kierunek przyciągania ziemi. Załóżmy, że ziemia ma kształt bryły obrotowej, której osią jest oś obrotu ziemi. Załóżmy ponadto, że gęstość ziemi jest rozłożona symetrycznie względem środka masy. Można udowodnić wówczas, że siła przyciągania jest skierowana stale ku środkowi masy ziemi.



Niechaj α będzie kątem, jaki siła $\vec{A}$ tworzy z pionem, t. j. z ciężarem $\vec{Q}$. Oznaczmy przez ρ promień równoleżnika, na którym znajduje się punkt materialny, przez φ szerokość geograficzną tego punktu (t. j. kąt między przechodzącym przezeń pionem a płaszczyzną równika), wreszcie przez ω prędkość kątową obrotu ziemi.

Siła unoszenia leży w płaszczyźnie równoleżnika i jest skierowana od osi obrotu, przyczem $|\vec{P}_u| = m\rho\omega^2$. Utwórzmy rzuty sił $\vec{A}$, $\vec{Q}$ i $\vec{P}_u$ na oś z zwróconą pionowo w górę oraz na oś y poziomą (t. j.

prostopadłą do pionowej), leżącą w płaszczyźnie południka (t. j. w płaszczyźnie sił) i zwróconą na południe. Kładąc $A=|\vec{A}|$ i $Q=|\vec{Q}|$, otrzymamy na mocy (I)

$$-Q = -A \cos \alpha + m \varrho \omega^2 \cos \varphi, \quad -A \sin \alpha + m \varrho \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

Zatem:

$$(1) \quad A \cos \alpha = Q + m \varrho \omega^2 \cos \varphi, \quad A \sin \alpha = m \varrho \omega^2 \sin \varphi.$$

Stąd, znając Q , ϱ , ω i φ , możemy obliczyć A i α . Na równiku mamy $\varphi=0$; zatem na mocy (1) dostajemy $\alpha=0$. Oznaczając przez A_0 , Q_0 i ϱ_0 odpowiednie wartości na równiku, otrzymamy

$$(2) \quad A_0 = Q_0 + m \varrho_0 \omega^2.$$

Znając Q_0 i ϱ_0 , możemy więc obliczyć A_0 . Znając A_0 , otrzymamy

$$(3) \quad m \varrho_0 \omega^2 / A_0 = 1/289 = 1/17^2.$$

Gdyby prędkość ziemi wynosiła $\omega_1 = 17\omega$, byłoby więc $m \varrho_0 \omega_1^2 / A_0 = 1$ czyli $A_0 = m \varrho_0 \omega_1^2$. Na mocy (2) otrzymujemy stąd $Q_0 = A_0 - m \varrho_0 \omega_1^2 = 0$; gdyby więc ziemia obracała się 17 razy szybciej, wówczas ciała na równiku pozbawione były by ciężaru.

Załóżmy teraz, że ziemia jest kulą, złożoną z warstw współśrodkowych o stałej gęstości. Wówczas, jak można wykazać, A musi być stałe na powierzchni ziemi. Zatem $A = A_0$. Oznaczając przez R promień ziemi, otrzymamy

$$(4) \quad \varrho = R \cos(\varphi - \alpha).$$

Na mocy (1) jest $\sin \alpha = \frac{m R \omega^2}{A_0} \cos(\varphi - \alpha) \sin \varphi$, a ponieważ $\varrho_0 = R$, więc na mocy (3)

$$\sin \alpha = \frac{1}{289} \cos(\varphi - \alpha) \sin \varphi.$$

Kąt α jest bardzo mały; przyjmując więc w przybliżeniu $\sin \alpha = \alpha$ i $\cos(\varphi - \alpha) = \cos \varphi$, dostaniemy

$$\alpha = \frac{1}{2 \cdot 289} \sin 2\varphi.$$

Widzimy stąd, że α ma największą wartość dla $\varphi = 45^\circ$. Kładąc $\alpha=0$, dostaniemy na mocy (1) i (4)

$$Q = A_0 - m R \omega^2 \cos^2 \varphi = A_0 \left(1 - \frac{m R \omega^2}{A_0} \cos^2 \varphi \right),$$

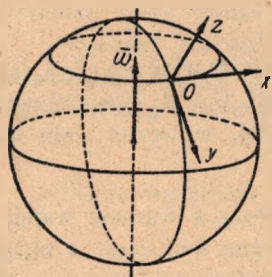
skąd na mocy (3), wobec $\varrho_0=R$, otrzymamy

$$Q=A_0\left(1-\frac{\cos^2\varphi}{289}\right).$$

Sila Coriolisa. Badając ruch punktu względem ziemi, należy do sił bezwzględnych dodać siły unoszenia i Coriolisa. Załóżmy, że oprócz siły przyciągania $\bar{A}$ działa na punkt materialny jeszcze pewna siła $\bar{P}$. Oznaczając przez $\bar{p}$ przyspieszenie względem ziemi, otrzymamy $m\bar{p}=\bar{P}+\bar{A}+\bar{P}_u+\bar{P}_C$, a ponieważ $\bar{A}+\bar{P}_u$ równa się ciężarowi $\bar{Q}$, więc

$$(5) \quad m\bar{p}=\bar{P}+\bar{Q}+\bar{P}_C.$$

Zatem: przy badaniu ruchu punktu względem ziemi należy do siły $\bar{P}$ i ciężaru $\bar{Q}$ dodać siłę Coriolisa $\bar{P}_C$.



Obierzmy w danym miejscu na ziemi oś z skierowaną pionowo w górę, oś x poziomo skierowaną na wschód i oś y poziomo skierowaną na południe. Oś obrotu będzie leżała w płaszczyźnie yz i utworzy z osią z kąt $90^\circ - \varphi$ (porównaj rysunek na str. 146). Ponieważ ziemia obraca się z zachodu na wschód, więc wektor prędkości kątowej $\bar{\omega}$, położony na osi obrotu, ma zwrot od bieguna

południowego ku północnemu. Kładąc $|\bar{\omega}|=\omega$, otrzymamy na półkuli północnej:

$$(N) \quad \omega_x=0, \quad \omega_y=-\omega \cos \varphi, \quad \omega_z=\omega \sin \varphi,$$

a na południowej:

$$(S) \quad \omega_x=0, \quad \omega_y=-\omega \cos \varphi, \quad \omega_z=-\omega \sin \varphi,$$

Oznaczając przez $\bar{v}$ prędkość punktu względem ziemi, otrzymamy $\bar{p}_C=2\bar{v}\times\bar{\omega}$, zatem $\bar{P}_C=-m\bar{p}_C=-2m\bar{v}\times\bar{\omega}$ czyli

$$(6) \quad \bar{P}_C=2m\bar{\omega}\times\bar{v},$$

skąd na mocy (N), dla półkuli północnej:

$$(II) \quad P_{Cx}=-2m\omega(v_y \sin \varphi + v_z \cos \varphi), \quad P_{Cy}=2m\omega v_x \sin \varphi, \\ P_{Cz}=2m\omega v_x \cos \varphi.$$

Jeżeli punkt ma tylko prędkość pionową, t. j. gdy $v_x=0$ i $v_y=0$, otrzymamy $P_{Cx}=-2m\omega v_z \cos \varphi$, $P_{Cy}=0$ i $P_{Cz}=0$. Przy wznoszeniu się punktu jest $v_z>0$, a więc $P_{Cx}<0$ i $\bar{P}_C$ jest skierowane

poziomo na zachód; przy opadaniu zaś punktu $v_z < 0$, $P_{C_x} > 0$, a zatem $\vec{P}_C$ jest skierowane poziomo na wschód.

Wynika stąd, że ciało spadające zbacza na wschód pod wpływem siły Coriolisa.

Jeżeli punkt porusza się stale w płaszczyźnie poziomej, czyli gdy $v_z = 0$, to $P_{C_x} = -2m\omega v_y \sin \varphi$ i $P_{C_y} = 2m\omega v_x \sin \varphi$. Składowa pozioma siły Coriolisa jest więc wtedy prostopadła do prędkości i ma w stosunku do niej zwrot na prawo.

A zatem: punkt poruszający się w płaszczyźnie poziomej na półkuli północnej dąży (pod wpływem siły Coriolisa) do zbaczenia w prawo od kierunku prędkości.

Z tego powodu np. prawa szyna jest bardziej uciskana przy biegu pociągów niż lewa.

Efekty siły Coriolisa są małe, bo siła jest mała. Na mocy (6) mamy bowiem $|\vec{P}_C| = 2m\omega|\vec{v}|\sin \varepsilon$, gdzie ε oznacza kąt między $\vec{v}$ a osią obrotu. Ponieważ

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ sek}^{-1} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \text{ sek}^{-1} = 0,00007 \text{ sek}^{-1},$$

gdzie T oznacza czas obrotu ziemi dookoła osi, więc $\vec{P}_C$ jest małe.

Utwórzmy rzuty (5) na osie x, y, z . Na mocy (II) otrzymamy:

$$(III) \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= P_x - 2m\omega(\dot{y} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), & m\ddot{y} &= P_y + 2m\omega\dot{x} \sin \varphi, \\ m\ddot{z} &= P_z - mg + 2m\omega\dot{x} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Zboczenie na wschód przy spadku. Zajmiemy się wyznaczeniem zboczenia od pionu dla punktu materialnego spadającego swobodnie.

Załóżmy, że dla $t=0$ mamy:

$$(7) \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad \vec{v}=0.$$

Na mocy (III), otrzymamy przy założeniu, że $\vec{P}=0$:

$$(8) \quad \ddot{x} = -2\omega(\dot{y} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \quad \ddot{y} = 2\omega\dot{x} \sin \varphi, \quad \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x} \cos \varphi.$$

Całkując, dostaniemy z uwagi na warunki początkowe (7):

$$(9) \quad \dot{x} = -2\omega(y \sin \varphi + z \cos \varphi), \quad \dot{y} = 2\omega x \sin \varphi, \quad \dot{z} = -gt + 2\omega x \cos \varphi.$$

Wstawiając w (8) wartości $\dot{y}$ i $\dot{z}$, otrzymamy

$$\ddot{x} = -4\omega^2 x + 2\omega g t \cos \varphi.$$

Równanie powyższe możnaby było scałkować, a następnie, podstawiając w (9), moglibyśmy wyznaczyć y i z . Rozwiązanie przybliżone otrzymamy, opuszczając wyraz $-4\omega^2 x$, bardzo mały w porównaniu z $2\omega g t \cos \varphi$. Dostaniemy $\ddot{x} = 2\omega g t \cos \varphi$, skąd

$$(10) \quad x = \frac{1}{2} \omega g t^2 \cos \varphi.$$

Opuszczając w trzecim z równań (9) wyraz $2\omega x \cos \varphi$, jako mały w porównaniu z $-gt$, otrzymamy $\ddot{z} = -gt$, skąd $z = -\frac{1}{2} g t^2$. Gdy punkt spadnie do poziomu $z = -h$, będzie $-h = -\frac{1}{2} g t^2$, zatem $t = \sqrt{2h/g}$. Na mocy więc (10)

$$(11) \quad x = \frac{2}{3} \omega h \cos \varphi \sqrt{2h/g}.$$

Wzór powyższy przedstawia zboczenie na wschód (gdyż $x > 0$) ciała spadającego z wysokości h .

W Harvard (Stany Zjednoczone) wykonano doświadczenia, przyjmując $h = 23$ m i $\varphi = 42^\circ$. Z około tysiąca doświadczeń otrzymano zboczenie zawarte między 1,3 m a 1,7 m. Ze wzoru przybliżonego (11) wypada natomiast $x = 1,8$ cm. Różnica jest więc niewielka.

Wahadło Foucaulta. Zbadajmy wpływ siły Coriolisa na ruch wahadła. Umieśmy początek układu (x, y, z) w punkcie zawieszenia nici nierozciągliwej, na której końcu umocowany jest punkt ciężki o masie m . Niechaj l będzie długością wahadła (t. j. nici). Ponieważ reakcja $\vec{P}$ ze strony nici działa na punkt wzdłuż nici, więc, oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu m , otrzymamy:

$$P_x = \lambda m x, \quad P_y = \lambda m y, \quad P_z = \lambda m z,$$

gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności, zależnym od czasu.

Na mocy (III), str. 149, otrzymamy, dzieląc przez m :

$$(12) \quad \ddot{x} = \lambda x - 2\omega(\dot{y} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi), \quad \ddot{y} = \lambda y + 2\omega \dot{x} \sin \varphi,$$

$$(13) \quad \ddot{z} = \lambda z - g + 2\omega \dot{x} \cos \varphi.$$

Zajmiemy się tylko przybliżonym rozwiązaniem równań (12) i (13). Załóżmy, że kąt wychylenia jest dostatecznie mały, by można było przyjąć w przybliżeniu

$$(14) \quad z = -l, \quad \dot{z} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Z równania (13) otrzymamy zatem $0 = -\lambda l - g + 2\omega \dot{x} \cos \varphi$, skąd $\lambda = \frac{-g + 2\omega \dot{x} \cos \varphi}{l}$. Opuszczając w liczniku drugi wyraz jako mały w porównaniu z pierwszym, dostaniemy

$$(15) \quad \lambda = -g/l.$$

Współczynnik λ możemy więc uważać w przybliżeniu za stały. Równania (12) przyjmą na mocy (14) i (15) postać:

$$(16) \quad \ddot{x} = -\frac{g}{l}x - 2\omega \dot{y} \sin \varphi, \quad \ddot{y} = -\frac{g}{l}y + 2\omega \dot{x} \sin \varphi.$$

Mnożąc pierwsze z równań (16) przez $\dot{x}$, a drugie przez $\dot{y}$, i dodając, otrzymamy $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = -\frac{g}{l}(x\dot{x} + y\dot{y})$, skąd po scałkowaniu

$$(17) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = -\frac{g}{l}(x^2 + y^2) + a,$$

gdzie a jest pewną stałą. Mnożąc pierwsze z równań (16) przez y , a drugie przez x i odejmując, dostaniemy $y\ddot{x} - x\ddot{y} = -2\omega(y\dot{y} + x\dot{x}) \sin \varphi$, skąd po scałkowaniu

$$(18) \quad y\dot{x} - x\dot{y} = -\omega(x^2 + y^2) \sin \varphi + b.$$

gdzie b jest pewną stałą. Wprowadźmy współrzędne biegunowe:

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi.$$

Na mocy (17 i (18) otrzymamy:

$$(19) \quad \dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 = -\frac{g}{l}r^2 + a,$$

$$(20) \quad r^2 \dot{\psi} = r^2 \omega \sin \varphi - b.$$

Wprowadźmy nowy układ współrzędnych (x_1, y_1, z_1) , mający z układem poprzednim (x, y, z) wspólny początek oraz wspólną oś z i obracający się dookoła osi z z prędkością kątową $\omega \sin \varphi$ w kierunku od wschodu na południe, t. j. od x ku y . Dla współrzędnych biegunowych r_1, ψ_1 otrzymamy w nowym układzie wzory:

$$(21) \quad r = r_1, \quad \psi = \psi_1 + \omega t \sin \varphi.$$

Przez podstawienie (21) w (20) otrzymamy w nowych współrzędnych r_1, ψ_1 równanie $r_1^2(\dot{\psi}_1 + \omega \sin \varphi) = r_1^2 \omega \sin \varphi - b$, skąd

$$(22) \quad r_1^2 \dot{\psi}_1 = -b,$$

a przez podstawienie (21) w równanie (19) dostaniemy

$$\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\psi}_1^2 + 2r_1^2 \dot{\psi}_1 \omega \sin \varphi + r_1^2 \omega^2 \sin^2 \varphi = -\frac{g}{l}r_1^2 + a,$$

skąd opuszczając wyraz $r_1^2 \omega^2 \sin^2 \varphi$ jako bardzo mały i stosując równanie (22), otrzymamy

$$(23) \quad \dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\psi}_1^2 = -\frac{g}{l}r_1^2 + a_1,$$

gdzie $a_1 = a + 2b \omega \sin \varphi = \text{const}$

Łatwo sprawdzić, że (22) i (23) są równaniami ruchu, który we współrzędnych x_1, y_1, z_1 ma równania:

$$(24) \quad \ddot{x}_1 = -\frac{g}{l} x_1, \quad \ddot{y}_1 = -\frac{g}{l} y_1.$$

Istotnie, równania (16) przyjmują tę właśnie postać dla $\omega = 0$. A więc, wprowadzając współrzędne biegunowe, otrzymamy, jak widać z równań (19) i (20) dla $\omega = 0$, równania (22) i (23).

Równania (24) wyznaczają ruch punktu pod wpływem siły $\bar{P}$, której rzuty wynoszą:

$$(25) \quad P_{x_1} = -\frac{g}{l} m x_1, \quad P_{y_1} = -\frac{g}{l} m y_1.$$

Jest to siła sprężysta t. j. skierowana stale ku początkowi układu współrzędnych i wprost proporcjonalna do odległości punktu od początku układu. Na str. 114 wykazaliśmy, że ruch pod wpływem siły sprężystej odbywa się po elipsie. A więc punkt materialny będzie odbywał ruch w układzie (x_1, y_1, z_1) po elipsie. Że zaś ten układ obraca się około osi z z prędkością kątową $\omega \sin \varphi$, więc oś tej elipsy będzie obracała się z prędkością kątową $\omega \sin \varphi$ ze wschodu na południe. Czas obrotu wynosi

$$T = 2\pi / \omega \sin \varphi.$$

Ponieważ obrót ziemi trwa 24 godz, więc $2\pi / \omega = 24$ godz, skąd $T = 24 / \sin \varphi$ godz. Dla $\varphi = 45^\circ$ dostajemy $T = 34$ godz.

Zjawisko powyższe pierwszy stwierdził doświadczalnie L. Foucault. Stanowi ono dowód obrotu ziemi naokoło osi.

ROZDZIAŁ IV

GEOMETRIA MAS

I. Układy punktów

§ 1. Momenty statyczne. Moment statyczny punktu. Weźmy pod uwagę dowolną płaszczyznę Π . Dzieli ona przestrzeń na dwie części; jedną z tych części uważajmy za dodatnią, a drugą za ujemną. Niech A oznacza pewien punkt materialny, a d jego odległość od płaszczyzny Π . Będziemy pisali $\sigma = +d$ lub $\sigma = -d$, zależnie od tego, czy punkt A leży w dodatniej części przestrzeni czy w ujemnej.

Oznaczając masę punktu A przez m , wyrażenie

$$M_{\Pi} = m\sigma$$

nazywać będziemy *momentem statycznym* punktu materialnego A względem płaszczyzny Π .

Moment statyczny punktu może więc być liczbą dodatnią, ujemną lub zerem (jest on zerem dla każdego punktu A leżącego na płaszczyźnie Π).

Jeżeli za płaszczyznę Π obierzemy jedną z płaszczyzn rzutowych xy , yz , zx , to za część dodatnią przestrzeni uważać będziemy tę część, w której znajduje się część dodatnia osi prostopadłej do obranej płaszczyzny rzutowej. Gdy punkt A o masie m ma współrzędne x , y , z , mamy na mocy powyższej umowy:

$$M_{xy} = mz, \quad M_{yz} = mx, \quad M_{zx} = my,$$

gdzie M_{xy} , M_{yz} , M_{zx} oznaczają odpowiednio momenty statyczne punktu A względem płaszczyzn xy , yz i zx .

Moment statyczny układu punktów. Zbiór punktów materialnych nazywamy *układem punktów*, sumę zaś momentów statycznych poszczególnych jego punktów nazywamy *momentem statycznym (ogólnym) układu punktów*.

Jeżeli więc punkty materialne o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$, mają odpowiednio względem płaszczyzny Π momenty statyczne: $m_1\sigma_1, m_2\sigma_2, \dots, m_n\sigma_n$, to momentem statycznym ogólnym układu tych punktów będzie

$$M_{\Pi} = m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2 + \dots + m_n\sigma_n = \sum_{i=1}^n m_i\sigma_i,$$

Jeżeli punkty materialne danego układu punktów mają odpowiednio współrzędne $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$, to momenty statyczne ogólne tego układu punktów względem odpowiednich płaszczyzn rzutowych wyrażają się wzorami:

$$M_{xy} = m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_nz_n = \sum_{i=1}^n m_iz_i,$$

$$M_{yz} = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n = \sum_{i=1}^n m_ix_i,$$

$$M_{zx} = m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n = \sum_{i=1}^n m_iy_i.$$

Momenty statyczne nazywamy także *momentami stopnia pierwszego*.

§ 2. Środek masy. Niech będzie dany układ U punktów materialnych $m_1(x_1, y_1, z_1), m_2(x_2, y_2, z_2), \dots, m_n(x_n, y_n, z_n)$. Weźmy pod uwagę punkt S o współrzędnych:

$$(I) \quad \begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, & y_0 &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \\ z_0 &= \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \end{aligned}$$

Punkt S nazywamy *środkiem masy* lub *środkiem ciężkości* danego układu punktów U .

Sumę mas poszczególnych punktów (występującą w mianowniku ułamków (I)) nazywać będziemy *masą całkowitą* układu punktów.

Jakkolwiek określiliśmy środek masy przy pomocy układu współrzędnych, to jednak wykażemy, że położenie środka masy jest od układu współrzędnych nie zależne, lecz że zależy ono tylko od

mas punktów i ich wzajemnego rozmieszczenia. Wyniknie to łatwo z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Moment statyczny układu punktów względem dowolnej płaszczyzny równa się momentowi statycznemu masy całkowitej, umieszczonej w środku ciężkości.*

Dowód. Niechaj Π będzie dowolną płaszczyzną, której równanie normalne ma kształt

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Przyjmijmy za dodatnią tę z dwóch części przestrzeni, dla której $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p > 0$, gdy za x, y i z podstawimy współrzędne dowolnego punktu tej części. Jeżeli więc $A(x, y, z)$ jest dowolnym punktem przestrzeni, to ponieważ odległość punktu A od płaszczyzny Π wyraża się wzorem

$$d = |x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p|,$$

zatem możemy w myśl naszej umowy położyć:

$$\sigma = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p.$$

Moment statyczny punktu A o masie m względem płaszczyzny Π wynosi więc

$$(1) \quad M_{\Pi} = m\sigma = mx \cos \alpha + my \cos \beta + mz \cos \gamma - mp.$$

Niech dany będzie układ punktów materialnych $m_1(x_1, y_1, z_1), m_2(x_2, y_2, z_2), \dots, m_n(x_n, y_n, z_n)$. Moment statyczny tego układu punktów względem płaszczyzny Π będzie na mocy (1)

$$M_{\Pi} = (m_1 x_1 \cos \alpha + m_1 y_1 \cos \beta + m_1 z_1 \cos \gamma - m_1 p) + \dots \\ \dots + (m_n x_n \cos \alpha + m_n y_n \cos \beta + m_n z_n \cos \gamma - m_n p)$$

czyli

$$(2) \quad M_{\Pi} = (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n) \cos \alpha + (m_1 y_1 + \dots + m_n y_n) \cos \beta + \\ + (m_1 z_1 + \dots + m_n z_n) \cos \gamma - (m_1 + \dots + m_n) p.$$

Kładąc $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$, mamy na mocy (I):

$$(II) \quad mx_0 = \sum m_i x_i, \quad my_0 = \sum m_i y_i, \quad mz_0 = \sum m_i z_i \quad i=1, 2, \dots, n,$$

skąd na mocy (2)

$$(3) \quad M_{\Pi} = mx_0 \cos \alpha + my_0 \cos \beta + mz_0 \cos \gamma - mp.$$

Ponieważ prawa strona równości (3) przedstawia na mocy (1) moment statyczny masy m , umieszczonej w środku ciężkości S o współrzędnych x_0, y_0, z_0 , więc twierdzenie zostało udowodnione.

Aby wykazać teraz, że środek masy układu punktów nie zależy od wyboru układu współrzędnych, przypuśćmy, że własność środka ciężkości S , wypowiedzianą w twierdzeniu, posiada, prócz punktu S , jeszcze jakiś inny punkt S' . Udowodnimy, że to jest nie możliwe.

Poprowadźmy w tym celu przez punkt S dowolną płaszczyznę Π , nie przechodzącą przez S' . Zatem

$$(4) \quad M_{\Pi} = m\sigma \quad \text{ i } \quad M_{\Pi} = m\sigma',$$

gdzie σ i σ' oznaczają odpowiednio odległości (ze znakami) punktów S i S' od płaszczyzny Π . Z (4) wynika, że $\sigma = \sigma'$. Lecz $\sigma = 0$, ponieważ Π przechodzi przez S . Zatem musiałoby być również $\sigma' = 0$, co jednak nie możliwe, gdyż S' nie leży w płaszczyźnie Π .

Widzimy więc, że *położenie środka masy układu punktów nie zależy od układu współrzędnych.*

Środek masy dwóch układów punktów. Niech układ U złożony będzie z punktów materialnych

$$m'_1(x'_1, y'_1, z'_1), \quad m'_2(x'_2, y'_2, z'_2), \quad \dots, \quad m''_1(x''_1, y''_1, z''_1), \quad m''_2(x''_2, y''_2, z''_2), \quad \dots$$

Środek S' masy układu punktów $m'_1, m'_2, \dots$ ma na mocy określenia współrzędne:

$$(5) \quad \begin{aligned} x'_0 &= (m'_1 x'_1 + m'_2 x'_2 + \dots) / m', & y'_0 &= (m'_1 y'_1 + m'_2 y'_2 + \dots) / m', \\ z'_0 &= (m'_1 z'_1 + m'_2 z'_2 + \dots) / m', \end{aligned}$$

gdzie $m' = m'_1 + m'_2 + \dots$. Dla środka S masy całego układu U będzie zaś

$$x_0 = \frac{(m'_1 x'_1 + m'_2 x'_2 + \dots) + (m''_1 x''_1 + m''_2 x''_2 + \dots)}{(m'_1 + m'_2 + \dots) + (m''_1 + m''_2 + \dots)},$$

skąd na mocy (5)

$$(6) \quad x_0 = \frac{m' x'_0 + (m''_1 x''_1 + m''_2 x''_2 + \dots)}{m' + (m''_1 + m''_2 + \dots)}.$$

Podobne wzory otrzymamy na y_0 i z_0 . Wzór (6) przedstawia odciętą środka masy układu, jaki otrzymamy z układu danego U , jeżeli część jego, mianowicie punkty o masach $m'_1, m'_2, \dots$ zastąpimy jednym punktem materialnym o masie $m' = m'_1 + m'_2 + \dots$, umieszczonym w środku masy tej części. Otrzymaliśmy zatem

Twierdzenie 2. *Środek masy układu punktów nie zmieni się, jeżeli jego część zastąpimy punktem materialnym o masie równej masie tej części i umieszczonym w środku jej masy.*

Jeżeli więc w szczególności mamy dwa układy punktów U' i U'' o masach całkowitych m' i m'' i o środkach ciężkości S' i S'' , to środek masy układu $U' + U''$ otrzymamy, wyznaczając środek masy układu dwu punktów materialnych o masach m' i m'' , umieszczonych odpowiednio w punktach S' i S'' . Układy U' i U'' możemy bowiem uważać za części układu $U' + U''$.

Układ płaski punktów. Układ punktów materialnych nazywamy *płaskim*, jeżeli wszystkie jego punkty leżą w jednej płaszczyźnie. Obierając tę płaszczyznę za płaszczyznę xy (co wolno nam uczynić, ponieważ środek masy nie zależy od wyboru układu współrzędnych), będziemy mieli dla punktów układu: $z_1 = 0, z_2 = 0, \dots, z_n = 0$, skąd na mocy wzorów (I), str. 154, dostaniemy $z_0 = 0$.

Środek ciężkości układu płaskiego leży zatem w płaszczyźnie układu.

Momentem statycznym układu płaskiego względem dowolnej prostej l leżącej w płaszczyźnie układu nazywamy wyrażenie

$$(7) \quad M_l = \sum_{i=1}^n m_i \sigma_i,$$

gdzie $|\sigma_i|$ jest odległością punktu o masie m_i od prostej l , zaś znak przy σ_i zależy od tego, czy m_i znajduje się w dodatniej czy ujemnej części płaszczyzny, na które dzieli płaszczyznę prosta l . Widzimy stąd, że moment statyczny układu płaskiego względem prostej l jest to moment statyczny tego układu względem płaszczyzny prostopadłej do płaszczyzny układu i przecinającej ją wzdłuż prostej l . W szczególności więc momenty względem osi x i y wyrażają się wzorami:

$$(8) \quad M_x = \sum m_i y_i, \quad M_y = \sum m_i x_i.$$

Układ liniowy punktów. Jeżeli punkty układu leżą na jednej prostej l , to środek masy układu leży również na tej prostej. Obierając bowiem prostą l za oś x -ów, mamy $y_1 = 0, y_2 = 0, \dots$ i $z_1 = 0, z_2 = 0, \dots$, skąd na mocy wzorów (I), str. 154, dostaniemy $y_0 = 0, z_0 = 0$. Środek masy będzie więc także leżał na osi x .

Środek masy dwóch punktów. Niech punkty materialne o masach m_1 i m_2 będą od siebie w odległości d . Środek masy leży oczywiście na prostej łączącej te punkty. Umieścimy w m_1 początek osi x -ów, zaś dodatnią jej część przeprowadźmy przez m_2 . Punkty m_1 i m_2 będą więc miały współrzędne odpowiednio $x_1 = 0$ i $x_2 = d$, a środek masy współrzędną

$$(9) \quad x_0 = m_2 d / (m_1 + m_2).$$

Ponieważ $0 < x_0 < d$, więc środek masy leży między punktami. Oznaczając przez d_1 i d_2 odległości środka masy od punktów m_1 i m_2 , otrzymujemy $d_1 = x_0 = m_2 d / (m_1 + m_2)$ i $d_2 = d - d_1 = m_1 d / (m_1 + m_2)$, skąd

$$(10) \quad d_1 / d_2 = m_2 / m_1.$$

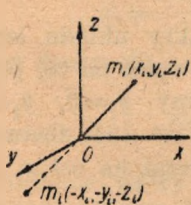
Mamy więc następujące

Twierdzenie 3. Środek masy układu dwupunktowego leży między punktami układu i dzieli odcinek, łączący te punkty, w stosunku odwrotnym do ich mas.

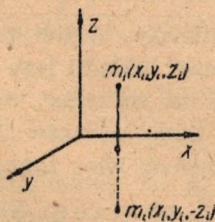
Opierając się na twierdzeniu 2, str. 156, możemy w następujący sposób wyznaczyć środek masy skończonego układu punktów, $A_1, A_2, A_3, \dots$ o masach $m_1, m_2, \dots$ (rys. 1): wyznaczamy najpierw środek masy S_1 układu punktów A_1 i A_2 ; wyznaczamy następnie środek masy S_2 układu dwu punktów, złożonego z punktu o masie $m_1 + m_2$, umieszczonego w S_1 , i z punktu A_3 o masie m_3 ; postępując tak dalej, otrzymamy środek masy całego danego układu.

Układy punktów symetryczne. Punkt O (prostą l , płaszczyznę Π) nazywamy *środkiem (prostą, płaszczyzną) symetrii układu punktów materialnych*, jeżeli do każdego punktu m_i istnieje w układzie punkt o tej samej masie m_i , symetrycznie względem O (prostej l , płaszczyzny Π) położony.

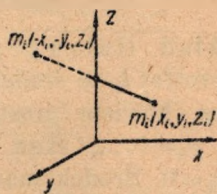
Jeżeli środkiem symetrii jest początek układu współrzędnych (rys. 2), to wraz z każdym punktem $m_i(x_i, y_i, z_i)$ układ punktów za-



2.



