BIBLIOTEKA GŁÓWNA
WSP
KRAKÓW
11 851

313372

BIBLJOTECZKA KÓŁKA MAT.-FIZ. U. U. J. Nr. 2
POD REDAKCJĄ
PROF. DRA WITOLDA WILKOSZA

DR WITOLD WILKOSZ
PROFESOR UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO

TEORJA MNOGOŚCI PUNKTOWYCH

CZ. I.

MNOGOŚCI LINJOWE:
TEORJA OPISOWA.
MIARA LEBESGUE'A.

392

KRAKÓW 1933
NAKŁADEM KÓŁKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNEGO U.U.J.
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNIACH GEBETHNERA i WOLFFA
Warszawa — Kraków — Lublin — Łódź — Poznań — Wilno — Zakopane

BIBLIOTEKA
Państwowej
Wyższej Szkoły Pedagogicznej
w KRAKOWIE

11851

UP - Kraków BG
1050156280

EX LIBRIS
UP Muzeum Podręcznika

CZCIONKAMI DRUKARNI NARODOWEJ W KRAKOWIE

Książeczka niniejsza przeznaczona jest zasadniczo dla studentów matematyki, a w szczególności dla słuchaczy kursu Analizy. Pierwsza jej część obejmuje elementy opisowej i metrycznej teorji zbiorów linjowych, druga zawierać będzie elementy topologji zbiorów płaskich i więcejwymiarowych. Zadaniem jej będzie podanie dowodów twierdzeń o charakterze topologiczno-geometrycznym, których znajomości wymaga Analiza i Teorja funkcyj analitycznych, a po których dowody odsyła się zwykle słuchacza do mało dostępnych mu często źródeł.

Z punktu widzenia dydaktycznego chciałem celowo przyzwyczaić czytelnika do dowodów tak formalnych jak i jakościowych, stąd pewna niejednolitość postaci dowodzeń.

§ 1. Zbiory i ich Algebra.

1. W życiu codziennem spotykamy się bezustannie z gromadami, zbiorami, zespołami i t. d. przedmiotów mniej lub więcej konkretnych. Fura cegieł, worek jabłek, ale też kompleks uderzeń zegara, bijącego 10-tą godzinę, zespół ważnych faktów politycznych w danym okresie, wszystko to przykłady rzeczonego rodzaju.

Ten stan rzeczy stwarza potrzebę abstrakcyjnego zainteresowania się pojęciem przedmiotu i zbioru, aby móc zastosować metody ogólne, upraszczające postępowanie w poszczególnych wypadkach. Już niegdyś w czasach, o których nic nam bliższego nie wiadomo, zainteresowanie się tą sprawą, stworzyło pojęcie liczby całkowitej, jako wyraz ilości przedmiotów w gromadzie. Dało nam to arytmetykę liczb, początkowo tylko całkowitych, później i innych, a w konsekwencji cały ten dział matematyki, który zwiemy krótko analizą w przeciwstawieniu do geometrji. Ze swej strony geometrja zmusiła nas do rozpatrywania gromad swych punktów czy innych utworów, lecz dosadnie wystąpiła ta potrzeba dopiero w nowoczesnej nauce.

Tymczasem logika, ujęta w kanony, początkowo dość pierwotne, w genjalnym „Organonie“ Arystotelesa [384—322 prz. Chr.] stworzyła ideę pojęcia ogólnego (nomen generale), któ-

rego zakres jest ujęciem abstrakcyjnem życiowej idei gromady przedmiotów, względnie ideę tę obejmuje w części swych zastosowań. Pomysły Leibniza (1648—1716) mające na celu utworzenie nowej abstrakcyjnej teorji zakresów pojęć ogólnych, nie ujrzały światła dziennego, pozostając przeważnie w rękopisach, z których je dopiero w XX już wieku L. Couturat wydobył. Przyczyniły się jednak do stworzenia t. zw. algebry logiki, nad którą pracowali głównie Boole, De Morgan, Jevons, Schröder w 19 wieku, aż do czasów wystąpienia Giuseppe Peano (1858—1932) i jego logiki matematycznej, kontynuowanej przez Bertranda Russella i następców.

Ze strony matematyki, potrzebę ujęcia teorji *zbiorów,* jako odpowiednika abstrakcyjnego gromad przedmiotów konkretnych, zrozumiał naprawdę w pełni dopiero Jerzy Cantor (1877—1918), mając do pewnego stopnia za poprzedników Bolzanę, Weierstrassa, P. du Bois Reymonda i innych.

2. Pojęcie *zbioru,* jakiem posługuje się matematyczna teorja *zbiorów,* czyli *mnogości* (lub *klas*), odbiega w kilku punktach od abstrakcyjnego obrazu idei gromady przedmiotów, a zbliża się bardzo do idei *zakresu* pojęcia ogólnego, takiej jak ją zna logika. Pojmując, że *zbiór* powstaje przez podanie pewnego *warunku zdaniowego,* którego spełnienie przez dany przedmiot powoduje — i to jedynie — należenie do danego zbioru [1], teorja mnogości zezwala

[1] p. moje Podstawy Ogólnej Teorji Mnogości. Warszawa 1925.

na rozważanie zbiorów: 1° *pustych,* pozbawionych przedmiotów, 2° *jednostkowych,* posiadających tylko jeden przedmiot, 3° *skończenie licznych,* posiadających przynajmniej dwa przedmioty, 4° *nieskończenie licznych.*

Ideę *gromady* konkretnej reprezentuje właściwie tylko wypadek (3°), pozostałe wypadki są już raczej jej uogólnieniem.

3. W *algebrze* zbiorów wprowadzamy szereg pojęć i działań, z których pewne przedstawiają dużą analogję w stosunku do pojęć algebry liczb. Aby te podobieństwa uwypuklić, będziemy wprowadzali znaki pojęć i działań zupełnie analogiczne do arytmetycznych, opatrując je odróżniającym znaczkiem u dołu ($_m$) {„mnogość"}, który to znaczek opuszczać będziemy w praktyce. Postępując w ten sposób, zbliżamy się możliwie do zwyczajów panujących wśród matematyków, a oddalamy od logików formalnych, którzy posiadają odrębne znaki dla wyrażenia potrzebnych im idej algebry zbiorów.

Definicja I. Aby wyrazić, że przedmiot a należy do zbioru A, piszemy:

$$a \varepsilon A \qquad \text{„}a \text{ należy do } A\text{“}.$$

Zaprzeczenie tego zdania piszemy:

$$\sim a \varepsilon A \text{ lub } a \sim \varepsilon A$$

[„nie — a należy do A“ lub „a nie należy do A“]

Znak „$\sim$“ jest ogólnym znakiem przeczenia.

Def. II. Zdanie „*A zawiera się* w B“ zapiszemy w postaci:

$$A \subset B.$$

Oznacza ono, że *każdy* przedmiot, który należy do A, należy *tem samem* do B.

Zbiór A jest wtedy *podzbiorem* zbioru B.

Def. III. *Równość (identyczność)* zbiorów A i B zaznaczamy jako:

$$A = B$$

i oznacza ona zawsze, że *jednocześnie*

$$A \subset B \text{ i } B \subset A.$$

Def. IV. Jeżeli A i B są zbiorami, to zbiór utworzony z warunku, że mają doń należeć wszystkie przedmioty, które należą do zbioru A *lub* do zbioru B i jedynie te, nazwiemy *sumą („logiczną“* lub *„mnogościową“)* zbiorów A i B i oznaczymy przez:

$$A +_m B \qquad \text{(krótko } A + B\text{)}.$$

Def. V. Jeżeli A i B są zbiorami, to zbiór utworzony z warunku, że mają doń należeć i jedynie te przedmioty, które *jednocześnie* należą do zbioru A i B, nazwiemy *iloczynem* zbiorów A i B („wspólną częścią“) i oznaczymy:

$$A \times_m B \qquad [\text{krótko } A \times B].$$

Def. VI. Jeżeli A i B są zbiorami, to zbiór utworzony z warunku, że mają doń należeć i jedynie te przedmioty, które *należą* do zbioru A, lecz *nie należą* do B, nazwiemy *różnicą* zbiorów A i B i oznaczymy przez:

$$A -_m B \qquad [\text{krótko } A - B].$$

4. Rozważę obecnie problem *wykonalności* działań powyżej określonych. Teorja mnogości, ujmo-

wana zbyt ogólnie i abstrakcyjnie, doprowadza do niezmiernych trudności logicznych, z któremi matematyka nie chciałaby mieć do czynienia. Trudności te powodują przeważnie, zbyt ogólnie ujęte zasady tworzenia nowych zbiorów przy pomocy danych, przeto postaram się zająć stanowisko skromniejsze, ograniczając przedewszystkiem wykonalność działań logicznych (teorjo-mnogościowych) do węższych rozmiarów.[1]

W praktyce wykonujemy jedynie działania dodawania, mnożenia czy odejmowania zbiorów w wypadkach, gdy zbiory są, jak to mówimy „jednego gatunku", jak np. zbiory punktów na płaszczyźnie (figury płaskie), w przestrzeni czy na linji prostej, zbiory złożone z liczb rzeczywistych czy wymiernych lub zespolonych i t. p. Wahalibyśmy się może, gdyby nam przyszło dodać zbiór wszystkich kul w przestrzeni do zbioru wszystkich liczb wymiernych, sądząc (niewiadomo czy słusznie), że są to zbiory o zbyt różnym charakterze.

Aby powyższym instynktownym tendencjom czy niechęciom odpowiedzieć w teorji, stawiamy następującą zasadę:

Zasada I. *Jeżeli zbiory* A i B *są podzbiorami tego samego zbioru* M, *jeśli zatem:*

$$A \subset M \text{ i } B \subset M,$$

to działania $+_m$, $\times_m$, $-_m$ *są wykonalne*

i $$A + B, \quad A \times B, \quad A - B$$

są znów podzbiorami zbioru M.

---

[1] Pokrywa się ono ze stanowiskiem, zajętem w mym Fascicule XLV: *Propriétés topologiques du plan euclidien* [Memorial des Sciences Matématiques. Paryż 1930].

Zasada powyższa posiada poważne następstwa, na które chcę zwrócić uwagę. Jeżeli A i B są zawarte w M i nie posiadają elementów wspólnych, to aby $A \times B$ było wykonalne, musi wśród podzbiorów zbioru M figurować zbiór pusty.

Sprawę tę załatwia:

Zasada II. *W każdym zbiorze M jest zawarty jako podzbiór pewien zbiór pusty.*

Kwestję możności porównywania między sobą zbiorów pustych załatwia ostrożnie:

Zasada III. *Podzbiór pusty zbioru M jest zawarty w każdym podzbiorze zbioru M.*

Pociąga to za sobą, że podzbiory puste zbioru M są *identyczne* (def. III, ust. 3).

Def. *Jedyny pusty podzbiór zbioru M oznaczymy przez: $O_m^{(M)}$ lub krótko O_m*, względnie nawet przez O, o ile nie obawiamy się nieporozumień.

Jeżeli zbiór N zawiera się w M, to podzbiór pusty dla N jest znów identyczny z podzbiorem pustym dla M; podobnie $O_m^{(A)}$ i $O_m^{(B)}$ są identyczne, o ile $A \subset M$ i $B \subset M$, atoli może się zdarzyć, że nie będziemy mogli porównać ze sobą pustych zbiorów, o ile nic nam bliższego nie wiadomo, w jakich zbiorach są one zawarte.

Z elementarnemi prawidłami działań: $+_m$, $\times_m$, $-_m$, zechce się czytelnik zapoznać teoretycznie z książek wymienionych w krótkiej bibljografji na końcu dziełka, zresztą są to prawidła intuicyjnie oczywiste.

5. Często zdarza się nam rozważać zbiory, o których elementach wiemy, że są znów zbiorami. Mówimy wtedy, że dany zbiór jest *rodziną* zbiorów. Odpowiednikami konkretnemi takich ro-

dzin są nprz. ogół archipelagów jakiegoś morza, wszystkie konstelacje północnej półkuli nieba, ogół narodów Europy i t. p.

Rozważmy rodzinę zbiorów $\mathfrak{A}$, której elementami są zbiory A, B, ...

Def. I. Zbiór utworzony z warunku, że mają doń należeć i jedynie te przedmioty, które należą do jednego choćby zbioru A, B, ... rodziny $\mathfrak{A}$, nazwiemy *sumą* rodziny $\mathfrak{A}$ i oznaczymy przez:

$$\Sigma_m \mathfrak{A} \qquad [\text{krótko } \Sigma \mathfrak{A}].$$

Def. II. Zbiór utworzony z warunku, że mają doń należeć i jedynie te elementy, które jednocześnie należą do wszystkich zbiorów A, B, ... rodziny $\mathfrak{A}$, nazwiemy *iloczynem* rodziny $\mathfrak{A}$ lub „wspólną częścią“ i oznaczymy przez:

$$\Pi_m \mathfrak{A} \qquad [\text{krótko } \Pi \mathfrak{A}].$$

Wykonalność nowych działań zapewnią nam następujące zasady.

Zasada IV. *Podzbiory danego zbioru M tworzą rodzinę,* zwaną *pełną rodziną podzbiorów mnogości M.* Oznaczać ją będziemy czasami przez:

„*podzbiory M*“.

Zasada V. *Jeżeli dana rodzina $\mathfrak{A}$ jest podzbiorem jakiejś pełnej rodziny podzbiorów pewnej mnogości M, to $\Sigma \mathfrak{A}$ jest wykonalne i jest dalej podzbiorem mnogości M.*

Zasada VI. *Jeżeli rodzina $\mathfrak{A}$ jest podzbiorem jakiejś pełnej rodziny podzbiorów pewnego zbioru M i nie jest rodziną* **pustą,** *to $\Pi \mathfrak{A}$ jest wykonalne i jest dalej podzbiorem mnogości M.*

U w a g a. Zwracam z naciskiem uwagę, że nie zastrzegamy sobie wykonalności $\Pi \mathfrak{A}$, gdyby rodzina $\mathfrak{A}$ była *zbiorem pustym*.

Niezamierzając w naszej książeczce wykładać podstaw teorji mnogości, zaznaczam tylko, że zdania cytowane tu jako „*zasady*“ winne być postulatami czy twierdzeniami każdej teorji, która ma służyć normalnym celom matematyki. Być może, że teorja ogólna pozwoli ich zasięg rozszerzyć, w każdym razie nie powinna ich zwęzić i tego nawet ostrożna „hierarchja typów“ Russella nie czyni.[1]

6. Pozostaje nam do omówienia sprawa zbiorów posiadających jeden jedyny element. O z n a c z m y z b i ó r, k t ó r e g o c a ł y z a p a s s t a n o w i j e d y n i e e l e m e n t a p r z e z

$$\{a\}.$$

Nie stawiamy żadnych zasad, któreby pozwalały rozstrzygać o identyczności czy różności zbioru $\{a\}$ i jego elementu a. Tendencje nowoczesnej logiki idą jednakże w kierunku odróżniania od siebie tych dwóch tworów logicznych, względnie ku uważaniu ich za nieporównywalne.

Dla wygody czytelnika zestawiam tu znaki używane przez logików[2] ze znakami naszej książeczki, będącymi również, pominąwszy znaczek odróżniający $(_m)$, znakami książek matematycznych.

---

[1] p. moje Podstawy Ogólnej Teorji mnogości.
[2] przyjęte również w mych Podstawach T. M.

Znakowanie logików	Znakowanie nasze
$A \cup B$	$A +_m B$
$A \cap B$	$A \times_m B$
Λ	O_m
$s' \mathfrak{A}$	$\Sigma_m \mathfrak{A}$
$p' \mathfrak{A}$	$\Pi_m \mathfrak{A}$
$\iota' a$	$\{a\}$,

pozostałe znaki są w obu ujęciach jednakowe.

Autorzy niemieccy piszą często:

$$\Sigma \mathfrak{A} = \mathrm{M}(\mathfrak{A}), \quad \Pi \mathfrak{A} = \mathrm{D}(\mathfrak{A}).$$

§ 2. Mnogości Punktowe.

1. Geometrja, tak płaska jak i przestrzenna, ma do czynienia bezustannie z pojęciem zbioru. Każda figura linjowa czy płaska, każda bryła w przestrzeni jest dla geometrji, w klasycznem jej ujęciu, zbiorem punktów.

Od chwili jednak stworzenia, przez genjalnego René Descartesa [1596—1650] *geometrji analitycznej,* nauczyliśmy się oznaczać punkty liczbami lub układami liczb, przyczem, biorąc zazwyczaj za podstawę układ odniesienia kartezjański, posługujemy się dla oznaczenia punktów na prostej pojedynczemi liczbami rzeczywistemi. Punkty w płaszczyźnie wyrażamy przy pomocy par takich liczb, a w przestrzeni przy pomocy trójek liczb rzeczywistych. Pozwala to geometrze zastąpić zawsze zbiory punktów geometrycznych, czyli figury geometryczne, zbiorami liczb rzeczywistych, względnie mnogościami par czy trójek takich liczb. Możemy też odrazu uwolnić się od rozważań czysto geo-

metrycznych i całą tę sprawę ująć analitycznie, stwarzając pojęcie *analitycznej* przestrzeni, dowolnie wymiarowej w następujący sposób:

Def. I. *Przestrzenią analityczną n-wymiarową* zwać będziemy ogół wszelkich możliwych układów (uporządkowanych) n liczb rzeczywistych

$$x_1 \; x_2 \ldots x_n \qquad (n > o);$$

układy te zwać będziemy jej *punktami,* liczby $x_1, \; x_2 \ldots x_n$ *spółrzędnemi* (1-szą, 2-gą, ... n-tą) punktu:

$$(x_1, \; x_2, \ldots x_n).$$

Def. II. *Odległością* punktów

$$(x_1, \; x_2, \ldots x_n) \text{ i } (y_1, \; y_2, \ldots y_n)$$

nazwiemy liczbę *nieujemną:*

$$\delta = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2}.$$

Będziemy oznaczali *przestrzeń n-wymiarową analityczną* przez q_n, wyjątkowo zamiast q_1 piszemy też q.

Mając pojęcie *punktu* i *odległości* możemy, tak jak w zwykłej geometrji, tworzyć już definicje utworów geometrycznych i to aż do $n = 3$ włącznie, przez nieomal literalne przeniesienie definicyj utworów i ich związków, na linji prostej, w płaszczyźnie czy przestrzeni zwykłej, przyczem interpretację geometryczną uzyskujemy metodą geometrji analitycznej. Dla $n > 3$ interpretacja w zwykłym sensie ustaje, tworzymy jednak definicje prostych, płaszczyzn, nadpłaszczyzn, kół, kul i t. d. w ścisłej analogji do definicyj zwyczajnych. Spot-

kamy się z tem jeszcze później, gdzie pewne utwory tego rodzaju będziemy określali szczegółowo.

Zasady arytmetyki i teorji mnogości winne wykazać, że przestrzenie: $q_1, q_2, \ldots q_n$ są *zbiorami*, zatem w obrębie podzbiorów, względnie rodzin podzbiorów i t. d. jakiejś przestrzeni q_n mieć będziemy zapewnioną wykonalność działań mnogościowych.

Def. III. Podzbiory jakiejkolwiek przestrzeni analitycznej q_n zwać będziemy krótko *mnogościami punktowemi*. W szczególności dla $n = 1$ mnogościami *linjowemi*, dla $n = 2$ *płaskiemi*, dla $n = 3$ *przestrzennemi* (zwykłemi) i t. d.

2. Rozpoczniemy najpierw od szczegółowego zapoznania się z mnogościami *linjowemi*, przejdziemy potem do mnogości *więcejwymiarowych*, spotykając się już od $n = 2$ ze specyficznemi trudnościami, z któremi poznamy się choćby w drobnej mierze.

Wiele definicyj i twierdzeń ważnych dla $n = 1$ przeniesiemy wprost na wypadek $n > 1$ przy pomocy metod, o których będzie później mowa.

Definicje te i twierdzenia będziemy oznaczali *gwiazdką* w rozdziałach o mnogościach linjowych.

Budowanie ogolnej teorji mnogości punktowych n-wymiarowych (względnie jeszcze szerszej) nie będzie przedmiotem niniejszej książeczki.

§ 3. Mnogości linjowe.

1. **Interpretacja geometryczna.** Wedle umowy poprzedniej, mnogości linjowe są to podzbiory przestrzeni q_1, którą jest ogół liczb rzeczy-

wistych, oznaczany też krótko przez q. Obrawszy dowolną prostą l, na niej dwa różne punkty O i A, możemy każdemu punktowi P prostej l przypisać liczbę:

$$x_P = \frac{\overrightarrow{OP}}{\overrightarrow{OA}}$$

będącą *miarą algebraiczną* [długością ze znakiem] odcinka skierowanego $\overrightarrow{OP}$ w jedynostce $\overrightarrow{OA}$, *dodatnią,* gdy $\overrightarrow{OP}$ zgodne co do kierunku z $\overrightarrow{OA}$, *ujemną* w przeciwnym wypadku, a *zerem,* gdy $P = O$. Odpowiedniość, w ten sposób ustalona, jest doskonałą czyli jedno — jednoznaczną między punktami prostej l, a liczbami zbioru q. Stanowi ona klasyczną interpretację geometryczną przestrzeni q. Ze względu na nią mówimy zwykle w teorji mnogości o liczbach jako o „punktach" zbiorów linjowych.

2. **Odcinki [Przedziały]. Def. 1.** Jeżeli a i b są punktami (liczbami) i $a < b$, to przez (a, b) oznaczamy ogół liczb (punktów) x spełniających warunek:

$$a < x < b.$$

Będzie to *odcinek* lub *przedział otwarty* o *końcach* a i b.

Def. 2. Wprowadzimy też oznaczenia:

$[a, b] = (a, b) + \{a\} + \{b\}$ [przedział zamknięty]

$[a, b) = (a, b) + \{a\}$ [przedział zamknięty na lewo]

$(a, b] = (a, b) + \{b\}$ [przedział zamknięty na prawo].

Dodatkowo, gdy a jest liczbą, $[a, a]$ ma oznaczać $\{a\}$.

Def. 3. Jeżeli a jest liczbą, to przez

$$(a, +\infty), \quad (-\infty, a)$$

oznaczymy zbiory wszystkich liczb x, spełniających warunek $a < x$ względnie $x < a$. Będą to *promienie otwarte.*

Def. 4. Podobnie oznaczymy:

$$[a, +\infty) = \{a\} + (a, +\infty)$$
$$(-\infty, a] = \{a\} + (-\infty, a)$$

oraz: $(-\infty, +\infty) = q$ (prosta liczbowa)

Promienie oraz prostą liczbową zwiemy też odcinkami *niewłaściwemi.*

Zbiór *pusty linjowy* $O_m^{(q)}$ oznaczać będziemy najczęściej krótko przez O lub O_m.

3. **Otoczenia punktów. Def. 1.** Jeżeli a jest liczbą, to każdy odcinek *otwarty* (s, t), taki

że: $x \varepsilon (s, t)$,

czyli że: $s < x < t$

zwać będziemy *otoczeniem* punktu x.

Def. 2. Jeżeli (s, t) jest otoczeniem dla x, i usuniemy zeń x punkt x, otrzymamy:

$$(s, t) - \{x\}, \text{ czyli } (s, x) + (x, t),$$

zwane *sąsiedztwem* punktu x.

Def. 3. Otoczenie (s, t) punktu x, względnie sąsiedztwo $(s, t) - \{x\}$ jest *symetryczne,* gdy

$$x = \frac{s+t}{2}$$

czyli, gdy x znajduje się dokładnie w środku odcinka (s, t).

Zwykle jednak nadajemy takiemu otoczeniu postać:

$$(x - \delta,\ x + \delta) \qquad \delta > o$$

i mówimy krótko: „*otoczenie punktu x na δ*“ lub „*o promieniu δ*“. Analogicznie dla sąsiedztw.

Def. 4. Ze względu na pewne zastosowania wprowadzimy jeszcze pojęcia:

Otoczenie punktu x *prawe:*

Każdy odcinek $[x, t)$, gdzie $x < t$.

Sąsiedztwo punktu x prawe:

Każdy odcinek (x, t), gdzie $x < t$.

Otoczenie lewe: $(s, x]$ $\quad s < x$.
Sąsiedztwo lewe: (s, x) $\quad s < x$.

4. **Podstawowe własności otoczeń.**

Zanotujemy grupę własności otoczeń punktów, która odgrywa zasadniczą rolę w teorji mnogości punktowych. Obecnie zastosujemy je jedynie do linjowych.

Twierdzenia odnośne są niezmiernie proste i czytelnik zechce je bez trudu udowodnić drogą ćwiczeń.

Twierdzenie I. *Każdy punkt posiada otoczenia.*

Tw. II. *Każde otoczenie każdego punktu jest zbiorem linjowym.*

Tw. III. *Punkt należy do każdego ze swych otoczeń.*

Tw. IV. *Jeżeli* V_1 i V_2 *są otoczeniami punktu* x, *to istnieje takie otoczenie* V_3 *punktu* x, *że*

$$V_3 \subset V_1 \times V_2.$$

Tw. V. *Jeżeli* V *jest otoczeniem punktu* x, *a punkt* y *należy do* V, *to istnieje takie otoczenie* U *punktu* y, *że*

$$U \subset V.$$

Tw. VI. *Jeżeli* x *i* y *są punktami i* $x \neq y$, *to istnieje takie otoczenie* U *punktu* x i *takie* V *punktu* y, *że*

$$U \times V = 0.$$

Czytelnik zechce również przekonać się o słuszności powyższych twierdzeń, gdy słowu „otoczenie" nada sens: „otoczenie symetryczne", zauważy natomiast, że twierdzenia powyższe są słuszne, z wyjątkiem tw. III dla „sąsiedztw".

5. Ograniczoność zbioru. Kresy.

Def. I. Powiemy, że zbiór linjowy A jest *ograniczony u góry,* jeżeli *istnieje* choć jedna liczba k, *górująca nad zbiorem* A, to znaczy taka, że każde x, należące do A, spełnia:

nierówność: $$x \leqq k.$$

Def. II. Zbiór A będzie natomiast *ograniczony u dołu,* jeśli istnieje choć jedna liczba g *dołująca* wobec zbioru A[1], to znaczy taka, że każde x należące do zbioru A, spełnia nierówność:

$$g \leqq x.$$

---

[1] Wyrażenie zapożyczone z astronomji.

Def. III. Zbiór A będzie, krótko, *ograniczony*, jeżeli jest *ograniczony*, tak *u dołu, jak* i *u góry*.

Przykłady:

$(0, 1)$, $[0, 1]$, $(-\infty, 5)$ *są ograniczone u góry*
$(0, 1)$, $[0, 1]$, $(5, +\infty)$ *są ograniczone u dołu*
$(0, 1)$, $[0, 1]$, $(0, 1) + (2, 3)$ *są ograniczone.*

Ćwiczenia I:

1. Jeżeli k góruje nad zbiorem A i $k' > k$, to k' również góruje nad A.

2. Jeżeli g dołuje wobec A i $g' < g$, to g' dołuje wobec A.

3. Jeżeli A i B są ograniczone u góry (u dołu, obustronnie), to $A + B$, $A \times B$ i $A - B$ są również ograniczone u góry (dołu, obustronnie).

4. Zbiór pusty O_m należy uważać za ograniczony, tak u góry, jak i u dołu, przyczem *każda* liczba rzeczywista, jednocześnie góruje nad nim i dołuje wobec niego. (Wynika to stąd, że zdanie:

„jeżeli $x \varepsilon O_m$, to $x \leqq k$ czy $x \geqq k$“

należy, wobec tego, że *poprzednik* jego $x \varepsilon O_m$“ jest zawsze fałszywy, uważać, wedle prawideł logiki zdań, stale za *prawdziwe).*

5. Jeżeli $A \neq O_m$ i liczba k jednocześnie góruje i dołuje wobec zbioru A, to

$$A = \{k\}.$$

6. Jeżeli $k \varepsilon A$ i k góruje nad A, przyczem $A \neq O_m$, to każda liczba k', górująca nad A, spełnia związek:

$$k \leqq k'$$

(analog. dla liczb dołujących).

Wprowadzimy teraz pojęcie *kresu górnego* i *dolnego*, związane istotnie ze zbiorami linjowemi.

