BIBLIOTEKA PWSP KRAKÓW
8.787
Pascal
UP - Kraków BG
1050118183

PW
SP.
8787
8787
N., 15. 10. I. 53, 20.000

GRUPY CIĄGŁE PRZEKSZTAŁCEŃ.

ERNESTO PASCAL.

GRUPY CIĄGŁE PRZEKSZTAŁCEŃ

(CZĘŚĆ OGÓLNA TEORYI).

PRZEŁOŻYŁ

S. DICKSTEIN.

WARSZAWA.
Wydawnictwo Redakcyi „Wiadomości Matematycznych".

1903.

Druk J. Sikorskiego, Warecka 14.

UP - Kraków BG
1050118183

BIBLIOTEKA
Państwowej
Wyższej Szkoły Pedagogicznej
W KRAKOWIE
8787

ДОЗВОЛЕНО ЦЕНЗУРОЮ
Варшава, 3 Марта, 1903 г.

OD TŁÓMACZA.

Wielka teorya ciągłych grup przekształceń, dzieło genialnego matematyka norweskiego Sophusa Lie (1842—1899). szybko rozpowszechniła się w świecie naukowym i pozyskała gorliwych zwolenników w ogniskach nauki: w Niemczech, Francyi, Włoszech i Stanach Zjednoczonych. Z zadowoleniem zaznaczyć winniśmy, że i do naszej literatury naukowej przeniknęła ona dość szybko. P. Kazimierz Żorawski, uczeń Liego, obecnie profesor Uniwersytetu Jagiellońskiego, w całym szeregu rozpraw oryginalnych, ogłoszonych przeważnie w Rozprawach Akademii Krakowskiej, oraz „Pracach matematyczno-fizycznych", bada ważne zagadnienia z rozmaitych działów teoryi przekształceń, w wykładach zaś uniwersyteckich wprowadza swych słuchaczów w dziedzinę tej teoryi.

Przyswoiwszy dawniej literaturze naszej szereg dzieł matematycznych prof. Pascala, uważaliśmy za właściwe i tę najnowszą pracę uczonego włoskiego ogłosić w przekładzie polskim, w przekonaniu, że dzieło to, obejmujące zasady teoryi przekształceń, nie będzie bez użytku dla młodzieży polskiej, poświęcającej się studyom matematycznym.

O zakresie tego dzieła mówi sam Autor w Przedmowie. Obejmuje ono nie całość rozległego przedmiotu, lecz tylko ogólną część teoryi. Ale i w tym szczupłym zakresie powinno ono pozyskać sobie, zdaniem naszem, chętnych czytelników wśród młodszego pokolenia, oddającego się studyum poważnym w dziedzinie matematyki wyższej.

W przekładzie, nie odstępując nigdzie od tekstu oryginalnego, pozwoliliśmy sobie poczynić tylko niewielkie dopełnienia bibliograficzne przez wymienienie prac polskich, odnoszących się do teoryi przekształceń. W końcu dodaliśmy spis bibliograficzny tych prac oraz wykaz alfabetyczny rzeczy.

Nadmieniamy wreszcie, że w t. XIV „Prac mat.-fiz." (1903) prof. E. Pascal ogłosił streszczenie najnowszych badań swoich nad twierdzeniami zasadniczemi teoryi grup, o których mówi w dopełnieniach do tekstu książki niniejszej.

S. D.

Warszawa, w lutym, 1903.

PRZEDMOWA AUTORA.

Jedną z najbardziej wytwornych teoryj nowoczesnej Analizy matematycznej jest teorya ciągłych przekształceń, którą zawdzięczamy geniuszowi Sophusa Lie. Jest ona ważna nietylko sama w sobie, lecz także przez swe liczne zastosowania do innych części Analizy i Geometryi, na które rzuca niespodziewanie nowe światło i pozwala dostrzedz ich związki wzajemne, przedtem niewidoczne.

Teorya ta, jakkolwiek powstała dopiero niedawno, wzniosła się i rozwinęła zadziwiająco szybko i zajęła takie stanowisko pomiędzy swemi siostrzycami, że dziś młodzieniec, poświęcający się studyom nad matematyką wyższą, nie może jej nie znać, przynajmniej w jej podstawach i zasadach.

Lie, wespół ze swoimi uczniami, ogłosił o tej teoryi wiele tomow, które są atoli kopalnią zbyt rozległą, aby początkujący mógł się łatwo w pierwszych swoich studyach w niej oryentować, i dlatego to niejednokrotnie wypowiadano potrzebę takiej książki, którąby, bez szkody dla ścisłości i ogólności, mogła zawrzeć w niewielkiej objętości wszystko to, co stanowi podstawę tej wysokiej części Matematyki czystej.

Daleki jestem od myśli, aby książka, którą niniejszem przedstawiam publiczności matematycznej, spełniała całkowicie

to żądanie, bardzo często z różnych stron ujawniane. Należy tę pracę uważać raczej za próbę w tym kierunku, i będę bardzo rad, jeżeli pióro, od mojego uczeńsze, zechce potrzebom uczących się zadość uczynić lepiej, niż ja to uczynić potrafiłem.

Tom ten, powstały z lekcyj Analizy Wyższej, które prowadziłem w uniwersytecie w Pawii w roku 1900—01, zawiera tylko część kursu, albowiem z rozmaitych względów uważałem za właściwe ograniczyć się do samej części ogólnej teoryi grup, pominąć zaś na teraz to, co dotyczy grup specyalnych, a zwłaszcza grup przekształceń styczności owych, stanowiących w sobie przedmiot rozległy i nadający się do opracowania w osobnym tomie.

Ponieważ w roku ubiegłym udało mi się doprowadzić do końca pewne poszukiwania, podjęte z okoliczności układania tego dzieła, a dotyczące specyalnie dowodów twierdzeń zasadniczych, zwanych t w i e r d z e n i a m i L i e g o, mniemałem przeto, że nie będzie rzeczą niewłaściwą podać w dopełnieniach na końcu tomu rozważania moje nad tym przedmiotem.

Poświęcając pracę niniejszą młodym adeptom nauki, wyrażam życzenie, aby ona mogła, chociażby w niewielkim stopniu, przyczynić się do postępu ich studyów.

Ernesto Pascal.

Medyolan, wrzesień, 1902.

SPIS RZECZY

ROZDZIAŁ I.

Teorya ogólna grup przekształceń.

Str.

§ 1. Wiadomości wstępne. Pojęcie przekształcenia. Parametry przekształcenia i warunki ich istotności 1

§ 2. Definicya ciągłych grup przekształceń. Grupy skończone i grupy nieskończone. Grupy Liego. Podobieństwo dwu grup. 10

§ 3. Przykłady grup pospolitszych. Grupy liniowe, grupy rzutowe, grupy Cremony 22

§ 4. Równania różniczkowe charakterystyczne grupy. Pierwsze twierdzenie zasadnicze teoryi grup. Przykłady 25

§ 5. Grupy jednoparametrowe 34

§ 6. Wzory wyraźne kanoniczne na przekształcenia grupy jednoparametrowej. Przekształcenia nieskończonostkowe 42

§ 7. Trajektorye grupy jednoparametrowej. Redukcya i postać kanoniczna symbolów przekształceń nieskończonostkowych. Wyznaczenie grupy kanonicznej z danego jej przekształcenia nieskończonostkowego 46

§ 8. Rozmaite własności symbolów przekształceń nieskończonostkowych i związki pomiędzy niemi. Symbol Poissona i wzór Jacobi'ego. Rząd przekształcenia nieskończonostkowego w punkcie danym 53

§ 9. Wzory na iloczyn dwu przekształceń skończonych, danych w postaci kanonicznej 63

§ 10. Wyrażenia Xf, uważane jako strony pierwsze równań o pochodnych cząstkowych. Układy zupełne równań $Xf = 0$ 67
§ 11. Konstrukcya ∞^{2r} przekształceń o r parametrach istotnych przy pomocy r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych . . 72
§ 12. Grupy r-parametrowe, zawierające przekształcenia tożsamościowe. 77
§ 13. Własności zbioru ∞^{2r} przekształceń, których wzory mają strony drugie, czyniące zadość równaniom typu (*A*) §-u 14-go 84
§ 14. Grupy r-parametrowe wogólności. Związki charakterystyczne pomiędzy r przekształceniami grupy r-parametrowej, zawierającej przekształcenie tożsamościowe. Drugie twierdzenie zasadnicze teoryi grup 88
§ 15. Związki między stałemi c. Trzecie twierdzenie zasadnicze teoryi grup. Budowa grupy 106
Patrz Dopełnienie 7 279
§ 16. Przekształcenia nieskończonostkowe grupy r-parametrowej, określonej za pomocą układu równań o pochodnych cząstkowych . . 108

ROZDZIAŁ II.

Teorya niezmienniczości względem grupy przekształcen.

§ 1. Niezmienniczość funkcyi względem grupy. Niezmienniki grupy . . 113
§ 2. Niezmienniczość układu równań skończonych względem grupy . . 115
§ 3. O zagadnieniu, dotyczącem wyznaczenia wszystkich możliwych układów równań, zezwalających na jedno lub więcej przekształceń nieskończonostkowych 121
§ 4. Przypadek, w którym dane przekształcenia nieskończonostkowe mają pewną własność, a w szczególności mogą wytworzyć grupę o r parametrach. Układy równań niezmienniczych względem grupy o r parametrach 128
§ 5. Przedstawienie geometryczne układów równań niezmienniczych względem grupy. Podgrupa stateczności punktu 133
§ 6. Niezmienniczość układu zupełnego równań o pochodnych cząstkowych, liniowych, rzędu 1-go jednorodnych, rozważana względem grupy danej 142
§ 7. Niezmienniczość względem grupy układu przekształceń nieskończonostkowych. Układ przekształceń nieskończonostkowych, które należą do grupy r-parametrowej, jest niezmienniczy względem tej grupy 147
§ 8. Niezmienniczość jednego przekształcenia lub grupy względem przekształcenia lub grupy, czyli przemienność dwóch przekształceń lub dwóch grup. Przekształcenie nieskończonostkowe i grupy wyjątkowe lub niezmiennicze dla grupy danej 154

ROZDZIAŁ III.

Własności dotyczące istoty grupy.

§ 1. Przechodniość grup 167
§ 2. Niepierwotność grup 172
§ 3. Systatyczność grupy 175
§ 4. Izomorfizm dwu grup 178
§ 5. Podobieństwo dwu grup 185

ROZDZIAŁ IV.

Grupy związane z daną.

§ 1. Grupa dołączona 197
§ 2. Grupa budowy 206
§ 3. Grupa parametryczna 211
§ 4. Grupa niepierwotności 221
§ 5. Grupy rozszerzone 223
§ 6. Grupa wzajemna grupy pojedyńczo-przechodniej o *n* parametrach istotnych 230

ROZDZIAŁ V.

Teorya niezmiennicza grup rozszerzonych.

§ 1. Niezmienniczość równań i wyrażeń Pfaffa względem grupy przekształceń 233
§ 2. Niezmiennik jednoczesny wyrażenia Pfaffa i przekształcenia nieskończonostkowego 237
§ 3. Układ dołączony do danego układu równań Pfaffa. Układy zupełne całkowalne 241
§ 4. Układy równań Pfaffa, niezmienniczo złączone z układem danym. Bibliografia tooryi równań Pfaffa 251
§ 5. Niezmienniki różniczkowe grupy danej. Parametry różniczkowe . 262

DOPEŁNIENIA.

1. O parametrach istotnych 267
2. O nawiasach Poissona 268
3. Tożsamości, otrzymać się dające z tożsamości Jacobi'ego . . 269

4. O spółczynnikach liczbowych Γ 270
5. O liczbach Bernoulli'ego 271
6. O iloczynie dwu przekształceń 277
7. O trzeciem twierdzeniu Liego 279
8. Grupy proste i złożone 286
9. Grupy pochodne i grupy całkowalne 287
10. Równanie charakterystyczne Killinga. Porządek grupy. Niezmienniki grupy dołączonoj 288
11. Niezmienniki całkowe 290

Bibliografia prac z teoryi grup przekształceń w literaturze polskiej . . 293
Wykaz alfabetyczny rzeczy 295

SPROSTOWANIA.

Str. 11 wiersz 16 od góry zamiast: *Akad.* powinno być: *Towarz.*

„ 59 „ 12 „ „ „ *którego do celu naszego i t. d.* „ „ *bardziej złożone, które wyznaczyłem dla niektórych przypadków.*

[patrz dopełnienie 4 na str. 270].

„ 63 „ 5 od dołu zamiast: *znów,* powinno być: *jak dowiedzione będzie.*

ROZDZIAŁ I.

TEORYA OGÓLNA GRUP PRZEKSZTAŁCEŃ.

§ 1.

Wiadomości wstępne. Pojęcie przekształcenia. Parametry przekształcenia i warunki ich istotności. Przykłady.

Dajmy, że zmienne w liczbie n: $x_1', \ldots, x_n'$ dane są jako funkcye n innych zmiennych $x_1, \ldots, x_n$:

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

i że funkcye f dają się rozwiązać względem zmiennych x; mówimy wtedy, że równania te określają przekształcenie pomiędzy zmiennemi x i x'.

Przez funkcye f rozumiemy funkcye analityczne i jednowartościowe, określone dla pewnego obszaru (x) zmienności, rzeczywistego lub zespolonego zmiennych $x_1, \ldots, x_n$; obszar ten może być w szczególności także obszarem całkowitym wszystkich możliwych rzeczywistych lub zespolonych wartości tych zmiennych.

Przypuśćmy, że wzory powyższe są takiemi, że dla każdych dwu różnych układów wartości zmiennych x otrzymujemy zawsze dwa różne układy wartości zmiennych x'. Przyjmijmy nadto, że funkcye f są regularnemi w otoczeniu każdego z punktów $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ obszaru, dla którego je

określiliśmy, t. j że w otoczeniu tem dają się rozwinąć na szereg całkowitych dodatnich potęg różnic $x_1 - x_1^0$, $x_2 - x_2^0$, ...

Ponieważ założyliśmy, że funkcye f są rozwiązalne względem zmiennych x, pomiędzy któremi niema zachodzić—co oczywiście przyjmujemy—żaden związek, przeto wyznacznik funkcyjny tych funkcyj względem zmiennych x musi mieć wartość skończoną, różną od zera; w takim zaś razie istnieć będzie obszar zmiennych x', w którym zmienne x mogą być uważane za funkcye zmiennych x' takie, że i ich wyznacznik funkcyjny jest różny od zera.

Przekształcenie, dane przez wzory, przedstawiające te właśnie funkcye odwrotne, t. j. przez wzory, wyrażające zmienne x przez zmienne x', nazywa się przekształceniem odwrotnem względem danego.

Dwa szeregi zmiennych:

$$x_1, \ldots, x_n ; \; y_1, \ldots, y_n ,$$

które mają być poddane temu samemu przekształceniu, nazywają się zwykle zmiennemi spółpodstawieniowemi.

Niechaj będzie przekształcenie:

$$S) \qquad x_i' = f_i(x), \qquad (i=1, 2, \ldots, n)^*);$$

pomyślmy, że przekształcenie to wykonano na pewnej funkcyi zmiennych x, które przez to stanie się pewną funkcyą zmiennych x'; wyobraźmy sobie w dalszym ciągu, że do nowych tym sposobem wprowadzonych zmiennych stosujemy nowe przekształcenie:

$$S') \qquad x_i'' = \varphi_i(x') \ldots \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

przez które przechodzimy od zmiennych x' do innych n zmiennych x''. Funkcya, do której stosowaliśmy przekształcenie, stanie się funkcyą zmiennych x''; otóż pytamy: przy pomocy jakiego przekształcenia pomiędzy zmiennemi x i x'' doszlibyśmy

*) Dla krótkości używać będziemy często znakowania $f_i(x)$, zamiast $f_i(x_1, \ldots, x_n)$.

do tego samego wyniku? Oczywiście, by znaleść to przekształcenie, dość wyrugować zmienne x' pomiędzy wzorami poprzedzającemi, i otrzymamy wtedy:

$$x_i'' = \varphi_i [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)] = \psi_i(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Dla możności wykonania wskazanych tu rachunków należałoby naturalnie poczynić założenia o obszarach zmienności dla zmiennych x i x', t. j. potrzebaby przyjąć, że zmienne x', występujące w przekształceniu S, mogą przybierać te same wartości, co zmienne x', występujące w przekształceniu S', inaczej mówiąc, zmienne x' winnyby być wzięte w obszarze (x). Przyjmijmy tedy, że w obszarze (x) można obrać taki obszar $((x))$, iż dla każdego wziętego w nim układu zmiennych x, zmienne x' przypadają w obszarze (x).

Wzory poprzedzające przedstawiają w takim razie pewne przekształcenie pomiędzy zmiennemi x i x'', które daje ten sam wynik, co stosowanie kolejne dwu przekształceń S i S'; przekształcenie to, dla łatwo zrozumieć się dającego powodu, nazwiemy i l o c z y n e m dwóch przekształceń i oznaczać je będziemy symbolem $S'S$, rozumiejąc ten sposób pisania tak, że n a j p r z ó d wykonywamy przekształcenie S, a p o t e m przekształcenie S'. Gdybyśmy wykonali najprzód przekształcenie S', potem zaś przekształcenie S, otrzymalibyśmy przekształcenie SS', i aby mieć wzory tego przekształcenia, należałoby napisać S i S' (zmieniając nazwy zmiennych) w postaci:

$$S) \quad x_i'' = f_i(x'), \qquad S') \quad x_i' = \varphi_i(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, n$$

i otrzymalibyśmy tym sposobem:

$$x_i'' = f_i [\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] = \chi_i(x), \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Jest widocznem, że w ogólności funkcye χ różnić się będą od funkcyj ψ, co znaczy, że wogólności iloczyn SS' nie przedstawia tego samego przekształcenia, co iloczyn $S'S$. Jeżeli w szczególności zachodzi przypadek:

$$S'S = SS',$$

mówimy wtedy, że przekształcenia S i S' są przemienne.

To, co powiedziano o iloczynie dwu przekształceń, można bez żadnej trudności rozciągnąć na iloczyn większej liczby przekształceń; z poprzedzającego wynika oczywiście, że iloczyn, tak określony, nie jest niezależny od porządku czynników, że więc przekształcenia nie czynią wogóle zadość t. zw. prawu przemienności.

Przekształcenie najprostsze $x_i' = x_i$ nazywa się tożsamościowem; zmienia ono tylko nazwy zmiennych. Oznaczamy je zwykle symbolem 1.

Mnożąc dane przekształcenie przez przekształcenie względem danego odwrotne, otrzymujemy oczywiście przekształcenie tożsamościowe, i dla tego to przekształcenie odwrotne względem przekształcenia danego S oznaczamy symbolem S^{-1}. W samej rzeczy, mamy wtedy $SS^{-1} = 1 = S^{-1}S$; stąd: każde przekształcenie jest przemienne ze swojem odwrotnem.

Z powyższego wypływa, że obliczanie iloczynu dwu lub więcej przekształceń sprowadza się w każdym przypadku do eliminacyi pomiędzy wzorami na te przekształcenia. I tak, jeżeli mamy przekształcenia $S, S', \ldots, S^{(k)}$ i napiszemy wzory na pierwsze przekształcenie pomiędzy zmiennemi $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}$, a zmiennemi $x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$, wzory na drugie pomiędzy zmiennemi $x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$, a zmiennemi $x_1^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}, \ldots$ wreszcie wzory na ostatnie przekształcenie pomiędzy zmiennemi $x_1', \ldots, x_n'$ a $x_1, \ldots, x_n$, to obliczyć iloczyn wszystkich tych przekształceń w porządku $SS' \ldots . S^{(k)}$, (t. j. wykonywając najprzód przekształcenie $S^{(k)}$, następnie $S^{(k-1)}, \ldots$) znaczy wyrugować pomiędzy wszystkiemi temi wzorami zmienne $x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots, x_1', \ldots, x_n'$ i otrzymać związki, łączące wprost zmienne $x_1^{(k+1)}, \ldots, x_n^{(k+1)}$ ze zmiennemi $x_1, \ldots, x_n$. Tu występuje t. z. własność łączności owa przekształceń, polegająca na tem, że jeżeli nie zmieniamy kolei pojedyńczych przekształceń S, wtedy zamiast dwu lub więcej przekształceń kolejnych można podstawić ich iloczyn, t. j. że:

$$SS'S''\ldots S^{(k)} = (SS')S''\ldots S^{(k)} = S(S'S'')\ldots S^{(k)} = \text{i t. d.}$$

Własność ta jest jasną na pierwszy rzut oka, jeżeli tylko pomyślimy, że wynik wskazanej wyżej eliminacyi jest oczywiście zawsze ten sam, gdy eliminujemy najprzód jednę którąkolwiek grupę zmiennych, potem inną i tak dalej.

Niechaj będzie przekształcenie:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_r); \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

w którem uwidoczniliśmy parametry $a_1, a_2, \ldots, a_r$, występujące w funkcyi f. Jeżeli parametrom nadamy wartości oznaczone, określimy przez to pewne przekształcenie specyalne. Przyjmijmy nadto, że funkcye f są funkcyami analitycznemi, regularnemi, określonemi w pewnym obszarze tak zmiennych x, jak i parametrów a. Obszary te oznaczać będziemy, jak wyżej, odpowiednio przez (x) i (a).

Pierwsze nasuwające się tu pytanie jest następujące:

Najprzód jest jasnem, że zmieniając parametry a (wogóle z e s p o l o n e) wszelkiemi możliwemi sposobami, otrzymamy wogólności ∞^{2r}, albo też $\infty^{2(r-\nu)}$ różnych przekształceń; przypadek drugi zachodzi wtedy, gdy parametry a tak są zawarte w funkcyach f, że grupują się w $r-\nu$ funkcyj $A_1, A_2, \ldots, A_{r-\nu}$ tychże parametrów w ten sposób, iż funkcye f są funkcyami parametrów a za pośrednictwem tych funkcyj A. Że wtedy całkowita mnogość przekształceń wynosi $\infty^{2(r-\nu)}$, wypływa stąd, iż różność przekształceń polega na różnych wartościach nie parametrów a, lecz funkcyj A. Jeżeli zaś ten przypadek nie zachodzi, t. j. gdy $\nu=0$, wtedy mnogość przekształceń wynosi ∞^{2r}, i mówimy, że parametry $a_1, \ldots, a_r$ zachodzą w funkcyach f s p o s o b e m i s t o t n y m, lub że są i s t o t n e m i. Otóż pytamy, jakim warunkom winny czynić zadość funkcye f, aby parametry były istotnemi?

Dajmy, że istnieją funkcye $A_1, A_2, \ldots, A_{r-\nu}$, gdzie ν większe od zera, i rozważmy funkcyę ogólną φ parametrów a oraz wyznacznik funkcyjny:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial a_{r-\nu+1}} \\ \frac{\partial A_1}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial A_1}{\partial a_{r-\nu+1}} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial A_{r-\nu}}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial A_{r-\nu}}{\partial a_{r-\nu+1}} \end{vmatrix}$$

funkcyj $\varphi, A_1, \ldots, A_{r-\nu}$ względem $r-\nu+1$ dowolnie obranych z pomiędzy parametrów a (dla prostoty obraliśmy tu $r-\nu+1$ pierwszych parametrów a). Wyznacznik ten, przyrównany do zera, da nam równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych, liniowe. jednorodne, rzędu pierwszego z funkcyą niewiadomą x, mające postać:

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{r-\nu+1} a_k (a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = 0.$$

Można to równanie uważać za przypadek szczególny równania typu ogólniejszego:

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{r} a_k (a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = 0,$$

a czynią mu oczywiście zadość całki:

$$\varphi = A_1, \varphi = A_2, \ldots, \varphi = A_{r-\nu}.$$

Otóż ponieważ funkcya jakakolwiek funkcyj $A_1, A_2, \ldots, A_{r-\nu}$ będzie oczywiście—jak to łatwo okazać[1]) - czyniła zadość temu samemu równaniu i ponieważ właśnie funkcye f są na zasadzie założenia funkcyami tychże A, więc wynika stąd, że i funkcye f czynią zadość powyższemu równaniu różniczkowemu. Lecz

[1]) W samej rzeczy, jeżeli mamy pewną funkcyę $\Phi (A_1, \ldots, A_{r-\nu})$, to pochodne jej względem parametrów a wyrażają się wzorami:

z równań takich, jak (2), możemy utworzyć inne, wybierając pewien układ $r-\nu+1$ parametrów a; będziemy więc mieli tyle równań (2) typu ogólnego (3), ile jest takich układów możliwych. Możemy tedy twierdzić, że jeżeli parametry $a_1, \ldots, a_r$ nie są istotnemi, to funkcye f muszą z pewnością czynić zadość pewnej liczbie równań różniczkowych (co najmniej jednemu równaniu) o pochodnych cząstkowych typu równania (3).

Odwrotnie, załóżmy, że funkcye f czynią zadość równaniu typu (3), które—jak wiadomo z teoryi równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych—nie może mieć więcej ponad $r-1$ całek niezależnych[1]); niechaj niemi będą $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}$, funkcye parametrów a. Ponieważ według założenia funkcye f są także całkami, więc będą one funkcyami całek $\varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}$, a zatem parametry a, występując w funkcyach f za pośrednictwem funkcyj φ, których liczba jest mniejsza od r, nie będą istotnemi.

Stąd wypływa twierdzenie:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby parametry a były istotnemi we wzorach (1), jest, by funkcye f nie czyniły zadość żadnemu równaniu różniczkowemu typu:

$$\sum_{k=1}^{r} a_k (a_1, \ldots, a_r) \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = 0. \tag{4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial a_1} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial A_{r-\nu}}\frac{\partial A_{r-\nu}}{\partial a_1},$$

. . . . . .

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_{r-\nu+1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial A_{r-\nu+1}} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial A_{r-\nu}}\frac{\partial A_{r-\nu}}{\partial a_{r-\nu+1}}.$$

Mnożąc pierwszy z nich przez α_1, drugi przez α_2 i t. d., dodając i zważając, że suma wszystkich wyrazów, znajdujących się po stronie drugiej, równa się zeru, stwierdzamy powyższe orzeczenie.

[1]) W samej rzeczy, jeżeliby tych całek było r, to ich wyznacznik funkcyjny względem parametrów $a_1, \ldots, a_r$ byłby zerem, gdyż pomiędzy elementami któregokolwiek szeregu zachodziłby jeden i ten sam związek liniowy jednorodny, t. j. związek, którym jest właśnie równanie (3).

Powstaje teraz pytanie: dane są funkcye $f_1, \ldots, f_n$, znaleść sposób praktyczny przekonania się o tem, czy parametry w nich zachodzące są istotne, czy też nie.