3.



4.

wiera punkt $m_i(-x_i, -y_i, -z_i)$. Jeżeli płaszczyzną symetrii jest płaszczyzna xy (rys. 3), to wraz z każdym punktem $m_i(x_i, y_i, z_i)$ układ zawiera punkt $m_i(x_i, y_i, -z_i)$. Jeżeli osią symetrii jest oś z (rys. 4), to wraz z każdym punktem $m_i(x_i, y_i, z_i)$ układ zawiera punkt $m_i(-x_i, -y_i, z_i)$.

Łatwo okazać, że zawsze *środek symetrii jest środkiem masy*.

Środek masy pary punktów symetrycznych leży bowiem na mocy twierdzenia 3, str. 158, w środku symetrii. Na mocy twierdzenia 2, str. 156, możemy więc taką parę zastąpić przez punkt materialny umieszczony w środku symetrii. Robiąc to z każdą parą, przekonywamy się, że *środek symetrii jest środkiem masy całkowitej układu*.

Podobnie, *środek masy leży na prostej symetrii (i na płaszczyźnie symetrii)*.

Z tych samych bowiem powodów *środek pary punktów symetrycznych leży na prostej (i na płaszczyźnie) symetrii*.

§. 3 Momenty stopnia drugiego. Moment bezwładności.

Niech będzie dany punkt materialny A o masie m i pewna płaszczyzna Π . Oznaczmy przez r odległość punktu A od płaszczyzny Π . Wyrażenie

$$(1) \quad I = mr^2$$

nazywamy *momentem bezwładności punktu A względem płaszczyzny Π* . Jeżeli przez r oznaczymy odległość punktu materialnego A od pewnej prostej l (lub od pewnego punktu O), to (1) będzie *momentem bezwładności punktu A względem prostej l (lub względem punktu O)*.

Momentem bezwładności ogólnym układu punktów nazywamy sumę momentów bezwładności poszczególnych punktów tego układu.

Moment zboczenia (dewiacji). Niech dane będą dwie płaszczyzny Π_1 i Π_2 , prostopadłe do siebie. Połóżmy $\sigma_1 = \pm d_1$, gdzie d_1 oznacza odległość punktu materialnego A od Π_1 , przyczem znak zależy od tego, czy punkt znajduje się w dodatniej czy ujemnej z dwu części, na jakie dzieli przestrzeń płaszczyzna Π_1 . Podobnie określamy σ_2 względem płaszczyzny Π_2 . Wyrażenie

$$(2) \quad D = m\sigma_1\sigma_2$$

nazywamy *momentem zboczenia (lub dewiacji) punktu materialnego A względem płaszczyzn Π_1 i Π_2* .

Momentem zboczenia ogólnym układu punktów $A_1, A_2, \dots$ względem płaszczyzn Π_1 i Π_2 nazywamy sumę momentów zboczenia poszczególnych punktów. A więc

$$(3) \quad D = \sum m_i \sigma_1^{(i)} \sigma_2^{(i)},$$

gdzie m_i , $\sigma_1^{(i)}$, $\sigma_2^{(i)}$ oznaczają odpowiednio masę punktu A_i i jego odległości od płaszczyzn Π_1 i Π_2 (opatrzone właściwymi znakami).

Momenty bezwładności i momenty zboczenia nazywamy *momentami stopnia drugiego*.

Ramię bezwładności. Niech I oznacza ogólny moment bezwładności układu punktów U względem pewnej płaszczyzny Π (prostej l , punktu O). Liczbę

$$(4) \quad k = \sqrt{I/m}, \quad \text{gdzie} \quad m = m_1 + m_2 + \dots$$

nazywamy *ramieniem bezwładności* układu punktów U względem płaszczyzny Π (prostej l , punktu O). Na mocy (4) jest

$$(5) \quad I = mk^2.$$

A więc: *ramię bezwładności k jest odległością, w jakiej umieszczona masa całkowita układu ma moment bezwładności równy ogólnemu momentowi bezwładności układu.*

Masa zredukowana. Niech r będzie dowolną liczbą dodatnią. Masę układu zredukowaną na odległość r względem danej płaszczyzny (prostej lub punktu) nazywamy liczbę

$$(6) \quad m_r = I/r^2.$$

Zatem $I = m_r r^2$. A więc: *moment bezwładności układu względem płaszczyzny (prostej, punktu) równa się momentowi bezwładności jego masy zredukowanej m_r , umieszczonej w odległości r od tej płaszczyzny (prostej, punktu).*

Momenty stopnia drugiego układu punktów:

$$m_1(x_1, y_1, z_1), \quad m_2(x_2, y_2, z_2), \quad \dots, \quad m_n(x_n, y_n, z_n)$$

względem płaszczyzny, osi i początku układu współrzędnych wyrażają się następującymi wzorami:

Momenty bezwładności względem płaszczyzn xy , yz i xz :

$$(7) \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2, \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \quad I_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2.$$

Momenty bezwładności względem osi x , y i z :

$$(8) \quad I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Momenty bezwładności względem początku O układu współrzędnych:

$$(9) \quad I_O = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Momenty zboczenia względem par płaszczyzn xy i xz , xy i yz oraz xz i zy :

$$(10) \quad D_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \quad D_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i, \quad D_z = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i.$$

Ze wzorów (7)–(10) wynikają łatwo związki:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{xy} + I_{xz}, & I_y &= I_{xy} + I_{yz}, & I_z &= I_{xz} + I_{yz}; \\ I_{xy} &= \frac{1}{2}[I_x + I_y - I_z], & I_{yz} &= \frac{1}{2}[I_y + I_z - I_x], & I_{xz} &= \frac{1}{2}[I_x + I_z - I_y]; \\ I_O &= \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz}, & I_O &= I_x + I_{yz} = I_y + I_{xz} = I_z + I_{xy}. \end{aligned}$$

Momenty bezwładności względem prostych równoległych. Znając momenty bezwładności układu punktów o masie całkowitej m względem prostych przechodzących przez jeden punkt np. przez początek układu współrzędnych, możemy łatwo wyznaczyć moment bezwładności tegoż układu punktów względem dowolnej prostej w przestrzeni, opierając się na następującym twierdzeniu:

Jeżeli prosta l przechodząca przez środek masy układu punktów jest równoległa do prostej l' , to

$$(I) \quad I_r = I_l + md^2,$$

gdzie d oznacza odległość między l a l' , zaś I_l i I_r momenty bezwładności względem tych prostych..

Dowód. Środek S masy układu punktów, przez który przechodzi prosta l , obierzmy za początek układu współrzędnych, prostą l za oś x -ów, a płaszczyznę przesuniętą przez proste równoległe l i l' za płaszczyznę xy . Oznaczając odpowiednio przez r i r' odległość dowolnego punktu $A(x, y, z)$ od prostych l i l' , mamy $r'^2 = z^2 + (d - y)^2$ i $r^2 = z^2 + y^2$,

skąd $r'^2 = r^2 + d^2 - 2dy$, a więc

$$\begin{aligned} I_r &= \sum_{i=1}^n m_i r_i'^2 = \sum_{i=1}^n m_i [r_i^2 + d^2 - 2dy_i] = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 + d^2 \sum_{i=1}^n m_i - 2d \sum_{i=1}^n m_i y_i = \\ &= I_l + md^2 - 2d \sum_{i=1}^n m_i y_i. \end{aligned}$$

Lecz $\sum_{i=1}^n m_i y_i = m y_0 = 0$, gdyż środek S masy układu punktów leży w początku układu współrzędnych. Zatem $I_l = I_l + m d^2$, c. b. d. d.

Z wzoru (I) wynika, że jeżeli wziąć pod uwagę wszystkie proste równoległe do prostej o pewnym danym kierunku, to moment bezwładności będzie najmniejszy względem tej prostej, która przechodzi przez środek masy. Oczywiście jest również, że jeżeli proste l i l'' są równoległe, to oznaczając przez d_1 i d_2 odległości środka masy od tych prostych, będziemy mieli

$$(10) \quad I_l - m d_1^2 = I_{l'} - m d_2^2,$$

ponieważ na mocy (I) obie strony równości wynoszą I_l , gdzie l jest prostą równoległą do l' i l'' , przechodzącą przez środek masy.

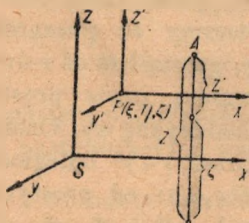
Ze wzoru (10) mamy

$$(II) \quad I_{l'} = I_l + m (d_2^2 - d_1^2).$$

Wzór powyższy pozwala obliczyć moment bezwładności układu punktów względem dowolnej prostej w przestrzeni, gdy znane są momenty bezwładności tego układu względem wszystkich prostych przechodzących przez jeden punkt i położenie środka masy układu.

Momenty zboczenia względem płaszczyzn równoległych. Dla momentów zboczenia można udowodnić twierdzenie podobne do twierdzenia o momentach bezwładności (str. 161).

Niechaj płaszczyzny Π_1 , Π_2 będą do siebie prostopadłe i przechodzą przez środek masy m danego układu punktów ma-



terialnych. Obierzmy dowolnie płaszczyzny Π'_1 , Π'_2 równoległe odpowiednio do płaszczyzn Π_1 , Π_2 . Niech σ_1 oznacza odległość między płaszczyznami Π_1 , Π'_1 , zaopatrzoną znakiem $+$ lub $-$ zależnie od tego, czy płaszczyzna Π'_1 leży w dodatniej czy ujemnej części przestrzeni, na jakie dzieli przestrzeń płaszczyzna Π_1 . Analogicznie okreśmy σ_2 dla

pary płaszczyzn Π_2 , Π'_2 . Wreszcie oznaczmy przez D i D' momenty zboczenia danego układu względem par płaszczyzn Π_1 , Π_2 i Π'_1 , Π'_2 . Mamy wówczas analogicznie do (I) wzór

$$(III) \quad D' = D + m \sigma_1 \sigma_2.$$

Uwaga. Zauważmy, że iloczyn $m\sigma_1\sigma_2$ oznacza moment zboczenia względem pary płaszczyzn Π_1, Π_2 masy całkowitej m układu, umieszczonej gdziekolwiek bądź na prostej przecięcia pary płaszczyzn Π'_1 i Π_2 .

Dowód wzoru (III). Obierzmy początek układu współrzędnych (x, y, z) w środku S masy całkowitej m danego układu punktów. Za oś x -ów weźmiemy prostą przecięcia płaszczyzn Π_1 i Π_2 , zaś płaszczyzny te obieramy odpowiednio za płaszczyzny xy i yz .

Analogicznie obieramy drugi układ współrzędnych (x', y', z') dla pary płaszczyzn Π'_1, Π'_2 , przyjmując za początek dowolny punkt P leżący na prostej przecięcia płaszczyzn Π'_1 i Π'_2 .

Oznaczmy współrzędne punktu P względem układu współrzędnych (x, y, z) przez ξ, η, ζ . Oczywiście $\eta = \sigma_2$ i $\zeta = \sigma_1$. Niech x, y, z będą współrzędnymi dowolnego punktu A względem układu współrzędnych (x, y, z) , zaś x', y', z' współrzędnymi tegoż punktu A względem układu współrzędnych (x', y', z') . Wówczas:

$$(11) \quad x' = x - \xi, \quad y' = y - \eta, \quad z' = z - \zeta.$$

Ponieważ

$$(12) \quad D' = \sum m_i z'_i y'_i, \quad D = \sum m_i z_i y_i,$$

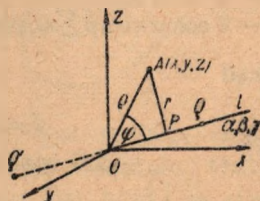
więc na mocy (11)

$$(13) \quad \begin{aligned} D' &= \sum m_i (z_i - \zeta) (y_i - \eta) = \sum m_i [z_i y_i + \zeta \eta - \zeta y_i - \eta z_i] = \\ &= \sum m_i z_i y_i + \zeta \eta \sum m_i - \zeta \sum m_i y_i - \eta \sum m_i z_i. \end{aligned}$$

Lecz $\sum m_i y_i = m y_0 = 0$ i $\sum m_i z_i = m z_0 = 0$, gdyż środek S masy m danego układu punktów leży z założenia w początku układu (x, y, z) . Na mocy (12) i (13) jest więc $D' = D + m \zeta \eta$, a ponieważ $\zeta = \sigma_1$ i $\eta = \sigma_2$, więc otrzymujemy w końcu $D' = D + m \sigma_1 \sigma_2$, c. b. d. d.

§ 4. Elipsoida bezwładności. Osie bezwładności. Niech $O(x, y, z)$ będzie dowolnym układem współrzędnych prostokątnych o początku O . Udowodnimy, że znając momenty bezwładności względem osi i momenty zboczenia względem płaszczyzn tego układu współrzędnych, można wyznaczyć momenty bezwładności względem dowolnej prostej l , przechodzącej przez O .

Niechaj prosta l tworzy z osiami układu współrzędnych $O(x, y, z)$ kąty α, β, γ . Obierzmy dowolny punkt $A(x, y, z)$ i niechaj P będzie rzutem punktu A na



prostą l . Zatem $AP=r$ jest odległością punktu A od prostej l . Położmy

$$(1) \quad OA = \varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Oznaczając przez φ kąt między prostą OA a prostą l , otrzymamy

$$(2) \quad AP = r = \varrho \sin \varphi.$$

Ponieważ, jak wiadomo z geometrii analitycznej,

$$OP = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma,$$

więc z uwagi na to, że $OP = \varrho \cos \varphi$, otrzymamy

$$\cos \varphi = \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\varrho}$$

Na mocy (2) jest $r^2 = \varrho^2 \sin^2 \varphi = \varrho^2(1 - \cos^2 \varphi)$, więc

$$r^2 = \varrho^2 \left[1 - \frac{(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2}{\varrho^2} \right] = \varrho^2 - [x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma]^2,$$

skąd na mocy (1) jest $r^2 = x^2[1 - \cos^2 \alpha] + y^2[1 - \cos^2 \beta] + z^2[1 - \cos^2 \gamma] -$
 $- 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma.$

Ponieważ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, więc podstawiając $1 - \cos^2 \alpha =$
 $= \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ i t. d., dostaniemy:

$$r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma -$$

$$- 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma.$$

Oznaczając przez m_i masę, a przez r_i odległość punktu A_i danego układu punktów $A_1, A_2, \dots$ od prostej l , otrzymamy na moment bezwładności I_l tego układu punktów względem prostej l wzór

$$I_l = \sum m_i r_i^2 = \cos^2 \alpha \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \beta \sum m_i (x_i^2 + z_i^2) + \cos^2 \gamma \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) -$$

$$- 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m_i x_i y_i - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum m_i x_i z_i - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m_i y_i z_i,$$

skąd

$$(I) \quad I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma -$$

$$- 2D_x \cos \alpha \cos \beta - 2D_y \cos \alpha \cos \gamma - 2D_z \cos \beta \cos \gamma.$$

Ze wzoru (I) możemy wyznaczyć moment bezwładności układu punktów materialnych względem prostej l , znając $I_x, I_y, I_z, D_x, D_y, D_z$ oraz kąty, jakie prosta l tworzy z osiami układu współrzędnych.

Zachowując znakowanie poprzednie, oznaczmy przez k_l długość ramienia bezwładności danego układu punktów względem prostej l . Zatem (str. 160)

$$(3) \quad k_l = \sqrt{I_l/m}.$$

Założmy, że dla każdej prostej l przechodzącej przez O jest $I_l \neq 0$. Założenie to równoważne jest założeniu, że punkty materialne danego układu nie leżą na jednej i tej samej prostej przechodzącej przez O . Ponieważ $I_l \neq 0$, więc na mocy (3) jest również $k_l \neq 0$.

Odetnijmy na każdej prostej l odcinki OQ i OQ' o długości odwrotnie proporcjonalnej do ramienia bezwładności k_l , t. zn.

$$(4) \quad OQ = OQ' = a/k_l = a/\sqrt{m/I_l},$$

gdzie a jest dowolną stałą dodatnią, nie zależną od prostej l . Oznaczając przez x, y, z współrzędne punktu Q , mamy:

$$(5) \quad x = \pm a \sqrt{\frac{m}{I_l}} \cos \alpha, \quad y = \pm a \sqrt{\frac{m}{I_l}} \cos \beta, \quad z = \pm a \sqrt{\frac{I_l}{m}} \cos \gamma.$$

Punkt Q' ma współrzędne $-x, -y, -z$. Zbiór wszystkich punktów Q i Q' utworzy pewną powierzchnię Σ . Aby otrzymać jej równanie, wyznaczmy z (5) $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ i wstawmy otrzymane wartości do równania (I). Dostaniemy:

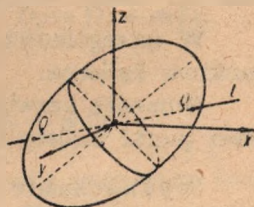
$$I_l = \frac{I_l}{ma^2} [I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2D_x yz - 2D_y xz - 2D_z xy],$$

skąd

$$(6) \quad I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2D_x yz - 2D_y xz - 2D_z xy = c^2,$$

gdzie $c^2 = ma^2$. Widzimy stąd, że powierzchnia Σ jest powierzchnią rzędu drugiego. Wykażemy, że Σ jest elipsoidą. Wystarczy w tym celu udowodnić, że Σ jest powierzchnią ograniczoną (t. zn. że odległości jej punktów od początku układu współrzędnych nie przekraczają pewnej liczby). W rzeczy samej, założyliśmy, że $I_l \neq 0$, a więc mamy

stałe $I_l > 0$. Ponieważ na mocy wzoru (I) I_l jest funkcją ciągłą kątów α, β, γ , więc minimum I_l jest również dodatnie. Oznaczając to minimum przez h , mamy na mocy (3) $k_l \geq \sqrt{h/m}$, skąd na mocy (4) $OQ' = OQ \leq a\sqrt{m/h}$. A zatem powierzchnia Σ jest powierzchnią ograniczoną. Wynika stąd, że powierzchnia Σ jest



elipsoidą, gdyż jedyną powierzchnią ograniczoną drugiego rzędu jest elipsoida.

Otrzymaną elipsoidę Σ nazywamy *elipsoidą bezwładności* danego układu punktów względem punktu O .

Ponieważ w równaniu (6) brak jest wyrazów pierwszego stopnia, t. j. y, x, z , więc punkt O jest środkiem elipsoidy bezwładności.

Zatem: *elipsoida bezwładności układu punktów materialnych względem punktu O ma tę własność, że odległość od O każdego jej punktu jest odwrotnie proporcjonalna do ramienia bezwładności układu względem średnicy, przechodzącej przez ten punkt.*

Osie elipsoidy bezwładności względem punktu O nazywamy *osiami bezwładności* względem punktu O .

Elipsoidę bezwładności względem środka ciężkości nazywamy elipsoidą bezwładności *środkową*, osie jej osiami bezwładności *środkowymi* a płaszczyzny przeprowadzone przez dwie osie *płaszczyznami środkowymi*.

Istnieje oczywiście nieskończenie wiele elipsoid bezwładności danego układu względem jednego i tego samego punktu O . Zależą one od wyboru współczynnika proporcjonalności. Wszystkie te elipsoidy mają jednak wspólny środek i wspólne kierunki osi głównych. Ponadto stosunek osi głównych jest we wszystkich elipsoidach jednakowy. Wszystkie elipsoidy bezwładności względem jednego i tego samego punktu O są więc do siebie podobne.

Ramię bezwładności ma największą wartość względem osi malej; zatem moment bezwładności ma najmniejszą wartość względem osi malej. Względem wielkiej osi jest na odwrót.

W szczególności, gdy elipsoida jest kulą, punkt O nazywamy punktem *kulistym*.

Momenty bezwładności względem każdej prostej przechodzącej przez punkt kulisty są równe (i na odwrót).

Wyznaczanie osi bezwładności. Jeżeli za osie spólrzędnych x, y, z przyjąć osie bezwładności, to równanie elipsoidy bezwładności będzie miało kształt

$$(7) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = F.$$

Porównując równania (6) i (7), widzimy, że w tym przypadku $D_x=0$, $D_y=0$ i $D_z=0$; równanie elipsoidy bezwładności będzie zatem

$$(8) \quad I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = c^2.$$

A więc: *warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by osie układu współrzędnych były osiami bezwładności, jest by momenty zboczenia D_x, D_y, D_z były równe zeru.*

Jeżeli osie spółrzędnych x, y, z obierzemy tak, by tylko jedna z nich, np. oś z , pokrywała się z jedną z osi bezwładności, to równanie elipsoidy bezwładności przyjmie kształt

$$(9) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Exy = F.$$

Porównując równania (6) i (9), widzimy, że $D_x=0$ i $D_y=0$. Równanie elipsoidy bezwładności będzie więc w tym przypadku

$$(10) \quad I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2D_z xy = c^2.$$

A więc: *warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by oś z była osią bezwładności, jest by momenty zboczenia D_x i D_y były równe zeru.*

Łatwo sformułować analogiczne warunki na to, by osiami bezwzględności były oś x , lub oś y .

Przyjmijmy teraz za początek układu współrzędnych (x, y, z) środek S masy całkowitej m danego układu punktów materialnych, zaś jego osie środkowe za osie współrzędnych x, y, z . Mamy oczywiście:

$$(11) \quad D_x = 0, \quad D_y = 0, \quad D_z = 0.$$

Przyjmijmy następnie dowolny punkt $O(\xi, \eta, \zeta)$ za początek nowego układu współrzędnych (x', y', z') o osiach odpowiednio równoległych do osi x, y i z . Na mocy (III), str. 162, będzie:

$$D_{x'} = D_x + m\zeta\eta, \quad D_{y'} = D_y + m\xi\zeta, \quad D_{z'} = D_z + m\xi\eta,$$

skąd na mocy (11):

$$(12) \quad D_{x'} = m\zeta\eta, \quad D_{y'} = m\xi\zeta, \quad D_{z'} = m\xi\eta.$$

Założmy, że punkt $O(\xi, \eta, \zeta)$ leży na jednej z płaszczyzn środkowych, np. na płaszczyźnie xy . Zatem $\zeta=0$. Na mocy więc (12) otrzymamy $D_{x'}=0$ i $D_{y'}=0$. Wynika stąd, że oś z' jest osią bezwładności względem punktu O . Mamy więc twierdzenie:

Jedna z osi bezwładności względem punktu położonego w płaszczyźnie środkowej jest prostopadła do tej płaszczyzny.

W szczególności, gdy punkt O leży na osi środkowej, np. na osi x , mamy $\eta=0$ i $\zeta=0$, skąd na mocy (12) $D_x=0$, $D_{y'}=0$ i $D_z=0$. Wynika stąd, że osie x' , y' , z' są osiami bezwładności względem punktu O . Otrzymujemy więc wnioski:

1° *Osie bezwładności względem punktu położonego na osi środkowej są równoległe do osi środkowych.*

2° *oś środkowa jest osią bezwładności względem każdego jej punktu.*

Jeżeli dany układ punktów materialnych posiada oś lub płaszczyznę symetrii, wówczas można dowieść następującego twierdzenia:

Oś symetrii układu punktów materialnych jest osią środkową; podobnie płaszczyzna symetrii jest płaszczyzną środkową.

Dowód. Aby dowieść pierwszej części twierdzenia, zauważmy, że na osi symetrii leży środek S masy m układu. Weźmy S za początek układu współrzędnych (x, y, z) , a oś symetrii za oś z . Wobec tego dany układ punktów materialnych zawiera do każdego punktu A_i o masie m_i i współrzędnych x_i, y_i, z_i drugi punkt A'_i o masie równej m_i i o współrzędnych $-x_i, -y_i, z_i$. Mamy więc:

$$D_x = \sum [m_i y_i z_i + m_i (-y_i) z_i] = 0, \quad D_y = \sum [m_i x_i z_i + m_i (-x_i) z_i] = 0.$$

Wynika stąd, że oś symetrii z jest zarazem osią bezwładności względem środka masy S , a zatem jest osią środkową.

Aby dowieść drugiej części twierdzenia, zauważmy, że na płaszczyźnie symetrii leży środek masy S . Przyjmijmy S za początek układu współrzędnych, zaś osie x i y obierzmy w płaszczyźnie symetrii. Ponieważ płaszczyzna xy jest płaszczyzną symetrii, więc do każdego punktu A_i o masie m_i i współrzędnych x_i, y_i, z_i istnieje w naszym układzie punktów materialnych punkt A'_i o masie równej m_i i o współrzędnych $x_i, y_i, -z_i$. Mamy więc:

$$D_x = \sum [m_i y_i z_i + m_i y_i (-z_i)] = 0, \quad D_y = \sum [m_i x_i z_i + m_i x_i (-z_i)] = 0.$$

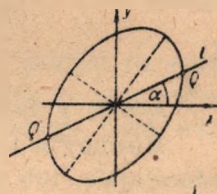
Wynika stąd, że oś z jest osią środkową, a więc płaszczyzna symetrii xy , jako prostopadła do osi środkowej z , jest płaszczyzną środkową.

§ 5. Momenty kwadratowe układu płaskiego. Niech dany będzie układ punktów materialnych leżących w płaszczyźnie Π . Jako płaszczyzną symetrii jest więc płaszczyzna Π na mocy twierdzenia poprzedniego płaszczyzną środkową. W każdym punkcie płaszczyzny Π jedna z osi bezwładności jest tedy prostopadła do płaszczyzny Π , podczas gdy dwie pozostałe osie bezwładności leżą w płaszczyźnie Π .

Jeżeli wziąć pod uwagę tylko momenty bezwładności względem prostych leżących w płaszczyźnie Π , to rozważania §§ 3 i 4 można uprościć.

Obierzmy dany punkt O za początek układu współrzędnych (x, y) płaszczyzny Π . Wykreślmy z punktu O dowolną prostą l leżącą w tej płaszczyźnie i tworzącą kąt α z osią x -ów. Moment bezwładności względem l otrzymamy ze wzoru (I), str. 164, kładąc $\beta = 90^\circ - \alpha$ i $\gamma = 90^\circ$. Zatem

$$(I) \quad I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - D_z \sin 2\alpha.$$



Moment zboczenia $D_{xy} = \sum m_i x_i y_i$ nazywać będziemy *momentem zboczenia względem osi x i y* .

Zaznaczmy na prostej l punkty Q i Q' , których odległości od O są odwrotnie proporcjonalne do ramienia bezwładności. Zbiór takich par punktów zaznaczonych na wszystkich prostych l , jakie przechodzą przez O , utworzy krzywą, która będzie przekrojem płaszczyzny Π z elipsoidą bezwładności względem punktu O . Krzywa ta będzie zatem elipsą; nazywamy ją *elipsą bezwładności względem O* .

Równanie jej otrzymamy z równania (6), str. 165, kładąc $z=0$. A więc równaniem elipsy bezwładności będzie

$$(2) \quad I_x x^2 + I_y y^2 - 2D_z xy = c^2.$$

Jeżeli za osie x, y obierzemy osie bezwładności, to równanie elipsy bezwładności przyjmie postać

$$(3) \quad I_x x^2 + I_y y^2 = c^2.$$

II. Bryły, powierzchnie i linie materialne.

§ 6. Gęstość. Gdy ciało nie jest tak małe, byśmy je mogli uważać za punkt materialny, to oprócz masy ciała podajemy także rozmieszczenie masy w ciele. W wielu bowiem zagadnieniach mechaniki duże znaczenie ma nie tylko znajomość masy całego ciała, lecz także znajomość masy jego poszczególnych części.

Często się zdarza, że masa części ciała jest proporcjonalna do objętości. Oznaczając wówczas przez m masę, a przez v objętość ciała, otrzymamy, że masa przypadająca na jednostkę objętości, wynosi

$$(I) \quad \varrho = m/v.$$

Liczbę ϱ nazywamy *gęstością* ciała.

Mówimy w tym przypadku, że masa jest w ciele rozmieszczona jednostajnie, lub że ciało jest *jednorodne*, lub wreszcie, że *gęstość jest stała*.

Masa części ciała o objętości v' wyniesie wówczas $m' = v'\varrho$. Na mocy (I) wymiar gęstości jest

$$(1) \quad [\text{gęstość}] = L^{-3}M$$

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego, t. j. nie zakładamy, że masa jest w danym ciele rozmieszczona jednostajnie. Niechaj A będzie jakimkolwiek punktem danego ciała. Obierzmy w ciele dowolny sześciąt o masie Δm i objętości Δv , którego środkiem jest punkt A . Granicę

$$(II) \quad \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \varrho$$

nazywamy *gęstością ciała w punkcie A* .

Gęstość ϱ zależy w ogólności od punktu A . Jeżeli A ma współrzędne x, y, z , to ϱ jest funkcją zmiennych x, y, z ; możemy więc napisać $\varrho = \varrho(x, y, z)$. Jeżeli $\varrho = \text{const.}$, to masa w ciele jest rozmieszczona jednostajnie i mamy rozpatrzony już przypadek ciała jednorodnego.

Zakładać będziemy zawsze, że ϱ jest funkcją ciągłą.

Obliczanie masy. Znając gęstość w każdym punkcie ciała możemy obliczyć jego masę, jak również masę dowolnej jego części.

Przy pomocy płaszczyzn równoległych do płaszczyzn xy , yz , zx podzielmy mianowicie dane ciało na drobne prostopadłościany (t. zw. *elementy objętości*) i na ewentualne kawałki brzeżne o kształcie nieregularnym. Oznaczmy objętości kolejnych prostopadłościanów przez $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots$ i obierzmy w każdym z nich po jednym punkcie o współrzędnych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$. Masy poszczególnych prostopadłościanów wynoszą w przybliżeniu $\rho(x_1, y_1, z_1)\Delta v_1, \rho(x_2, y_2, z_2)\Delta v_2, \dots$. Zatem suma

$$\rho(x_1, y_1, z_1)\Delta v_1 + \rho(x_2, y_2, z_2)\Delta v_2 + \dots$$

przedstawia w przybliżeniu masę ciała. Tworząc podział na coraz drobniejsze prostopadłościany o wymiarach dążących do zera i przechodząc do granicy, otrzymamy dla masy m danego ciała wzór

$$(III) \quad m = \int \int \int_D \rho(x, y, z) dv,$$

gdzie obszar całkowania D obejmuje całe ciało.

W szczególności, gdy $\rho = \text{const.}$, dostajemy ze wzoru (III) $m = \rho v$ zgodnie ze wzorem (I).

Wzór (III) podaje również masę dowolnej części danego ciała, jeżeli przyjmiemy, że D oznacza obszar zajęty przez tę część.

Powierzchnia materialna, linia materialna. Niekiedy jeden lub dwa wymiary ciała są drobne w porównaniu z pozostałymi. Przykładami takich ciał są płyty, pręty, druty i t. p. W tych przypadkach przedstawiamy ciało, jako powierzchnię lub linię materialną i mówimy, że *masa jego jest rozłożona powierzchniowo lub liniowo*.

Niech masa będzie rozłożona na powierzchni S i niechaj A oznacza dowolny punkt tej powierzchni. Oznaczmy przez $\Delta\sigma$ pole małego płata powierzchni S , pokrywającego punkt A (t. zw. *element pola*), przez Δm masę tego płata. Jeżeli wymiary płata będą dążyły do zera, granicę

$$(IV) \quad \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\sigma} = \rho$$

nazywamy *gęstością powierzchniową w punkcie A*.

W szczególności, gdy $\varrho = \text{const}$, wówczas ϱ przedstawia masę płata o polu 1 cm^2 , wyciętego z powierzchni S .