Def. IV. *Kresem górnym* zbioru linjowego A zwiemy *najmniejszą z liczb górujących, o ile taka istnieje i tylko jedna.*

Analogicznie: *Kresem dolnym* nazwiemy *największą z liczb dołujących, o ile taka istnieje i tylko jedna.*

Udowodnimy teraz fundamentalne twierdzenie o istnieniu kresów.

Tw. 1. Jeżeli A jest zbiorem *linjowym, niepustym* i *ograniczonym u góry,* to A posiada *kres górny.*

Dem. Kres górny zbioru możemy scharakteryzować jeszcze inaczej, a mianowicie jako jedyną liczbę k taką, że

(1) jeżeli $x \varepsilon A$, to $x \leq k$

[„k góruje nad A“]

i (2) jeżeli $k' < k$, to istnieją takie y, że

$$y \varepsilon A \quad \text{i} \quad k' < y$$

[„k jest najmniejszą z górujących“].

Szukamy liczb k, posiadających powyższe własności. W tym celu utwórzmy dwie klasy:

β niechaj będzie klasą wszystkich liczb, które górują nad A.

α niech będzie równe $q - \beta$, a więc równe klasie wszystkich pozostałych liczb.

Twierdzimy, że para klas (α, β) tworzy przekrój Dedekinda wśród liczb rzeczywistych. Albowiem:

(1) β nie jest *puste,* gdyż A ograniczone u góry.

(2) α nie jest *puste,* gdyż A niepuste, a gdy tylko $z \varepsilon A$, to $z - 1$ należy do α, nie mogąc już górować nad A.

(3) $\alpha + \beta = q$ z definicji.

(4) Niechaj $x \varepsilon \alpha$, $y \varepsilon \beta$.

Ponieważ x *nie* góruje nad A, więc jakieś z_0 musi należeć do A i być większe od x — atoli y góruje nad A, więc:

$$x < z_0 \leqq y,$$

skąd:

$$x < y.$$

Cztery powyższe własności są jednakże cechami, charakteryzującemi przekrój.

Otóż, powyższy przekrój może przedstawiać jedną tylko z dwóch możliwości:

albo: (1) α posiada element największy, lecz β nie posiada najmniejszego,

albo (2) α nie posiada elementu największego, lecz β posiada najmniejszy.

Wykluczymy (1) wypadek. Przypuśćmy, że nprz. l jest największym elementem w α. Wtedy $l \varepsilon \alpha$, więc l nie góruje nad A, zatem jakieś z_0 należy do A i spełnia:

$$l < z_0.$$

Obierzmy:

$$x' = \frac{l + z_0}{2},$$

wtedy:

$$l < x' < z_0, \quad z_0 \varepsilon A;$$

zatem x' nie góruje nad A, więc $x' \varepsilon \alpha$, co znów niemożliwe, bo $l < x'$, a przecież l miało być największym elementem w α.

Pozostaje zatem wypadek (2). A więc:

Istnieje *najmniejsza* wśród *liczb górujących*. Niechaj będzie nią k. Gdyby inna jeszcze liczba k' posiadała własności charakterystyczne dla kresu górnego, to $k \leqq k'$, ale $k < k'$ pociągnęłoby, że k nie jest górującą, więc $k = k'$.

Dowód posiadania *jedynego* kresu górnego jest tem samem ukończony.

Tw. 2. Jeżeli A jest zbiorem *linjowym, niepustym* i *ograniczonym u dołu,* to A posiada *kres dolny.*

Dem. Dowód zupełnie analogiczny.

Uwaga 1: Zbiór linjowy niepusty i ograniczony (obustronnie) posiada zatem kres górny i dolny. Zbiór pusty, aczkolwiek ograniczony, nie posiada ani jednego kresu, gdyż górujące nad nim czy dołujące liczby tworzą całe q, które nie posiada, ani największego, ani najmniejszego elementu.

Def. V. Nazwiemy *maximum* (A) względnie *minimum* (A) *największy* ewentualnie *najmniejszy* element danego zbioru. Łatwo je scharakteryzować:

max. A jest to jedyny element k taki, że

(1) $k \varepsilon A$,

(2) gdy $x \varepsilon A$, to $x \leqq k$,

analogicznie:

min. A jest to jedyne l takie, że

(1) $l \varepsilon A$,

(2) gdy $x \varepsilon A$, to $l \leqq x$.

Tw. 3. Gdy k jest kresem górnym dla A i $k \varepsilon A$, to $k =$ max. A.

Dem. Skoro $k =$ kr. g. A, to k góruje nad A więc, gdy $x \varepsilon A$, to $x \leqq k$,

prócz tego $k \varepsilon A$, co kończy dowód.

Tw. 4. Gdy k jest kresem dolnym dla A i $k \varepsilon A$, to $k =$ min. A.

Dem. Analogicznie.

Przykłady.

(1) $$A = [0, 1]$$
$$\text{kr. g. } A = \max. A = 1,$$
$$\text{kr. d. } A = \min. A = 0.$$

(2) $$A = (0, 1)$$
$$\text{kr. g. } A = 1, \quad \text{kr. d. } A = 0$$
max. i min. brak.

(3) $$A = (0, 1) + \{2\}$$
$$\text{kr. g. } A = \max. A = 2.$$

(4) $$A = (0, + \infty)$$
kr. d. $A = 0$, min. brak, kr. górnego i max. brak.

Ćwiczenia II. 1. Jeżeli $A \subset B$, $A \neq O$ i B ograniczone, to

$$\text{kr. g. } A \leqq \text{kr. g. } B$$
$$\text{kr. d. } A \geqq \text{kr. d. } B.$$

2. Jeżeli A i B niepuste i ograniczone, to

(α) $A + B$ i $A \times B$ ograniczone;

(β) $$\text{kr. g. } A = \max \{\text{kr. g. } A, \text{ kr. g. } B\},$$
$$\text{kr. d. } A = \min \{\text{kr. d. } A, \text{ kr. d. } B\};$$

(γ) o ile $A \times B \neq O$, to
$$\text{kr. g. } A \times B \leqq \min \{\text{kr. g. } A, \text{ kr. g. } B\},$$
$$\text{kr. d. } A \times B \geqq \max \{\text{kr. d. } A, \text{ kr. d. } B\}.$$

3. $\max\{a, b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$ [Sierpiński]

$$\min.\{a,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}.$$

4. Jeżeli A jest zbiorem linjowym skończonym i niepustym, to A posiada max. i min. [dowód przez indukcję].

5. Jeżeli A posiada max., to A posiada kres górny i max. A = kr. g. A. — Analogicznie dla minimum.

6. Jeżeli A posiada kres górny i dolny, to

$$A \subset [\text{kr. d. } A, \quad \text{kr. g. } A].$$

7. Jeżeli kr. g. A = kr. d. $A = m$, to $A = \{m\}$.

§ 4. Punkty skupienia mnogości linjowych.

1. Wprowadzamy teraz ważne pojęcie *punktu skupienia*, które w matematyce pojawiło się po raz pierwszy w pismach B. Bolzany, przez długi czas zapomnianego pioniera teorji mnogości. Punkt skupienia jest niezbędnym elementem przy badaniu struktury zbiorów punktowych, o ile w grę wchodzą mnogości *nieskończenie liczne*.

(*) **Def. 1.** Nazwiemy punkt a *punktem skupienia* zbioru A linjowego, jeżeli dla *każdego otoczenia* (s, t) punktu a, część wspólna zbioru A i tego otoczenia:

$$A \times (s, t)$$

jest zbiorem *nieskończenie licznym*.

Ogół punktów skupienia zbioru A nazwiemy

pochodną zbioru A lub *zbiorem pochodnym* dla A i oznaczymy przez $D'A$.

Uw. 1. Gdy a jest punktem skupienia dla A, to a może, lecz nie musi, należeć do A!

Uw. 2. Wielu autorów oznacza pochodną zbioru A przez A'. F. Hausdorff w swej znanej Mengenlehre pisze A_3.

Uw. 3. Zwrot: A jest zbiorem *nieskończenie licznym* (nieskończonym) rozumieć chcemy w ten sposób, że jakąkolwiek liczbą całkowitą byłoby n, to zawsze znajdzie się w zbiorze A podzbiór, liczący n elementów. Co do innych definicyj „zbioru nieskończonego", które nie wymagają znajomości pojęcia liczby całkowitej, patrz moje Podstawy Teorji Mnogości, str. 61 i nast.

Przykłady: 1. $A = [0, 1]$, punktami skupienia są wszystkie liczby odcinka $[0, 1]$, $D'A = A$.

2. Niechaj A składa się z liczb

$$\frac{1}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zbiór A posiada jedyny punkt skupienia, a mianowicie 0:

$$D'A = \{0\}.$$

3. $A = (0, 1)$, punkty skupienia tworzą:

$$D'A = [0, 1].$$

4. Niechaj A składa się z wszystkich liczb wymiernych, zawartych w przedziale $[0, 1]$, wtedy $D'A = [0, 1]$, a więc każda liczba wymierna czy niewymierna przedziału $[0, 1]$ jest punktem skupienia dla A.

5. Niechaj A składa się z wszystkich liczb kształtu:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \qquad n, m \mid 1, 2, 3, \ldots$$

$D'A =$ ogół liczb kształtu $\frac{1}{p}$, gdzie $p = 1, 2, \ldots$ oraz 0.

$$D'A = \{0, {}^1/_1, {}^1/_2, {}^1/_3 \ldots\}$$

Czytelnik zechce ułatwić sobie zrozumienie tych przykładów, posługując się geometryczną interpretacją.

Przystępujemy do zapoznania się z twierdzeniami o punktach skupienia.

(*) **Tw. 1.** Jeżeli A jest zbiorem linjowym i w każdem *sąsiedztwie* punktu x znajduje się *choć jeden* punkt zbioru A, to x jest punktem skupienia dla A i *odwrotnie.*

Dem. α. przypuśćmy, że $x \sim \varepsilon\, D'A$. Wtedy jakieś otoczenie punktu x, powiedzmy (s, t) zawiera tylko *skończoną* ilość punktów zbioru A. Utwórzmy sąsiedztwo:

$$(st)' = (s, x) + (x, t).$$

Niech będzie:

$$l = \max. [(s, x) \times A + \{s\}]$$
$$k = \min. [(x, t) \times A + \{t\}];$$

max. i min. powyższe istnieją, gdyż mamy tu do czynienia *z niepustemi*[1] zbiorami *skończonemi* Mamy przytem:

$$l < x < k,$$

[1] W tym celu dołączono s względnie t.

Atoli: $(l, x) \times A = O_m$, $(x, k) \times A = O_m$,
zatem sąsiedztwo:

$$(l, k)' = (l, x) + (x, k)$$

nie zawiera punktów zbioru A, co sprzeczne z założeniem.

β. Odwrotne twierdzenie widoczne z definicji punktu skupienia.

Uwaga: twierdzenie powyższe przyjmują niektórzy za definicję punktu skupienia.

Podamy obecnie treść i dowód sławnego twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, które załatwia dla zbiorów linjowych sprawę istnienia punktów skupienia. Ponieważ nie chcemy zakładać zbyt wielu wiadomości, należących do analizy, wybierzemy spośród wielu dowodów ten, który nie wykracza poza elementarne środki teorji mnogości. Znajduje on się w Arytmetyce Teoretycznej *Tannery'ego.*

(*) **Tw. 2.** [Bolzano-Weierstrass]. Jeżeli A jest zbiorem *linjowym, ograniczonym* i *nieskończonym,* to A posiada choć *jeden punkt skupienia.* $\{D'A \neq O_m\}$.

Dem. Dzięki założeniom, zbiór nasz (oczywiście nie pusty, skoro nieskończony) posiada [§ 3, tw. 1] kresy, dolny i górny.

Nb. $a =$ kr. d. A, $b =$ kr. g. A.

Będziemy mieli:

$$a < b \quad \text{i} \quad A \subset [a, b] \qquad \{\S\ 3, \text{ust. } 5$$
$$\text{Ćwicz. II. } 6, 7\}.$$

Jeżeli a jest punktem skupienia dla A, to twierdzenie jest słuszne. Przypuśćmy jednak, że A

nie jest punktem skupienia, wtedy pewne otoczenie (s, t) $[s < a < t]$ zawiera skończoną liczbę punktów zbioru A.

Niech będzie $x_0 = \min. \{t, b\}$, wtedy przedział $[a, x_0]$ zawiera skończoną ilość punktów zbioru A.

Oznaczmy przez M ogół takich punktów x, że:

(1) $a \leqq x \leqq b$ i

(2) $[a, x] \times A$ jest zbiorem skończonym.

Zbiór M jest: (1) linjowy, (2) ograniczony, gdyż zawarty w $[a, b]$, (3) niepusty, gdyż naprz. x_0 $(> a)$ należy do M. Zatem (§ 3, tw. 1) M posiada kres górny. Niech będzie $l =$ kr. g. M,

wtedy: $$a < l \leqq b.$$

{§ 3, nr. 5. Ćwicz. II, 1}.

Jeśliby w jakiemś otoczeniu (m, n) punktu l była skończona ilość punktów zbioru A, to niechaj:

$$m' = \max. \{a, m\},$$

Byłoby: (1) $a \leqq m' < l < n$,

(2) $[m', n] \times A$ skończenie liczne.

Skoro $m' < l$ i $l =$ kr. g. M, to jakieś m'' spełnia warunki:

(1) $m' < m'' \leqq l$

(2) $m'' \varepsilon M$. {dzięki własnościom kresu górnego § 3, nr. 5.}

Ale: $[a, m''] \times A$ skończone,

$[m', n] \times A$ skończone,

więc: $[a, n] \times A = [a, m''] \times A + [m', n] \times A$ {skończone.

Jeżeli $n \leqq b$, to $n \varepsilon M$, co niemożliwe, bo $l < n$ i $l =$ kr. g. M, ale znów $n > b$ pociągnęłoby, że $A = [a, n] \times A$ skończone.

Zatem *każde* otoczenie punktu l zawiera nieskończenie wiele punktów zbioru A i tem samem $l \varepsilon D'A$, więc $D'A \neq O$.

Uwagi: 1. Warunek, aby A było ograniczone, jest istotny, gdyż nprz. zbiór wszystkich liczb całkowitych nieujemnych (oznaczany u Peany przez N_0) jest linjowy i nieskończony, lecz $D'N_0 = O$.

2. Zbiór skończenie liczny nie może posiadać żadnego punktu skupienia, co wynika wprost z definicji.

Tw. 3. Jeżeli zbiór linjowy A posiada kres górny, który *nie należy* do A, to kr. g. A jest *punktem skupienia* dla A.

Dem. Rozważmy dowolne sąsiedztwo:

$$(s, k) + (k, t)$$

punktu k, gdzie $k =$ kr. g. A. — Ponieważ $s < k =$ $=$ kr. g. A, więc jakieś x_0 spełnia warunki:

(1) $x_0 \varepsilon A$ i (2) $s < x_0 \leqq k$. {§ 3, nr. 5, tw. 1},

ale $x_0 = k$ wykluczone z założenia, więc w dowolnem sąsiedztwie punktu k znalazł się choć jeden punkt zbioru A, co dowodzi tw. {Tw. 1.}

Analogiczny wniosek dla kresu dolnego.

Tw. 4. Jeżeli A jest zbiorem *linjowym, ograniczonym, niepustym,* to

$$D'A \subset [\text{kr. d. } A\ ,\ \text{kr. g. } A],$$

jeżeli jeszcze $D'A \neq O$, to

$$\text{kr. d. } A \leqq \text{kr. d. } D'A,\ \text{kr. g. } D'A \leqq \text{kr. g. } A.$$

D e m. Gdy $z >$ kr. g. A, to:
(kr. g. A, $z + 1) \times A = O$, więc z nie może już należeć do $D'A$, analogicznie dla $z <$ kr. d. A. Druga część tw. wynika z § 3, ust. 5. Ćwicz. II, 1.

Tw. 5. Jeżeli A i B są zbiorami *linjowemi,* to

$$D'A + D'B = D'(A + B)$$
$$D'(A \times B) \subset D'A \quad \{\text{a także } \subset D'B\}.$$

D e m. Widocznem jest, że

$$D'A \subset D(A' + B) \quad \text{i} \quad D'B \subset D'(A + B), \quad (\alpha)$$

gdyż: $A \subset A + B$ i $B \subset A + B$,
więc: $D'A + D'B \subset D'(A + B)$.
Odwrotnie, niechaj $z \varepsilon D'(A + B)$;
gdyby $z \sim \varepsilon D'A$ i $z \sim \varepsilon D'B$,
to pewne sąsiedztwo punktu A, dajmy na to $(s_1, x) + (x, t_1)$, nie zawierałoby punktów zbioru A; inne znów: $(s_2, x) + (x, t_2)$ nie zawierałoby punktów B, zatem sąsiedztwo:

$$(\bar{s}, x) + (x, \bar{t}),$$

gdzie: $\bar{s} = \max. \{s_1, s_2\}$, $\bar{t} = \min. \{t_1, t_2\}$,
będzie pozbawione punktów zbioru $A + B$, co niemożliwe wobec tw. 1 naszego ustępu.

Zatem: $z \varepsilon D'A$ lub $z \varepsilon D'B$,
stąd: $D'(A + B) \subset D'A + D'B \quad (\beta)$

Związki (α) i (β) dają nam wynik pierwszej części twierdzenia. Druga część wynika z uwagi, że

$$A \times B \subset A \quad \text{i} \quad A \times B \subset B,$$

co pociąga widocznie:

$$D'(A \times B) \subset D'A, \quad D'(A \times B) \subset D'B,$$

a nawet: $D'A(\times B) \subset D'A \times D'B$,

lecz *równość* nie musi zachodzić.

[Przykład: $A = [0, 1] + [2, 3]$, $B = [0, 1] + [3, 4]$, $D'(A \times B) = [0, 1]$, $D'A \times D'B = [0, 1] + \{3\}$.

Tw. 6. Jeżeli $\mathbf{A}$ jest rodziną zbiorów *linjowych* i jeżeli utworzymy rodzinę $\mathbf{B}$, zastępując każdy zbiór A rodziny $\mathbf{A}$ przez jego pochodną $D'A$, to:

$$\Sigma \mathbf{B} \subset D' \Sigma \mathbf{A}.$$

Dem. Jeżeli $A \varepsilon \mathbf{A}$, to $A \subset \Sigma \mathbf{A}$, więc

$$D'A \subset D' \Sigma \mathbf{A},$$

stąd: $$\Sigma \mathbf{B} \subset D' \Sigma \mathbf{A}.$$

Równość zachodzić nie musi! Przykład: niechaj $\mathbf{A}$ składa się ze zbiorów $A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

$n = 1, 2, \ldots$; $D'A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, $\Sigma \mathbf{B} = (0, 1]$,

$\Sigma \mathbf{A} = (0, 1]$, $D' \Sigma \mathbf{A} = [0, 1]$.

Tw. 7. Jeżeli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są rodzinami jak w tw. 6 i $\mathbf{A}$ nie jest rodziną *pustą*, to

$$D' \Pi \mathbf{A} \subset \Pi \mathbf{B}$$ [równość nie musi zachodzić.]

Dem. $\mathbf{B}$ nie będzie rodziną pustą, gdyż jakieś A należy do $\mathbf{A}$, więc $D'A$ należy do $\mathbf{B}$, można zatem wykonać nietylko $\Pi \mathbf{A}$, lecz i $\Pi \mathbf{B}$.

Atoli, jeżeli $A \varepsilon \mathbf{A}$, to $\Pi \mathbf{A} \subset A$,

$D' \Pi \mathbf{A} \subset D'A$, więc $D' \Pi \mathbf{A} \subset \Pi \mathbf{B}$.

Ćwiczenia:

Zastępując w definicji punktu skupienia termin „otoczenie“ przez „otoczenie prawe“ względnie „otoczenie lewe“, otrzymamy definicję „punktu skupienia prawostronnego“ względnie „lewostronnego“.

Udowodnić, że

(1) Każdy prawostronny czy lewostronny punkt skupienia jest punktem skupienia w sensie def. 1.

(2) Okazać na przykładzie, że analogiczne twierdzenie do Bolzano-Weierstrassa nie zachodzi dla punktów jedynie prawostronnego skupienia czy jedynie lewostronnego.

(3) Wykazać, że w tw. 3 można mówić o lewostronnym punkcie skupienia.

(4) Podać twierdzenie analogiczne do tw. 1 dla punktów prawostronnego skupienia.

§ 5. Zbiory zamknięte, gęste w sobie i doskonałe.

1. (*) **Def. 1.** Zbiór linjowy A zwać będziemy *zamkniętym*, gdy *każdy* punkt *skupienia* zbioru A *należy* do A. Inaczej, gdy:

$$D'A \subset A.$$

(*) **Def. 2.** Zbiór linjowy A nazwiemy *gęstym w sobie*, gdy każdy jego punkt jest też jego punktem skupienia. Inaczej, gdy:

$$A \subset D'A.$$

(*) **Def. 3.** Zbiór linjowy A jest *doskonały*, gdy jest jednocześnie *zamknięty* i *gęsty w sobie*, gdy zatem jest identyczny ze swą pochodną:

$$A = D'A.$$

(*) **Def. 4.** Nazwiemy punkt x, należący do zbioru linjowego A, *izolowanym,* gdy x nie jest *punktem skupienia* dla A, a więc gdy:

$$x \varepsilon A \quad \text{i} \quad x \sim \varepsilon D'A.$$

Uw.: (*) 1. W myśl tej umowy będziemy mogli powiedzieć, że zbiór *zamknięty* A jest *doskonały,* gdy nie posiada punktów *izolowanych.*

2. Udowodnimy kilka twierdzeń o zbiorach zamkniętych.

(*) **Tw. 1.** Jeżeli A i B są *zamknięte,* to $A + B$ jest *zamknięte.*

Dem. Wedle § 4, tw. 5

$$D'A + D'B = D'(A + B),$$

atoli z założenia:

$$D'A \subset A, \quad D'B \subset B, \text{ więc}$$
$$D'(A + B) = D'A + D'B \subset A + B,$$

co dowodzi twierdzenia.

(*) **Tw. 2.** Jeżeli A i B *zamknięte,* to $A \times B$ jest zbiorem *zamkniętym.*

Dem. Wedle § 4, tw. 5

$$D'(A \times B) \subset D'A, \quad D'(A \times B) \subset D'B,$$

ale $\quad D'A \subset A, \quad D'B \subset B$ z założenia,

więc $\quad D'(A \times B) \subset A, \quad D'(A \times B) \subset B,$

stąd: $\quad D'(A \times B) \subset A \times B,$

co dowodzi twierdzenia.

(*) **Tw. 3.** Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest *niepustą* rodziną zbiorów linjowych *zamkniętych,* to $\Pi \mathfrak{A}$ jest zbiorem *zamkniętym.*

Dem. Jeżeli $A \varepsilon \mathfrak{A}$, to A jest zamknięte, więc

$$D'A \subset A, \quad \text{zatem} \quad \Pi \mathbf{B} \subset \Pi \mathfrak{A},$$

gdzie przez $\mathbf{B}$ rozumieć będziemy, jak w § 4, tw. 6 i 7 rodzinę, utworzoną z pochodnych zbiorów rodziny $\mathfrak{A}$.

Atoli [§ 4, tw. 7] $D' \Pi \mathfrak{A} \subset \Pi \mathbf{B}$, więc

$$D' \Pi \mathfrak{A} \subset \Pi \mathfrak{A},$$

co dowodzi twierdzenia.

(*) Uw. 1. Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest rodziną zbiorów zamkniętych, to $\Sigma \mathfrak{A}$ nie zawsze jest zbiorem zamkniętym!

(*) Uw. 2. Twierdzenie 1 i 2 przenosimy natychmiast przez indukcję na wypadek sumy czy iloczynu skończonej ilości zbiorów.

Przykłady elementarnych zbiorów zamkniętych:

1. Zbiory O_m i q są zamknięte.
2. Jeżeli a i b są liczbami i $a \leqq b$, to zbiory:

$$[a, b], \quad (-\infty, a], \quad [a, +\infty)$$

są zamknięte.

3. Każdy zbiór linjowy *skończenie liczny* jest zamknięty.

(*) **Tw. 4.** Jeżeli A i B są *gęste w sobie,* to $A + B$ jest *gęste w sobie.*

Dem. Wedle § 4, tw. 5.

$$D'A + D'B = D'(A + B),$$

lecz $\quad A \subset D'A, \quad B \subset D'B$ z założenia,

więc: $\quad A + B \subset D'A + D'B = D'(A + B),$

co dowodzi twierdzenia.

(*) **Tw. 5.** Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest rodziną zbiorów *gęstych w sobie,* to $\Sigma\mathfrak{A}$ jest również zbiorem *gęstym w sobie.*

Dem. Niechaj $\mathfrak{B}$ oznacza rodzinę, jak w § 4, tw. 6. Wtedy: gdy tylko $A \varepsilon \mathfrak{A}$, to $A \subset D'A$, więc:

$$\Sigma\mathfrak{A} \subset \Sigma\mathfrak{B},$$

atoli [§ 4, tw. 6]:

$$\Sigma\mathfrak{B} \subset D'\Sigma\mathfrak{A},$$

więc:

$$\Sigma\mathfrak{A} \subset D'\Sigma\mathfrak{A},$$

co dowodzi twierdzenia.

Łącząc tw. 1 naszego ustępu z tw. 1 ustępu poprzedniego, otrzymamy jeszcze:

(*) **Tw. 6.** Jeżeli A i B są *doskonałe,* to $A + B$ jest również zbiorem *doskonałym.*

Przykłady: *Gęstemi w sobie* są zbiory:

$$O_m,\ q,\ (a, b),\quad (a, +\infty),\quad (-\infty, a);$$

doskonałemi:

$$[a, b],\quad [a, +\infty),\quad (-\infty, a],\quad q,\ O_m.$$

3. **Ćwiczenia:**

(1) Podać przykład iloczynu dwu zbiorów gęstych w sobie, który już tej własności nie posiada.

(2) Analogiczne przykłady dla sumy czy iloczynu zbiorów doskonałych.

(3) Przykład, w którym iloczyn (wspólna część) rodziny zbiorów gęstych w sobie już tej własności nie posiada.

4. Udowodnimy jeszcze następujące twierdzenia.

(*) **Tw. 1.** Jeżeli A jest zbiorem *linjowym,* to $D'A$ jest zbiorem *zamkniętym.*

Dem. Niechaj $x \varepsilon D'D'A$. Gdy $s < x < t$, to w otoczeniu (s, t) mamy choć jeden punkt nprz. z należący do $D'A$ i dalej $s < z < t$, atoli $z \varepsilon D'A$, więc $(s, t) \times A$ jest nieskończenie liczne. Ponieważ (s, t) było otoczeniem dowolnem dla x, więc stąd już wynika, że

$$x \varepsilon D'A$$

A zatem:

$$D'D'A \subset D'A,$$

co dowodzi twierdzenia.

Tw. 2. Zbiór *linjowy A, zamknięty* i *niepusty* posiada *maximum* i *minimum*.

Dem. Zbiór A posiada kres górny i dolny.

Gdyby kr. g. A nie należał do A, byłby jego punktem skupienia [§ 4, tw. 3], atoli wtedy musiałby należeć do A, gdyż zbiór ten jest zamknięty. Analogicznie dla kr. d. A. Stąd:

$$\text{kr. g. } A = \max. A, \quad \text{kr. d. } A = \min. A.$$

Cor. Jeżeli pochodna $D'A$ zbioru linjowego A jest ograniczona i niepusta: to, jako zbiór zamknięty, posiada max. i min.

Elementy: max. $D'A$ i min. $D'A$, zwane też *najwyższym* i *najniższym punktem skupienia* mnogości A, odgrywają niekiedy rolę w badaniu zbiorów linjowych.

§ 6. Zbiory Otwarte.