Utwórzmy pochodne $\frac{\partial f_i}{\partial a_k}$ i zbudujmy równania typu (4), wyobrażając sobie w nich wielkości a nieoznaczonemi; pytanie nasze sprowadza się do tego, by przekonać się, czy z tych równań, liniowych i jednorodnych względem wielkości a, otrzymać można wartości a, będące funkcyami samych tylko parametrów a. W tym celu można stosować postępowanie takie:

W równaniach (4) zamiast φ połóżmy $f_1, \ldots, f_n$ i nadajmy zmiennym x wartości oznaczone lecz ogólne x'; na wyznaczanie wielkości a będziemy wtedy mieli n równań liniowych jednorodnych, pomiędzy któremi niechaj będzie $r' \leqslant r$ niezależnych. Jeżeli $r'=r$, wtedy wielkości a będą tożsamościowo zerami, a więc mamy wtedy r parametrów istotnych. Jeżeli $r' < r$, wtedy w równaniach pierwotnych zamiast zmiennych x podstawiamy inne wartości oznaczone x''; otrzymujemy tym sposobem inne równania na wyznaczenie wielkości a Dajmy, że pomiędzy temi nowemi równaniami jest r'' niezależnych, tak że $r'+r'' \leqslant r$. Gdy $r'+r''=r$, wtedy, jak wyżej, wielkości a są zerami i parametry są istotnemi; w razie przeciwnym postępujemy jak wyżej, póki nie dojdziemy do liczby $r'+r''+\ldots+r^{(q-1)}$ równań wzajemnie niezależnych i takich, że gdy w równaniach pierwotnych (4) za zmienne x podstawimy jakikolwiek układ wartości dowolnych (za φ zaś naturalnie funkcye $f_1, \ldots f_n$) otrzymamy równania, będące wynikiem poprzedzających, tak że liczba $r^{(q)}$ i wszystkie po niej następujące $r^{(q+1)}, \ldots$ będą zerami, bez względu na wybór wartości x. Doszedłszy do tego punktu, dla przekonania się, czy parametry są albo nie są istotnemi, dość zbadać wartość liczby $r'+r''+\ldots+r^{(q-1)}$. Jeżeli ta liczba jest równa r, parametry są istotnemi; gdy jest mniejsza od r, są nieistotnemi.

Jako przykład weźmy przekształcenie:

$$x' = \frac{x+a_1}{a_2 x + a_3},$$

zawierające trzy parametry; pochodne cząstkowe względem parametrów (po sprowadzeniu do wspólnego mianownika) są:

$$\frac{a_2x+a_3}{(a_2x+a_3)^2}, \quad -\frac{x(x+a_1)}{(a_2x+a_3)^2}, \quad -\frac{x+a_1}{(a_2x+a_3)^2},$$

i jest widocznem, że nie można tak pomnożyć tych wielkości przez funkcye s a m y c h w i e l k o ś c i a, aby suma otrzymanych iloczynów była zerem. W rzeczy samej, po pomnożeniu tych pochodnych przez trzy wielkości, dajmy na to M, N, P, aby było tożsamościowo:

$$M(a_2x+a_3) - Nx(x+a_1) - P(x+a_1) = 0,$$

otrzymujemy:

$$N = 0, \quad Ma_2 - P = 0, \quad Ma_3 - Pa_1 = 0,$$

a ponieważ a_1, a_2, a_3 są nieoznaczone, przeto dwie ostatnie równości mogą zachodzić tylko wtedy, gdy M i P nie są zerami. Stąd trzy parametry są i s t o t n e m i.

Rozpatrzmy teraz przekształcenie o czterech parametrach:

$$x' = \frac{a_1x+a_2}{a_3x+a_4};$$

czterema pochodnemi cząstkowemi są:

$$\frac{x(a_3x+a_4)}{(a_3x+a_4)^2}, \quad \frac{a_3x+a_4}{(a_3x+a_4)^2}, \quad -\frac{x(a_1x+a_2)}{(a_3x+a_4)^2}, \quad -\frac{a_1x+a_2}{(a_3x+a_4)^2},$$

i jest jasnem, że gdy pomnożymy je odpowiednio przez $a_1=a_1$, $a_2=a_2$, $a_3=a_3$, $a_4=a_4$ i dodamy iloczyny, otrzymamy sumę tożsamościowo równą zeru. Cztery parametry nie są więc istotnemi, co zresztą wypływa wprost z uwagi, że przekształcenie powyższe zależy w samej rzeczy od stosunku trzech z pomiędzy nich do czwartego.

§ 2.

Definicya ciągłych grup przekształceń. Grupy skończone i grupy nieskończone. Grupy Liego. Podobieństwo dwu grup.

Niechaj dane będą wzory:

$$x_i' = f_i(x_i, a), \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$ [1]

i niechaj f_i będą, jak wyżej, funkcyami określonemi, regularnemi w pewnym obszarze zmienności wielkości x, który oznaczamy przez $((x))$, oraz w pewnym obszarze zmienności wielkości a, który oznaczamy przez $((a))$, i nadto takiemi, że w żadnym punkcie obszaru wyznacznik funkcyjny funkcyj f nie jest zerem. O funkcyach tych uczyńmy jeszcze założenie, że dla danego układu wartości parametru a dwóm różnym układom wartości zmiennych x odpowiadają zawsze dwa różne układy wartości zmiennych x', i że wielkości x' znajdują się też zawsze w obszarze $((x))$.

Dla każdego układu wartości parametrów a mamy jedno przekształcenie. Jeżeli założymy, że parametry a są istotnemi, to wszystkich przekształceń będzie ∞^{2r}. Wyobraźmy sobie, że przekształcenia te są takiemi, iż iloczyn dwóch z pomiędzy nich (patrz § 1), t. j. np. iloczyn przekształcenia, w którem parametry mają wartości a, przez przekształcenie, w którem parametry mają wartości b, jest przekształceniem, należącem również do tego samego zbioru przekształceń, to znaczy, jest przekształceniem, którego wzorami są też same wzory (1), gdzie parametry otrzymują pewne wartości c, zawarte w obszarze zmienności $((a))$. Jeżeli ta okoliczność zachodzi dla jakichkolwiek dwóch mnożonych przez siebie przekształceń, mówimy wtedy, że ten z b i ó r p r z e k s z t a ł c e ń s t a n o w i g r u p ę. Grupa ta nazywa się s k o ń c z o n ą, gdyż przyjmujemy, że liczba parametrów r jest skończona (patrz niżej).

---

[1]) Dla krótkości pisać będziemy $f(x, a)$, zamiast $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

Grupy mogą być ciągłe albo nieciągłe. Ciągłemi są wtedy, gdy od jednego przekształcenia można przejść do innego na drodze ciągłej, zmieniając sposobem ciągłym wartość parametrów; nieciągłemi są wtedy, gdy tego uczynić nie można. Grupa ciągła zawiera oczywiście nieskończenie wiele przekształceń. W wykładzie dalszym rozważać będziemy zawsze grupy ciągłe.

Grupa, której wszystkie przekształcenia zawarte są pomiędzy przekształceniami innej grupy, nazywa się podgrupą tej drugiej (zob. niżej).

Wyłożone tu pojęcie grupy jest ściśle pokrewne z analogicznem pojęciem w teoryi podstawień, z tą tylko różnicą, iż w tej teoryi grupa składa się zawsze ze skończonej liczby podstawień i jest grupą nieciągłą.

Pojęcie grupy przekształceń jest znacznie późniejsze od pojęcia grupy podstawień. Podane poraz pierwszy wyraźnie w rozprawie Sophusa Liego (Akad. nauk w Chrystianii, 1871, str. 243) i w rozprawie F. Kleina (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872, przekład polski w t. V „Prac matematyczno fizycznych"), pozyskało rozwinięcie w pracach Liego i innych, które ukazały się w ciągu ostatnich lat trzydziestu, a które wymieniać będziemy w odpowiednich miejscach dalszego wykładu. Pierwsze systematyczne wykłady tej teoryi ogłosił Lie w r. 1888 i później wraz ze swymi uczniami, Engelem i Schefferse m; oto ich tytuły: „Theorie der Transformationsgruppen", 3 tomy (Lipsk, 1888—1893); „Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen" (Lipsk, 1891, streszczone przez J. Paczowskiego w t. VII „Prac matematyczno-fizycznych", 1896); „Vorlesungen über contuirliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen" (Lipsk. 1893); „Untersuchungen über unendliche contuirliche Gruppen" (Lipsk, 1895); „Geometrie der Berührungstransformationen", I (Lipsk, 1896, streszczenie E. Wierzbickiego w t. IX „Prac matematyczno-fizycznych", 1898). Liczne wskazówki historyczne i filozoficzne o doniosłości tej nowej teoryi, o poprzednikach w niej, o licznych związkach jej z innemi częściami matematyki znaleść można w przedmowach do t. I i III wspo-

mnianego dzieła Liego: „Theorie der Transformationsgruppen“ i w § 20 rozprawy Liego w t. XVI czasopisma: „Mathematische Annalen“ (str. 523—528). Wyliczenie prac i wyników innych autorów w tej teoryi zawiera rozdział 29 t. III wspomnianego dzieła Liego (str. 753—815).

Celem rozjaśnienia pojęcia ogólnego grupy, poczyńmy następujące rozważania

Niechaj będą dane wzory przekształcenia $x_i'=f(x, a_1, \ldots, a_r)$ i dajmy, że funkcye f są analitycznemi i regularnemi swych argumentów, t. j. że dają się rozwinąć na szeregi potęg całkowitych dodatnich w otoczeniu każdego punktu obszaru, w którym są określone. Ograniczenie tego obszaru może być zależne albo od natury funkcyj f, albo od innych okoliczności. W pierwszym przypadku przyjmiemy, że funkcye f mogą być za pomocą znanych metod teoryi funkcyj analitycznych przeprowadzone analitycznie możliwie najdalej, o ile na to pozwala ich natura, oraz że niema tu t. zw. obszarów osobliwych, wewnątrz których funkcye nie dają się przeprowadzić analitycznie, Lecz można także przyjąć, że obszar, w którym przeprowadzamy funkcye f, uważane za funkcye parametrów a, może być więcej ograniczony niż obszar poprzedni, byleby przekształcenia zachowywały własność tworzenia grupy. Tak np., jeżeli rozważamy wzór $x'=ax$, to odpowiadającą jej grupą w znaczeniu pierwszem będzie grupa, dla której wielkość a otrzymuje wszystkie możliwe wartości, gdyż dla wszelkich możliwych wartości można przeprowadzić funkcyę x' wielkości a; według zaś pojęcia ogólniejszego, można rozważać też grupy, przedstawione przez ten sam wzór, w którym atoli a nie może przybierać już wszelkich możliwych wartości, lecz np. tylko wartości o module mniejszym od 1. Zauważyć wszakże należy, że i grupa $x'=ax$, w której $|a|<1$ może być też uważana jako grupa gatunku pierwszego; dość bowiem zmienić w niej parametr i zamiast a wziąć taką funkcyę nowego parametru λ, aby przy zmienianiu się tego parametru, funkcya ta przybierała jedynie wartości o module mniejszym od 1. Można to uczynić, wybierając odwrotność znanej funkcyi z obszarem osobliwym, określonej

jedynie dla wszystkich punktów koła ze środkiem w punkcie zero i o promieniu równym 1. (Patrz Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen, t. I, str. 164).

Fakt, że w tym przykładzie szczególnym drugi punkt widzenia daje się sprowadzić do pierwszego, nie dowodzi wszakże bynajmniej, by tak zawsze rzecz się miała ogólnie.

Nazywać będziemy grupę, określoną według pierwszego z dwóch przedstawionych wyżej punktów widzenia, grupą Liego, tej bowiem natury są właśnie grupy, któremi zajmuje się teorya Liego. Nie wyłączamy atoli z rozważania naszego i grup drugiego gatunku.

Odpowiednio do tych dwóch punktów widzenia, mamy i dwa różne gatunki podgrup, mianowicie: 1-o grupy, które powstają przy pewnem odpowiedniem ograniczeniu obszaru zmienności parametrów i zawierają tęż samę liczbę parametrów istotnych, co grupa dana; 2-o podgrupy, w których liczba parametrów istotnych jest mniejsza od liczby parametrów grupy danej. Pierwsze nazywać będziemy podgrupami gatunku pierwszego, drugie — podgrupami gatunku drugiego.

Widocznemi są twierdzenia następujące:

Podgrupa gatunku pierwszego nie może być nigdy grupą Liego.

Grupa z jednym parametrem istotnym nie może posiadać podgrup gatuku drugiego.

Lie rozważa tylko podgrupy gatunku 2-go (p. Theorie der Transf., I, s. 204) i my też w następstwie, o ile tego wyraźnie inaczej nie zaznaczymy, innych podgrup rozważać nie będziemy.

Powiedziano, że grupy, wyżej określone, nazywają się skończonemi, gdyż zależą od skończonej liczby r parametrów istotnych. Dla uzupełnienia tego pojęcia należy pokazać jeszcze, w jaki sposób można tu określić grupę nieskończoną, gdyż oczywiście orzeczenie, że grupa jest nieskończoną wtedy, gdy ta liczba r staje się nieskończoną, nie ma określonego znaczenia. Trzeba w tym celu określić grupę skończoną przekształceń w sposób, od wyżej podanego odmienny i taki, aby

można było bezpośrednio uogólnić go dla pozyskania definicyi grupy nieskończonej.

Postępujemy w ten sposób: różniczkujemy równania (1) względem zmiennych x tyle razy, ile potrzeba, aby ze związków otrzymanych módz wyrugować parametry a, i otrzymujemy układ równań różniczkowych, którego całkami są równania (1). Te równania różniczkowe mogą wystarczać do określenia grupy, wzory zaś przekształceń grupy są dokładnie całkami tych równań.

Ze sposobu tworzenia tego układu wynikają oczywiście dwie następujące jego własności: 1-o jego całki najogólniejsze zawierać będą r stałych dowolnych; 2-o jeżeli $x_i' = f_i(x, b)$ jest rozwiązaniem szczególnem, $x_i' = f_i(x, a)$ — innem takiem rozwiązaniem, wtedy i $x_i' = f_i(f(x, a), b)$ będzie także rozwiązaniem.

Można tedy grupę skończoną przekształceń określić przy pomocy układu równań różniczkowych powyższego gatunku, t. j. układu o powyższych dwóch własnościach.

Teraz już uogólnienie dla przypadku, gdy r jest n i e s k o ń c z o n e, widać odrazu: dość bowiem wyobrazić sobie układ równań różniczkowych, mający własność drugą i nie mający własności pierwszej; całki takiego układu dadzą nam wzory przekształcenia.

Bardzo prosty przykład na to daje układ równań różniczkowych:

$$\frac{dx_i'}{dx_j} = 0, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie skaźniki i, j m a j ą b y ć z a w s z e r ó ż n e; całkami tego układu są związki:

$$x_i' = \varphi_i(x_i),$$

gdzie φ_i są funkcye dowolne j e d n e g o t y l k o a r g u m e n t u x_i. Związki te czynią zadość temu układowi, mają własność drugą i nie posiadają własności pierwszej, gdyż funkcye φ, jako dowolne, nie zawierają oznaczonej i skończonej liczby parametrów dowolnych.

Można określić grupę nieskończoną jeszcze ogólniej, ale nie zatrzymując się nad tem, odsyłamy czytelnika do wstępu w tomie I dzieła „Theorie der Transf." Liego i do innego wyżej już cytowanego dzieła, poświęconego specyalnie grupom nieskończonym.

Powróćmy do definicyi grupy skończonej i ciągłej.

Aby przekształcenia (1) tworzyły grupę, trzeba, aby iloczyn dwóch z nich:

$$(2) \qquad x_i''=f_i(x, a), \quad x_i''=f_i(x_i', b),$$

był przekształceniem typu $x_i''=f_i(x, c)$. Tym iloczynem jest:

$$x_i''=f_i[f(x, a), b],$$

a zatem być winno tożsamościowo:

$$f_i[f(x, a), b] = f_i(x, c),$$

t. j. po pierwszej stronie tego ostatniego związku a i b winny zachodzić w ten sposób, aby tworzyły ugrupowania, które oznaczamy przez c, a które są funkcyami parametrów a i parametrów b, t. j.:

$$(3) \qquad c_k = \varphi_k(a_1, a_2, \ldots, a_r, b, b_2, \ldots, b_r) = \varphi_k(a, b).$$

Aby tu zachodziła grupa, trzeba, by wielkości c, przez te wzory określone, były zawarte w obszarze $((a))$, stąd $\varphi_k(a, b)$ winny być funkcyami parametrów a i b takiemi, że gdy a i b są zawarte w obszarze $((a))$, to i wielkości c są w tymże obszarze zawarte. Otóż można okazać, że równania (3) winny być rozwiązalne tak względem parametrów a, jak i względem parametrów b.

W samej rzeczy, niechaj po rozwiązaniu względem x równań $x_i'=f_i(x, a)$ będzie $x_i=F_i(x', a)$. Podstawmy te wartości na x w równania $x_i''=f_i(x, c)$; będzie:

$$x_i''=f_i[F(x', a), c].$$

Te związki pomiędzy wielkościami x'' i x' winny koniecznie zgadzać się tożsamościowo z wyżej podanemi związkami pomiędzy temi samemi zmiennemi, gdyż całe nasze postępowanie jest tylko szeregiem eliminacyj, stosowanych do dwóch układów wzorów zasadniczych (2); musi być zatem tożsamościowo:

$$f_i [F(x', a), c] = f_i (x', b).$$

Z tych związków tożsamościowych wynika, że wielkości b są funkcyami wielkości a i wielkości c. Podobnież możnaby otrzymać wielkości a jako funkcye wielkości b i c, i tym sposobem twierdzenie nasze zostało udowodnione.

Dajmy, że ustalamy wartości a, a wielkościom b nadajemy ∞^{2r} wartości zespolonych, wtedy i parametry c mieć mogą ∞^{2r} wartości dowolnych; inaczej bowiem wielkości b, będące funkcyami wielkości c, z któremi są połączone związkami, nie mogłyby mieć ∞^{2r} wartości dowolnych (w granicach obszaru zmienności parametrów). Ponieważ zaś parametry c są niezależne, przeto wyznacznik funkcyjny funkcyj φ_k względem parametrów b (i także względem parametrów a) musi być różny od zera w obszarze zmienności parametrów, dla którego określiliśmy funkcye regularne f.

Jako prosty przykład tych przekształceń rozpatrzmy:

$$x' = a_1 x + a_2.$$

Jest widocznem, że przekształcenia te tworzą grupę; gdyż mnożąc poprzedzające przekształcenie przez następujące:

$$x'' = b_1 x' + b_2,$$

otrzymujemy:

$$x'' = b_1 (a_1 x + a_2) + b_2 = b_1 a_1 x + b_1 a_2 + b_2,$$

co można napisać:

$$x'' = c_1 x + c_2,$$

gdzie:

$$c_1 = b_1 a_1, \quad c_2 = b_1 a_2 + b_2$$

Otrzymujemy tedy przekształcenie tego samego typu, jak to, z którego wyszliśmy, a różniące się tylko wartościami parametrów. Funkcyami φ w naszym przypadku są:

$$c_1 = \varphi_1 = b_1 a_1, \quad c_2 = \varphi_2 = b_1 a_2 + b_2,$$

a funkcye te są, w samej rzeczy, rozwiązalne względem a_1, a_2 oraz względem b_1. b_2, i dają:

$$a_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad a_2 = \frac{c_2 - b_2}{b_1}, \quad b_1 = \frac{c_1}{a_1}, \quad b_2 = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1}.$$

Uczynimy tu spostrzeżenie zasadnicze, dotyczące budowy grupy, przez nas w sposób podany określonej. Wiadomo z teoryi grup podstawień, że każda grupa podstawień zawiera w sobie podstawienie tożsamościowe i że każda grupa zawiera w sobie podstawienie odwrotne do każdego z podstawień. Otóż zasługuje na szczególną uwagę okoliczność, że własności te nie stosują się w ogólności do grup przekształceń, wyżej określonych. W samej rzeczy, aby mieć przekształcenie tożsamościowe, trzeba, by parametry a mogły przybierać takie wartości szczególne - nazwijmy je a^0—że funkcye $f_i(x, a)$ sprowadzają się tożsamościowo do formy x_i, t. j. że w wyrażeniach $f_i(x, a^0)$ znikają wszystkie zmienne, prócz jednej x_i, i ta zmienna występuje w formie całkowitej stopnia pierwszego ze spółczynnikiem równym 1. Otóż przedewszystkiem nie można twierdzić a priori, że istnieją zawsze takie wartości stałe a^0, dla których funkcye f_i sprowadzają się tożsamościowo do x_i, i następnie—jeżeli nawet przyjmiemy istnienie takich wartości a^0—to nie wynika stąd bynajmniej, że te wartości są zawarte w obszarze zmienności $((a))$, dla którego określiliśmy funkcye f, odpowiadające przekształceniom rozważanej grupy.

Załóżmy teraz, że grupa zawiera przekształcenie tożsamościowe, t. j. że wartości a^0 istnieją i są zawarte w obszarze $((a))$.

Należy tu odróżnić dwa przypadki: pierwszy, w którym obszar $((a))$ jest całkowitym obszarem, nierozłącznie związanym z naturą funkcyj f, t. j. w którym grupa należy do nazwanych przez nas grupami Liego; drugi przypadek, w którym obszar $((a))$ jest przez nas z góry dany, t. j. stanowi część poprzedzającego i jest naturalnie tak obrany, aby wzory przekształcenia stanowiły grupę. Niechaj w przypadku pierwszym punkt a^0 będzie punktem, w którym funkcye f są regularne, t. j. niechaj istnieje otoczenie punktu a^0, w którem funkcye te dają się rozwinąć na szeregi potęgowe; wtedy na podstawie twierdzenia, które później udowodnimy, (patrz Rozdz. I, § 5) przynajmniej w jednem takiem otoczeniu, dla każdego przekształcenia grupy istnieć będzie przekształcenie odwrotne, t. j. istnieć będzie przekształcenie, którego iloczyn przez dane będzie przekształceniem tożsamościowem. W przypadku drugim nie można wywodu tego stosować, gdyż np. punkt a^0 mógłby się znajdować na granicy obszaru $((a))$, ustanowionego przez nas niezależnie od natury funkcyj f, i wtedy przekształcenie odwrotne względem danego mogłoby mieć parametry, znajdujące się poza obszarem $((a))$.

Podamy przykład bardzo prosty, objaśniający te rozważania. Niechaj będą przekształcenia:

$$x' = xa,$$

w których parametr a niechaj będzie poddany ograniczeniu takiemu, że jego wartość bezwzględna $|a|$ ma być mniejsza od 1. Jest oczywistem, że iloczyn dwóch takich przekształceń jest tego samego gatunku, co oba dane; że więc przekształcenia te tworzą grupę. Lecz jest zarazem rzeczą jasną, iż w grupie tej niema przekształcenia tożsamościowego (dla którego musiałoby być $a=1$), i nadto, że dla żadnego przekształcenia grupy nie istnieje przekształcenie odwrotne, gdyż dla przekształcenia odwrotnego wartość modułu parametru musiałaby być większa od 1. Toż samo będzie, jeżeli zamiast poddawać wartości parametru po-

wyższemu ograniczeniu, przyjmiemy, że $|a| \leqslant \varepsilon < 1$, wybierając na ε jakąkolwiek wielkość, mniejszą od jedności. Lecz jeżeli położymy $|a| \leqslant 1$, to otrzymamy znowu grupę; grupa ta zawiera przekształcenie tożsamościowe, lecz podobnie jak wyżej, nie dla każdego przekształcenia istnieje w niej przekształcenie odwrotne Fakt ten pozostaje w zgodzie z tem, co powiedziano wyżej, że własność pierwsza nie pociąga za sobą własności drugiej, jeżeli nie mamy do czynienia z grupami Liego.

Natomiast jest widocznem, że własność druga pociąga za sobą własność pierwszą, bo jeżeli przyjmiemy, że w grupie dla danego przekształcenia istnieje odwrotne, to istnieć musi też przekształcenie, będące iloczynem obu, t. j. przekształcenie tożsamościowe.

Jeżeli ograniczymy obszar zmienności parametrów a sposobem, nie związanym z naturą funkcyi, otrzymamy grupę, która nie jest grupą Liego; ale jeżeli kładąc $a=\chi(\lambda)$, uskutecznimy taką przemianę parametru, że przy przeprowadzeniu analitycznem funkcyi χ, jak tylko można daleko, moduły jej wartości nie dochodzą do wartości 1, wtedy otrzymujemy przykład grupy Liego z nowym parametrem λ, nie posiadającej przekształcenia tożsamościowego. Że można to uczynić, widać łatwo, stosując funkcye z obszarami osobliwemi, jak to pokazał Engel w r. 1884 (patrz Lie, „Theorie der Transf.“, I, str. 165).

Istnieją tedy także grupy Liego bez przekształcenia tożsamościowego, wbrew mniemaniu pierwotnemu Liego. Nie istnieją wszakże (jak to powiedziano wyżej) grupy, zawierające przekształcenie tożsamościowe i zarazem takie, że przekształcenia, przynajmniej wewnątrz grupy, nie dają się zestawiać po dwa, z których jedno jest odwrotnością drugiego.

Udowodnimy teraz twierdzenie, odnoszące się do przekształceń odwrotnych do przekształceń grupy danej.

Wszystkie przekształcenia odwrotne względem przekształceń grupy danej o r pa-

rametrach istotnych tworzą również grupę o r parametrach.

W samej rzeczy, rozwiązując równania:

$$(4) \qquad x_i' = f_i(x, a),\ x_i'' = f_i(x', b),\ x_i'' = f_i(x, c),$$

otrzymujemy:

$$(5) \qquad x_i = F_i(x', a),\quad x_i' = F_i(x'', b),\quad x_i = F_i(x'', c)$$

i jeżeli przekształcenia dane tworzą grupę, powinno być:

$$(6) \qquad c_k = \varphi_k(a, b).$$

Otóż trzy wzory (5), przy uwzględnieniu wzorów (6), orzekają właśnie, że podstawienia odwrotne tworzą grupę, albowiem przedstawiają układ wzorów, zachodzących razem tożsamościowo, t. j. niezależnie od wartości zmiennych x; inaczej mówiąc, rugując np. x' z dwóch pierwszych równań, otrzymujemy wzory pomiędzy x i x'', które koniecznie muszą się zgadzać z ostatniemi wzorami (5), t. j. z $x_i = F_i(x_i'')$; stąd musi być tożsamościowo:

$$x_i = F_i[F(x'', b), a] = F_i(x'', c),$$

a to właśnie dowodzi naszego twierdzenia.

Wyjaśnimy tu jeszcze pojęcie grup wzajemnie podobnych, samą zaś teoryę podobieństwa wyłożymy później (§ 5 Rozdziału III).

Niechaj będą dane dwie grupy:

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r);\ X_i' = \psi_i(X_1, \ldots, X_n, A_1, \ldots, A_r),$$

o tej samej liczbie zmiennych i tej samej liczbie parametrów istotnych; nazywać je będziemy podobnemi, wtedy, gdy można zamiast wielkości X podstawić funkcye wielkości x, zamiast X' analogiczne funkcye wielkości x', zamiast parametru A funkcye parametrów a, tak, aby wzory, stojące wyżej na drugiem miejscu, stały się identycznemi z wzorami na pierwszem.