Można wykazać (podobnie jak poprzednio przy bryłach), że masa powierzchni S wyraża się wzorem

$$(V) \quad m = \int_S \varrho d\sigma,$$

gdzie obszar całkowania S rozciągnięty jest na całą powierzchnię.

Gdy $\varrho = \text{const}$. i P oznacza pole powierzchni S , mamy $m = \varrho P$, skąd

$$(2) \quad \varrho = m/P.$$

Ze wzoru powyższego otrzymujemy dla gęstości powierzchniowej wymiar

$$(3) \quad [\text{gęstość powierzchniowa}] = L^{-2} M.$$

Podobnie postępujemy w przypadku masy rozłożonej liniowo na pewnej krzywej C . Jeżeli A jest punktem krzywej C , wówczas wybieramy dowolny łuk krzywej C , pokrywający punkt A . Jeżeli Δs oznacza długość tego łuku (t. zw. *element długości*), zaś Δm jego masę, wówczas granicę

$$(VI) \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \varrho$$

nazywamy *gęstością liniową w punkcie A*.

W szczególności jeżeli $\varrho = \text{const}$, wówczas ϱ przedstawia masę łuku (krzywej C) o długości 1 cm .

Masa m na całej krzywej C wynosi

$$(VII) \quad m = \int_C \varrho ds,$$

gdzie obszar całkowania rozciągnięty jest na całą tę krzywą.

Gdy $\varrho = \text{const}$ i s oznacza długość krzywej C , mamy na mocy (VII):

$$(4) \quad m = \varrho s, \quad \text{skąd} \quad \varrho = m/s.$$

Na wymiar gęstości liniowej otrzymujemy więc wzór

$$(5) \quad [\text{gęstość liniowa}] = L^{-1} M.$$

§ 7. Momenty statyczne bezwładności. Środek masy.

Moment statyczny ciała względem pewnej płaszczyzny, np. xy , określamy w sposób następujący. Dzielimy ciało na drobne prostopadłościany o objętościach $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots$ i ewentualnie na pewne kawałki nieregularne brzeżne. W każdym prostopadłościanie obieramy dowolnie po jednym punkcie o współrzędnych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ Oznaczmy przez $\varrho(x, y, z)$ gęstość ciała w punkcie x, y, z . Masa prostopadłościanu Δv_1 wynosi w przybliżeniu $\varrho(x_1, y_1, z_1) \cdot \Delta v_1$; gdybyśmy całą jego masę umieścili w punkcie x_1, y_1, z_1 , to moment statyczny tej masy względem płaszczyzny xy byłby równy $z_1 \cdot \varrho(x_1, y_1, z_1) \cdot \Delta v_1$. Możemy więc przyjąć, że suma

$$z_1 \cdot \varrho(x_1, y_1, z_1) \cdot \Delta v_1 + z_2 \cdot \varrho(x_2, y_2, z_2) \cdot \Delta v_2 + \dots$$

przedstawia w przybliżeniu moment statyczny ciała względem płaszczyzny xy . Z tego powodu granicę powyższej sumy, gdy wymiary prostopadłościanów dążą do zera, nazywamy *momentem statycznym ciała względem płaszczyzny xy* .

Ponieważ granicą powyższej sumy jest całka potrójna $\int \int \int_D z \varrho dv$,

gdzie obszar całkowania D jest rozciągnięty na całe ciało, więc

$$(I) \quad M_{xy} = \int \int \int_D z \varrho dv \text{ i podobnie } M_{xz} = \int \int \int_D y \varrho dv, \quad M_{yz} = \int \int \int_D x \varrho dv.$$

Analogicznie określamy moment statyczny powierzchni i linii. Zamiast całek potrójnych wystąpią odpowiednio całki podwójne po powierzchniach i pojedyncze po liniach.

W przypadku masy rozłożonej na powierzchni S otrzymamy

$$(II) \quad M_{xy} = \int \int_S z \varrho d\sigma, \quad M_{xz} = \int \int_S y \varrho d\sigma, \quad M_{yz} = \int \int_S x \varrho d\sigma,$$

gdzie $d\sigma$ jest elementem pola, a dla masy rozłożonej liniowo na krzywej C :

$$(III) \quad M_{xy} = \int_C z \varrho ds, \quad M_{xz} = \int_C y \varrho ds, \quad M_{yz} = \int_C x \varrho ds,$$

gdzie ds jest elementem długości łuku.

Momenty statyczne figur płaskich względem osi x i y wyrażają się wzorami

$$(1) \quad M_x = \int \int_D y \varrho dx dy, \quad M_y = \int \int_D x \varrho dx dy.$$

Dla linii płaskich mamy:

$$(2) \quad M_x = \int_C y \rho ds, \quad M_y = \int_C x \rho ds.$$

Środek masy ciała, powierzchni lub linii materialnej określamy jako punkt o współrzędnych:

$$(IV) \quad x_0 = M_{zy}/m, \quad y_0 = M_{xz}/m, \quad z_0 = M_{xy}/m,$$

gdzie M_{zy} , M_{xz} , M_{xy} oznaczają momenty statyczne względem płaszczyzn zy , xz , xy , a m masę ciała.

Dla figur i linii płaskich dostajemy:

$$(V) \quad x_0 = M_y/m, \quad y_0 = M_x/m.$$

Jeżeli gęstość w ciele jest $\rho = \text{const.}$, to $M_{zy} = \rho \int_D \int_D \int_D x dv$

i $m = \rho \int_D \int_D \int_D dv = \rho v$, skąd

$$(VI) \quad x_0 = \frac{\int_D \int_D \int_D x dv}{v}, \quad y_0 = \frac{\int_D \int_D \int_D y dv}{v}, \quad z_0 = \frac{\int_D \int_D \int_D z dv}{v}.$$

Widzimy stąd, że x_0 , y_0 i z_0 nie zależą od gęstości.

A więc: jeżeli gęstość jest stała, to położenie środka ciężkości nie zależy od gęstości.

To samo odnosi się do powierzchni i linii.

Można wykazać, że twierdzenia o środku masy dla układów punktów materialnych, udowodnione w § 2, zachodzą również w przypadku ciał, powierzchni i linii materialnych.

Bryły, powierzchnie i linie geometryczne. *Momentem statycznym bryły geometrycznej* nazywamy moment statyczny ciała materialnego, mającego postać danej bryły, przy założeniu, że gęstość $\rho = \text{const.}$; zazwyczaj przyjmujemy $\rho = 1$.

Środek masy tego ciała (który nie zależy od ρ) nazywamy *środkiem ciężkości bryły geometrycznej*.

Analogicznie określamy moment statyczny i środek ciężkości dla powierzchni i linii geometrycznych.

Momenty statyczne i środki masy tworów geometrycznych otrzymamy zatem, kładąc w podanych wzorach (I)-(V), (1) i (2) $\varrho=1$ i przyjmując wobec tego, że m oznacza objętość, pole lub długość, zależnie od tego czy twór geometryczny jest bryłą, powierzchnią czy linią.

Poznamy teraz pewne twierdzenie, ułatwiające w wielu wypadkach znalezienie środka masy. Przetnijmy daną bryłę D płaszczyznami równoległymi do pewnej płaszczyzny Π . Załóżmy, że środki ciężkości przekrojów leżą w pewnej płaszczyźnie σ .

Przy tych założeniach można udowodnić, że środek ciężkości bryły D leży również w płaszczyźnie σ .

Intuicyjnie jest to jasne. Podzielmy bowiem bryłę D na cienie warstwy przy pomocy płaszczyzn równoległych do płaszczyzny Π . Możemy przyjąć w przybliżeniu, że środek masy każdej warstwy leży w płaszczyźnie σ . Zatem moment statyczny każdej warstwy względem płaszczyzny σ jest równy zeru. Wynika stąd, że moment statyczny całej bryły D względem płaszczyzny σ jest zerem (gdyż równy jest sumie momentów poszczególnych warstw). A więc środek masy bryły D też będzie leżał w płaszczyźnie σ .

Ścisły dowód można przeprowadzić w następujący sposób. Przyjmijmy, że Π jest płaszczyzną poziomą, zaś σ jest płaszczyzną o równaniu

$$(3) \quad Ax + By + Cz + E = 0.$$

Oznaczmy przez D_z przekrój bryły D płaszczyzną poziomą na wysokości z . Niechaj ξ, η i $\zeta=z$, będą współrzędnymi środka ciężkości S_z przekroju D_z . Oczywiście ξ, η i ζ są funkcjami z i na mocy (3)

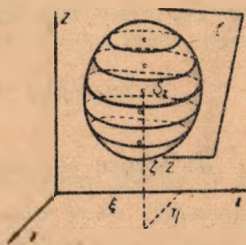
$$(4) \quad A\xi + B\eta + C\zeta + E = 0.$$

Oznaczając przez x_0, y_0, z_0 współrzędne środka masy bryły D , otrzymujemy z (VI)

$$(5) \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + E = \frac{1}{V} \left(A \int_D \int_D \int_D x dv + B \int_D \int_D \int_D y dv + C \int_D \int_D \int_D z dv + Ev \right).$$

Niech P_z będzie polem przekroju D_z , a z' i z'' (gdzie $z' < z''$) granicami, w których się zmienia zmienna z . Wówczas

$$(6) \quad P_z = \int_{D_z} dx dy.$$



Zamieniając całkę potrójną na całkę iterowaną, otrzymamy:

$$(7) \quad v = \int \int \int_D dv = \int_{z'}^{z''} dz \int \int_{D_z} dx dy = \int_{z'}^{z''} P_z dz,$$

$$(8) \quad \int \int \int_D z dv = \int_{z'}^{z''} z dz \int \int_{D_z} dx dy = \int_{z'}^{z''} P_z z dz = \int_{z'}^{z''} P_z \zeta dz,$$

$$(9) \quad \int \int \int_D x dv = \int_{z'}^{z''} dz \int \int_{D_z} x dx dy.$$

Ponieważ $\int \int_{D_z} x dx dy$ przedstawia moment statyczny przekroju D_z względem płaszczyzny yz , więc $\int \int_{D_z} x dx dy = P_z \xi$. Zatem na mocy (9)

$$(10) \quad \int \int \int_D x dv = \int_{z'}^{z''} P_z \xi dz \quad \text{ i podobnie } \quad \int \int \int_D y dv = \int_{z'}^{z''} P_z \eta dz.$$

Na mocy więc (6)–(10) dostaniemy

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + E = \frac{1}{v} \int_{z'}^{z''} (A\xi + B\eta + C\zeta + E)P_z dz.$$

Ze wzoru (4) otrzymamy tedy

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + E = 0.$$

A więc, środek ciężkości bryły D leży w płaszczyźnie σ . Udowodniliśmy więc

***Twierdzenie.** Jeżeli środki ciężkości przekrojów równoległych danej bryły leżą w jednej płaszczyźnie, to środek ciężkości tej bryły leży w tej samej płaszczyźnie.*

W szczególności wynika stąd, że jeżeli środki ciężkości przekrojów leżą na jednej prostej, to i środek ciężkości bryły leży na tej prostej. Jeżeli bowiem przez tę prostą przeprowadzimy dowolną płaszczyznę, to na mocy udowodnionego twierdzenia środek ciężkości bryły będzie leżał w tej płaszczyźnie.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla powierzchni i figur płaskich.

Reguły Guldina. Niech na płaszczyźnie xy dana będzie krzywa C , o równaniu $y=f(x)$, przyczem $f(x) \geq 0$ dla $a \leq x \leq b$. Oznaczmy przez l długość krzywej. Na mocy (V) środek ciężkości wyznaczony jest wzorami:

$$(11) \quad x_0 = M_y/m = \int_a^b x \, ds / l, \quad y_0 = M_x/m = \int_a^b y \, ds / l.$$

Pole powierzchni zatoczonej przez daną krzywą przy obrocie około osi x -ów wynosi $P = 2\pi \int_a^b y \, ds$. Na mocy więc (11) jest

$$I. \quad P = 2\pi l y_0.$$

Podobny wzór otrzymamy, dla dowolnej krzywej, leżącej ponad osią x -ów.

Ponieważ przy obrocie krzywej środek masy zatacza koło o promieniu y_0 , więc $2\pi y_0$ oznacza obwód tego koła.

A więc: *powierzchnia bryły, zatoczonej przez obrót krzywej płaskiej około osi, leżącej w płaszczyźnie tej krzywej i nie przecinającej jej, równa się iloczynowi długości krzywej przez drogę, jaką opisuje środek ciężkości.*

Jest to t. zw. *pierwsza reguła Guldina*.

Weźmy teraz pod uwagę dla tej samej krzywej obszar D zawarty między krzywą, osią x a rzędnymi $x=a$ i $x=b$. Oznaczmy przez F pole obszaru D . Środek ciężkości obszaru D ma na mocy (V), str. 174, współrzędne:

$$(12) \quad x_0 = \frac{M_y}{F} = \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{F}, \quad y_0 = \frac{M_x}{F} = \frac{\iint_D y \, dx \, dy}{F}.$$

Lecz $\iint_D y \, dx \, dy = \int_a^b dx \left(\int_0^y y \, dy \right) = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx$. Na mocy więc (12) jest

$$(13) \quad F y_0 = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx.$$

Jeżeli krzywa obróci się około osi x , wówczas objętość zato-

czoney bryły będzie wynosiła $V = \pi \int_a^b y^2 dx$, skąd na mocy (13)

$$\text{II.} \quad V = 2\pi y_0 F'.$$

Podobny wzór otrzymalibyśmy dla dowolnego obszaru położonego nad osią x .

A więc: objętość bryły zatoczonej przez obrót obszaru płaskiego naokoło osi, leżącej w płaszczyźnie obszaru i nieprzecinającej go, równa się iloczynowi pola obszaru przez drogę, jaką odbył środek ciężkości obszaru.

Jest to t. zw. druga reguła Guldina.

Momenty bezwładności i momenty zboczenia. Postępując podobnie jak przy momentach statycznych, dochodzimy do określenia momentów bezwładności i momentów zboczenia dla brył, powierzchni i linii.

Jeżeli $\varrho(x, y, z)$ oznacza gęstość bryły, to momenty bezwładności względem płaszczyzn xy , yz i zx określamy przez wzory:

$$\text{(VII)} \quad I_{xy} = \int \int_D \varrho z^2 dv, \quad I_{yz} = \int \int_D \varrho x^2 dv, \quad I_{zx} = \int \int_D \varrho y^2 dv,$$

momenty bezwładności względem osi współrzędnych:

$$\text{(VIII)} \quad I_x = \int \int_D \varrho (y^2 + z^2) dv, \quad I_y = \int \int_D \varrho (x^2 + z^2) dv, \\ I_z = \int \int_D \varrho (x^2 + y^2) dv,$$

a momenty zboczenia względem płaszczyzn układu:

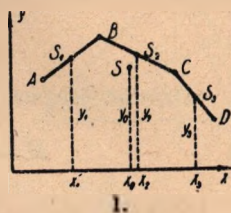
$$\text{(IX)} \quad D_x = \int \int_D \varrho yz dv, \quad D_y = \int \int_D \varrho xz dv, \quad D_z = \int \int_D \varrho xy dv.$$

Aby otrzymać momenty bezwładności dla powierzchni (linij), należy w podanych wzorach całkę potrójną zamienić na podwójną (pojedynczą) po powierzchni (po linii) i zastąpić dv przez $d\sigma$ (ds), podobnie jak dla momentów statycznych. Określenia ramienia bezwładności oraz masy zredukowanej pozostają bez zmiany. Twierdzenia udowodnione dla układów punktów materialnych zachodzą także i tutaj.

§ 8. Środki ciężkości niektórych linii powierzchni i brył.

Jeżeli linia, powierzchnia lub bryła posiada środek symetrii, to jest on równocześnie środkiem ciężkości. Zatem środkiem ciężkości odcinka, pełnego równoległoboku, koła, równoległościanu, kuli i walca jest środek symetrii tych tworów.

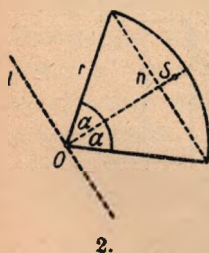
Linia łamana. Środek ciężkości linii łamanej, np. $ABCD$, otrzymamy, zastępując każdy odcinek linii punktem materialnym, umieszczonym w środku odcinka, o masie równej długości odcinka. Środek ciężkości układu tych punktów będzie środkiem linii $ABCD$ (rys. 1).



Niechaj d_1, d_2, d_3 oznaczają długości odcinków AB, BC, CD , zaś $S_1(x_1, y_1), S_2(x_2, y_2), S_3(x_3, y_3)$ środki tych odcinków. Środek ciężkości łamanej $ABCD$ będzie więc miał współrzędne

$$(1) \quad x_0 = \frac{d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3}{d_1 + d_2 + d_3}, \quad y_0 = \frac{d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3}{d_1 + d_2 + d_3},$$

Łuk koła o promieniu r , należący do kąta środkowego 2α , ma za oś symetrii dwusieczną tego kąta. Środek ciężkości łuku leży więc na tej dwusiecznej (rys. 2).



2.

Aby wyznaczyć odległość środka ciężkości S od środka koła O , opieramy się na pierwszej regule Guldina. Przy obrocie naokoło średnicy l , prostopadłej do dwusiecznej kąta 2α , łuk opisuje powierzchnię pasa kulistego o polu $2r\pi h$ (gdzie h oznacza długość cięciwy, na której wspiera się łuk). Długość łuku wynosi $s = 2r\alpha$, droga zaś środka ciężkości $2\pi \cdot OS$. Zatem $2r\pi h = 4r\pi\alpha \cdot OS$, skąd $OS = h/2\alpha$. Ponieważ $h = 2r \sin \alpha$, więc

$$(2) \quad OS = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

W szczególności dla półkola jest $2\alpha = \pi$, stąd $OS = 2r/\pi = 0,64r$.

Trójkąt. Przetnijmy trójkąt prostymi równoległymi do jednego z boków. Środki odcinków, a więc i środek ciężkości trójkąta, leżą na dośrodkowej.

Wynika stąd, że środek ciężkości trójkąta leży w punkcie przecięcia się trzech dośrodkowych, a więc w odległości $1/3$ odpowiedniej wysokości od każdego boku.

Trapez. Środki odcinków równoległych do podstawy trapezu, a więc również środek ciężkości S trapezu, leżą na dośrodkowej.

Aby wyznaczyć odległość y_0 środka ciężkości S od podstawy, obliczmy moment statyczny trapezu względem podstawy. Niechaj a oznacza podstawę, b drugi bok równoległy, h wysokość i P powierzchnię trapezu. Moment statyczny względem podstawy wynosi

$$(3) \quad M = Py_0 = \frac{1}{2}(a+b)hy_0.$$

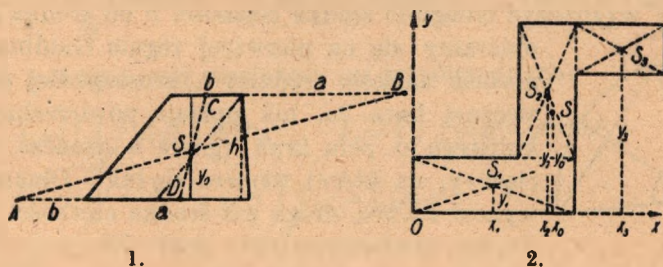
Dzieląc trapez na równoległobok i trójkąt, dostaniemy

$$(4) \quad M = bh \cdot \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}(a-b)h \cdot \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}h^2(a+2b).$$

Z porównania (3) i (4) dostaniemy

$$(5) \quad y_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a+2b}{a+b} h.$$

Wynika stąd konstrukcja geometryczna środka ciężkości, przedstawiona na rysunku 1. Z podobieństwa trójkątów BCS i ADS dostajemy $(h-y_0)/y_0 = (\frac{1}{2}b+a)/(\frac{1}{2}a+b)$, skąd otrzymujemy y_0 zgodnie ze wzorem (5).

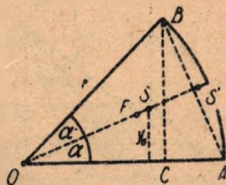


Wielokąt. Aby wyznaczyć środek ciężkości wielokąta, rozbijamy go na trójkąty (trapezy, prostokąty), a następnie obliczamy momenty statyczne poszczególnych części względem osi układu.

Oznaczmy przez p np. pole figury podanej na rys. 2. Rozbijamy ją na 3 prostokąty o polach p_1 , p_2 i p_3 . Niechaj x_1 , y_1 , x_2 , y_2 i x_3 , y_3 będą współrzędnymi środków ciężkości względem osi x i y . Mamy $M_x = p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3$ i $M_y = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$; środek ciężkości S ma więc współrzędne:

$$(6) \quad x_0 = M_y/p, \quad y_0 = M_x/p.$$

Wycinek koła. Weźmy pod uwagę wycinek koła OAB . Z powodu symetrii środek ciężkości S wycinka leży na dwusiecznej kąta środkowego 2α . Odległość OS środka ciężkości od środka koła O otrzymamy opierając się na drugiej regule Guldina. Wycinek OAB zatoczy przez obrót naokoło promienia $OA=r$ wycinek kuli. Wysokość czaszy wycinka kuliste-go wyniesie $CA=OA-OC=r-r\cos 2\alpha=2r\sin^2\alpha$, skąd objętość wycinka kuli $v=\frac{2}{3}r^2\pi 2r\sin^2\alpha=\frac{4}{3}r^3\pi\sin^2\alpha$. Środek ciężkości zatoczy koło o promieniu $y_0=OS\sin\alpha$. Pole wycinka równa się $r^2\alpha$. Na mocy drugiej reguły Guldina będzie więc $\frac{4}{3}r^3\pi\sin^2\alpha=2\pi y_0\cdot r^2\alpha=2\pi OS\sin\alpha\cdot r^2\alpha$, skąd



$$(7) \quad OS = \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} r.$$

Dla półkoła mamy w szczególności $2\alpha=\pi$ czyli

$$(8) \quad OS = 4r/3\pi = 0,42r$$

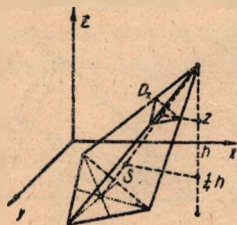
Odcinek koła. Środek ciężkości S' odcinka koła znajduje się na dwusiecznej kąta środkowego do którego należy ten odcinek. Odległość OS' środka ciężkości odcinka od środka koła otrzymamy ze wzoru, przedstawiającego moment statyczny wycinka OAB względem OA jako sumę momentów trójkąta OAB i odcinka koła. Oznaczając więc przez p pole wycinka, przez p' pole trójkąta OAB , przez p'' pole odcinka, a przez F środek ciężkości trójkąta OAB , otrzymamy $p\cdot OS\sin\alpha = p'\cdot OF\sin\alpha + p''\cdot OS'\sin\alpha$. Ponieważ $p=r^2\alpha$, $p'=\frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha$, $p''=p-p'$ i $OF=\frac{2}{3}r\cos\alpha$, więc

$$(9) \quad OS' = \frac{4 \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} r.$$

Graniastosłup. Walec. Środki ciężkości przekrojów graniastostłupa płaszczyznami równoległymi do podstawy leżą na prostej, łączącej środki ciężkości obu podstaw. Przekroje zaś płaszczyznami równoległymi do jednej ze ścian bocznych są równoległobokami (lub składają się z kilku równoległoboków); środki ciężkości tych przekrojów leżą w płaszczyźnie równoległej do podstawy, poprowadzonej w połowie wysokości. Podobnie przedstawia się sprawa dla walca.

Wynika stąd, że *środek ciężkości graniastostłupa lub walca leży w połowie jego wysokości na prostej, łączącej środki ciężkości obu jego podstaw.*

Ostrosłup. Stożek. Środki ciężkości przekrojów równoległych do podstawy ostrosłupa leżą na prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości podstawy. Na tej prostej leży więc również



środek ciężkości S ostrosłupa. Aby wyznaczyć wysokość, na jakiej leży ten środek ciężkości, obliczamy moment statyczny ostrosłupa względem płaszczyzny podstawy. Obierając płaszczyznę podstawy za płaszczyznę poziomą,

otrzymujemy $M_{xy} = \int \int \int z dx dy dz$. Obszar całkowania jest rozciągnięty na cały ostrosłup. Oznaczmy przez h wysokość ostrosłupa, przez D_z przekrój płaszczyzną poziomą na wysokości z i przez P_z pole przekroju D_z . Zamieniając całkę potrójną na całkę

iterowaną dostaniemy $M_{xy} = \int_0^h z dz \int \int_{D_z} dx dy = \int_0^h z P_z dz$. Niech P oznacza

pole podstawy. Jak wiadomo $P_z/P = (h-z)^2/h^2$, czyli $P_z = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 P$.
Zatem

$$M_{xy} = \int_0^h z \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 P dz = \frac{1}{12} h^2 P.$$

Z drugiej strony, oznaczając przez v objętość ostrosłupa, a przez z_0 wysokość jego środka ciężkości, mamy

$$M_{xy} = z_0 v = z_0 \cdot \frac{1}{3} h P.$$

Z przyrównania obu wzorów na M_{xy} otrzymujemy

$$(10) \quad z_0 = h/4.$$

Podobnie przedstawia się sprawa dla stożka.

A więc: *środek ciężkości ostrosłupa (stożka) leży w $1/4$ jego wysokości na prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości podstawy.*

§ 9. Momenty bezwładności niektórych linii, powierzchni i brył. W tym § zakładamy będziemy, że rozpatrywane linie, powierzchnie i bryły mają gęstość stałą ρ .

Odcinek. Obliczmy moment bezwładności odcinka AB o długości a względem prostej l , przechodzącej przez środek O tego odcinka i nachylonej do niego pod kątem α .

Przyjmijmy, że AB leży na osi x -ów i że O jest początkiem układu współrzędnych. Podzielmy odcinek AB na drobne odcinki przy pomocy punktów $x_1, x_2 \dots$

Położmy $\Delta x_1 = x_2 - x_1$, $\Delta x_2 = x_3 - x_2$ i t. d.

Moment bezwładności odcinka Δx_i względem

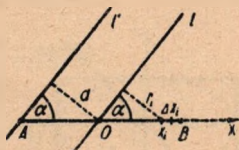
prostej l wynosi w przybliżeniu $r_i^2 \Delta m_i$, gdzie

Δm_i oznacza masę i -tego odcinka, zaś r_i od-

ległość jego lewego końca od l . Ponieważ

$r_i = x_i \sin \alpha$, $\Delta m_i = \rho \Delta x_i$, więc $r_i^2 \Delta m_i = x_i^2 \rho \Delta x_i \sin^2 \alpha$. Możemy zatem

przyjąć, że moment bezwładności I_l względem prostej l wynosi w przybliżeniu $\sum x_i^2 \rho \Delta x_i \sin^2 \alpha$. Przechodząc do granicy, otrzymamy



$$I_l = \int_{-\frac{1}{2}a}^{+\frac{1}{2}a} x^2 \rho \sin^2 \alpha \, dx = \frac{1}{12} a^3 \rho \sin^2 \alpha.$$

Masa m odcinka AB wynosi $m = a\rho$. Zatem

$$(1) \quad I_l = \frac{1}{12} m a^2 \sin^2 \alpha.$$

Ponieważ O jest środkiem ciężkości odcinka AB , więc moment bezwładności względem prostej l' równoległej do l i leżącej w odległości d od O wynosi w myśl wzoru (I), str. 161, $I_{l'} = I_l + m d^2$, czyli

$$(2) \quad I_{l'} = \frac{1}{12} m (a^2 \sin^2 \alpha + 12 d^2).$$

W szczególności jeżeli l' przechodzi przez koniec A , to $d = \frac{1}{2} a \sin \alpha$, skąd

$$(3) \quad I_{l'} = \frac{1}{3} m a^2 \sin^2 \alpha.$$

Jeżeli zaś proste l i l' są prostopadłe do AB , to $\alpha = \pi/2$ i momenty I_l i $I_{l'}$ redukują się do momentów bezwładności względem punktów O i A . Z (1) i (3) otrzymujemy dla $\alpha = \pi/2$:

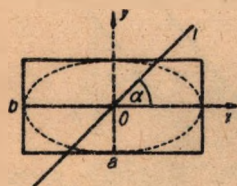
$$(4) \quad I_O = \frac{1}{12} m a^2, \quad I_A = \frac{1}{3} m a^2.$$

Prostokąt. Przeprowadźmy przez środek prostokąta o bokach a, b osie x, y układu współrzędnych. Ponieważ osie te są osiami symetrii, więc są zarazem osiami środkowymi i

$$I_y = \int_D \int x^2 \rho \, dx \, dy = \rho \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \, dx = \frac{1}{12} a^3 b \rho.$$

Masa prostokąta jest $m = ab\rho$, więc

$$(5) \quad I_y = \frac{1}{12} m a^2; \quad \text{podobnie} \quad I_x = \frac{1}{12} m b^2.$$



1.

Moment zboczenia D_z jest zerem, więc elipsa bezwładności środkowa ma równanie (str. 169, (3)) $I_x x^2 + I_y y^2 = c^2$ czyli $\frac{1}{12} m b^2 x^2 + \frac{1}{12} m a^2 y^2 = c^2$. Stała c jest dowolna; kładąc $c^2 = \frac{1}{12} m a^2 b^2 \lambda^2$, gdzie λ jest nową stałą dowolną, otrzymamy

$$(6) \quad (x/\lambda a)^2 + (y/\lambda b)^2 = 1.$$

A więc: *elipsy bezwładności środkowe mają osie proporcjonalne do boków prostokąta.*

Moment bezwładności względem prostej l (rys. 1), przechodzącej przez O i nachylonej pod kątem α względem osi x , wynosi (str. 169, wzór (1)) $I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha$ czyli

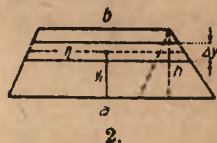
$$(7) \quad I_l = \frac{1}{12} m (b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha).$$

Momenty bezwładności I_a i I_b względem boków a i b prostokąta wynoszą $I_a = I_x + m(b/2)^2$ i $I_b = I_x + m(a/2)^2$, czyli

$$(8) \quad I_a = \frac{1}{12} m b^2, \quad - \quad I_b = \frac{1}{12} m a^2.$$

Kwadrat. Zachowując znakowanie jak dla prostokąta, mamy $a = b$, skąd $I_x = I_y$. Wynika stąd, że elipsa bezwładności środkowa jest kołem. Środek kwadratu jest więc punktem kołowym.

Trapez. Aby wyznaczyć moment bezwładności trapezu względem podstawy a (p. rys. 2), podzielmy trapez na drobne paski równoległe do podstawy. Oznaczmy przez $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots$ grubości tych pasków, przez $y_1, y_2, \dots$ odległość ich środków od podstawy, a przez $r_1, r_2, \dots$ długości odcinków, przechodzących przez środki pasków równoległe do podstawy. Możemy przyjąć, że moment bezwładności i -tego paska względem boku a wynosi w przybliżeniu $\Delta m_i y_i^2$, gdzie Δm_i oznacza masę i -tego paska. Moment bezwładności I_a względem boku a równa się w przybliżeniu $\sum \Delta m_i y_i^2$. Lecz $\Delta m_i = \Delta y_i r_i \rho$. Z rysunku 2 widzimy, że



2.