1. Zajmiemy się w tej chwili pewną klasyfikacją punktów prostej liczbowej ze względu na dany zbiór linjowy.

(*) **Def. 1.** Nazwiemy punkt x *wewnętrznym* zbioru A, gdy istnieje *otoczenie* (s, t) punktu x, *zawarte całkowicie* w A:

$$(s, t) \subset A.$$

Ogół punktów *wewnętrznych* zbioru A zwiemy jego *wnętrzem:*

$$I'A \qquad \text{(interior } A\text{)}.$$

Jeżeli, łącznie ze zbiorem A, będziemy rozważali zbiór $B = q - A$, czyli „uzupełnienie zbioru A do linji liczbowej", to:

(*) **Def. 2.** *Zewnętrznemi* punktami zbioru A, zwać będziemy punkty *wewnętrzne* jego *uzupełnienia:*

$$E'A = I'B = I'(q - A) \qquad \text{(exterior } A\text{)}.$$

(*) **Tw. 1.** Jeżeli A jest zbiorem linjowym, to

$$I'A \subset A, \quad E'A \subset q - A.$$

Pozostałe punkty prostej liczbowej mogą być dwojakiego rodzaju:

(1) punkty *należące* do A, lecz będące punktami skupienia dla B $(= q - A)$,

(2) punkty *nie* należące do A, lecz będące punktami skupienia dla A.

Tworzą one zbiory:

$$(1) \quad A \times D'B, \qquad (2) \quad B \times D'A.$$

(*) **Def. 3.** Wszystkie punkty zbiorów (1) i (2) zwać będziemy *brzeżnemi,* tak dla A, jak i B. Ogół ich tworzy *brzeg* A czy B

$$F'A = F'B = A \times D'B + B \times D'A$$
$$(B = q - A).$$

(*) **Tw. 2.** Jeżeli A jest zbiorem *linjowym*, to
(1) $I'A$ i $E'A$ są zbiorami *gęstemi w sobie.*

(2) $I'A = A - D'B \times A$, $E'A = B - B \times D'A$
$(B = q - A)$.

Dem. Oczywiste z definicji.

(*) **Tw. 3.** Jeżeli A jest zbiorem *linjowym,* to $F'A$ jest zbiorem *zamkniętym.*

Dem.:

$$D'F = D'\{D'A \times B + D'B \times A\} = D'(D'A \times B) + D'(D'B \times A) \subset D'D'A \times D'B + D'D'B \times D'A \subset D'A \times D'B + D'B \times D'A = D'A \times D'B = D'A \times D'B \times q = D'A \times D'B \times (A + B) = D'A \times B \times D'B + D'B \times A \times D'A \subset D'A \times B + D'B \times A = F$$

c. b. d. o.

[p. § 4, tw. 5; § 5, ust. 5, tw. 1.] $(B = q - A)$.

(*) **Tw. 4.** Gdy A jest zbiorem *zamkniętym,* to

$$F'A \subset A.$$

Dem.

$$F'A = D'A \times B + D'B \times A \subset A \times B + D'B \times A \subset A \quad (B = q - A).$$

c. b. d. o.

Wprowadźmy jeszcze jedno pojęcie:

(*) **Def. 4.** *Domknięciem* zbioru linjowego A nazwiemy *sumę* $D'A + A$ i oznaczymy przez $\overline{A}$.

(*) **Tw. 5.** Jeżeli A jest zbiorem *linjowym,* to
(1) $\overline{A}$ jest zbiorem zamkniętym

i $$D'\overline{A} = D'A,$$

(2) $$\overline{A} = A + F'A.$$

Dem.

(1) $D'\overline{A} = D'(A + D'A) = D'A + D'D'A,$

lecz $D'D'A \subset D'A,$ więc $D'\overline{A} = D'A.$

(2) $A + F'A = A + D'A \times B + A \times D'B =$
$= A + D'A \times B = A + D'A \times A + D'A \times B =$
$= A + D'A \times (A + B) = A + D'A \times q =$
$= A + D'A = \overline{A} \qquad (B = q - A).$

2. Przechodzimy już do niezmiernie ważnej kategorji zbiorów *otwartych.*

(*) **Def. 1.** Zbiór *linjowy* A jest *otwarty,* gdy składa się *jedynie* z punktów *wewnętrznych.* Inaczej, gdy:

$$\Gamma'A = A.$$

Przykłady:

(1) Każdy odcinek otwarty (a, b),
(2) każdy promień otwarty $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$,
(3) prosta liczbowa, (4) O_m.

(*) **Tw. 1.** Jeżeli A i B są zbiorami linjowemi i $A \subset B$, to $\Gamma'A \subset \Gamma'B$.

Dem. Oczywiste z definicji.

(*) **Tw. 2.** Jeżeli A i B są *otwarte,* to $A + B$ i $A \times B$ są również *otwarte.*

Dem.

(1) $\Gamma'(A + B) \subset A + B.$

$A + B = \Gamma'A + \Gamma'B \subset \Gamma'(A + B) \subset A + B,$

więc: $\Gamma'(A + B) = A + B$ c. b. d. o.

(2)

$\Gamma'(A \times B) = (A \times B) - (A \times B) \times D'(q - A \times B),$

[ust. 1, tw. 2]

lecz: $q - A \times B = (q - A) + (q - B)$,

$$A \times B \times D'(q - A \times B) =$$
$$= A \times B \times D'(q - A) + A \times B \times D'(q - B)$$
$$\subset A \times D'(q - A) + B \times D'(q - B) = O_m,$$

(z założenia, skoro A i B otwarte),

więc: $$I'(A \times B) = A \times B.$$

(*) **Tw. 3.** Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest rodziną zbiorów linjowych *otwartych*, to $\Sigma \mathfrak{A}$ jest *otwarte*.

Dem. Jeżeli $x \varepsilon \Sigma \mathfrak{A}$, to x należy do jakiegoś zbioru A tej rodziny, przyczem A otwarte, zatem $x \varepsilon I'A$, lecz $A \subset \Sigma \mathfrak{A}$, skąd $x \varepsilon I'\Sigma \mathfrak{A}$. Mamy więc:

$$\Sigma \mathfrak{A} \subset I'\Sigma \mathfrak{A},$$

co już wystarcza dla dowodu.

Uwaga 1. Tw. powyższe obejmuje w szczególności pierwszą część tw. 2 i daje nam, między innemi, jak zobaczymy, najogólniejszą metodę tworzenia zbiorów otwartych z rodzin odcinków otwartych.

Uwaga 2. Dla iloczynu rodziny zbiorów otwartych wniosek analogiczny do tw. 3 nie zawsze byłby słuszny, jak pokazuje przykład:

niechaj rodzinę stanowią zbiory:

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Iloczyn tej rodziny $= \{0\}$ i nie jest zbiorem otwartym.

3. Przystępujemy do zbadania struktury najogólniejszych zbiorów otwartych. Wyniki streścimy na końcu w postaci twierdzenia, którego dowód będzie zawarty w toku badania. Rozpoczynamy najpierw od zbiorów *otwartych ograniczonych*.

(1) Niechaj x będzie punktem takiego zbioru A; ponieważ jest to jego punkt wewnętrzny, więc istnieje otoczenie (s, t) punktu x zawarte w A.

Rozważmy zbiór wszelkich liczb t takich, by

$$t > x \quad \text{i} \quad [x, t) \subset A.$$

Zbiór ten jest linjowy, niepusty (należy doń choćby t) i ograniczony u góry. To ostatnie wynika z ograniczoności A, gdy bowiem obierzemy

$$t > \text{kr. g. } A,$$

to $[x, t)$ nie będzie już zawarte w A.

Oznaczmy kres górny powyższego zbioru przez β_x. Analogicznie utwórzmy zbiór wszelkich s takich, by

$$s < x \quad \text{i} \quad (s, x] \subset A$$

oraz kres dolny tego zbioru oznaczmy przez α_x. Przedział *otwarty:*

$$\delta_x = (\alpha_x, \beta_x)$$

jest zawarty w A:

$$\delta_x \subset A.$$

Chwila zastanowienia wystarcza, aby przekonać się, że δ_x można było otrzymać jeszcze inaczej, a mianowicie rozważyć rodzinę wszelkich otoczeń (s, t) punktu x, zawartych całkowicie w A. Suma tej rodziny dałaby nam właśnie δ_x. Jeżeli zatem jakieś otoczenie (s, t) punktu x jest zawarte w A, to napewne

$$(s, t) \subset \delta_x.$$

Tak więc do każdego punktu x przywiążemy określony odcinek δ_x, powstały w powyżej podany

sposób. Utworzą one pewną rodzinę *odcinków otwartych*. Oznaczmy ją przez $\mathbf{A}$.

Gdyby zbiór A był pusty, $\mathbf{A}$ niechaj oznacza *pustą* rodzinę odcinków otwartych.

(2) W każdym wypadku będzie:

$$\Sigma \mathbf{A} = A,$$

gdyż każdy punkt zbioru A do jakiegoś odcinka w $\mathbf{A}$ należy i odwrotnie każdy punkt odcinka z rodziny $\mathbf{A}$ należy do A.

(3) Niechaj δ_1 i δ_2 będą odcinkami rodziny $\mathbf{A}$. Twierdzimy, że albo są one *identyczne*, albo *nie posiadają* punktów wspólnych.

Przypuśćmy rzeczywiście, że $\delta_1 \times \delta_2 \neq 0$ i niechaj z należy do δ_1 i do δ_2.

Wtedy:

$$\delta_1 \subset \delta_z, \quad \delta_2 \subset \delta_z.$$

Atoli δ_1 było jakiemś δ_x, δ_2 jakiemś δ_y,

więc: $\delta_z \subset \delta_x = \delta_1, \quad \delta_z \subset \delta_y = \delta_2,$

zatem: $\delta_x = \delta_y = \delta_z.$

(4) Rodzina $\mathbf{A}$ składa się więc z odcinków otwartych, nie posiadających między sobą punktów wspólnych [będziemy mówili: „niekrzyżujących się“].

Przypuśćmy, że jakaś rodzina $\mathbf{B}$ posiada własności następujące:

(1) składa się z odcinków otwartych, niekrzyżujących się ze sobą,

(2) $\Sigma \mathbf{B} = A$.

Twierdzimy, że $\mathbf{B} = \mathbf{A}$. Rzeczywiście:

(l) Niechaj $\delta \varepsilon \mathbf{B}$ i niechaj $x \varepsilon \delta$. Weźmy δ_x z rodziny $\mathbf{A}$.

Wtedy: $\delta \subset \delta_x.$

Niech będzie: $\delta = (\alpha, \beta)$, $\delta_x = (\alpha_x, \beta_x)$; jeżeli $\delta \neq \delta_x$, to α lub β leży wewnątrz δ_x, naprz. niechaj

$$\alpha \varepsilon \delta_x \qquad \{\alpha_x < \alpha < \beta_x\};$$

atoli α należy do jakiegoś odcinka δ' z rodziny **B**, gdyż $\Sigma \mathbf{B} = A$, wtedy jednak:

$$\delta' \times \delta \neq 0 \quad \text{i} \quad \delta' \neq \delta,$$

co sprzeczne z założeniem, że odcinki rodziny **B** nie krzyżują się ze sobą.

(II) Niechaj δ_x będzie odcinkiem rodziny **A**, utworzonym dla punktu x, należącego do A. Otóż x musi leżeć w jakimś odcinku rodziny **B**, naprz. δ. Wedle definicji δ_x mamy:

$$\delta \subset \delta_x.$$

Rozumowanie części (I) pokazuje, że wtedy

$$\delta = \delta_x.$$

W ten sposób identyczność obu rodzin jest już wykazana. Mamy zatem twierdzenie:

Tw. 1. *Każdy otwarty* zbiór linjowy, ograniczony *jest sumą rodziny odcinków otwartych, niekrzyżujących się ze sobą. Rodzina ta* jest jedyną.

Zakończymy nasze badanie, rozważając jeszcze zbiór otwarty *nieograniczony*. Będziemy znów dla każdego punktu x zbioru A tworzyli rodzinę tych otoczeń punktu x, które są zawarte całkowicie w A. Zajść mogą jednak następujące okoliczności. Suma powyższej rodziny może być:

(1) odcinkiem otwartym: $\delta_x = (\alpha_x, \beta_x)$,
(2) promieniem: $(\alpha_x, +\infty)$,
(3) promieniem: $(-\infty, \beta_x)$,
(4) całą prostą liczbową: $q = (-\infty, +\infty)$.

Uwzględniając tę okoliczność, snujemy wątek poprzedniego rozumowania z drobną tylko modyfikacją, którą czytelnik sam przeprowadzi. Da nam to nakoniec:

Tw. 2. Każdy nieograniczony zbiór *otwarty* jest *sumą* rodziny odcinków *otwartych*, *właściwych* lub *niewłaściwych*, *niekrzyżujących* się ze sobą. Rodzina ta jest *jedyną*.

Uw. Przypominam, że odcinkiem (przedziałem) niewłaściwym zwiemy *promień* lub *prostą liczbową*.

Tw. 1 i 2 dają nam łącznie wgląd w strukturę zbioru otwartego i pozwalają na konstruowanie tych zbiorów w sposób najogólniejszy.

Def. *Rodzinę odcinków*, o której mowa w tw. 1 i 2, nazwiemy: „*analizującą dany zbiór otwarty*".

Dodatkowo mamy jeszcze:

Tw. 3. Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest rodziną odcinków [właściwych lub nie] otwartych [krzyżujących się lub nie], to $\Sigma\mathfrak{A}$ jest zbiorem *otwartym* i znajdziemy *jedyną* rodzinę $\mathbf{B}$ odcinków otwartych, *niekrzyżujących się* taką, że

$$\Sigma\mathfrak{A} = \Sigma\mathbf{B}.$$

Dem. Pierwsza część wynika z tw. 3, ust. 2, a druga z możności rozkładu $\Sigma\mathfrak{A}$ na odcinki niekrzyżujące się ze sobą.

4. Wykażemy obecnie niezmiernie ważny, wzajemny związek między zbiorami *otwartemi*, a *zamkniętemi*.

Tw. 1. Jeżeli A jest zbiorem linjowym *otwartym*, a $B = q - A$ jest *uzupełnieniem* A (do całej prostej liczbowej), to B jest zbiorem *zamkniętym* i *odwrotnie*.

Dem. (1) Skoro A jest otwarte, to $A = \Gamma A$,
więc $A \times D'B = O$, $[B = q - A]$
zatem $D'B \subset q - A = B$ c. b. d. o.

(2) Jeżeli teraz A jest zamknięte, to

$$D'A \subset A, \quad \text{więc} \quad B \times D'A = 0,$$
$$\Gamma B = B - B \times D'A = B \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Tw. 2. Jeżeli A jest zbiorem *otwartym* i $[a, b]$ odcinkiem *zamkniętym,* to

$M = [a, b] - A$ („uzupełnienie"
jest *zamknięte.* A do odcinka $[a, b]$)

Dem. $B = q - A$ jest zamknięte (tw. 1).

$$M = [a, b] - A = B \times [a, b]$$

i jest zbiorem zamkniętym, jako wspólna część zamkniętych.

Uwaga. Nie wymagamy wcale, by $A \subset [a, b]$!

Tw. 3. Jeżeli A *zamknięte,* odcinek (a, b) *otwarty,* to

$N = (a, b) - A$ jest otwarte.

Dem. $B = q - A$ jest otwarte,

$$(a, b) - A = B \times (a, b)$$

otwarte, wedle tw. o iloczynie otwartych.

Tw. 4. Jeżeli A jest zbiorem linjowym, *ograniczonym, niepustym* i *zamkniętym,* to zbiór:

$$M = [\text{kr. d. } A, \text{ kr. g. } A] - A$$

jest *otwarty.*

Dem. Kres górny i dolny istnieją i należą do A. Według tw. 3, zbiór: $(a, b) - A$, gdzie

$a = \text{kr. d. } A$, $b = \text{kr. g. } A$, jest otwarty,
lecz $[a, b] - A = (a, b) - A$,
gdyż a i b należą do A, zatem M otwarte.

5. Twierdzenie ust. 3, w połączeniu z twierdzeniami ustępu 4, pozwalają nam tworzyć najbardziej interesujące przykłady zbiorów zamkniętych czy otwartych. Najogólniejszy zbiór zamknięty powstaje z prostej liczbowej q przez wyjęcie z niej rodziny odcinków otwartych (krzyżujących się lub nie); najogólniejszy zamknięty ograniczony, przez wyjęcie takiej rodziny z odcinka zamkniętego.

Zapytujemy, kiedy tak powstały zbiór będzie jeszcze *doskonały*. Rozstrzyga to twierdzenie:

(*) **Tw. 1.** Uzupełnienie zbioru *otwartego* do odcinka zamkniętego (właściwego lub nie) jest wtedy i tylko wtedy zbiorem *doskonałym*, gdy zbiór otwarty jest sumą rodziny odcinków otwartych, niekrzyżujących się ze sobą, z których *żadne dwa nie stykają się końcami* i których końce nie są końcami danego odcinka zamkniętego.

Dem. Punkt zetknięcia się takich odcinków byłby oczywiście punktem izolowanym dla uzupełnienia i odwrotnie punkt izolowany powodowałby stykanie się dwóch odcinków, z których składa się zbiór otwarty, względnie byłby końcem odcinka otwartego i zamkniętego.

Uwaga. W § obecnym podaliśmy kilka dowodów twierdzeń w sposób formalnie algorytmiczny. Czytelnik zechce może przeprowadzić te dowody metodą podobną do używanej w dowodach poprzednich.

§ 7. Zbiory wszędzie i nigdziegęste.

1. Pojęcie zbioru wszędzie gęstego, pierwotnie tylko w odcinku zamkniętym lub prostej liczbowej, pojawiło się jeszcze w pracach z okresu przed-

Cantorowskiego. Ujmiemy je zwyczajem dzisiejszym nieco ogólniej.

(*) **Def. 1.** Zbiór linjowy A jest *wszędziegęsty* w zbiorze *doskonałym* P, jeżeli *pochodna* wspólnej części $A \times P$ jest *identyczna* z P:

$$D'(A \times P) = P.$$

Udowodnimy kilka twierdzeń w związku z nowem pojęciem.

(*) **Tw. 1.** Jeżeli A i B są linjowe, $A \subset B$ i A jest *wszędziegęste* w P *doskonałem*, to B jest również *wszędziegęste* w P.

Dem.

$$P = D'(A \times P) \subset D'(B \times P) \subset D'P = P,$$

więc: $$D'(B \times P) = P.$$

Cor. Z tw. 1 wynika, że *suma* zbiorów *wszędziegęstych* w P, a nawet *suma* rodziny takich zbiorów, jest *wszędziegęsta* w P.

(*) **Tw. 2.** Jeżeli A jest *wszędziegęste* w P doskonałem i A jest *zamknięte*, to $A \times P = P$.

Dem.

$$P = D'(A \times P) \subset D'A \times D'P = D'A \times P \subset$$
$$\subset A \times P \subset P, \text{ gdyż } D'A \subset A,$$

więc $$A \times P = P.$$

Przykłady. (1) $r =$ ogół liczb wymiernych jest wszędziegęsty w każdym odcinku zamkniętym (skończonym lub nie). (2) Tak samo $ir = q - r =$ ogół liczb niewymiernych. (3) Ogół liczb algebraicznych t. zn. liczb, spełniających równania algebraiczne o spółczynnikach całkowitych jest, dzięki tw. 1, wszędziegęsty w każdym przedziale zamkniętym, gdyż obejmuje wszystkie liczby wymierne (i wiele innych).

Biblioteka P.W.S.P.
w Krakowie

2. Przechodzimy do zbiorów *nigdziegęstych.*

(*) **Def.** Zbiór linjowy A jest *nigdziegęsty* w P *doskonałem,* gdy ogół tych punktów zbioru P, które *nie należą* do A i *nie są punktami skupienia* dla $A \times P$, jest *wszędziegęsty* w P.

Formalnie da się to napisać tak:

$$D'[(P - \overline{A \times P}) \times P] = P \quad (\overline{A \times P} = \text{domknięcie } A \times P)$$

lub:

$$D'(P - \overline{A \times P}) = P,$$

gdyż

$$P - \overline{A \times P} \subset P.$$

Gdyby P było odcinkiem zamkniętym δ, to moglibyśmy powiedzieć, że

$$I'(\delta - A)$$

ma być wszędziegęste w δ.

Omówimy poprzednie definicje w sposób mniej formalny.

(1) Jeżeli A jest *wszędziegęste* w P *doskonałem,* oznacza to, że w każdym przedziale otwartym (s, t), gdzie tylko znajdują się punkty P, tam też znajdują się punkty A, należące do P.

(2) Jeżeli A jest *nigdziegęste* w P, oznacza to, że w każdym przedziale otwartym (s, t), w którym znajdują się punkty zbioru P, znajdzie się przedział (l, k) otwarty, w którym będą punkty zbioru P, lecz nie będzie punktów zbioru $A \times P$ Jeszcze prościej przedstawia się sytuacja, gdy P jest przedziałem. Wtedy *nigdziegęstość* A oznacza, że w każdym przedziale (s, t) znajdzie się przedział $[k, l]$, pozbawiony punktów zbioru A.

(*) **Tw. 1.** Gdy A i B są *nigdziegęste* w P *doskonałem,* to $A + B$ jest *nigdziegęste* w P.

Dem. W każdym odcinku (s, t), gdzie są punkty P, znajdzie się (l, k), gdzie są punkty P, lecz niema punktów $A \times P$; w (l, k) znajdzie się (p, q) gdzie są punkty P, lecz niema punktów $B \times P$, więc w (p, q) są punkty P, lecz niema punktów $(A + B) \times P$. c. b. d. o.

(*) **Tw. 2.** Gdy B jest *nigdziegęste* w P i $A \subset B$, to A jest *nigdziegęste* w P.

Dem.

$$\overline{A \times P} \subset \overline{B \times P}, \quad P - \overline{B \times P} \subset P - \overline{A \times P},$$

$$P = D'(P - \overline{B \times P}) \subset D'(P - \overline{A \times P}) \subset P,$$

więc: $$D'(P - \overline{A \times P}) = P.$$

(*) **Tw. 3.** Gdy A jest *nigdziegęste* w P_1 *doskonałem*, P_2 *doskonałe* i $A \subset P_1 \subset P_2$, to A jest *nigdziegęste* w P_2.

Dem.

$$A = A \times P_1 = A \times P_2, \quad \overline{A} = \overline{A \times P_1} = \overline{A \times P_2},$$

$$\begin{aligned} P_2 &= (P_2 - P_1) + P_1 = D'[P_2 - P_1 + P_1] = \\ &= D'(P_2 - P_1) + D'P_1 = D'(P_2 - P_1) + P_1 = \\ &= D'(P_2 - P_1) + D'[P_1 - \overline{A \times P_1}] = \\ &= D'(P_2 - P_1) + D'[P_1 - \overline{A \times P_2}] = \\ &= D'[P_2 - P_1 + (P_1 - \overline{A \times P_2})] = \\ &= D'[P_2 - \overline{A \times P_2}] \subset D'P_2 = P_2, \text{ skąd:} \end{aligned}$$

$$D'[P_2 - \overline{A \times P_2}] = P_2 \qquad \text{c. b. d. o.}$$

Przykład: Gdy A jest nigdziegęste w P i $P \subset [a, b]$, to A nigdziegęste w $[a, b]$.

[Czytelnik zechce odtworzyć dowód w sposób mniej formalny].

3. Z poprzedniego otrzymamy ważną regułę:

Gdy z odcinka $[a, b]$ wyjmiemy rodzinę odcinków niekrzyżujących się, otwartych, to aby pozostały zbiór zamknięty był *nigdziegęsty* w $[a, b]$, *potrzeba* i *wystarcza,* aby *suma* tej rodziny była *wszędziegęsta* w $[a, b]$.

Możemy dzięki temu tworzyć zbiory zamknięte (lub nawet doskonałe), *nigdziegęste, niepuste,* usuwając z przedziału zamkniętego rodziny odcinków otwartych, niekrzyżujących się, *wszędziegęste* w przedziale, to znaczy o *sumie wszędziegęstej* w odcinku.

Przykład: Zbiór trójkowy Cantora.

Wydzielamy z przedziału $[0, 1]$, odcinki otwarte:

$$({}^1/_3, {}^2/_3);\ ({}^1/_9, {}^2/_9),\ ({}^2/_3 + {}^1/_9, {}^2/_3 + {}^2/_9);$$
$$({}^1/_{27}, {}^2/_{27}), ({}^2/_9 + {}^1/_{27}, {}^2/_9 + {}^2/_{27}), ({}^2/_3 + {}^1/_{27}, {}^2/_3 + {}^2/_{27})$$
$$({}^2/_3 + {}^2/_9 + {}^1/_{27},\ {}^2/_3 + {}^2/_9 + {}^2/_{27}) \quad \text{i t. d.}$$

— dzielimy zatem $[0, 1]$ na 3 równe części i wydzielamy *środkową;* pozostałe dwa przedziały dzielimy dalej, każdy na 3 równe części i wydzielamy odcinki środkowe i t. d.

Wydzielamy zatem rodzinę odcinków następujących:

$$\left(\sum_{k|1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n+1}},\ \sum_{k|1}^{n} \frac{a_k}{3^k} + \frac{2}{3^{n+1}}\right),$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

gdzie $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ jest jakimkolwiek układem liczb 0 i 2. $\left[\text{Przyjmujemy: } \sum_{k|1}^{0} \frac{a_k}{3^k} = 0\right]$.

Łatwo widzieć, że tak wydzielona rodzina jest

wszędziegęsta w [0, 1] i że składa się z odcinków, niestykających się końcami; 0 i 1 nie są końcami odcinków.

Pozostaje nam zbiór *doskonały* Z, *niepusty* (należą doń choćby 0, $^1/_3$, $^2/_3$, 1 . . .). Jest to sławny *zbiór trójkowy* Cantora.

Punkty tego zbioru, z wyjątkiem 0, można scharakteryzować, jako liczby postaci:

$$\sum_{k|1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$

gdzie $a_k = 0$ lub 2, $k = 1, 2, 3 \ldots$, przyczem nigdy „cyfry" a_k nie są od pewnego miejsca stale zerami. Należy zatem liczby zbioru Z napisać w systemie trójkowym w sposób istotnie nieskończony [naprz. $^1/_3 = {}^0/_3 + {}^2/_9 + {}^2/_{27} + \ldots$]

W analogiczny sposób moglibyśmy wiele podobnych zbiorów utworzyć. Obliczmy jeszcze, ile wynosi łączna długość wydzielonych odcinków z [0, 1]. Jest ona równa:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = \sum_{k|1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1,$$

a więc równa całej długości odcinka [0, 1]. Mimo to, pozostaje jeszcze zbiór doskonały. Fakt to niewątpliwie nieco paradoksalny!

§ 8. Zbiory Rozprószone.

Rozważmy dowolny zbiór linjowy A, a jednocześnie rodzinę $\mathfrak{A}$, złożoną z wszelkich zbiorów *gęstych w sobie* i *zawartych* w A. Suma $M = \Sigma\,\mathfrak{A}$ tej rodziny jest, jak wiadomo [§ 5, ust. 3, tw. 5],

zbiorem gęstym w sobie. Jest to najobszerniejszy zbiór gęsty w sobie, zawarty w A.

(*) **Def 1.** Sumę rodziny zbiorów *gęstych w sobie, zawartych* w A, będącą najobszerniejszym zbiorem tego rodzaju, zawartym w A, zwiemy *jądrem* zbioru A.

(*) **Def. 2.** Zbiór linjowy, którego jądro jest *puste*, zwiemy *rozprószonym*.

(*) **Tw. 1.** Jeżeli A jest zbiorem linjowym, M jego jądrem, to $N = A - M$ jest zbiorem *rozprószonym*.

Dem. Oczywiste z definicji.

Rozważmy w szczególności zbiór linjowy *zamknięty* A. Niechaj M będzie jego *jądrem*. Mamy tu twierdzenie:

(*) **Tw. 2.** Jądro M zbioru A linjowego, *zamkniętego*, jest zbiorem *doskonałym*.

Dem. $M \subset D'M$, gdyż M gęste w sobie; $M \subset A$, więc $M \subset D'M \subset A$, gdyż A zamknięte.

$$\overline{M} = M + D'M = D'M;$$

$$D'\overline{M} = D'D'M + D'M = D'M,$$

stąd: $\overline{M} = D'\overline{M}$, więc $\overline{M}$ *doskonałe*, zatem i gęste w sobie, co pociąga, że $\overline{M} \subset M$, ale że $M \subset \overline{M}$, więc $M = \overline{M}$.

Otrzymamy stąd natychmiast ważne twierdzenie:

(*) **Tw. 3.** Każdy zbiór A linjowy *zamknięty* jest *sumą* zbioru *doskonałego* i *rozprószonego*.