Możemy okazać, że dwie grupy podobne mają własność następującą: przekształcenia ich można uczynić odpowiadającemi sobie dwujednoznacznie, t. j. jedno odpowiada drugiemu w ten sposób, że iloczynowi dwu przekształceń odpowiada iloczyn dwóch przekształceń, odpowiadających tamtym. Jest to własność, charakteryzująca izomorfizm dwu grup, o którym mówić będziemy później (p. § 4 Rozdziału III).

Aby udowodnić tę własność, uważajmy dwa przekształcenia, jedno z jednej, drugie z drugiej grupy za odpowiadające sobie wtedy, gdy wartościom parametrów jednego odpowiadają wartości parametrów drugiego, jako funkcye, wyrażające, na mocy założenia, te drugie parametry przez pierwsze. Uważajmy nadto dwa przekształcenia grupy pierwszej z parametrami a, b oraz przekształcenie, będące ich iloczynem z parametrem c; będziemy wtedy mieli związki tożsamościowe:

$$f_i [f (x, a), b] = f_i (x, c).$$

Wartościom a odpowiadają wartości A parametrów drugiej grupy, to znaczy: funkcye, przy pomocy których drugie wyrażają się przez pierwsze, przybierają wartości A, gdy pierwsze mają wartości a; podobnież wartościom parametrów b odpowiadają wartości parametrów B. Iloczyn przekształceń tej drugiej grupy, odpowiadających wartościom parametrów A, B, niechaj ma parametry C; będzie tedy tożsamościowo:

$$\psi_i [\psi (X, A), B] = \psi_i (X, C).$$

Otóż, na zasadzie założenia, funkcye ψ stają się funkcyami f, gdy zamiast X i A napiszemy funkcye wielkości x i a, wypływające z definicyi podobieństwa, np. $X_i = V_i (x)$, $A_k = U_k (a)$. Widzimy stąd, że po tych podstawieniach strony pierwsze tych związków stają się tożsamościowo stronami pierwszemi związków poprzedzających; stąd, jeżeli zamiast A i B napiszemy też same funkcye U parametrów a i b (oraz X jako funkcye zmien-

nych x), wtedy i strony drugie staną się tożsamemi. W samej rzeczy, strony drugie, na zasadzie założenia, stają się tożsamościowemi, gdy położymy $X_i = V_i(x)$ oraz $C_k = U_k(c)$, stąd podstawienie:

$$A_k = U_k(a), \quad B_k = U_k(b),$$

jest równoważne podstawieniu $C_k = U_k(c)$, t. j. że jeżeli parametr a odpowiada parametrowi A, b parametrowi B, to i c odpowiadać będzie parametrowi C.

W wykładzie dalszym często interpretować będziemy zmienne x jako spółrzędne przestrzeni n-wymiarowej, co pozwoli nam nadać szatę geometryczną rozważaniom naszym i przedstawiać grupy jako grupy przekształceń pomiędzy punktami tej przestrzeni

---

§ 3.

Przykłady grup pospolitszych. Grupy liniowe, grupy rzutowe, grupy Cremony.

Pomiędzy pospolitszemi grupami przekształceń wymieniamy najprzód tak zwaną grupę rzutową, daną przez wzory:

$$x_i' = \frac{a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + a_{i,n+1}}{a_1'x_1 + \ldots + a_n'x_n + a'_{n+1}}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

z $n(n+2)$ parametrami istotnemi. We wzorach tych dla wszelkich wartości skaźnika i mianownik jest jeden i ten sam.

Podgrupę tej grupy otrzymujemy, kładąc:

$$a_1' = a_2' = \ldots = a_n' = 0,$$

tak że wielkości x' stają się funkcyami całkowitemi wielkości x. Jest to t. zw. grupa liniowa ogólna (Lie); jej godne-

mi uwagi podgrupami są: jedna, dla której wszystkie $a_{i,n+1}$ są zerami i ta nazywa się grupą liniową jednorodną; druga, dla której wyznacznik wielkości $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ jest jednością i ta nazywa się grupą liniową specyalną.

Łatwo widzieć, że pierwsza z tych podgrup jest istotnie grupą; że jest nią i druga, przekonywamy się sposobem następującym. Niechaj będzie przekształcenie:

$$x_i' = a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{in}\, x_n + a_{i,n+1},$$

dla którego wyznacznik $|a_{ij}|$ wielkości a_{ij} jest równy jedności. Pomnóżmy to przekształcenie przez inne:

$$x_i'' = b_{i1}\, x_1' + \ldots + b_{in}\, x_n' + b_{i\,n+1},$$

dla którego wyznacznik $|b_{ij}| = 1$. Iloczyn tych dwóch przekształceń będzie:

$$x_i = (b_{i1}\, a_{11} + \ldots + b_{in}\, a_{n1})\, x_1 + \ldots$$
$$+ (b_{i1}\, a_{1n} + \ldots + b_{in}\, a_{nn})\, x_n + (b_{i1}\, a_{1,n+1} + \ldots + b_{in}\, a_{n,n+1}),$$

a wyznacznik jego spółczynników równa się iloczynowi $|a_{ij}| . |b_{ij}|$, ma zatem wartość równą jedności.

Podgrupa wspólna dwóm wyżej określonym podgrupom, wyraża się za pomocą wzorów:

$$x_i' = a_{i1}\, x_1 + \ldots + a_{in}\, x_n,$$

gdzie $|a_{ij}| = 1$ i nazywa się grupą specyalną liniową jednorodną.

Grupy poprzedzające należą do gatunku grup, zwanych grupami Cremony (kremoniańskiemi).

Przekształcenie pomiędzy wielkościami x' i x nazywa się kremoniańskiem lub dwuwymiernem, jeżeli wielkości x' wyrażają się wymiernie przez wielkości x i parametry a, oraz odwrotnie, wielkości x wyrażają się wymiernie przez wielkości x' i a. Grupa takich przekształceń nazywa się kre-

moniańską, jeżeli jest grupą Liego, t. j. jeżeli przyjmujemy, że obszar wartości parametrów a jest obszarem całkowitym wszystkich możliwych wartości, dla których właśnie, jak wiadomo, określają się funkcye wymierne.

Do tak określonej grupy kremoniańskiej nie mogą stosować się rozważania, zależne od ograniczenia obszarów zmienności, podane przez nas na końcu § 2-go; ale można dowieść, że grupa ta ma dwie własności następujące: posiada przekształcenie tożsamościowe; do każdego przekształcenia zawiera odwrotne. W samej rzeczy, jeżeli rozwiążemy $c_k = \varphi_k(a, b)$ względem a, mieć będziemy $a_k = \chi_k(b, c)$. Kładąc tu $c_1 = b_1$, $c_2 = b_2$, ..., $c_r = b_r$, co uczynić wolno, gdyż, jak powiedzieliśmy, obszarem zmienności jest obszar całkowity, otrzymamy na parametry a wartości, któremi niechaj będą $a_1^0, \ldots, a_r^0$. Przekształcenie:

$$x_i' = f_i(x, a^0),$$

będzie przekształceniem tożsamościowem. W samej rzeczy, na zasadzie założeń, iloczyn dwóch przekształceń:

$$x_i' = f_i(x, a^0), \quad x_i'' = f_i(x', b),$$

jest przekształceniem $x_i'' = f_i(x, b)$ i te trzy układy wzorów zachodzą równocześnie i tożsamościowo. Otrzymujemy z nich tożsamościowo:

$$f_i(x', b) = f_i(x, b).$$

Stąd, uwzględniając definicyę grupy kremoniańskiej, otrzymujemy:

$$x_i' = x_i$$

i te związki powinny być temi samemi związkami pomiędzy x' i x, z których wyszliśmy. W ten sposób twierdzenie jest dowiedzione.

Uczynimy jeszcze następującą uwagę. Otrzymane wyżej wartości a^0, zdają się, według wywodu, zależeć od wielkości dowolnych b; tymczasem są one, jak to okażemy, niezależne od

wielkości b. Gdyby bowiem zależały od tych wielkości b, to rugując b, otrzymalibyśmy pomiędzy wielkościami a^0 związków $r-s$ $(s < r)$, albo też nie otrzymalibyśmy żadnego związku (gdyby było $s = r$, t. j. gdyby a^0 były funkcyami od b niezależnemi). Jeżeli przeto zmieniać będziemy ∞^{2r} różnemi sposobami parametry b, mieć będziemy $\infty^{2r-2(r-s)} = \infty^{2s}$ różnych sposobów zmieniania się wielkości a^0, i dla każdego takiego układu odpowiednie przekształcenie będzie zawsze przekształceniem tożsamościowem. Weźmy jakiekolwiek przekształcenie z parametrami a i pomnóżmy je przez wszystkie ∞^{2s} przekształceń z parametrami a^0; przekształcenie iloczynowe powinno być tem samem, co przekształcenie z parametrami a, gdy tymczasem parametry tego przekształcenia miałyby ∞^{2s} układów wartości różnych. Stąd i parametry a przekształcenia, z którego wyszliśmy, i które są zresztą dowolne, możnaby zmieniać ∞^{2s} różnemi sposobami, nie zmieniając przekształcenia. Wypływa stąd, że różnych przekształceń grupy byłoby nie ∞^{2r}, lecz $\infty^{2(r-s)}$, t j że parametry nie byłyby istotnemi, co sprzeciwia się założeniu. A więc wartości a^0 są niezależne od parametrów b.

Można też dowieść, że w grupie kremoniańskiej do każdego przekształcenia istnieje odwrotne; gdy bowiem $b_k = \psi_k(a, c)$ są wzory, otrzymane z rozwiązania wzorów $c_k = \varphi_k(a, b)$ względem b, to kładąc wielkości równe a^0, otrzymamy $b_k = \bar{a}_k$; stąd każdemu układowi wartości a_k odpowiadać będzie układ $\bar{a}_k$, a dwa przekształcenia, odpowiadające parametrom a_k i $\bar{a}_k$, będą wzajemnie odwrotnemi. Pomnożywszy je przez siebie, otrzymamy przekształcenie, ktorego parametry (wogóle c) są równe a^0.

---

§ 4.

Równania różniczkowe charakterystyczne grupy. Pierwsze twierdzenie zasadnicze teoryi grup. Przykłady.

Jeżeli funkcye f_i, służące do ustanowienia wzorów przekształcenia, mają być takiemi, aby przekształcenia te tworzyły

grupę, muszą—rzecz jasna—podlegać pewnym warunkom. Postaramy się zbadać właśnie, jakiemi są te warunki i znajdziemy, że można je wyrazić przez pewne układy równań różniczkowych, którym winny czynić zadość funkcye f. Równania te nazwiemy równaniami charakterystycznemi grupy; lecz zwracamy uwagę na to, że stanowią one wogóle warunki konieczne, nie zaś dostateczne.

Badanie to jest jednem z najbardziej podstawowych w całej teoryi, a twierdzenie, do którego ono prowadzi, Lie nazwał pierwszem twierdzeniem zasadniczem teoryi grup (Lie-Engel, Th. d. Tr., III, s. 545).

Pojęcie grupy wyraża się analitycznie za pomocą układu wzorów:

$$(1)\quad \begin{cases} x_i' = f_i(x, a), \quad x_i'' = f_i(x', c), \quad x_i'' = f_i(x, c), & (i=1, 2, \ldots, n), \\ c_k = \varphi_k(b, a), & (k=1, 2, \ldots, r), \end{cases}$$

które należy uważać jako spółistniejące tożsamościowo. Otrzymujemy z nich:

$$(2)\qquad f_i(x', b) = f_i(x, c).$$

Z dwóch układów zmiennych x, x' możemy jako niezależny uważać jeden, np. zmienne x, z trzech zaś układów a, b, c możemy uważać jako niezależne dwa, np. a i c. Z tego punktu widzenia i pamiętając, że wielkości x' zależą także od a, różniczkujemy równania (2) względem a_k; otrzymamy:

$$\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial x_h'} \frac{\partial x_h'}{\partial a_k} + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_i(x', b)}{\partial b_j} \frac{\partial b_j}{\partial a_k} = 0.$$

Ustalmy skaźnik k i zmieniajmy i od 1 do n; będziemy wtedy mieli układ n równań liniowych względem wielkości $\frac{\partial x_1'}{\partial a_k}, \frac{\partial x_2'}{\partial a_k}, \ldots, \frac{\partial x_n'}{\partial a_k}$, którego wyznacznik spółczynników jest wyznacznikiem funkcyj $f_i(x', b)$ względem x', a ten ostatni, według założenia jest różny od zera (patrz § 1). Układ ten będzie

tedy można rozwiązać według powyższych pochodnych i napisać go w postaci:

$$\frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \Xi_{jk}(x', b) \frac{\partial b_j}{\partial a_k}. \tag{3}$$

Postarajmy się teraz przy pomocy związków pomiędzy c, a i b wyrugować z równań (3) pochodne wielkości b względem a. W tym celu różniczkujemy względem a_k związki $c_s = \varphi_s(a, b)$, a otrzymamy:

$$-\frac{\partial \varphi_s}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial \varphi_s}{\partial b_j} \frac{\partial b_j}{\partial a_k}; \qquad (s=1, 2, \ldots, r),$$

rozwiązując te równania względem pochodnych $\frac{\partial b_1}{\partial a_k}, \frac{\partial b_2}{\partial a_k}, \ldots, \frac{\partial b_s}{\partial a_k}$ (co uczynić można, gdyż wyznacznik spółczynników tych równań liniowych jest wyznacznikiem funkcyjnym funkcyj φ względem wielkości b, a więc jest różny od zera; patrz § 2), mieć będziemy:

$$\frac{\partial b_j}{\partial a_k} = \Psi_{jk}(a, b), \tag{a}$$

a podstawiając tę wartości w równaniu (3), otrzymamy wzory:

$$\frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \Xi_{jh}(x', b) \Psi_{jk}(a, b), \tag{4}$$

Oto są równania różniczkowe, którym czynić winny zadość wielkości x', uważane jako funkcye parametrów a; należy przytem zauważyć, że strona druga wzorów (4) składa się zawsze z sumy iloczynów funkcyj wielkości x' i b przez funkcye wielkości a i b.

W równaniach (4) występują tylko wielkości x', a, b; otóż wielkości b nie zależą wcale od wielkości a; możnaby zatem wybrać na b jakiekolwiek wartości dowolne i za każdym razem

otrzymać układ równań różniczkowych, takich jak (4), którym winny czynić zadość wielkości x_h', t. j. funkcye $f_h(x, a)$, nie zależące od wielkości b. Stąd wypływa, że można w równaniach (4) podstawić zamiast b wartości liczbowe szczególne, tak aby symbole tych wielkości zniknęły z tych równań i twierdzić, że otrzymanym w ten sposób równaniom różniczkowym szczególnym czynią zadość te same funkcye ogólne $f_h(x, a)$, właśnie dlatego, że nie mają zależeć od wielkości b.

Wynik stąd następujący: istnieje zawsze układ równań różniczkowych typu:

$$(A) \qquad \frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x')\,\psi_{jh}(a),$$

którym winny czynić zadość wielkości x_h', t. j. $f_h(x, a)$, t. j. istnieją zawsze funkcye ξ samych tylko wielkości x' i funkcye ψ samych tylko wielkości a, takie, że spełniają się równania (A). Ten to właśnie układ równań chcieliśmy przedewszystkiem otrzymać.

Zauważmy, że wielkości ξ i ψ, we wzorach tych występujące, są odpowiednio wielkościami Ξ i Ψ wzorów (4), w których zamiast wielkości b podstawiono wartości dowolne szczególne.

O wielkościach ξ, występujących we wzorach (A) można dowieść, że nie mogą one czynić zadość żadnemu związkowi liniowemu postaci:

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{r} g_j\,\xi_{jh} = 0,$$

gdzie wielkości g są niezależne od wielkości x'.

W samej rzeczy, wielkości ξ otrzymują się z wielkości Ξ, gdy w tych ostatnich podstawimy, jak powiedziano wyżej, wartości szczególne stałe wielkości b; otóż wielkości Ξ, otrzymane z wzorów (4), w których zmieniamy k od 1 do r, są:

$$(6) \qquad \Xi_{jh}(x', b) = A_{j1}\frac{\partial x_h'}{\partial a_1} + \ldots + A_{jr}\frac{\partial x_h'}{\partial a_r},$$

gdzie spółczynniki A są funkcyami wielkości a i b, a wyznacznik ich jest różny od zera, gdyż równania (6) powinny dać się rozwiązać względem pochodnych $\frac{\partial x_h'}{\partial a_h}$, bo układ równań (6) jest identyczny z układem (4). Jeżeli w równaniu (6) zamiast wielkości b podstawimy wartości szczególne, spółczynniki A staną się spółczynnikami a, a równanie (6) przejdzie na następujące:

$$(7) \qquad \xi_{jh}(x') = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}\frac{\partial x_h'}{\partial a_k}.$$

Otóż gdyby zachodził związek (5), to podstawiwszy w nim wartości (7), mielibyśmy:

$$\sum_{j=1}^{r} g_j \sum_{h=1}^{r} a_{jk}\frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = \sum_{h=1}^{r} P_k \frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = 0,$$

gdzie spółczynniki P są funkcyami samych wielkości a. Stąd wielkości $x_h = f_h$ czyniłyby zadość równaniom liniowym, jednorodnym rzędu 1-go, tego typu, o którym mowa w § 2, a któremu właśnie nie mogą czynić zadość, jeżeli zakładamy że, parametry a są istotnemi. Wynika stąd, że wielkości P są zerami, t. j.:

$$\sum_{j=1}^{r} g_j a_{jk} = 0, \qquad (k=1, 2, \ldots, r),$$

lecz w takim razie i spółczynniki g są zerami, gdyż w tym ostatnim układzie równań liniowych wyznacznik wielkości a jest różny od zera, bo, jak wyżej zauważono, różnym jest od zera wyznacznik wielkości A. Tym sposobem twierdzenie jest dowiedzione.

Wyprowadzimy teraz inny układ równań różniczkowych. Porównawszy układ (3) z wzorem tożsamościowym:

$$\frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial x_h'}{\partial b_j} \frac{\partial b_j}{\partial a_k},$$

otrzymujemy:

$$\Xi_{jk} = \frac{\partial x_h'}{\partial b_j}, \tag{6}$$

a więc na podstawie równań (6):

$$\frac{\partial x_h'}{\partial b_j} = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{A}_{jk} \frac{\partial x_h'}{\partial a_k}. \tag{8}$$

Te zaś równania, porównane z wzorem tożsamościowym:

$$\frac{\partial x_h'}{\partial b_j} = \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial a_k}{\partial b_j} \frac{\partial x_h'}{\partial a_k},$$

dają:

$$\mathrm{A}_{jk} = \frac{\partial a_k}{\partial b_j}. \tag{c}$$

Wstawiając w równania (8) wartości na $\frac{\partial x_h'}{\partial a_k}$, wzięte z równań (A), mamy:

$$\frac{\partial x_h'}{\partial b_j} = \sum_{\varrho=1}^{r} \xi_{\varrho h}(x') \sum_{k=1}^{r} \mathrm{A}_{jk}\, \psi_{\varrho k}(a) = \sum_{\varrho=1}^{r} \xi_{\varrho h}(x')\, \theta_{\varrho j}(a, b).$$

Możemy okazać, że wielkości θ, występujące w tych wzorach, są niezależne od wielkości a, gdyż jeżeli będziemy różniczkowali te wzory względem a_s, uważając wielkości x', a i b, jako od siebie niezależne (co wolno, ponieważ jedynemi związkami podstawowemi są wzory (1), z których nie można otrzymać związków pomiędzy temi wielkościami), znajdziemy:

$$0 = \sum_{\varrho=1}^{r} \xi_{\varrho h}(x') \frac{\partial \theta_{\varrho j}(a, b)}{\partial a_s};$$

ponieważ zaś, na zasadzie dowiedzionego wyżej twierdzenia, nie może istnieć taki związek liniowy pomiędzy wielkościami ξ, który byłby typu (5), wynika stąd, że pochodne wielkości θ względem wielkości a są zerami.

Mamy zatem równania:

$$(9) \qquad \frac{\partial x_h'}{\partial b_j} = \sum_{\varrho=1}^{r} \xi_{\varrho h}(x')\, \theta_{\varrho j}(b).$$

Zważywszy, że wielkości x'', x', b są związane pomiędzy sobą przy pomocy równań (1) w ten sam sposób, w jaki są związane pomiędzy sobą wielkości x', x, a, możemy we wzorach (9) zamiast x' napisać x, zamiast b napisać a, i zmieniwszy jeszcze skaźniki j na k, ϱ na j, otrzymamy:

$$(B) \qquad \frac{\partial x_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x)\, \theta_{jk}(a).$$

Jest to drugi układ równań podstawowych, który pragnęliśmy wyprowadzić.

Z równań (A) i (B) możemy otrzymać inne wzory. W pierwszych z równań (1) uważajmy wielkości x jako funkcye wielkości x' i a, i różniczkujemy je względem a_k; będzie:

$$0 = \frac{\partial f_i}{\partial a_k} + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial a_k},$$

co, na mocy wzorów (A) i (B), daje:

$$(C) \qquad 0 = \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x')\, \psi_{jk}(a) + \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial x_i'}{\partial x_h} \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x)\, \theta_{jk}(a).$$

Jest to układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych wielkości x' względem x.

Układ (C) można przekształcić na inny, w którym zamiast pochodnych wielkości x' względem x występują pochodne względem x i x' funkcyi ogólnej F tych zmiennych. Dość w tym celu pomnożyć równania (C) przez $\frac{\partial F}{\partial x_i'}$, wziąć sumę względem skaźnika i oraz uwzględnić, że $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial x_h} = \frac{\partial F}{\partial x_h}$; otrzymamy wtedy:

$$(D) \quad \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x') \frac{\partial F}{\partial x_i'} + \sum_{j=1}^{r} \theta_{jk}(a) \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x) \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0.$$

gdzie dla większej symetryi w wyrazie drugim postawiono skaźnik i zamiast skaźnika h.

Użytek wyprowadzonych wzorów pokażemy na prostym przykładzie, zapożyczonym od Liego (Th. der Transf., I, str. 34, 43).

Niechaj będzie grupa:

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3},$$

o trzech parametrach istotnych (patrz § 1). Pochodne wielkości x' względem parametrów a:

$$\frac{\partial x'}{\partial a_1} = \frac{1}{a_2 x + a_3}, \quad \frac{\partial x'}{\partial a_2} = -\frac{x(x+a_1)}{(a_2 x + a_3)^2}, \quad \frac{\partial x'}{\partial a_3} = -\frac{x + a_1}{(a_2 x + a_3)^2};$$

możemy napisać w postaci:

$$\frac{\partial x'}{\partial a_1} = \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} - \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x'; \quad \frac{\partial x'}{\partial a_2} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} x' - \frac{a_3}{a_3 - a_1 a_2} x'^2;$$

$$\frac{\partial x'}{\partial a_3} = -\frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x' + \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x'^2,$$

skąd widać, że pochodne te dają się wyrazić, jak tego żądają wzory (*A*), jako sumy iloczynów funkcyj samych parametrów *a* przez funkcye tylko wielkości x'; i te to funkcye ξ samych wielkości x są jednakowemi dla wszystkich trzech pochodnych; jest mianowicie:

$$\xi_{11}(x') = 1, \quad \xi_{21}(x') = x', \quad \xi_{31}(x') = x'^2.$$

Jeżeli teraz zamiast pochodnych wielkości x' względem parametrów a, weźmiemy pochodne wielkości x względem tychże parametrów, znajdziemy:

$$\frac{\partial x}{\partial a_1} = -\frac{a_3}{a_3 - a_1 a_2} - \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x; \quad \frac{\partial x}{\partial a_2} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} x + \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x^2;$$

$$\frac{\partial x}{\partial a_3} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x;$$

t. j. pochodne te, jak tego wymagają wzory (*B*), dają się wyrazić jako iloczyny funkcyj samych wielkości a przez te same funkcye ξ wielkości x.

Wyżej znalezione równania różniczkowe nie są, jak powiedziano na początku tego §-u, dostateczne do określenia grupy. Że tak jest, można pokazać na następującym przykładzie. Niechaj będą przekształcenia:

$$x_1' = x_1 + x_2 + a_1, \quad x_2' = x_1 - x_2 + a_2,$$

które, jak łatwo sprawdzić, nie tworzą grupy. Tymczasem wielkości x' są całkami układu równań:

$$\frac{\partial x'}{\partial a_1} = 1, \quad \frac{\partial x'}{\partial a_2} = 0; \quad \frac{\partial x_2'}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial x_2'}{\partial a_2} = 1,$$

które są równaniami postaci (*A*).

§ 5.

Grupy jednoparametrowe.

Podamy w postaci ogólnej przekształcenia, należące do grupy, zawierającej jeden tylko parametr istotny a.

Wyjdziemy z równań:

$$\frac{dx_h'}{da} = \xi_h(x_1', \ldots, x_n')\,\psi(a), \qquad (h=1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

którym według równań ogólnych (A) poprzedzającego §-u, winny czynić zadość równania grupy jednoparametrowej; dajmy, że funkcya ψ jest określona w całym obszarze $((a))$, w którym nadto niechaj nie staje się nieskończoną.

Całki tego układu n równań różniczkowych zwyczajnych, gdzie funkcyami niewiadomemi są x', zmienną niezależną jest a, dają nam szukane wzory przekształceń, o i l e o d p o w i e d n i e p r z e k s z t a ł c e n i a t w o r z ą g r u p ę; ta uwaga jest konieczna, gdyż jak wiemy równania (1) nie są warunkami d o s t a t e c z n e m i do określenia grupy. W równaniach ogólnych (A) §-u 4-go wielkości x' występują jako funkcye wielkości x i a, lecz pierwsze w równaniach tych można uważać za stałe, gdyż mamy tam tylko pochodne wielkości x' względem parametrów a. Stąd wynika, że stałe, jakie zachodzić będą w całkach układu (1), spełniać będą tę samą rolę, jak wielkości x w szukanych wzorach na przekształcenie; stałe te przeto nazwiemy $x_1, \ldots, x_n$. Zapytujemy teraz, czy całki układu (1) są funkcyami określonemi n stałych, czy nie? Oczywiście nie, gdyż jest jasnem, że jeżeli zamiast każdej z tych wielkości położymy funkcye dowolne innych n stałych, przy jedynym warunku, aby te funkcye nie były zależnemi, otrzymamy n całek, które zależeć będą od stałych w sposób odmienny, niż poprzednio. Wskazuje to, że szukane wzory przekształcenia, które mamy otrzymać jako całki układu (1), nie są bez dalszego warunku, określone jako funkcye wielkości x.