$(r_i - b)/(a - b) = (h - y_i)/h$, skąd $r_i = a - (a - b) \frac{y_i}{h}$. Zatem I_a wynosi

w przybliżeniu $\sum \left[a - (a-b) \frac{y_i}{h} \right] \rho y_i^2 \Delta y_i$. Przechodząc do granicy, dostajemy

$$I_a = \int_0^h \left[a - (a-b) \frac{y}{h} \right] \rho y^2 dy = \frac{1}{12} \rho (a+3b) h^3.$$

Ponieważ $m = \frac{1}{2} (a+b) h \rho$, więc

$$(9) \quad I_a = \frac{1}{6} \cdot \frac{a+3b}{a+b} m h^2.$$

Trójkąt. Ze wzoru powyższego otrzymamy moment bezwładności trójkąta względem podstawy, kładąc $b=0$. Dostaniemy

$$(10) \quad I_a = \frac{1}{8} m h^2.$$

Równoległobok. Kładąc we wzorze (9) $b=a$, otrzymamy moment bezwładności równoległoboku względem jednego z boków:

$$(11) \quad I_a = \frac{1}{3} m h^2.$$

Prostopadłościan. Umieśmy początek układu współrzędnych w środku prostopadłościanu, prowadząc osie x, y, z równolegle do krawędzi, których długości oznaczmy przez a, b, c . Moment bezwładności względem osi x wynosi

$$I_x = \int \int \int \rho (y^2 + z^2) dx dy dz = \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} (y^2 + z^2) dz = \frac{1}{12} abc \rho (b^2 + c^2).$$

Kładąc $m = abc \rho$, otrzymujemy stąd

$$(12) \quad I_x = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$

i podobnie $I_y = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$, $I_z = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$.

Moment bezwładności I_a względem krawędzi a jest $I_a = I_x + m d^2$, gdzie $d = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2}$ więc

$$(13) \quad I_a = \frac{1}{3} m (b^2 + c^2)$$

i podobnie $I_b = \frac{1}{3} m (a^2 + c^2)$, $I_c = \frac{1}{3} m (a^2 + b^2)$.

Okrąg koła. Moment bezwładności okręgu o promieniu r względem środka O wynosi oczywiście

$$(14) \quad I_O = m r^2.$$

Aby wyznaczyć moment bezwładności względem średnicy, obierzmy O za początek układu współrzędnych (x, y) . Mamy oczywiście $I_x = I_y$. Ponieważ $I_O = I_x + I_y$, więc $I_O = 2I_x$ czyli $I_x = \frac{1}{2}I_O$. Stąd moment bezwładności względem średnicy wynosi

$$(15) \quad I_x = \frac{1}{2}mr^2.$$

Koło. Ze względu na symetrię momenty bezwładności powierzchni koła względem średnic są równe. Obierzmy środek koła O za środek układu współrzędnych (x, y) . Zatem $I_x = I_y$, a ponieważ moment bezwładności względem środka $I_O = I_x + I_y$, więc $I_O = 2I_x$, więc $I_x = \frac{1}{2}I_O$. Aby obliczyć I_O , podzielmy koło na pierścienie przy pomocy kół współśrodkowych o promieniach $x_1, x_2, \dots$. Połóżmy $\Delta x_1 = x_2 - x_1$, $\Delta x_2 = x_3 - x_2, \dots$. Możemy przyjąć, że moment bezwładności i -tego pierścienia względem O wynosi w przybliżeniu $\Delta m_i x_i^2$, gdzie Δm_i oznacza masę tego pierścienia. Ponieważ pole pierścienia wynosi w przybliżeniu $2\pi x_i \Delta x_i$, więc $\Delta m_i = 2\pi x_i \rho \Delta x_i$. Zatem w przybliżeniu $I_O = \sum 2\pi x_i^3 \rho \Delta x_i$. Przechodząc do granicy, otrzymujemy stąd

$$(16) \quad I_O = \int_0^r 2\pi x^3 \rho dx = \frac{1}{2} \pi \rho r^4.$$

Ponieważ masa koła $m = r^2 \pi \rho$, więc:

$$(17) \quad I_O = \frac{1}{2}mr^2 \quad \text{ i } \quad I_x = \frac{1}{4}mr^2.$$

Powierzchnia kuli. Moment bezwładności powierzchni kuli względem środka wynosi oczywiście

$$(18) \quad I_O = mr^2.$$

Aby wyznaczyć moment bezwładności względem średnicy kuli, umieścimy początek układu współrzędnych w środku kuli. Z powodu symetrii mamy $I_x = I_y = I_z$. Ponieważ $2I_O = I_x + I_y + I_z$, więc $I_O = \frac{2}{3}I_x$. Zatem $I_x = \frac{3}{2}I_O$, skąd

$$(19) \quad I_x = \frac{3}{2}mr^2.$$

Kula. Biorąc za początek układu współrzędnych środek kuli, mamy ze względu na symetrię jak poprzednio $I_x = \frac{2}{3}I_O$. Moment I_O

obliczymy postępując podobnie jak przy kole, t. j. dzieląc kulę na warstwy przy pomocy kul współśrodkowych. Otrzymamy

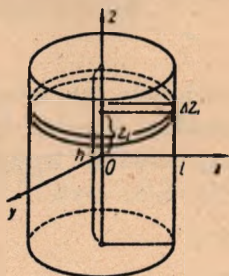
$$(20) \quad I_O = \frac{3}{8} m r^2 \quad \text{ i } \quad I_x = \frac{3}{8} m r^2.$$

Walec obrotowy. Oznaczmy przez r promień podstawy, a przez h wysokość walca. Weźmy za początek układu współrzędnych środek osi walca, przyjmując oś walca za oś z -ów.

Aby obliczyć moment I_x , postąpmy podobnie jak przy kole, t. j. podzielmy walec na warstwy przy pomocy walców o podstawach współśrodkowych z podstawą walca. Otrzymamy

$$(21) \quad I_x = \frac{1}{2} m r^2.$$

Aby obliczyć momenty I_x i I_y , podzielmy walec na warstwy przy pomocy płaszczyzn równoległych do podstawy. Oznaczmy przez $\Delta z_1, \Delta z_2, \dots$ grubości warstw, przez $z_1, z_2, \dots$ współrzędne środków ich podstaw, przez $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots$ masy warstw. Moment bezwzględności i -tej warstwy względem prostej równoległej do osi x i przechodzącej przez środek ciężkości tej warstwy równa się w przybliżeniu $\frac{1}{4} \Delta m_i r^2$ (jak moment bezwładności koła względem średnicy). A więc moment bezwładności warstwy względem osi x wyniesie w przybliżeniu $\frac{1}{4} \Delta m_i r^2 + \Delta m_i z_i^2$. Ponieważ $\Delta m_i = r^2 \pi \Delta z_i \rho$, więc będzie w przybliżeniu $I_x = \sum \left(\frac{1}{4} r^2 + z_i^2 \right) r^2 \pi \rho \Delta z_i$, skąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy



$$I_x = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{1}{4} r^2 + z^2 \right) r^2 \pi \rho dz = \frac{1}{12} r^2 \pi \rho h (3r^2 + h^2).$$

Ponieważ masa walca jest $m = r^2 \pi \rho h$, więc

$$(22) \quad I_x = \frac{1}{12} m (3r^2 + h^2).$$

Ze względu na symetrię mamy oczywiście $I_x = I_y$.

Moment względem tworzącej l walca wynosi $I_l = I_x + m r^2$, więc

$$(23) \quad I_l = \frac{3}{8} m r^2.$$

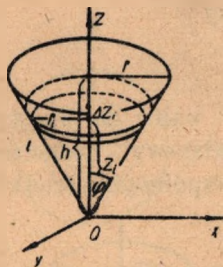
Oś z jest osią symetrii, a więc jest ona równocześnie osią środkową. Z powodu symetrii osie x i y są również osiami środkowymi. Elipsoidalna bezwładności ma więc równanie $I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = c^2$, skąd wobec (22) $\frac{1}{12} m (3r^2 + h^2) (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} m r^2 z^2 = c^2$ czyli

$$(24) \quad (x/r)^2 + (y/r)^2 + (z/\sqrt{\frac{1}{3}(3r^2 + h^2)})^2 = \lambda^2,$$

gdzie λ^2 jest dowolną stałą.

Elipsoida bezwładności jest więc elipsoidą obrotową. Gdy $r/\sqrt{3}=h$, elipsoida jest kulą.

Stożek obrotowy. Oznaczmy przez r promień podstawy, a przez h wysokość stożka. Umieśćmy początek O układu współrzędnych w wierzchołku stożka i przyjmijmy oś stożka za oś z -ów.



Jako oś symetrii jest ona również osią bezwładności środkową, a więc na mocy twierdzenia 2^o, str. 168, osią bezwładności w punkcie O . Z powodu symetrii osie x i y są również osiami bezwładności w punkcie O .

Podzielmy stożek na warstwy o grubości Δz_i przy pomocy płaszczyzn równoległych do podstawy. Moment bezwładności i -tej warstwy względem osi z wynosi w przybliżeniu $\Delta m_i r_i^2/2$ (podobnie jak moment bezwładności walca względem osi), gdzie r_i oznacza promień dolnej podstawy i -tej warstwy. Niech z_i oznacza współrzędną środka dolnej podstawy i -tej warstwy; wówczas $r_i/r = z_i/h$, czyli

$$(25) \quad r_i = r z_i / h.$$

Ponieważ w przybliżeniu $\Delta m_i = r_i^2 \pi \Delta z_i \rho$, więc na mocy (25) mamy

$$(26) \quad \frac{1}{2} \Delta m_i r_i^2 = \frac{1}{2} (r/h)^4 \pi \rho z_i^4 \Delta z_i,$$

skąd w przybliżeniu $I_z = \sum \frac{1}{2} (r/h)^4 \pi \rho z_i^4 \Delta z_i$. Przechodząc do granicy, otrzymamy

$$I_z = \int_0^h \frac{1}{2} \left(\frac{r}{h} \right)^4 \pi \rho z^4 dz = \frac{1}{10} r^4 h \pi \rho.$$

Masa stożka jest $m = \frac{1}{3} r^2 \pi h \rho$, więc

$$(27) \quad I_z = \frac{3}{10} m r^2.$$

Aby obliczyć I_x , zauważmy, że moment i -tej warstwy względem prostej równoległej do osi x -ów i przechodzącej przez środek ciężkości tej warstwy wynosi w przybliżeniu $\frac{1}{12} \Delta m_i r_i^2$. Zatem względem osi x -ów wynosi on $\frac{1}{12} \Delta m_i r_i^2 + \Delta m_i z_i^2$. Suma ta równa się na mocy

(25) i (26) $\frac{1}{4} \left(\frac{r}{h}\right)^2 \pi \varrho z^4 \left(4 + \left(\frac{r}{h}\right)^2\right) \Delta z_i = \Delta w_i$, czyli I_x równa się w przybliżeniu $\sum \Delta w_i$. Przechodząc do granicy, otrzymamy

$$I_x = \int_0^h \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{h}\right)^2 \pi \varrho z^4 \left(4 + \left(\frac{r}{h}\right)^2\right) \right] dz = \frac{1}{20} r^2 \pi \varrho (4h^2 + r^2) h,$$

czyli

$$(28) \quad I_x = \frac{3}{20} m (r^2 + 4h^2).$$

Oczywiście mamy $I_x = I_y$.

Niech φ oznacza kąt między osią z a tworzącą l (leżącą w płaszczyźnie xz). Ponieważ osie x, y, z są osiami bezwładności w O , więc na mocy wzoru (I), str. 164, jest $I_l = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma$, gdzie α, β, γ oznaczają kąty między tworzącą l a osiami układu współrzędnych. Mamy $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ i $\gamma = \varphi$, skąd

$$I_l = I_x \sin^2 \varphi + I_z \cos^2 \varphi,$$

a stąd na mocy (27) i (28)

$$(29) \quad I_l = \frac{3}{20} m [(r^2 + 4h^2) \sin^2 \varphi + 2r^2 \cos^2 \varphi].$$

Z uwagi na to, że $\operatorname{tg} \varphi = r/h$, dostajemy

$$(30) \quad I_l = \frac{3m}{20} \cdot \frac{r^2 + 6h^2}{r^2 + h^2} r^2.$$

ROZDZIAŁ V

UKŁADY PUNKTÓW MATERIALNYCH

§ 1. Równania ruchu. Niech dany będzie układ punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$. Oznaczmy przez $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ sumy sił działających na poszczególne punkty, a przez $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n$ przyśpieszenia tych punktów względem układu inercjalnego współrzędnych. Wówczas według prawa Newtona:

$$m_1 \bar{p}_1 = \bar{P}_1, \quad m_2 \bar{p}_2 = \bar{P}_2, \quad . . . , \quad m_n \bar{p}_n = \bar{P}_n.$$

Równania powyższe zapisujemy krócej

$$(I) \quad m_i \bar{p}_i = \bar{P}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Niechaj punkt m_i ma współrzędne x_i, y_i, z_i . Równania (I) możemy napisać w postaci:

$$(II) \quad m_i \ddot{x}_i = P_{ix}, \quad m_i \ddot{y}_i = P_{iy}, \quad m_i \ddot{z}_i = P_{iz} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Układy swobodne. O siłach $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ zakładamy, że w najogólniejszym przypadku zależą one od czasu, położenia i prędkości punktów układu. Przyjmować więc będziemy, że siły są funkcjami: czasu t , zmiennych $x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n$ określających położenia punktów oraz zmiennych $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$ określających prędkości punktów. Zatem możemy napisać:

$$P_{ix} = F_i(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n),$$

i podobnie $P_{iy} = \Phi_i, \quad P_{iz} = \Psi_i$.

O funkcjach P_{ix}, P_{iy} i P_{iz} zakładamy, że są ciągłe i że mają ciągle pierwsze pochodne cząstkowe względem każdej zmiennej.

Równania (II) noszą nazwę *równań ruchu Newtona*.

Stanowią one układ równań różniczkowych drugiego rzędu. Z teorii równań różniczkowych wynika, że równania (II) wyznaczają ruch układu punktów, jeżeli dane są w chwili początkowej $t=t_0$ położenia początkowe punktów (t. j. współrzędne $x_1^0, y_1^0, z_1^0, \dots, z_n^0$) i prędkości początkowe (t. j. $\dot{x}_1^0, \dot{y}_1^0, \dot{z}_1^0, \dots, \dot{z}_n^0$).

Sily wewnętrzne i zewnętrzne. Sily, działające na punkty układu, dzielimy na dwie grupy.

Do pierwszej zaliczamy te sily, które pochodzą ze wzajemnego oddziaływania punktów układu na siebie. Sily te nazywamy *silami wewnętrznymi*.

Pozostałe sily nazywamy *silami zewnętrznymi*.

O silach wewnętrznych zakładamy, że stosują się do prawa akcji i reakcji Newtona (str. 73).

Weźmy pod uwagę parę sil, z jakimi działają na siebie dwa punkty układu m' i m'' . Suma tych sil jest zerem, a że nadto działają one wzdłuż prostej, łączącej punkty m' i m'' , więc i moment ich względem dowolnego punktu jest zerem. Ponieważ sily wewnętrzne możemy zgrupować w takie pary, więc *suma i ogólny moment sil wewnętrznych jest zerem*.

Równowaga układu punktów. Układ punktów jest w równowadze, jeżeli każdy punkt jest w równowadze.

A więc, jeżeli układ punktów jest w równowadze, to suma sil działających na każdy punkt jest równa zeru. O układzie sil, mającym tę własność, mówimy, że *jest w równowadze* lub że *sily tego układu równoważą się*.

Niech dany będzie układ sil w równowadze. Weźmy pod uwagę sily tego układu, działające na dowolny punkt materialny. Ponieważ suma tych sil, jak i moment ogólny względem dowolnego punktu przestrzeni, są równe zeru, więc dany układ jest *równoważny zeru* (str. 23).

A więc: jeżeli sily, działające na układ punktów materialnych, równoważą się, wówczas suma tych sil i ogólny moment jest zerem.

Warunek powyższy jest warunkiem koniecznym równowagi sil, ale nie jest warunkiem wystarczającym. Ponieważ sily wewnętrzne mają sumę i ogólny moment równy zeru, więc z podanego warunku wynika, że *jeżeli układ punktów materialnych jest w równowadze, to suma i ogólny moment sil zewnętrznych jest zerem*.

Podobnie jak poprzedni, warunek ten jest tylko warunkiem koniecznym równowagi układu.

Zasada d'Alemberta. Równania (I), str. 190, możemy napisać w postaci

$$\bar{P}_i + (-m_i \bar{p}_i) = 0 \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Wektory $-m_i \bar{p}_i$ nazwaliśmy siłami bezwładności punktów m_i (str. 74). Możemy więc powiedzieć, że siły bezwładności równoważą się z siłami działającymi na punkty układu.

Twierdzenie powyższe nosi nazwę zasady d'Alemberta.

Znaczenie tej zasady występuje głównie w układach punktów nieswobodnych, czym zajmiemy się dalej. Należy pamiętać, o czym mówiliśmy na str. 74, że siły bezwładności nie są siłami, lecz wektorami, które tylko dla wygody nazywamy siłami.

Przykład 1. Po osi x poruszają się dwa punkty A_1, A_2 o masach m_1, m_2 , przyciągające się z siłą $\bar{P}$ według prawa Newtona. Więc $|\bar{P}| = K m_1 m_2 / r^2$, gdzie $r = A_1 A_2$. Oznaczając przez x_1 i x_2 ($x_1 < x_2$) współrzędne punktów, otrzymamy równania ruchu w postaci:

$$(1) \quad m_1 \ddot{x}_1 = K m_1 m_2 / (x_2 - x_1)^2, \quad m_2 \ddot{x}_2 = -K m_1 m_2 / (x_2 - x_1)^2.$$

Przyjmijmy, że w chwili początkowej $t=0$ jest $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$. Dodając równania (1) stronami, dostaniemy $m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0$, skąd po scałkowaniu

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = a, \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 = at + b.$$

Ze względu na warunki początkowe otrzymamy $a=0$ i $b = m_1 x_1^0 + m_2 x_2^0$. Więc:

$$(2) \quad m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = 0, \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x_1^0 + m_2 x_2^0.$$

Z równań (1) otrzymujemy jeszcze

$$(3) \quad \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -K(m_1 + m_2) / (x_2 - x_1)^2.$$

Położmy $x_2 - x_1 = r$ i $K(m_1 + m_2) = h$. Dostaniemy $\ddot{r} = -h/r^2$. Mnożąc obustronnie przez $\dot{r}$ i całkując, otrzymamy $\frac{1}{2} \dot{r}^2 = h/r + c$. Ponieważ dla $t=0$ mamy $\dot{r} = \dot{x}_2^0 - \dot{x}_1^0 = 0$ oraz $r = x_2^0 - x_1^0 = r_0$, więc $c = -\frac{h}{r_0}$. Zatem $\frac{1}{2} \dot{r}^2 = \frac{h}{r} - \frac{h}{r_0}$, skąd

$$(4) \quad \dot{r} = -\sqrt{2h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}.$$

Przyjęliśmy znak ujemny, gdyż punkty będą się zbliżać do siebie, więc r będzie maleć, skąd $\dot{r} < 0$. Z (4) dostajemy

$$-\frac{dr}{\sqrt{2h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}} = dt, \quad \text{więc} \quad -\int \frac{dr}{\sqrt{2h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)}} + c' = t.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$(5) \quad \frac{1}{2} \frac{\sqrt{r_0}}{\sqrt{2h}} \left[2\sqrt{r_0 r - r^2} + r_0 \arcsin \frac{r_0 - 2r}{r_0} \right] + c' = t.$$

Ponieważ dla $t=0$ jest $r=r_0$, więc

$$(6) \quad c' = \frac{\pi r_0 \sqrt{r_0}}{4 \sqrt{2h}}.$$

Czas T , po którym punkty się spotkają, otrzymamy z (5), kładąc $r=0$. Zatem

$$T = \frac{\pi r_0 \sqrt{r_0}}{2 \sqrt{2h}} = \frac{r_0^{3/2} \pi}{2 \sqrt{2K(m_1 + m_2)}}.$$

Dla $m_1 = m_2 = 1$ g, $r_0 = 1$ cm i $K = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sek}^{-2}$ otrzymujemy $T = 3055$ sek.

Wzory (2), (5) i (6) (gdzie $r = x_2 - x_1$) wyznaczają ruch punktów.

Układy nieswobodne. Jeżeli istnieją warunki ograniczające możliwe ruchy układu punktów materialnych, wówczas nazywamy go *układem nieswobodnym*, a warunki ograniczające *więzami*. Podobnie, jak w przypadku jednego punktu nieswobodnego, przyjmujemy, że więzy są wynikiem pewnych sił, zwanych *reakcjami*, które powodują, że układ zachowuje więzy.

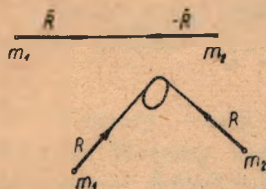
Jeżeli do sił działających na punkty układu dołożymy siły reakcyjne, wówczas układ możemy uważać za swobodny. W ten sposób badanie ruchów układów nieswobodnych sprowadzamy do badania ruchów układów swobodnych.

Jeżeli więc na punkty układu o masach $\{m_i\}$ działają siły $\{\bar{P}_i\}$, to oznaczając przez $\{\bar{R}_i\}$ reakcje, mamy

$$(III) \quad m_i \bar{p}_i = \bar{P}_i + \bar{R}_i \quad i=1, 2, \dots, n.$$

W szczególności układ nieswobodny jest w równowadze, jeżeli siły działające równoważą się z reakcjami.

Więzy układu mogą polegać na tym, że niektóre punkty muszą się stale znajdować na pewnych liniach lub powierzchniach. Oprócz



tego rodzaju więzów, poprzednio już poznanych (por. str. 123), spotykamy się jeszcze z innymi. Np. dwa punkty materialne mogą być połączone nicią nierozciągliwą o długości l ; odległość zatem punktów od siebie musi być stale $\leq l$. Nić

działa na punkty tylko wtedy, gdy jest napięta (rys. górny). Jeżeli założymy, że masa nici jest dość mała, by można ją było pominąć, to siły, z jakimi nić działa na punkty, będą co do wielkości równe nawet wtedy, gdy nić będzie nawinięta na jakieś ciało (rys. dolny) — o ile nie ma tarcia. Siły te są oczywiście reakcjami. Reakcje są styczne do nici i mają zwrot w kierunku nici.

Układ sztywny. Ważnym przykładem układu punktów nieswobodnego jest t. zw. *układ sztywny*. Jest to układ nieswobodny, którego więzy polegają na tym, że wzajemne odległości punktów układu pozostają niezmiennie. Przyjmujemy, że w tym przypadku występują pewne siły wewnętrzne (t. j. działające między punktami układu), które sprawiają, że punkty zachowują odległości stałe, mimo działania sił zewnętrznych.

Ciało stałe fizyczne na ogół odkształca się, t. j. zmienia swoją postać pod wpływem sił na nie działających. Zdarzyć się jednak może, że gdy siły nie przekraczają pewnej granicy, odkształcenia są tak niewielkie, iż praktycznie możemy nie brać ich pod uwagę. W tym przypadku za model takiego ciała przy małych siłach możemy obrać układ punktów, który nazwalismy układem sztywnym. Wyniki, jakie otrzymamy, będą wówczas ważne w przybliżeniu dla ciała fizycznego. W ten sposób możemy stosować do ciał stałych fizycznych twierdzenia, jakie otrzymamy dla układów sztywnych. Ze względu na ważną rolę, jaką odgrywa teoria układu sztywnego, zajmujemy się tą teorią szczegółowo w rozdziale VI. W tym rozdziale ograniczymy się tylko do podania kilku przykładów na tle ogólnej teorii układu punktów.

Najprostszym przypadkiem układu sztywnego jest układ złożony z dwóch punktów materialnych, których odległość r jest stała.

Układ taki możemy zrealizować, łącząc dwa punkty materialne sztywnym prętem o małej masie, którą w stosunku do mas samych punktów można pominąć. Mówimy wówczas, że punkty połączone

są prętem sztywnym bez masy. W ten sposób siły wewnętrzne między punktami zastępujemy siłami, z jakimi pręt oddziaływa na te punkty. Siły te są zatem co do wielkości równe, mają kierunek pręta, a zwroty przeciwne.

Przykład 2. Dwa ciężkie punkty materialne o masach m_1 i m_2 połączone są nicią nierozciągliwą (bez masy), przewiniętą przez krążek. Punkt m_2 musi pozostawać na prostej pionowej l . Jaki kąt φ tworzy nić z prostą l w położeniu równowagi, jeżeli nie ma tarcia?

Na punkt m_1 działa nić z siłą T skierowaną pionowo do góry oraz ciężar m_1g skierowany pionowo w dół (rys. 1). Zatem $T - m_1g = 0$, więc

$$(7) \quad T = m_1g.$$

Na punkt m_2 działa nić z siłą T skierowaną wzdłuż nici, ciężar m_2g skierowany pionowo w dół i reakcja $\bar{R}$ prostopadła do prostej l . Tworząc rzuty sił na prostą l , dostaniemy $T \cos \varphi - m_2g = 0$, więc

$$(8) \quad T \cos \varphi = m_2g.$$

Z równań (7) i (8) otrzymamy

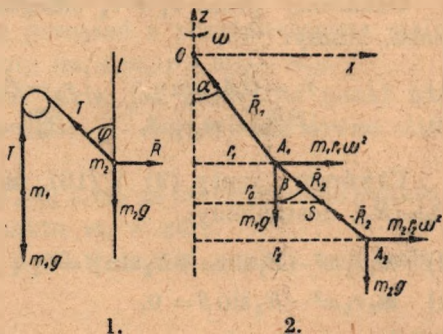
$$\cos \varphi = m_2/m_1.$$

Równowaga jest więc możliwa tylko wówczas gdy $m_2 < m_1$.

Przykład 3. Punkty materialne ciężkie A_1 i A_2 o masach m_1, m_2 połączone są nicią nierozciągliwą bez masy. Punkt A_1 zawieszony jest

na nici OA_1 , również nierozciągliwej i bez masy. Cały układ obraca się około osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω , przyczem kąty α i β , jakie nici OA_1 i A_1A_2 tworzą z pionem, nie ulegają zmianie podczas tego obrotu. Wyznaczyć kąty α i β .

Obierzmy w punkcie O początek układu ruchomego (x, y, z) , obracającego się około osi pionowej z z prędkością kątową ω (rys. 2). Możemy przyjąć, że punkt A_1 znajduje się stale w płaszczyźnie xz . Ponieważ kąt α jest stały, więc punkt A_1 jest w równowadze względnej względem układu (x, y, z) .



Wykażemy najpierw, że w płaszczyźnie xz znajduje się również punkt A_2 .

Ponieważ punkt A_1 jest w równowadze względnej, więc jego siła unoszenia $\bar{P}_u^{(1)}$ równoważy się z siłami działającymi t. j. z ciężarem $\bar{Q}_1$, reakcją $\bar{R}_1$ nici OA_1 i reakcją $\bar{R}_2$ nici A_1A_2 . Zatem

$$(9) \quad \bar{P}_u^{(1)} + \bar{Q}_1 + \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = 0.$$

Z równania powyższego wynika, że $\bar{R}_2 = -\bar{P}_u^{(1)} - \bar{Q}_1 - \bar{R}_1$. Ponieważ siły $-\bar{P}_u^{(1)}$, $-\bar{Q}_1$ i $-\bar{R}_1$ leżą w płaszczyźnie xz , więc $\bar{R}_2$ leży również w płaszczyźnie xz . Ponieważ nadto $\bar{R}_2$ ma kierunek nici A_1A_2 , więc i nią A_1A_2 leży w płaszczyźnie xz ; zatem punkt A_2 leży również w płaszczyźnie xz .

Przejdźmy do wyznaczenia kątów α i β . Z uwagi na to, że kąty te są stałe, oraz że długości OA_1 i A_1A_2 również się nie zmieniają, wynika, że punkt A_2 jest także w równowadze względnej względem układu (x, y, z) . Oznaczając przez $\bar{P}_u^{(2)}$ jego siłę unoszenia, a przez $\bar{Q}_2$ jego ciężar, otrzymamy

$$(10) \quad \bar{P}_u^{(2)} + \bar{Q}_2 - \bar{R}_2 = 0.$$

Oznaczmy przez r_1 i r_2 odległości punktów A_1 i A_2 od osi obrotu. Mamy:

$$(11) \quad r_1 = OA_1 \sin \alpha, \quad r_2 = OA_1 \sin \alpha + A_1A_2 \sin \beta,$$

$$(12) \quad |\bar{P}_u^{(1)}| = m_1 r_1 \omega^2, \quad |\bar{P}_u^{(2)}| = m_2 r_2 \omega^2.$$

Utwórzmy rzuty (9) i (10) na osie x i z . Kładąc $R_1 = |\bar{R}_1|$ i $R_2 = |\bar{R}_2|$, dostaniemy:

$$(13) \quad m_1 r_1 \omega^2 - R_1 \sin \alpha + R_2 \sin \beta = 0, \quad -m_1 g + R_1 \cos \alpha - R_2 \cos \beta = 0,$$

$$(14) \quad m_2 r_2 \omega^2 - R_2 \sin \beta = 0, \quad -m_2 g + R_2 \cos \beta = 0.$$

Z równań (13) i (14) otrzymujemy:

$$(15) \quad \operatorname{tg} \alpha = (m_1 r_1 + m_2 r_2) \omega^2 / (m_1 + m_2) g, \quad \operatorname{tg} \beta = r_2 \omega^2 / g.$$

Jeżeli przez r_0 oznaczymy odległość środka S masy układu punktów A_1, A_2 od osi obrotu z , to otrzymamy $(m_1 + m_2) r_0 = m_1 r_1 + m_2 r_2$, skąd na mocy (15) $\operatorname{tg} \alpha = r_0 \omega^2 / g$, a więc z uwagi na to, że $r_1 < r_0 < r_2$, będzie $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta$ czyli $\alpha < \beta$.

Znając OA_1 i A_1A_2 , znajdujemy α i β z równań (11) i (15).

Przykład 4. Maszyna Atwooda. Na końcach nici (nierozciągliwej, bez masy), przewiniętej przez krążek (bez masy), zawieszono są dwa ciężkie punkty materialne o masach m_1 i m_2 . Załóżmy, że oba punkty poruszają się pionowo. Ponieważ nie jest nierozciągliwa, więc drogi przebywane przez oba punkty są równe. Zatem przyspieszenia i prędkości obu punktów są równe co do wielkości, zwroty zaś mają przeciwne. Oznaczmy przez p rzut przyspieszenia punktu m_1 na oś z skierowaną pionowo w dół. Niechaj R oznacza wartość bezwzględną siły, z jaką nie działa na punkty m_1 i m_2 . Na punkt m_1 działa ciężar i reakcja nici. Zatem

$$(16) \quad m_1 p = m_1 g - R.$$

Dla punktu m_2 otrzymamy podobnie

$$(17) \quad -m_2 p = m_2 g - R.$$

Z równań (16) i (17) dostajemy:

$$(18) \quad p = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad R = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

A więc punkty będą się poruszać z przyspieszeniem stałym. Z równania (18) dostajemy $(m_1 + m_2)p = m_1 g - m_2 g$.

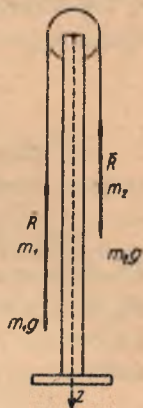
A więc przyspieszenie jest takie, jak gdyby na punkt materialny o masie $m_1 + m_2$ działała siła $m_1 g - m_2 g$, t. j. siła równa różnicy ciężarów.

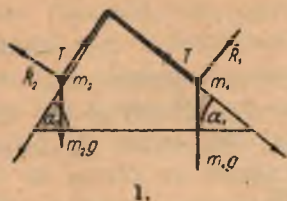
Jeżeli $m_1 > m_2$, wówczas $p > 0$, t. zn. że przyspieszenie punktu m_1 jest skierowane w dół, zaś punktu m_2 w górę.