Dem. Wystarczy położyć: $A = M + N$, gdzie M jest jądrem zbioru A oraz $N = A - M$. Przytem jeszcze

$$M \times N = 0.$$

§ 9. Ciągi zbiorów. Kategorje Baire'a.

1. Przypominamy, nie wdając się w subtelności[1], że *ciągiem* (nieskończonym) jakichkolwiek przedmiotów pewnego rodzaju zwiemy *przepis* (operator, funkcję), który każdej liczbie całkowitej lub tylko od pewnej począwszy, przypisuje jednoznacznie któryś przedmiot rzeczonego rodzaju. Jeżeli przedmiot, przypisany całkowitemu n oznaczymy naprz. przez a_n, to ciąg zapisujemy zwykle w postaci symbolicznej:

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

lub

$$a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots$$

Jeżeli przepis działa tylko wśród liczb od 0 do k lub od k do l, to mamy *ciąg skończony:*

$$a_0,\ a_1,\ \ldots\ a_k$$

lub

$$a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots\ a_l.$$

Możemy tworzyć ciągi punktów, zbiorów, rodzin zbiorów, par punktów i t. p.

Zasada VII. *Jeżeli każdy wyraz a_n ciągu:*

$$a_0,\ a_1,\ \ldots \qquad [\text{czy } a_k,\ a_{k+1},\ \ldots]$$

należy do zbioru M, to ogół wyrazów tego ciągu stanowi podzbiór mnogości M. Nazywamy go *zapasem ciągu. Analogicznie dla ciągów skończonych.*

Def. I. *Przedstawić dany zbiór A w postaci ciągu* (skończonego lub nie) oznacza: *znaleźć taki ciąg, którego zapasem jest A.*

2. Zwrócimy się obecnie do ciągów, których wyrazami są *zbiory.* Z zasady będą to ciągi *jednorodne,* to znaczy ciągi zbiorów, należących do pełnej rodziny podzbiorów jakiegoś zbioru, naprz. będą to ciągi zbio-

[1] p. moja Arytmetyka Liczb Całkowitych, str. 93 i nast. [nr. 1 obecnej Biblioteczki. Kraków 1932].

rów linjowych, ciągi rodzin zbiorów linjowych i t. p. Zapewni nam to wykonalność pewnych działań, które są kombinacją działań algebry zbiorów.

Stawiamy kilka definicyj.

Def. I. Ciąg zbiorów

$$A_1, A_2, A_3, \ldots \quad \text{(skończony lub nie)}$$

jest *wstępujący*, gdy:

$$A_1 \subset A_2, \quad A_2 \subset A_3, \ldots \quad \text{i t. d.}$$

zstępujący, gdy

$$A_2 \subset A_1, \quad A_3 \subset A_2, \ldots \quad \text{i t. d.}$$

Def. II. *Sumą* czy *iloczynem* ciągu zbiorów:

$$A_0, A_1, A_2, \ldots \quad \text{(skończonego lub nie)}$$

jest *suma* czy *iloczyn* rodziny, będącej *zapasem* naszego ciągu.

Będziemy pisali:

$$\sum_{n|0}^{\infty} A_n \text{ i } \prod_{n|0}^{\infty} A_n.$$

W szczególności, gdy ciąg jest *nieskończony* i *wstępujący*, wtedy *sumę*, a gdy *zstępujący*, *iloczyn* ciągu nazywamy też *granicą ciągu*.

Tw. 1. Gdy ciąg zbiorów jest *jednorodny*, t. zn. gdy wyrazy ciągu są podzbiorami jednego i tego samego zbioru M, to *suma* i *iloczyn* ciągu są wykonalne i są dalej podzbiorami M.

Dem. Wynika to z **zasad V, VI i VII** łącznie z uwagą, że zapas ciągu *nie jest nigdy rodziną pustą*.

Def. III. Ogół elementów, z których *każdy* należy do *nieskończenie wielu* wyrazów ciągu zbiorów:

$$A_1, A_2, \ldots \tag{1}$$

nazwiemy *górną granicą* ciągu (1).

Ogół takich elementów x, że do każdego z nich można dobrać n tak, by element x należał już do wszystkich wyrazów:

$$A_n,\ A_{n+1},\ A_{n+2},\ \ldots$$

ciągu (1), nazwiemy *dolną granicą* ciągu (1).

Będziemy pisali:

$\lim\limits_{n|\infty}$ superior A_n = górna granica ciągu (1).

$\lim\limits_{n|\infty}$ inferior A_n = dolna granica ciągu (1).

U w a g a. *Dolna* czy *górna* granica ciągu zbiorów noszą u różnych autorów różne nazwy. Dość często spotyka się terminy:

dolna granica = zbiór graniczny
górna granica = zbiór akumulacji.

Tw. 2. Jeżeli ciąg zbiorów jest *jednorodny*, to dolna i górna granica są *określonemi zbiorami*.

D e m. Załóżmy, że wyrazy ciągu:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots \tag{1}$$

są podzbiorami zbioru M.

1. Utwórzmy ciąg:

$$B_1,\ B_2,\ \ldots, \tag{2}$$

gdzie B_n jest *iloczynem* ciągu:

$$A_n,\ A_{n+1},\ \ldots \quad \left(B_n = \prod_{p|n}^{\infty} A_p\right).$$

Wedle tw. 1, B_n ($n = 1, 2 \ldots$) są określonemi podzbiorami mnogości M i ciąg (2) jest *jednorodny*. Otóż:

$$\lim_{n|\infty} \inf.\ A_n = \sum_{n|1}^{\infty} B_n.$$

2. Utwórzmy teraz ciąg:

$$C_1,\ C_2,\ \ldots\ldots, \tag{3}$$

gdzie:

$$C_n = \sum_{p|n}^{\infty} A_p.$$

Natychmiast spostrzeżemy, że:

$$\lim_{n|\infty} \sup.\ A_n = \prod_{n|1}^{\infty} \sum_{p|n}^{\infty} A_p = \prod_{n|1}^{\infty} C_n,$$

przyczem, tak wyrazy ciągu (3), jak i iloczyn zapasu tego ciągu są wykonalne, a granica górna jest zawarta w M.

3. A teraz dwa ważne twierdzenia.

(*) **Tw. 1** [Cantora]. *Wspólna część* (iloczyn, granica) ciągu *zstępującego* zbiorów linjowych, *zamkniętych, niepustych,* z których pierwszy jest *ograniczony,* jest zbiorem *niepustym*

Dem. Oznaczmy nasz ciąg przez:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots \tag{1}$$

i niech będzie $A_1 \subset [a, b]$.

Oznaczając przez p_n kres górny zbioru A_n, utworzymy zbiór:

$$M = \{p_1,\ p_2,\ \ldots\}.$$

Kres p_n zawsze istnieje i należy do A_n.

Zbiór M jest ograniczony ($M \subset [a, b]$) i niepusty.

1 wypadek. M jest *skończone.*

Temsamem któryś jego element, naprz. $p^{(0)}$, należy do nieskończenie wielu wyrazów ciągu (1). Lecz, gdy $p^{(0)} \varepsilon A_n$, to $p^{(0)} \varepsilon A_k$, dla $k = 1, 2, \ldots n$,

gdyż ciąg (1) jest zstępujący; stąd już $p^{(0)}$ należeć musi do *wszystkich* wyrazów ciągu (1), więc:

$$\prod_{n|1}^{\infty} A_n \neq 0.$$

2 wypadek. M jest *nieskończone.*

Wtedy, wedle tw. Bolzano-Weierstrassa, M posiada choć jeden punkt skupienia, naprz. p. Ponieważ $M \subset A_1$, więc $p \varepsilon D'A_1$, zatem $p \varepsilon A_1$; lecz $p \varepsilon D'[M - \{p_1\}]$, więc $p \varepsilon D'A_2 \subset A_2$, gdyż $M - \{p_1\} \subset A_2$ i t. d.

Ostatecznie:

$$p \varepsilon \prod_{n|1}^{\infty} A_n \quad \text{i} \quad \prod_{n|1}^{\infty} A_n \neq 0.$$

(*) **Tw. 2.** [Ascoliego, uogólnione]. *Wspólna część* ciągu *zstępującego* odcinków *zamkniętych:*

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots \tag{1}$$

(ograniczonych) jest *(niepustym) odcinkiem zamkniętym.*

Dem. Z założenia

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq b_3 \leqq b_2 \leqq b_1.$$

Niechaj: $a = \text{kr. g.}\ \{a_1, a_2, \ldots\}$

$b = \text{kr. d.}\ \{b_1, b_2, \ldots\}.$

Oczywiście: $a \leqq b$, a metoda dowodu twierdzenia Cantora wykaże, iż a i b należą do iloczynu ciągu (1). Wtedy też:

$$[a, b] \subset \prod_{n|1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Gdy jednak $a' < a$ lub $b < b'$, to znajdą się a_n czy b_n takie, że $a' < a_n \leqq a$ względnie

$b \leqq b_n < b'$ więc, ani a', ani b' do iloczynu ciągu (1) nie należą. Ostatecznie:

$$\prod_{n|1}^{\infty} [a_n, b_n] = [a, b].$$

4. (*) **Def. 1.** Zbiorem 1 *kategorji* (Baire'a) względem zbioru *doskonałego* P nazywamy *sumę ciągu* zbiorów *nigdziegęstych* w P:

$$A = \sum_{n|1}^{\infty} A_n, \quad A_n \text{ nigdziegęste w } P.$$

Gdyby A_n były *zamknięte*, mówilibyśmy o 1 *kategorji w znaczeniu węższem.*

(*) **Def. 2.** Zbiór linjowy, *niebędący 1 kategorji* zwiemy zbiorem *2 kategorji.*

(*) **Def. 3.** Zbiór A jest *residualnym* w *doskonałem* P,[1] gdy A jest zawarte w P i $P - A$ jest *1 kategorji* względem P w znaczeniu węższem.

Uwagi. 1. Jeżeli A jest 1 kategorji względem P [ew. w znaczeniu węższem] i naprz. $A = \Sigma A_n$, gdzie A_n (zamknięte), nigdziegęste w P, to można położyć:

$$P \times A = \sum_{n|1}^{\infty} A_n', \quad \text{gdzie } A_n' = P \times A_n,$$

przyczem A_n' są już zawarte w P (zamknięte i wedle § 7, ust. 2) *nigdziegęste* w P.

2. Kładąc $B_n = \sum_{v|1}^{n} A_n$, otrzymamy:

$$A_n = \sum_{n|1}^{\infty} B_n,$$

[1] w znaczeniu węższem.

przyczem B_n są nigdziegęste w P, a $B_1, B_2, \ldots$ jest ciągiem *wstępującym*.

3. Nie rozważamy tutaj zbiorów residualnych w doskonałem P w znaczeniu *szerszem*, to znaczy różnic $P - A$, gdzie $A \subset P$, jest 1 kategorji względem P w znaczeniu szerszem.

(*) **Tw. 1.** Suma zbiorów A i B *pierwszej kategorji* względem P (ew. w zn. węższem) jest zbiorem *tej samej kategorji* względem P.

Dem. Niechaj $A = \Sigma A_n$, $B = \Sigma B_n$, gdzie A_n i B_n (zamknięte i) nigdziegęste w P, to $A + B = \Sigma (A_n + B_n)$, gdzie znów $A_n + B_n$ (zamknięte) nigdziegęste w P.

(*) **Tw. 2.** Zbiór A *residualny* w *doskonałem* P, jest *wszędziegęsty* w P.

Dem. Połóżmy $P - A = B$, $B = \sum\limits_{n|1}^{\infty} B_n$, gdzie B_n nigdziegęste w P, zamknięte i niechaj [p. uwaga 2] ciąg $B_1 \subset B_2 \subset B_3, \ldots$ będzie wstępujący oraz $B_n \subset P$. Korzystamy z kryterjów, wysłowionych na początku ustępu 2, § 7. Obieramy dowolny odcinek otwarty (a, b). Ponieważ B_1 nigdziegęste w P, więc znajdzie się w (a, b) odcinek (a_1, b_1) taki, że

$$(a_1, b_1) \times B_1 = 0, \ (a_1, b_1) \times P \neq 0.$$

Widocznie więc jeden z przedziałów otwartych, należących do rodziny $\mathbf{B}_1$, analizującej zbiór *otwarty* $(a, b) - B_1$ zawierał punkty zbioru P. Przedziały rodziny $\mathbf{B}_1$, posiadające na sobie punkty zbioru P, tworzą podrodzinę $\mathbf{B}_1'$ *niepustą*. Wybierzemy jeden z tych przedziałów, naprz. (α_1, β_1).

Będzie wtedy:
$(\alpha_1, \beta_1) \subset (a, b)$, $(\alpha_1, \beta_1) \times B_1 = 0, (\alpha_1, \beta_1) \times P \neq 0$.

Przynajmniej jeden ze zbiorów:

$$(\alpha_1, \gamma_1] \times P, \ [\gamma_1, \beta_1) \times P, \text{ gdzie } \gamma_1 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2},$$

nie jest pusty. Oznaczmy przez p_1 kres górny pierwszego z nich, o ile jest on niepusty, ewentualnie kres dolny drugiego, o ile pierwszy pusty. Wtedy p_1, jako punkt skupienia dla P doskonałego, należy do P. Niech będzie:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1 + p_1}{2}, \quad \mu_1 = \frac{p_1 + \beta_1}{2}.$$

Otóż: $(\lambda_1, \mu_1) \subset (\alpha_1, \beta_1)$, $[\lambda_1, \mu_1] \times B_1 = 0$,
ale $(\lambda_1, \mu_1) \times P \neq 0$, gdyż $p_1 \varepsilon (\lambda_1, \mu_1) \times P$.

Biorąc za punkt wyjścia (λ_1, μ_1), tak jak poprzednio (a, b), otrzymamy odcinek $[\lambda_2, \mu_2]$ o własnościach:

$$[\lambda_2, \mu_2] \subset [\lambda_1, \mu_1], \ [\lambda_2, \mu_2] \times B_2 = 0,$$
$$(\lambda_2, \mu_2) \times P \neq 0.$$

Ostatecznie, kładąc jeszcze $P_n = [\lambda_n, \mu_n] \times P$, otrzymamy ciągi:

$$[\lambda_1, \mu_1], \quad [\lambda_2, \mu_2], \ldots \qquad (1)$$
$$P_1 \quad , \quad P_2 \quad , \ldots \qquad (2)$$

zstępujące odcinków zamkniętych, względnie zbiorów *zamkniętych* P_n, *niepustych*.

Wedle tw. Cantora, znajdzie się punkt k należący do wspólnej części (iloczynu) ciągu (2), więc i ciągu (1), gdyż

$$P_n \subset [\lambda_n, \mu_n].$$

Punkt k należy do (a, b), lecz nie należy ani do B_1, ani $B_2, \ldots$ i t. d., więc nie należy do

$B = \sum_n B_n$, czyli należy do A. Z drugiej strony $P_n \subset P$ $(n = 1, 2, \ldots)$, więc $k \varepsilon P$. Tem samem w dowolnem (a, b), gdzie P posiadało swe punkty, znalazły się punkty zbioru A, należące do P, co dowodzi, że A jest *wszędziegęste* w P.

Dowód nasz wymaga jednak uzupełnienia. Nie podaliśmy, mianowicie, sposobu *wybierania* przedziału (α_1, β_1) z rodziny $\mathbf{B}_1'$, ani analogicznego (α_2, β_2) z rodziny $\mathbf{B}_2'$ i t. d.

Otóż problem: wybrać określony odcinek z danej niepustej, o sumie ograniczonej rodziny odcinków otwartych, niekrzyżujących się ze sobą, rozwiążemy w następnym ustępie obecnego paragrafu. Wtedy dowód nasz będzie już bez zarzutu. Spotykamy się tu z trudnością, o której pomówimy w następnym dopiero paragrafie.

(*) **Tw. 3.** *Wspólna część* zbiorów A i B *residualnych* w zbiorze doskonałym P jest zbiorem *residualnym* i temsamem *wszędziegęstym* w P.

Dem. Z definicji: $A \subset P$, $B \subset P$, $M = P - A$ i $N = P - B$ 1 kategorji względem P w zn. w.

Otóż:

$$P - (A \times B) = (P - A) + (P - B) = M + N,$$

atoli $M + N$, wedle tw. 1, jest zbiorem 1 kategorji względem P w zn. w. c. b. d. o.

(*) **Tw. 4.** Jeżeli A jest zbiorem *residualnym* w P doskonałem, *niepustem*, to A nie jest 1 kategorji względem P w zn. w.

Dem. Gdyby A było pierwszej kategorji w zn. w. w P, to $P = A + B$ byłoby również takiem w P, więc $0 = P - (A + B)$ byłoby *wszędziegęste* w P czyli: $D'[P \times 0] = P$, więc $P = 0$.

Ćwiczenia:

(1) Okazać, że każdy zbiór skończony jest 1 kategorji względem każdego P doskonałego.

(2) Udowodnić, że gdy $A \subset P$, P doskonałe i A jest zapasem ciągu punktów:

$$a_1, a_2, \ldots,$$

to A jest pierwszej kategorji względem P.

(3) Uogólnić przez indukcję tw. 3 na wypadek skończonej ilości zbiorów.

(4) Każdy zbiór A *nigdziegęsty* w P doskonałem jest 1 kategorji względem P.

(5) Każdy zbiór linjowy jest 1 kategorji względem zbioru pustego.

5. Rozwiążemy teraz problem, o którym była mowa w dowodzie tw. 2 poprzedniego ustępu.

Tw. Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest rodziną niepustą odcinków *otwartych, niekrzyżujących się ze sobą* i $\Sigma \mathfrak{A}$ jest ograniczona, to odcinki tej rodziny można ustawić w ciąg (skończony lub nie) wedle pewnego określonego prawa.

Dem. Niechaj $\Sigma \mathfrak{A} \subset (a, b)$. Zauważmy, że gdy $\delta = (\alpha, \beta)$ jest odcinkiem rodziny, to ilość odcinków, których długość (odległość końców) jest większa lub równa długości odcinka δ, jest skończona i $\leqq \frac{b-a}{\beta-\alpha}$.

Wynika to stąd, że odcinki nie krzyżują się ze sobą i są wszystkie zawarte w (a, b). Oznaczmy, dla danego δ, ilość odcinków rodziny *dłuższych* niż δ przez $m(\delta)$. Ilość odcinków o długości równej długości δ i leżących na prawo od δ

oznaczmy przez $n(\delta)$. Przypiszmy odcinkowi δ naszej rodziny liczbę: $k = m(\delta) + n(\delta) + 1$ i oznaczmy:

$$\delta = \delta_k.$$

Jeżeli liczba całkowita $k(>1)$ została przypisana odcinkowi δ, to numer $k-1$ nosić będzie ten odcinek rodziny, który albo jest równie długi jak δ, lecz leży bezpośrednio za nim na prawo, albo, gdy takiego brak, odcinek, bezpośrednio dłuższy i leżący najbardziej na lewo w odcinku (a, b). Jasnem będzie teraz, że ciąg:

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots,$$

skończony lub nie, będzie posiadał jako zapas rodzinę $\mathfrak{A}$ i że odcinki tego ciągu będą różne między sobą.

Uwagi. Ciąg powyższy, układający nam rodzinę $\mathfrak{A}$ w określonym porządku, nazwiemy *normalnym*. Jeżeli jest on skończony i ostatnim wyrazem jest δ_p, to kładąc

$$\delta_{p+h} = \delta_p \qquad h = 1, 2, \ldots,$$

możemy rodzinę $\mathfrak{A}$ przedstawić jako zapas ciągu nieskończonego:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \qquad \delta_p, \delta_{p+1}, \ldots,$$

atoli wyrazy tego ciągu nie będą już *różne* między sobą.

Zastrzeżenie, by $\Sigma\mathfrak{A}$ była zbiorem ograniczonym, nie jest istotne i twierdzenie nasze jest słuszne ogólnie. Dla dowodu wystarczyłoby wiedzieć, że każdy niepusty zbiór, którego elementami są liczby wymierne, da się ustawić w określony

sposób w ciąg. Ustawilibyśmy w określony ciąg wszystkie liczby wymierne, ponieważ zaś w każdym odcinku rodziny są jakieś liczby wymierne, wybralibyśmy dla odcinka δ naszej rodziny tę, która w ciągu liczb wymiernych nosi najmniejszy numer. Tak wybrane liczby wymierne, tworzące zbiór niepusty, o ile rodzina $\mathfrak{A}$ jest niepusta, ustawilibyśmy znowu w ciąg (skończony lub nie) i numery liczb w tym ciągu przyjęli za numery odpowiadających im odcinków.

Teraz mamy już odpowiedź na problem z ust. 4.

Problem: W danej niepustej, o sumie ograniczonej rodzinie odcinków otwartych, niekrzyżujących się, obrać jeden odcinek.

Odp.: Ustawiamy rodzinę w ciąg *normalny* i obieramy odcinek naprz. o numerze *jeden*.

Będzie to najdłuższy odcinek rodziny, leżący najbardziej na prawo.

§ 10. Zasada Zermeli.

1. Niechaj $\mathfrak{A}$ będzie *niepustą* rodziną zbiorów *niepustych* i *rozłącznych* (t. zn., że różne zbiory rodziny mają zawsze iloczyn pusty).

Def. 1. Zbiór M o tej własności, że gdy tylko A jest zbiorem rodziny $\mathfrak{A}$, to iloczyn $A \times M$ składa się z *jednego* elementu, nazwiemy *selekcją* rodziny $\mathfrak{A}$.

Mając daną rodzinę, o własnościach powyższych pytamy teraz o *istnienie* choć jednej *selekcji*.

W wielu wypadkach potrafimy istnienie takiej selekcji udowodnić. Przedewszystkiem mamy twierdzenie:

Tw. 1. Rodzina $\mathfrak{A}$ *jednorodna, niepusta, skończona* zbiorów *niepustych* i *rozłącznych* posiada choć jedną *selekcję*.

Dem. *Jednorodność* rodziny ma oznaczać, że wszystkie klasy rodziny są podzbiorami jednej i tejsamej klasy K. Jeżeli $\mathfrak{A}$ składa się z jednego zbioru A niepustego, to dowodzimy tak:

(1) Istnieje *element,* naprz. a, należący do A.
(2) Jeżeli $a \varepsilon A$, to $\{a\} \subset A$.
(3) Jeżeli $\mathfrak{A} = \{A\}$ i $\{a\} \subset A$, to $\{a\}$ jest selekcją dla $\mathfrak{A}$.
(4) Więc istnieje selekcja rodziny $\mathfrak{A}$.

Opieramy się tu na zasadach:

Zasada VIII. *Jeżeli* $x \varepsilon X$, to $\{x\} \subset X$.

Zasada IX. *Jeżeli* $x \varepsilon X$, *to istnieją elementy, należące do* X. [Zasada dowodu „przez przykład“].

W dalszym ciągu, gdy ilość klas rodziny $\mathfrak{A}$ wynosi $n (\geqq 1)$, prowadzimy dowód przez *indukcję*.

Niestety w ogólnym wypadku rodziny *nieskończenie licznej* nie umiemy udowodnić istnienia selekcji. Stawiamy tedy hipotezę, zwaną *Zasadą Zermeli* [E. Zermeło 1904].

Zasada Zermeli. Każda *niepusta* rodzina klas *niepustych, rozłącznych* posiada *selekcję*.

Ograniczymy jeszcze posługiwanie się hipotezą Zermeli do rodzin *jednorodnych*.

Twierdzenia uzyskane przy pomocy tej hipotezy oznaczymy osobno przez (Z). Nic nam do dziś dnia pewnego nie wiadomo, czy zasada powyższa jest od pozostałych zasad niezależną, czy nawet nie prowadzi do sprzeczności! Więcej szcze-

gółów w tej trudnej kwestji znajdzie czytelnik w literaturze wymienionej w bibljografji.

Matematycy posługują się przeważnie inną postacią tej zasady, którą nazwiemy Zasadą Wyboru.

Zasada Wyboru. Jeżeli $\mathfrak{A}$ jest rodziną jednorodną, niepustą, zbiorów *niepustych,* to istnieje *przepis* f (operator, funkcja, przyporządkowanie), który każdemu zbiorowi A, rodziny $\mathfrak{A}$, przypisuje element $f(A)$, należący do tego zbioru: $f(A) \varepsilon A$.[1]

Naszkicujemy krótko wywód nowej zasady z zasady Zermeli: Jeżeli $A \varepsilon \mathfrak{A}$, to zastąpmy każdy element x klasy A przez parę (x, A); pary te utworzą zbiór A'; ogół tak skonstruowanych klas utworzy nową rodzinę $\mathfrak{A}'$, zbiorów *niepustych* i już *rozłącznych.* Rodzina ta posiadać będzie *selekcję,* powiedzmy M', która z każdą klasą A' posiadać będzie wspólnie jedną jedyną parę (a, A). Element a już tu wyznaczony przez selekcję M' i klasę A *jednoznacznie;* odpowiedniość f przypisująca klasie A element a jest żądanym przepisem, czyli jak mówić będziemy, *selektorem* rodziny $\mathfrak{A}$.

Odwrotny wywód zasady Zermeli z zasady wyboru jest oczywisty.

Terminy *selekcja* i *selektor* przyjęliśmy za B. Russellem.

2. W dwu *szczególnych* wypadkach wykażemy słuszność Zasady Wyboru.

(*) I wyp. Rodzina niepusta, jednorodna $\mathfrak{A}$, zbiorów niepustych, *zamkniętych* posiada *selektor.*

D e m. Jeżeli A jest zbiorem tej rodziny $(A \neq 0)$,

---

[1] Jest to w zasadzie oryginalna forma zasady Zermeli, tak, jak ją wypowiedział Zermelo.

to $A_1 = A \times (-\infty, 0]$ i $A_2 = A \times [0, +\infty)$ są *zamknięte* i chociaż jedno z nich *niepuste*. Obieramy:

$$a = f(A) = \text{kr. g. } A_1, \text{ o ile } A_1 \neq 0$$

ewent. $a = f(A) = \text{kr. d. } A_2$, o ile $A_1 = 0$.

Przepis f jest żądanym *selektorem*.

(*) II wyp. Rodzina niepusta, jednorodna, składająca się ze zbiorów niepustych, *otwartych*, posiada *selektor*.

Dem. Niechaj A będzie zbiorem tej rodziny. Porządkujemy rodzinę odcinków, z których składa się A, w sposób opisany (jednoznacznie) w § 9, ust. 5. i obieramy odcinek δ oznaczony numerem 1.

Jeżeli: $\delta = (\alpha, \beta)$, to niechaj $f(A) = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

„ $\delta = (-\infty, \alpha)$, „ „ $f(A) = \alpha - 1$

„ $\delta = (\beta, +\infty)$, „ „ $f(A) = \beta + 1$

„ $\delta = (-\infty, +\infty)$ „ „ $f(A) = 0$.

Przepis f jest *selektorem*.

§ 11. Ciągi punktów. Twierdzenie o pokryciu Borela-Lebesgue'a.

1. (*) **Def. 1.** Powiemy, że ciąg punktów:

$$p_1, p_2, \ldots$$

zdąża do punktu p lub *posiada za granicę* p, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$, dobrać możemy n_0 całkowite tak, że gdy $n \geqq n_0$, to odl. $(p_n, p) < \varepsilon$

$$\{\text{więc: } |p - p_n| = \sqrt{(p - p_n)^2} < \varepsilon\}.$$

Określimy jeszcze:

(*) **Def. 2.** Ciągiem *wybranym* z ciągu:

$$p_1, p_2, \ldots \tag{1}$$

nazwiemy każdy ciąg:

$$q_1, q_2, \ldots, \tag{2}$$

który powstanie w następujący sposób:

(1) obieramy ciąg liczb naturalnych:

$n_1, n_2, \ldots$ zdążający do $+\infty$;

(2) kładziemy: $q_k = p_{n_k}$ $\quad k = 1, 2, \ldots$

Mając te definicje, wykażemy słuszność następujących twierdzeń:

(*) **Tw. 1.** Jeżeli ciąg: $p_1, p_2, \ldots$ zdąża do p' i p'', to $p' = p''$.