Lecz jeżeli damy z góry sposób, w jaki wielkości x_i' mają zależeć od stałych x dla oznaczonej dowolnej wartości a^0 zmiennej a, wtedy wielkości te będą określone w sposób jedyny pod względem zależności od wielkości x. Gdyż jeżeli nazwiemy na chwilę $c_1, \ldots, c_n$ stałe całek układu (1) i przyjmiemy, że po rozwiązaniu ich względem x_i', otrzymujemy $x_i' = \varphi_i(c_1, \ldots, c_n, a)$, a następnie zamiast wielkości c wprowadzimy stałe $x_1, \ldots, x_n$, tak aby dla $a = a^0$ funkcye φ_i stały się z góry oznaczonemi funkcyami $f_1(x_2, \ldots, x_n, a^0)$, dość będzie, oczywiście, napisać n związków:

$$\varphi_i(c_1, \ldots, c_n, a^0) = f_i(x_1, \ldots, x_n, a^0)$$

i z nich otrzymać wielkości c jako funkcye wielkości x.

Naturalnie, wartość a^0 musi być taka, aby wyznacznik funkcyjny wielkości φ względem wielkości c nie był zerem, aby zatem można było uskutecznić powyższe rozwiązanie; w przeciwnym bowiem razie równania $x_i' = \varphi_i(c_1, \ldots, c_n, a)$ dla tej wartości a nie dałyby się rozwiązać względem wielkości c, nie byłyby zatem dla tej wartości a całkami ogólnemi równań (1).

Widzimy tedy, że dla otrzymania wzorów przekształcenia grupy szukanej dość ustalić funkcye $x_i' = f_i$ dla oznaczonej wartości a, t. j. ustalić jedno przekształcenie, do tej grupy należące; poczem wypadnie tylko przekonać się, czy przekształcenia tak otrzymane tworzą grupę. Otóż ustalamy, że grupa szukana zawiera przekształcenie tożsamościowe; zobaczymy zaraz, w jaki sposób można warunek ten uwzględnić analitycznie.

Z wzorów (1) otrzymujemy następujące:

$$(2) \qquad \frac{dx_1'}{\xi_1} = \frac{dx_2'}{\xi_2} = \ldots = \frac{dx_n'}{\xi_n} = \psi(a)\, da\,;$$

niechaj całkami układu $n-1$ równań różniczkowych, otrzymanych z porównania pierwszych n stosunków (po rozwiązaniu ich względem stałych, które oznaczmy przez $c_1, \ldots, c_{n-1}$), będą:

$$(3) \qquad \Omega_1(x_1', \ldots, x_n') = c_1, \ldots, \Omega_{n-1}(x_1', \ldots, x_n') = c_{n-1}.$$

Pozostaje znaleść jeszcze ostatnią całkę układu (2); w tym celu zauważmy, że ponieważ stałe we wzorach (3) są od siebie niezależne, to nie może być, aby wszystkie wyznaczniki funkcyjne wielkości $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$ względem $n-1$ zmiennych x' były zerami; bo gdyby tak było, to pomiędzy wielkościami Ω moglibyśmy wyrugować n wielkości x' i pozostałby związek pomiędzy stałemi c.

Niechaj $\frac{\partial(\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1})}{\partial(x_1', \ldots, x'_{n-1})}$ będzie jednym z tych wyznaczników funkcyjnych, różnych od zera; z równań (3) wyznaczmy wartości zmiennych $x_1', \ldots, x'_{n-1}$ w funkcyi zmiennej x_n' i stałych. Podstawiwszy te wartości w funkcyi $\xi_n(x_1', \ldots, x_n')$, zawartej w równaniu:

$$\frac{dx_n'}{\xi_n} = \psi(a)\, da\,,$$

otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne o dwóch zmiennych rozdzielonych; zcałkowawszy je, otrzymamy wyrażenie postaci:

$$\Omega(x_n', c_1, \ldots, c_{n-1}) = \int^{a} \psi(a)\, da + c_n,$$

a podstawiwszy tu wartości $c_1, \ldots, c_{n-1}$, wzięte z równań (3), znajdziemy wreszcie:

$$\Omega_n(x_1', \ldots, x'_n) = \int^{a} \psi(a)\, da + c_n. \tag{4}$$

Wprowadźmy teraz założenie, że grupa zawiera przekształcenie tożsamościowe dla pewnej wartości a^0 parametru a, i dla dogodności zmieńmy wartość stałej c_n, t. j. napiszmy zamiast niej: $c_n - \int^{a^0} \psi(a)\, da$; równanie (4) będzie wtedy postaci:

$$\Omega_n(x_1', \ldots, x_n') = \int_{a^0}^{a} \psi(a)\, da + c_n\,. \tag{5}$$

Winniśmy za stałe c wziąć takie funkcye zmiennych x, aby dla $a=a^0$ równania (3) i (5) dały $x_i'=x_i$; lecz kładąc:

$$c_1=\Omega_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, c_n=\Omega_n(x_1, \ldots, x_n),$$

otrzymujemy właśnie to, o czem mowa, i tym sposobem znajdujemy stałe c jako funkcye wielkości x, czyniące zadość powyższym warunkom. Będziemy tedy mieli następujące wzory przekształcenia:

$$\begin{aligned}
&\Omega_1(x_1', \ldots, x_n') = \Omega_1(x_1, \ldots, x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(6)\qquad &\Omega_{n-1}(x_1', \ldots, x') = \Omega_{n-1}(x_1, \ldots, x_n),\\
&\Omega_n(x_1', \ldots, x_n') = \Omega_n(x_1, \ldots, x_n) + \int_{a^0}^{a} \psi(a)\, da\,.
\end{aligned}$$

Położymy:

$$t = \int_{a^0}^{a} \psi(a)\, da\,.$$

Ponieważ z założenia $\psi(a)$ jest funkcyą regularną w całym obszarze $((a))$, a^0 zaś jest punktem tego obszaru, przeto funkcya ψ da się rozwinąć na szereg według potęg różnicy $a-a^0$ w pewnem otoczeniu punktu a^0, jeżeli przyjmiemy jeszcze, że punkt a^0 jest punktem wewnętrznym obszaru, nie położonym na jego obwodzie. Wtedy całka t będzie określona dla pewnego otoczenia punktu a^0; przyjmijmy nadto, że otoczenie to jest takie, że w niem a można uważać jako funkcyę jednowartościową wielkości t, oraz t jako takąż funkcyę wielkości a.

Przychodzimy tym sposobem do działań w rzeczonem otoczeniu punktu a^0, któremu odpowiadać znów będzie przekształcenie parametrów w otoczeniu punktu $t=0$. Przekształcenia, których parametr znajduje się w otoczeniu punktu a^0, przejdą

na przekształcenia, których parametr t znajduje się w otoczeniu punktu $t = 0$; przekształcenie tożsamościowe otrzymamy dla $t=0$. Z założeń o naturze wielkości t wynika, że gdy wartości a obracają się około a^0, wielkości t obracać się będą około punktu $t=0$; t. j. obszar naokoło punktu $t=0$, odpowiadający otoczeniu punktu $a=a^0$, powinien we wnętrzu swem zawierać punkt zero. Wzory (6) będzie można napisać w postaci:

$$\Omega_1(x') = \Omega_1(x), \ldots, \Omega_{n-1}(x') = \Omega_{n-1}(x),$$
$$\Omega_n(x') = \Omega_n(x) + t; \tag{7}$$

przekształcenia zaś, wyrażone temi wzorami, zlewają się z przekształceniami grupy omawianej, lecz wogóle tylko dla wszystkich wartości t w pewnem otoczeniu punktu $t=0$.

Rozpatrzmy teraz równania (7) same w sobie, t. j. bez względu na rozważaną grupę o parametrze a; i niechaj t przebiega wszystkie możliwe wartości. Jest jasnem, że równania (7) tworzą wtedy grupę. W rzeczy samej, weźmy przekształcenie o parametrze t_1 i inne o parametrze t_2; mnożąc je przez siebie—co znaczy to samo, co napisać drugie przekształcenie w zmiennych x'' i x' i następnie wyrugować x' pomiędzy dwoma układami wzorów tak otrzymanych—mieć będziemy układ wzorów pomiędzy wielkościami x' i x, analogiczny do wzorów (7), gdzie uczyniono $t=t_1+t_2$; czyli inaczej mówiąc, będziemy mieli inne z przekształceń ogólnych, przedstawionych we wzorach (7).

Grupę jednoparametrową, którą w ten sposób zbudowaliśmy, nazwijmy grupą kanoniczną, rozumiejąc przez to grupę, daną przez wzory (7), gdy t przebiega wszelkie wartości możliwe. Grupa ta posiada kilka ważnych własności, które w krótkości udowodnimy.

Widzieliśmy, że przekształcenie, będące iloczynem dwóch przekształceń, ma parametr t_1+t_2, równy sumie parametrów przekształceń danych; a ponieważ suma t_1+t_2 jest niezależna od porządku składników, przeto iloczyn dwóch przekształceń jest niezależny od porządku czynników, t. j. dwa przekształcenia są zawsze przemienne. Nadto, ponieważ pa-

rametr t może przybierać wszelkie możliwe wartości (rzeczywiste i zespolone), przeto dla każdego przekształcenia (o parametrze $t = t_1$) istnieje w grupie przekształcenie odwrotne (o parametrze $t = -t_1$).

Rozpatrzmy wreszcie grupę, daną przez wzory:

$$y_1' = y_1,\ y_2' = y_2,\ \ldots,\ y'_{n-1} = y_{n-1}$$

$$y_n' = y_n + t$$

i nazwaną—powód czego łatwo zrozumieć—grupą przesunięć; wtedy na podstawie definicyi podobieństwa grup, danej w § 2, jest jasnem, że grupa nasza jest podobna do grupy przesunięć.

Rozpatrzona tu grupa zlewa się, jak powiedzieliśmy już, z grupą daną, jedynie dla wszystkich przekształceń w otoczeniu punktu $t = 0$, odpowiadającem otoczeniu punktu $a = a^0$; stąd, rzecz jasna, że własności wyżej wskazane posiadać też będą i przekształcenia grupy danej, o ile ograniczymy je do pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego. W samej rzeczy, jakiekolwiek będzie to otoczenie, byleby zawierało wewnętrznie—jak to założyliśmy—punkt a^0, będzie można zawsze znaleść w niem punkt taki, że otoczenie, odpowiadające punktowi $t=0$, jeżeli zawiera punkt t_1, to zawiera także punkt $-t_1$, i jeżeli nadto zawiera punkty t_1 i t_2, to punkt t_1+t_2 będzie zawsze zawarty w dawnem otoczeniu obszerniejszem. Możemy tedy powiedzieć:

Niechaj będzie grupa o jednym parametrze a_1, przebiegającym wszystkie punkty pewnego obszaru $((a))$ i zawierająca przekształcenie tożsamościowe, mianowicie dla wartości $a=a^0$ wewnątrz $((a))$; wtedy dla wszystkich przekształceń w pewnem otoczeniu przekształcenia tożsamościowego zachodzą następujące własności: 1) przekształceniom tym można nadać postać (7); 2) przekształcenia są przemienne; 3) dla każdego przekształ-

cenia istnieje w grupie przekształcenie odwrotne; 4) przez odpowiednią zamianę zmiennych wzory przekształcenia przechodzą na wzory grupy przesunięć.

Jeżeli założymy, że rozważana grupa jest grupą Liego (patrz § 2), zawierającą przekształcenie tożsamościowe, wtedy a^0 musi z pewnością znajdować się wewnątrz obszaru $((a))$, a więc dla tej grupy mają miejsce wszystkie wyżej wymienione własności.

Jeżeli natomiast wyłączymy grupy Liego i przyjmiemy, że obszar $((a))$, odnoszący się do niej, jest ograniczony w ten sposób, iż punkt a^0 znajduje się na obwodzie (ponieważ od naszej woli zależy ograniczenie obszaru przy utrzymaniu własności, aby przekształcenia tworzyły grupę) i jeżeli przyjmiemy jeszcze, że całka t jest określona dla pewnego obszaru, zawartego w $((a))$ i mającego punkt a^0 na swym obwodzie, wtedy możemy powtórzyć wszystkie powyższe rozumowania i otrzymać rezultaty analogiczne, wyjąwszy przypadek, w którym zdarzyć się może, że otoczenie punktu $t=0$, o którem wyżej mowa, ma punkt zero na swym obwodzie, a wtedy nie można twierdzić, że zawiera punkt $-t_1$, skoro zawiera punkt t_1. Wtedy też twierdzić nie można, że dla każdego przekształcenia, obranego w odpowiedniem otoczeniu przekształcenia tożsamościowego, istnieje przekształcenie odwrotne. Jako przykład przytoczyć można grupy, dane przez też wzory (7), w których atoli przyjmiemy, że t nie może przybierać wszystkich możliwych wartości, a przybiera tylko np. wartości rzeczywiste ujemne (włączając zawsze i zero); mamy wtedy, jak łatwo widzieć, zawsze dwie grupy, zawierające przekształcenie tożsamościowe, ale nie posiadające wskazanej wyżej własności.

Przy pomocy powyższych rozważań znaleźliśmy prostą postać kanoniczną nie dla wszystkich przekształceń grupy parametrowej, lecz tylko dla przekształceń, należących do pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego.

Analogiczne rozważania przeprowadzić się dają dla wszystkich przekształceń nie tylko w otoczeniu przekształcenia tożsamościowego, lecz także w otoczeniu jakiegokolwiek przekształ-

cenia grupy. Przyjmijmy, że a^0 nie jest już, jak wyżej, parametrem przekształcenia tożsamościowego,—którego istnienia nawet teraz nie zakładamy—i dla uniknienia pomieszania, postawmy a', zamiast a^0 we wzorach poprzednich. Dla otrzymania wzorów przekształcenia w otoczeniu punktu a', musimy we wzorach (3) i (5) nadać stałym $c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$ wartości takie, aby dla $a=a'$ otrzymane przekształcenie było przekształceniem danem, t. j. $x_i'=f_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Dajmy, że dla tych wartości zmiennych x' funkcye $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ stają się odpowiednio funkcyami $\omega_1, \ldots, \omega_n$ zmiennych x; jest jasnem, że wielkości c staną się równemi tym wielkościom ω. t. j. że będzie (po wprowadzeniu, jak wyżej, wielkości t):

$$\begin{gathered} \Omega_1(x') = \omega_1(x), \ldots, \Omega_{n-1}(x') = \omega_{n-1}(x), \\ \Omega_n(x') = \omega_n(x) + t. \end{gathered} \tag{8}$$

Jest to właśnie postać kanoniczna dla wszystkich przekształceń grupy, które należą do odpowiedniego otoczenia przekształcenia o parametrze a'. Dla $t=0$, t. j. dla $a=a'$, równania (8) przechodzą na następujące:

$$\Omega_1(x') = \omega_1(x), \ldots, \Omega_{n-1}(x') = \omega_{n-1}(x), \Omega_n(x') = \omega_n(x), \tag{9}$$

równoważne danemu przekształceniu.

Rozpatrzmy teraz przekształcenia:

$$\begin{gathered} \Omega_1(x'') = \Omega_1(x'), \ldots, \Omega_{n-1}(x'') = \Omega_{n-1}(x'), \\ \Omega_n(x'') = \Omega_n(x') + t, \end{gathered} \tag{10}$$

będące przekształceniami grupy, zawierającej przekształcenie tożsamościowe dla $a=a'$; jest jasnem, że iloczyn przekształceń (9) przez przekształcenia (10) daje przekształcenia (8), możemy więc twierdzić, że:

Gdy dana jest grupa jednoparametrowa, to jej przekształcenia, znajdujące się w otoczeniu jednego którегokolwiek przekształcenia, można uważać za iloczyny tego prze-

kształcenia przez przekształcenie jednej z grup, nazwanych grupami kanonicznemi.

Dla wyjaśnienia podamy prosty przykład następujący:

Niechaj będzie układ równań różniczkowych:

$$\frac{dx'}{da} = x_1' \cdot \frac{1}{a}, \qquad \frac{dx_2'}{da} = 2x_2' \cdot \frac{1}{a}.$$

Całkując i kładąc:

$$t = \int_{a^0}^{a} \frac{da}{a} = \log \frac{a}{a^0},$$

mieć będziemy równania:

$$\frac{x_2'}{x_1'^2} = c_1, \qquad \log x_1' = c_2 + t;$$

i jeżeli położymy $c_1 = \frac{x_2}{x_1^2}$, $c_2 = \log x_1$, możemy wzory przekształcenia napisać w postaci:

$$\frac{x_2'}{x_1'^2} = \frac{x_2}{x_1^2}, \qquad \log x_1' = \log x_1 + \log \frac{a}{a^0}.$$

Rozwiązując je względem x_1' i x_2', otrzymamy:

$$x_1' = \frac{ax_1}{a^0}, \qquad x_2' = \frac{a^2 x_2}{a^{02}}.$$

---

§ 6.

Wzory wyraźne kanoniczne na przekształcenia grupy jednoparametrowej. Przekształcenia nieskończonostkowe.

Wyszedłszy z wzorów (1) paragrafu poprzedzającego, doszliśmy do wzorów (7), które w istocie są wzorami wszystkich przekształceń grupy, należących do pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego. Obecnie podamy te wzory w postaci odmiennej, a mianowicie rozwiązane względem wielkości x',

a więc w postaci rozwinięć na szeregi według potęg całkowitych dodatnich rosnących wielkości t.

Równania (1) paragrafu poprzedzającego, po wprowadzeniu wielkości t, przechodzą na następujące:

$$(1) \qquad \frac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x').$$

Dla $t=0$ wielkości x' stają się, stosownie do założenia, równemi wielkościom x, możemy więc napisać:

$$\left[\frac{dx_i'}{dt}\right]_{t=0} = \xi_i(x)$$

$$\left[\frac{d^2x_i'}{dt^2}\right]_{t=0} = \left[\frac{d\xi_i(x')}{dt}\right]_{t=0} = \sum_{h=1}^{n}\left[\frac{\partial\xi_i(x')}{\partial x_h'}\frac{dx_h'}{dt}\right]_{t=0} = \sum_{h=1}^{n}\xi_h(x)\frac{\partial\xi_i(x)}{\partial x_h}.$$

Kładąc więc ogólnie:

$$Xf = \sum_{h=1}^{n}\xi_h(x)\frac{\partial f}{\partial x_h},$$

mamy:

$$\left[\frac{dx_i'}{dt}\right]_{t=0} = Xx_i$$

$$\left[\frac{d^2x_i'}{dt^2}\right]_{t=0} = X\xi_i(x) = XX_i = X^2x_i.$$

Podobnież otrzymalibyśmy:

$$\left[\frac{d^3x_i}{dt^3}\right]_{t=0} = X^3x_i, \ldots \left[\frac{d^kx_i'}{dt^k}\right]_{t=0} = X^kx_i, \ldots$$

a więc, na podstawie zwykłego rozwinięcia według wzoru Taylora, będzie:

$$(2) \qquad x_i' = x_i + t\,Xx_i + \frac{t^2}{2!}\,X^2 x_i + \ldots .$$

W podobny sposób otrzymać można analogiczne rozwinięcie jakiejkolwiek funkcyi wielkości x':

$$(3) \qquad F(x') = F(x) + t\,X(F(x)) + \frac{t^2}{2!}\,X^2(F(x)) + \ldots ;$$

i ten wzór można uważać jako ogólny, obejmujący w sobie wszystkie wzory (2).

Znaleźliśmy tym sposobem szukane wzory wyraźne przekształceń grupy, należących do pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego; wzory (2) nazwać można wzorami kanonicznemi przekształceń grupy.

Ważną jest rzeczą wskazać, w jak prosty sposób z wzorów (2) i (3) otrzymać można wzory odwrotne, t. j. wzory, wyrażające wielkości x przez wielkości x'. Wiemy, że parametrem przekształcenia, odwrotnego względem przekształcenia o parametrze t, jest $-t$; dość więc we wzorach (2) zamiast t napisać $-t$, zamiast x' napisać x, aby otrzymać przekształcenie odwrotne, które zresztą, jak wiemy, należy także do grupy, a więc powinno być dane przez też same wzory (2).

Ważność wzorów poprzedzających polega głównie na wprowadzeniu symbolu X, którego badanie jest ściśle związane z badaniem przekształceń grupy, jak to widać już z wzorów (2).

Jeżeli wyobrazimy sobie, że t jest nieskończenie małe, tak że możemy pominąć jego potęgi wyższe, otrzymamy wtedy przekształcenie, którego wzorami — aż do nieskończonostek rzędu wyższego—są:

$$(4) \qquad x_i' = x_i + t\,\xi_i .$$

Przekształcenie to nazywamy przekształceniem nieskończonostkowem grupy; jest jasnem, że każda grupa jednoparametrowa, zawierająca przekształcenie tożsamościowe, zawiera zawsze

przekształcenie nieskończonostkowe. Jest to przekształcenie, dla którego wielkości x' zmieniają się o wielkości nieskończonostkowe, proporcyonalne do $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, t. j. do funkcyj, występujących w równaniach różniczkowych (1) i będących temi samemi funkcyami, które służą do konstrukcyi symbolu:

$$Xf = \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h}. \tag{5}$$

Przyrost, jakiego doznaje jakakolwiek funkcya F wielkości x' wskutek przekształcenia nieskończonostkowego, otrzymujemy bezpośrednio z wzoru (3), mianowicie:

$$\Delta F = F(x') - F(x) = t\,X(F(x)).$$

Stąd ujawnia się ścisła łączność symbolu X, i przekształcenia nieskończonostkowego; z tego powodu symbol ten przyjmuje się zwykle jako symbol tego przekształcenia. Gdy mówimy: niechaj będzie dane przekształcenie nieskończonostkowe X, należy przez to rozumieć: niechaj będzie dane przekształcenie nieskończonostkowe (4), którego spółczynniki ξ są temi samemi wielkościami, które służą do utworzenia symbolu X.

Wzory (2), gdy dany jest symbol X, określają przekształcenia grupy w pewnem otoczeniu przekształcenia tożsamościowego; z drugiej strony, dana grupa określa symbol X. Możemy więc powiedzieć, że zawarte w pewnem skończonem otoczeniu przekształcenia tożsamościowego przekształcenia grupy, zawierającej przekształcenie tożsamościowe, charakteryzuje (w znaczeniu, jak na teraz, czysto formalnem) to właśnie przekształcenie nieskończonostkowe grupy. Lecz możemy powiedzieć i więcej, mianowicie, że każde przekształcenie skończone rzeczonego otoczenia otrzymujemy, powtarzając nieskończenie wiele razy przekształcenie nieskończonostkowe, t. j. że grupę wytwarza

jej przekształcenie nieskończonostkowe, co widać z powyższych wzorów (2).

Zachodzi inny jeszcze związek, bardziej ścisły pomiędzy przekształceniami grupy a symbolem X, o czem mówić będziemy w następnym paragrafie.

Zaznaczmy wreszcie, że symbol X można uważać też jako symbol działania, wykonywanego na pewnej nieoznaczonej funkcyi f. Symbol ten posiada oczywiście wiele własności analogicznych do zwykłego symbolu różniczkowania.

---

§ 7.

Trajektorye grupy jednoparametrowej. Redukcya i postać kanoniczna symbolów przekształceń nieskończonostkowych. Wyznaczenie grupy kanonicznej z danego jej przekształcenia nieskończonostkowego.

Niechaj będzie punkt P przestrzeni n-wymiarowej o spółrzędnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zastosujmy do niego wszystkie przekształcenia grupy jednoparametrowej; spółrzędne punktu przekształconego dają nam wzory:

$$(1) \qquad x_1' = f_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, x_n' = f_n(x_1, \ldots, x_n, t) \ldots$$

Spółrzędne te zmieniają się tedy wraz z wielkością t; miejscem punktów przekształconych będzie więc wogóle krzywa, t. j. rozmaitość ∞^1 punktów. Jeżeli zamiast z punktu $x_1, \ldots, x_n$, wyszlibyśmy z innego punktu tejże rozmaitości ∞^1 punktów, to ponieważ przekształcenia tworzą grupę, krzywa, otrzymana w sposób analogiczny, byłaby ta sama, co poprzednio. Gdyż jeżeli przyjmiemy, że przy pomocy pewnego przekształcenia przechodzimy od punktu P do punktu P', a potem za pomocą innego przekształcenia od punktu P' do punktu P'', to iloczyn tych dwóch przekształceń powinien prowadzić od punktu P do P''. Lecz iloczyn dwóch przekształceń jest znowu innem z tychże przekształceń, a więc punkt P'' jest jednym z ∞^1 punktów,

na które przekształca się punkt P, t. j. powinien znajdować się na krzywej, utworzonej przez przekształcenia punktu P. Widzimy tedy, że punkty przestrzeni są ze względu na daną grupę jednoparametrową rozmieszczone na nieskończenie wielu krzywych, z których jedna i tylko jedna przechodzi przez każdy punkt. Krzywe te nazywają się t r a j e k t o r y a m i g r u p y. Trajektoryi jest tym sposobem ∞^{n-1}.

A teraz zapytajmy o styczną do trajektoryi w jednym z jej punktów. Dostawy kierunkowe stycznej określone są przez pochodne wielkości x' względem t dla $t=0$. Pochodne te, na zasadzie równań różniczkowych (1) §-u poprzedzającego, są odpowiednio proporcyonalne do wielkości $\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)$. Stąd—co było do przewidzenia—styczna, o której mowa, jest prostą, łączącą punkt $x_1, \ldots, x_n$ z punktem nieskończenie blizkim, który otrzymujemy z pierwszego za pomocą przekształcenia nieskończonostkowego (4) §-u poprzedzającego

Poszukajmy związków pomiędzy trajektoryami a symbolem X. Równania:

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x)} = \frac{dx_2}{\xi_2(x)} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n(x)}, \tag{2}$$

są oczywiście równaniami różniczkowemi trajektoryj, albowiem różniczki $dx_1, \ldots, dx_n$ są, jak wiadomo, proporcyonalne do dostaw kierunkowych stycznej do krzywej, równania zaś te wyrażają, że dostawy kierunkowe są właśnie proporcyonalne do $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Jeżeli teraz oznaczymy na chwilę przez:

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ \ldots \ \Omega_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-1}$$

równania skończone trajektoryj, to różniczkując je, otrzymamy związki tożsamościowe:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial x_n} dx_n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

a podstawiając w nich zamiast $dx_1, \ldots, dx_n$ proporcyonalne do tych różniczek na podstawie równań (2) wielkości $\xi_1, \ldots, \xi_n$, mieć będziemy:

$$\xi_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi_1 \frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial \Omega_{n-1}}{\partial x_n} = 0,$$

gdzie $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$ są całkami równania o pochodnych cząstkowych, liniowego, jednorodnego rzędu 1-go:

$$(4) \qquad Xf = \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0.$$

Równanie o pochodnych cząstkowych tego gatunku nie może mieć więcej, niż $n-1$ całek niezależnych [1]), stąd: przyrównywając do stałych $n-1$ całek niezależnych równania $Xf = 0$, otrzymujemy równania skończone trajektoryj grupy.

Możemy też powiedzieć:

Dany punkt i symbol X określają w ogólności pewien przechodzący przez ten punkt

---

[1]) W samej rzeczy, gdybyśmy przyjęli, że całek tych jest n, mielibyśmy równania:

$$\xi_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi_1 \frac{\partial \Omega_n}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial \Omega_n}{\partial x_n} = 0.$$

a ponieważ wyznacznik takiego układu liniowego względem wielkości ξ musi być zerem, to wyznacznik funkcyjny n całek względem wielkości x byłby zerem, co znaczy, że pomiędzy temi całkami zachodziłby pewien związek.

kierunek (t. j. styczne do trajektoryj), którego dostawy są proporcyonalne do wartości spółczynników ξ symbolu X w punkcie danym.