Jeżeli $m_1 = m_2$, wówczas $p = 0$, t. zn. że punkty poruszają się ruchem jednostajnym.

Przykład 5. Dwa punkty ciężkie o masach m_1 i m_2 , połączone nicią nierozciągliwą bez masy, poruszają się w płaszczyźnie pionowej po dwóch prostych l_1 i l_2 . Na punkt m_1 działa nie z siłą $\vec{T}_1$, ciężar $m_1 \vec{g}$ i reakcja prostej $\vec{R}_1$. Podobnie na punkt m_2 działają siły $\vec{T}_2$, $m_2 \vec{g}$ i $\vec{R}_2$. Przyjmijmy, że nie ma tarcia, zatem że $\vec{R}_1$ i $\vec{R}_2$ są prostopadłe odpowiednio do prostych l_1 i l_2 (str. 198, rys. 1).

Ponieważ nie jest nierozciągliwa, więc drogi przebywane przez oba punkty będą równe, przyspieszenia będą tedy równe co do wielkości.





Nadajmy prostym l_1 i l_2 zwroty w dół. Niechaj p oznacza współrzędną (względem l_1) przyspieszenia punktu m_1 , zatem współrzędną (względem l_2) przyspieszenia punktu m_2 wynosi $-p$. Siły $\bar{T}_1$ i $\bar{T}_2$ są co do wielkości równe; połóżmy $T = |\bar{T}_1| = |\bar{T}_2|$.

Oznaczmy przez α_1 i α_2 kąty, jakie proste l_1 i l_2 tworzą z poziomem. Tworząc rzuty na proste l_1 i l_2 , otrzymamy $m_1 p = -T + m_1 g \sin \alpha_1$ i $-m_2 p = -T + m_2 g \sin \alpha_2$, skąd

$$p = \frac{m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2}{m_1 + m_2} g.$$

A więc punkty poruszać się będą po prostych ruchem jednostajnie przyspieszonym.

§ 2. Ruch środka masy. Własności kinematyczne środka masy. Niechaj będzie dany układ punktów materialnych $A_1, A_2, \dots$ o masach $m_1, m_2, \dots$, którego środkiem masy jest punkt S (rys. 2). Obierzmy dowolny punkt O . Połóżmy $m = \sum m_i$ oraz:

$$\bar{r}_0 = \overline{OS}, \quad \bar{r}_i = \overline{OA_i} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Przy powyższym znakowaniu zachodzi równość

$$(I) \quad m \bar{r}_0 = \sum m_i \bar{r}_i.$$

Dowód. Obierzmy dowolny układ współrzędnych o początku w O . Jeżeli x_i, y_i, z_i oznaczają współrzędne punktu A_i , zaś x_0, y_0, z_0 współrzędne środka S , to na mocy (II), str. 155, jest:

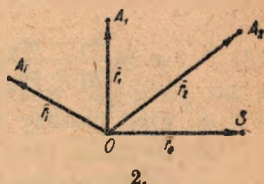
$$(1) \quad m x_0 = \sum m_i x_i, \quad m y_0 = \sum m_i y_i, \quad m z_0 = \sum m_i z_i.$$

Ponieważ wektor $\bar{r}_i$ ma rzuty x_i, y_i, z_i , zaś $\bar{r}_0$ ma rzuty x_0, y_0, z_0 , więc równanie (I) jest tylko postacią wektorową równości (1).

Utwórzmy teraz pochodną obu stron równości (I) względem czasu; otrzymamy $m \dot{\bar{r}}_0 = \sum m_i \dot{\bar{r}}_i$. Ponieważ $\dot{\bar{r}}_i$ oznacza prędkość $\bar{v}_i$ punktu A_i , zaś $\dot{\bar{r}}_0$ prędkość $\bar{v}_0$ środka masy S względem układu $O(x, y, z)$, więc

$$(II) \quad m \bar{v}_0 = \sum m_i \bar{v}_i.$$

Wektor $m \bar{v}_i$ jest pędem (str. 73) punktu A_i . Prawa strona równości (II) przedstawia więc sumę pędów poszczególnych punktów układu. Sumę tę nazywamy *pędem (ogólnym) układu*.



Wektor $m\vec{v}_0$ możemy uważać za pęd punktu materialnego, mającego masę równą masie całkowitej układu, umieszczonego w środku masy (i poruszającego się wraz ze środkiem masy).

A więc: *pęd (ogólny) układu równa się pędowi masy całkowitej układu, umieszczonej w środku masy.*

Zrózniczkujmy równanie (II) obustronnie względem czasu t . Dostaniemy $m\vec{v}_0 = \sum m_i \vec{v}_i$. Lecz $\vec{v}_i$ oznacza przyspieszenie $\vec{p}_i$ punktu A_i , zaś $\vec{v}_0$ przyspieszenie $\vec{p}_0$ środka masy S . Więc

$$(III) \quad m \vec{p}_0 = \sum m_i \vec{p}_i.$$

Wektor $-m_i \vec{p}_i$ nazwaliśmy siłą bezwładności punktu A_i (str. 74 i 192).

A więc: *suma sił bezwładności punktów układu równa się sile bezwładności masy całkowitej układu, umieszczonej w środku masy.*

Uwaga. Tworząc rzuty na osie układu współrzędnych, otrzymamy z równań (II) i (III):

$$(II') \quad m \dot{x}_0 = \sum m_i \dot{x}_i, \quad m \dot{y}_0 = \sum m_i \dot{y}_i, \quad m \dot{z}_0 = \sum m_i \dot{z}_i,$$

$$(III') \quad m \ddot{x}_0 = \sum m_i \ddot{x}_i, \quad m \ddot{y}_0 = \sum m_i \ddot{y}_i, \quad m \ddot{z}_0 = \sum m_i \ddot{z}_i.$$

Wypadkowa sił ciężkości. Niech układ punktów $A_1, A_2, \dots$ o masach $m_1, m_2, \dots$ znajduje się w polu siły ciężkości. Oznaczmy przez $\vec{g}$ wektor przyspieszenia ziemskiego, a przez S środek masy. Niechaj O będzie dowolnym punktem. Połóżmy jak poprzednio $\vec{r}_0 = \vec{OS}$ i $\vec{r}_i = \vec{OA}_i$ dla $i=1, 2, \dots$. Moment ogólny sił ciężkości względem O wynosi $\vec{M} = (m_1 \vec{g} \times \vec{r}_1) + (m_2 \vec{g} \times \vec{r}_2) + \dots$, więc $\vec{M} = \vec{g} \times (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots)$, skąd na mocy (I), str. 198,

$$(2) \quad \vec{M} = \vec{g} \times m \vec{r}_0 = m \vec{g} \times \vec{r}_0.$$

Jeżeli w szczególności punkt O schodzi się z S , to $\vec{r}_0 = 0$, skąd na mocy (2) $\vec{M} = 0$.

A więc: *moment ogólny ciężarów punktów układu względem środka masy jest zerem.*

Ponieważ ciężary tworzą układ sił równoległych i zgodnie skierowanych, więc układ ten ma wypadkową (str. 26). Wypadkowa przechodzi przez środek masy, gdyż moment ogólny względem środka masy jest zerem.

Własności dynamiczne środka masy. Niechaj na punkty materialne m_i danego układu działają siły $\vec{P}_i$. Oznaczmy przez $\vec{p}_i$ przyspieszenie punktu m_i , a przez $\vec{p}_0$ przyspieszenie środka masy tego układu punktów względem inercyjnego układu współrzędnych. Na mocy wzoru (III), str. 199, mamy $m\vec{p}_0 = \sum m_i \vec{p}_i$, gdzie $m = \sum m_i$. Ponieważ $m_i \vec{p}_i = \vec{P}_i$, więc $m\vec{p}_0 = \sum \vec{P}_i$ czyli

$$(IV) \quad m\vec{p}_0 = \vec{P}, \quad \text{gdzie} \quad \vec{P} = \sum \vec{P}_i.$$

A więc: *środek masy układu punktów porusza się tak, jak gdyby była w nim skupiona całkowita masa układu, poddana działaniu sumy wszystkich sił.*

Równanie (IV) możemy napisać w postaci $d(m\vec{v}_0)/dt = \vec{P}$.

Zatem: *po pochodna pędu układu równa jest sumie wszystkich sił działających.*

Jeżeli suma sił działających na punkty układu jest równa zeru, t. j. jeżeli $\vec{P} = 0$, wówczas na mocy (IV) mamy $m\vec{p}_0 = 0$ czyli $\vec{p}_0 = 0$. Jeżeli suma $\vec{P}$ jest zerem stale, to stale jest $\vec{p}_0 = 0$, więc prędkość $\vec{v}_0$ środka masy jest stała. Środek masy jest wtedy w spoczynku albo w ruchu jednostajnym prostoliniowym. Zauważmy, że na mocy (II), str. 198, jest $m\vec{v}_0 = \sum m_i \vec{v}_i$; a więc w tym przypadku pęd ogólny (czyli ilość ruchu) układu jest wektorem stałym.

A więc: *jeżeli suma sił, działających na układ punktów, jest stale równa zeru, to środek masy jest w spoczynku albo w ruchu jednostajnym prostoliniowym, a pęd ogólny układu jest wektorem stałym.*

Powyższe twierdzenie nosi nazwę *zasady zachowania pędu lub ilości ruchu*.

Jak wiemy (str. 191), suma sił wewnętrznych jest zawsze zerem, zatem suma wszystkich sił działających na punkty układu równa się sumie sił zewnętrznych. W podanych twierdzeniach możemy więc sumę sił zastąpić przez sumę sił zewnętrznych.

Oznaczmy przez $\vec{P}^{(z)}$ sumę sił zewnętrznych. Na mocy (IV) jest

$$(V) \quad m\vec{p}_0 = \vec{P}^{(z)}.$$

Jeżeli na układ nie działają żadne siły zewnętrzne, to $\vec{p}_0 = 0$, więc $\vec{v}_0 = \text{const}$. Możemy więc powiedzieć, że *siły wewnętrzne nie mogą zmienić prędkości środka masy ani co do wielkości, ani co do kierunku.*

Weźmy pod uwagę układ słoneczny (t. j. złożony ze słońca i planet). Siły, pochodzące z przyciągania ciał układu słonecznego przez gwiazdy stałe, możemy pominąć, gdyż siły te są bardzo małe z powodu wielkich odległości gwiazd stałych. Możemy więc przyjąć, że na ciała układu słonecznego działają tylko siły wewnętrzne, z jakimi ciała te przyciągają się wzajemnie według prawa Newtona (str. 90). Wynika stąd, że środek masy układu słonecznego jest względem gwiazd stałych w spoczynku albo porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Przypuśćmy, że badamy ruch układu punktów w polu siły ciężkości. Suma sił ciężkości wynosi $m_1g + m_2g + \dots = mg$. Środek masy S będzie więc poruszał się tak, jak punkt materialny o masie m pod wpływem siły ciężkości mg , t. j. po prostej lub paraboli, aż do chwili gdy choć jeden z punktów układu dotknie ziemi. W tej bowiem chwili wystąpi nowa siła zewnętrzna wskutek zderzenia się punktu z ziemią.

Przykłady: 1. Środek masy pocisku biegnie po paraboli nawet wówczas, gdy pocisk wybuchnie i pęknie. Ruch środka masy nie zostanie bowiem przez to zakłócony, ponieważ wybuch powstaje pod wpływem sił wewnętrznych. Dopiero gdy jeden z odłamków spadnie na ziemię, ruch środka masy ulegnie zmianie.

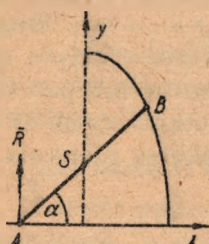
2. Gdy człowiek znajduje się na płaszczyźnie poziomej gładkiej (np. na lodzie), siłami zewnętrznymi są reakcja płaszczyzny i siła ciężkości; obie siły mają kierunek pionowy. Jeżeli w chwili początkowej człowiek był w spoczynku, to dopóki nie wystąpią inne siły zewnętrzne, środek masy będzie mógł się poruszać tylko po pionie. Ruchy, jakie człowiek wykonywa przy pomocy mięśni, odbywają się pod wpływem sił wewnętrznych, a więc nie mogą wpłynąć na ruch środka masy w kierunku poziomym. Gdyby zatem nie było tarcia, chodzenie byłoby niemożliwe.

Jeżeli pewna część układu punktów zmienia w jakiejś chwili swój pęd pod wpływem sił wewnętrznych, wówczas pęd pozostałej części układu doznaje równocześnie zmiany równej co do wielkości i kierunku, lecz o zwrocie przeciwnym. Siły wewnętrzne nie mogą bowiem zmienić pędu ogólnego. Oznaczając przez m' i m'' masę jednej i drugiej części układu, a przez $\vec{v}_0$ i $\vec{v}_0'$ zmianę prędkości środków tych mas, otrzymamy $m'\vec{v}_0 + m''\vec{v}_0' = 0$ czyli $|\vec{v}_0|/|\vec{v}_0'| = m''/m'$.

A zatem: *zmiana prędkości środków mas jest odwrotnie proporcjonalna do mas obu części układu.*

Tym tłumaczy się cofanie armaty po strzale. Podobnie, jeżeli człowiek zacznie biec po pokładzie łodzi, łódź zacznie się poruszać w kierunku przeciwnym. Prędkości łodzi i człowieka będą w stosunku odwrotnym do ich mas.

Przykład 1. Na gładkiej płaszczyźnie poziomej Π opiera się pręt ciężki AB (o gęstości stałej). Siłami zewnętrznymi są ciężar i reakcja w punkcie A ; obie siły są pionowe. Jeżeli zatem w chwili początkowej pręt był w spoczynku, to pod działaniem sił zewnętrznych, których suma ma kierunek pionowy, pręt będzie się poruszał w taki sposób, że środek S jego masy będzie spadał po pionie.



Oberzmy za oś x krawędź przecięcia płaszczyzny pionowej (przechodzącej przez pręt) z płaszczyzną Π . Za oś y przyjmijmy pion, po którym się porusza środek ciężkości S . Połóżmy $AB=l$ i oznaczmy przez α kąt, jaki AB tworzy z osią x . Oznaczając przez x, y współrzędne punktu B , otrzymujemy: $x = \frac{1}{2}l \cos \alpha$ i $y = l \sin \alpha$, skąd

$$(x / \frac{1}{2}l)^2 + (y/l)^2 = 1.$$

Koniec pręta B będzie więc poruszał się po elipsie o osiach $l, 2l$.

Przykład 2. Niech układ punktów $A_1, A_2, \dots$ o masach $m_1, m_2, \dots$ porusza się w polu środkowym (str. 102) sił sprężystych (str. 114), proporcjonalnych do mas. Niechaj O będzie środkiem pola. Połóżmy $OA_1 = \vec{r}_1$, $OA_2 = \vec{r}_2$ i t. d. Oznaczając przez $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots$ siły działające na punkty $A_1, A_2, \dots$ i kładąc $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots$, otrzymamy $\vec{P}_1 = -\lambda^2 m_1 \vec{r}_1$, $\vec{P}_2 = -\lambda^2 m_2 \vec{r}_2$ i t. d., skąd $\vec{P} = -\lambda^2 (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots)$. Oznaczając przez S środek masy całkowitej m i kładąc $OS = \vec{r}_0$, otrzymamy na mocy (I), str. 198,

$$\vec{P} = -\lambda^2 m \vec{r}_0.$$

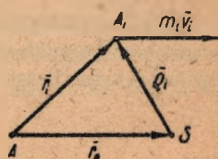
A zatem środek masy będzie się poruszał tak jak punkt materialny o masie m , poddany działaniu siły sprężystej $\vec{P}$. Środek masy będzie się więc poruszał ruchem harmonicznym płaskim po prostej lub po elipsie (str. 114).

§ 3. Moment ilości ruchu. Kręt względem punktu. Niech dany będzie układ punktów $A_1, A_2, \dots$ o masach $m_1, m_2, \dots$ i masie całkowitej m . Weźmy pod uwagę układ pędów (układ ilości ruchu) t. j. wektorów $m_1 \vec{v}_1, m_2 \vec{v}_2, \dots$ o początkach w $A_1, A_2, \dots$.

Moment ogólny układu pędów (ilości ruchu) względem dowolnego punktu A nazywamy krętem lub momentem ilości ruchu układu względem A .

Zatem kręt $\vec{K}$ względem A wynosi

$$\vec{K} = \sum \text{Mom}_A(m_i \vec{v}_i).$$



Kładąc $\bar{r}_i = \overline{AA_i}$, otrzymamy

$$(1) \quad \bar{K} = \sum (m_i \bar{v}_i \times \bar{r}_i).$$

Jeżeli ξ, η, ζ są współrzędnymi punktu A zaś x_i, y_i, z_i współrzędnymi punktu A_i , to rzuty krętu na osie układu wynoszą:

$$(I) \quad \begin{aligned} K_x &= \sum m_i [\dot{y}_i(z_i - \zeta) - \dot{z}_i(y_i - \eta)], \\ K_y &= \sum m_i [\dot{z}_i(x_i - \xi) - \dot{x}_i(z_i - \zeta)], \\ K_z &= \sum m_i [\dot{x}_i(y_i - \eta) - \dot{y}_i(x_i - \xi)]. \end{aligned}$$

W szczególności, gdy $\xi = \eta = \zeta = 0$, mamy:

$$(I') \quad K_x = \sum m_i (\dot{y}_i z_i - \dot{z}_i y_i), \quad K_y = \sum m_i (\dot{z}_i x_i - \dot{x}_i z_i), \quad K_z = \sum m_i (\dot{x}_i y_i - \dot{y}_i x_i).$$

Niechaj S będzie środkiem masy. Połóżmy $\overline{AS} = \bar{r}_0$ i $\overline{SA_i} = \bar{\rho}_i$ dla $i=1, 2, \dots$. Mamy $\bar{r}_i = \bar{\rho}_i + \bar{r}_0$. Zatem na mocy (1) kręt względem A wynosi

$$\bar{K} = \sum m_i \bar{v}_i \times (\bar{\rho}_i + \bar{r}_0) = \sum m_i \bar{v}_i \times \bar{\rho}_i + (\sum m_i \bar{v}_i) \times \bar{r}_0.$$

Pierwszy składnik ostatniego człona jest krętem względem środka masy. Kręt ten oznaczymy przez $\bar{K}_0$. Ponieważ $\sum m_i \bar{v}_i = m \bar{v}_0$ (gdzie $\bar{v}_0$ oznacza prędkość środka masy), więc

$$(2) \quad \bar{K} = \bar{K}_0 + m \bar{v}_0 \times \bar{r}_0.$$

Zauważmy, że $m \bar{v}_0 \times \bar{r}_0$ jest to moment względem A ogólnego pędu, zaczepionego w środku masy.

Wzór (2) wynika bezpośrednio z twierdzenia na str. 20, odnoszącego się do zmiany ogólnego momentu układu wektorów.

Kręt w ruchu postępowym. Załóżmy, że układ punktów porusza się ruchem postępowym z prędkością $\bar{v}$, t. zn. że wszystkie punkty mają prędkość $\bar{v}$.

Kręt względem dowolnego punktu A wynosi zatem wedle (2) $\bar{K} = \sum (m_i \bar{v} \times \bar{r}_i) = \sum (\bar{v} \times m_i \bar{r}_i) = \bar{v} \times \sum m_i \bar{r}_i$. Lecz na mocy (I), str. 198, jest $\sum m_i \bar{r}_i = m \bar{r}_0$. Więc $\bar{K} = \bar{v} \times m \bar{r}_0$ czyli

$$(3) \quad \bar{K} = m \bar{v} \times \bar{r}_0.$$

A więc: kręt układu punktów, poruszającego się ruchem postępowym względem pewnego punktu A , równa się momentowi względem A pędu ogólnego, zaczepionego w środku masy układu.

W szczególności gdy punkt A pokrywa się ze środkiem masy, mamy $\bar{r}_0 = 0$, więc $\bar{K} = 0$. Zatem: kręt względem środka masy w ruchu postępowym jest równy zeru.

Wynika stąd (str. 26), że układ pędów w ruchu postępowym ma wypadkową o początku w środku masy układu.

Kręt w ruchu względem środka masy. Niech układ współrzędnych $O(x, y, z)$ porusza się ruchem postępowym z prędkością $\bar{u}$. Oznaczając przez $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots$ prędkości względne punktów $A_1, A_2, \dots$, przez $\bar{w}_0$ prędkość względną środka S ich masy, przez $\bar{K}_w$ kręt ruchu względnego i przez $\bar{K}_b$ kręt ruchu bezwzględnego układu tych punktów względem O , otrzymamy

$$\bar{K}_w = m_1 \bar{w}_1 \times \overline{OA_1} + m_2 \bar{w}_2 \times \overline{OA_2} + \dots$$

Ponieważ $\bar{w}_1 = \bar{v}_1 - \bar{u}$, $\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \bar{u}$, ..., więc

$$\bar{K}_w = (m_1 \bar{v}_1 \times \overline{OA_1} + m_2 \bar{v}_2 \times \overline{OA_2} + \dots) - \bar{u} \times (m_1 \overline{OA_1} + m_2 \overline{OA_2} + \dots).$$

Wyrażenie zawarte w pierwszym nawiasie równe jest $\bar{K}_b$; wyrażenie zawarte w drugim nawiasie wynosi $m \cdot \overline{OS}$ (str. 198). Zatem

$$(4) \quad \bar{K}_w = \bar{K}_b - m \bar{u} \times \overline{OS}.$$

W szczególności, gdy początek O ruchomego układu współrzędnych obierzemy w środku S masy układu punktów $A_1, A_2, \dots$, będzie $\overline{OS} = 0$, skąd na mocy (4) $\bar{K}_w = \bar{K}_b$.

Jeżeli więc badamy ruch układu względem środka masy, to *kręty względem środka masy w ruchu względnym i bezwzględnym są równe*.

Kręt względem osi. Moment ogólny pędów układu punktów względem pewnej osi nazywamy *krętem układu względem tej osi*.

Wzory (I) przedstawiają kręty układu punktów względem osi równoległych do osi x, y, z , przechodzących przez punkt A , a wzory (I') kręty względem osi x, y, z . Weźmy pod uwagę kręt względem osi y

$$K_y = \sum m_i (\dot{x}_i x_i - \dot{x}_i z_i).$$

Oznaczając przez S_i prędkość połową (str. 47) ruchu, jaki wykonywa rzut punktu A_i na płaszczyznę pionową xz , otrzymamy ze wzoru (II), str. 48, $S_i = \frac{1}{2} (\dot{x}_i x_i - \dot{x}_i z_i)$, zatem

$$K_y = 2 \sum m_i S_i.$$

A więc: *kręt względem pewnej osi równa się podwójnej sumie iloczynów mas przez prędkości połowe ruchów, jakie wykonują rzuty punktów na płaszczyznę prostopadłą do tej osi*:

$$(5) \quad K = 2 \sum m_i S_i.$$

Jeżeli w płaszczyźnie prostopadłej do osi wprowadzimy współrzędne biegunowe r, φ , wówczas na mocy (I), str. 48, otrzymamy $S_i = \frac{1}{2} r_i^2 \dot{\varphi}_i$, a więc

$$(6) \quad K = \sum m_i r_i^2 \dot{\varphi}_i.$$

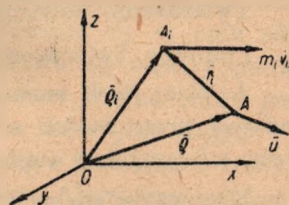
Niech układ punktów obraca się około pewnej osi z prędkością kątową ω . Mamy wówczas $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dots = \omega$. Zatem $K = \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2$. Ponieważ $\sum m_i r_i^2 = I$, gdzie I jest momentem bezwładności względem osi obrotu, więc

$$(7) \quad K = I\omega.$$

A więc: jeżeli układ punktów obraca się około pewnej osi, wówczas kręt względem osi obrotu równa się iloczynowi prędkości kątowej i momentu bezwładności względem osi obrotu.

Dynamiczne własności krętu. Niech A będzie dowolnym punktem stałym lub ruchomym. Oznaczmy przez $\bar{r}_i$ wektory $\overline{AA_i}$, przez $\bar{\varrho}_i$ wektory $\overline{OA_i}$ (gdzie O jest początkiem układu inercyjnego współrzędnych), przez $\bar{\varrho}$ wektor $\overline{OA}$ i przez $\bar{u}$ prędkość punktu A . Zatem:

$$(8) \quad \dot{\bar{\varrho}} = \bar{u} \quad \text{i} \quad \dot{\bar{\varrho}}_i = \bar{v}_i \quad (i=1, 2, \dots).$$



Niechaj $\bar{K}$ będzie krętem względem A . Na mocy (1), str. 203, jest $\bar{K} = \sum (m_i \bar{v}_i \times \bar{r}_i)$. Oznaczając przez $\bar{p}_i$ przyśpieszenia punktów A_i , otrzymamy, różniczkując względem t ,

$$(9) \quad \dot{\bar{K}} = \sum (m_i \bar{p}_i \times \bar{r}_i) + \sum (m_i \bar{v}_i \times \dot{\bar{r}}_i).$$

Lecz $\dot{\bar{r}}_i = \dot{\bar{\varrho}}_i - \dot{\bar{\varrho}}$, więc $\dot{\bar{r}}_i = \bar{v}_i - \bar{u}$, więc $\sum (m_i \bar{v}_i \times \dot{\bar{r}}_i) = \sum (m_i \bar{v}_i \times \bar{v}_i) - \sum (m_i \bar{v}_i \times \bar{u})$. Ale $\bar{v}_i \times \bar{v}_i = 0$, zaś $\sum m_i \bar{v}_i = m \bar{v}_0$, gdzie $\bar{v}_0$ oznacza prędkość środka masy. Zatem

$$(10) \quad \sum (m_i \bar{v}_i \times \dot{\bar{r}}_i) = -m \bar{v}_0 \times \bar{u}.$$

Jeżeli na punkt A_i działa siła $\bar{P}_i$, to $m_i \bar{p}_i = \bar{P}_i$, a zatem $m_i \bar{p}_i \times \bar{r}_i = \bar{P}_i \times \bar{r}_i = \text{Mom}_A \bar{P}_i$. Jeżeli więc $\bar{M}$ jest momentem ogólnym sił względem A , to $\sum m_i \bar{p}_i \times \bar{r}_i = \sum \bar{P}_i \times \bar{r}_i = \sum \text{Mom}_A \bar{P}_i = \bar{M}$. Wzór ten łącznie ze wzorem (10) daje na mocy (9)

$$(II) \quad \dot{\bar{K}} = \bar{M} - m \bar{v}_0 \times \bar{u}.$$

Wyrażenie $\bar{v}_0 \times \bar{u}$ będzie zerem, jeżeli przyjmiemy, że punkt A jest w spoczynku (zatem że $\bar{u} = 0$) lub że A pokrywa się ze środkiem masy (zatem że $\bar{u} = \bar{v}_0$). W obu przypadkach otrzymamy

$$(III) \quad \dot{\bar{K}} = \bar{M}.$$

A więc: pochodna krętu (względem punktu stałego lub środka masy) równa się ogólnemu momentowi sił działających.

Tworząc rzuty na oś stałą lub przechodzącą przez środek masy i nie zmieniającą kierunku, wnosimy ze wzoru (III), że *pochodna krętu względem osi stałej (lub przechodzącej przez środek masy i nie zmieniającej kierunku) równa się ogólnemu momentowi sił względem tej osi.*

W szczególności gdy moment ogólny sił względem pewnego punktu stałego lub względem środka masy jest stale zerem, pochodna krętu jest zerem czyli kręt jest wektorem stałym.

A więc: *jeżeli moment ogólny sił (względem pewnego punktu stałego lub środka masy) jest stale zerem, wówczas kręt jest wektorem stałym.*

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania krętu.*

Podobne twierdzenie otrzymujemy dla krętu względem osi.

A więc: *jeżeli moment sił względem pewnej osi stałej (lub przechodzącej przez środek masy i nie zmieniającej kierunku) jest stale zerem, wówczas kręt względem tej osi jest stały.*

Kręt względem osi wynosi w myśl wzoru (5), str. 204, $K = 2 \sum m_i S_i$, gdzie przez S_i oznaczyliśmy prędkości połowe ruchów, jakie wykonują rzuty na płaszczyznę Π prostopadłą do osi. Jeżeli więc kręt jest stały, to

$$(11) \quad \sum m_i S_i = c = \text{const.}$$

Zauważmy, że $a_i = \int_{t_0}^t S_i dt$ przedstawia pole zakresłone w płaszczyźnie Π przez rzut na nią promienia wodzącego r_i punktu A_i w czasie od t_0 do t . Zatem na mocy (11)

$$(12) \quad \sum m_i a_i = c(t - t_0).$$

A więc: *suma iloczynów mas i pól, zakreslonych przez rzuty promieni wodzących na płaszczyznę prostopadłą do osi, jest proporcjonalna do czasu.*

Z tego powodu zasada zachowania krętu nosi również nazwę *zasady zachowania pól.*

Jak wiemy (str. 191), moment sił wewnętrznych jest względem dowolnego punktu równy zeru. Zatem moment wszystkich sił działających sprowadza się do momentu sił zewnętrznych. Jeżeli więc przez $\bar{M}^{(2)}$ oznaczymy moment sił zewnętrznych względem pewnego punktu stałego A lub środka masy, równość (III) przyjmie postać

$$(III') \quad \dot{K} = \bar{M}^{(2)}.$$

W twierdzeniach poprzednio podanych możemy więc moment wszystkich sił działających zastąpić przez moment sił zewnętrznych.

Jeżeli na układ punktów żadne siły zewnętrzne nie działają, to zachodzi oczywiście zasada zachowania pól (krętu), a więc kręt względem każdego punktu stałego lub środka masy jest wtedy wektorem stałym. Ponieważ kręt względem każdej osi stałej (lub przechodzącej przez środek masy i nie zmieniającej kierunku) jest wówczas stały, więc równania (11) i (12) zachodzą dla ruchów, jakie wykonują rzuty punktów na dowolną płaszczyznę stałą (lub poruszającą się wraz ze środkiem masy i nie zmieniającą kierunku).

Ruch w polu siły ciężkości. Niech układ punktów materialnych $A_1, A_2, \dots$ o masach $m_1, m_2, \dots$ porusza się w polu siły ciężkości. Jeżeli jedynymi siłami zewnętrznymi są ciężary punktów, to moment ogólny sił ciężkości względem środka masy jest zerem (str. 199), więc kręt względem środka masy jest stały.

Przyjmijmy układ ruchomy współrzędnych o początku w środku ciężkości, poruszający się ruchem postępowym. Aby otrzymać ruch względny, należy do sił działających dodać siły unoszenia (siła Coriolisa jest zerem, bo układ współrzędnych porusza się, w myśl założenia, ruchem postępowym).

Oznaczmy przez $\vec{g}$ wektor przyspieszenia ziemskiego. Ponieważ środek ciężkości ma przyspieszenie $\vec{g}$, więc przyspieszenie unoszenia wynosi również $\vec{g}$. Zatem siła unoszenia dla poszczególnych punktów wynosi $-m_1\vec{g}, -m_2\vec{g}, \dots$. Widzimy więc, że siły unoszenia znoszą się z ciężarami punktów. A więc ruch względny będzie taki, jak gdyby nie działała siła ciężkości. Jeżeli prócz ciężarów nie ma innych sił zewnętrznych, to kręt względem środka masy w ruchu względnym będzie wektorem stałym i na mocy (4), str. 204, będzie równy krętowi względem środka masy w ruchu bezwzględnym.