Dem. Niech będzie $\varepsilon > o$ dowolne. Od pewnego n_1 mamy:

$$\text{odl.}\,(p_n, p') < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n \geqq n_1.$$

Od pewnego n_2 mamy:

$$\text{odl.}\,(p_n, p'') < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad n \geqq n_2.$$

Stąd:

$$\text{odl.}\,(p', p'') < 2\varepsilon, \quad \text{dla} \quad n \geqq \max.\{n_1, n_2\}.$$

Lecz $\varepsilon\,(> o)$ dowolne, więc odl. $(p', p'') = o$, a zatem: $\quad p' = p''$.

Opieramy się tu na następujących, łatwych do uzasadnienia twierdzeniach.

(α) Jeżeli odl. $(p, q) = 0$, to $p = q$,

(β) Odl. $(p, q) \leqq$ odl. $(p, r) +$ odl. (q, r).

Twierdzenia te udowodni czytelnik z łatwością, opierając się na definicji odległości.

Będziemy pisali często: $\lim\limits_{n|\infty} p_n = p$ dla wyrażenia, że $p_1, p_2, \ldots$ zdąża do p.

(*) **Tw. 2.** Jeżeli w ciągu $p_1, p_2, \ldots$ *wszystkie* wyrazy są $= p$, to ciąg *zdąża do* p.

Dem. Odl. $(p_n, p) = 0$, więc stale mniejsza od każdego $\varepsilon > 0$.

(*) **Tw. 3.** Jeżeli $p_1, p_2, \ldots$ (1) zdąża do p i $q_1, q_2, \ldots$ (2) jest ciągiem *wybranym* z (1), to ciąg (2) *zdąża do* p.

Dem. Niech będzie $\varepsilon\,(>0)$ dowolne. Od pewnego n_0 mamy: odl. $(p_n, p) < \varepsilon$, dla $n \geqq n_0$.

Niechaj: $q_s = p_{n_s}$, gdzie:

$n_1, n_2, \ldots$ zdąża do $+\infty$.

Od pewnego s_0 mamy:

$$n_s \geqq n_0, \quad \text{dla} \quad s \geqq s_0,$$

a więc: odl. $(q_s, p) =$ odl. $(p_{n_s}, p) < \varepsilon$,

co dowodzi twierdzenia.

2. (*) **Def. 1.** Nazwijmy ciąg: $p_1, p_2, \ldots$ *podstawowym dla punktu* p *w zbiorze* A, gdy:

(1) $p_n \varepsilon A$, dla $n = 1, 2, \ldots$

(2) $p_n \neq p$, dla $n = 1, 2, \ldots$

(3) $p_1, p_2, \ldots$ zdąża do p.

(*) **Tw. 1.** Jeżeli dla punktu p *istnieje* ciąg *podstawowy w zbiorze* A, to p jest *punktem skupienia* dla A.

Dem. Obierzmy dowolne otoczenie (s, t) dla p. $[s < p < t]$.

Od pewnego n_0 mamy dla $n \geqq n_0$:

$$|p_n - p| = \text{odl.}\,(p_n, p) < \min.\,\{p - s, t - p\} > 0.$$

zatem: $s < p_{n_0} < t$, $p_{n_0} \neq p$, $p_{n_0} \varepsilon A$,

więc w dowolnem sąsiedztwie $(s, t)' = (s, p) + (p, t)$ znalazł się choć jeden punkt zbioru A, co już dowodzi twierdzenia.

Nie umiemy wykazać w ogólnym wypadku odwrotnego twierdzenia, bez uciekania się do zasady *Zermeli* (lub *Wyboru*). Mamy atoli:

(*) **Tw. 2.** (Z) Jeżeli p jest punktem skupienia zbioru A, to istnieje w A ciąg podstawowy dla punktu p.

Dem. Oznaczmy:

$$A_n = A \times \left[\left(p - \frac{1}{n}, p\right) + \left(p, p + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Zbiory A_n nie są puste i zasada *wyboru* da nam przepis f taki, że:

$$p_n = f(A_n) \varepsilon A, \quad p_n \neq p, \qquad |p_n - p| < \frac{1}{n}$$

$$n = 1, 2, \ldots,$$

temsamem ciąg: $p_1, p_2, \ldots$ jest żądanym podstawowym.

W dwu ważnych wypadkach możemy ominąć zasadę wyboru:

1 wypadek: A jest zbiorem *zamkniętym* ($\neq 0$).

Wybieramy wtedy:

$$p_n = \text{kr. d. } A \times \left(p - \frac{1}{n}, p\right),$$

o ile $$A \times \left(p - \frac{1}{n}, p\right) \neq 0,$$

ewentualnie

$$p_n = \text{kr. g. } A \times \left(p, p + \frac{1}{n}\right), \text{ gdy } A \times \left(p - \frac{1}{n}, p\right) = 0$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

2. wypadek: p jest punktem *wewnętrznym* zbioru A i naprz. otoczenie (s, t) jest zawarte w A. Połóżmy wtedy:

$$p_n = p - \frac{p - s}{n + 1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3. A teraz przechodzimy do ważnego twierdzenia „o pokryciu" — *Borela-Lebesgue'a*, zwanego u niemieckich autorów twierdzeniem „Heine-Borela".

(*) **Tw. 1.** Jeżeli rodzina odcinków *otwartych* właściwych $\mathfrak{A}$ posiada w stosunku do odcinka zamkniętego $[a, b]$ tę własność, że *każdy* punkt tego odcinka znajduje się wewnątrz jakiegoś odcinka rodziny {„rodzina $\mathfrak{A}$ pokrywa $[a, b]$"}, to pewna *skończona* podrodzina rodziny $\mathfrak{A}$ posiada dalej tę samą własność w stosunku do $[a, b]$ {„pokrywa" $[a, b]$}.

Dem. Zbiór M wszystkich punktów x odcinka $[a, b]$ takich, że twierdzenie zachodzi dla odcinka $[a, x]$ jest zbiorem *niepustym* (należy doń choćby a, przykryte jakimś odcinkiem z $\mathfrak{A}$) i *ograniczonym* (zawartym w $[a, b]$). Kres górny zbioru M, powiedzmy l, należy do M, gdyż jest przykryty jakiemś $\delta = (\alpha, \beta)$ z rodziny $\mathfrak{A}$ i znajdzie się x_0 takie, że

$$\alpha < x_0 \leqq l, \quad x_0 \varepsilon M,$$

ponieważ zaś odcinek $[a, x_0]$ jest pokryty przez skończoną ilość odcinków:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \quad \delta_k \text{ rodziny } \mathfrak{A},$$

więc $[a, l]$ pokryte przez:

$$\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k.$$

Atoli $l = b$, gdyż inaczej $x = \min. \left\{ l + \frac{\beta - l}{2}, b \right\} > l$ należałoby do M, co niemożliwe. Zatem twierdzenie słuszne dla $[a, b]$.

(*) **Tw. 2.** Jeżeli rodzina odcinków *otwartych* $\mathfrak{A}$ *„pokrywa“* (w sensie tw. 1) zbiór A, *ograniczony, niepusty* i *zamknięty*, to jakaś *skończona* podrodzina rodziny $\mathfrak{A}$ czyni dalej to samo.

Dem. Niechaj $A \subset (a, b)$ i niechaj $\mathbf{B}$ oznacza rodzinę analizującą zbiór otwarty

$$B = (a - 1, b + 1) - A.$$

Rozważmy teraz sumę rodzin $\mathfrak{A}$ i $\mathbf{B}$. Będzie to znowu rodzina odcinków otwartych, *pokrywająca* odcinek $[a, b]$. Część jej *skończona* pokrywa również, wedle tw. 1, cały odcinek $[a, b]$, składa się ona z odcinków należących do $\mathfrak{A}$ i ew. do $\mathbf{B}$; atoli odcinki należące do $\mathbf{B}$ nie przykrywają żadnego punktu zbioru A; odrzućmy je, a pozostałe:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k$$

będą żądanem pokryciem dla A.

Uwaga. Czytelnik zauważy z łatwością, że założenie, by odcinki rodziny pokrywającej były *właściwe*, nie jest istotne.

§ 12. Odległość zbiorów.

Nazwijmy:

(*) **Def. 1.** *Odległością* punktu p od *zbioru* A nazwiemy *kres dolny* odległości: odl. (p, q), gdzie q jest dowolnym punktem zbioru A.

Mamy wtedy oczywiście:

(*) **Tw. 1.** Każdy punkt p posiada określoną odległość (nieujemną) od każdego zbioru *linjowego, niepustego* A. Oznaczymy ją przez: odl. $\{A, p\}$.

(*) **Def. 2.** *Odległością zbiorów* A i B (linjowych) nazwiemy *kres dolny* odległości: odl. $\{A, p\}$, gdzie p jest dowolnym punktem zbioru B.

Mamy znowu natychmiast:

(*) **Tw. 2.** Każde dwa zbiory linjowe, *niepuste* A i B posiadają określoną *nieujemną* odległość: odl. $\{A, B\}$, przyczem:

$$\text{odl.}\{A, B\} = \text{odl.}\{B, A\}.$$

(*) **Tw. 3.** Jeżeli A jest zbiorem *zamkniętym, niepustym*, to warunkiem koniecznym i dostatecznym, by $p \varepsilon A$ jest: odl. $\{A, p\} = 0$.

Dem. 1. Konieczność widoczna, gdyż wtedy $p \varepsilon A$ i odl. $(p, p) = 0$.

2. Dostateczność. Jeżeli odl. $\{A, p\} = 0$, to dla każdego $s < p < t$ znajdzie się punkt q, należący do A i taki, że odl. $(p, q) < \min. \{p - s, t - p\}$; wtedy jednak $q \varepsilon (s, t)$, stąd p musi być punktem skupienia dla A, a temsamem należeć do *zamkniętego* A.

(*) **Tw. 4.** Warunkiem *koniecznym* i *dostatecznym*, by zbiory A i B *niepuste, ograniczone* i *zamknięte* miały punkty *wspólne*, jest:

$$\text{odl.}\{A, B\} = 0.$$

Dem. 1. Konieczność widoczna z definicji odległości.

2. Dostateczność. Oznaczmy przez A_n zbiór wszystkich punktów p zbioru B takich, że

$$\text{odl.}\{A, p\} \leqq \frac{1}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A_n jest zbiorem *niepustym* (z założenia), *ograniczonym* i, jak łatwo widzieć, *zamkniętym* ($n = 1, 2, \ldots$), przytem:

$$A_1, \; A_2, \; A_3, \ldots$$

tworzą ciąg *zstępujący*. Wedle tw. Cantora istnieje choć jeden punkt p_0 należący do wszystkich A_n [§ 9, ust. 3). Wtedy:

$$\text{odl.}\{A, p_0\} \leqq \frac{1}{n} \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

więc $\text{odl.}\{A, p_0\} = 0$, czyli $p_0 \varepsilon A$, lecz również $p_0 \varepsilon B$, a stąd $A \times B \neq 0$.

Ćwiczenia:

1. Udowodnić, że dla A niepustego:

$$\text{odl.}\{A, p\} = \text{odl.}\{\overline{A}, p\} \qquad [\overline{A} = \text{domknięcie } A].$$

2. Udowodnić, że dla A i B niepustych:

$$\text{odl.}\{A, B\} = \text{odl.}\{\overline{A}, \overline{B}\}.$$

3. Okazać, że:

$$\text{odl.}\{A, p\} \leqq \text{odl.}\{A, q\} + \text{odl.}(p, q),$$
$$\text{odl.}\{A, B\} \leqq \text{odl.}\{A, C\} + \text{odl.}\{C, B\},$$

gdy A, B, C są dowolnemi zbiorami niepustemi, p i q dowolnemi punktami.

4. Udowodnić, że gdy A i B są ograniczone, niepuste i zamknięte, to znajdą się punkty p i q takie, że

$$p \varepsilon A, \; q \varepsilon B \text{ i } \text{odl.}(p, q) = \text{odl.}\{A, B\}$$

§ 13. Miara (Lebesgue'a) zbiorów linjowych.

Od dawna starano się uogólnić elementarne pojęcie długości odcinka na wypadek dowolnych zbiorów linjowych, ograniczonych. Próby 19 wieku (Hankel, Cantor, Jordan) musiały powoli ustąpić miejsca niezmiernie pożytecznej i ogólnej teorji miary, stworzonej przez E. Borela i rozwiniętej w pełni przez H. Lebesgue'a (r. 1901). W naszym wykładzie potrzebne nam będą jednakże pewne pojęcia z dawniejszych teoryj miary, zresztą jedynie przejściowo i w roli pomocniczej.

(*) **Def. 1.** Nazwiemy *pokryciem* zbioru linjowego A każdy zbiór *otwarty* B taki, że:

$$A \subset B.$$

Pokrycie B jest *szczelne,* gdy żaden odcinek rodziny analizującej B nie jest wolny w swem wnętrzu od punktów zbioru A.

Niechaj B będzie zbiorem otwartym, ograniczonym i niepustym. Ustawmy odcinki rodziny, analizującej zbiór B w ciąg normalny [§ 9, ust. 5]:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \qquad (1) \quad \sum_i \delta_i = B.$$

Nazwijmy *długością* odcinka $[a, b]$ czy (a, b) liczbę (nieujemną) $b - a$ i określmy:

(*) **Def. 2.** Długość $B =$ dł. $B = \sum_i$ dł. δ_i.

Liczba dł. B, nawet w wypadku, gdy ciąg (1) jest nieskończony, posiada określoną w zupełności wartość, niezależną od uporządkowania ciągu (1), gdyż szereg:

$$\text{dł. } \delta_1 + \text{dł. } \delta_2 + \ldots$$

jest *bezwzględnie zbieżny*. Wynika to stąd, że gdy B (ograniczone) jest zawarte naprz. w odcinku (a, b), to

$$\sum_{i=1}^{k} \text{dł. } \delta_i \leqq b - a, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

gdyż odcinki ciągu (1) *nie krzyżują* się ze sobą (są *rozłączne*).

Dodatkowo:

(*) **Def. 2 bis:** *Długością* zbioru otwartego *pustego* niech będzie liczba *zero*.

Tw. 1. Każdy zbiór *otwarty, ograniczony* posiada *długość* ($\geqq 0$).

(*) **Lemmaty.** 1. Gdy A *otwarte* i $A \subset (ab)$, to

$$\text{dł. } A \leqq b - a = \text{dł. } (a, b).$$

Dem. Oczywiste z definicji.

2. Gdy A i B *otwarte*, $A \subset B$ i B *ograniczone*, to

$$\text{dł. } A \leqq \text{dł. } B.$$

Dem. Ustawmy odcinki, analizujące A i B w ciągi:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \tag{1}$$

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \tag{2}$$

Rozdzielmy odcinki ciągu (1) na grupy analizujące zbiory:

$$A_k = A \times \eta_k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Oczywiście: $\text{dł. } A_k \leqq \text{dł. } \eta_k$

$$\text{dł. } A = \sum_k \text{dł. } A_k \leqq \sum_k \text{dł. } \eta_k = \text{dł. } B.$$

3. Jeżeli: $A_1, A_2, \ldots$ (1)

jest ciągiem zbiorów *otwartych, ograniczonych* i szereg:

$$\text{dł. } A_1 + \text{dł. } A_2 + \ldots \tag{2}$$

jest *zbieżny* (a zatem *bezwzględnie* zbieżny, gdyż dł. $A_k \geqq 0$), to:

$$\text{dł. } \sum_i A_i \leqq \sum_i \text{dł. } A_i.$$

Dem. Niechaj A_i składa się z odcinków:

$$\delta_1^{(i)},\ \delta_2^{(i)}, \ldots \qquad (3)$$
$$i = 1, 2, \ldots,$$

zbiór zaś $B = \sum_i A_i$ z odcinków:

$$\eta_1,\ \eta_2, \ldots$$

przyczem: $\eta_k = (\alpha_k,\ \beta_k) \qquad k = 1, 2, \ldots$

Rozważmy:

$$\eta_k^n = \left[\alpha_k + \frac{\beta_k - \alpha_k}{n+2},\ \beta_k - \frac{\beta_k - \alpha_k}{n+2}\right]$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Jeżeli $\mathfrak{M}$ jest rodziną wszystkich $\delta_i^{(s)}$ $i, s = 1, 2, \ldots$, to wedle Borela–Lebesgue'a [§ 12, tw. 1], skończona ilość odcinków rodziny $\mathfrak{M}$, powiedzmy odcinki: $\delta_1,\ \delta_2 \ldots \delta_p$,

pokrywają całe η_k^n. Stąd:

$$\text{dł. } \eta_k^n = \frac{n}{n+2} \text{ dł. } \eta_k \leqq \text{dł. } \delta_1 + \ldots + \text{dł. } \delta_p$$
$$\leqq \sum_s \text{dł. } A_s \qquad n = 1, 2, \ldots$$

W granicy: $\text{dł. } \eta_k \leqq \sum_s \text{dł. } A_s$.

Taksamo: $\sum_{k|1}^{m} \text{dł. } \eta_k \leqq \sum_s \text{dł. } A_s \qquad m = 1, 2, \ldots,$

a wreszcie: $\text{dł. } \sum_s A_s \leqq \sum_s \text{dł. } A_s$ c. b. d. o.

Cor. 1. Gdyby A_s $s = 1, 2, \ldots$ były *rozłączne*, to widocznie każde η_k byłoby jednem z $\delta_i^{(s)}$ i temsamem:

$$\text{dł.} \sum_s A_s = \sum_s \text{dł.} A_s.$$

Cor. 2. Twierdzenie powyższe odnosi się w szczególności do wypadku, gdy ciąg (1) jest *skończony*, da nam ono naprz.:

$$\text{dł.}(A + B) \leqq \text{dł.} A + \text{dł.} B.$$

Uwaga. Korzystamy w dowodach z twierdzeń o szeregach *bezwzględnie* zbieżnych i pomijamy trywjalne wypadki zbiorów pustych.

2. (*) **Def. 1.** *Zawartością* zbioru A *ograniczonego* i *zamkniętego* nazwiemy *kres dolny długości* wszelkich *ograniczonych* pokryć zbioru A.

(*) **Tw. 1.** Każdy zbiór *zamknięty* i *ograniczony* posiada *zawartość* ($\geqq 0$). Piszemy: zaw. A.

Dem. Długości ograniczonych pokryć zbioru A są *nieujemne* i tworzą zbiór *ograniczony od dołu, niepusty*.

(*) **Tw. 2.** Każde pokrycie ograniczone, *szczelne* zbioru zamkniętego i ograniczonego A składa się ze *skończonej* ilości odcinków.

Dem. Niechaj takiem będzie B, zanalizowane jako:

$$A = \sum_i \delta_i \qquad (\delta_i \text{ rozłączne i właściwe } i = 1, 2, \ldots)$$

Oczywiście $A_k = \delta_k \times A$ $(k = 1, 2, \ldots)$ są *zamknięte* i z założenia *niepuste*. Niechaj:

$$p_k = \text{kr. g.} A_k \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$C = \{p_1, p_2, \ldots\},$$

Zbiór ograniczony C byłby nieskończony, o ile takim byłby ciąg

$$\delta_1, \delta_2, \ldots ,$$

posiadałby zatem choć jeden punkt skupienia p_0. Otóż p_0 leżałoby w jakiemś $\delta_m = (\alpha_m, \beta_m)$, $\alpha_m < p_0 < \beta_m$, lecz w δ_m znajduje się najwyżej jeden punkt zbioru C, co przeczy temu, że $p_0 \varepsilon D'C$.

U w a g a. Założenie, że B ograniczone nie jest istotne.

(*) **ad. Tw. 2.** Zawartość zbioru A zamkniętego i ograniczonego jest kresem dolnym długości pokryć *szczelnych i ograniczonych* zbioru A.

D e m. Pokrycia szczelne są też pokryciami, przyczem każde pokrycie zawiera w sobie pokrycie *szczelne,* więc:

kr. d. dł. pokryć szczelnych = kr. d. dł. pokryć.

(*) **Lemmaty.** 1. Gdy $A = O_m$, to zaw. $A = 0$.

D e m. Oczywiste.

2. zaw. $[a, b] = b - a$.

D e m. $[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ dla każdego $\varepsilon > 0$, zaw. $[a, b] \leqq$ dł. $(a - \varepsilon, b + \varepsilon) = b - a + 2\varepsilon$ i $\varepsilon (> 0)$ dowolne, więc zaw. $[a, b] \leqq b - a$. Lecz również $(a, b) \subset B$, gdy B jest pokryciem, więc także $b - a \leqq$ zaw. $[a, b]$.

3. Jeżeli A i B *zamknięte,* B *ograniczone* i $A \subset B$, to:

$$\text{zaw. } A \leqq \text{zaw. } B.$$

D e m. Każde pokrycie dla B jest też pokryciem dla A.

4. Jeżeli A i B *zamknięte, ograniczone* i *rozłączne* $(A \times B = 0)$, to:

$$\text{zaw. } (A + B) = \text{zaw. } A + \text{zaw. } B.$$

Dem. Niech będą $A \neq 0$ i $B \neq 0$. Odszukamy, przy danem $\varepsilon > 0$, pokrycie M dla A i pokrycie N dla B takie, by

$$0 \leqq \text{dł. } M - \text{zaw. } A < \varepsilon$$

$$0 \leqq \text{dł. } N - \text{zaw. } B < \varepsilon.$$

Odległość:

odl. $(A, B) = \rho$ musi być > 0 [§ 11, tw. 4].

Każdy punkt x zbioru A czy zbioru B przykryjmy odcinkiem $\left(x - \frac{\rho}{3}, x + \frac{\rho}{3}\right)$. Utworzą one rodziny $\mathbf{A}$ ew. $\mathbf{B}$ dla zbioru A względnie B.

Oznaczając: $M' = \Sigma \mathbf{A}$, $N' = \Sigma \mathbf{B}$, mamy *ograniczone* pokrycia: $A \subset M'$, $B \subset N'$, przyczem

$$M' \times N' = O.$$

Niechaj: $M'' = M' \times M$, $N'' = N' \times N$, wtedy $M'' \subset M$ i $N'' \subset N$, a zbiory M i N są pokryciami dla A względnie B i przytem:

$$M'' \times N'' = O.$$

$$\text{dł. } M'' \leqq \text{dł. } M, \ \text{dł. } N'' \leqq \text{dł. } N, \ \text{dł. } (M'' + N'') = \\ = \text{dł. } M'' + \text{dł. } N''$$

[ust. 1, lemmaty].

$$0 \leqq \text{dł. } (M'' + N'') - \text{zaw. } (A + B) \leqq \\ \leqq \text{zaw. } A + \varepsilon + \text{zaw. } B + \varepsilon - \text{zaw. } (A + B),$$

stąd: $|\text{zaw. } (A + B) - \text{zaw. } A - \text{zaw. } B| < 2\varepsilon$, a że $\varepsilon (> 0)$ dowolne, więc zaw. $(A + B) =$ $=$ zaw. $A +$ zaw. B. Wypadki $A = 0$ lub $B = 0$ są trywjalne.

5. Gdy A *zamknięte* i $A \subset (a, b)$, to

$$\text{zaw. } A + \text{dł. } [(a\, b,) - A] = b - a.$$

Dem. Oznaczmy: $B = (a, b) - A$ $\{B$ otwarte!$\}$. Pokryjmy zbiór A przez ograniczone, otwarte M tak, by $0 \leqq \text{dł. } M - \text{zaw. } A < \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$. Rozważmy pokrycie $M \times (a, b) = M'$ i odrzućmy z M' odcinki niepotrzebne tak, by uzyskać pokrycie szczelne $M'' \subset M$, złożone z odcinków:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_s. \qquad \text{(skończona ilość!)}$$

Niechaj: $\delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $\bar{\delta}_i = [\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, 2, \ldots s$. Reszta $(a, b) - \sum_i \bar{\delta}_i$ rozpada się na skończoną ilość odcinków:

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_t, \qquad \eta_k = (\gamma_k, \delta_k)$$
$$k = 1, 2, \ldots t,$$

przyczem $B' = \sum_k \eta_k$ jest zawarte w B.

Mamy tu:

$$\text{zaw. } A + \text{dł. } B' \geqq \sum_{i|1}^{s} \text{dł. } \delta_i - \varepsilon + \text{dł. } B' = b - a - \varepsilon$$

$$\text{dł. } B' \leqq \text{dł. } B, \quad \text{zaw. } A + \text{dł. } B \geqq b - a - \varepsilon,$$
$$\varepsilon\, (> 0) \text{ dowolne,}$$

więc:
$$\text{zaw. } A + \text{dł. } B \geqq b - a. \tag{1}$$

Z drugiej strony, niechaj B rozpada się na odcinki otwarte:

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \qquad \sigma_i = (\lambda_i, \mu_i).$$

Oznaczmy:

$$\bar{\sigma}_k{}^m = \left[\lambda_k + \frac{\mu_k - \lambda_k}{2(m+2)}, \mu_k - \frac{\mu_k - \lambda_k}{2(m+2)}\right],$$

$$B_p^m = \sum_{k|1}^{p} \bar{\sigma}_k^m, \quad M_p^m = (a, b) - B_p^m$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Otóż M_p^m rozpada się na skończoną ilość odcinków i pokrywa A wewnątrz (a, b).

$$\text{zaw. } A + \sum_{k|1}^{p} \text{dł. } \bar{\sigma}_k^m \leqq \text{dł. } M_p^m + \sum_{k|1}^{p} \text{dł. } \bar{\sigma}_k^m = b - a$$

$$\sum_{k|1}^{p} \text{dł. } \bar{\sigma}_k^m = \sum_{k|1}^{p} \text{dł. } \sigma_k - \frac{1}{m+2} \sum_{k|1}^{p} \text{dł. } \sigma_k$$

$$\geqq \sum_{k|1}^{p} \text{dł. } \sigma_k - \frac{b-a}{m+2},$$

więc: $$\text{zaw. } A + \sum_{k|1}^{p} \text{dł. } \sigma_k < b - a + \frac{b-a}{m+2}$$

$$m = 1, 2, \ldots;$$

stąd: $$\text{zaw. } A + \sum_{k|1}^{p} \text{dł. } \sigma_k \leqq b - a,$$

lecz p dowolne, więc:

$$\text{zaw. } A + \text{dł. } B \leqq b - a. \tag{2}$$

Związki (1) i (2) dają nam żądany wynik.

Uwaga. Lemmat powyższy przenosimy natychmiast na wypadek skończonej ilości zbiorów.

6. Jeżeli A *zamknięte*, B *otwarte* i *ograniczone* oraz $A \subset B$, to

$$\text{dł. } B = \text{zaw. } A + \text{dł. } (B - A).$$

Dem. Niechaj: $B \subset (a, b)$.

Otrzymamy:

$$b - a = \text{zaw.}\, A + \text{dł.}\, [(a, b) - A] \quad \text{(lemm. 5)},$$

$$b - a = \text{zaw.}\, [(a, b) - B] + \text{dł.}\, B,$$

$$\{(a, b) - B \text{ zamknięte!}\}$$

$$\text{zaw.}\, [(a, b) - B] + \text{zaw.}\, A = \text{zaw.}\, [(a, b) - B + A]$$

(lemm. 5),

$$b - a = \text{dł.}\, (B - A) + \text{zaw.}\, [(a, b) - (B - A)] =$$
$$= \text{dł.}\, (B - A) + \text{zaw.}\, [(a, b) - B + A] =$$
$$= \text{dł.}\, (B - A) + \text{zaw.}\, A + \text{zaw.}\, [(a, b) - B] =$$
$$= \text{dł.}\, (B - A) + \text{zaw.}\, A + (b - a) - \text{dł.}\, B.$$

stąd: $\text{dł.}\, B = \text{zaw.}\, A + \text{dł.}\, (B - A).$

3. Przechodzimy już teraz do miary Lebesgue'a.

(*) **Def. 1.** *Miarą zewnętrzną* zbioru linjowego, *ograniczonego* A nazwiemy *kres dolny długości* pokryć zbioru A. Oznaczamy ją: $m_e A$ lub $|A|$.

Miarą wewnętrzną zbioru *linjowego, ograniczonego* A zwiemy *kres górny zawartości zbiorów zamkniętych, zawartych* w A. Oznaczamy ją: $m_i A$.

Zbiór A linjowy, ograniczony zwiemy *mierzalnym* w sensie *Lebesgue'a* {„mierzalny (L)"}, gdy $m_i A = m_e A$. *Wspólną wartość* obu miar zwiemy wtedy *miarą* (Lebesgue'a) zbioru A i oznaczamy: $m A$.