Niechaj będzie dany symbol X przekształcenia nieskończonostkowego; zbadajmy, jak przekształca się ten symbol, gdy zamiast wielkości x wprowadzimy zmienne y, połączone ze zmiennemi x przy pomocy związków:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Zauważmy, że jeżeli f jest jakąkolwiek funkcyą zmiennych x, wtedy:

$$\frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_h},$$

a więc:

$$Xf = \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum_{h=}^{n} \xi_h \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_h},$$

lub:

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial y_i}{\partial x_h} \right) \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n} (Xy_i) \frac{\partial f}{\partial y_i}.$$

Widzimy więc, że symbol X przekształca się na symbol tego samego gatunku i że spółczynniki nowe są wynikiem zastosowania tegoż symbolu do funkcyj, wyrażających nowe zmienne przez dawne.

Pozostawmy nieoznaczoną funkcyę φ, funkcye zaś $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ uczyńmy odpowiednio równemi całkom $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$ równań $Xf = 0$, t. j. pierwszym stronom równań trajektoryj; ponieważ wtedy:

$$X\Omega_1 = 0, \quad X\Omega_2 = 0, \ldots, X\Omega_{n-1} = 0,$$

przeto:

$$Xf = X\varphi_n \frac{\partial f}{\partial y_n}$$

i jeżeli wyznaczymy φ_n tak, aby było:

$$X\varphi_n = 1 , \tag{5}$$

będziemy mieli:

$$Xf = \frac{\partial f}{\partial y_n} . \tag{6}$$

Ta zredukowana postać symbolu X, otrzymana po wprowadzeniu nowych zmiennych, nazywa się k a n o n i c z n ą.

Dla uzupełnienia tego badania należy jeszcze pokazać, w jaki sposób z równania (5) można wyznaczyć funkcyę φ_n. Otóż równanie (5) jest równaniem o pochodnych cząstkowych rzędu 1-go, liniowem, niejednorodnem; według znanej teoryi L a g r a n g e'a, całkowanie takiego równania sprowadza się do całkowania układu równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n} = \frac{d\varphi_n}{1} . \tag{7}$$

Do celu naszego wystarcza mieć jednę całkę tego układu, zawierającą funkcyę φ_n; weźmy więc np. równanie:

$$d\varphi_n = \frac{dx_n}{\xi_n} , \tag{8}$$

i podstawmy w niem zamiast zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, zachodzących w funkcyi ξ_n, wartości ich, otrzymane z równań:

$$\Omega_1 = c_1, \ldots, \Omega_{n-1} = c_{n-1} ,$$

będących całkami układu (2) i zarazem układu (7) (w którym stosunki $\frac{dx_1}{\xi_1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi_n}$ są te same, co w układzie (21)),

a otrzymamy z równania (8) równanie różniczkowe zwyczajne pomiędzy φ_n i x_n. Całkując to równanie i podstawiając za $c_1, \ldots, c_{n-1}$ ich wartości, znajdziemy szukaną funkcyę φ_n zmiennych $x_1, \ldots, x_n$.

Niechaj będzie przekształcenie nieskończonostkowe X; utwórzmy rozwinięcia szeregowe:

$$(9) \qquad x'_h = x_h + \frac{t}{1} Xx_h + \frac{t^2}{2!} X^2 x_h + \ldots.$$

stosujące się do pewnego otoczenia punktu $t=0$.

Do tych rozwinięć doszliśmy w § 6, rozwijając na szeregi w otoczeniu punktu $t=0$ wielkości x', otrzymane z wzorów (7) §-u 5-go, które, jak to powiedzieliśmy, są wzorami przekształcenia grupy kanonicznej.

Postępowanie, wskazane w § 5, może posłużyć do okazania, w jaki sposób, mając X, możemy stąd otrzymać równania skończone grupy kanonicznej; będzie przeto rzeczą użyteczną podać te rachunki w formie nieco różnej, które wskaże zarazem związek ich z rozważaniami powyższemi nad redukcyą do formy kanonicznej symbolów przekształceń nieskończonostkowych.

Wzory (9) można zjednoczyć, jak wiemy, w jednym wzorze ogólnym (patrz § 6):

$$(10) \qquad F(x') = F(x) + \frac{t}{1} X(F(x)) + \frac{t^2}{2!} X^2(F(x)) + \ldots$$

Wybierzmy na F takie funkcye, aby było tożsamościowo $XF = 0$; ponieważ wtedy są zerami $X^2F, X^3F, \ldots$, więc strona pierwsza wzoru (10) sprowadza się do pierwszego jej wyrazu a wielkość t zostaje tym sposobem wyeliminowana. Wypadnie więc wziąć za F całki równania $XF = 0$, posiadającego, jak wiemy, $n-1$ całek niezależnych $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$. Kładąc w równaniu (10) za F kolejno każdą z tych całek, otrzymujemy bezpośrednio wzory:

$$(11) \qquad \Omega_1(x') = \Omega_1(x), \ldots, \Omega_{n-1}(x') = \Omega_{n-1}(x),$$

które są dokładnie $n-1$ pierwszemi wzorami (7) § 5-go i które możemy uważać jako rezultat eliminacyi wielkości t z równań (9). Pozostaje znaleść ostatni z wzorów 6) § 5-go, zawierający wielkość t. Dojdziemy do tego, obliczając funkcyę Ω_n tak, aby było $X\Omega_n=1$. W samej rzeczy jest wtedy $X^2\Omega_n=X^3\Omega_n=...=0$, a z równania (10), kładąc w niem $F=\Omega_n$, otrzymujemy wprost:

$$\Omega_n(x') = \Omega_n(x) + t. \tag{12}$$

Widzimy więc, że wyznaczenie funkcyi Ω_n odpowiada ściśle wyznaczeniu powyższemu funkcyi φ_n, sprowadzającej symbol X do postaci kanonicznej, i podobnie wyznaczenie funkcyj $\Omega_1, ..., \Omega_{n-1}$ odpowiada wyznaczeniu funkcyj $\varphi_1, .., \varphi_{n-1}$, które służyły do tej samej redukcyi. Możemy więc powiedzieć: Redukcya przekształcenia X do postaci kanonicznej i wyznaczenie grupy kanonicznej, zawierającej dane przekształcenie X, są zupełnie równoważne.

Możemy nadto powiedzieć:

Mając dane przekształcenie nieskończonostkowe X, można utworzyć grupę (kanoniczną) o jednym parametrze istotnym, zawierającą przekształcenie tożsamościowe i dane przekształcenie nieskończonostkowe, zawierającą nadto do każdego przekształcenia odwrotne; wzory przekształcenia tej grupy dają się w otoczeniu przekształcenia tożsamościowego rozwinąć na szeregi, takie jak (9), w otoczeniu zaś innego jakiegokolwiek przekształcenia, np. w otoczeniu przekształcenia o parametrze t, przedstawić się dają jako iloczyny pewnego ustalonego przekształcenia o parametrze t_1 przez przekształcenie, dane przez wzory (9), gdzie zamiast t wzięto $t-t_1$. Ta ostatnia własność wynika z rozważań analogicznych do rozważań, podanych na końcu § 5-go.

Zauważmy jeszcze, że wzór ogólny (10) można napisać symbolicznie:

$$F(x') = e^{tX} \cdot F(x),$$

gdzie symbol operacyjny wykładniczy e^{tX} ma na podstawie definicyi, rozwijać się na szereg, podobny do tego, na jaki rozwijałby się, gdyby wykładnik był wielkością istotną.

---

§ 8.

Rozmaite własności symbolów przekształceń nieskończonostkowych i związki pomiędzy niemi. Symbol Poissona i wzór Jacobi'ego. Rząd przekształcenia nieskończonostkowego w punkcie danym.

Niechaj będzie r przekształceń nieskończonostkowych:

$$X_i f = \sum_{h=1}^{n} \xi_{ih} \frac{\partial f}{\partial x_h}, \ldots, X_r f = \sum_{h=1}^{n} \xi_{rh} \frac{\partial f}{\partial x_h}.$$

Utwórzmy przy pomocy r funkcyj dowolnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ kombinacyę:

$$\lambda_1 X_1 f + \ldots + \lambda_r X_r f;$$

będziemy mieli, oczywiście, wyrażenie tego samego typu, co X, t. j. symbol pewnego przekształcenia nieskończonostkowego. Dla każdego przekształcenia nieskończonostkowego X_i przyrosty nieskończonostkowe zmiennych x_h są proporcyonalne do wielkości ξ_{ih}; dla nowego przekształcenia, otrzymanego liniowo z danych, przyrosty te będą proporcyonalne do takichże kombinacyj liniowych wielkości ξ, t. j. do wielkości $\lambda_1 \xi_{ih} + \ldots + \lambda_r \xi_{rh}$. Widzimy tedy, że kombinacya l i n i o w a symbolów pociąga za sobą kombinacyę l i n i o w ą przyrostów wielkości x.

Nazwiemy r przekształceń nieskończonostkowych wprost lub zwyczajnie niezależnemi, gdy symbole ich X nie czynią zadość żadnemu związkowi liniowemu postaci:

$$(1) \qquad e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \ldots + e_r X_r f = 0,$$

w którym spółczynniki $e_1, e_2, \ldots, e_r$ są niezależne od x i nie są wszystkie równe zeru. Nazwiemy te przekształcenia X bezwzględnie niezależnemi, jeżeli nie istnieje żaden związek liniowy jak (1), w którym spółczynniki e mogą być jakiemikolwiek funkcyami zmiennych x.

Jest oczywistem, że gdy r symbolów X są niezależnemi bezwzględnie, to są niezależnemi zwyczajnie, lecz nie odwrotnie. Jest nadto oczywistem, że warunkiem koniecznym i dostatecznym niezależności bezwzględnej jest, by macierz:

$$\left\| \begin{array}{c} \xi_{11}, \xi_{12}, \ldots, \xi_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{r1}, \xi_{r2}, \ldots, \xi_{rn} \end{array} \right\|$$

była różna od zera.

Łatwo okazać, że gdy zmiennych jest n, to pomiędzy $n+1$ symbolami przekształceń nieskończonostkowych zachodzi zawsze związek liniowy jednorodny o spółczynnikach, które są funkcyami zmiennych x, t. j. $n+1$ przekształceń nieskończonostkowych o n zmiennych nie mogą być bezwzględnie niezależnemi.

W samej rzeczy, aby istniał układ:

$$X_1 f = \xi_{11} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_{1n} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X_{n+1} f = \xi_{n+1,1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_{n+1,n} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

musi być zerem wyznacznik:

$$\begin{vmatrix} X_1 f, & \xi_{11}, & \ldots, & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{n+1} f, & \xi_{n+1,1}, & \ldots, & \xi_{n+1,n} \end{vmatrix},$$

skąd otrzymujemy właśnie związek liniowy pomiędzy symbolami X.

Powiedzieliśmy na końcu § 6-go, że symbol X można uważać także jako symbol operacyjny, mający wiele własności symbolu różniczkowania. Istotnie, jest oczywistem, że posiada on własność przemienności z symbolem sumy, t. j. że operujemy tym symbolem na sumie, operując na każdym wyrazie sumy; podobnież łatwo widzieć, że działanie, wskazane symbolem X, stosowane do iloczynu, podlega tym samym prawidłom, co różniczkowanie iloczynu i t. d. Dalej, gdy mamy wykonać działanie X na funkcyi złożonej $f(\varphi, \psi, \ldots)$, gdzie $\varphi, \psi, \ldots$ są funkcyami zmiennych x, dość w takim razie zastosować prawidło znane, by otrzymać wzór:

$$Xf(\varphi, \psi, \ldots) = \frac{\partial f}{\partial \varphi} X\varphi + \frac{\partial f}{\partial \psi} X\psi + \ldots$$

analogiczny do wzoru na pochodną funkcyi złożonej.

Dla dwóch symbolów X nie istnieje prawo przemienności, t. j. że działając najprzód jednym, a potem drugim, nie otrzymujemy wogóle tego samego wyniku, jaki otrzymujemy, działając symbolami w porządku odwrotnym. Jeżeli zatem $X_i X_j f$ oznacza wynik pierwszego, $X_j X_i f$ wynik drugiego działania, różnica:

$$X_i X_j f - X_j X_i f,$$

nie jest wogóle zerem. Różnicę tę oznaczać będziemy krótko za pomocą symbolu:

$$(2) \qquad (X_i X_j) f,$$

który nazywamy zwykle nawiasem Poissona. Okaże-

my, że symbol (2) jest tego samego typu, co X, t. j. jest liniowym jednorodnym względem pochodnych rzędu 1-go funkcyi f i nie zawiera pochodnych rzędu 2-go. W samej rzeczy:

$$X_j f = \sum_{h=1}^{n} \xi_{jh} \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

$$X_i X_j f = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} \left(\frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_h} + \xi_{ih} \frac{\partial^2 f}{\partial x_h \partial x_k} \right);$$

zmieniając tu i na j, h na k i odejmując, otrzymujemy:

$$(X_i X_j) f = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} \frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{n} \xi_{jk} \frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x_k} \right) \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

(3)

$$= \sum_{h=1}^{n} (X_i \xi_{jh} - X_j \xi_{ih}) \frac{\partial f}{\partial x_h}.$$

W ten sposób twierdzenie zostało dowiedzione. Widzimy stąd nadto, w jaki sposób powstają spółczynniki nowego symbolu: są one równe różnicom wyników, otrzymanych przez stosowanie działań X_i i X_j odpowiednio do spółczynników symboli X_j i X_i.

Łatwo okazać prawdziwość wzoru:

$$(\varphi(x)\, X_1 + \psi(x)\, X_2 + \ldots, X_3) f$$
$$= \varphi(x)\, (X_1 X_3) f + \psi(x)\, (X_2 X_3) f + \ldots$$
$$- X_3 \varphi(x)\, X_1 f - X_3 \psi(x)\, X_2 f - \ldots.$$

Ważną jest tożsamość, nazwana tożsamością Jacobi'ego:

$$((X_1 X_2) X_3) + ((X_2 X_3) X_1) + ((X_3 X_3) X_2) = 0.$$

Aby ją wyprowadzić, zauważmy, że:

$$(X_1\ X_2) = X_1\ X_2 - X_2\ X_1\ ,$$

stąd:

$$((X_1\ X_2)\ X_3) = (X_1\ X_2)\ X_3 - X_3\ (X_1\ X_2) = X_1\ X_2\ X_3 - X_2\ X_1\ X_3 - X_3\ X_1\ X_2 + X_3\ X_2\ X_1\ .$$

Przemieniając kołowo skaźniki 1, 2, 3 i sumując, otrzymujemy związek żądany.

Pomiędzy symbolami X zachodzą jeszcze inne związki, podane w nocie „O pewnych tożsamościach, zachodzących pomiędzy symbolami operacyjnemi, przedstawiającemi przekształcenia nieskończonostkowe“[1]), a które służą do rozwiązania ważnego zadania, dotyczącego iloczynu dwóch przekształceń skończonych. Podamy tu tylko sam rezultat, odsyłając czytelnika po szczegóły do tej noty oraz do innej p. t.: „O wzorze na iloczyn dwóch przekształceń skończonych“ i t. d.[2]).

Niechaj będzie h symbolów $X_1, \ldots, X_h$ przekształceń nieskończonostkowych; załóżmy, że są one albo wszystkie różne, albo też, że niektóre z nich są sobie równe. Utwórzmy ich iloczyny, zmieniając porządek czynników wszelkiemi możliwemi sposobami, tak aby otrzymać iloczyny wogóle różne. Jeżeli pomiędzy symbolami X jest α symbolów równych X_1, β równych X_2, i t. d., tak że $\alpha + \beta + \ldots = h$, to liczba iloczynów różnych będzie oczywiście $\frac{h!}{\alpha!\,\beta!\ldots}$ Sumę wszystkich tych iloczynów nazwijmy suma elementarna działań rzędu h, działania zaś X_1^{α}, $X_2^{\beta}, \ldots$ nazwijmy działaniami składowemi. Wyniki, otrzymane przez nas w powyżej wymienionej nocie, wyrażają się w twierdzeniach następujących:

Działanie rzędu k

$$\binom{k}{r} X_2^{r}\ X_1^{k-r} \tag{4}$$

[1]) E. Pascal: Sopra alcune identità fra i simboli operativi rappresentanti trasformazioni infinitesime. Rend Ist. Lomb. (2), 34, 1901.

[2]) E. Pascal: Sulla formola di prodotto di due trasformazioni finite etc. Tamże.

może być wyrażone liniowo przez sumy elementarne rzędu $k, k-1, k-2, \ldots$; te zaś działania i ich spółczynniki otrzymujemy sposobem następującym.

Utwórzmy m nawiasów postaci:

$$(5) \qquad (X_{i_1}(X_{i_2}\ldots(X_{i_s}(X_1 X_2))\ldots)),$$

gdzie skaźniki $i_1, \ldots, i_s$ w liczbie s mają tylko wartości 1 i 2, skombinowane dowolnie; liczba v wszystkich symbolów X_2, znajdujących się w tych nawiasach, niechaj nie będzie większa od r, a liczba w wszystkich symbolów X_1 niechaj nie przewyższa $k-r$. Stąd, jeżeli przynajmniej jeden symbol X_2 znajduje się w każdym z tych nawiasów, będzie $m \leqslant v$, i nadto $v \leqslant r$, $w \leqslant k-r$, $m \leqslant r$; liczba s i skaźniki $i_1, \ldots, i_s$ zmieniają się wogólności od jednego z m nawiasów do drugiego, przyczem nie jest wyłączone, że niektóre z nich, a nawet wszystkie te nawiasy są identyczne.

Suma elementarna S, której składowemi są X_1^{k-r-w}, X_2^{r-v} i m nawiasów (5), jest jednym z wyrazów rozwinięcia, które tu rozważamy; rozwinięcie to otrzymujemy tedy, tworząc wszelkiemi możliwemi sposobami sumy elementarne S i z nich kombinacyę liniową o spółczynnikach, które poniżej wskażemy.

Suma elementarna S jest rzędu:

$$k-r-w+r-v+m = k+m-v-w,$$

t. j. rzędu $k-t$, gdzie $t=w+v-m$; a spółczynnik liczbowy sumy S będzie $k(k-1)\ldots(k-t+1)\,\Gamma$, gdzie Γ jest wielkość niezależna od k, a zależąca jedynie od działań składowych sumy elementarnej S.

Mamy tedy:

$$(6) \qquad \binom{k}{r} X_2^r X_1^{k-r} = \sum k(k-1)\ldots(k-t+1)\,\Gamma . S,$$

gdzie znak sumy rozciąga się na wszystkie możliwe sumy elementarne S.

Pozostaje jeszcze wskazać, w jaki sposób wyznacza się wielkość Γ. Rozważmy w tym celu szereg działań:

$$(X_1 X_2),\ (X_1 (X_1 X_2)),\ (X_1 (X_1 (X_1 X_2))), \ldots$$

i niechaj każdemu z nich odpowiada jedna z liczb $\gamma', \gamma'', \gamma'', \ldots$, związanych następującym wzorem zwrotnym:

$$\gamma^{(s)} = -\left[\frac{1}{2!}\gamma^{(s-1)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(s-2)} + \ldots + \frac{1}{s!}\gamma' + \frac{1}{(s+1)!}\right];$$

działaniom X_1, X_2 niechaj odpowiada liczba 1, którą dla analogii oznaczmy przez $\gamma^{(0)}$; wreszcie każdemu nawiasowi ogólniejszemu, takiemu jak (5), w którym symbole X od pierwszego aż do przedostatniego nie są wszystkie X_1, lecz już to X_1, już to X_2, niechaj odpowiada liczba oznaczona, dana przez pewne prawo, którego do celu naszego znać nie potrzebujemy. Zresztą na zasadzie wyników, podanych i udowodnionych we wspomnianej nocie, można przy pomocy indukcyi wywnioskować, że to prawo jest następujące. Dajmy, że postępując od strony prawej ku lewej w wyrażeniu (2) (po pierwszym skaźniku 2) mamy α razy symbol X ze skaźnikiem 1, β razy skaźnik 2, δ razy skaźnik 1, ε razy skaźnik 2 i tak dalej; liczba odpowiadająca symbolowi (2) będzie iloczynem liczb γ postaci: $\gamma^{(\alpha+\beta)}, \gamma^{(\delta+\varepsilon)}, \ldots$, co istotnie sprawdza się dla $r=1, 2$. Zresztą, jak powiedziano, to czy inne prawo jest dla naszego celu obojętne; dość wiedzieć, że każdemu działaniu (5) odpowiada liczba niezależna od liczby k. Wielkość zaś Γ wyznacza się na podstawie następującego twierdzenia:

Spółczynnik liczbowy Γ we wzorze (6) równa się iloczynowi liczb, odpowiadających każdemu z działań składowych sumy S.

Zaznaczymy jeszcze, że dla prostoty pisać będziemy symbol (5) w postaci:

$$(X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_s} X, X_2), \tag{7}$$

i że liczby γ mają wartości:

$$\gamma' = -\frac{1}{2}, \quad \gamma'' = \frac{1}{12}, \quad \gamma''' = 0, \quad \gamma^{IV} = -\frac{1}{6!}, \ldots$$

Wyniki te spożytkujemy w § 9.

Wprowadzimy obecnie pojęcie rzędu przekształcenia nieskończonostkowego w punkcie danym.

Niechaj będzie punkt o spółrzędnych x_i^0 i załóżmy, że spółczynniki $\xi_1, \ldots, \xi_n$ przekształcenia nieskończonostkowego są funkcyami regularnemi w tym punkcie, t. j. że w jego otoczeniu dają się rozwinąć na szeregi według potęg całkowitych dodatnich różnic $x_i - x_i^0$. Wyobraźmy sobie te rozwinięcia, wykonane dla wszystkich funkcyj ξ; podstawmy je w wyrażeniu:

$$\xi_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + \xi_n \frac{\partial F}{\partial x_n}. \tag{8}$$

zbierzmy razem wyrazy tego samego rzędu różnic $x_i - x_i^0$ i przyjmijmy w ogólności, że k jest najniższym rzędem, jaki występuje w rozwinięciach wszystkich funkcyj ξ. Wtedy wyrażenie (8) rozpadnie się na sumę pewnej liczby przekształceń nieskończonostkowych, z których pierwsze będzie miało jako spółczynniki funkcye jednorodne całkowite stopnia k różnic $x_i - x_i^0$, spółczynnikami drugiego będą funkcye analogiczne stopnia $k+1$, i tak dalej; mówimy wtedy, że dane przekształcenie nieskończonostkowe, rozwinięte w sposób wyżej podany, daje nam przekształcenie, które rozpoczyna się od wyrazów rzędu k i jest rzędu k w uważanym punkcie x^0.

Jest jasnem, że dwa przekształcenia nieskończonostkowe, będące różnego rzędu w punkcie danym, są wprost niezależne; można powiedzieć i więcej, mianowicie, że dwa przekształcenia nieskończonostkowe jednego rzędu w tym samym punkcie są wprost niezależne, jeżeli niezależnemi są od siebie ich wyrazy rzędu najniższego, od których rozpoczynają się rozwinięcia na szereg tych dwóch przekształceń.

Niechaj będą dwa przekształcenia nieskończonostkowe X, Y, rzędów k, h w punkcie x_i^0; szukajmy rzędu przekształcenia (XY) w tymże punkcie.

Stosując wzór (3), widzimy, że spółczynnikami przekształcenia (XY) są:

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\xi_s \frac{\partial \eta_j}{\partial x_s} - \eta_s \frac{\partial \xi_j}{\partial x_s}\right),$$

jeżeli ξ, η są odpowiednio spółczynnikami przekształceń X, Y. Ponieważ przyjmujemy, że funkcye ξ są rzędu k, funkcye zaś η rzędu h względem różnic $x_i - x_i^0$, przeto pochodne ich są odpowiednio rzędów $k-1$, $h-1$; mamy tedy:

„Jeżeli rzędami przekształceń X, Y w punkcie x^0 są odpowiednio k, h, to rząd przekształcenia (XY) jest $k+h-1$.“

Ważnem jest, że rząd przekształcenia nieskończonostkowego X w punkcie x_i^0 nie zmienia się przez zamianę zmiennych. W samej rzeczy, zamiast zmiennych x wprowadźmy zmienne y przy pomocy wzorów:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ \ldots, \ y_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n),$$

które, jak zwykle przyjmujemy, dają się rozwiązać względem wielkości x, t. j. wyznacznik funkcyjny:

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)},$$

jest różny od zera. Załóżmy nadto, że funkcye y są regularnemi w punkcie x_i^0, t. j. że zachodzą rozwinięcia:

$$y_j = y_j^0 + \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(x_i - x_i^0) + \ldots$$

W rozwinięciach tych spółczynniki a_i nie mogą być wszystkie zerami, nie mogą być też zerami wszystkie spółczynniki, których

pierwszy skaźnik jest ten sam, gdyż wyznacznik wielkości a jest równy wyznacznikowi funkcyjnemu wielkości y względem x dla punktu x_0', ten zaś wyznacznik funkcyjny jest, jak założyliśmy, różny od zera.

Wiemy z § poprzedzającego, że spółczynniki przekształcenia nieskończonościowego po zamianie zmiennych są Xy_j, t. j.:

$$\sum_{s=1}^{n} \xi_s \frac{\partial y_j}{\partial x_s},$$

i jeżeli przez $\overset{(k)}{\xi_s}$ oznaczymy część wyrażenia ξ_s, będącą rzędu k, i zauważymy, że:

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_s} = a_{js} + \ldots,$$

to wyrazy rzędu najniższego przekształcenia Xy_j będą:

$$\sum_{s=1}^{n} \overset{(k)}{\xi_s} a_{js};$$

wszystkie zaś one nie mogą być zerami, bo w razie przeciwnym byłby też zerem wyznacznik wielkości a, co sprzeciwia się założeniu. A więc rzęd k nie ulega zmianie.

Wiemy z § poprzedzającego, że punkt i przekształcenie nieskończonostkowe X określają w ogólności pewien kierunek, przez ten punkt przechodzący, i że dostawy tego kierunku są proporcyonalne do wartości spółczynników ξ przekształcenia X w tym punkcie. Jeżeli teraz założymy, że przekształcenie nieskończonostkowe jest w tym punkcie rzędu wyższego niż zero, wtedy oczywiście wszystkie spółczynniki ξ znikają w tym punkcie, a więc kierunek, o którym wyżej mowa, staje się nieoznaczonym. Uzupełniając tedy twierdzenie §-u poprzedzającego, możemy powiedzieć, że przekształcenie nieskończonostkowe wtedy określa kierunek, przechodzący przez punkt dany, jeżeli jest

rzędu zero dla tego punktu, a nie jest rzędu wyższego od zera. W tym drugim zaś przypadku mówimy, że przekształcenie nieskończonostkowe nie zmienia punktu (in Ruhe lässt, według wyrażenia Liego); mamy tedy twierdzenie:

Przekształcenie nieskończonostkowe, będące w punkcie danym rzędu wyższego niż zero, nie zmienia tego punktu.