Przykład 1. Dwa punkty materialne A i B o masach m_1 i m_2 , połączone prętem sztywnym bez masy, poruszają się w polu siły ciężkości. Na punkty A i B działają więc siły ciężkości i reakcje pręta $\vec{R}$ i $-\vec{R}$. Reakcje zachowują się tak jak siły wewnętrzne, działają bowiem wzdłuż prostej łączącej te punkty, są co do wielkości równe, zwroty zaś mają przeciwne. Środek masy będzie się więc poruszał (jak punkt materialny o masie $m_1 + m_2$ pod wpływem ciężaru) z przyspieszeniem pionowym g po linii prostej lub po paraboli.

Oznaczmy przez $\bar{v}_1$ i $\bar{v}_2$ prędkości punktów A i B , a przez S środek masy. Kręt względem środka masy wynosi

$$(12) \quad \bar{K} = m_1 \bar{v}_1 \times \bar{SA} + m_2 \bar{v}_2 \times \bar{SB}.$$

Ponieważ

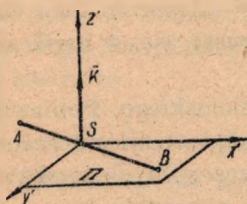
$$SA = \frac{m_2}{m_1 + m_2} AB, \quad SB = \frac{m_1}{m_1 + m_2} AB,$$

(str. 158), więc

$$\bar{SA} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{AB}, \quad \bar{SB} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{AB},$$

skąd otrzymujemy przez podstawienie w (12):

$$(13) \quad \bar{K} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\bar{v}_2 - \bar{v}_1) \times \bar{AB}.$$



Załóżmy, że $\bar{K} \neq 0$; zatem $\bar{K} \perp \bar{AB}$. Ponieważ $\bar{K}$ jest wektorem stałym, więc odcinek AB jest podczas ruchu stale równoległy do pewnej płaszczyzny Π , prostopadłej do krętu $\bar{K}$.

Obierzmy środek masy za początek ruchomego układu współrzędnych (x', y', z') , poruszającego się ruchem postępowym. Przyjmijmy, że płaszczyzna $x'y'$ jest stale równoległa do Π . Zatem oś z' jest równoległa do $\bar{K}$. Pręt AB pozostaje więc stale w płaszczyźnie $x'y'$. Wynika stąd, że ruch względny pręta AB będzie obrotem około osi z' (punkt S pręta jest bowiem nieruchomy względem układu (x', y', z')). Ponieważ kręt w ruchu względnym jest stały, więc kręt względem osi z' wyniesie w myśl wzoru (7), str. 205,

$$(14) \quad K_{z'} = I_{z'} \omega = \text{const.},$$

gdzie moment bezwładności $I_{z'} = m_1 AS^2 + m_2 BS^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} AB^2$, zaś ω oznacza prędkość kątową. Zatem $\omega = \text{const.}$

A więc ruch względny będzie obrotem w płaszczyźnie $x'y'$ około środka masy S z prędkością kątową stałą.

Obrót układu około osi. Załóżmy, że na układ U punktów materialnych nie działają żadne siły zewnętrzne. Przypuśćmy, że układ był na początku w spoczynku, a następnie jakaś część U_1 układu zaczęła się pod wpływem sił wewnętrznych obracać około pewnej osi stałej l . Oznaczmy przez I_1 moment bezwładności względem l , a przez ω_1 prędkość kątową tej części układu. Zatem kręt jej względem osi obrotu wynosi $K_1 = I_1 \omega_1$.

Ponieważ kręt całego układu musi być zerem, gdyż siły wewnętrzne nie mogą zmienić krętu, więc pozostała część U_2 układu musi wykonać ruch, którego kręt względem osi l wynosi $K_2 = -K_1$, tak by suma obu krętów była zerem (t. j. aby $K_1 + K_2 = 0$). Przypuśćmy, że ruch drugiej części jest również obrotem około osi l (przypadek ten zajdzie, jeżeli założymy np., że obie części mogą tylko obracać się około l). Jeżeli przez I_2 oznaczymy moment bezwładności części U_2 względem l , zaś przez ω_2 jej prędkość kątową, to $K_2 = I_2 \omega_2$.

Ponieważ $K_1 + K_2 = 0$, więc

$$(15) \quad I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 = 0.$$

Równanie powyższe wyraża związek między prędkościami kątowymi obu części układu U . Ponieważ

$$(16) \quad \omega_1 / \omega_2 = -I_2 / I_1,$$

więc obydwie części układu obracają się w kierunkach przeciwnych, przyczem ich prędkości kątowe są co do wielkości odwrotnie proporcjonalne do momentów bezwładności.

Oznaczmy przez φ_1 i φ_2 kąty, o jakie obróciły się części U_1 i U_2 układu U w czasie t . Ponieważ $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ i $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$, więc na mocy (13) jest $I_1 \dot{\varphi}_1 + I_2 \dot{\varphi}_2 = 0$, skąd $I_1 \varphi_1 + I_2 \varphi_2 = c$. Zakładając, że dla $t=0$ jest $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = 0$, otrzymamy $I_1 \varphi_1 + I_2 \varphi_2 = 0$ czyli

$$(17) \quad \varphi_1 / \varphi_2 = -I_2 / I_1.$$

Kąty obrotu są więc co do wielkości również odwrotnie proporcjonalne do momentów bezwładności obu części układu.

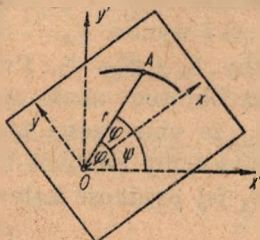
Jeżeli w pewnej chwili $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą, to położenie układu jest takie, jak gdyby układ obrócił się o kąt φ_1 .

Widzimy więc, że układ punktów może się pod działaniem jedynie sił wewnętrznych obrócić około osi o dowolny kąt φ . Obrót ten może nastąpić np. w ten sposób, że jedna część układu obróci się o kąt φ , a druga w kierunku przeciwnym o kąt $2\pi - \varphi$.

Tym tłumaczy się fakt, że kot spadając może obrócić się w powietrzu tak, by spaść na wszystkie cztery nogi.

Jeżeli na pokładzie łodzi zaczniemy obracać koło materialne około osi pionowej z prędkością kątową ω_1 , wówczas łódź pocznie się obracać w kierunku przeciwnym z prędkością kątową ω_2 ; obie prędkości będą spełniały związki (15) i (16), gdzie I_1 i I_2 oznaczają odpowiednio momenty bezwładności koła i łodzi.

Przykład 2. Kartka papieru spoczywa na gładkiej płaszczyźnie poziomej; kartka jest przebita szpilką w punkcie O tak, że może się tylko obracać wkoło tego punktu. Po kartce porusza się owad A .



Siłami zewnętrznymi działającymi na układ, złożony z kartki i owadu, są: reakcja szpilki o początku w punkcie O , ciężar kartki i owadu oraz reakcja płaszczyzny poziomej — mające kierunek pionowy. Moment tych sił względem osi pionowej z przechodzącej przez O jest więc równy zeru, a wobec tego kręt względem osi z jest stały.

Załóżmy, że w chwili początkowej $t=0$ owad i kartka papieru były w spoczynku. Kręt względem osi z będzie więc stale zerem.

Obierzmy w płaszczyźnie poziomej układ współrzędnych (x', y') stały, zaś na kartce papieru układ (x, y) ruchomy, oba mające początek w O . Oznaczmy przez φ_1 kąt między OA a x' , przez φ kąt między OA a x , a przez ψ kąt, o jaki obróciła się kartka, t. j. kąt między osiami x a x' . Niech wreszcie m oznacza masę owadu, I moment bezwładności kartki względem O i niech $r=OA$. Wówczas kręt względem osi z wynosi $mr^2\dot{\varphi}_1 + I\dot{\psi} = 0$, a ponieważ $\varphi_1 = \varphi + \psi$, więc

$$(18) \quad mr^2\dot{\varphi} + (mr^2 + I)\dot{\psi} = 0.$$

Przypuśćmy, że owad porusza się po krzywej o równaniu $r=f(\varphi)$. Na mocy (18), z uwagi że $\dot{\psi}/\dot{\varphi} = d\psi/d\varphi$, otrzymamy $d\psi/d\varphi = -mr^2/(mr^2 + I)$. Zatem, całkując od φ_0 do φ , dostaniemy

$$(19) \quad \psi - \psi_0 = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{mr^2}{mr^2 + I} d\varphi.$$

Różnica $\psi - \psi_0$ przedstawia kąt, o jaki obróciła się kartka w czasie, gdy owad poruszał się po krzywej $r=f(\varphi)$ od φ_0 do φ .

Widzimy, że kąt obrotu nie zależy od prędkości owadu, lecz tylko od krzywej, po której owad się porusza. W szczególności, jeżeli owad porusza się po kole $r = \text{const.}$ wówczas na mocy (19)

$$(20) \quad \psi - \psi_0 = - \frac{mr^2}{mr^2 + I} (\varphi - \varphi_0).$$

Kręt w ruchu względnym. Niech układ współrzędnych $O'(x', y', z')$ porusza się względem inercjalnego układu współrzędnych $O(x, y, z)$. Aby wyznaczyć ruch względny układu punktów materialnych, należy do sił działających dodać siły unoszenia i Coriolisa. Oznaczmy przez $\bar{K}_w$ kręt ruchu względnego względem początku O' układu ruchomego, a przez $\bar{M}$, $\bar{M}_u$, $\bar{M}_c$ momenty sił działających, unoszenia i Coriolisa względem punktu O' . Ponieważ prawa Newtona stosują się do ruchu względnego, jeżeli do sił działających dodać siły unoszenia i Coriolisa (str. 137), więc

$$(21) \quad \bar{K}_w = \bar{M} + \bar{M}_u + \bar{M}_c.$$

Wzór powyższy upraszcza się w przypadku, gdy O' pokrywa się ze środkiem S masy układu punktów materialnych, a układ współrzędnych (x, y, z) porusza się ruchem postępowym. Udowodniemy bowiem (str. 204), że w tym przypadku jest $\bar{K}_w = \bar{K}$, gdzie $\bar{K}$ oznacza kręt (względem środka masy) w ruchu bezwzględnym. Zatem $\bar{K}_w = \bar{K}$, a ponieważ $\bar{K} = \bar{M}$, więc otrzymujemy

$$(22) \quad \bar{K}_w = \bar{M}.$$

Jeżeli więc badamy ruch względem środka masy, to *pochodna krętu (względem środka masy) w ruchu względnym równa się momentowi (względem środka masy) sił działających.*

§ 4. Praca i potencjał układu punktów. Praca. Niech na punkty układu działają siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$. Praca siły $\bar{P}_i$ wyraża się (str. 95) wzorem $L_i = \int_{C_i} (P_{i_x} dx_i + P_{i_y} dy_i + P_{i_z} dz_i)$, gdzie C_i oznacza tor punktu i -tego.

Pracą całkowitą (lub krótko pracą) sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ nazywamy sumę prac poszczególnych sił.

Zatem praca całkowita wynosi

$$(I) \quad L = \sum_{C_i} \int (P_{i_x} dx_i + P_{i_y} dy_i + P_{i_z} dz_i).$$

Pracę całkowitą, jaką wykonują siły w czasie od t_0 do t , możemy przedstawić w postaci (IV), str. 96,

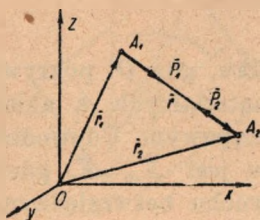
$$(II) \quad L = \int_{t_0}^t \sum (P_{i_x} \dot{x}_i + P_{i_y} \dot{y}_i + P_{i_z} \dot{z}_i) dt$$

lub ((V), str. 96)

$$(II') \quad L = \int_{t_0}^t \sum (\bar{P}_i \bar{v}_i) dt,$$

gdzie $\bar{v}_i$ oznaczają prędkości punktów, zaś $\bar{P}_i \bar{v}_i$ jest iloczynem skalarowym.

Praca równa zeru. Ważne są przypadki, w których praca sił działających na układ jest równa zeru. Podamy kilka przykładów.



Przykład 1. Dla układu sztywnego punktów materialnych (str. 194) zachodzi twierdzenie następujące:

Praca sił wewnętrznych w układzie sztywnym jest zerem.

Dowód. Weźmy na razie pod uwagę dwa punkty układu sztywnego A_1 i A_2 . Połóżmy:

$$(1) \quad \bar{r}_1 = \overline{OA_1}, \quad \bar{r}_2 = \overline{OA_2}, \quad \bar{r} = \overline{A_1A_2},$$

gdzie O jest początkiem układu współrzędnych. Jeżeli $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ są prędkościami punktów A_1, A_2 , to

$$(2) \quad \bar{v}_1 = \dot{\bar{r}}_1, \quad \bar{v}_2 = \dot{\bar{r}}_2.$$

Na mocy (1) mamy $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, skąd $\dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_2 - \dot{\bar{r}}_1$, więc

$$(3) \quad \dot{\bar{r}} = \bar{v}_2 - \bar{v}_1.$$

Ponieważ $A_1A_2 = \text{const.}$, więc $\dot{\bar{r}}^2 = \text{const.}$ Różniczkując względem czasu t , otrzymamy $2\dot{\bar{r}}\ddot{\bar{r}} = 0$. Na mocy więc (3)

$$(4) \quad \dot{\bar{r}}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = 0.$$

Oznaczmy przez $\bar{P}_1$ (wzgl. $\bar{P}_2$) siłę, z jaką punkt A_2 (wzgl. A_1) działa na punkt A_1 (wzgl. A_2). Na mocy prawa akcji i reakcji jest

$$(5) \quad \bar{P}_1 = -\bar{P}_2.$$

Ponieważ siły $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$ mają kierunek wektora $\overline{A_1A_2} = \bar{r}$, więc możemy przyjąć, że

$$(6) \quad \bar{P}_1 = \lambda \bar{r} \quad \text{ i } \quad \bar{P}_2 = -\lambda \bar{r},$$

gdzie λ jest współczynnikiem zależnym od czasu (wielkość sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$

może się bowiem zmieniać z biegiem czasu). Na mocy (II') praca sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$ wynosi

$$(7) \quad L = \int_0^t (\bar{P}_1 \bar{v}_1 + \bar{P}_2 \bar{v}_2) dt.$$

Z równości (6) dostajemy $P_1 \bar{v}_1 + \bar{P}_2 \bar{v}_2 = \lambda(\bar{r} \bar{v}_1 - \bar{r} \bar{v}_2) = \lambda \bar{r}(\bar{v}_1 - \bar{v}_2)$, na mocy więc (4) $\bar{P}_1 \bar{v}_1 + \bar{P}_2 \bar{v}_2 = 0$. Wynika stąd wobec (7), że

$$L = 0.$$

Udowodniliśmy zatem, że praca sił wewnętrznych, z jakimi działają na siebie dwa jakiekolwiek punkty układu sztywnego jest zerem. Suma prac wszystkich sił wewnętrznych jest więc również zerem, c. b. d. d.

Przykład 2. Dwa punkty materialne A_1 i A_2 połączone są nicią nierozciągliwą (bez masy), przechodzącą przez stały punkt O . Założmy, że nie ma tarcia. Udowodnimy, że praca sił, z jakimi nie działa na punkty układu, równa jest zeru.

Obierzmy punkt O za początek układu współrzędnych. Niechaj x_1, y_1, z_1 będą współrzędnymi punktu A_1 , zaś x_2, y_2, z_2 współrzędnymi punktu A_2 . Połóżmy

$$(8) \quad r_1 = OA_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad \text{ i } \quad r_2 = OA_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

Ponieważ długość nici $l = \text{const.}$ i $r_1 + r_2 = l$, więc

$$(9) \quad \dot{r}_1 + \dot{r}_2 = 0.$$

Oznaczmy przez $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$ siły, z jakimi nie działa na punkty A_1 i A_2 . Mamy (str. 194)

$$(10) \quad |\bar{P}_1| = |\bar{P}_2|.$$

Kładąc $P = -|\bar{P}_1| = -|\bar{P}_2|$, otrzymamy:

$$P_{1x} = P \frac{x_1}{r_1}, \quad P_{1y} = P \frac{y_1}{r_1} \quad \text{ i } \quad P_{1z} = P \frac{z_1}{r_1}, \quad \text{ więc}$$

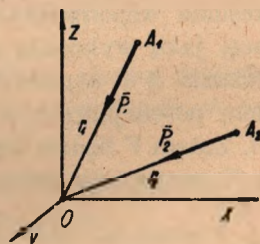
$$P_{1x} \dot{x}_1 + P_{1y} \dot{y}_1 + P_{1z} \dot{z}_1 = P \frac{x_1 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1 + z_1 \dot{z}_1}{r_1} = P \dot{r}_1$$

i analogicznie $P_{2x} \dot{x}_2 + P_{2y} \dot{y}_2 + P_{2z} \dot{z}_2 = P \dot{r}_2$.

Na mocy (II), str. 211, praca sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$ wynosi tedy

$$L = \int_0^t [P \dot{r}_1 + P \dot{r}_2] dt = \int_0^t P [\dot{r}_1 + \dot{r}_2] dt.$$

Z (9) dostaniemy więc $L = 0$.



Przykład 3. Przypuśćmy, że jakieś ciało K porusza się w ten sposób, że pozostaje stale styczne do pewnej powierzchni Σ . Zakładając, że siły reakcyjne powierzchni zaczepione są w punktach styczności, widzimy, że reakcje zmieniają punkty zaczepienia, jeżeli ciało coraz to innymi punktami styka się z powierzchnią Σ . Przyjmujemy, że praca sił reakcyjnych wyraża się w tym przypadku wzorem (II'), str. 212, gdzie $\bar{v}_i$ oznaczają prędkości punktów styczności, w których w danej chwili zaczepione są reakcje $\bar{P}_i$.

Jeżeli prędkości punktów styczności są stale równe zeru, mówimy, że ciało K *toczy się* po powierzchni Σ .

A więc: *przy toczeniu się ciała praca sił reakcyjnych jest zerem.*

Potencjał układu. Jeżeli siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ zależą tylko od położenia układu punktów, wówczas powiadamy, że siły tworzą *pole sił*.

Ponieważ położenie układu określone jest współrzędnymi $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ jego punktów, więc siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ są funkcjami zmiennych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$. Zatem

$$P_{1x} = F_1(x_1, y_1, z_1, \dots), \quad P_{1y} = \Phi_1(x_1, y_1, z_1, \dots), \quad P_{1z} = \Psi_1(x_1, y_1, z_1, \dots).$$

Jeżeli w polu sił praca całkowita nie zależy od drogi przebytej przez układ punktów, lecz tylko od położenia początkowego i końcowego tych punktów, to pole sił nazywamy *polem potencjalnym* lub *zachowawczym* (konserwatywnym).

Weźmy pod uwagę dowolne położenie S_0 układu punktów, określone współrzędnymi $x_1^0, y_1^0, z_1^0, x_2^0, y_2^0, z_2^0, \dots$. Oznaczmy przez V pracę, jaką wykonają siły przy przejściu układu z położenia S_0 do położenia S o współrzędnych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$. Jeżeli pole jest polem potencjalnym, to praca V nie będzie zależała od drogi przejścia. Zatem V będzie funkcją zmiennych $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$. Funkcję V nazywamy *potencjałem* lub *funkcją sił*.

Postępując podobnie jak w przypadku jednego punktu materialnego (str. 100), można udowodnić następujące wzory:

$$(III) \quad P_{1x} = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad P_{1y} = \frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad P_{1z} = \frac{\partial V}{\partial z_1} \quad (i=1, 2, \dots).$$

Na odwrót, jeżeli istnieje funkcja V spełniająca równania (III), to pole jest polem potencjalnym i V jest potencjałem.

Jeżeli układ przesuniemy z położenia o potencjale V_1 w położenie o potencjale V_2 , praca wyniesie

$$L = V_2 - V_1.$$

Jeżeli siły $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots$ tworzą każda z osobna pole potencjalne o potencjałach $V_1, V_2, \dots$, wówczas pole jest polem potencjalnym o potencjale

$$(11) \quad V = V_1 + V_2 + \dots$$

Potencjał siły ciężkości. Niech układ punktów o masach $m_1, m_2, \dots$ porusza się w polu siły ciężkości. Jeżeli przyjmiemy, że oś z jest skierowana pionowo do góry, wówczas (str. 102)

$$V_1 = -m_1 g z_1, \quad V_2 = -m_2 g z_2, \quad \dots$$

Na mocy więc (11) pole będzie polem potencjalnym o potencjale

$$(12) \quad V = -(m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots)g.$$

Oznaczając przez z_0 współrzędną środka masy układu, będziemy mieli $m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots = m z_0$, gdzie m oznacza masę całkowitą układu (str. 154). Według (12) jest więc

$$(13) \quad V = -m g z_0.$$

Zauważmy, że mg jest ciężarem całego układu (t. zn. sumą ciężarów poszczególnych punktów).

Jeżeli w jednym położeniu układu środek ciężkości ma współrzędną $z_0^{(1)}$, a w drugim $z_0^{(2)}$, wówczas praca wykonana przez siły ciężkości wynosi $L = (-mgz_0^{(2)}) - (-mgz_0^{(1)})$ czyli

$$(14) \quad L = mg(z_0^{(1)} - z_0^{(2)}).$$

A więc: *praca w polu ciężkości zależy tylko od różnicy poziomów środka ciężkości układu, a nie zależy od torów poszczególnych jego punktów.*

Praca sił ciężkości równa się zatem pracy, jaką wykonałby ciężar całkowity układu, zaczepiony w środku jego masy.

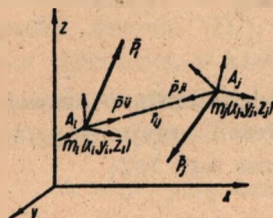
Potencjał sił wewnętrznych. Niech będzie dany układ punktów $A_1, A_2, \dots, A_n$ o masach $m_1, m_2, \dots, m_n$. Załóżmy, że siły wewnętrzne, z jakimi dwa dowolne punkty układu działają na siebie, zależą co do wielkości tylko od odległości tych punktów, t. zn. że jeśli oznaczyć przez $\bar{P}^{ij}$ siłę, z jaką punkt $A_j(x_j, y_j, z_j)$ działa na punkt $A_i(x_i, y_i, z_i)$, zaś przez r_{ij} odległość między punktami A_i i A_j ,

to $|\vec{P}^j|$ jest funkcją odległości r_{ij} czyli

$$(15) \quad |\vec{P}^j| = f_{ij}(r_{ij}),$$

gdzie

$$(16) \quad r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$



Niechaj P_{ij} oznacza rzut siły $\vec{P}^j$ na kierunku $\overline{A_j A_i}$. Zatem:

$$1^\circ \quad |P_{ij}| = |\vec{P}^j|,$$

$$2^\circ \quad P_{ij} \leq 0, \text{ jeżeli punkty } A_i \text{ i } A_j \text{ się przyciągają, zaś } P_{ij} \geq 0 \text{ jeżeli punkty } A_i \text{ i } A_j \text{ się odpychają.}$$

Ponieważ w myśl prawa akcji i reakcji jest $\vec{P}^j = -\vec{P}^i$, więc $P_{ij} = P_{ji}$, skąd na mocy (15) i warunku 1°

$$(17) \quad P_{ij} = \pm f_{ij}(r_{ij}) \quad \text{czyli} \quad P_{ij} = F_{ij}(r_{ij}).$$

Z określenia liczby P_{ij} wynika, że rzuty siły $\vec{P}^j$ na osie układu (x, y, z) możemy napisać w postaci:

$$(18) \quad P_x^j = P_{ij} \frac{x_i - x_j}{r_{ij}}, \quad P_y^j = P_{ij} \frac{y_i - y_j}{r_{ij}}, \quad P_z^j = P_{ij} \frac{z_i - z_j}{r_{ij}}.$$

Położmy

$$(19) \quad V_{ij} = \int P_{ij} dr_{ij} = \int F_{ij}(r_{ij}) dr_{ij}.$$

Ponieważ $P_{ij} = P_{ji}$ i $r_{ij} = r_{ji}$, więc

$$(20) \quad V_{ij} = V_{ji}.$$

Mamy $\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} = \frac{dV_{ij}}{dr_{ij}} \cdot \frac{\partial r_{ij}}{\partial x_i} = P_{ij} \frac{x_i - x_j}{r_{ij}}$, zatem na mocy (18):

$$(21) \quad \frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} = P_x^j, \quad \frac{\partial V_{ij}}{\partial y_i} = P_y^j, \quad \frac{\partial V_{ij}}{\partial z_i} = P_z^j.$$

Położmy

$$(22) \quad V = \frac{1}{2} \sum V_{ij} = \frac{1}{2} \sum \int P_{ij} dr_{ij},$$

gdzie sumowanie rozciągnięte jest na wszystkie pary liczb i, j takie, że $i \neq j$, $i \leq n$ i $j \leq n$.

Niechaj $\vec{P}_i$ oznacza sumę wszystkich sił wewnętrznych, działających na punkt A_i . Zatem

$$(23) \quad \vec{P}_i = \sum_{j=1}^n \vec{P}^j \quad \text{dla } j \neq i.$$

Obliczmy pochodną cząstkową $\partial V / \partial x_i$. Zmienna x_i występuje tylko w funkcjach V_{ij} i V_{ji} , gdzie $j \neq i$. Na mocy (22) jest wobec tego

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial V_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial V_{ji}}{\partial x_i} \right] \quad \text{dla } i \neq j.$$

Z równości (20) i (21) wynika więc

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n 2P_{ij}^x = \sum_{j=1}^n P_{ij}^x \quad \text{dla } i \neq j,$$

skąd na mocy (23):

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = P_{ix}, \quad \frac{\partial V}{\partial y_i} = P_{iy}, \quad \frac{\partial V}{\partial z_i} = P_{iz}.$$

Zatem V jest potencjałem. Udowodniliśmy więc twierdzenie następujące:

Jeżeli siły wewnętrzne, z jakimi punkty układu działają na siebie, zależą tylko od odległości tych punktów, wówczas siły wewnętrzne wytwarzają pole potencjalne o potencjale danym przez wzór (22).

Przykład 4. Niech punkty układu przyciągają się wzajemnie według prawa Newtona. Wówczas dla $i \neq j$ jest $P_{ij} = -Km_i m_j / r_{ij}^2$, a więc według (19) $V_{ij} = \int P_{ij} dr_{ij} = Km_i m_j / r_{ij}$, skąd na mocy (22)

$$(24) \quad V = \frac{1}{2} K \sum m_i m_j / r_{ij},$$

gdzie suma rozciągnięta jest na wszystkie pary liczb i, j takie, że $i \neq j$, $i \leq n$ i $j \leq n$.

W szczególności dla dwóch punktów mamy

$$(25) \quad V = Km_1 m_2 / r_{12}.$$

Przykład 5. Niech punkty układu przyciągają się z siłami proporcjonalnymi do odległości. Wówczas dla $i \neq j$ będzie $P_{ij} = -\lambda_{ij}^2 r_{ij}$, gdzie λ_{ij} jest współczynnikiem zależnym od pary punktów m_i, m_j . A więc według (19) $V_{ij} = \int P_{ij} dr_{ij} = -\frac{1}{4} \lambda_{ij}^2 r_{ij}^2$. skąd na mocy (22)

$$(26) \quad V = -\frac{1}{4} \sum \lambda_{ij}^2 r_{ij}^2.$$

§ 5. Energia kinetyczna układu punktów. Niech dany będzie układ punktów $m_1, m_2, \dots$, mających w pewnej chwili t prędkości $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots$

Energia kinetyczną układu punktów w chwili t nazywamy sumę energii kinetycznych poszczególnych punktów.

Jeżeli więc położymy $v_1 = |\bar{v}_1|$, $v_2 = |\bar{v}_2|$, ..., to energia kinetyczna układu wyniesie

$$(I) \quad E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \dots = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2.$$

Energia kinetyczna układu w ruchu postępowym. Jeżeli układ porusza się ruchem postępowym z prędkością $\bar{v}$ (t. zn. jeżeli wszystkie jego punkty mają tą samą prędkość $\bar{v}$), wówczas kładąc $v = |\bar{v}|$, mamy $E = \frac{1}{2} \sum m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i$, czyli

$$(II) \quad E = \frac{1}{2} m v^2,$$

gdzie m oznacza masę całkowitą układu.

Energia kinetyczna w ruchu obrotowym około osi. Niech układ punktów obraca się około osi l z prędkością kątową ω . Oznaczając przez $r_1, r_2, \dots$ odległości punktów układu od osi obrotu, mamy $v_i = r_i \omega$, a zatem $E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i r_i^2$. Ponieważ $\sum m_i r_i^2$ jest momentem bezwładności układu względem osi obrotu, więc kładąc $\sum m_i r_i^2 = I$, otrzymamy

$$(III) \quad E = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Twierdzenie Königa. Niech dowolny układ współrzędnych o początku O porusza się względem układu odniesienia ruchem postępowym. Oznaczmy przez $\bar{u}$ prędkość punktu O , zaś przez $\bar{v}_i$ prędkości bezwzględne, a przez $\bar{w}_i$ prędkości względne punktów materialnych m_i ($i=1, 2, \dots$). Ponieważ $\bar{u}$ jest prędkością unoszenia, więc

$$(1) \quad \bar{v}_i = \bar{u} + \bar{w}_i,$$

skąd $\bar{v}_i^2 = (\bar{u} + \bar{w}_i)^2 = \bar{u}^2 + \bar{w}_i^2 + 2\bar{u}\bar{w}_i$. Kładąc $v_i = |\bar{v}_i|$, $w_i = |\bar{w}_i|$ i $u = |\bar{u}|$, otrzymamy $E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i u^2 + \frac{1}{2} \sum m_i w_i^2 + \sum m_i \bar{u}\bar{w}_i$.

Jeżeli więc położymy $m = \sum m_i$, dostaniemy

$$(2) \quad E = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} \sum m_i w_i^2 + \bar{u} \sum m_i \bar{w}_i.$$

Oznaczmy przez $\bar{v}_0$ prędkość bezwzględną, a przez $\bar{w}_0$ prędkość względną środka masy. Na mocy (1) mamy $\bar{v}_0 = \bar{u} + \bar{w}_0$. Ponieważ $\sum m_i \bar{w}_i = m \bar{w}_0$, więc z (2) wynika $E = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} \sum m_i w_i^2 + m \bar{u} \bar{w}_0$ lub, pisząc $\bar{v}_0 - \bar{u}$ zamiast $\bar{w}_0$,

$$(IV) \quad E = \frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} \sum m_i w_i^2 + m \bar{u} (\bar{v}_0 - \bar{u}).$$

Pierwszy wyraz tej sumy oznacza energię ruchu postępowego układu punktów, poruszającego się z prędkością $\bar{u}$. Wyraz drugi oznacza energię kinetyczną ruchu względnego, przy czem prędkości $\bar{w}_i$ możemy uważać za prędkości punktów m_i względem punktu O , poruszającego się z prędkością $\bar{u}$.

Jeżeli więc przyjmiemy, że ruch układu złożony jest z ruchu postępowego o prędkości dowolnego punktu O i ruchu względnego względem tegoż punktu O , to *energia kinetyczna układu równa się sumie energii kinetycznej ruchu postępowego, energii kinetycznej ruchu względnego i iloczynowi masy całkowitej układu przez iloczyn skalarowy z prędkości punktu O i prędkości względnej środka masy.*

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *twierdzenia Königa*.