(*) **Tw. 1.** Każdy zbiór linjowy i ograniczony posiada określoną miarę *wewnętrzną* i *zewnętrzną* i obie miary są liczbami *nieujemnemi*.

Dem. Z definicji i tw. ust. 1 i 2.

(*) **Tw. 2.** Gdy A i B ograniczone, to:

$$m_e (A + B) \leqq m_e A + m_e B.$$

Dem. Obierzmy pokrycia M i N dla A i B tak, by $0 \leqq \text{dł.}\, M - m_e A < \varepsilon$, $0 \leqq \text{dł.}\, N - m_e B < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Wtedy:

$$A + B \subset M + N,\ m_e(A + B) \leqq \text{dł.}(M + N) \leqq$$
$$\text{dł.}\, M + \text{dł.}\, N \leqq m_e A + m_e B + 2\varepsilon,$$

$\varepsilon (> 0)$ dowolne, więc: $m_e(A + B) \leqq m_e A + m_e B$.

(*) **Tw. 3.** Gdy $A \subset B$ i B ograniczone, to

$$m_e A \leqq m_e B, \quad m_i A \leqq m_i B.$$

Dem. (1) Każde pokrycie dla B jest pokryciem dla A, skąd wniosek. (2) Każdy zbiór zamknięty, zawarty w A jest też zawarty w B, skąd wniosek.

(*) **Tw. 4.** Gdy A ograniczone, to:

$$m_i A \leqq m_e A.$$

Dem. Gdy F zamknięte, zawarte w A, a G pokrywa A, to: zaw. $F \leqq$ dł. G, skąd natychmiastowy już wniosek.

(*) **Tw. 5.** Gdy A linjowe puste, to

$$m_i A = m_e A = m A = 0.$$

Dem. Każdy zbiór otwarty pokrywa A, każdy zamknięty, zawarty w A jest pusty.

(*) **Tw. 6.** (Z)! Jeżeli ciąg nieskończony, o nieskończenie wielu różnych członach:

$$A_1,\ A_2, \ldots \tag{1}$$

składa się ze zbiorów ograniczonych, jeżeli dalej $A = \sum_i A_i$ jest zbiorem ograniczonym i $\sum_i m_e A_i$ *zbieżna,* to:

$$m_e A = m_e \sum_i A_i \leqq \sum_i m_e A_i.$$

Dem. *Zasada Wyboru* pozwoli nam do każdego zbioru A_i przyłączyć pokrycie B_i tak, by

$$\text{dł. } B_i \geqq m_e A_i > \text{dł. } B_i - \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Oznaczmy: $B = \sum_i B_i$.

wtedy [ust. 1, lemmaty]:

$$m_e A \leqq \text{dł. } B \leqq \sum_i \text{dł. } B_i \leqq \sum_i m_e A_i + \varepsilon \sum_i \frac{1}{2^i}$$
$$= \sum_i m_e A_i + \varepsilon.$$

Ponieważ $\varepsilon (> 0)$ dowolne, więc stąd już wniosek.

(*) **Tw. 7.** Jeżeli $A \subset [a, b]$, $B = [a, b] - A$, to $m_i A + m_e B = b - a$ $\{$oraz $m_e A + m_i B = b - a\}$.

Dem. Obierzmy $\varepsilon > 0$ i F zawarte w A tak, by

$$0 \leqq m_i A - \text{zaw. } F < \varepsilon.$$

Niechaj: $G = (a - \varepsilon, b + \varepsilon) - F$, wtedy:

$$m_i A + m_e B - \varepsilon < \text{zaw. } F + \text{dł. } G = b - a + 2\varepsilon,$$

lecz $\varepsilon (> 0)$ dowolne, więc:

$$m_i A + m_e B \leqq b - a. \tag{1}$$

Pokryjmy teraz B przez K tak, by

$$K \subset (a - \varepsilon,\ b + \varepsilon),\ \text{dł. } K - m_e B < \varepsilon.$$

Niech będzie: $K' = (a - \varepsilon, a) + K + (b, b + \varepsilon)$ i $L = (a - \varepsilon,\ b + \varepsilon) - K'$; wtedy $L \subset [a, b]$ i zamknięte oraz zawarte w A.

$$m_i A + m_e B + 3\varepsilon \geqq \text{zaw. } L + \text{dł. } K'$$
$$= b - a + 2\varepsilon.$$

Ponieważ $\varepsilon (> 0)$ dowolne, więc:

$$m_i A + m_e B \geqq b - a. \tag{2}$$

Związki (1) i (2) dają nam twierdzenie.

4. Mamy teraz szereg fundamentalnych twierdzeń o *mierzalności*.

(*) **Tw. 1.** Miara zbioru linjowego, *ograniczonego* i *mierzalnego* (L) jest liczbą *nieujemną*. Miarą zbioru pustego jest 0.

Dem. Patrz ust. 3, tw. 1 i 5.

(*) **Tw. 2.** Jeżeli $A \subset [ab]$, mierzalne (L) i $B = [a, b] - A$, to B jest mierzalne (L) i $m B = (b - a) - m A$.

Dem.

$$m_e A + m_i B = m_i A + m_e B = b - a,$$

lecz $m_e A = m_i A$, więc $m_i B = m_e B = m B =$
$= (b - a) - m A$.

(*) **Tw. 3.** Każdy zbiór A *zamknięty ograniczony* jest mierzalny (L) i $m A =$ zaw. A.

Dem. (1) $m_e A =$ zaw. A z definicji.

(2) Jeżeli K zamknięte i zawarte w A, to zaw. $K \leqq$ zaw. A, więc zaw. $A \leqq m_i A \leqq$ zaw. A, stąd: $m_i A =$ zaw. $A = m_e A = m A$.

(*) **Tw. 4.** Każdy zbiór A *otwarty ograniczony* jest mierzalny (L) i

$$m A = \text{dł. } A.$$

Dem. Niechaj: $A \subset [a, b]$ i $B = [a, b] - A$. Ponieważ B jako zamknięte jest mierzalne, więc A jako uzupełnienie jest też mierzalne (L). [tw. 2].

Zbiór A jest sam dla siebie pokryciem, więc:

$m_e A \leqq$ dł. $A \leqq m_e A$, {A zawarte w każ-
skąd: $m A = m_e A =$ dł. A. dem pokryciu!}

Cor. od tw. 3 i 4: Odcinki (a, b) i $[a, b]$ są mierzalne (L) i

$$m(a, b) = m[a, b] = b - a.$$

Dem. $m(a, b) = \text{dł.}(a, b) = b - a.$

$$m[a, b] = b - a - m\{[a, b] - [a, b]\} =$$
$$= b - a - 0 = b - a.$$

(*) **Tw. 5.** [**Kryterjum Mierzalności** de la Vallée Poussina]. Warunek *konieczny* i *dostateczny,* by zbiór linjowy i ograniczony A był *mierzalny* (L) brzmi: *dla każdego* ε *dodatniego istnieje rozkład:* (1) $A = F + K$, *gdzie*

$F \times K = 0$, F *jest zamknięte* i $m_e K < \varepsilon$.

Dem. 1. Konieczność. Obierzmy $F \subset A$ zamknięte i G, pokrycie dla A otwarte tak, by:

$$m A = m_i A < \text{zaw.}\, F + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$m A = m_e A > \text{dł.}\, G - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech będzie $K = A - F$. Wtedy: $K \subseteq G - F$,

$$m_e K \leqq m_e (G - F) \leqq \text{dł.}\,(G - F) =$$
$$= \text{dł.}\, G - \text{zaw.}\, F < \varepsilon,$$

2. Dostateczność. Jeżeli rozkład (1) zawsze istnieje, to

$$m_e A \leqq m_e F + m_e K < \text{zaw.}\, F + \varepsilon \leqq m_i A + \varepsilon.$$

stąd: $m_i A \leqq m_e A \leqq m_i A,$

zatem: $m_i A = m_e A = m A.$

(*) **Tw. 6.** Jeżeli A i B są *mierzalne* (L), to $A + B$ jest również *mierzalne* (L).

Dem. Niech będzie: $\varepsilon > 0$ i $A = F_1 + K_1$, $B = F_2 + K_2$, $F_1 \times K_1 = 0$, $F_2 \times K_2 = 0$,

F_1, F_2 zamknięte, $m_e K_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, $m_e K_2 < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$F = F_1 + F_2 \text{ (zamknięte)}$$

i $$K = (K_1 - F_2 \times K_1) + (K_2 - F_1 \times K_2).$$

Mamy tu:

$$A + B = F_1 + F_2 + K_1 + K_2 =$$
$$= F + (K_1 - F_2 \times K_1) + (K_2 - F_1 \times K_2)$$
$$= F + K, \; F \times K = 0,$$
$$m_e K \leqq m_e (K_1 + K_2) \leqq m_e K_1 + m_e K_2 < \varepsilon,$$

co wedle *Kryterjum* dowodzi twierdzenia.

U w a g a. Uogólniamy natychmiast twierdzenie na wypadek skończonej ilości zbiorów.

Cor. ad. tw. 6. Jeżeli jeszcze A i B *rozłączne*, to $$m(A + B) = mA + mB.$$

D e m.

$$A + B = F + K, \; m(A + B) =$$
$$= m_e(A + B) \geqq m_e F = \text{zaw. } F =$$
$$= \text{zaw. } F_1 + \text{zaw. } F_2$$

[ust. 2, lemmat 4, ust. 3, tw. 3].

Lecz $$A = F_1 + K_1, \; mA \leqq \text{zaw. } F_1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$B = F_2 + K_2, \; mB \leqq \text{zaw. } F_2 + \frac{\varepsilon}{2},$$

więc $$m(A + B) \geqq mA + mB - \varepsilon,$$

stąd: $$m(A + B) \geqq mA + mB, \tag{1}$$

lecz również:

$$m(A + B) = m_e(A + B) \leqq m_e A + m_e B =$$
$$= mA + mB. \tag{2}$$

Związki (1) i (2) dają twierdzenie.

(*) **Tw. 7.** Jeżeli A i B są *mierzalne* (L), to $A \times B$ *mierzalne* (L).

D e m. Niechaj $A \subset [a, b]$, $B \subset [a, b]$,

$$A' = [a, b] - A, \; B' = [a, b] - B.$$

Wtedy: A', B' i $A'+B'$ *mierzalne* wedle tw. 2 i 6, więc: $A \times B = [a, b] - (A' + B')$ również mierzalne (L) [tw. 2].

Uwaga. Twierdzenie będzie oczywiście słuszne dla każdej skończonej ilości zbiorów mierzalnych.

(*) **Tw. 8.** Jeżeli A i B mierzalne (L), to $A - B$ również *mierzalne* (L).

Dem. Niechaj $A \subset [a, b]$, $B \subset [a, b]$,

$$A - B = A \times [[a, b] - B],$$

lecz: $[a, b] - B$ mierzalne, więc $A \times [[a, b] - B]$ również mierzalne.

(*) **Tw. 9.** (Z) Jeżeli:

$$A_1, A_2, \ldots$$

jest ciągiem nieskończonym zbiorów *mierzalnych* (L), posiadającym nieskończenie wiele wyrazów różnych i $A = \sum_n A_n$ ograniczone, to A jest mierzalne (L).

Dem. Kładąc: $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 - A_1 \times A_2$, $B_3 = A_3 - (A_1 + A_2) \times A_3$, i t. d. widzimy, że

(1) B_n są mierzalne, (2) $\sum_n B_n = A$,

(3) $B_1, B_2, \ldots$ *rozłączne.*

Zasada Wyboru pozwoli nam wybrać po jednym rozkładzie, dla każdego B_n i $\varepsilon > 0$ takim, że:

$$B_n = F_n + K_n, \quad F_n \times K_n = 0,$$

$$F_n \text{ zamknięte}, \quad m_e K_n < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Ponieważ: $F_1 + F_2 + \ldots + F_p \subset A$

$$m F_1 + \ldots + m F_p =$$
$$= m_e (F_1 + \ldots + F_p) \leqq m_e A,$$

więc szereg:

$$m F_1 + m F_2 + \ldots \tag{1}$$

jest bezwzględnie zbieżny. Obierzmy p tak duże, by $\sum\limits_{k|p+1}^{\infty} m F_k < \frac{\varepsilon}{2}$ i niech będzie

$$F^{(p)} = F_1 + \ldots + F_p, \; K = A - F^{(p)}.$$

Zbiór K jest zawarty w sumie, złożonej ze zbiorów: $K_1, K_2, \ldots ; \; F_{p+1}, F_{p+2}, \ldots$
Ułożymy je w ciąg:

$$K_1, \; F_{p+1}, \; K_2, \; F_{p+2}, \; \ldots \tag{2}$$

Suma miar zewnętrznych wyrazów ciągu (2) jest mniejsza niż:

$$\sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

zatem:

$$A = F^{(p)} + K, \; F^{(p)} \times K = 0, \; F^{(p)} \text{ zamknięte},$$
$$m_c K < \varepsilon.$$

Ponieważ $\varepsilon (> 0)$ dowolne, więc A *mierzalne* (L).

(*) **ad. Tw. 9.** (Z) Jeżeli jeszcze zbiory A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ są *rozłączne,* to

$$m A = m \sum_n A_n = \sum_n m A_n.$$

Dem. Mamy wtedy: $B_n = A_n \qquad n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_n m F_n \leqq \sum_n m A_n \leqq \sum_n m F_n + \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \sum_n m F_n + \varepsilon$$

$$0 \leqq m A - m F^{(p)} = m K < \varepsilon, \qquad [\text{tw. } 8]$$

$$\sum_n m F_n - m F^{(p)} = \sum_{n|p+1}^{\infty} m F_n < \varepsilon,$$

zatem: $$\left|\sum_n m A_n - m A\right| < 3\varepsilon.$$

Lecz $\varepsilon (> 0)$ dowolne, więc $A = \sum_n m A_n$.

(*) **Tw. 10.** (Z) Jeżeli ciąg: $A_1, A_2, \ldots$ składa się z nieskończenie wielu różnych zbiorów *mierzalnych* (L), to:

$$A = \prod_n A_n \text{ jest } \textit{mierzalne } (L).$$

Dem. Niechaj: $A_1 \subset [a, b]$, połóżmy $B_1 = A_1$, $B_n = A_1 \times A_n$ dla $n = 2, 3, \ldots$

Wtedy: $A = \prod_n B_n$, B_n *mierzalne* i $A \subset [a, b]$.

Oznaczmy: $C_n = [a, b] - B_n \qquad n = 1, 2, \ldots,$

wtedy: C_n mierzalne, $\sum_n C_n = C$ ograniczona, C mierzalne (tw. 9)

i $$A = [a, b] - \sum_n C_n = [a, b] - C,$$

zatem A mierzalne.

(*) **Tw. 11.** (Z) Jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ mierzalne (L), $A = \sum_n A_n$ ograniczone i $A_1, A_2, \ldots$ jest ciągiem *wstępującym*, to:

$$m A = \lim_{n|\infty} m A_n.$$

Dem. Położymy:

$$A = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \ldots$$

$$m A = \lim_{n|\infty} [m A_1 + m(A_2 - A_1) + \ldots + m(A_n - A_{n-1})]$$

$$= \lim_{n|\infty} m[A_1 + (A_2 - A_1) + \ldots + (A_n - A_{n-1})]$$

$$= \lim_{n|\infty} m A_n, \text{ gdyż } A_1 \subset A_2, A_2 \subset A_3, \ldots$$

(*) **Tw. 12.** (Z) Jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ jest ciągiem *zstępującym* zbiorów *mierzalnych* (L), to $A = \prod_n A_n$ jest mierzalne (L) i $m A = \lim_{n \infty} m A_n$.

Dem.

Jeżeli $A_1 \subset [a, b]$, $B_n = [a, b] - A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $B = \sum_n B_n$, to ciąg $B_1, B_2, \ldots$ jest wstępujący, $\sum B_n = B$ ograniczona i B_n mierzalne.

Prócz tego:

$$mA_n = [a, b] - mB_n, \quad A = [a, b] - B$$

$$mA = (b - a) - mB = (b - a) - \lim_{n|\infty} mB_n =$$

$$= \lim_{n|\infty} mA_n. \qquad \text{c. b. d. o.}$$

(*) **Tw. 13.** (Z) Jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ są *mierzalne* i $\sum_n A_n$ *ograniczona,* to zbiory

$$H = \lim_{n|\infty} \inf A_n, \quad K = \lim_{n|\infty} \sup A_n$$

są *mierzalne* (L).

Dem. Wedle § 9, ust. 2 zbiory H i K powstają z iloczynów i sum zbiorów $A_1, A_2, \ldots$, zatem wystarczy stosować twierdzenie 9 i 10, aby uzyskać żądany wynik.

Uwaga. W twierdzeniach 9—13 powoływano się na *zasadę Zermeli.* Możnaby ją ominąć, gdybyśmy w danym wypadku umieli *efektywnie* przeprowadzić rozkład zbioru A na sumę $A = F + K$, $F \times K = 0$, F zamknięte i $m_e K < \varepsilon$ i to dla każdego ε dodatniego. Uda się to zawsze w dwu ważnych wypadkach:

1 wypadek. Zbiór A jest *ograniczony* i *zamknięty.* Kładziemy wtedy: $A = A + O_m$.

2. wypadek. A jest *ograniczone* i *otwarte.*

Jeżeli A rozpada się na odcinki:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \qquad \delta_p. \qquad \delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$$

$$i = 1, 2, \ldots p,$$

to kładziemy: $F = \overline{\delta}_1 + \ldots + \overline{\delta}_p$, gdzie

$$\overline{\delta}_i = \left[\alpha_i + \frac{\beta_i - \alpha_i}{n+2},\ \beta_i - \frac{\beta_i - \alpha_i}{n+2}\right],$$

przyczem wybrano n możliwie *najmniejsze* tak, by

$$\sum_{i|1}^{p} \frac{\beta_i - \alpha_i}{n+2} = \frac{\text{dł. } A}{n+2} < \varepsilon.$$

Jeżeli $A = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \ldots$,
to najpierw bierzemy najmniejsze p takie, by

$$\sum_{i|p+1}^{\infty} \text{dł. } \delta_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

a następnie najmniejsze n takie, by $\frac{\text{dł. } A}{n+2} < \frac{\varepsilon}{2}$,

przyczem kładziemy $F = \sum_{k|1}^{p} \overline{\delta}_k$, jak poprzednio.

(*) **Tw. 14.** Jeżeli A jest zapasem ciągu punktów

$$p_1,\ p_2,\ \ldots \qquad (1)$$

i zapas ten jest *ograniczony,* to A jest *mierzalne* (L) i $mA = 0$.

Dem. Możemy zauważyć, że:

$$A = \sum_{n} \{p_n\}$$

przyczem: $m\{p_n\} = m[p_n, p_n] = p_n - p_n = 0$.

Stosujemy obecnie tw. 6 lub tw. 9, otrzymując:

$$mA = \sum_{n} m\{p_n\} = 0,$$

przyczem możemy oczywiście założyć, że punkty ciągu (1) są *różne* między sobą. Ze względu na to, że zbiory $\{p_n\}$ jednostkowe są *zamknięte,* nie potrzebujemy powoływać się na zasadę Zermeli. Bezpośrednio moglibyśmy też postąpić w sposób

następujący: punkt p_n pokrywamy odcinkiem

$$\delta_n = \left(p_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\ p_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right),$$

odcinki δ_n $n = 1, 2, \ldots$ utworzą rodzinę, której suma $B = \sum_n \delta_n$ będzie ograniczonem pokryciem dla A.

Otóż: $\quad$ dł. $B \leqq \sum_n$ dł. $\delta_n \leqq \varepsilon,\ \varepsilon > 0.$

Ponieważ $\varepsilon (> 0)$ dowolne, więc:

$$0 \leqq m_i A \leqq m_e A \leqq \varepsilon,\ m_i A = m_e A = m A = 0.$$

Uwaga. Zbiór A będący zapasem ciągu elementów:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots.$$

nazywa ogólna teorja mnogości *przeliczalnym*, o ile jest on nieskończony, w ogólnym zaś wypadku *najwyżej przeliczalnym* (przeliczalnym lub skończonym).

Ćwiczenia i Uzupełnienia.

1. Jeżeli zbiór A jest *nieograniczony*, lecz (1) dla każdego n zbiór

$$A_n = A \times [-n, +n] \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

jest *mierzalny* (L) i (2) istnieje granica:

$$\lim_{n|\infty} m A_n = k,$$

to nazywamy zbiór A *mierzalnym* (L) (w sensie uogólnionym) i k jego *miarą*.

Które z twierdzeń o mierzalności (tw. 1—14) zachowują się i w jakiem brzmieniu, gdy odrzucimy w ich założeniach warunek ograniczoności zbiorów tam występujących, a mierzalność rozumieć będziemy w sensie uogólnionym?

2.[1] Nazwijmy punkt x (należący do A lub nie) *punktem mierzalności* zbioru A, gdy znajdzie się takie $\delta > 0$, że byleby $s < x < t$ i $0 < t - s < \delta$, to już $A \times (s, t)$ będzie *mierzalne* (L). W przeciwnym wypadku nazwiemy punkt x *punktem niemierzalności* zbioru A.

Okazać, że

(α) Jeżeli A jest zbiorem *mierzalnym* (L) (ograniczonym lub nie), to każda liczba x jest punktem mierzalności dla A.

(β) Udowodnić twierdzenie odwrotne do (α).

(γ) Okazać, że zbiór punktów *mierzalności* zbioru A jest zawsze *doskonały*.

§ 14. Ogólny Problem Miary.

1. Def. Zbiory linjowe A i B nazwiemy przystającemi, gdy B powstaje z A przez zastąpienie każdego punktu x zbioru A punktem $x' = x + k$, gdzie k jest stałą liczbą rzeczywistą.

Jeżeli poddamy całą prostą liczbową q przekształceniu:

$$x' = x + k \quad (1) \quad (k \text{ stałe}),$$

zbiory przechodzą w *przystające*. Przytem, jak to z łatwością zauważy czytelnik, wszelkie dotychczas określone własności zbiorów zachowują się bez zmiany. A więc, gdy naprz. zbiór A był czy ograniczony, czy zamknięty, gęsty w sobie i t. d. to jego *obraz* B, powstały przez wykonanie przekształcenia (1), będzie również ograniczony, zamknięty, gęsty w sobie i t. d. Wszystkie bowiem

[1] p. W. Wilkosz. Sugli insiemi non misurabili (L). Fund. Math. t. 1.

cechy zbiorów określaliśmy przy pomocy, bądź to *otoczeń*, bądź *odległości*. Otóż:

(1) *otoczenia punktu* przechodzą dzięki przekształceniu (1) w *otoczenia* jego *obrazu;* (2) *odległości* punktów nie ulegają zmianie przy zastosowaniu (1).

2. Dotychczas nie wiemy, czy istnieją zbiory ograniczone *niemierzalne* (L). Zanim na to pytanie odpowiemy, postawimy problem bardzo ogólny:

Problem Miary Uniwersalnej. Zapytajmy się czy można *każdemu* zbiorowi A *ograniczonemu* przypisać w określony sposób pewną liczbę: mA tak, by następujące własności stale tu zachodziły:

I. Miara mA jest liczbą *nieujemną.*

II. Istnieją zbiory A (ograniczone), dla których $mA > 0$.

III. Jeżeli A i B są ograniczone i *przystające,* to: $mA = mB$.

IV. Jeżeli *suma* ciągu *rozłącznych* zbiorów *ograniczonych:*

$$A_1, \; A_2, \; \ldots\ldots$$

jest *ograniczona,* to

$$m \sum_i A_i = \sum_i m A_i.$$

Własności powyższe posiada *miara Lebesgue'a,* lecz jedynie w obrębie zbiorów mierzalnych (L), a jeszcze nie wiemy, czy są to *wszystkie* zbiory *ograniczone.*

Gdyby tego rodzaju „mierzenie" o własnościach I—IV. rzeczywiście udało się określić, zauważmy, że pociągnęłoby to za sobą następujące konsekwencje:

1. Jeżeli $A \subset B$ i B ograniczone, to
$$mA \leqq mB.$$
Dem. $mB = mA + m(B - A) \geqq mA$, gdyż
$$m(B - A) \geqq 0.$$

2. Musi istnieć odcinek $[a, b]$ taki, że
$$m[a, b] > 0.$$
Dem. Jeżeli bowiem $mA > 0$, A ograniczone i $A \subset [a, b]$, to $0 < mA \leqq m[a, b]$.

3. Jeżeli p jest punktem, to $m\{p\} = 0$.

Dem. Jeżeli p i q są punktami, to $\{p\}$ przystaje do $\{q\}$, więc $m\{p\} = m\{q\}$.

Jeśliby $m\{p\} = k > 0$, to $m\left\{\frac{1}{n}\right\} = k > 0$,
$$n = 1, 2, \ldots$$
zatem:
$$m \sum_n \left\{\frac{1}{n}\right\} = \sum_n m\left\{\frac{1}{n}\right\} = \sum_n k,$$
co niemożliwe, bo szereg $k + k + \ldots$ nie byłby zbieżny.

4. Jeżeli a i b są punktami i $a < b$, to
$$m[a, b] = m[a, b) = m(a, b] = m(a, b).$$
Dem. $m[a, b] = m(a, b) + m\{a\} + m\{b\}$
$= m(a, b)$ i t. d.

5. Jeżeli $a < b$, to $m[a, b] > 0$.

Dem. Niechaj $[\alpha, \beta]$ będzie odcinkiem o mierze *dodatniej* (p. 2). Wtedy:
$$m\left[\alpha, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n}\right] = \frac{1}{n} m[\alpha, \beta] > 0,$$
$$n = 1, 2, \ldots$$
gdyż
$$m[\alpha, \beta] = m\left[\alpha, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n}\right) +$$

$$+ m\left[\alpha + \frac{\beta - \alpha}{n}, \alpha + 2.\frac{\beta - \alpha}{n}\right) +$$

$$+ \ldots + m\left[\alpha + \frac{n-1}{n}(\beta - \alpha), \beta\right) + m\{\beta\},$$

a występujące tu odcinki przystają do siebie.

Otóż, biorąc n dostatecznie duże dostaniemy

$$a + \frac{\beta - \alpha}{n} < b, \left[a, a + \frac{\beta - \alpha}{n}\right] \subset [a, b]$$

i $\left[a, a + \frac{\beta - \alpha}{n}\right]$ przystające do $\left[\alpha, \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n}\right]$, zatem $m[a, b] > 0$.

3. Pokażemy teraz, niestety z koniecznem prawdopodobnie powołaniem się na *Zasadę Zermeli* względnie *Wyboru*, że problem uniwersalnej miary linjowej nie posiada pozytywnej odpowiedzi. Udowodnimy, ad absurdum, konieczność istnienia zbioru *niemierzalnego* w obrębie każdej, przypuszczalnie uniwersalnej, teorji miary, spełniającej wymaganie I—IV. Postąpimy wraz z G. Vitalim, w następujący sposób:

(1) Podzielimy wszystkie liczby rzeczywiste na *klasy* wedle zasady, że do tej samej klasy należą i tylko takie liczby x i y, których różnica $x - y$ jest liczbą *wymierną*. Dla danej liczby x, klasą do której ona należy będzie ogół liczb typu $x + p$, gdzie p przybiera wszystkie wartości wymierne.

Jedną z tych klas jest $r =$ klasa wszystkich liczb wymiernych. Jeżeli A i B są takiemi klasami, to natychmiast widoczne, że albo $A = B$, albo $A \times B = 0$. Rodzina $\mathfrak{A}$ wszystkich takich klas składa się ze zbiorów *rozłącznych* i niepu-

stych. Wszystkie klasy są między sobą *przystające*, gdyż jeżeli A jest taką i $x \varepsilon A$, to A składa się z liczb typu $x+p$, gdzie p wymierne, zatem powstaje z klasy $r =$ ogół wymiernych przez przekształcenie: $x' = x + p$, (p wymierne). Ponieważ r jest *wszędziegęste* w każdym odcinku zamkniętym [p. § 7, ust. 1], więc każda klasa jest również *wszędziegęsta* w każdym odcinku zamkniętym.

(2) Zasada wyboru pozwoli nam z każdej klasy A wybrać element $a = f(A)$ leżący w odcinku $[0, \frac{1}{2}]$.