---

§ 9.

Wzory na iloczyn dwu przekształceń skończonych, danych w postaci kanonicznej.

Niechaj będą dwa przekształcenia w zwykłej postaci kanonicznej:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_i' &= x_i + \frac{t}{1!} X_1 x_i + \frac{t^2}{2!} X_1^2 x_i + \ldots = e^{tX_1} x_i, \\ x_i'' &= x_i' + \frac{t'}{1!} X_2 x_i' + \frac{t'^2}{2!} X_2^2 x_i' + \ldots = e^{t' X_2} x_i', \end{aligned}$$

gdzie X_1, X_2 są symbolami dwóch różnych przekształceń nieskończonostkowych, t i t' — parametrami dwóch danych przekształceń skończonych. W drugim z tych wzorów należy naturalnie rozumieć symbol X_2, jako wypisany w zmiennych x', zamiast w zmiennych x; przekształcając zaś zmienne x' na zmienne x, możemy symbol ten rozumieć jako wyrażony w zmiennych x, podobnie jak symbol X_1. Iloczyn dwu przekształceń (1) możemy znów przedstawić w postaci kanonicznej, t. j. w postaci:

$$(2)\qquad x_i'' = x_i + \frac{1}{1!} X_3 x_i + \frac{1}{2!} X_3^2 x_i' + \ldots = e^{X_3} x_i'.$$

Powstaje tedy pytanie, w jaki sposób przekształcenie nieskończonostkowe X_3 otrzymać można z przekształceń nieskończonostkowych X_1 i X_2? Nie wiadomo mi, czy zagadnienie to zo-

stało dotąd rozwiązane; traktuje o niem nota moja: „O wzorze na iloczyn dwu przekształceń skończonych“ [1]). Jeżeli $X_2 = X_1$, wtedy $X_3 = (t+t')\,X_1$, lecz rozpatrzymy tu przypadek, w którym przekształcenia X_2 i X_1 są niezależne. Dowód wzoru, który podamy, opiera się na tożsamościach ogólnych, podanych w paragrafie poprzedzającym; wzór ten można uważać za źródło jedyne, z którego możemy otrzymać szereg rezultatów, które w teoryi grup przekształceń osiągnięto bardzo różnemi drogami.

Eliminując wielkości x' z wzorów (1), otrzymujemy przedewszystkiem wzór na iloczyn, postaci:

$$x_i'' = x_i + \frac{t}{1!} X_1 x_i + \frac{t^2}{2!} X_1^2 x_i + \ldots$$
$$+ \frac{t'}{1!}\left(X_2 x_i + \frac{t}{1!} X_2 X_1 x_i + \frac{t^2}{2!} X_2 X_1^2 x_i + \ldots\right)$$
$$+ \frac{t'^2}{2!}\left(X_2^2 x_i + \frac{t}{1!} X_2^2 X_1 x_i + \frac{t^2}{2!} X_2^2 X_1^2 x_i + \ldots\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

który można i tak napisać:

$$x_i'' = x_i + (tX_i + t'X_2)\,x_i$$
$$+ \frac{1}{2!}(t^2 X_1^2 + 2tt' X_2 X_1 + t'^2 X_2^2)\,x_i \qquad (3)$$
$$+ \frac{1}{3!}(t^3 X_1^3 + 3t^2 t' X_2 X_1^2 + 3tt'^2 X_2^2 X_1 + t'^3 X_2^3)\,x_i$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aby rozwiązać zagadnienie nasze, winniśmy postarać się tak przekształcić wyrazy tego wzoru, aby po sprowadzeniu jego wyrazów do sumy wyrażeń różnego rzędu, a następnie zebraniu wszystkich wyrazów tego samego rzędu, zbiór wyrazów rzędu k

[1]) E. Pascal: Sulla formola del prodotto di due trasformazioni finite. (Rend. Ist. Lomb (2), **34**, 1901).

był — pomijając czynnik $\frac{1}{k!}$ —potęgą k-tą sumy wyrazów rzędu pierwszego.

Którykolwiek wyraz rzędu k-go wzoru (3) – pomijając czynnik $\frac{1}{k!}\, t^{k-r}\, t'^{r}$ —jest wynikiem działania:

$$\binom{k}{r} X_2^{r}\, X_1^{k-r}, \tag{4}$$

stosowanego do zmiennych x_i. Do każdego takiego wyrazu, jak (4), zastosujmy twierdzenie paragrafu poprzedzającego (str. 58—59), zmieniajmy k od 2 do ∞, r od 0 do k i zbierzmy wszystkie wyrazy rzędu oznaczonego, np. rzędu k. Pierwszy wyraz tego rzędu otrzymujemy z wyrazów rzędu k we wzorze (3); jest on:

$$\frac{1}{k!}\, t^{k-r}\, t'^{r}\, S\,(X_1^{k-r};\, X_2^{r});$$

gdzie przez $S(X_1^{k-r};\, X_2^{r})$ rozumiemy sumę elementarną, której składowemi są X_1^{k-r} i X_2^{r}. Zmieniając r od 0 do k, mamy:

$$\frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{k} t^{k-r}\, t'^{r}\, S\,(X_1^{k-r};\, X_2^{r}). \tag{5}$$

Otóż wyrażenie to równa się:

$$\frac{1}{k!}\,[tX_1 + t'X_2]^{k},$$

jeżeli rozwijając tę k-tą potęgę, nie zakładamy naturalnie przemienności iloczynu przekształceń X_1, X_2.

Drugi wyraz rzędu k-tego otrzymujemy, rozwijając wyrazy rzędu $k+1$ we wzorze (3); jest on:

$$\frac{1}{(k+1)!}\, t^{k-r}\, t'^{r+1}\, (k+1)\, \gamma'\, S\,(X_2^{k-r-1};\, X_2^{r};\, (X_1\, X_2)),$$

gdzie przez $S(X_1^{k-r-1}; X_2^r; (X_1 X_2))$ rozumiemy sumę elementarną, której składowemi są X_1^{k-r-1}, X_2^r, $(X_1 X_2)$ i gdzie, jak wiemy, $(k+1)\gamma'$ jest spółczynnikiem takiej sumy S. Zmieniając r od 0 do $k-1$, otrzymujemy razem:

$$(6) \qquad \frac{1}{k!}\gamma' \sum_{r=0}^{k-1} t^{k-r-1} \cdot t'^r \cdot tt' \cdot S(X_1^{k-r-1}; X_2^r; (X_1 X_2)).$$

Podobnież wyrazy rzędu $k+2$ we wzorze (3), po podobnym rozkładzie, dają:

$$\frac{1}{(k+2)!} t^{k-r-1} t'^{r+2} (k+2)(k+1)\gamma'^2 \cdot S(X_1^{k-r-2}; X_2^r; (X_1 X_2)^2),$$

a sumując od $r=0$ do $r=k-2$, otrzymujemy:

$$(7) \qquad \frac{1}{k!}\gamma'^2 \sum_{r=0}^{k-2} t^{k-r-1} t'^r \cdot t^2 t'^2 S(X_1^{k-r-2}; X_2^r; (X_1 X_2)^2)$$

i tak dalej.

Suma wyrazów (5), (6), (7) i analogicznych równa się:

$$\frac{1}{k!}[tX_1 + t'X_2 + \gamma' tt' (X_1 X_2)]^k;$$

gdzie, jak zwykle, w rozwinięciu tej potęgi k-tej nie zakładamy przemienności iloczynów przekształcenia X_1 przez X_2 i przez $(X_1 X_2)$.

Rozważania powyższe wystarczają do zrozumienia, że zagadnienie nasze, t. j. wyznaczenie przekształcenia nieskończonostkowego X_3 we wzorze (2) rozwiązuje się przy pomocy ogólnego rozkładu, o którym mówiliśmy w paragrafie poprzedzającym (str. 58—59). Nie zatrzymując się na dalszych rozważaniach, które co do swej istoty nie różniłyby się od powyższych, możemy już wnieść odrazu, że przekształcenie nieskończonostkowe X_3, odpowiadające ilo-

czynowi dwóch danych przekształceń skończonych, wyraża się wzorem:

$$
\begin{aligned}
X_3 = {} & tX_1 + t'X_2 + \gamma' tt' (X_1 X_2) \\
& + \gamma'' t^2 t' (X_1 X_1 X_2) + \gamma'' tt'^2 (X_2 X_1 X_2) \\
& + \gamma'' \gamma' t^2 t'^2 (X_1 X_2 X_1 X_2) + \gamma''' t^3 t' (X_1 X_1 X_1 X_2) + \gamma''' t t'^3 (X_2 X_2 X_1 X_2) \\
& + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{aligned} \tag{8}
$$

w którym symbole $(X_1 X_1 X_2)$, $(X_1 X_2 X_1 X_2)$, ... określa wzór (7) §-u poprzedzającego, i którego prawo tworzenia wyrazów widzieć łatwo, mianowicie: każdy wyraz jest przekształceniem nieskończonostkowem typu $(X_{i_1} \ldots X_{i_s} X_1 X_2)$ (wzór (7) §-u poprzedzającego), pomnożonem przez spółczynnik Γ, niezależny od k i należący do tego przekształcenia według twierdzenia §-u poprzedzającego, oraz przez parametry t i t' podniesione do potęg, których wykładniki są równe liczbom całkowitym, wyrażającym, ile razy powtarzają się w symbolu tego przekształcenia symbole X_1 i X_2. Wreszcie liczby γ są określone wzorem zwrotnym:

$$\gamma^{(s)} = -\left[\frac{1}{2!}\gamma^{(s-1)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(s-2)} + \ldots + \frac{1}{s!}\gamma' + \frac{1}{(s+1)!}\right].$$

---

§ 10.

Wyrażenia Xf, uważane jako pierwsze strony równań o pochodnych cząstkowych. Układy zupełne równań $Xf = 0$.

Przyrównawszy do zera wyrażenie Xf, t. j. pisząc:

$$Xf = \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial f}{\partial x_h} = 0,$$

otrzymujemy równanie o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego, liniowe, jednorodne, w którego spółczynnikach nie występuje funkcya niewiadoma f.

Dajmy, że mamy układ r takich wyrażeń X, wtedy otrzymujemy układ r równań:

$$X_1 f=0, \ldots, X_r f=0, \tag{1}$$

tegoż gatunku.

Pomiędzy własnościami wyrażeń X a całkami, stanowiącemi rozwiązania wspólne tego układu, zachodzą pewne związki, które tu wyprowadzimy.

Przedewszystkiem jest rzeczą jasną, że jeżeli idzie o rozwiązania wspólne układu, możemy pominąć wyrażenia X, które dają się wyrazić liniowo przez inne wyrażenia tegoż układu (ze spółczynnikami i zmiennemi, t. j. będącemi funkcyami wielkości x), gdyż odpowiadające im równania będą zawsze spełnione przez rozwiązania wspólne pozostałych równań; tym sposobem wyrażenia, o których mowa, nie mają żadnego wpływu na rozwiązanie zagadnienia. Przyjmijmy tedy, że pomiędzy wyrażeniami X nie zachodzi żaden związek liniowy o spółczynnikach jakichkolwiek, zmiennych lub stałych.

Jest jasnem, że liczba r musi być mniejsza od n, aby układ (1) miał rozwiązania różne od rozwiązania oczywistego $f=\text{const.}$

Gdyby bowiem r było równe n lub większe od n, wtedy spółistnienie tych równań dla tej samej funkcyi f, której wszystkie pochodne nie są zerami, która zatem nie równa się stałej, wymagałoby, aby macierz:

$$\left\| \begin{matrix} \xi_{11}, \ldots, \xi_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{r1}, \ldots, \xi_{rn} \end{matrix} \right\|$$

była tożsamościowo zerem, t. j., aby wszystkie wyznaczniki rzędu n-tego, w macierzy tej zawarte, były zerami; stąd zaś na mo-

cy znanych własności wyznaczników równych zeru, wynikałoby, że wszystkie elementy jednego wiersza byłyby takiemiż samemi kombinacyami liniowemi elementów innych wierszy, a to wbrew założeniu powyższemu o niezależności liniowej wyrażeń (1).

Jeżeli utworzymy kombinacyę:

$$(2) \qquad (X_i X_j) f = 0,$$

otrzymamy nowe równanie tego samego gatunku, i łatwo dowieść, że równaniu temu czynią zadość te same funkcye f, które czynią zadość równaniom $X_i f=0$, $X_j f=0$. Gdyż jeżeli f jest rozwiązaniem wspólnem równań $X_i f=0$, $X_j f=0$, będzie wtedy tożsamościowo:

$$X_i X_j f = 0, \quad X_j X_i f = 0,$$

a stąd:

$$(X_i X_j - X_j X_i) f = (X_i X_j) f = 0.$$

Wynika stąd ważny wniosek:

Może się zdarzyć, że równanie $(X_i X_j) f = 0$ jest kombinacyą liniową równań (1) i wtedy niema potrzeby rozważania go; ale gdy nie jest taką kombinacyą liniową, wtedy, jeżeli dołączymy to równanie do układu (1), to nie zmieni ono rozwiązań wspólnych, gdyż równaniu dołączonemu czynią zadość też same funkcye, które czynią zadość równaniom pierwotnym. Wynika stąd, że jeżeli do równań układu (1) dołączymy wszelkie możliwe równania (2), nie będące kombinacyami liniowemi równań (1), otrzymamy układ rozszerzony; postępując z tym układem podobnie jak z pierwotnym i powtarzając kolejno tożsamo postępowanie, dojdziemy wreszcie do układu większej liczby równań, pomiędzy któremi nie zachodzi już żaden związek liniowy, a których rozwiązania wspólne są zupełnie te same, co rozwiązania układu danego.

Postępując tym sposobem, musimy koniecznie od układu danego dojść do takiego układu równań, że tworząc dla tego układu wszystkie kombinacye (2), otrzymamy zawsze równania, które są kombinacyami liniowemi równań tego ostatniego układu. Gdyby bowiem było inaczej, to prowadząc dalej toż samo po-

stępowanie, otrzymalibyśmy równań n, lub więcej niż n, a w takim razie jedynem rozwiązaniem wspólnem układu równań byłoby $f=\text{const}$. Wnosimy stąd, że można zawsze zbudować taki układ, że wszystkie wyrażenia $(X_i X_j)$ są kombinacyami liniowemi wyrażeń X.

Układ taki nazywamy zupełnym; możemy więc powiedzieć: każdy układ dany daje się sprowadzić do układu zupełnego; stąd, gdy idzie o szukanie rozwiązań wspólnych, można zakładać zawsze, że układ (1) jest zupełny.

Jeżeli strony pierwsze równań układu są bezwzględnie niezależne (patrz str. 54), mówimy że układ zupełny jest nieprzywiedlny.

Nie możemy tu wchodzić w szczegółowy rozbiór tego zagadnienia, którego teorya należy właściwie do teoryi układów równań o pochodnych cząstkowych i wiąże się ściśle z teoryą równań o różniczkach całkowitych rzędu pierwszego.

Przedmiotem tym zajmowali się: Deahna (Crelle **20**), Natani (tamże **58**), A. Mayer (Math. Ann. **5**), Frobenius (Crelle **82**) i t. d. Porównaj w tym przedmiocie rozprawę K. Żorawskiego: „O całkowaniu układów równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego, liniowych i jednorodnych z jedną zmienną zależną“. (Prace mat.-fiz., **3**, 1892).

Podamy tu tylko rezultat: Układ zupełny nieprzywiedlny r równań postaci (1) o n zmiennych ma zawsze $n-r$ całek niezależnych z tylomaż stałemi dodajnemi.

Łatwo dowieść twierdzeń następujących, nad któremi tu zatrzymywać się nie będziemy.

Z układu zupełnego przez zamianę zmiennych otrzymujemy układ zupełny.

Jeżeli mamy układ zupełny i jeżeli z pewnej liczby albo ze wszystkich jego równań utworzymy układ równoważny (t. j. układ, którego równania są kombinacyami liniowe-

mi niezależnemi równań danych), otrzymamy znowu układ zupełny.

Mając układ zupełny r równań oraz funkcyę $\psi(x_1, \ldots, x_{n-r})$ $n-r$ zmiennych, możemy zawsze znaleść całkę taką, że dla $x_{n-r+1}=a_1, \ldots, x_n=a_r$ całka ta sprowadza się do funkcyi ψ innych zmiennych.

Jeżeli u jest całką układu zupełnego, zaś $v_1, \ldots, v_s$ są innemi s całkami niezależnemi, tak pomiędzy sobą, jak i od u, to biorąc z równań $v_1=c_1, \ldots, v_s=c_s$, gdzie c są stałe dowolne, wartości pewnej liczby zmiennych, np. zmiennych $x_1, \ldots, x_s$ i podstawiając te wartości w całkę u, otrzymamy znowu całkę układu.

Przytoczymy jeszcze o układach zupełnych twierdzenie, które będzie nam potrzebne nieraz w dalszym wykładzie; dowód tego twierdzenia, który pomijamy, zależy od wspomnianego już związku pomiędzy teoryą równań o różniczkach całkowitych rzędu pierwszego zupełnie całkowalnych a teoryą układu równań różniczkowych takich, o jakich mówimy obecnie. Twierdzenie to jest następujące:

Mając dany układ $n-r$ całek niezależnych

$$\Omega_1(x) = c_1, \ldots, \Omega_{n-r}(x) = c_{n-r}, \tag{3}$$

gdzie wielkości c są dowolne, wielkości zaś Ω nie są połączone żadnym związkiem, możemy zawsze zbudować układ zupełny r równań o pochodnych cząstkowych, liniowych, jednorodnych rzędu pierwszego, którego $n-r$ całkami niezależnemi są właśnie całki (3).

W przypadku $r=1$ twierdzenie to udowodniliśmy w nocie w § 1-ym. W przypadku r większego od 1, konstrukcya szukanego układu uskutecznia się sposobem analogicznym, t. j. przez przyrównanie do zera r wyznaczników niezależnych rzędu $n-r+1$ macierzy:

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \Omega_{n-r}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_{n-r}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

gdzie f jest symbolem funkcyi nieoznaczonej. Otrzymujemy tym sposobem równania, których całkami są oczywiście wszystkie całki (3). Należałoby jeszcze dowieść, że układ ten jest zupełnym, lecz to doprowadziłoby nas za daleko po za granice, które zakreśliliśmy sobie w tej pracy.

---

§ 11.

Konstrukcya ∞^{2r} przekształceń o r parametrach istotnych przy pomocy r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych.

Niechaj będą przekształcenia nieskończonostkowe:

$$(1)\qquad X_1, X_2, \ldots, X_r,$$

w liczbie r, niezależne w znaczeniu podanem w § 8, i o spółczynnikach $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, niezależnych od x; utwórzmy ich kombinacyę liniową:

$$(2)\qquad X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_r X_r,$$

która będzie nowem przekształceniem nieskończonostkowem. Wiemy, że każde przekształcenie nieskończonostkowe indywidualizuje grupę przekształceń jednoparametrową, którego wzorami są:

$$(3)\qquad x_i' = x_i + \frac{t}{1} Xx_i + \frac{t^2}{2!} X^2 x_i + \ldots = e^{tX} x_i.$$

Jeżeli za X podstawimy wartości (2), wtedy wzory (3) dadzą nam przekształcenia, zależne od parametrów $t\lambda_1, t\lambda_2, \ldots, t\lambda_r$. Napozór we wzorach (3) występuje $r+1$ parametrów, t. j. $t, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$, lecz ponieważ każda wielkość λ występuje w nich zawsze pomnożona przez t, przeto każdy z iloczynów $t\lambda_1, \ldots, t\lambda_r$ spełnia rolę jednego tylko parametru; stąd we wzorach (3) mamy nie więcej, niż r parametrów, które oznaczmy przez:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r. \tag{4}$$

Nie można utrzymywać, że wszystkie te przekształcenia, jakie otrzymujemy, zmieniając parametry (4) wszystkiemi możliwemi sposobami lub w pewnym obszarze (nie zaś zmieniając tylko parametr t, a ustalając inne parametry) tworzą grupę; zobaczymy też niżej, że to zachodzi tylko wówczas, gdy przekształcenia X czynią zadość pewnym warunkom. Dla większej ogólności przyjmijmy, że wielkości $\mu_1, \ldots, \mu_r$ nie mogą mieć wszelkich możliwych wartości, lecz że przybierają tylko wartości, zawarte w pewnym obszarze r-wymiarowym. Będziemy mieli wtedy ∞^{2r} przekształceń, albo tylko $\infty^{2(r-s)}$, stosownie do tego, czy parametry μ są istotne, albo nie (patrz § 1). Pytanie, które sobie stawiamy, jest mianowicie takie: czy i kiedy parametry są istotnemi?

Dowiedziemy, że warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby parametry (4), których jest r, były w przekształceniach (3) istotnemi, jest, by przekształcenia nieskończonostkowe (1) w liczbie r były wprost niezależnemi.

W samej rzeczy, gdyby pomiędzy przekształceniami (1) zachodził związek tożsamościowy liniowy o spółczynnikach stałych:

$$e_1 X_1 + \ldots + e_r X_r = 0,$$

wtedy przynajmniej jedno z tych przekształceń dałoby się wyrazić przez inne, a gdybyśmy wyrażenie takie wstawili do równań (2), otrzymalibyśmy przekształcenie nieskończonostkowe, podobne jak (2), lecz o mniejszej liczbie wyrazów, a więc z mniejszą liczbą spółczynników stałych. Lecz spółczynniki

stałe, występujące w równaniach (2), pomnożone przez t, odpowiadają parametrom przekształceń (3), stąd liczba ich może wynosić najwyżej $\infty^{2(r-1)}$, a więc wszystkie parametry (4) w liczbie r nie mogłyby być istotnemi. Pozostaje udowodnić jeszcze własność odwrotną. W tym celu rozpatrzmy najprzód przypadek, w którym $r \leqslant n$, macierz zaś:

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} \xi_{11}, \ldots, \xi_{n1} \\ \\ \xi_{1r}, \ldots, \xi_{nr} \end{matrix} \right\|$$

nie jest tożsamościowo zerem. Jeżeli zważymy, że wtedy i macierz:

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_1'}{\partial \mu_1}, \ldots, \dfrac{\partial x_n'}{\partial \mu_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial x_1'}{\partial \mu_r}, \ldots, \dfrac{\partial x_n'}{\partial \mu_r} \end{matrix} \right\|$$

nie może być także tożsamościowo zerem, gdyż dla $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_r = 0$ sprowadza się do poprzedzającej, wniesiemy stąd, że można będzie wybrać z pomiędzy równań (3) przynajmniej jeden układ r równań, dających się rozwiązać względem $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Podstawiwszy te wartości na $\mu_1, \ldots, \mu_r$ w pozostałych $n-r$ równaniach (3), otrzymamy najwyżej $n-r$ związków pomiędzy wielkościami x' i x.

Lecz gdyby parametry μ nie były r parametrami istotnemi, t. j. gdyby dały się wyrazić przez mniejszą liczbę innych parametrów, wtedy eliminując te inne parametry pomiędzy równaniami (3), otrzymalibyśmy więcej, niż $n-r$ związków pomiędzy wielkościami x' i x, co jak widzieliśmy, miejsca mieć nie może. A więc parametry te w liczbie r są istotnemi, gdy spełniają się poprzednie założenia, t. j. gdy $r \leqslant n$ i macierz (5) jest różna od zera.

Tylko te zestrzeżenia przyjmując, zastosujemy następujący sposób redukcyi do przypadku poprzedzającego.

Wraz ze zmiennemi $x_1, \ldots, x_n$ wprowadzamy r—1 szeregów zmiennych spółpodstawieniowych, które oznaczmy przez $x_{n+1}, \ldots, x_{rn}$, tak że całkowity układ wszystkich zmiennych przedstawiać będzie tablica:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1, \ldots\ldots, x_n \\ x_{n+1}, \ldots\ldots, x_{2n} \\ x_{2n+1}, \ldots\ldots, x_{3n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{(r-1)n+1}, \ldots, x_{rn}. \end{array} \right.$$

Poddajmy zmienne, zawarte w każdym z wierszy tej tablicy tym samym przekształceniom, jakim poddajemy zmienne $x_1, \ldots, x_n$, i oznaczmy, jak zwykle, zmienne przekształcone przez $x'_{n+1}, \ldots, x'_{rn}$. Ogół wszystkich wzorów, w ten sposób otrzymanych, przedstawiać będzie jedno przekształcenie wszystkich zmiennych układu (6); będziemy mieli tym sposobem przekształcenie r-parametrowe, w którem liczba zmiennych jest rn, a więc z pewnością większa od r lub równa r. Oznaczmy przez s przekształcenie, odnoszące się do samych zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, t. j. przekształcenie, dane przez wzory (3), przez S zaś przekształcenie, rozszerzone do wszystkich rn zmiennych.

Jeżeli parametry w liczbie r w przekształceniu s nie są istotne, t. j. gdy we wzorach (3) dają się zgrupować w pewną liczbę funkcyj tych parametrów, mniejszą od r, wtedy wzory, w których występują elementy wiersza 2-go tablicy (6), schodzą się z wzorami (3), w których zmieniono tylko nazwy zmiennych. Stąd zaś wynika, że i w tych ostatnich wzorach parametry dają się zgrupować w sposób podobny, jak poprzednio. Toż samo zachodzić będzie dla wzorów, odnoszących się do każdego innego wiersza tablicy (6). Widzimy tedy, że we wszystkich wzorach przekształcenia całkowitego S parametry grupują się zawsze w sposób identyczny, co znaczy, że nie są one istotnemi w tem

podstawieniu S. Jeżeli więc dowiedziemy, że parametry μ w liczbie r są istotnemi dla przekształcenia S, to będą również takiemi i dla przekształcenia s.