Jeżeli w szczególności za punkt O obierzemy środek masy, to $\bar{u} = \bar{v}_0$, skąd na mocy (IV)

$$(3) \quad E = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \sum m_i w_i^2.$$

Jeżeli więc ruch układu będziemy uważać za ruch złożony z ruchu postępowego o prędkości środka masy i ruchu względnego względem środka masy, wówczas *energia kinetyczna układu równa się sumie energii kinetycznej ruchu postępowego i energii kinetycznej ruchu względnego.*

Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej. Niech na punkty materialne m_i działają siły $\bar{P}_i$. Oznaczmy przez $\bar{v}_i$ prędkość punktu m_i w chwili t , przez $\bar{v}_i^{(0)}$ prędkość jego w chwili t_0 , a przez $L_{t_0 t}^{(i)}$ pracę siły $\bar{P}_i$ w czasie od t_0 do t . Zatem ((3), str. 106) $\frac{1}{2} m_i v_i^2 - \frac{1}{2} m_i (v_i^{(0)})^2 = L_{t_0 t}^{(i)}$, skąd

$$\frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 - \frac{1}{2} \sum m_i (v_i^{(0)})^2 = \sum L_{t_0 t}^{(i)}.$$

Kładąc: $E = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2$, $E_0 = \frac{1}{2} \sum m_i (v_i^{(0)})^2$, $L_{t_0 t} = \sum L_{t_0 t}^{(i)}$, otrzymamy
(V) $E - E_0 = L_{t_0 t}.$

We wzorze tym E oznacza energię kinetyczną układu w chwili t , a E_0 w chwili t_0 ; wyrażenie $L_{t_0 t}$ przedstawia sumę prac poszczególnych sił działających na układ, t. j. pracę całkowitą, jaką siły te wykonały w czasie od t_0 do t .

A więc: *przyrost energii kinetycznej układu punktów materialnych równa się pracy całkowitej sił działających na punkty układu.*

Twierdzenie to nosi nazwę *zasady równowartości pracy i energii kinetycznej*.

Jeżeli praca całkowita sił działających jest zerem, czyli $L_{t,t} = 0$, wówczas na mocy (V) jest $E - E_0 = 0$ czyli

$$E = E_0.$$

A więc: jeżeli praca całkowita sił, działających na punkty układu jest stale zerem, wówczas energia kinetyczna układu jest wielkością stałą.

Twierdzenie powyższe nosi nazwę *zasady zachowania energii kinetycznej*.

Założmy, że układ sił działających posiada potencjał. Jeżeli przez V oznaczymy potencjał w chwili t , a przez V_0 potencjał w chwili t_0 , to $L_{t,t} = V - V_0$, a więc na mocy (V) $E - E_0 = V - V_0$ czyli

$$E - V = E_0 - V_0.$$

Wielkość $U = -V$ nazywamy *energiją potencjalną układu*.

Zatem

$$(VI) \quad E + U = E_0 + U_0 = \text{const.}$$

Sumę $E + U$ nazywamy *energiją całkowitą układu*.

A więc: jeżeli układ punktów porusza się w polu potencjalnym, to energia całkowita układu jest stała.

Twierdzenia te są oczywiście uogólnieniem odpowiednich twierdzeń, dowiedzionych na str. 106 i 107 dla jednego punktu materialnego.

Energia kinetyczna w ruchu względnym. Niech układ współrzędnych $O'(x', y', z')$ porusza się względem układu inercjalnego $O(x, y, z)$. Oznaczmy przez E_w i $E_w^{(0)}$ energię kinetyczną w ruchu względnym w chwilach t i t_0 , przez $L_{t,t}$, $L_{t_0,t}^u$ i $L_{t_0,t}^C$ prace w ruchu względnym sił działających, sił unoszenia i Coriolisa w czasie od t_0 do t . Ponieważ prawa Newtona odnoszą się do ruchu względnego, gdy do sił działających dodać siły unoszenia i Coriolisa (str. 137), więc

$$(4) \quad E_w - E_w^{(0)} = L_{t,t} + L_{t_0,t}^u + L_{t_0,t}^C.$$

Ponieważ przyspieszenie Coriolisa jest prostopadłe do prędkości względnej, więc siła Coriolisa jest również prostopadła do tej prędkości. Zatem praca sił Coriolisa w ruchu względnym jest zerem, wobec czego możemy napisać

$$(5) \quad E_w - E_w^{(0)} = L_{t,t} + L_{t_0,t}^u.$$

A więc: przyrost energii kinetycznej w ruchu względnym równa się sumie prac w ruchu względnym sił działających i sił unoszenia.

Niech w szczególności punkt O' znajduje się w środku S masy układu $O'(x', y', z')$ i niech układ ten porusza się ruchem postępowym. Ponieważ przy tym założeniu przyspieszenie unoszenia równa się przyspieszeniu $\bar{p}_0$ środka masy, więc siły unoszenia poszczególnych punktów układu $m_1, m_2, \dots$ wynoszą

$$(6) \quad \bar{P}_{1u} = -m_1 \bar{p}_0, \quad \bar{P}_{2u} = -m_2 \bar{p}_0, \quad \dots$$

Oznaczając przez $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots$ prędkości względne punktów układu, otrzymujemy $L_{t_0 t}^u = \int_{t_0}^t \bar{P}_{1u} \bar{w}_1 dt + \int_{t_0}^t \bar{P}_{2u} \bar{w}_2 dt + \dots$, skąd według (6)

$$L_{t_0 t}^u = - \int_{t_0}^t \bar{p}_0 (m_1 \bar{w}_1 + m_2 \bar{w}_2 + \dots) dt.$$

Prędkość względna $\bar{w}_0$ środka masy równa się zeru, gdyż założyliśmy, że środek S masy całkowitej m jest stale w początku układu ruchomego $O'(x', y', z')$. Zatem $m_1 \bar{w}_1 + m_2 \bar{w}_2 + \dots = m \bar{w}_0 = 0$, skąd według ostatniego wzoru $L_{t_0 t}^u = 0$. Na mocy więc (5)

$$(7) \quad E_w - E_w^{(0)} = L_{t_0 t}.$$

A więc: *przyrost energii kinetycznej w ruchu względnym względem środka masy równa się pracy w ruchu względnym sił działających.*

Przykład 1. Układ punktów materialnych porusza się w polu siły ciężkości. Niech środek masy S będzie początkiem układu współrzędnych (x', y', z') , poruszającego się ruchem postępowym. Przyjmijmy, że oś z' jest pionowa i zwrócona ku dołowi.

Ponieważ ciężary poszczególnych punktów mają kierunek osi z' , więc (podobnie jak w układzie bezwzględnym, str. 215) praca sił ciężkości w ruchu względnym równa się pracy, jaką wykona ciężar całkowity, zaczepiony w środku masy. Z uwagi na to, że środek masy jest w spoczynku względem układu (x', y', z') , gdyż znajduje się z założenia stale w początku tego układu, praca sił ciężkości w ruchu względnym jest zerem. Przyrost zatem energii kinetycznej w ruchu względnym równa się pracy pozostałych sił (poza ciężarami), jakie działają na punkty układu.

W szczególności jeżeli na punkty układu działają same tylko ciężary, to energia kinetyczna tego układu w ruchu względnym jest stała.

Przypuśćmy np., że w chwili $t=0$ puściliśmy swobodnie punkt materialny o masie m_1 , a po T sek drugi punkt o masie m_2 . Po czasie $t>T$ prędkości punktów m_1 i m_2 wynoszą:

$$(8) \quad v_1 = gt \quad \text{ i } \quad v_2 = g(t - T).$$

Prędkość środka masy v_0 otrzymamy z równania

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_0.$$

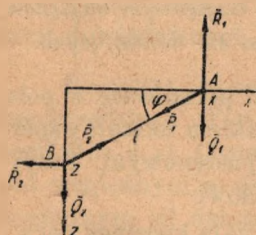
Zatem $v_0 = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2)$. Prędkości względne punktów m_1 i m_2 wynoszą $w_1 = v_1 - v_0$ i $w_2 = v_2 - v_0$, więc $w_1 = m_2(v_1 - v_2) / (m_1 + m_2)$ i $w_2 = m_1(v_2 - v_1) / (m_1 + m_2)$, skąd na mocy (8) $w_1 = m_2 g T / (m_1 + m_2)$ i $w_2 = -m_1 g T / (m_1 + m_2)$.

Energia kinetyczna w ruchu względnym wynosi zatem

$$E_w = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 = m_1 m_2 g^2 T^2 / 2(m_1 + m_2) = \text{const.}$$

Widzimy więc, że energia kinetyczna w ruchu względnym względem środka masy jest stała.

Przykład 2. Dwa punkty A i B o masach m_1 i m_2 , połączone nicią nierozciągliwą bez masy, poruszają się w płaszczyźnie pionowej w ten sposób, że punkt A musi pozostawać stale na osi poziomej x zaś punkt B na osi pionowej z .



Oznaczmy przez l długość nici, a przez x, z współrzędne punktów A, B . Na punkt A działa reakcja $\bar{R}_1$, prostopadła do osi x (zakładamy, że nie ma tarcia), ciężar $\bar{Q}_1$ i reakcja nici $\bar{P}_1$; na punkt B działa reakcja $\bar{R}_2$, prostopadła do osi z , ciężar $\bar{Q}_2$ i reakcja nici $\bar{P}_2$.

Z sił powyższych nie wykonują pracy: reakcje $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ i ciężar $\bar{Q}_1$, gdyż siły te są prostopadłe do toru. Nie wykonują również pracy siły $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$, ponieważ $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$, a ponadto odległość punktów A, B jest stała (str. 212). Tylko więc ciężar $\bar{Q}_2$ wykonuje pracę.

Przypuśćmy, że w chwili początkowej $t_0=0$ punkty A, B miały współrzędne x_0, z_0 i prędkość zero. Energia kinetyczna w chwili t wynosi

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2.$$

Praca siły $\bar{Q}_2$ równa się $m_2 g(z - z_0)$, jeżeli osi z nadamy zwrot ku dołowi. Zatem na mocy zasady równowartości pracy i energii kinetycznej

$$(9) \quad \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 = m_2 g(z - z_0).$$

Oznaczmy przez φ kąt, jaki nie tworzy z osią x w chwili t , a przez φ_0 kąt w chwili $t_0=0$. Mamy więc:

$$x=l \cos \varphi, \quad z=l \sin \varphi, \quad z_0=l \sin \varphi_0,$$

skąd:

$$(10) \quad \dot{x} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{z} = l\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Według (9) jest zatem

$$(11) \quad \frac{1}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 (m_1 \sin^2 \varphi + m_2 \cos^2 \varphi) = m_2 g l (\sin \varphi - \sin \varphi_0).$$

Z powyższego równania możemy, znając φ , obliczyć $\dot{\varphi}$, a następnie z równań (10) wyznaczyć prędkości $\dot{x}$ i $\dot{y}$. Znając φ , możemy również wyznaczyć reakcje $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{P}_1, \bar{P}_2$. Przyjmijmy dla prostoty, że $m_1 = m_2 = m$ i $\varphi_0 = 0$. Otrzymamy z (11)

$$(12) \quad \frac{1}{2} l \dot{\varphi}^2 = g \sin \varphi.$$

Różniczkując względem t , dostaniemy $l\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = g\dot{\varphi} \cos \varphi$, skąd

$$(13) \quad \ddot{\varphi} = g \cos \varphi / l.$$

Oznaczając przez $\bar{p}_1$ przyspieszenie punktu A , otrzymamy

$$(14) \quad m_1 \bar{p}_1 = \bar{R}_1 + \bar{Q}_1 + \bar{P}_1.$$

Tworząc rzut na oś x i kładąc $P = |\bar{P}_1| = |\bar{P}_2|$, dostaniemy

$$(15) \quad m\ddot{x} = -P \cos \varphi.$$

Ponieważ na mocy (10)

$$(16) \quad \ddot{x} = -l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

więc z równań (15) i (16) możemy otrzymać P , znając φ , gdyż $\dot{\varphi}$ i $\ddot{\varphi}$ możemy obliczyć z równań (12) i (13). Dostaniemy

$$(17) \quad P = 3mg \sin \varphi.$$

Tworząc rzut na oś z , dostaniemy z (14) $R_1 + mg + P \sin \varphi = 0$ czyli

$$(18) \quad R_1 = -mg - P \sin \varphi,$$

gdzie R_1 oznacza rzut siły $\bar{R}_1$ na oś z .

Podobnie, dla punktu B mamy $m\bar{p}_2 = \bar{R}_2 + \bar{P}_2 + \bar{Q}_2$. Tworząc rzut na oś x , otrzymamy z uwagi na to, że $\bar{P}_2 = -\bar{P}_1$, równość $R_2 + P \cos \varphi = 0$, skąd

$$(19) \quad R_2 = -P \cos \varphi.$$

Wzory (17)–(19) wyznaczają reakcje w zależności od kąta φ .

Przykład 3. Dwa punkty materialne A_1 i A_2 o masach m_1 i m_2 , połączone nicią nierozciągliwą bez masy, przechodzącą przez stały punkt O , poruszają się w płaszczyźnie poziomej (przechodzącej przez O) bez tarcia. Obierzmy w tej płaszczyźnie układ współrzędnych (x, z) o początku w O (p. rys. na str. 213). Ponieważ kierunki sił $\bar{P}_1, \bar{P}_2$, z jakimi nici działa na punkty A_1 i A_2 , przechodzą stale przez O , więc punkty A_1 i A_2 będą poruszać się ruchem środkowym o środku O .

Położmy $r_1 = OA_1$ i $r_2 = OA_2$; niechaj φ_1, φ_2 oznaczają kąty między osią x a odcinkami OA_1 i OA_2 . Prędkości połowe punktów A_1 i A_2 są odpowiednio równe $\frac{1}{2}r_1^2\dot{\varphi}_1$ i $\frac{1}{2}r_2^2\dot{\varphi}_2$. Ponieważ prędkości połowe w ruchu środkowym są stałe (str. 87), więc

$$(20) \quad r_1^2\dot{\varphi}_1 = c_1, \quad r_2^2\dot{\varphi}_2 = c_2,$$

gdzie c_1 i c_2 są pewnymi stałymi.

Na str. 213 dowiedliśmy, że praca całkowita sił $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$ jest zerem. Zatem energia kinetyczna układu punktów A_1, A_2 ma wartość stałą. Oznaczając przez v_1 i v_2 wielkość prędkości punktów A_1 i A_2 , otrzymamy $\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = c$ lub

$$(21) \quad m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = h,$$

gdzie c i $h = 2c$ są stałymi. Ale ((3), str. 47):

$$v_1^2 = \dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\varphi}_1^2 \text{ i } v_2^2 = \dot{r}_2^2 + r_2^2\dot{\varphi}_2^2,$$

więc na mocy (20), wyrażając $\dot{\varphi}_1$ i $\dot{\varphi}_2$ przez r_1 i r_2 , otrzymamy

$$v_1^2 = \dot{r}_1^2 + \frac{c_1^2}{r_1^2} \text{ i } v_2^2 = \dot{r}_2^2 + \frac{c_2^2}{r_2^2}, \text{ skąd na mocy (21)}$$

$$(22) \quad m_1\dot{r}_1^2 + m_2\dot{r}_2^2 + \frac{m_1c_1^2}{r_1^2} + \frac{m_2c_2^2}{r_2^2} = h.$$

Oznaczmy przez l długość nici. Zatem $r_1 + r_2 = l$ czyli $r_2 = l - r_1$, skąd

$$(23) \quad \dot{r}_2 = -\dot{r}_1.$$

Wstawiając w (22), otrzymamy

$$(24) \quad (m_1 + m_2)\dot{r}_1^2 + \frac{m_1c_1^2}{r_1^2} + \frac{m_2c_2^2}{(l-r_1)^2} = h.$$

Równanie różniczkowe (24) wyznacza r_1 jako funkcję czasu t . Z równości (23) i (20) otrzymamy $r_2, \varphi_1, \varphi_2$. Aby otrzymać reakcje $\bar{P}_1, \bar{P}_2$, zauważmy, że jeżeli $\bar{p}_1$ oznacza przyspieszenie punktu A_1 , to $m_1\bar{p}_1 = \bar{P}_1$. Utwórzmy rzut na kierunek $\overline{OA_1}$. Oznaczając rzuty $\bar{p}_1$ i $\bar{P}_1$ na $\overline{OA_1}$ przez p_{1r}, P , dostaniemy

$$(25) \quad m_1 p_{1r} = P.$$

Na mocy (II), str. 47, mamy $p_{1r} = \ddot{r}_1 - r_1 \dot{\varphi}_1^2$. Zatem wedle (20)

$$(26) \quad p_{1r} = \ddot{r}_1 - \frac{c_1^2}{r_1^3}.$$

Aby otrzymać $\ddot{r}_1$, zróżniczkujemy równanie (24). Dostaniemy

$$(27) \quad \dot{r}_1 \left[(m_1 + m_2) \ddot{r}_1 - \frac{m_1 c_1^2}{r_1^3} + \frac{m_2 c_2^2}{(l - r_1)^3} \right] = 0.$$

Jeżeli $\dot{r}_1 \neq 0$, to na mocy (25)–(27)

$$(28) \quad P = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[\frac{c_2^2}{(l - r_1)^3} + \frac{c_1^2}{r_1^3} \right].$$

Ze wzoru (28) możemy otrzymać reakcję P , znając tylko r_1 . Znając P , znamy $\bar{P}_1$ i $\bar{P}_2$, gdyż $|\bar{P}_1| = |\bar{P}_2|$.

§ 6. Zagadnienie dwóch ciał. Niech dwa punkty materialne o masach M i m przyciągają się wedle prawa Newtona z siłą o wielkości

$$P = KmM/r^2,$$

gdzie r oznacza odległość tych punktów. Na str. 107 badaliśmy ruch punktu m przy założeniu, że punkt M jest nieruchomy. Udowodniliśmy, że w tym przypadku zachodzą prawa Keplera. Obecnie nie będziemy zakładać, że punkt M jest nieruchomy, lecz że oba punkty są swobodne. Pod wpływem więc wzajemnego przyciągania oba punkty m i M będą się poruszać. Oczywiście, ich środek masy będzie w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym, bo według prawa akcji i reakcji suma sił działających na punkty m i M jest równa zeru. Możemy zatem początek układu inercjalnego umieścić w środku ciężkości obu punktów.

Niechaj x_1, y_1, z_1 będą współrzędnymi punktu M , zaś x_2, y_2, z_2 punktu m . Równania ruchu Newtona dla punktów M i m będą miały postać:

$$(1) \quad M\ddot{x}_1 = -\frac{KmM}{r^2} \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad M\ddot{y}_1 = -\frac{KmM}{r^2} \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad M\ddot{z}_1 = -\frac{KmM}{r^2} \frac{z_2 - z_1}{r}$$

$$(1') \quad m\ddot{x}_2 = -\frac{KmM}{r^2} \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad m\ddot{y}_2 = -\frac{KmM}{r^2} \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad m\ddot{z}_2 = -\frac{KmM}{r^2} \frac{z_2 - z_1}{r}.$$

Ponieważ środek ciężkości układu M, m jest w początku układu współrzędnych, więc $Mx_1 + mx_2 = 0$, $My_1 + my_2 = 0$ i $Mz_1 + mz_2 = 0$, skąd $x_2 = -Mx_1/m$, $y_2 = -My_1/m$ i $z_2 = -Mz_1/m$. Zatem:

$$(2) \quad x_2 - x_1 = -\frac{M+m}{m}x_1, \quad y_2 - y_1 = -\frac{M+m}{m}y_1, \quad z_2 - z_1 = -\frac{M+m}{m}z_1.$$

A więc

$$(3) \quad r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \frac{M+m}{m}r_1,$$

gdzie $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ oznacza odległość punktu M od środka ciężkości. Podstawiając w równania (1) wyrażenia ze wzorów (2) i (3), otrzymamy:

$$(4) \quad \begin{aligned} M\ddot{x}_1 &= -\frac{Km^3M}{(M+m)^2r_1^2}x_1, & M\ddot{y}_1 &= -\frac{Km^3M}{(M+m)^2r_1^2}y_1 \\ M\ddot{z}_1 &= -\frac{Km^3M}{(M+m)^2r_1^2}z_1 \end{aligned}$$

Porównując te równania z równaniami (I), str. 107, widzimy, że ruch punktu M będzie taki, jak gdyby punkt ten był przyciągany przez masę nieruchomą $m^3/(M+m)^2$, umieszczoną w początku układu.

A więc: jeżeli dwa punkty M i m przyciągają się wedle prawa Newtona, to każdy z nich, np. M , porusza się względem środka ciężkości (obu punktów) tak, jak gdyby w środku ciężkości umieszczona była masa nieruchoma $m^3/(M+m)^2$, przyciągająca punkt M wedle prawa Newtona.

Badanie zatem ruchu względem środka masy dwu punktów sprowadza się do przypadku rozpatrywanego na str. 107.

Wynika stąd, że oba punkty poruszają się po krzywych rzędu drugiego w których ognisku znajduje się środek ciężkości tych punktów. Tory więc obu punktów są torami płaskimi.

Zbadajmy jeszcze ruch punktu m względem punktu M . Umieścmy w punkcie M początek układu współrzędnych (x', y', z') , poruszającego się wraz z M ruchem postępowym. Oznaczając przez ξ, η, ζ współrzędne punktu m względem tego układu współrzędnych, otrzymamy

$$(5) \quad \xi = x_2 - x_1, \quad \eta = y_2 - y_1, \quad \zeta = z_2 - z_1.$$

Mnożąc równania (1) przez m/M i odejmując od (1') dostaniemy z uwagi na (5)

$$(6) \quad \begin{aligned} m\ddot{\xi} &= -\frac{K(M+m)m}{r^2} \frac{\xi}{r}, & m\ddot{\eta} &= -\frac{K(M+m)m}{r^2} \frac{\eta}{r}, \\ m\ddot{\zeta} &= -\frac{K(M+m)m}{r^2} \frac{\zeta}{r}. \end{aligned}$$

Porównując równania (6) z równaniami (I), str. 107, widzimy, że punkt m porusza się względem punktu M tak, jak gdyby punkt M był nieruchomy, a masa jego była zwiększona o masę punktu m .

A więc: jeżeli dwa punkty M i m przyciągają się wedle prawa Newtona, to ruch względny punktu m względem punktu M jest taki, jak gdyby punkt M był nieruchomy, a masa jego była zwiększona o masę punktu m .

Także i w tym przypadku badanie ruchu jednego punktu materialnego względem drugiego sprowadza się więc do przypadku rozpatrzonego na str. 107.

Przyjmijmy, że ruch względny punktu m odbywa się po elipsie o osi wielkiej $2a$, przyczem czas obiegu niechaj będzie T . Na mocy (10), str. 109, otrzymamy $a^3/T^2 = K(M+m)/4\pi^2$. Widzimy zatem, że w ruchu względnym stosunek a^3/T^2 zależy od mas obu ciał. Ponieważ ruchy planet badamy względem słońca, więc przyjmując, że M oznacza masę słońca, a m masę planety, widzimy, że *trzecie prawo Keplera* (str. 89), które odnosi się do ruchu względnego planety względem słońca, *jest nieściśle*. Dla innej planety (przy odpowiednim znakowaniu) jest

$$(7) \quad a_1^3/T_1^2 = K(M+m_1)/4\pi^2,$$

skąd

$$(8) \quad \frac{a^3/T^2}{a_1^3/T_1^2} = \frac{M+m}{M+m_1} = \frac{1+\frac{m}{M}}{1+\frac{m_1}{M}}.$$

Ponieważ w układzie słonecznym stosunek m/M wyraża się w tysięcznych, więc ostatni ułamek mało różni się od jedności. Dokładne obserwacje ruchu planet wykazują te odchylenia od trzeciego prawa Keplera.

Gwiazdami podwójnymi nazywamy dwa ciała niebieskie, krążące wokół siebie (zdala od innych ciał). Przyjmując, że gwiazdy podwójne przyciągają się według prawa Newtona, możemy stosować do nich wnioski otrzymane w tym §. Obserwacje potwierdzają te wnioski, a tym samym prawo powszechnego ciążenia, z któregośmy je wyprowadzili.

§ 7. Zagadnienie n ciał. Niechaj n punktów materialnych przyciąga się wzajemnie z siłami działającymi według prawa powszechnego ciężenia Newtona (str. 90). Badaniem ruchów w takim układzie punktów zajmuje się t. zw. *zagadnienie n ciał*.

Zagadnienie to jest ważne dla astronomii. Słońce wraz z planetami tworzy taki układ, jeżeli pominąć działanie gwiazd stałych, bardzo małe wskutek wielkiego ich oddalenia od układu słonecznego.

Zagadnienie dwóch ciał, którym zajmowaliśmy się w § 6, jest szczególnym przypadkiem zagadnienia n ciał.

Zagadnienie n ciał nie jest rozwiązane w całej ogólności. Nawet w przypadku trzech ciał jest jeszcze wiele spraw nierozstrzygniętych. Przy pomocy jednak t. zw. *teorii perturbacji* (czyli *zaburzeń*) możemy wyznaczyć ruchy układu słonecznego z żądaną dokładnością.

W zagadnieniu n ciał mamy do czynienia tylko z siłami wewnętrznymi. Z twierdzenia o środku masy (str. 200) wynika zatem, że środek masy układu jest w spoczynku lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym. Możemy więc początek układu inercjalnego współrzędnych obrać w środku masy. Względem tak obranego układu współrzędnych pęd układu n punktów będzie stale zerem (str. 199).

Z twierdzenia o kręcie (str. 206) wynika, że kręt układu punktów jest stały. Płaszczyzna przechodząca przez środek masy i prostopadła do krętu nie zmienia zatem położenia.

W przypadku układu słonecznego środek masy leży w słońcu (ze względu na wielką masę słońca w stosunku do pozostałych planet).

Płaszczyznę przechodzącą przez środek masy układu słonecznego i prostopadłą do krętu nazwał Laplace *płaszczyzną niezmienną*.

Płaszczyzna ta nie zmienia swego położenia w przestrzeni względem układu inercjalnego współrzędnych o początku w słońcu. Podług obliczeń wykonanych przez Laplace'a płaszczyzna niezmienna tworzy z ekliptyką kąt $\alpha = 1,7689^\circ$.

Zagadnienie trzech ciał. Niechaj dane będą trzy punkty materialne A_1, A_2, A_3 o masach m_1, m_2, m_3 . Oznaczmy przez $\bar{P}_{ij}$ siłę, z jaką punkt m_i przyciąga punkt m_j ; niech $\bar{w}_{ij}$ będzie siłą, z jaką jednostka masy umieszczona w A_i przyciąga jednostkę masy umieszczoną w A_j . Według prawa Newtona mamy zatem

$$(1) \quad \bar{P}_{ij} = m_i m_j \bar{w}_{ij}.$$

Z prawa akcji i reakcji wynika, że $\bar{P}_{ij} = -\bar{P}_{ji}$, więc

$$(2) \quad \bar{w}_{ij} = -\bar{w}_{ji}.$$

Oznaczmy przez $\bar{p}_i$ przyspieszenie punktu m_i w układzie inercyjnym współrzędnych. A więc $m_1 \bar{p}_1 = \bar{P}_{12} + \bar{P}_{13} = m_1 m_2 \bar{w}_{12} + m_1 m_3 \bar{w}_{13}$, skąd

$$(3) \quad \bar{p}_1 = m_2 \bar{w}_{12} + m_3 \bar{w}_{13}.$$

Podobnie

$$(4) \quad \bar{p}_2 = m_1 \bar{w}_{21} + m_3 \bar{w}_{23}.$$

Na mocy (3) i (4) otrzymamy z uwagi na A_1 , że w myśl (2) jest $\bar{w}_{12} = -\bar{w}_{21}$ i $\bar{w}_{13} = -\bar{w}_{31}$:

$$(5) \quad \bar{p}_2 - \bar{p}_1 = (m_1 + m_2) \bar{w}_{21} + m_3 (\bar{w}_{23} + \bar{w}_{31}).$$

Różnica $\bar{p}_2 - \bar{p}_1$ przedstawia przyspieszenie względne punktu A_2 względem A_1 , t. j. przyspieszenie punktu A_2 względem układu współrzędnych o początku A_1 , poruszającego się ruchem postępowym. Połóżmy $\bar{p} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1$. Z równania (5) dostaniemy

$$(6) \quad m_2 \bar{p} = m_2 (m_1 + m_2) \bar{w}_{21} + m_2 m_3 (\bar{w}_{23} + \bar{w}_{31}).$$

Prawa strona równości (6) przedstawia siłę względną punktu A_2 w ruchu względem A_1 .

Pierwszy jej składnik, t. j. $m_2 (m_1 + m_2) \bar{w}_{21}$, przedstawia siłę względną, jaka działałaby na punkt A_2 , gdyby nie było trzeciego punktu A_3 (t. j. gdyby było $m_3 = 0$). Siła ta miałaby (zgodnie z twierdzeniem podanym na str. 227) kierunek ku punktowi A_1 i byłaby taka, jak gdyby masa punktu A_1 była zwiększona o masę punktu A_2 .

Drugi składnik sumy, t. j. $m_2 m_3 (\bar{w}_{23} + \bar{w}_{31})$, nazywamy *siłą perturbacyjną* (lub *zaburzającą*); pochodzi ona z działania punktu A_3 .

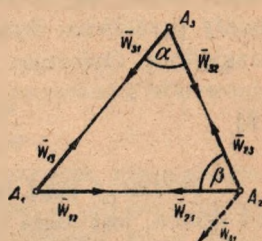
Przykład 1. Niech m_1 oznacza masę ziemi, m_2 masę księżyca, a m_3 masę słońca.

W przybliżeniu masa słońca $= \frac{1}{3} 10^6$ masy ziemi, odległość ziemi od słońca $= 400$ odległości ziemi od księżyca, wreszcie masa księżyca $= \frac{1}{80}$ masy ziemi. A więc:

$$(7) \quad m_3 = \frac{1}{3} 10^6 m_1, \quad m_2 = \frac{1}{80} m_1, \quad A_1 A_3 = 400 A_1 A_2.$$

Z trójkąta $A_1 A_2 A_3$ otrzymujemy

$$(8) \quad 399 A_1 A_2 \leq A_2 A_3 \leq 401 A_1 A_2.$$



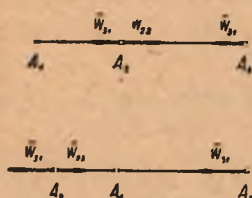
Ze względu na wielką odległość słońca od ziemi i od księżyca (w stosunku do odległości księżyca od ziemi) wektory $\vec{w}_{23}$ i $\vec{w}_{31}$ będą mało różniły się od siebie co do wielkości i kierunku, a zwroty będą miały przeciwne. Suma $\vec{w}_{23} + \vec{w}_{31}$ jest więc mała co do wartości bezwzględnej. Opierając się na danych (7) i (8), można okazać, że

$$(9) \quad \frac{m_2 m_3 |\vec{w}_{23} + \vec{w}_{31}|}{m_2 (m_1 + m_2) |\vec{w}_{21}|} \leq 1,5 \cdot 10^{-2}.$$

Widzimy stąd na mocy (6), że siła perturbacyjna, pochodząca od słońca, jest mała i możemy ją w pierwszym przybliżeniu opuścić.

Zatem: w pierwszym przybliżeniu ruch względny księżyca względem ziemi otrzymamy, pomijając działanie słońca.

Przybliżone badanie ruchu względnego sprowadza się więc w danym przypadku do zagadnienia dwóch ciał. Odnosi się to również do innych planet mających księżyce.