Tak wybrane elementy utworzą zbiór naprz. M.

Niechaj B oznacza zbiór wszelkich liczb wymiernych odcinka [0, 1]. Zbiór ten można ustawić w ciąg *nieskończony*, o wyrazach *różnych* między sobą[1]:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

Niechaj B_n oznacza zbiór liczb:

$$p_n + \zeta,$$

gdzie ζ przebiega wszelkie elementy zbioru M. Powstaną zbiory:

$$B_1, B_2, B_3, \ldots$$

oczywiście *rozłączne* i *przystające*, przyczem:

$$L = \sum_n B_n \subset [0, 2], \text{ więc } L \textit{ ograniczone.}$$

(3) Twierdzimy, że $[\frac{1}{2}, 1] \subset L$. Rzeczywiście, gdy $z \varepsilon [\frac{1}{2}, 1]$, to z należy do pewnej klasy, powiedzmy A, rodziny $\mathfrak{A}$; klasa ta posiada swego przedstawiciela $\zeta = f(A)$ w odcinku $[0, \frac{1}{2}]$, który należy do M, lecz:

$$0 \leqq z - \zeta < 1,$$

przytem $z - \zeta$ *wymierne*, gdyż z i ζ należą do

[1] Twierdzenie to udowodnimy nieco później [§ 16].

jednej klasy, zatem dla pewnego n będzie $z - \zeta = p_n$ i temsamem: $z = \zeta + p_n \varepsilon B_n \subset L$.

Stąd wynika (p. ust. 2), że

$$m L \geqq m [\tfrac{1}{2}, 1] > 0.$$

Lecz, skoro L ograniczone, to

$$m L = \sum_{(n)} m B_n > 0,$$

co niemożliwe, bo gdyby $k = m(B_1) = (B_2) = \ldots > 0$, to szereg: $k + k + k \ldots$ byłby rozbieżny, a gdy $k = 0$, to byłoby $m L = 0$.

Zatem żaden ze zbiorów B_n $(n = 1, 2 \ldots)$ *nie może posiadać miary.*

W szczególności:

Tw. (Z) *Istnieją zbiory ograniczone, niemierzalne w sensie Lebesgue'a.*

Uwagi. 1. Można okazać, że problem *uniwersalnej miary linjowej posiada pozytywne* rozwiązanie, jeżeli w żądaniu IV ograniczymy się tylko do ciągów *skończonych.* Wykazał to St. Banach [p. Fundamenta Mathematicae, t. IV, str. 7 i nast.].

2. Można okazać, że wewnątrz każdego zbioru o mierze dodatniej Lebesgue'a znajduje się podzbiór niemierzalny (L), o ile choć jeden zbiór niemierzalny (L) wogóle istnieje, a więc zawsze, o ile przyjmiemy zasadę Zermeli.[1]

3. Wskazane powyżej trudności teorji miary przekonywują nas dosadnie, jak dalece jest niebezpiecznem uważać zwyczajem starożytnych (naprz. Euklidesa), sprawę możności mierzenia za rzecz oczywistą.

---

[1] p. moją pracę z Fund. Math. t. 1, cyt. wyż.

4. Aksjomatycznie zdefinjował miarę Lebesgue'a W. Sierpiński [p. Bull. Acad. Sc. Cracovie. 1918].

§ 15. Twierdzenia o pokryciu Vitaliego i Rademachera.

1. Niechaj dany będzie zbiór linjowy A. Przypuśćmy, że do każdego punktu x tego zbioru przyłączono ciąg przedziałów otwartych lub zamkniętych

$$\delta_i(x) = (\alpha_i(x), \beta_i(x)) \text{ lub } \delta_i(x) = [\alpha_i(x), \beta_i(x)]$$

$$\alpha_i(x) \leqq x \leqq \beta_i(x), \ \alpha_i(x) < \beta_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

takich, że $\lim\limits_{i \uparrow \infty} \text{dł.}\, \delta_i(x) = 0.$

Ogół odcinków $\delta_i(x)$ dla wszelkich i całkowitych i wszelkich x ze zbioru A niechaj tworzy rodzinę $\mathbf{M}$. Każdą taką rodzinę nazwiemy *rodziną typu* (V), *pokrywającą* zbiór (A).

Twierdzenie Vitaliego (Z). Jeżeli $\mathbf{M}$ jest rodziną typu (V), pokrywającą zbiór A linjowy ograniczony i nie pusty, to znajdzie się w rodzinie $\mathbf{M}$ ciąg (skończony lub nie)

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \tag{1}$$

odcinków *rozłącznych* o tej własności, że

$$m\left[A - \sum_n \delta_i\right] = 0.$$

Innemi słowy: ciąg (1) odcinków rodziny $\mathbf{M}$ „pokryje A aż do miary zero“ lub „*prawie* pokryje A“,[1] przyczem odcinki ciągu nie będą się krzyżowały ze sobą.

[1] Będziemy stale mówili, że jakaś własność zachodzi „prawie wszędzie w zbiorze A“, gdy punkty zbioru A, dla których ona nie zachodzi, tworzą zbiór o mierze zero (ew. pusty).

Dem. Podamy dowód St. Banacha [Fund. Math. t. V]. Założymy najpierw, że odcinki rodziny **M** są *zamknięte*.

1. Możemy założyć z góry, bez uszczerbku dla ogólności twierdzenia, że długości odcinków rodziny **M** tworzą zbiór ograniczony. Wystarcza bowiem zamknąć A w odcinku $[a, b]$ i z rodziny **M** odrzucić wszystkie te odcinki, które występują poza $[a, b]$, pozostałe utworzą analogiczną rodzinę typu (V), pokrywającą (A), gdyż w ten sposób z ciągu:

$$\delta_1(x),\ \delta_2(x),\ \ldots$$

odcinków, przywiązanych do punktu x, odrzucamy jedynie skończoną ilość wyrazów początkowych.

2. Niechaj M_1 będzie kresem górnym długości odcinków rodziny **M**. Odszukajmy i wybierzmy z rodziny odcinek: $\delta_1 = \delta_{s_1}(p_1)$ tak, by

$$\frac{M_1}{\text{dł. } \delta_1} < \frac{3}{2}.$$

Wtedy, dla każdego wskaźnika i oraz punktu p w zbiorze A, będzie:

$$\frac{\text{dł. } \delta_i(p)}{\text{dł. } \delta_1} < \frac{3}{2}.$$

Odrzućmy teraz z rodziny **M** wszystkie odcinki, które krzyżują się z odcinkiem δ_1. Pozostanie nam rodzina $\mathbf{M}_1$ typu (V), pokrywająca $A - \delta_1 = A_1$.

3. Niechaj M_2 będzie kresem górnym długości odcinków w $\mathbf{M}_1$. Obierzmy w tej nowej rodzinie odcinek

$$\delta_2 = \delta_{s_2}(p_2)$$

taki, że

$$\frac{M_2}{\text{dł. } \delta_2} < \frac{3}{2}.$$

Dla każdego p w A i każdego wskaźnika i będzie wtedy: $\frac{\text{dł. } \delta_i(p)}{\text{dł. } \delta_2} < \frac{3}{2}$, o ile $\delta_i(p) \times \delta_1 = 0$.

4. Jeżeli, postępując w ten sposób dalej, otrzymano już: $\delta_n = \delta_{s_n}(p_n)$, $\mathbf{M}_{n-1}$, M_n, A_n, to:

(1) $\frac{M_n}{\text{dł. } \delta_n} < \frac{3}{2}$, $\delta_1, \delta_2, \ldots \quad \delta_n$ *rozłączne,*

(2) $\delta_i(p) \times \sum_{k|1}^{n-1} \delta_k = 0$ pociąga, że $\frac{\text{dł. } \delta_i(p)}{\text{dł. } \delta_n} < \frac{3}{2}$

[wtedy $p \varepsilon A_n$, $i = 1, 2, \ldots$].

5. W tworzeniu δ_k możemy zatrzymać się jedynie w wypadku, gdyby odcinki rozłączne:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \quad \delta_n$$

pokryły *cały* zbiór A, lecz wtedy dowód byłby skończony. Przypuszczamy jednak, że ciąg, tak utworzonych odcinków rozłącznych:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \quad \left\{\begin{matrix} \delta_n = \delta_{s_n}(p_n) = [\alpha_n, \beta_n] \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}\right\},$$

jest n i e s k o ń c z o n y. Twierdzimy, że czyni on zadość wymaganiom twierdzenia.

Zauważmy jeszcze, że szereg:

$$\text{dł. } \delta_1 + \text{dł. } \delta_2 + \ldots$$

będzie *zbieżny,* gdyż odcinki $\delta_1, \delta_2, \ldots$ są rozłączne i leżą wspólnie w odcinku, ograniczającym A i $\Sigma \mathbf{M}$, naprz.: [kr. d. $A - M_1$, kr. g. $A + M_1$], zatem jeszcze: $\lim_{n|\infty} \text{dł. } \delta_n = 0$.

6. Celem przeprowadzenia dowodu postąpmy w następujący sposób.

Niechaj η_n oznacza odcinek zamknięty:
$[\alpha_n - \frac{3}{2}\,\text{dł.}\,\delta_n,\ \beta_n + \frac{3}{2}\,\text{dł.}\,\delta_n]$, $\text{dł.}\,\eta_n = 4\,\text{dł.}\,\delta_n$.
Oznaczmy:

$$B_n = \sum_{k|1}^{n-1} \delta_k + \sum_{k|n}^{\infty} \eta_k$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Stwierdzimy teraz, że dla każdego $n = 1, 2, 3, \ldots$ zbiór B_n przykrywa już całe A:

$$A \subset B_n. \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Przypuśćmy, że tak nie jest i że punkt jakiś p nie należy do danego B_n. Możemy założyć $n > 1$, gdyż $p \sim \varepsilon\, B_n$ pociąga $p \sim \varepsilon\, B_{n+1}$.

Zbiór $\sum_{k|1}^{n-1} \delta_i$ jest zamknięty, więc:

$$\text{odl.}\left\{\sum_{k|1}^{n-1} \delta_i, p\right\} = \rho > 0. \qquad [\S\ 12,\ \text{tw. } 3].$$

Ponieważ $\lim_{i|\infty} \text{dł.}\,\delta_i(p) = 0$, więc dla pewnego s

$$\delta_s(p) \times \sum_{k|1}^{n-1} \delta_k < \rho \ \text{ i } \ \delta_s(p) \times \sum_{k|1}^{n-1} \delta_k = 0,$$

co pociąga, że

$$\text{dł.}\,\delta_s(p) < \tfrac{3}{2}\,\text{dł.}\,\delta_n \qquad [\text{ust. } 4 \text{ dowodu}].$$

Związek: $\delta_s(p) \times \sum_{k|1}^{t} \delta_k = 0$ nie może zachodzić dla każdego $t \geqq n$, gdyż toby pociągało, że stale $\text{dł.}\,\delta_s(p) < \frac{3}{2}\,\text{dł.}\,\delta_t$, atoli $\lim_{t|\infty} \text{dł.}\,\delta_t = 0$.

Obierzmy najmniejsze t takie, by jeszcze:

$$\delta_s(p) \times \sum_{k|1}^{t-1} \delta_k = 0, \qquad (1),$$

lecz już:

$$\delta_s(p) \times \sum_{k|1}^{t} \delta_k \neq 0.$$

Pociąga to, że: $\delta_s(p) \times \delta_t = \delta_s(p) \times \delta_{s_t}(p_t) \neq 0$.
Lecz wtedy: $\text{dł.}\,\delta_s(p) < \frac{3}{2}\,\text{dł.}\,\delta_t$, dzięki (1),

$$\eta_t = [\alpha_t - \tfrac{3}{2}\,\text{dł.}\,\delta_t,\ \beta_t + \tfrac{3}{2}\,\delta_t],$$

więc $\delta_s(p) \subset \eta_t$ i $p \varepsilon \eta_t$ oraz $p \varepsilon B_t$.
Tembardziej: $p \varepsilon B_n$. $\{n < t!\}$.

7. Dowód kończymy teraz uwagą, że niepokryta ewentualnie przez $\sum\limits_n \delta_n$ część zbioru A, musi leżeć we wspólnej części ciągu zstępującego zbiorów:

$$\sum_{k|2}^{\infty} \eta_k,\ \sum_{k|3}^{\infty} \eta_k,\ \ldots,$$

lecz:

$$m \sum_{k|p}^{\infty} \eta_k \leqq 4\, m \sum_{k|p}^{\infty} \delta_k \leqq 4 \sum_{k|p}^{\infty} m\, \delta_k$$

zdąża do zera, więc:
skoro

$$m_e \left\{ A - \sum_n \delta_n \right\} \leqq \sum_{k|p}^{\infty} \eta_p,$$

$$p = 2, 3, \ldots$$

zatem

$$m_e \left\{ A - \sum_n \delta_n \right\} = 0 = m \left\{ A - \sum_n \delta_n \right\}.$$

c. b. d. o.

8. Jeżeli teraz przyjmiemy, że odcinki rodziny **M** nie były wszystkie zamknięte lub nawet wszystkie były otwarte, to domykając je, utworzymy z domkniętych rodzinę **M**′ typu (V), pokrywającą A. Z tej rodziny wybierzemy ciąg:

$$\overline{\delta}_1,\ \overline{\delta}_2,\ \ldots$$

odcinków rozłącznych, „prawie“ pokrywających A, przyczem $\overline{\delta}_1$ $\overline{\delta}_2$, . . . niech będą domknięciem (rozłącznych):

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots$$

Wtedy niepokrytemi przez $\Sigma \delta_i$ mogą być jeszcze ewentualnie końce odcinków $\delta_1, \delta_2 \ldots$, o ile do A należą, ale te tworzą zbiór o mierze zero, gdyż dadzą się ustawić łatwo w ciąg ograniczony [§ 3, tw. 13].

Cor. Obrawszy dowolnie $\varepsilon > 0$ możemy jeszcze zażądać, by

$$0 \leqq \sum_n \text{dł.}\, \delta_n - m_e A < \varepsilon.$$

Wystarczy w tym celu wyszukać pokrycie B dla zbioru A tak, by:

$$0 \leqq \text{dł.}\, B - m_e A < \varepsilon$$

i z rodziny $\mathbf{M}$ odrzucić wszystkie te odcinki, które posiadają punkty leżące poza B. Pozostanie nam rodzina $\mathbf{M}'$ typu V, pokrywająca A, z której dokonamy wyboru. Wtedy jednak:

$$A \subset \sum_n \delta_n + \left(A - \sum_n \delta_n\right) \subset B,$$

więc:

$$m_e A \leqq m_e \left[\sum_n \delta_n + (A - \Sigma \delta_n)\right] \leqq$$

$$\leqq m_e \sum_n \delta_n + m_e (A - \Sigma \delta_n) =$$

$$= \text{dł.} \sum_n \delta_n + 0 = \sum_n \text{dł.}\, \delta_n \leqq \text{dł.}\, B,$$

[§ 13, ust. 3, tw. 6].

a stąd:

$$0 \leqq \sum_n \text{dł.}\, \delta_n - m_e A < \varepsilon.$$

Podamy obecnie treść i dowód twierdzenia mało znanego, choć bardzo ważnego w zastosowaniach, które uzasadnił H. Rademacher w swej tezie z roku 1916.

Twierdzenie Rademachera. Niechaj A będzie zbiorem *ograniczonym o mierze* (L) *zerowej*. Niech dalej $\mathbf{M}$ będzie rodziną typu (V), pokry-

wającą zbiór A, przyczem punkt p, należący do A jest zawsze *punktem środkowym*, odcinków $\delta_i(p)$ $i = 1, 2, \ldots$, przyłączonych do niego.

Więc: $\delta_i(p) = (p - \lambda_i(p), p + \lambda_i(p))$

lub $\delta_i(p) = [p - \lambda_i(p), p + \lambda_i(p)]$

$$i = 1, 2, \ldots, p \varepsilon A.$$

Będziemy mówili, że **M** pokrywa A „*centrycznie*".

Niech jeszcze ε będzie liczbą dodatnią, obraną zresztą dowolnie.

Twierdzimy, że istnieje w rodzinie **M** ciąg (skończony lub nie) odcinków:

$$\eta_1, \eta_2, \ldots \qquad \eta_n = \delta_{i_n}(p_n)$$

niekoniecznie rozłącznych o własnościach:

(1) $\eta_1 + \eta_2 + \ldots = \sum_n \eta_n$ pokrywa *dokładnie* całe A.

(2) Suma długości odcinków η_n jest mniejsza od ε.

$$\sum_n \text{dł.}\, \eta_n < \varepsilon.$$

Dem. Zastąpmy każdy odcinek;

$$\delta_i(p) = (p - \lambda_i(p), p + \lambda_i(p))$$

czy $\delta_i(p) = [p - \lambda_i(p), p + \lambda_i(p)]$

przez $\delta_i'(p) = [p - \frac{1}{8}\lambda_i(p), p + \frac{1}{8}\lambda_i(p)]$

$$i = 1, 2, \ldots, p \varepsilon A.$$

Widzimy, że: $\text{dł.}\, \delta_i'(p) = \frac{1}{8}\, \text{dł.}\, \delta_i(p)$.

Nowe odcinki $\delta_i'(p)$ utworzą rodzinę **M'** typu (V), pokrywającą A. Obierzmy teraz pokrycie B (otwarte) dla zbioru A tak, by

$$\text{dł.}\, B < \frac{\varepsilon}{8},$$

co możliwe, gdyż $m A = 0$.

Odrzućmy z $\mathbf{M}'$ wszelkie odcinki, wykraczające poza zbiór B, tworząc z pozostałych rodzinę $\mathbf{M}''$ typu (V), pokrywającą A. Stosując literalnie metodę dowodu tw. Vitaliego, co tylko wyłożoną, utwórzmy dla rodziny $\mathbf{M}''$ ciąg

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \qquad n = 1, 2, \ldots$$

gdzie:

$$\delta_n = \delta_{i_n}'(p_n) = \left[p_n - \tfrac{1}{8}\lambda_{i_n}(p_n), p_n + \tfrac{1}{8}\lambda_{i_n}(p_n)\right].$$

Jeżeli zechcemy teraz utworzyć tak, jak w dowodzie Vitaliego [str. 101] odcinki η_n $n = 1, 2, \ldots$, dla δ_n, zauważymy, że

$$\eta_n = \left[p_n - \tfrac{1}{4}\lambda_{i_n}(p_n), p_n + \tfrac{1}{4}\lambda_{i_n}(p_n)\right],$$

przyczem, oznaczając:

$$\eta_n' = \delta_{i_n}(p_n) = \left[p_n - \lambda_{i_n}(p_n), p_n + \lambda_{i_n}(p_n)\right]$$

$$\text{lub} \quad = \left(p_n - \lambda_{i_n}(p_n), p_n + \lambda_{i_n}(p_n)\right),$$

mamy: dł. $\eta_n' = 8$ dł. δ_n; dł. $\eta_n = 4$ dł. δ_n.

Otóż z dowodu tw. Vitaliego wiemy, że

$$A \subset \eta_1 + \eta_2 + \ldots \quad (= B_1, \text{ p. str. } 101),$$

tembardziej: $A \subset \eta_1' + \eta_2' + \ldots$

i temsamem znalazł się w rodzinie $\mathbf{M}$ zapowiedziany ciąg:

$$\eta_1', \eta_2', \ldots$$

pokrywający *dokładnie* A [nietylko „prawie“ pokrywający!].

Otóż: $\delta_1, \delta_2, \ldots$ są r o z ł ą c z n e i wszystkie zawarte w B, więc

$$\sum_n \text{dł. } \delta_n < \frac{\varepsilon}{8},$$

zatem:

$$\sum_n \text{dł. } \eta_n' < \varepsilon$$

i ciąg nasz czyni zadość jeszcze drugiemu wyma-

ganiu. Temsamem dowód tw. Rademachera jest już ukończony.

Uwagi. 1. Zwróćmy uwagę, że w tw. Rademachera jest mowa o *sumie długości* $\sum_n$ dł. η_n' *nie o długości sumy:* dł. $\sum_n \eta_n'$!

Rodzina **M** typu (V) pokrywająca A składa się u nas z odcinków, który *środkiem* jest zawsze punkt, do którego dany odcinek należy. Niewiadomo, czy można od tego warunku odstąpić [problem Sierpińskiego]. Niemożna tego napewno uczynić, gdy przejdziemy do zbiorów więcejwymiarowych [p. J. Spława Neyman. Fund. Math. V, str. 328 i nast.].

Twierdzenie (Z). Jeżeli A jest zbiorem linjowym, ograniczonym, o mierze zewnętrznej *dowolnej,* **M** rodziną typu (V), pokrywającą „centrycznie" zbiór A, jeżeli $\varepsilon > 0$, to istnieje ciąg:

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$$

odcinków rodziny **M**, niekoniecznie rozłącznych, o własnościach:

(1) $$A \subset \sum_n \eta_n,$$

(a więc $\eta_1, \eta_2, \ldots$ pokrywają A dokładnie).

(2) $$\sum_n \text{dł. } \eta_n < m_e A + \varepsilon.$$

Dem. Dzięki twierdzeniu *Vitaliego* wybieramy najpierw ciąg odcinków rozłącznych z rodziny **M**:

$$\eta_1', \eta_1', \ldots$$

tak, by

$$\sum_p \text{dł. } \eta_p' < m_e A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

[p. str. 103] i by $\sum_p \eta_p'$ „prawie" pokryła zbiór A.

Pozostanie nam ewentualnie niepokryty zbiór: $A' = A - \sum_p \eta_p'$ o *mierze zero.*

Dzięki tw. *Rademachera* wybierzemy ciąg:

$$\eta_1'', \eta_2'', \ldots$$

tak, by $\sum_p \eta_q''$ pokryła dokładnie A' i by

$$\sum_q \text{dł.}\, \eta_q'' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wtedy ciąg:

$$\eta_1', \eta_1'', \eta_2', \eta_2'', \ldots$$

pokrywa całe A *dokładnie* i przytem:

$$m_e A \leq \text{dł.}\, \eta_1' + \text{dł.}\, \eta_1'' + \text{dł.}\, \eta_2' + \ldots < m_e A + \varepsilon.$$

Twierdzenie obecne jest syntezą twierdzeń Vitaliego i Rademachera, atoli stosować je możemy tylko w wypadku rodzin typu (V), pokrywających dany zbiór *centrycznie.*[1]

§ 16. Moc Zbiorów Linjowych.

1. **Def. 1.** Przypominamy, że zbiorem *conajwyżej przeliczalnym* nazywamy zbiór, który da się ustawić w *ciąg* (skończony lub nie). Obejmiemy tą nazwą jeszcze zbiór *pusty.* W szczególności zbiór będzie *przeliczalny,* o ile jest *nieskończony.*

Zapamiętajmy sobie lemmaty.

Lemmat 1. Jeżeli zbiór jest skończony, to da się ustawić w ciąg lub jest pusty.

Dem. 1. Zbiór złożony z jednego elementu a

[1] Twierdzenie powyższe podałem w r. 1926 na posiedzeniu Pol. Tow. Mat. w Krakowie, łącznie z tw. Rademachera, którego tezy wtedy jeszcze nie znałem.

ustawiamy w ciąg o jednym wyrazie a_1, kładąc $a_1 = a$.

2. Jeżeli twierdzenie słuszne dla zbioru posiadającego $n (> 0)$ elementów, to słuszne dla zbioru o $n + 1$ elementach. Niechaj bowiem A posiada $n + 1$ elementów i niechaj $a \varepsilon A$, to $A - \{a\}$ posiada n elementów i da się ustawić, wedle przypuszczenia, w ciąg naprz.:

$$a_1, a_2, \ldots \quad a_n,$$

położymy $a_{n+1} = a$; ustawiamy A w ciąg:

$$a_1, a_2, \ldots \quad a_n, a_{n+1}.$$

3. Dzięki zasadzie indukcji zupełnej twierdzenie nasze będzie zatem słuszne dla każdego $n > 0$ całkowitego.

Lemmat 2. Jeżeli A da się ustawić w ciąg *skończony*, to da się ustawić również w ciąg *nieskończony*.

Dem. Niechaj A ustawia się w ciąg:

$$a_1, a_2, \ldots \quad a_n.$$

Kładziemy $a_{n+h} = a_n$, dla $h = 1, 2, \ldots$ i ustawiamy A w ciąg nieskończony:

$$a_1, a_2, \ldots \quad a_n, a_{n+1}, \ldots$$

Lemmat 3. Jeżeli A da się ustawić w ciąg (skończony lub nie), to da się również ustawić w ciąg o wyrazach *różnych między sobą*.

Dem. Niechaj A ustawia się w ciąg (skończony lub nie):

$$a_1, a_2, \ldots$$

Jeżeli a_n jest wyrazem tego ciągu o skaźniku n, to oznaczmy przez k_n najmniejszą liczbę całkowitą taką, że $a_{k_n} = a_n$.

Odrzucając stale a_n, o ile $a_n = a_s$ i $s < n$, zachowajmy w ciągu jedynie wyraz a_{k_n}.

Ustawiamy liczby całkowite:

$$k_1, k_2, \ldots$$

w porządku *rosnącym* w ciąg:

$$p_1, p_2, \ldots$$

i kładziemy $\quad b_i = a_{p_i} \qquad i = 1, 2, \ldots$

Wtedy ciąg (skończony lub nie):

$$b_1, b_2, \ldots$$

posiada zapas A i wszystkie jego wyrazy są między sobą *różne*.

Lemmat 4. Jeżeli zbiór A da się ustawić w ciąg i $B \subset A$ *niepuste*, to B da się również ustawić w ciąg.

Dem. Ustawmy A w ciąg:

$$a_1, a_2, \ldots$$

i odrzućmy z ciągu wyrazy, należące do $B - A$ — w ten sposób odpadają też pewne wskaźniki (pozostanie choć jeden!) Pozostałe wskaźniki ustawmy w ciąg *rosnący:*

$$p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$$

i połóżmy:

$$b_n = a_{p_n} \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

ciąg: $\quad b_1, b_2, \ldots \quad$ ustawia B.

Uwaga. Metoda powyższa ustawia B w sposób *określony jednoznacznie,* skoro podano ustawienie w ciąg zbioru A.

Tw. 1. (Z) Suma (o ile wykonalna) *conajwyżej przeliczalnej* rodziny zbiorów *conajwyżej przeliczalnych* jest zbiorem *conajwyżej przeliczalnym.*

Dem. W dowodzie pomijamy trywjalne wypadki, gdy rodzina jest pusta lub, gdy wśród zbiorów rodziny znajduje się zbiór pusty, który w sumie możemy oczywiście odrzucić, niezmieniając tej ostatniej. Każdy zbiór rodziny da się ustawić w ciąg nieskończony. Zasada Wyboru pozwoli nam dobrać po jednym ciągu ustawiającym każdy zbiór rodziny. Całą rodzinę ustawimy w ciąg nieskończony:

$$A_1, A_2, \ldots$$

Niechaj wybranym ciągiem dla zbioru A_n będzie:

$$a_{1n}, a_{2n}, \ldots$$

Tworzymy z ciągów:

$$\begin{array}{ll}
a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, \ldots & (1) \\
a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \ldots & (2) \\
a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots & (3) \\
a_{41}, a_{42}, a_{43}, \ldots & (4) \\
a_{51}, \ldots & (5) \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

ciąg:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \ldots$$

[metoda „*przekątnych*“ Cantora], a więc kładziemy:

$$a_{ik} = b_m, \; m = \frac{(i+k-1)(i+k-2)}{2} + i.$$

$$i, k = 1, 2, \ldots$$

Wtedy ciąg: $b_1, b_2, b_3, \ldots$

posiada zapas $= \sum_p A_p$, więc $\sum_p A_p$ conajwyżej przeliczalna.

Czytelnik zechce wykazać sam, że m przebiega kolejno wszystkie liczby: 1, 2, 3, . . .

Uwagi I. Stosowanie *zasady Zermeli* (Wyboru) możemy ominąć w kilku wypadkach:

1. Gdy umiemy efektywnie ustawić każdy zbiór A_n rodziny w określony ciąg (tak byłoby naprz. gdyby A_n były zbiorami niepustemi odcinków otwartych, niekrzyżujących się ze sobą).