Utwórzmy dla przekształcenia S macierz, analogiczną do macierzy (5) dla przekształcenia s Funkcye ξ, zawarte w macierzy (5), są funkcyami zmiennych pierwszego wiersza tablicy (6); też same funkcye, wypisane dla zmiennych wiersza drugiego tablicy (6), oznaczmy przez:

$$\xi_{n+1,1}, \ldots, \xi_{2n,1},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\xi_{n+1,r}, \ldots, \xi_{2n,r};$$

i podobnież, powiększając liczbę n w pierwszym skaźniku wielkości ξ, otrzymamy wielkości ξ w zmiennych wiersza trzeciego i następnych. Szukaną macierzą jest więc:

$$(7) \qquad \left\| \begin{matrix} \xi_{11}, \ldots, \xi_{n1}, \xi_{n+1,1}, \ldots, \xi_{2n,1}, \ldots, \xi_{(r-1)n+1,1}, \ldots, \xi_{rn,1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{1r}, \ldots, \xi_{nr}, \xi_{n+1,r}, \ldots, \xi_{2n,r}, \ldots, \xi_{(r-1)n+1,r}, \ldots, \xi_{rn,r} \end{matrix} \right\|.$$

Jeżeli przynajmniej jeden z wyznaczników rzędu r tej macierzy nie jest zerem, wtedy powtarzając rozumowanie, stosowane w rozważonym poprzednio przypadku, wywnioskujemy, że parametry są istotnemi dla przekształcenia S, a więc i dla przekształcenia s. Jeżeli zaś macierz (7) jest tożsamościowo zerem, wtedy pomiędzy elementami jednej i tej samej kolumny zachodzić będą zawsze takież same związki liniowe jednorodne:

$$A_1 \xi_{i1} + A_2 \xi_{i2} + \ldots + A_r \xi_{ir} = 0,$$

gdzie wielkości A są wogóle funkcyami wszystkich zmiennych tablicy (6), skaźnik zaś i może zmieniać się od 1 do rn Zmieniając i tylko od 1 do n, otrzymamy n równań, które nie mogą być w s z y s t k i e wynikami innych, gdyby bowiem tak było, to ponieważ pomiędzy związkami (8) są takie, w których funkcye ξ zawierają wielkości x z pierwszego wiersza

tablicy (6), te wielkości x nie wchodziłyby żadnym sposobem do wielkości A, t. j. wielkości A nie zależałyby od $x_{n+1}, \ldots, x_{2n}$. W tym zaś przypadku też same n pierwszych równań (8) wykazywałyby, że pomiędzy przekształceniami $X_1, \ldots, X_r$, wypisanemi w zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ zachodziłby związek liniowy, jednorodny o spółczynnikach niezależnych od tych zmiennych, a stąd, wbrew założeniu, przekształcenia X nie byłyby wprost niezależnemi.

Jeden zatem przynajmniej ze związków (8), w których i zmienia się od 1 do n, powinien być niezależny od wszystkich pozostałych. Podobnie też okazać można, że jeden przynajmniej ze związków (8), w których zmieniamy i od $n+1$ do $2n$, musi być niezależny od wszystkich innych. Rozumując w ten sposób dalej, dochodzimy do tego, że pomiędzy związkami (8) przynajmniej r musi być niezależnych.

Lecz wyznacznik tych r równań liniowych jednorodnych względem wielkości A jest jednym z wyznaczników rzędu r macierzy (7), a więc, zgodnie z założeniem, musi być zerem; stąd te równania w liczbie r, byłyby od siebie niezależnemi, jak to okazaliśmy. Z tej sprzeczności wynika prawdziwość twierdzenia.

---

§ 12.

Grupy r-parametrowe, zawierające przekształcenie tożsamościowe.

W poprzedzającym paragrafie widzieliśmy, w jaki sposób mając r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, można zbudować ∞^{2r} przekształceń o r parametrach istotnych, które to przekształcenia wogólności nie tworzą grupy.

Okażemy teraz, że gdy mamy grupę o r parametrach istotnych, zawierającą przekształcenie tożsamościowe, to te z przekształceń grupy, które należą do pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego, można zawsze przedstawić w postaci, wskazanej w paragrafie poprzedzającym.

Rozważmy równania różniczkowe charakterystyczne (A), znalezione w § 4, którym czynią zadość strony pierwsze wzorów przekształcenia grupy o r parametrach istotnych:

$$(1) \qquad \frac{\partial x'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x')\,\psi_{jk}(a).$$

Rozwiązując je względem wielkości ξ, otrzymujemy wzory, podane już w § 4:

$$(2) \qquad \xi_{jh}(x') = \sum_{j=1}^{r} a_{jk} \frac{\partial x_h'}{\partial a_k} \qquad (j=1,\ldots,r).$$

Wprowadźmy wielkości dowolne $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, pomnóżmy obie strony tego równania przez λ_j, a następnie sumujmy względem j; będzie:

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \xi_{jh}(x') = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x_h'}{\partial a_k} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{jk}.$$

Wprowadźmy zmienną nieoznaczoną t, której funkcyami niechaj będą parametry a, i położmy:

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{jk} = \frac{da_k}{dt};$$

nie ograniczamy przez to bynajmniej zmienności parametrów a, które są od siebie niezależne, gdyż we wzorach tych występują parametry nieoznaczone $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, a stąd w istocie rzeczy parametry a, w liczbie r, są funkcyami nietylko nieoznaczonej t, lecz i r wielkości nieoznaczonych λ. Innemi słowy, równania różniczkowe (4) służą do zamiany parametrów, a mianowicie do wprowadzenia, zamiast parametrów a, parametrów $t, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$, zupełnie w taki sam sposób, w jaki w § 5 wprowadziliśmy parametr t zamiast parametru a.

Nie należy atoli mniemać, że tym sposobem wprowadzamy $r+1$ parametrów zamiast r parametrów, gdyż, jak to widać bezpośrednio, wzory (4) nie ulegają zmienne, jeżeli t pomnożymy przez nieoznaczoną ϱ, wielkości λ przez nieoznaczoną $\frac{1}{\varrho}$, bo wielkości a zależą tylko od iloczynów $t\lambda_1=\mu_1, \ldots, t\lambda_r=\mu_r$.

Przyjmijmy teraz, że grupa zawiera w sobie przekształcenie tożsamościowe i że temu przekształceniu odpowiadają wartości a^0 parametru. Wielkości a, otrzymane z równań (4), będą funkcyami jeszcze r stałych; ale jeżeli położymy warunek, że dla $t=0$ wielkości a redukują się do a^0, wtedy wartości tych stałych będą już oznaczone, a przekształceniem tożsamościowem grupy będzie to, które odpowiadać będzie wartości $t=0$, t. j. wartościom $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_r=0$.

Teraz zastosować należy rozważania analogiczne do tych, jakie stosowaliśmy w § 5. Przyjmijmy, że funkcye ψ w równaniach (1), a więc i funkcye a są funkcyami regularnemi wogóle tylko dla pewnego obszaru $((a))$ i że punkt a^0 jest punktem wewnętrznym tego obszaru. Wtedy istnieć będzie pewne otoczenie skończone punktu a^0, zawarte w $((a))$ i takie, że w niem funkcye α dają się rozwinąć na szeregi całkowitych dodatnich potęg różnic $a_k-a^0{}_k$, całki zaś równań (4) będą wogólności określone jedynie dla tego otoczenia punktu a^0, w którem też jedynie przy pomocy równań (4) będą określone parametry $\lambda_j t=\mu_j$. Jeżeli przyjmiemy, że i odwrotnie te równania (4) określają w sposób jedyny wielkości a, jako funkcye wielkości μ w pewnym obszarze punktu $\mu_1=\ldots=\mu_r=0$ (t. j. przy ustaleniu wielkości λ, i zmienianiu parametru t) w pewnym obszarze punktu $t=0$, wyniknie stąd, że równania (4) uskuteczniają zamianę parametrów, stosującą się tylko do tych wszystkich przekształceń grupy, które należą do pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego. Wzory, które w ten sposób otrzymamy, nie będą tedy stosowały się do wszystkich przekształceń grupy, lecz jedynie do przekształceń rzeczonego otoczenia, i dla tych to właśnie przekształceń znajdziemy prostą postać kanoniczną. Wystarczy tedy, jeżeli rozważania nasze do tej właśnie postaci stosować będziemy.

Położmy:

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, \xi_{jh}(x') = \xi_h(x');$$

z wzorów (3), (4), (5) otrzymamy równania:

$$(6) \qquad \xi_h(x') = \frac{dx_h'}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, \xi_{jh}(x'),$$

określające wielkości x' jako funkcye wielkości t i wielkości λ; równania te powinny dać się rozwiązać przy warunku, że dla $t=0$ wielkości x' stają się równe wielkościom x.

Jeżeli wielkościom λ nadamy wartości określone, wtedy równania (6) wyznaczą nam przekształcenia grupy jednoparametrowej, zawierającej przekształcenie tożsamościowe; na co mamy, podobnie jak w § 6, wzory:

$$(7) \qquad x_h' = x_h + \frac{t}{1!} Xx_h + \frac{t^2}{2!} X^2 x_h + \ldots$$

a przekształceniem nieskończonostkowem tej grupy będzie:

$$(8) \qquad X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, \xi_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i};$$

jest to kombinacya liniowa r przekształceń nieskończonostkowych, wyrażających się wzorami:

$$(9) \qquad X_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \qquad (j=1, \ldots, r).$$

Przekształcenie (7), jeżeli na t wybierzemy jednę z wartości, zawartych w pewnym obszarze otoczenia $t=0$, wszystkie zawierają się w grupie danej, jak to już powiedziano; tworzą one

grupę jednoparametrową tylko wtedy, jeżeli wartości λ są ustalone. Możemy przeto powiedzieć, że dana grupa z każdą z grup, jakie otrzymujemy, nadając wielkościom λ wszelkie możliwe wartości zespolone [1]), będzie miała wspólne wszystkie przekształcenia pewnego otoczenia $t=0$.

Uważana grupa r-parametrowa zawiera tedy każde z przekształceń nieskończonostkowych każdej z tych grup; w szczególności zaś zawiera r przekształceń nieskończonostkowych (9), w ogólności zaś zawiera przekształcenie nieskończonostkowe, będące jakąkolwiek kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych przekształceń (9).

Łącząc to, co podano w § poprzedzającym, z tem, co podano w niniejszym, widzimy, że te z przekształcen uważanej grupy, które należą do pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego, ponieważ mogą być zawsze przedstawione w postaci (7), są temi samemi przekształceniami, które w innym celu otrzymaliśmy w § poprzednim. Możemy więc stosować do nich twierdzenie, które odnosiło się do tych ostatnich przekształceń, i wnieść stąd, że przekształcenia nieskończonostkowe w liczbie r są wprost niezależne.

Zbierając to wszystko, możemy powiedzieć:

Jeżeli dana jest grupa o r parametrach istotnych, zawierająca przekształcenie tożsamościowe, wtedy te z jej przekształceń, które należą do pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego, mogą być przedstawione w postaci (7); grupa ta zawiera r przekształ-

[1]) Zaznaczmy, że zmieniając parametry λ, których jest r, otrzymamy z wzorów (7) $\infty^{2(r-1)}$, a nie ∞^{2r} grup, gdyż pomnożywszy wszystkie λ przez jeden czynnik, otrzymamy zawsze tę samą grupę, co równoważy się ze zmienianiem jedynie parametru t. Zauważmy jeszcze, że jeżeli przez nieskończoność pojedyńczą rozumieć będziemy ogół wszystkich wartości zespolonych zmiennej, powinnibyśmy pisać (jak to uczynił Lie) ∞^{r-1}, a nie $\infty^{2(r-1)}$, wolimy jednak używać drugiego sposobu pisania, przyjętego już w § 1.

ceń nieskończonostkowych wprost niezależnych, z których wytworzone być mogą wszystkie przekształcenia grupy danej.

Zauważmy, że o ile jest prawdą, iż przekształcenia (7) tworzą grupę, gdy ustalamy parametry λ, to nie można twierdzić, iż to samo ma miejsce, gdy zmieniamy parametry λ. Możemy tyle powiedzieć, że w ogólności przypadek ten zachodzi tylko wtedy, gdy pomiędzy przekształceniami X zachodzą pewne związki, o których mowa będzie później. A zatem równania (1), jak to wielokrotnie już powiedziano, nie są dostateczne do określenia grupy. Celem naszym w tym paragrafie było tylko wypowiedzenie wyników koniecznych z przyjęcia istnienia grupy r-parametrowej, zawierającej przekształcenie tożsamościowe.

Uczynimy jeszcze następujące spostrzeżenie. Znając przekształcenie nieskończonostkowe ogólne, należące do grupy, znamy funkcye ξ wzoru (5), możemy więc bezpośrednio utworzyć równania różniczkowe (6), charakterystyczne dla tej grupy. Możemy tedy powiedzieć, że znajomość przekształcenia nieskończonostkowego ogólnego, należącego do grupy, pociąga za sobą znajomość równań różniczkowych charakterystycznych, i odwrotnie.

Jako przykład obierzmy, jak zwykle, grupę rzutową o jednej zmiennej:

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3},$$

dla której w § 4 znaleźliśmy równania różniczkowe:

$$\frac{\partial x'}{\partial a_1} = \frac{1}{a_3 - a_1 a_2} - \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x', \quad \frac{\partial x'}{\partial a_2} = \frac{a_1}{a_3 - a_1 a_2} x' - \frac{a_3}{a_3 - a_1 a_2} x'^2$$

$$\frac{\partial x'}{\partial a_3} = -\frac{1}{a_3 - a_1 a_2} x' + \frac{a_2}{a_3 - a_1 a_2} x'^2,$$

tak że funkcye $\xi(x')$ są następujące:

$$\xi_{11}(x') = 1, \quad \xi_{21}(x') = x', \quad \xi_{31}(x') = x'^2.$$

Grupa omawiana zawiera przekształcenie tożsamościowe, którego parametry są:

$$a_1^0 = 0, \quad a_2^0 = 0, \quad a_3^0 = 1.$$

Trzema przekształceniami nieskończonostkowemi wprost niezależnemi, będą według równań (9) w tym przypadku:

$$X_1 = \frac{d}{dx}, \quad X_2 = x\frac{d}{dx}, \quad X_3 = x^2\frac{d}{dx},$$

tak, że przekształceniem nieskończonostkowem ogólnem (8) grupy będzie:

$$X = (\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2)\frac{d}{dx}.$$

Z powyższych uwag wynika, że wzory przekształcenia grupy otrzymamy, całkując równanie:

$$dt = \frac{dx'}{\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x'^2},$$

do których w naszym przypadku sprowadzają się równania (6) i gdzie zmieniamy trzy niezależne zmienne wielkości λ wszelkiemi możliwemi sposobami. Równanie to należy całkować, uwzględniając warunek, że dla $t=0$ ma być $x'=x$. Całką będzie wtedy:

$$\frac{x'-\alpha}{x'-\beta} = e^{\gamma t}\frac{x-\alpha}{x-\beta},$$

gdzie α i β są dwa pierwiastki równania:

$$\lambda_1 + \lambda_2 x' + \lambda_3 x'^2 = 0,$$

γ zaś jest jego wyróżnikiem.

Widzimy więc, że otrzymaliśmy właśnie grupę daną (napisaną naturalnie tylko w innych parametrach), gdyż z poprzedniego wzoru znajdujemy x' jako funkcyę liniową wielkości x. Rozwiązując ten wzór względem x' i porównywając go z danym na początku, znaleźlibyśmy związki pomiędzy dawnemi parametrami a a nowemi, i związki te powinny zgadzać się ze związkami, które otrzymanoby bezpośrednio ze związków (4), obliczonych dla naszego przypadku. Sprawdzenia tego wykonywać nie będziemy.

---

§ 13.

Własności zbioru ∞^{2r} przekształceń, których wzory mają strony drugie, czyniące zadość równaniom typu (A) §-u 4 go.

Wiemy już, że równania różniczkowe (*A*) §-u 4-go są konieczne, aby zachodziła g r u p a, lecz nie są dostateczne. Otóż dajmy teraz, że mamy układ ∞^{2r} przekształceń:

$$(1) \qquad x_h' = f_h(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (h=1, \ldots, n),$$

o r parametrach istotnych i że drugie strony równań (1) czynią zadość równaniom typu (*A*), t. j. równaniom:

$$(2) \qquad \frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x')\,\psi_{jk}(a);$$

zbadajmy własność ogólną tego zbioru przekształceń, nie zakładając z góry, że tworzą one grupę.

Przyjmijmy, jak zwykle, że funkcye ψ i ξ są określone jako funkcye regularne tylko w pewnych obszarach $((a))$ i $((x))$.

Okażemy przedewszystkiem, że gdy przyjmiemy, iż w równaniach (1) parametry a, których jest r, są istotnemi, to funkcye ψ we wzorach (2) będą miały własność, że ich wyznacz-

nik funkcyjny jest różny od zera w całym obszarze $((a))$, funkcye zaś ξ w tych równaniach w całym obszarze $((x))$ nie mogą czynić zadość związkom liniowym typu $\sum_{j=1}^{r} g_j \xi_{jh} = 0$, gdzie współczynniki g są niezależne od wielkości x'; inaczej mówiąc, jeżeli parametry są istotnemi, to równania (2) nie tylko będą typu równań (A) §-u 4-go, lecz nadto będą czyniły zadość tym samym warunkom, co te ostatnie.

Gdyby wyznacznik wielkości ψ był zerem, wtedy pomiędzy wielkościami $\psi_{j1}, \psi_{j2}, \ldots, \psi_{jr}$ zachodziłyby jednakowe związki liniowe, jednorodne, dla każdej wartości skaźnika j, t. j. byłoby dla każdego j tożsamościowo:

$$X_1(a)\,\psi_{j1}(a) + \ldots + X_r(a)\,\psi_{jr}(a) = 0;$$

z równań (2) mielibyśmy więc:

$$\sum_{k=1}^{r} X_k(a) \frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = 0.$$

dla każdej wartości h, a stąd wielkości x_h', dane przez równania (1), czyniłyby wszystkie zadość równaniom takim, jak wyżej napisane, z czego na zasadzie §-u 1-go wypływałoby, że parametry nie są istotnemi.

Ponieważ więc wyznacznik wielkości ξ jest różny od zera, możemy rozwiązać równania (2) względem wielkości ξ, i otrzymamy:

$$\xi_{jh}(x') = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a) \frac{\partial x_h'}{\partial a_k}. \tag{3}$$

Otóż, gdyby wielkości ξ czyniły zadość związkom takim, jak:

$$\sum_{j=1}^{r} g_j \xi_{jh} = 0, \tag{4}$$

to podstawiwszy w nie wartości (3), mielibyśmy:

$$\sum_{h=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r} g_j\, a_{jk}\ (a)\right)\frac{\partial x_h'}{\partial a_k}=0;$$

a więc, gdyby spółczynniki g były niezależne od wielkości x', równania te, którym czyniłyby zadość wielkości x', wskazywałyby, że parametry w równaniu (1), wbrew założeniu, nie są istotnemi.

Aby znaleść zapowiedzianą wyżej własność równań (1), starajmy się otrzymać te równania innym sposobem, a mianowicie za pomocą bezpośredniego całkowania równań (2). Jakkolwiek nie można otrzymać zupełnie oznaczonych całek równań (2), o ile nie ustalimy tego, jak wyrażać się mają wielkości x' jako funkcye wielkości x dla pewnego określonego układu wartości a, które oznaczmy przez a',—a to na zasadzie rozważań w § 5—to wszakże skoro założymy, że jest znana jedna tylko z wielkości (1), mianowicie ta, która odpowiada wartościom parametrów $a_1', \ldots, a_r'$, wtedy całkując równania (2) w tem założeniu, otrzymamy całki, zupełnie zgodne z wyrażeniami (1).

Aby wykonać to całkowanie, użyjemy tego samego sposobu, co w § poprzedzającym, t. j. wprowadzimy wielkości $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ i t i za pomocą takich samych rachunków i rozważań, jak powyżej (zwłaszcza rozważań, dotyczących obszarów rozwijalności), znajdziemy równania (3), (4), (5), (6) tego paragrafu.

Szukane całki są więc całkami równań:

$$\frac{dx_h'}{dt}=\sum_{j=1}^{r}\lambda_j\,\xi_{jh}\ (x'), \qquad (h=1,\ldots,n), \tag{5}$$

które należy całkować przy warunku, aby dla $t=0$ wielkości x_h' stały się równemi $f_h\,(x, a')$. Jedyna różnica pomiędzy przypadkiem niniejszym a przypadkiem, rozpatrzonym w § poprzedzającym, polega na tem, że nie zakładamy teraz, jak poprzednio, iż wartości a' — poprzednio a^0 — odpowiadają przekształceniu

tożsamościowemu, albo inaczej mówiąc, iż funkcye $f_h(x, a')$ sprowadzają się wprost do wielkości x_h.

Całki równań (5) niechaj będą:

$$\Omega_h(x_1', \ldots, x_n', \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) = \text{const};$$

uwzględniając powyższy warunek, można je napisać tak:

$$(6) \quad \Omega_h(x_1', \ldots, x_n', \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) = \Omega_h(f_1(x, a'), \ldots, f_n(x, a'), 0, \ldots, 0).$$

Wzory te, po rozwiązaniu ich względem x' i podstawieniu za $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$ wartości, wyrażonych przez dawne parametry a, powinny nam dać ściśle wzory (1), o ile ograniczymy się do pewnego otoczenia punktu a', które odpowiada pewnemu otoczeniu punktu $t=0$.

Otóż widzimy bezpośrednio, że równania (6) są wynikiem eliminacyi wielkości x_h'' pomiędzy dwoma następującemi układami wzorów:

$$(7) \quad x_h'' = f_h(x_1, \ldots, x_n, a_1', \ldots, a_r'),$$

$$(8) \quad \Omega_h(x_1', \ldots, x_n', \lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t) = \Omega_h(x_1'', \ldots, x_n'', 0, \ldots, 0);$$

innemi słowy, przekształcenie (6) jest iloczynem dwóch przekształceń (7) i (8). Lecz czemże jest przekształcenie (8)? Ponieważ wyrażenia Ω_h=const. są całkami równań (5), jeżeli $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ uważamy za stałe, t za zmienną, przeto wzory (8) są wzorami przekształceń grupy o jednym parametrze t, zawierającej przekształcenie tożsamościowe dla $t=0$; wynika to bezpośrednio z samych równań (8). Doszliśmy tym sposobem do własności ogólnej, o której mowa była na początku, a którą wysłowić można w ten sposób:

Te z pomiędzy ∞^{2r} przekształceń (1), których parametry przyjmujemy wszystkie jako istotne, które czynią zadość równaniom różniczkowym (2) i należą do pewnego otoczenia przekształcenia z parametrami a', można zawsze uważać jako iloczyny z tego przekształ-

cenia stałego z parametrami a' przez przekształcenie (zmienne) pasma $\infty^{2(r-1)}$ grup o jednym parametrze t, które wszystkie zawierają przekształcenie tożsamościowe i których przekształcenia, brane pod uwagę, odnoszą się do pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego.

Należy zauważyć, że przekształceniem nieskończonostkowem, należącem do grupy ogólnej pasma $\infty^{2(r-1)}$ przekształceń, o którem mowa w twierdzeniu powyższem, jest:

$$X = \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j \, \xi_{jh}(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_h},$$

gdzie czynniki λ są stałemi ustalonemi. To przekształcenie nieskończonostkowe jest widocznie kombinacyą liniową r innych; jeżeli położymy:

$$X_j = \sum_{h=1}^{n} \xi_{jh}(x) \frac{\partial}{\partial x_h},$$

będzie:

$$X = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j.$$

---

§ 14.

Grupy r-parametrowe wogólności. Związki charakterystyczne pomiędzy r przekształceniami grupy r-parametrowej, zawierającej przekształcenie tożsamościowe. Drugie twierdzenie zasadnicze teoryi grup.

Niechaj będą dane, jak zwykle, równania różniczkowe:

$$(1) \qquad \frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x') \, \psi_{jk}(a), \qquad (h=1, \ldots, n),$$

z których mamy:

$$\xi_{jh}(x') = \sum_{h=1}^{r} a_{jk}(a) \frac{\partial x_h'}{\partial a_k}, \qquad (j=1,\ldots,r). \tag{2}$$

Równaniom tym czynią zadość wielkości x', wyrażone wzorami:

$$x_h' = f_h(x, a_1, \ldots, a_r), \qquad (h=1,\ldots,n) \tag{3}$$

należącemi do grupy o r parametrach istotnych. Zbadajmy, czy wielkości ξ są dowolne, czy też zachodzą pomiędzy niemi pewne związki. Znajdziemy, jak to już zapowiedzieliśmy w §-ach poprzedzających, że funkcye te nie są dowolne, lecz że, gdy w sposób wskazany w §-ie poprzedzającym utworzymy przy pomocy funkcyj ξ zwykle symbole działań X (które zresztą w przypadku ogólnym, w którym nie zakładamy z góry, że grupa zawiera przekształcenie tożsamościowe, nie są symbolami przekształceń nieskończonostkowych, należących do grupy), to pomiędzy działaniami X zachodzić będą pewne związki. Nadto związki analogiczne zachodzić będą pomiędzy innemi symbolami działań analogicznemi z symbolami X, utworzonemi nie przy pomocy funkcyj ξ, lecz przy pomocy funkcyj a, a więc wyrażonych nie przez zmienne x, lecz przez wielkości a.

Rozwiązawszy równania (3) względem wielkości x, znajdziemy:

$$x_h = F_h(x', a) \tag{4}$$

Łatwo znaleść równania różniczkowe, którym czynią zadość funkcye F_h, gdyż różniczkując równania (4) względem a_h, otrzymamy:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} + \frac{\partial F_h}{\partial a_k},$$

a mnożąc przez a_{jk}, sumując względem skaźnika k i uwzględniając równanie (2), mieć będziemy:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x') \frac{\partial F_h}{\partial x_i'} + \sum_{h=1}^{r} a_{jk}(a) \frac{\partial F_h}{\partial a_h} = 0.$$

Położmy:

$$(5) \qquad X_j' = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x') \frac{\partial F_h}{\partial x_i'}, \quad A_j = \sum_{h=1}^{n} a_{jk}(a) \frac{\partial F_h}{\partial a_k}.$$

Z założenia, że parametry we wzorach (3) są istotne, wnieść można, podobnie jak na początku §-u poprzedzającego, że nie tylko wyznacznik $|\psi|$ wielkości ψ jest różny od zera, lecz i że wielkości $\xi_1, \ldots, \xi_r$ są liniowo niezależne, skąd wynika niezależność liniowa wyrażeń $X_1', \ldots, X_r'$. Z tego zaś, że wyznacznik wielkości ψ nie jest nieskończenie wielki (gdyż w rozważanym obszarze każda funkcya ψ jest funkcyą regularną, a zatem skończoną), wypływa, że i wyznacznik wielkości a, jako wyznacznik odwrotny do wyznacznika wielkości ψ (gdyż każda wielkość a równa się minorowi rzędu r—1 wyznacznika $|\psi|$, podzielonemu przez $|\psi|$) jest różny od zera. Stąd zaś wynika niezależność liniowa wielkości A.

Położmy jeszcze:

$$(6) \qquad X_j' + A_j = \Omega_j$$

i rozpatrzmy układ równań o pochodnych cząstkowych, rzędu pierwszego, liniowych, jednorodnych:

$$(7) \qquad \Omega_j F = 0, \qquad (j=1, \ldots, r).$$

Układowi temu r równań, w którym zmiennemi są $x_1', \ldots, x_n'$, $a_1', \ldots, a_r'$ w liczbie $n+r$, czynią zadość, oczywiście, wszystkie funkcye $F=F_h$, których jest n; nadto, równania tego układu, jak o tem już powiedziano, są liniowo niezależne. Układ ten należy do gatunku układów, rozpatrzonych w § 10, a ponieważ posiada przynajmniej n całek niezależnych, musi być układem zupełnym. Gdyby bowiem nie był takim, to dołączając do nie-

go według metody, wskazanej w § 10, równania typu $(\Omega_j \Omega_i)=0$, moglibyśmy go uczynić zupełnym, lecz wtedy liczba jego całek niezależnych (równa zawsze różnicy pomiędzy liczbą zmiennych, którą jest w tym przypadku $n+r$, a liczbą równań układu zupełnego zredukowanego) byłaby mniejsza od n, co pozostaje w sprzeczności z powyższem. Stąd nawiasy $(\Omega_j \Omega_i)$ dadzą się wyrazić liniowo przez symbole Ω i będzie:

$$(8) \qquad (\Omega_j \Omega_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} \Omega_s ,$$

gdzie spółczynniki c powinnyby być w ogólności funkcyami wielkości x' i wielkości a; dowiedziemy, że są wielkościami stałemi.