Przykład 2. Niech A_1 będzie środkiem ziemi, A_2 punktem na powierzchni ziemi i A_3 środkiem księżyca. Niech m_1, m_2 i m_3 oznaczają odpowiednio masy ziemi, punktu A_2 i księżyca. Załóżmy że punkty A_1, A_2 i A_3 leżą na jednej prostej.

Wektory $\vec{w}_{23}$ i $\vec{w}_{31}$ mają zwroty przeciwne. Jeżeli A_2 leży między A_1 i A_3 , wówczas $|\vec{w}_{23}| > |\vec{w}_{31}|$, zatem wektor $\vec{w}_{23} + \vec{w}_{31}$ ma zwrot wektora $\vec{w}_{23}$. Jeżeli zaś A_1 leży między A_3 i A_2 , to $|\vec{w}_{23}| < |\vec{w}_{31}|$ i wektor $\vec{w}_{23} + \vec{w}_{31}$ ma wówczas zwrot wektora $\vec{w}_{31}$. W obu przypadkach siła perturbacyjna księżyca $m_2 m_3 (\vec{w}_{23} + \vec{w}_{31})$ jest skierowana względem ziemi pionowo w górę. Działaniem tej siły tłumaczą się przy pływy i odpływy morza.

Przykład 3. Niech m_1 oznacza masę jakiejś planety, m_2 masę jej księżyca, a średnią odległość planety od jej księżyca, T czas obiegu księżyca dokoła planety w ruchu względnym (względem planety). Na mocy (7), str. 227, mamy

$$(10) \quad a^3 / T^2 = K (m_1 + m_2) / 4\pi^2.$$

Jeżeli m'_1, m'_2, a' i T' oznaczają odpowiednie wielkości dla innej planety i jej księżyca, wówczas analogicznie do (10)

$$(11) \quad a'^3 / T'^2 = K (m'_1 + m'_2) / 4\pi^2.$$

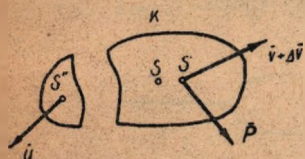
Na mocy (10) i (11) jest $(m_1 + m_2)/(m'_1 + m'_2) = a^3 T'^2 / a'^3 T^2$. Opuszczając masy księżyców m_2 i m'_2 , jako zazwyczaj małe w stosunku do mas planet, dostajemy

$$(12) \quad m_1/m'_1 = a^3 T'^2 / a'^3 T^2.$$

Zatem: *stosunek mas dwóch planet możemy otrzymać z obserwacji ruchów ich księżyców.*

Uwaga. Możemy również przyjąć, że m'_1 oznacza masę słońca, $m'_2 = m_1$, a' średnią odległość planety od słońca, zaś T' jej czas obiegu. Przy tych założeniach wzór (12) przedstawia stosunek masy danej planety (posiadającej księżyc) do masy słońca.

§ 8. Ruch ciał o masie zmiennej. Zbadajmy teraz ruch ciała, którego masa się zmienia wskutek odrywania się od ciała (lub przyłączania się nowych) cząstek podczas ruchu.



Przykładem takim jest poruszający się wózek do którego dosypujemy piasek (lub z którego piasek się wysypuje). Innym przykładem jest rakietą. Materiały pędne, spalając się, wywołują wypływ gazów i siłę popędową rakiety. Masa rakiety maleje zatem o masę uchodzących gazów.

Przyjmijmy, że ciało składa się z wielkiej liczby drobnych cząstek, które możemy uważać za punkty materialne. Oznaczmy przez m masę ciała, przez $\bar{v}$ prędkość środka S jego masy w chwili t , zaś przez $m + \Delta m$ i $\bar{v} + \Delta \bar{v}$ masę i prędkość środka S w chwili $t + \Delta t$. Niechaj wreszcie $\bar{P}$ oznacza sumę sił działających na ciało w chwili t .

Masa oderwanych cząstek w czasie od t do $t + \Delta t$ wynosi $(-\Delta m)$; niech $\bar{u}$ i $\bar{u} + \Delta \bar{u}$ oznaczają prędkości (w chwilach t i $t + \Delta t$) środka S'' masy oderwanych cząstek.

Weźmy pod uwagę układ U wszystkich cząstek, z których składa się dane ciało w chwili t . Pęd tego układu w chwili t jest $\bar{H} = m\bar{v}$, a w chwili $t + \Delta t$ będzie $\bar{H}' = (m + \Delta m)(\bar{v} + \Delta \bar{v}) + (-\Delta m)(\bar{u} + \Delta \bar{u})$. Przyrost pędu wyniesie zatem

$$\bar{H}' - \bar{H} = m\Delta \bar{v} - \Delta m(\bar{u} + \Delta \bar{u} - \bar{v}) + \Delta m\Delta \bar{v}.$$

Dzieląc przez Δt , otrzymamy w granicy dla Δt dążącego do zera

$$(1) \quad \frac{d\bar{H}}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}(\bar{u} - \bar{v}).$$

Ponieważ pochodna pędu układu równa się sumie wszystkich sił działających (str. 200), więc $d\bar{H}/dt = \bar{P}$. Na mocy (1) jest więc

$$(2) \quad m\dot{\bar{v}} - \dot{m}(\bar{u} - \bar{v}) = \bar{P}.$$

Równość powyższą możemy napisać w postaci $m\dot{\bar{v}} + \dot{m}\bar{v} = \dot{m}\bar{u} + \bar{P}$ czyli

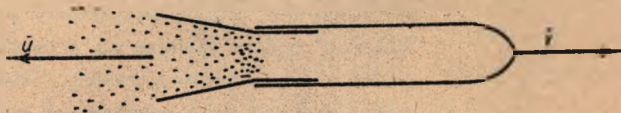
$$(3) \quad d(m\bar{v})/dt = \dot{m}\bar{u} + \bar{P}.$$

Wzory (2) i (3) stosują się również do przypadku, gdy nowe cząstki dołączają się do ciała. W równaniach (2) i (3) wektor $\bar{u}$ przedstawia prędkość środka S'' masy cząstek odrywających się od ciała (lub dołączających się do ciała).

Kładąc $\bar{u} - \bar{v} = \bar{w}$ w równaniu (2), otrzymamy

$$(4) \quad m\dot{\bar{v}} - \dot{m}\bar{w} = \bar{P}.$$

Wektor $\bar{w}$ przedstawia prędkość względną środka masy odrywających się cząstek względem środka masy ciała.



Przykład. Ruch rakiety. Oznaczmy przez m masę rakiety, przez $\bar{v}$ jej prędkość, przez $\bar{w}$ prędkość względną (względem rakiety) gazów wypływających z rakiety, a przez $\bar{P}$ sumę sił zewnętrznych działających na raketę (jak ciężar, opór powietrza i t. d.). Przy tych oznaczeniach zachodzi wzór (4).

Przyjmijmy najpierw, że rakieta porusza się w płaszczyźnie poziomej po linii prostej, którą obierzemy za oś x -ów, nadając jej zwrot zgodny z kierunkiem ruchu rakiety. Połóżmy $v = \bar{v}$ i $w = |\bar{w}|$. Załóżmy, że $\bar{P} = 0$ (a więc, że siła ciężkości znosi się z reakcją płaszczyzny, przyczem pomijamy opór powietrza i tarcie). Ponieważ $\bar{v}$ i $\bar{w}$ mają zwroty przeciwne, więc na mocy (4) $m\dot{v} + \dot{m}w = 0$, skąd

$$(5) \quad \dot{v} = -\frac{\dot{m}}{m} w.$$

Prędkość względną w wypływających gazów możemy uważać za stałą. Całkując równanie (5), otrzymamy więc

$$(6) \quad v = -w \log m + c.$$

Przyjmijmy, że dla $t=0$ jest $m=m_0$ i $v=0$. Według równania (6) jest tedy $0=-w \log m_0 + c$, więc $c=w \log m_0$, a zatem na mocy (6)

$$(7) \quad v = w \log \frac{m_0}{m},$$

skąd $m_0/m = e^{v/w}$ czyli

$$(8) \quad m = m_0 e^{-v/w}.$$

Przypuśćmy, że rakieta osiągnęła szybkość $v=100 \text{ km/godz} = 27 \text{ m/sek}$. Jako prędkość wypływu gazu można przyjąć $w=1000 \text{ m/sek}$. Zatem na mocy (8) $m = m_0 e^{-0,027} = 0,973 m_0$, skąd $m_0 - m = 0,03 m_0$.

Aby więc uzyskać prędkość rakiety 100 km/godz , trzeba spalić materiałów pędnych o masie równej 3% masy rakiety.

Niech teraz rakieta porusza się pionowo w górę. Przyjmijmy oś z skierowaną pionowo ku górze i zachowajmy znakowanie poprzednie. Otrzymamy z (4) (pomijając opór powietrza) $m\dot{v} + \dot{m}w = -mg$ czyli

$$(9) \quad \dot{v} = -w \frac{\dot{m}}{m} - g.$$

Całkując i przyjmując, że dla $t=0$ jest $v=0$ i $m=m_0$, otrzymamy podobnie jak poprzednio

$$(10) \quad v = w \log \frac{m_0}{m} - gt.$$

Aby rakieta nie spadła z powrotem na ziemię i oddaliła się w przestrzenie międzyplanetarne, należałoby nadać jej prędkość $v \geq 12 \text{ km/sek}$ (str. 111). Z równania (10) otrzymujemy $v \leq w \log \frac{m_0}{m}$, skąd $e^{v/w} \leq m_0/m$ czyli $me^{v/w} \leq m_0$, a zatem

$$m_0 - m \geq m(e^{v/w} - 1).$$

Kładąc $v=12 \text{ km/sek}$ i $w=1000 \text{ m/sek} = 1 \text{ km/sek}$, dostaniemy

$$m_0 - m \geq 160000 m.$$

W nierówności tej m oznacza masę rakiety po uzyskaniu prędkości $v=12 \text{ km/sek}$, zaś $m_0 - m$ masę spalonych materiałów pędnych. Jeżeli więc przyjmiemy $m=1 \text{ kg}$, wówczas $m_0 - m \geq 160000 \text{ kg}$.

Trzebaby zatem spalić 160000 kg materiałów pędnych, by 1 kg masy uleciał w przestworza.

Żeby więc odbyć podróż międzyplanetarną w wozie, mającym wraz z podróżnymi masę 1 tony, należałoby zabrać z sobą 160000 ton materiałów pędnych, co jest oczywiście niemożliwe. Dowodzi to, że przy dzisiejszym stanie techniki podróż taka jest niewykonalna. Sprawa posunęłaby się naprzód, gdybyśmy mogli wydajnie zwiększyć w , t. j. prędkość wypływu gazów, która dzisiaj, praktycznie biorąc, dochodzi do 2000 m/sek.

SPIS RZECZY.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

PRZEDMOWA	III
ERRATA	VI

ROZDZIAŁ I. TEORIA WEKTORÓW.

I. Działania na wektorach.

§ 1. Określenia wstępne	1
§ 2. Współrzędne wektora	2
§ 3. Suma i różnica wektorów	3
§ 4. Iloczyn wektora przez liczbę	4
§ 5. Współrzędne sumy i iloczynu	5
§ 6. Rozkład wektora	6
§ 7. Iloczyn skalarowy. Prawo rozdzielności. Prawo łączności. Kwadrat wektora. Przedstawienie analityczne iloczynu skalarowego	7
§ 8. Iloczyn wektorowy. Zmiana porządku czynników. Prawo łączności. Prawo rozdzielności względem sumy. Współrzędne iloczynu wektorowego	9
§ 9. Iloczyn kilku wektorów	12
§ 10. Funkcje wektorowe. Granica. Ciągłość. Pochodna. Funkcje wektorowe wielu zmiennych	13
§ 11. Moment wektora. Moment wektora względem punktu. Moment jako iloczyn wektorowy. Moment sumy wektorów o wspólnym początku. Współrzędne momentu. Moment wektora względem prostej	15

II. Układy wektorów.

§ 12. Moment ogólny układu wektorów	19
§ 13. Parametr	21
§ 14. Układy równoważne. Układy równoważne zeru. Układ trzech wektorów równoważny zeru	22
§ 15. Para wektorów	23
§ 16. Redukcja układu wektorów. Twierdzenie o redukcji. Tabelka	24
§ 17. Oś środkowa. Skrętnik	26
§ 18. Środek wektorów równoległych	28
§ 19. Przekształcenia elementarne układu	29

Spis rzeczy.

ROZDZIAŁ II. KINEMATYKA PUNKTU.

I. Ruch względem układu odniesienia.

§ 1. Czas	32
§ 2. Układ odniesienia	32
§ 3. Ruch punktu	33
§ 4. Wykres ruchu	34
§ 5. Prędkość. Prędkość jako pochodna drogi	34
§ 6. Przyspieszenie. Ruch jednostajny prostoliniowy. Hodograf	36
§ 7. Rozkład przyspieszenia na styczne i normalne. Ruch po torze płaskim. Ruch po torze przestrzennym. Ruch jednostajny. Ruch jednostajnie przyspieszony. Ruch po cykloidzie	40
§ 8. Prędkość i przyspieszenie kątowe. Wektor prędkości kątowej	45
§ 9. Ruch płaski w układzie biegunowym	46
§ 10. Prędkość polowa	47
§ 11. Wymiary wielkości kinematycznych. Ogólne określenie wymiaru. Wy- znaczanie wymiaru.	49

II. Zmiana układu odniesienia.

§ 12. Związek między współrzednymi. Ruch po linii śrubowej	53
§ 13. Związek między prędkościami	56
§ 14. Związki między przyspieszeniami. Przyspieszenie Coriolisa	59
§ 15. Wyznaczanie ruchu względnego. Ruch względem punktu	65

ROZDZIAŁ III. DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO.

I. Dynamika punktu swobodnego.

§ 1. Podstawowe pojęcia dynamiki. Układ inercjalny, czas bezwzględny. Masa i siła. Punkt materialny	70
§ 2. Prawa dynamiki Newtona. Prawa ruchu. Równowaga punktu i sił. Siła bezwładności. Zasada d'Alemberta	72
§ 3. Układy jednostek dynamicznych. Układ fizyczny <i>cgs</i> . Mierzenie mas i sił. Układ techniczny jednostek. Wymiary wielkości dynamicznych.	75
§ 4. Równania ruchu	78
§ 5. Ruch pod wpływem siły ciężkości. Rzut pionowy. Rzut ukośny	81
§ 6. Ruch w ośrodku stawiającym opór. Rzut pionowy. Rzut ukośny	83
§ 7. Moment ilości ruchu. Zasada zachowania pól	85
§ 8. Ruch środkowy. Wzór Bineta	86
§ 9. Ruchy planet. Prawa Keplera. Wnioski z praw Keplera. Prawo ogólnego ciążenia. Masa ziemi. Równanie Keplera	89
§ 10. Praca. Siła stała. Siła zmienna. Praca sumy sił. Wymiar i jednostki pracy	93
§ 11. Pole sił potencjalne. Natężenie pola. Linie sił. Określenie pola poten- cjального. Potencjał. Wymiar potencjału. Związek między siłą a po- tencjałem. Powierzchnie potencjalne	97

Spis rzeczy.

§ 12. Przykłady pól potencjalnych. Pole stałe. Pole środkowe czyli centralne. Pole grawitacyjne Newtonowskie. Pole osiowe. Suma pól potencjalnych	102
§ 13. Energia kinetyczna i potencjalna	105
§ 14. Ruch punktu przyciąganego przez masę nieruchomą. Ruch po krzywej rzędu drugiego. Ruch po linii prostej	107
§ 15. Ruch harmoniczny. Ruch harmoniczny prosty. Tabelka położenia, prędkości i przyspieszenia punktu. Ruch harmoniczny płaski. Ruch harmoniczny tłumiony. Ruch harmoniczny wymuszony. Krzywe Lissajous	111
§ 16. Warunki równowagi w polu sił. Równowaga stała. Twierdzenie Dirichleta	120

II. Dynamika punktu nieswobodnego.

§ 17. Równania ruchu. Reakcja. Energia kinetyczna	123
§ 18. Ruch punktu nieswobodnego po krzywej. Ruch po krzywej płaskiej. Ruch po krzywej przestrzennej. Ruch punktu nieswobodnego ciężkiego.	125
§ 19. Ruch punktu nieswobodnego po powierzchni.	129
§ 20. Wahadło matematyczne	131
§ 21. Równowaga punktu nieswobodnego. Równowaga stała. Równowaga w polu potencjalnym	133

III. Dynamika ruchu względnego.

§ 22. Prawa ruchu	137
§ 23. Przykłady ruchu. Ruch postępowy układu. Ruch obrotowy układu	138
§ 24. Równowaga względna. Równowaga względna w układzie poruszającym się ruchem postępowym	142
§ 25. Ruch względem ziemi. Siła ciężkości. Wielkość i kierunek przyciągania ziemi. Siła Coriolisa. Zboczenie na wschód przy spadku. Wahadło Foucaulta	146

ROZDZIAŁ IV. GEOMETRIA MAS.

I. Układy punktów.

§ 1. Momenty statyczne. Moment statyczny punktu. Moment statyczny układu punktów	153
§ 2. Środek masy. Środek masy dwóch układów punktów. Układ płaski punktów. Układ liniowy punktów. Środek masy dwóch punktów. Układy punktów symetryczne	154
§ 3. Momenty stopnia drugiego. Moment bezwładności. Moment zboczenia (dewiacji). Ramię bezwładności. Masa zredukowana. Momenty bezwładności względem prostych i płaszczyzn równoległych	159
§ 4. Elipsoida bezwładności. Ośie bezwładności. Wyznaczanie osi bezwładności	163
§ 5. Momenty kwadratowe układu płaskiego	169

II. Bryły, powierzchnie i linie materialne.

§ 6. Gęstość. Obliczanie masy. Powierzchnia materialna, linia materialna.	170
§ 7. Momenty statyczne i bezwładności. Środek masy. Bryły, powierzchnie i linie geometryczne. Reguły Guldina. Momenty bezwładności i momenty zboczenia	173
§ 8. Środki ciężkości niektórych linii, powierzchni i brył. Linia łamana. Łuk koła. Trójkąt. Trapez. Wielokąt. Wycinek koła. Odcinek koła. Graniastosłup. Walec. Ostrosłup. Stożek	179
§ 9. Momenty bezwładności niektórych linii, powierzchni i brył. Odcinek. Prostokąt. Kwadrat. Trapez. Trójkąt. Równoległobok. Prostopadłościan. Okrąg koła. Koło. Powierzchnia kuli. Kula. Walec obrotowy. Stożek obrotowy	182

ROZDZIAŁ V. UKŁADY PUNKTÓW MATERIALNYCH.

§ 1. Równania ruchu. Układy swobodne. Siły wewnętrzne i zewnętrzne. Równowaga układu punktów. Zasada d'Alemberta. Układy nieswobodne. Układ sztywny. Maszyna Atwooda	190
§ 2. Ruch środka masy. Własności kinematyczne środka masy. Wypadkowa sił ciężkości. Własności dynamiczne środka masy	198
§ 3. Moment ilości ruchu. Kręt względem punktu. Kręt w ruchu postępowym. Kręt w ruchu względem środka masy. Kręt względem osi. Dynamiczne własności krętu. Ruch w polu siły ciężkości. Obrót układu około osi. Kręt w ruchu względnym	202
§ 4. Praca i potencjał układu punktów. Praca. Praca równa zeru. Potencjał układu. Potencjał siły ciężkości. Potencjał sił wewnętrznych	211
§ 5. Energia kinetyczna układu punktów. Energia kinetyczna w ruchu postępowym. Energia kinetyczna w ruchu obrotowym około osi. Twierdzenie Königa. Zasada równowartości pracy i energii kinetycznej. Energia kinetyczna w ruchu względnym	218
§ 6. Zagadnienie dwóch ciał	225
§ 7. Zagadnienie n ciał. Zagadnienie trzech ciał	228
§ 8. Ruch ciał o masie zmiennej	231

C Z Ę Ś Ć D R U G A.

ROZDZIAŁ VI. STATYKA CIAŁA SZTYWNEGO.

I. Ciało swobodne.

§ 1. Ciało sztywne. Układy sztywne punktów materialnych	235
§ 2. Siła. Punkt zaczepienia siły. Moment siły względem punktu. Moment siły względem osi. Równowaga sił	236
§ 3. Hipotezy równowagi sił	239
§ 4. Przekształcanie układów sił. Zmiana punktu zaczepienia siły. Prawo składania i rozkładania sił. Układy równoważne. Para sił. Redukcja układu sił. Układ płaski sił. Układ równoległy sił. Siły ciężkości. Układy par.	239
§ 5. Warunki równowagi sił. Postać analityczna warunków równowagi. Układ płaski sił	245
§ 6. Grafostatyka. Wielobok sznurowy. Składanie sił. Wielobok sznurowy. Wypadkowa części układu	238
§ 7. Niektóre zastosowania wieloboku sznurowego. Wyznaczanie reakcyj w punktach podparcia. Wyznaczanie momentu sił. Wyznaczanie środka ciężkości i momentu statycznego figur płaskich	256

II. Ciało nieswobodne.

§ 8. Warunki równowagi	261
§ 9. Reakcje ciał stykających się. Reakcja normalna i styczna. Podpory. Środek ciśnień. Reakcje nici	262
§ 10. Tarcie.	271
§ 11. Warunki równowagi nie zawierające reakcji. Ciało o punkcie nieruchomym. Ciało o osi nieruchomej. Ciało płasko prowadzone. Dźwignia. Wyznaczanie reakcyj działających na oś nieruchomą	274
§ 12. Równowaga ciał ciężkich podpartych. Ciało podparte w dwóch punktach. Ciało podparte w $n > 2$ punktach	282
§ 13. Siły wewnętrzne	288

III. Układy ciał.

§ 14. Warunki równowagi.	290
§ 15. Układy prętów. Napięcia w prętach. Połączenia przegubowe. Układy prętów. Waga dziesiętna	292
§ 16. Kratownice. Kratownica płaska. Wyznaczanie napięć w kratownicy przy pomocy rachunku. Wyznaczanie napięć w kratownicy przy pomocy planów sił. Wyznaczanie napięć z pomocą przekrojów	298
§ 17. Równowaga lin ciężkich. Łańcuch. Lina. Lina obciążona	305

ROZDZIAŁ VII. KINEMATYKA CIAŁA SZTYWNEGO.

§ 1. Przesunięcie i obrót ciała około osi. Przesunięcie równoległe czyli translacja. Obrót około osi.	310
§ 2. Przesunięcia punktów ciała w ruchu płaskim. Obrót około punktu. I Twierdzenie Eulera. Ciało płasko prowadzone	313
§ 3. Przesunięcia punktów ciała. II Twierdzenie Eulera. Twierdzenie Chasle'a. Skręt	315
§ 4. Ruch postępowy i ruch obrotowy około osi. Ruch postępowy. Ruch obrotowy około osi.	320
§ 5. Rozmieszczenie prędkości w ciele sztywnym. Związki między prędkościami punktów ciała. Prędkości punktów linii prostej i płaszczyzny. Ruch chwilowy ciała sztywnego	323
§ 6. Ruch chwilowy płaski. Wyznaczanie środka obrotu chwilowego.	326
§ 7. Ruch chwilowy przestrzenny. Obrót około punktu. Ruch chwilowy w przypadku ogólnym. Prędkość unoszenia. Skręt chwilowy. Wyznaczanie ruchu ciała	332
§ 8. Toczenie i ślizganie. Linia środków chwilowych. Stożek osi chwilowych. Powierzchnia osi środkowych	339
§ 9. Składanie ruchów ciała. Dwa obroty równoczesne. Składanie kilku obrotów równoczesnych. Ruch względny ciała. Precesja regularna	343
§ 10. Przedstawienie analityczne ruchu ciała sztywnego. Prędkość chwilowa kątowna. Oś środkowa. Ruch płaski. Kąty Eulera. Kąty Eulera w precesji regularnej	351
§ 11. Rozkład przyśpieszeń. Ruch płaski. Ruch w przestrzeni	357

ROZDZIAŁ VIII. DYNAMIKA CIAŁA SZTYWNEGO.

§ 1. Praca i energia kinetyczna. Wielkości dynamiczne. Praca. Energia kinetyczna	361
§ 2. Równania ruchu. Ruch środka masy. Zasada krętu. Zasada energii kinetycznej. Zasada d'Alemberta. Ruch postępowy ciała. Warunki równowagi. Reakcje ciał stykających się. Praca tarcia.	365
§ 3. Obrót około osi stałej. Maszyna Atwooda. Wahadło fizyczne. Wyznaczanie reakcji na oś obrotu. Oś obrotu osią środkową bezwładności. Środek uderzeń	375
§ 4. Ruch płaski. Ruch płaski figury płaskiej. Ruch płaski ciała.	387
§ 5. Kręt. Kręt względem środka masy ciała lub względem jego punktu nieruchomego. Pochodna krętu	394
§ 6. Równania Eulera. Ruch ciała sztywnego swobodnego	399
§ 7. Obrót ciała około punktu bez działania sił. Kręt i energia kinetyczna. Obrót około punktu kulistego. Obrót około punktu, którego elipsoida bezwładności jest elipsoidą obrotową. Wyznaczanie kątów Eulera. Obrót ciała około punktu w przypadku ogólnym	401
§ 8. Obrót ciała ciężkiego około punktu	408
§ 9. Ruch kuli po płaszczyźnie	411
§ 10. Giroskop Foucaulta. Ruch osi symetrii w płaszczyźnie południka. Ruch osi w płaszczyźnie poziomej	414

ROZDZIAŁ IX. ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH.

§ 1.	Układy holonomiczne skleronomiczne. Więzy obustronne. Więzy jednostronne. Stopień swobody układu	420
§ 2.	Przesunięcia przygotowane. Punkt na powierzchni. Punkt na linii. Układy holonomiczne skleronomiczne. Więzy obustronne. Ciało sztywne swobodne. Punkt unieruchomiony. Oś unieruchomiona. Ruch figury w płaszczyźnie. Więzy jednostronne	424
§ 3.	Zasada prac przygotowanych. Praca przygotowana. Ciało swobodne. Ciało mające punkt stały. Ciało płasko prowadzone. Ciało mające oś stałą. Ciało mające stałą oś skrętu. Śruba. Wyznaczanie napięć w prętach kratownicy.	436
§ 4.	Wyznaczanie położenia równowagi w polu sił. Mnożniki Lagrange'a.	449
§ 5.	Współrzędne uogólnione Lagrange'a. Parametry układu. Przesunięcia przygotowane. Praca przygotowana. Siły uogólnione. Warunki równowagi. Równowaga w polu potencjalnym	455

ROZDZIAŁ X. DYNAMIKA UKŁADÓW HOLOMOMICZNYCH.

§ 1.	Układy holonomiczne	470
§ 2.	Układy anholonomiczne	472
§ 3.	Przesunięcia przygotowane. Punkt na powierzchni. Punkt na linii. Przykłady. Układy punktów. Współrzędne uogólnione	473
§ 4.	Zasada d'Alemberta. Równowaga sił. Zasada d'Alemberta.	478
§ 5.	Praca i energia kinetyczna w układach skleronomicznych	483
§ 6.	Równania Lagrange'a pierwszego rodzaju	485
§ 7.	Równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Równania Lagrange'a w polu potencjalnym. Współrzędne cykliczne. Ruch punktu na powierzchni obrotowej. Współrzędne biegunowe	488
§ 8.	Równania kanoniczne Hamiltona. Układy skleronomiczne	504

ROZDZIAŁ XI. ZASADY WARIACYJNE MECHANIKI.

§ 1.	Wariacja bez wariacji czasu. Wariacja funkcji. Wariacja całki. Wariacja pochodnej. Wariacja funkcji złożonej. Układy punktów	510
§ 2.	Zasada Hamiltona. Ruch rzeczywisty. Ruch porównawczy. Zasada Hamiltona dla współrzędnych naturalnych. Zasada Hamiltona dla współrzędnych uogólnionych. Zasada Hamiltona w polu potencjalnym. Układy holonomiczne skleronomiczne w polu potencjalnym	518
§ 3.	Wariacja z wariacją czasu. Wariacja funkcji. Układy punktów. Wariacja wraz z wariacją czasu całki	529
§ 4.	Zasada Maupertuis (najmniejszego działania). Przekształcenie Höldera. Postać ogólniejsza zasady Hamiltona. Zasada Maupertuis	534
DODATEK. Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego o współczynnikach stałych		541
SKOROWIDZ NAZW		544



MONOGRAFIE MAT

WARSZAWA, PAŃSTWOWY INSTYTUT

WROCŁAW, POLITECHNIKA, SEMINARIUM

UP - Kraków BG



1050156078



- I. S. Banach, Théorie des opérations linéaires.
- II. S. Saks, Théorie de l'intégrale, 1933.
- III. K. Kuratowski, Topologie I, 1933, X + 300.
- IV. W. Sierpiński, Hypothèse du continu.
- V. A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935.
- VI. S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Funktionen, VI + 300.
- VII. K. Saks, Theory of the Integral, 1937.
- VIII. S. Banach, Mechanika I, 1938, VI + 234, i 1950.
- IX. S. Banach, Mechanika II, 1938, 235—556, wydania niezmiennione 1947 i 1950.
- X. S. Saks i A. Zygmund, Funkcje Analityczne, 1938, VIII + 432, wydanie niezmiennione 1948.
- XI. W. Sierpiński, Zasady Algebry Wyższej, 1948, XII + 438.
- XII. K. Borsuk, Geometria Analityczna (w druku).
- XIII. W. Sierpiński, Działania Nieskończone, 1947, XI + 503.
- XIV. W. Sierpiński, Rachunek Różniczkowy (poprzedzony badaniami funkcji elementarnych), 1947, VII + 262.
- XV. K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego t. I, 1948, 240, wydanie niezmiennione 1949.
- XVI. E. Otto, Geometria Wykreślna (w druku).
- XVII. S. Banach, Teoria Funkcji Zmiennej Rzeczywistej (w druku).
- XVIII. A. Mostowski, Logika Matematyczna, 1948, VIII + 388.
- XIX. W. Sierpiński, Teoria Liczb, nowe wydanie powiększone, 1950, VI + 544.
- XX. K. Kuratowski, Topologie I, nowe wydanie powiększone, 1948, XII + 452.
- XXI. K. Kuratowski, Topologie II (w druku).

W PRZYGOTOWANIU:

- S. Banach, Mechanics, 2 vol. (English translation).
- M. Błocki, Geometria Różniczkowa.
- M. Kac and H. Steinhaus, Independent Functions.
- K. Kuratowski, Wykłady Rachunku Różniczkowego i Całkowego, t. II.
- K. Kuratowski i A. Mostowski, Kurs Teorii Mnożności.
- E. Marczewski, General Theory of Measure.
- S. Mazur, Functional Analysis.
- S. Mazurkiewicz, Rachunek Prawdopodobieństwa.
- A. Mostowski, Mathematical Logic.
- W. Nikliborc, Równania Różniczkowe.
- W. Nikliborc, Problème de trois corps.
- O. Nikodym, Theory of Vectors and Vector-Fields.
- W. Rubinowicz, Wektory i Tensory.
- S. Saks and A. Zygmund, Analytic Functions (English translation).
- W. Sierpiński, Algèbre des Ensembles.
- W. Sierpiński, The Axiom of Choice and the Continuum Hypothesis.
- W. Sierpiński, Teoria Mnożności, nowe wydanie powiększone.
- W. Siebodziński, Formes différentielles symboliques et leurs applications.
- T. Ważewski, Teoria Równań Różniczkowych.
- A. Zygmund, Trigonometrical Series, 2 vol. (new edition).