2. Gdy ilość zbiorów rodziny jest *skończona* [zastosujemy pośrednio § 10, tw. 1].

Uwaga II. Tw. 1 należy do ogólnej teorji mnogości, stosować je będziemy jednak w dalszym ciągu jedynie do zbiorów linjowych czy rodzin takich zbiorów i t. d. Zapewni nam to wykonalność sumy.

Tw. 2. Jeżeli A *conajwyżej przeliczalne* i $B \subset A$, to B również *conajwyżej przeliczalne.*

Dem. Dzięki lemmatowi 4, o ile $B \neq 0$, a gdy $B = 0$, to z definicji.

Uzasadniamy teraz niezmiernie ważne twierdzenie, na które już dwa razy powoływaliśmy się poprzednio.

Tw. 3. Zbiór r wszystkich liczb wymiernych jest *przeliczalny.*

Dem. Zbiór r możemy rozważać jako sumę ciągu zbiorów:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots,$$

gdzie A_n składa się ze wszystkich ułamków kształtu:

$$\frac{p}{n} \qquad p = 0, +1, -1, +2, -2, \ldots$$

Oczywiście A_n da się ustawić w ciąg:

$$\frac{0}{n}, +\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, +\frac{2}{n}, -\frac{2}{n}, \ldots \quad (\alpha_n)$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

zatem A_n przeliczalne (gdyż oczywiście nieskończone). Stąd już r jest *conajwyżej przeliczalne,* ale że nieskończone, więc *przeliczalne.*

W tym wypadku ustawialiśmy A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *efektywnie* w ciąg (α_n), zatem stosowanie zasady Zermeli odpada.

Cor. Metoda *przekątnych,* zastosowana do ciągu ciągów: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ i metoda *lemmatu* 3 i 4 dają nam w rękę możność *określonego (efektywnego)* ustawienia liczb wymiernych, a temsamem i każdego niepustego podzbioru klasy r, w ciąg nieskończony o wyrazach różnych.

Nie wszystkie zbiory linjowe są jednak skończone lub przeliczalne. Mamy bowiem twierdzenie:

Tw. 4. Żaden zbiór *doskonały, niepusty* nie jest *conajwyżej przeliczalnym.*

Dem. W ćwiczeniach na str. 59 (ćwicz. 2) mamy twierdzenie, że każdy zbiór A, dający się ustawić w ciąg, zawarty w doskonałem P jest nigdziegęsty w P, jako suma ciągu zbiorów jednostkowych, a więc nigdziegęstych w P. Gdyby P doskonałe i niepuste dało się ustawić w ciąg, byłoby nigdziegęste w P, lecz

$$D'\{P - \overline{P \times P}\} = D'O_m = O_m \neq P,$$

co sprzeciwia się definicji.

Def. 2. Zbiór, nie będący *conajwyżej przeliczalnym* zwiemy *nieprzeliczalnym.*

Wnioski:

1. Wszystkie odcinki zamknięte, nie składające się z jednego punktu: $[a, b]$, $a < b$,
2. wszystkie promienie zamknięte: $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$ oraz
3. prosta liczbowa

są *nieprzeliczalne.*

Uwaga. Fakt, że odcinek $[a, b]$, dla $a < b$ jest nieprzeliczalny, odkrył J. Cantor w pierwszych swych badaniach nad teorją mnogości.

2. Ogólna teorja mnogości określa dwa zbiory A i B jako *równoliczne:* $A \sim B$ lub *równej mocy,* gdy istnieje możność podporządkowania elementów zbioru A elementom zbioru B w sposób *jednojednoznaczny,* czyli *doskonały.*

[Każdy element z A jakiemuś elementowi w B, każdy w B ma być przypisany jakiemuś elementowi w A, różnym w A przypisano różne w B, każdemu w A tylko jeden w B].

Obejmujemy jeszcze tą definicją wypadek, gdy A i B są puste.

Dzięki tej definicji mamy:

Tw. 1. Wszystkie zbiory przeliczalne są równoliczne.

Dem. Gdy A i B są przeliczalne, ustawmy je w ciągi:

$$A: \quad a_1, a_2, \ldots .$$
$$B: \quad b_1, b_2, \ldots .$$

nieskończone, o elementach różnych [ust. 1. lem-

maty]. Aby wykazać równoliczność, wystarcza teraz przypisać elementowi a_n element b_n.

Przykład: Zbiory:

$$\begin{array}{ll} N_0: & \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \\ N_1: & \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \\ 2N_0: & \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\} \\ 2N_0+1: & \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \end{array}$$

są równoliczne i przeliczalne.

[Oznaczenia wedle Formulario di Matematica Peany].

Równoliczność posiada typowe cechy równoważności. Jeżeli A, B, C są zbiorami, to

(1) $A\, rl\, B$.
(2) $A\, rl\, B$ pociąga $B\, rl\, A$.
(3) $A\, rl\, B$ i $B\, rl\, C$ pociągają $A\, rl\, C$.

Tw. 2. Każdy *odcinek otwarty* (a, b) i każdy *promień otwarty* $(a, +\infty)$ czy $(-\infty, a)$ jest *równoliczny* ze zbiorem $q = (-\infty, +\infty)$. [A więc są równoliczne między sobą].

Dem. 1. Przypiszmy każdej liczbie x należącej do (a, b) $\{a < x < b\}$

liczbę: $$y = tg\left\{-\frac{\pi}{2} + \pi\frac{x-a}{b-a}\right\};$$

odpowiedniość będzie doskonała i wykaże, iż:

$$(a, b)\, rl\, q.$$

2. Przypiszmy każdej liczbie $x > 0$ liczbę:

$$y = log\,(x - a),$$

co da nam odpowiedniość *doskonałą* wykazującą, że

$$(a, +\infty)\, rl\, q.$$

3. Analogicznie formuła:

$$y = log(a - x), \qquad \text{dla } x < a$$

wykazuje, że $(-\infty, +a)\, rl\, q$.

Teorja mnogości ogólna daje nam w rękę bardzo silne kryterjum równoliczności w postaci t. zw. twierdzenia *Schrödera—Bernsteina*[1], które brzmi następująco:

Jeżeli $A' \subset A$, $B' \subset B$, $A'\, rl\, B$, $B'\, rl\, A$, to

$$A\, rl\, B.$$

Skorzystamy z niego natychmiast:

Tw. 3. Każdy *odcinek zamknięty* $[a, b]$, *gdzie* $a < b$ i każdy *promień zamknięty* $[a, +\infty)$ czy $(-\infty, a]$ jest *równoliczny* z q [a więc są też równoliczne między sobą].

Dem. 1 Gdy $a < b$, to

(1) $(a, b) \subset [a, b]$ i $(a, b)\, rl\, q$.

(2) $[a, b] \subset q$ i $[a, b]\, rl\, [a, b]$,

więc [Schr.—Bern.]: $[a, b]\, rl\, q$.

2. (1) $(a, +\infty) \subset [a, +\infty)$ i $(a, +\infty)\, rl\, q$,

(2) $[a, +\infty) \subset q$ i $[a, +\infty)\, rl\, [a, +\infty)$,

więc: $[a, +\infty)\, rl\, q$.

3. (1) $(-\infty, a) \subset (-\infty, a]$ i $(-\infty, a)\, rl\, q$,

(2) $(-\infty, a] \subset q$ i $(-\infty, a]\, rl\, (-\infty, a]$,

więc: $(-\infty, a]\, rl\, q$.

Cor. Tą samą metodą okazalibyśmy, że

$$(a, b] \quad \text{i} \quad [a, b), \text{ o ile } a < b,$$

są równoliczne z q.

Def. 1. Każdy zbiór równoliczny z prostą licz-

---

[1] p. naprz. moje Podstawy Ogólnej T. M. str. 50. lub W. Sierpiński: Zarys Teorji Mnogości cz. I, str. 69.

bową q nazwiemy *zbiorem mocy continuum* lub „*mocy c*“.

Tw. 2. Jeżli A i B są linjowe, $A \subset B$ i A jest mocy *continuum*, to B jest również mocy *continuum*.

Dem. (1) $A \subset B$ i $A \, rl \, q$,

(2) $B \subset q$ i $B \, rl \, B$,

więc [Schr.—Bern.]: $B \, rl \, q$.

Tw. 3. Jeżeli $A \, rl \, B$ i B jest mocy c, to A jest również mocy *continuum*.

Dem. $B \, rl \, q$ z definicji, $A \, rl \, B$, więc $A \, rl \, q$.

Tw. 4. Każdy zbiór *mocy continuum* jest *nieprzeliczalny*.

Dem. Gdyby A było mocy c i dało się ustawić w szereg, to

(1) ustawilibyśmy A w ciąg:

$$a_1, a_2, \ldots \ldots \quad (\text{gdyż } A \neq 0),$$

(2) przyporządkowali każdemu $x \varepsilon A$ element $f(x)$ zbioru q w sposób doskonały, wtedy ciąg:

$$b_1, b_2, \ldots,$$

gdzie $$b_n = f(a_n)$$

ustawiałby zbiór *doskonały* q w ciąg, co niemożliwe [ust. 1, tw. 2]

Tw. 5. Każdy zbiór P linjowy, *doskonały* i *niepusty* jest mocy *continuum*.

Dem. 1. Jeżeli P nieograniczone i naprz. $a \varepsilon P$, to zbiór $A = [a-1, a+1] \times P$ jest również doskonały, niepusty, lecz ograniczony — jeżeli A mocy c, to również P będzie mocy c, dzięki tw. 2. Wystarczy zatem badać zbiory ograniczone.

2. Jeżeli P ograniczone, doskonałe, niepuste, to

$$P \subset [a, b], \text{ gdzie } a = \text{kr. d. } P, \; b = \text{kr. d. } P.$$

Załóżmy, że P *nie jest nigdziegęste* w $[a, b]$. Wyniknie stąd, że

$$D'\{[a, b] - P\} = A \neq [a, b] \qquad \{\S\ 7,\ \text{str. } 45\}.$$
$$[a, b] - P \subset D'\{[a, b] - P\} = A$$
$$B = [a, b] - A \subset P.$$

Zbiór A jest zamknięty, więc $B = [a, b] - A$ otwarte i n i e p u s t e, temsamem jakiś przedział $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ jest wolny od punktów A, zatem zawiera się cały w P. [§ 7, ust. 2, str. 45]. Zbiór P zawiera wtedy podzbiór mocy c, jest więc sam mocy *continuum* [tw. 2].

3. Wystarczy zatem udowodnić twierdzenie dla P *nigdziegęstego* w $[a, b]$.

Zbiór $B = [a, b] - P$ jest wtedy *wszędziegęsty* w $[a, b]$ i rozpada się na odcinki, które ustawimy w ciąg n o r m a l n y

$$\delta_1, \delta_2, \ldots \tag{1}$$

Odcinków jest nieskończenie wiele; nie stykają się końcami i jeżeli $\delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$, to α_i i β_i należą do P, lecz są różne od a i b; odcinki δ_i są *wszędziegęsto* rozsiane w $[a, b]$.

(1) Przypiszemy punktowi α_1 liczbę $\frac{1}{2}$.

(2) Niechaj δ_{n_1} będzie odcinkiem o najmniejszym wskaźniku w ciągu (1) z pośród leżących na lewo od δ_1, odcinek δ_{n_2}, o najniższym wskaźniku w ciągu (1), lecz z pośród leżących na prawo od δ_1. Przypiszemy punktowi α_{n_1} i α_{n_2} odpowiednio liczby $\frac{1}{2^2}$ i $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$.

(3) Wybieramy teraz cztery dalsze odcinki:

δ_{n_3} — o najmniejszym wskaźniku z pośród leżących na lewo od δ_{n_1}.

δ_{n_4} — o najmniejszym wskaźniku z pośród leżących na prawo od δ_{n_1}, a na lewo od δ_1.

δ_{n_5} — o najmniejszym wskaźniku z pośród leżących na prawo od δ_1, a na lewo od δ_{n_2}.

δ_{n_6} — o najmniejszym wskaźniku z pośród leżących na prawo od δ_{n_2}.

Punktom: α_{n_3}, α_{n_4}, α_{n_5}, α_{n_6}, przypiszmy odpowiednio liczby:

$$\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}.$$

Postępując dalej w ten sposób, zaopatrzymy w liczby pewien podzbiór punktów zbioru P, który oznaczymy sobie przez A.

Rozważmy szereg *nieskończony:*

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots \qquad (1),$$

w którym: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

mają wartości 0 lub 1 i przytem niechaj (1) będzie *istotnie nieskończony* t. zn., że od żadnego miejsca począwszy, „cyfry“ a_n nie są stale zerami. Granice tych szeregów wyczerpują wszystkie liczby odcinka (0, 1], gdyż są to poprostu liczby tego odcinka napisane w sposób istotnie nieskończony w systemie dwójkowym numeracji. Oznaczmy przez p_n punkt zbioru A (a więc zbioru P), któremu przypisano liczbę:

$$s_n=\sum_{k|1}^{n}\frac{a_k}{2^k}.$$

Ciąg $s_1, s_2, s_3, \ldots$

czyli szereg (1) jest zbieżny, powiedzmy do liczby s. Ciąg punktów:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots \tag{2}$$

jest *zbieżny* do pewnego punktu p, gdyż

$$a \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq p_3 \leqq \ldots \leqq b,$$

więc wystarczy obrać $p = \text{kr. g.}\{p_1, p_2, \ldots\}$.

Ponieważ „cyfry" a_n nie są od żadnego miejsca stale zerami, więc

$$p > p_n \qquad n = 1, 2, \ldots$$

i ciąg (2) jest podstawowym dla p w zbiorze A [§ 11, ust. 2]. Stąd $p \varepsilon D'A$, $p \varepsilon D'P$ i nakoniec: $p \varepsilon P$. Tak otrzymanemu punktowi p przypiszemy liczbę $s\,(>0)$. Dołączmy jeszcze punkt $a = \text{kr. d. } P$, któremu przypiszemy liczbę *zero*. Uzyskamy ponumerowanie liczbami odcinka [0, 1] pewnego zbioru K zawartego w A i to w sposób, jak łatwo sprawdzić, *doskonały*. Zatem $K\,rl\,q$, a że $K \subset P \subset q$, więc P jest również mocy *continuum*.

3. (*) **Tw. 1.** Każdy zbiór linjowy *rozprószony* [§ 7] jest *conajwyżej* przeliczalny.

Dem. Dowód tego twierdzenia, bez posługiwania się zasadą Zermeli, podał Sierpiński w Fundamenta Math. t. 1 i to w skróceniu. Jest on dla naszych celów zbyt długi i dlatego podamy dowód posługujący się *zasadą wyboru*, choć tego można uniknąć, o ile posiadamy w książce dostatecznie dużo miejsca do dyspozycji.

1. Nazwijmy punktem *zagęszczenia* (kondensacji) zbioru A punkt p wtedy, gdy w *każdem* otoczeniu (s, t) punktu p, zbiór $(s, t) \times A$ jest *nieprzeliczalny*.

Udowodnimy *lemmat:* Każdy zbiór A linjowy i *nieprzeliczalny* posiada choć *jeden punkt zagęszczenia, należący* do A.

Dem. Jeżeli A jest nieprzeliczalne, to któryś zbiór *ograniczony:*

$$A_n = A \times [-n, +n] \qquad n = 1, 2, \ldots$$

jest też nieprzeliczalny, gdyż inaczej

$$\sum_n A_n = A$$

byłaby conajwyżej przeliczalna. Możemy zatem zgóry założyć, że A jest ograniczone, gdyż punkty zagęszczenia A_n należące do A_n są oczywiście punktami zagęszczenia dla A i należą do A. Gdyby żaden punkt zbioru A nie był jego punktem zagęszczenia, to zasada wyboru pozwoliłaby nam do każdego punktu $p \varepsilon A$ przywiązać otoczenie $(p - \lambda(p), p + \lambda(p))$, $\lambda(p) > 0$ takie, że

$$(p - \lambda(p), p + \lambda(p)) \times A$$

byłoby conajwyżej przeliczalne.

Oznaczmy: $$\delta_n(p) = \left[p - \frac{\lambda(p)}{n+1}, p + \frac{\lambda(p)}{n+1}\right]$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Rodzina utworzona z odcinków $\delta_i(p)$, dla wszelkich $p \varepsilon A$ i wszelkich i całkowitych, jest rodziną typu (V) pokrywającą *centrycznie* A. Wedle uogólnienia tw. Rademachera (§ 15, tw. 3), jakiś ciąg odcinków tej rodziny:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots$$

pokryje całe A. Lecz wtedy:

$$A = \sum_k (\delta_k \times A),$$

$\delta_k \times A$ conajwyżej przeliczalne $[k = 1, 2, \ldots]$, więc A byłoby conajwyżej przeliczalne.

2. Oznaczmy zbiór wszystkich punktów *zagęszczenia* zbioru A *należących* do A przez K. Dowiedziemy słuszności lemmatu: K jest *gęste w sobie.*

Dem. Jeżeli $p \varepsilon K$, to gdyby p nie było punktem skupienia dla K, pewien odcinek

$$[p - \sigma, p + \sigma] \qquad (\sigma > 0)$$

byłby wolny od punktów K, o ile pominiemy sam punkt p. Lecz $[p - \sigma, p + \sigma] \times A$ jest *nieprzeliczalne,* atoli zbiory:

$$A_n = \left\{\left[p - \sigma, p - \frac{\sigma}{n}\right) + \left(p + \frac{\sigma}{n}, p + \sigma\right]\right\} \times A$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

byłyby *conajwyżej przeliczalne,* a więc

$$A \times [p - \sigma, p + \sigma] = \sum_n A_n + \{p\}$$

byłoby również conajwyżej przeliczalne.

3. Jeżeli teraz A jest zbiorem linjowym *nieprzeliczalnym,* to $K \neq 0$, K *gęste w sobie* i $K \subset A$, więc K nie może być *rozprószone.*

(*) **Tw. 2.** Każdy zbiór *zamknięty* jest, albo *conajwyżej przeliczalny,* albo *mocy continuum.*

Dem. Rozłóżmy zbiór zamknięty A na *jądro* M i resztę $N = A - M$ *rozprószoną* [§ 7]. *Jądro* M jest zbiorem *doskonałym,* reszta N *conajwyżej przeliczalna.*

(1) Jeżeli $M \neq O$, to A jest *conajwyżej przeliczalne.*

(2) Jeżeli $M \neq O$, to M jest mocy continuum (ust. 2, tw. 5), zatem A również *mocy continuum.*

Uwaga. Jako corollarium otrzymamy tw. *Cantora—Bendixona:* Każdy zbiór zamknięty da się rozłożyć i to w jedyny sposób na zbiór *doskonały* i *conajwyżej przeliczalny*, przyczem części te będą bez punktów wspólnych.

Tw. 3. Każdy zbiór *otwarty niepusty* jest *mocy continuum.*

Dem. Wtedy bowiem rodzina analizująca posiada choć jeden odcinek otwarty, a więc zbiór o mocy continuum, zawarty w danym zbiorze otwartym.

Uwaga. Zbiór otwarty pusty jest skończony, a więc conajwyżej przeliczalny.

4. O wielu jeszcze kategorjach zbiorów możnaby udowodnić, że składają się one ze zbiorów conajwyżej przeliczalnych lub mocy continuum. Zauważmy, że gdyby taką kategorję stanowiły zbiory *gęste w sobie*, to *każdy* zbiór linjowy byłby *conajwyżej przeliczalny* lub *mocy c*, gdyż każdy zbiór linjowy rozpada się na *jądro gęste w sobie* i zbiór *rozprószony conajwyżej przeliczalny*. Niestety tego właśnie nie wiemy.

Nie udało się do dziś dnia rozstrzygnąć w żadną stronę hipotezy następującej:

Hipoteza Continuum: *Każdy zbiór linjowy jest conajwyżej przeliczalny lub mocy continuum.*

Nic nam też pewnego nie wiadomo, czy hipoteza powyższa jest niezależna od pozostałych hipotez, jakie przyjmujemy w teorji mnogości ogólnej czy punktowej.

KONIEC CZĘŚCI PIERWSZEJ.

Nota

Zestawienie najważniejszych prawideł algebry zbiorów.

Litery $a, b \ldots$ oznaczają elementy, $A, B \ldots$ zbiory, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$ rodziny zbiorów. O ile w grę wchodzą działania $+$, $\times$, $-$, Σ, Π, należy sobie zapewnić ich wykonalność.

I. $a \varepsilon A$ i $A \subset B$ pociąga $a \varepsilon B$
$A \subset B$ i $B \subset C$ pociąga $A \subset C$
$A \subset B$ i $B \subset A$ pociąga $A = B$
$a \varepsilon A$ pociąga $\{a\} \subset A$.

II. $A + B = B + A$
$A + (B + C) = (A + B) + C$
$A + O_m = A$
$A \subset B$ pociąga $A + B = B$
$A \subset B$ i $C \subset D$ pociąga $A + C \subset B + D$

III. $A \times B = B \times A$
$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
$A \times O_m = O_m$
$A \subset B$ pociąga $A \times B = A$
$A \subset B$ i $C \subset D$ pociąga $A \times C \subset B \times D$.

IV. $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$
$(A \times B) + C = (A + C) \times (B + C)$
[Prawa **De Morgana**]
$A \times B \subset A + B$.

V. $A - B \subset A$; $(A - B) \times B = O$; $A - A = O$, $A - O = A$
$A \times B = O$ pociąga $A - B = A$
$B \subset A$ pociąga $(A - B) + B = A$
$A - (B + C) = (A - B) \times (A - C) = (A - B) - C$

$$A - (B \times C) = (A - B) + (A - C)$$
$$(A + B) - C = (A - C) + (B - C)$$
$$(A - B) \times C = (A \times C) - B = (A \times C) - (B \times C)$$
$$(A - C) \times (B - C) = A \times B - C$$
$A \subset M$ i $B \subset M$ pociąga $A - B = A \times (M - B)$
$$A \times B = A - (A - B).$$

Uwaga. Jeżeli wszystkie rozważane zbiory są podzbiorami jednego zbioru M. to zastępujemy *odejmowanie* $A - B$ przez mnożenie $A \times (M - B)$, gdzie $M - B$ jest *uzupełnieniem* B *do* M.

Czytelnik unaoczni sobie łatwo słuszność powyższych wzorów, posługując się, znaną z tradycyjnej logiki, metodą „kół logicznych Eulera".

VI. 1. Jeżeli każdy zbiór rodziny $\mathbf{A}$ jest zawarty w jakimś zbiorze rodziny $\mathbf{B}$, to

$$\Sigma \mathbf{A} \subset \Sigma \mathbf{B},$$

o ile jeszcze rodzina $\mathbf{A}$ *niepusta*, to

$$\Pi \mathbf{A} \subset \Sigma \mathbf{B}.$$

2. $\Sigma (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \Sigma \mathbf{A} + \Sigma \mathbf{B}.$

3. O ile $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ niepuste, to

$$\Pi (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \Pi \mathbf{A} \times \Pi \mathbf{B}.$$

VII. 1. $\sum\limits_i (A_i + B_i) = \sum\limits_i A_i + \sum\limits_i B_i.$

2. $\prod\limits_i A_i \times \prod\limits_i B_i = \prod\limits_i (A_i \times B_i).$

Dla ciągów nieskończonych:

3. $\sum\limits_i \left(\prod\limits_k A_k^i\right) = \prod\limits_k \left(\sum\limits_i A_k^i\right).$

KRÓTKA BIBLJOGRAFJA
CZĘŚCI I-SZEJ.

KSIĄŻKI:

(1) C. CARATHÉODORY: Vorlesungen über reelle Funktionen. II wyd. Lipsk, 1927.

(2) F. HAUSDORFF: Grundzüge der Mengenlehre. Lipsk. I wyd. 1924. II wyd. 1930.

(3) A. FRAENKEL: Einleitung in die Mengenlehre. III wyd. Berlin, 1928.

(4) S. SAKS: Zarys Teorji Całki. Warszawa, 1930.

(5) W. SIERPIŃSKI: Zarys Teorji Mnogości. Cz. I, wyd. III. Warszawa, 1928.

(6) W. SIERPIŃSKI: Wstęp do Teorji Mnogości i Topologji. Lwów, 1930.

(7) W. WILKOSZ: Podstawy Ogólnej Teorji Mnogości. Warszawa, 1925.

ROZPRAWY:

ST. BANACH: Sur le problème de la mesure. Fund. Math. t. IV.

— Sur le théorème de M. Vitali. Fund. Math. t. V.

H. RADEMACHER: Eindeutige Abbildungen und Messbarkeit. Monatshefte für Math. und Phys. 1916.

W. SIERPIŃSKI: L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse. Bull. de l'Académie des Sciences de Cracovie. 1919.

W. SIERPIŃSKI: Une démonstration du théorème sur la structure des ensembles de points. Fund. Math. t. I.

J. SPŁAWA—NEYMAN: Sur un théorème métrique concernant les ensembles fermés. Fund. Math. t. V.

Cytujemy tylko książki i rozprawy, które wiążą się bezpośrednio z tekstem naszej książeczki. Każdy tom

znakomitego pisma Fundamenta Mathematicae (dotychczas 20 tomów) przynosi artykuły, które składają się razem na przebogate źródło wiadomości, niemożliwe do pominięcia przy głębszem studjum. Większość ich zainteresuje jednak dopiero czytelnika II-giej części (topologicznej) niniejszej książeczki.

BIBLIOTEKA W KRAKOWIE

ERRATA:

				jest:	*ma być:*
str.	13	*wiersz*	11 d.	a	x
„	13	„	6 d.	x punkt x	punkt x
„	20	„	4 i 5 d.	kr. g. A i kr. d. A	kr. g. $(A+B)$ i kr. d. $(A+B)$
„	27	„	12, 13, 22 g.	z	x
„	27	„	14 g.	A	x
„	28	„	1 g.	$D'A\,(\times B)$	$D'(A \times B)$
„	33	„	11 g.	zamknięty	zamknięty, ograniczony
„	35	„	13 d.	ust. 5	ust. 4
„	75	„	6 d.	$A = \sum_i \delta_i$	$B = \sum_i \delta_i$
„	77	„	7 g.	§ 11	§ 12
„	80	„	6 g.	(lemm. 5)	(lemm. 4)
„	88	„	2 g.	A	mA
„	102	„	14 d.	$\sum_{k\mid p}^{\infty} \eta_p$	$\sum_{k\mid p}^{\infty}$ dł. η_p
„	103	„	4 g.	tw. 13.	tw. 14.
„	105	„	12 g.	$\frac{1}{4}\lambda_i$	$\frac{1}{2}\lambda_i$
„	108	„	10 g.	a_i	a
„	109	„	14 d.	$B - A$	$A - B$
„	114	„	13 g.	B	A
„	114	„	4 d.	$x > 0$	$x > a$
„	116	„	10 d.	ust. 1, tw. 2	ust. 1, tw. 4
„	116	„	1 d.	$b =$ kr. d. P	$b =$ kr. g. P.
„	121	„	11 d.	K	A
„	121	„	7 d.	[§ 7]	[§ 8]
„	121	„	4 d.	$M \neq O$	$M = O$
„	121	„	1 d.	(ust. 2, tw. 5)	(str. 116, tw. 5)

SPIS RZECZY.

Str.

§ 1. Zbiory i ich Algebra 1
§ 2. Mnogości punktowe 9
§ 3. Mnogości linjowe 11
§ 4. Punkty skupienia mnogości linjowych 21
§ 5. Zbiory zamknięte, gęste w sobie i doskonałe 29
§ 6. Zbiory Otwarte 33
§ 7. Zbiory wszędzie i nigdziegęste . . . 43
§ 8. Zbiory rozprószone 48
§ 9. Ciągi zbiorów. Kategorje Baire'a . . 50
§ 10. Zasada Zermeli 61
§ 11. Ciągi punktów. Twierdzenie o pokryciu (Borela—Lebesgue'a) 64
§ 12. Odległość zbiorów 69
§ 13. Miara Lebesgue'a zbiorów linjowych . 72
§ 14. Ogólny problem miary 92
§ 15. Twierdzenia o pokryciu Vitaliego i Rademachera 98
§ 16. Moc zbiorów linjowych 107
Nota: Zestawienie najważniejszych prawideł algebry zbiorów 123
Krótka bibljografja 125

R.R.

7.

UP - Kraków BG
1050156280
EX LIBRIS
UP
MUZEUM PODRĘCZNIKA