Przedewszystkiem, podstawiwszy zamiast wielkości Ω ich wartości z wzorów (6), mieć będziemy:

$$\Omega_j \Omega_i = (X_j' X_i') + (X_j' A_i) + A_j X_i') + (A_j A_i);$$

lecz:

$$(X_j' A_i) = 0; \quad (A_j X_i') = 0,$$

gdyż zmienne, do których odnosi się symbol X', są różne od zmiennych, do których odnosi się symbol A; pozostanie zatem:

$$(\Omega_j \Omega_i) = (X_j' X_i') + (A_j A_i),$$

a więc na podstawie równania (8):

$$(X_j' X_i') + (A_j A_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{ijs} X_s' + \sum_{s=1}^{r} c_{jis} A_s .$$

Stąd zaś, na tej zasadzie, że symbole X' i A odnoszą się do dwóch różnych kategoryj zmiennych, będzie ostatecznie:

$$(9) \qquad (X_j' X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s' ; \quad (A_j A_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} A_s .$$

Ponieważ:

$$(A_j A_i) = \sum_{\varrho=1}^{r} (A_j a_{i\varrho} - A_i a_{j\varrho}) \frac{\partial}{\partial a_\varrho} ,$$

$$\sum_{j=1}^{r} c_{jis} A_s = \sum_{\varrho=1}^{r} \left(\sum_{s=1}^{r} c_{jis} a_{s\varrho} \right) \frac{\partial}{\partial a_\varrho} ,$$

przeto:

$$\sum_{s=1}^{r} c_{jis} a_{s\varrho} = A_j a_{i\varrho} - A_i a_{j\varrho} .$$

Te ostatnie równania, gdy w nich zmieniamy ϱ, stanowią układ r równań liniowych względem wielkości $c_{ji1}, c_{ji2}, \ldots, c_{jir}$, a wyznacznik spółczynników, który jest wyznacznikiem, utworzonym z wielkości $a_{s\varrho}$, jest różny od zera na podstawie twierdzeń, dowiedzionych w § 4. Równania te przeto rozwiązują się względem wielkości c i dają na nie wartości, zależne wogóle od parametrów a, nie zaś od zmiennych x'. Locz można dowieść jeszcze, że wielkości c nie zależą też od wielkości a. W samej rzeczy, jeżeli działania, wskazane przez stronę pierwszą i stronę drugą pierwszego z równań (9), zastosujemy do jakiejkolwiek funkcyi f, nie zawierającej wielkości a, a następnie zróżniczkujemy stronę pierwszą i drugą względem a_k, otrzymamy związek:

$$\sum_{s=1}^{r} \frac{\partial c_{jis}}{\partial a_k} X_s' f = 0,$$

który—z powodu tego, że f jest jakąkolwiek funkcyą wielkości x' — może zachodzić tylko wtedy, gdy wyrażenia X_s' są

wprost niezależne; stąd wynika, że spółczynniki $\frac{\partial c_{jis}}{\partial a_k}$ muszą być zerami, a więc wielkości c są niezależne od parametrów a.

Możemy przeto powiedzieć:

Aby równania różniczkowe (1) mogły określać grupę o r parametrach istotnych, potrzeba, by symbole X' i A, określone przez równania (5), czyniły zadość związkom (9), w których wielkości c są stałemi.

Otóż z rozważań, podanych w § 12, wiemy, że jeżeli grupa r-parametrowa zawiera przekształcenie tożsamościowe, wtedy wyrażenia X' są symbolami przekształceń nieskończonostkowych (napisanych w zmiennych x'), należących do tej grupy; możemy więc wypowiedzieć następujące twierdzenie, jako wniosek z poprzedzającego:

Jeżeli grupa r-parametrowa zawiera przekształcenie tożsamościowe, to pomiędzy jej r przekształceniami nieskończonostkowemi zachodzą związki:

$$(X_j\, X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis}\, X_s\,,$$

w których wielkości c są stałe.

Piszemy tu X zamiast X' dlatego, że symbole, występujące w tym wzorze, są wyrażone w zmiennych x nie zaś w zmiennych x'.

Pozostaje dowieść teraz, że odwrotnie, warunki (9), które są koniecznemi, aby równania różniczkowe (1), zcałkowane, dały grupę o r parametrach, są zarazem warunkami dostatecznemi, jeżeli dołączymy jeszcze warunek, aby grupa zawierała przekształcenie tożsamościowe.

Utwórzmy r równań różniczkowych:

$$\Omega_1 F = 0, \ldots, \Omega_r F = 0,$$

które na zasadzie założeń (9) (skąd wynikają równania (8)) stanowią układ zupełny, a więc mają $(n+r)-r=n$ całek niezależnych. Przyjmijmy, że dla:

$$a_k = a_k^0, \qquad (k=1, \ldots, r),$$

wielkości x_h', otrzymane z całek tych równań w funkcyi wielkości, występujących w nich jako stałe, które nazwijmy $x_1, \ldots, x_n$ sprowadzają się do wielkości x_h; otrzymamy wtedy wzory, w których wielkości x' wyrażone są jako funkcye określone wielkości x, mianowicie:

$$x_h' = f_h(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r). \tag{10}$$

Z natury równań $\Omega = 0$ wynikają, jak zwykle, ograniczenia dla obszaru stosowalności równan (10); wogólności powiedzieć można, że równania (10) mają miejsce w pewnem otoczeniu punktu $a_1^0, \ldots, a_r^0$. Przy takich ograniczeniach wzory te przedstawiają grupę, która naturalnie, na zasadzie poczynionych założeń, zawiera przekształcenie tożsamościowe.

W samej rzeczy, jeżeli całki równań Ω, określone w sposób wskazany i rozwiązane względem wielkości x, oznaczymy przez $x_h = F_h(x', a)$, a następnie zróżniczkujemy względem a_k, będzie:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} + \frac{\partial F_h}{\partial a_k};$$

mnożąc te równania przez a_{ik}, sumując względem k i uwzględniając związek:

$$\Omega_j F_h = X_j' F_h + A_j F_h = 0,$$

któremu czynią zadość wszystkie funkcye F_h, znajdziemy:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_h}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{jk}(a) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k} - \xi_{ji}(x') \right) = 0.$$

Lecz wyznacznik pochodnych funkcyj F, względem wielkości x' jest różny od zera, stąd spółczynniki w tych równaniach liniowych muszą być zerami, t. j. być musi:

$$\xi_{ij}(x') = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}(a) \frac{\partial x_i'}{\partial a_k}.$$

Są to właśnie równania (2) niniejszego §-u, które po odpowiedniej redukcyi prowadzą do równań (1).

Doszliśmy tedy przy pomocy zcałkowania równań Ω do układu (10), czyniącemu zadość równaniom zasadniczym (1), o których już na początku uczyniliśmy założenia zwykłe, t. j. że w odpowiednich obszarach wyznacznik wielkości ψ jest różny od zera, oraz że wielkości ξ nie czynią zadość żadnemu związkowi postaci $\sum_{j=1}^{r} g_j \xi_{jh}$, w którym wielkości g są niezależne od wielkości x'. Przy takich założeniach parametry w równaniach (10) są istotne. Bo gdyby nie były takiemi, t. j. gdyby funkcye f_h czyniły zadość związkom takim, jak $\sum_{k=1}^{r} \chi_k(a) \frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = 0$, wtedy eliminując pochodne wielkości x', otrzymalibyśmy z równań (1):

$$\sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x') \left(\sum_{k=1}^{r} \psi_{jk}(a) \chi_k(a) \right) = 0,$$

a takie związki na zasadzie tego, co powiedziano wyżej, zachodzić nie mogą.

Zastosujmy teraz do ∞^{2r} przekształceń (10) twierdzenie, dowiedzione w § poprzedzającym, obierając najprzód wielkości a^0 jako wartości parametrów a'. Wtedy każde przekształcenie (10), w którem parametry $a_1, \ldots, a_r$ są zawarte w otoczeniu punktu $a_1^0, \ldots, a_r^0$, o którem mowa wyżej, da się przedstawić

jako iloczyn przekształcenia z parametrami a^0, t. j. przekształcenia tożsamościowego przez przekształcenia (w pewnem obliczeniu tożsamościowem) pasma $\infty^{2(r-1)}$ grup o jednym parametrze, zawierających przekształcenie tożsamościowe; przekształcenie nieskończonostkowe ogólne, do tych drugich należące, jest przekształceniem X, o którem mowa na końcu § poprzedzającego. Wynika stąd, że przekształcenie (10), o których mowa wyżej, dają się przedstawić w postaci:

$$x_h' = x_h + \frac{t}{1}\sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j x_h + \ldots, \tag{11}$$

gdzie t należy obrać w odpowiedniem otoczeniu punktu $t=0$.

Zastosujmy w dalszym ciągu toż samo twierdzenie § poprzedzającego, obierając jakiekolwiek wartości parametrów a' (naturalnie pomiędzy wartościami, zawartemi w obszarze zmienności $((a))$. Znajdziemy wtedy, że każde z przekształceń (10) lub (11) da się zawsze przedstawić jako iloczyn przekształcenia z parametrami a' przez jedno z przekształceń (11). Lecz ponieważ przekształcenia (11) są temi samemi, co przekształcenia (10), i ponieważ parametry a' obraliśmy dowolnie, przeto iloczyn dwóch jakichkolwiek przekształceń (10) jest znowu przekształceniem (10), t. j. przekształcenia (10), w których zmienność parametrów jest ograniczona w sposób wyżej wskazany, tworzą grupę. Twierdzenie nasze tym sposobem jest udowodnione.

Twierdzenie to można znacznie uprościć, gdyż warunki (9), jakie w niem występują, dotyczą tak symbolów X', jak i symbolów A.

Dajmy, że mamy jedynie r symbolów X' wprost niezależnych, czyniących zadość związkom:

$$(X_j' X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s', \tag{12}$$

Pytamy, czy wystarczają one do określenia grupy (zawierającej przekształcenie tożsamościowe)? Innemi słowy: czy mając wyrażenia X', czyniące zadość związkom (12), można wyznaczyć wyrażenia A, czyniące zadość drugim równaniom (9); albo też, czy założenie istnienia wyrażeń A pociąga za sobą nowe warunki, którym poddane być winny wyrażenia X'?

Dowiedziemy, że wyrażenia (12) wystarczają do wyznaczenia wskazanej grupy, gdyż można zawsze zbudować układ wyrażeń $A_1, \ldots, A_r$, czyniących zadość związkom takim, jak (12), bez potrzeby wprowadzania jakiegokolwiek nowego ograniczenia dla wyrażeń X'.

Wprowadźmy, podobnie jak w § 11, $r-1$ szeregów zmiennych, spółpodstawieniowych ze zmiennemi $x_1', \ldots, x_n'$, tak że będziemy mieli r szeregów:

$$
\begin{array}{c}
x_1', \ldots, x_n', \\
x_1'', \ldots, x_n'', \\
\ldots \quad \ldots \\
x_1^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)},
\end{array}
\tag{13}
$$

i oznaczmy przez $X_j', X_j'', \ldots, X_j^{(r)}$ symbole X_j, napisane w zmiennych, wziętych odpowiednio z tych szeregów.

Połóżmy:

$$W_j = X_j' + X_j'' + \ldots + X_j^{(r)}$$

dla każdej wartości j.

Łatwo widzieć, że skoro przyjmiemy, iż wyrażenia X' są wprost niezależne, to takąż własność posiadać będą i wyrażenia W, a ponieważ założyliśmy, że wyrażenia X' czynią zadość równaniom (12), przeto równaniom analogicznym czynić będą zadość wyrażenia W. Skutkiem tego równania $W_jF=0$ utworzą układ zupełny r równań z nr zmiennemi, będą więc miały $nr-r$ całek niezależnych (patrz § 10), któremi niechaj będą $b_1, b_2, \ldots, b_{nr-r}$. Wprowadźmy r nowych, niezależnych od wielkości b, funkcyj $a_1, \ldots, a_r$ wszystkich zmiennych. Możemy w wyrażeniach W,

zamiast zachodzących w nich rn zmiennych, wziąć wielkości b i a, a wtedy na podstawie wzorów § 10 otrzymamy:

$$W_j = \sum_{k=1}^{r} W_j(a_k) \frac{\partial}{\partial a_k} + \sum_{k=1}^{rn-r} W_j(b_k) \frac{\partial}{\partial b_k}.$$

Ponieważ wielkości b są całkami równań $W_j=0$, przeto druga suma znika i pozostaje jedynie:

$$W_j = \sum_{k=1}^{r} W_j(a_k) \frac{\partial}{\partial a_k}. \tag{14}$$

Spółczynniki w tym symbolu są wogóle funkcyami wszystkich wielkości a i wszystkich wielkości b; bez względu na wartości tych zmiennych, wyrażenia W są wprost niezależne i czynią zadość związkom takim, jak (12). Gdy więc nadamy wielkościom b wartości stałe i oznaczone (co uczynić można, ponieważ w równaniach (14) nie występują pochodne, wzięte względem wielkości b), otrzymamy z równań (14) wyrażenia:

$$A_j = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}(a) \frac{\partial}{\partial a_k}, \tag{15}$$

które będą wprost niezależne i czynić będą zadość związkom takim, jak (12), z temi samemi spółczynnikami stałemi c_{jis}.

Utworzyliśmy tym sposobem też same symbole A, które występowały w twierdzeniu poprzedzającem, stąd zaś wynika istnienie grupy o r parametrach.

Mamy zatem następujące twierdzenie:

Mając r przekształceń nieskończonostkowych wprost niezależnych X_j $(j=1, 2, \ldots, r)$ [1], czyniących zadość warunkom:

[1]) Piszemy X zamiast X', gdyż symbole są pisane w zmiennych x, a nie w zmiennych x', jak wyżej, dla dogodności w dowodzeniu.

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s,$$

gdzie spółczynniki c są stałemi, możemy wyznaczyć grupy o r parametrach istotnych, zawierające przekształcenie tożsamościowe i r przekształceń nieskończonostkowych X_j; wzory przekształceń dla którejkolwiek z tych grup można zawsze w otoczeniu przekształcenia tożsamościowego przedstawić w postaci:

$$(16) \qquad x_h' = x_h + \frac{t}{1}\sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j x_h + \frac{t^2}{2!}\sum_{ij}^{1\ldots r} \lambda_i \lambda_j X_i X_j x_h + \ldots$$

Dajmy, że mamy grupę Liego o r parametrach istotnych, zawierającą przekształcenie tożsamościowe dla $a = a^0$. Ponieważ przekształcenia tej grupy dają się w otoczeniu przekształcenia tożsamościowego przedstawić w postaci powyższej, i ponieważ, jak o tem mówiliśmy już w § 5, punkt a^0 będzie punktem wewnętrznym obszaru zmienności parametrów a, przeto, podobnie jak dla grup jednoparametrowych, przekształcenia tej grupy, przynajmniej dla pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego, są parami odwrotne jedno do drugiego.

Stanowi to ważną własność ogólną grup Liego, zawierających przekształcenie tożsamościowe.

Z twierdzenia poprzedzającego wynika, że wzory (16) przedstawiają te z pomiędzy przekształceń grupy o r parametrach istotnych $\mu_1 = \lambda_1 t, \ldots, \mu_r = \lambda_r t$, które należą do pewnego otoczenia przekształcenia tożsamościowego, odpowiadającego wartościom $\mu_2 = \ldots = \mu_r = 0$. Innemi słowy, w przestrzeni r-wymiarowej istnieje otoczenie punktu $\mu_1 = \ldots = \mu_r = 0$ takie,

że jeżeli weźmiemy dwa punkty tego otoczenia odpowiednio o spółrzędnych $\mu_1', \ldots, \mu_r'$; $\mu_1'', \ldots, \mu_r''$, wtedy odpowiednie dla nich wzory (16) będą zbieżne i dadzą nam dwa przekształcenia; wziąwszy iloczyn tych dwóch przekształceń, otrzymamy przekształcenie, wyrażające się temiż wzorami (16), a którego parametry μ są spółrzędnemi innego punktu rozważanego otoczenia.

Zbadajmy, w jaki sposób, mając wyrażenia X, czyniące zadość zwykłym warunkom, można zbudować przekształcenia grupy, której parametry istotne $\mu_1, \ldots, \mu_r$ w liczbie r mogą przybierać wszystkie możliwe wartości bez żadnego ograniczenia, t. j. grupy, odgrywającej dla przekształceń o r parametrach taką samą rolę, jaką grupa kanoniczna (patrz § 5) odgrywa w teoryi grup jednoparametrowych. Grupę, o której mowa, nazywać też będziemy dlatego grupą kanoniczną o r parametrach.

Niechaj będzie przekształcenie nieskończonostkowe ogólne:

$$Z = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r,$$

w którem wielkości λ są dowolne, wyrażenia zaś X czynią zadość wiadomym warunkom; za pomocą metody, wskazanej na końcu § 7, możemy znaleść równania skończone:

$$\begin{aligned}
&\Omega_1(x', \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \Omega_1(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_r),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Omega_{n-1}(x', \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \Omega_{n-1}(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_r),\\
&\Omega_n(x', \lambda_1, \ldots, \lambda_r) = \Omega_n(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_r) + t,
\end{aligned} \tag{17}$$

które, na zasadzie powyższego, powinny odpowiadać równaniom (16), ale wogólności tylko dla wartości $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$, dostatecznie małych. Lecz równania (16) dla tych wartości tworzą grupę, przeto i równania (17) tworzyć winny grupę, to znaczy, że gdy weźmiemy inny układ wartości λ, np. $\lambda_1', \ldots, \lambda_r'$ i tęż samą wartość t, wtedy wzory:

$$\Omega_1(x'', \lambda_1', \ldots, \lambda_r') = \Omega_1(x', \lambda_1', \ldots, \lambda_r'),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(18)

$$\Omega_{n-1}(x'', \lambda_1', \ldots, \lambda_r') = \Omega_{n-1}(x', \lambda_1', \ldots, \lambda_r'),$$

$$\Omega_n(x'', \lambda_1, \ldots, \lambda_r') = \Omega_n(x', \lambda_1', \ldots, \lambda_r') + t,$$

skombinowane z wzorami (17), po wyeliminowaniu wielkości x', dadzą układ taki sam, jak układ (17), w którym wartośei λ zmieniają się na inne wartości λ'', byleby tylko tak iloczyny $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$, jako też iloczyny $\lambda_1' t, \ldots, \lambda_r' t$ były dostatecznie małe. Co się tyczy wartości na t, to jest widocznem, że można przyjąć, iż t jest stałe, tak w równaniach (17) i (18), jak i w iloczynie, gdyż równania (17) zależą tylko od iloczynów wielkości t przez wielkości λ. Eliminacya wskazana prowadzi do wzorów następujących:

$$\Omega_1(x'', \lambda_1'', \ldots, \lambda_r'') = \Omega_1(x, \lambda_1'', \ldots, \lambda_r''),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(19)

$$\Omega_{n-1}(x'', \lambda_1'', \ldots, \lambda_r'') = \Omega_{n-1}(x, \lambda_1'', \ldots, \lambda_r''),$$

$$\Omega_n(x'', \lambda_1'', \ldots, \lambda_r'') = \Omega_n(x, \lambda_1'', \ldots, \lambda_r'') + t.$$

Jeżeli ustalimy t, to równania (19) powinny być wynikiem równań (17) i (18) dla wszystkich ∞^{2r} układów wartości λ i λ', obranych w odpowiednim obszarze r-wymiarowym około punktu $(0, 0, \ldots, 0)$. Lecz jest rzeczą jasną, że skoro to ma miejsce dla obranych w sposób wskazany, zresztą dowolnych, wartości λ, które nie wpływają na wynik eliminacyi, to zachodzić też musi i dla jakichkolwiek wartości. Wnosimy stąd, że przekształcenia (17), w których wartości x zawarte są w pewnym obszarze $((x))$, rozważane w całości, t. j. przy zmienianiu wielkości λ i t wszelkiemi możliwemi sposobami, tworzą grupę, która jest właśnie grupą kanoniczną o r parametrach istotnych. Jest ona oczywiście zbiorem wszystkich $\infty^{2(r-1)}$ grup kanonicznych o jednym parametrze, które charakteryzuje przekształcenie nieskończonostkowe ogólne Z.

Grupa ta posiada własność, że każdemu jej przekształceniu odpowiada przekształcenie odwrotne, gdyż zmieniając w równaniach (17) znak wielkości t, otrzymujemy przekształcenie w tychże wzorach zawarte.

Mamy tedy twierdzenie:

Niechaj będzie r przekształceń nieskończonostkowych wprost niezależnych X_j $(j=1, 2, \ldots, r)$, czyniących zadość związkom:

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ,$$

gdzie spółczynniki c są stałemi; przekształcenia te określają grupę o r parametrach istotnych, zawierającą przekształcenie tożsamościowe i do każdego w niej przekształcenia odwrotne. Grupa ta jest zbiorem wszystkich $\infty^{2(r-1)}$ grup kanonicznych, określonych przez przekształcenia nieskończonostkowe $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r$, gdzie wielkości λ przybierają wartości stale dowolne.

Z powyższego wynika, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby przekształcenia nieskończonostkowe wprost niezależne X_j w liczbie r tworzyły grupę o r parametrach istotnych, jest, by przekształcenia te czyniły zadość związkom postaci:

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ,$$

gdzie spółczynniki c są stałe.

To ważne twierdzenie nazywa się drugiem twierdzeniem zasadniczem teoryi grup.

Pierwszy pomysł tego twierdzenia znajduje się w pracy L i e g o (Math. Ann., 8, 1874, s. 303), p. też Göttinger Nachr., 1874, str. 533, 540; Archiv. for Math. og. Naturw., 1878; Math. Ann., **16**, 1879, s. 460 i nast.; Leipz. Ber., 1890, s. 453, a zwłaszcza s. 472—476.

Przytoczony tu dowód drugiego twierdzenia zasadniczego jest zupełnie ten sam, jak w dziele L i e g o. Podamy tu jeszcze inne dowodzenie, znacznie prostsze i prawie bezpośrednie, posługując się rezultatami, otrzymanemi w § 9.

Z przekształceń X utwórzmy kombinacyę:

$$Z = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r, \tag{20}$$

gdzie spółczynniki λ są stałe, i napiszmy wzory kanoniczne przekształceń grupy j e d n o p a r a m e t r o w e j, utworzonej z przekształcenia nieskończonostkowego Z_1, które otrzymujemy z przekształceń pasma (20), biorąc na λ pewne wartości stałe; napiszmy też wzory analogiczne dla grupy, utworzonej z przekształcenia nieskończonostkowego Z_2, które otrzymujemy, biorąc we wzorze (20) inne stałe wartości spółczynników λ.

By dowieść naszego twierdzenia, musimy znaleść warunki, jakim czynić winny przekształcenia X, aby, obrawszy w jakikolwiek sposób z pomiędzy przekształceń (20) dwa przekształcenia Z_1, Z_2, otrzymać dwie grupy jednoparametrowe, należące do tej samej grupy o r parametrach, albo innemi słowy: aby pomnożywszy jedno z przekształceń skończonych grupy, wytworzonej z przekształcenia nieskończonostkowego Z_1, przez jedno z przekształceń skończonych grupy, wytworzonej z przekształcenia Z_2, otrzymać przekształcenie, należące do grupy, wytworzonej z pewnego przekształcenia Z_3, zawartego pomiędzy przekształceniami pasma (20)?

Widzimy, że pytanie nasze sprowadza się do szukania warunku koniecznego i dostatecznego na to, aby iloczyn dwóch przekształceń (1) w § 9 (gdzie przedewszystkiem wyrażenia X należy zastąpić wyrażeniami Z) był przekształceniem, którego przekształcenie nieskończonostkowe tworzące jest kombinacyą liniową wyrażeń X o spółczynnikach stałych, bez względu na

to, jakimi są Z_1 i Z_2; lub innemi słowy: warunku koniecznego i dostatecznego na to, aby przekształcenie Z_3, dane przez wzór (7) §-u 9-go, było kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych wyrażeń X, przy jakichkolwiek parametrach t i t'.

Otóż warunek ten znaleść łatwo. W samej rzeczy, jeżeli przyjmiemy najprzód, że zachodzą związki:

$$(21) \qquad (X_h\, X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks}\, X_s\,,$$

wtedy widocznem jest, że wszystkie nawiasy:

$$(Z_1\, Z_2),\ (Z_1\, Z_1\, Z_2),\ (Z_2\, Z_1\, Z_2),\ (Z_1\, Z_2\, Z_1\, Z_2)\ \ldots$$

będą wyrażeniami liniowemi wyrażeń X o spółczynnikach stałych, a stąd Z_3 będzie takiem wyrażeniem, t. j. należeć będzie do pasma (20).

Z drugiej strony, jeżeli za Z_3 położymy kombinacyę liniową wyrażeń X o spółczynnikach stałych, wtedy takąż kombinacyą być musi $Z_3 - tZ_1 - t'Z_2$, a stąd na podstawie wzoru (7) w § 9 (w którym zamiast X napisano Z) takąż kombinacyą będzie:

$$tt'[\gamma'(Z_1Z_2) + \gamma''t(ZZ_1Z_2) - \gamma''t'(Z_2Z_1Z_2) - \gamma''\gamma' tt'(Z_1Z_2Z_1Z_2) + \ldots],$$

a po zniesieniu czynnika wspólnego tt', i wyrażenie, zawarte w nawiasie klamrowym, t. j.

$$(22) \qquad \gamma'(Z_1Z_2) + \gamma''t(Z_1Z_1Z_2) + \gamma''t'(Z_2Z_1Z_2) + \ldots$$

musi być kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych, wyrażeń X, bez względu na wartości parametrow t, t'. Wynika stąd, że tęż własność posiadać musi wyraz pierwszy wyrażenia (22), t. j. $(Z_1\, Z_2)$ i że takąż własność posiadają i inne nawiasy w tem wyrażeniu.

Niechaj teraz Z_1, Z_2 będą dwa jakiekolwiek przekształcenia nieskończonostkowe, zawarte w pasmie (20); czyniąc je kolejno równemi różnym przekształceniom X, wyprowadzimy stąd konieczność istnienia związków (21). Dowiedliśmy więc najzupełniej twierdzenia, że związki (21) są warunkami koniecznemi i dostatecznemi na to, aby przekształcenia X mogły wytworzyć grupę o r parametrach.

Widzimy tu, że dowodzenie to, oparte na wzorze (7) § 9-go (dającym się użyć i do wielu innych badań) jest bardzo prostem i bezpośredniem.

Dowodzenie to podaliśmy w Nocie, ogłoszonej w Rend. dell Ist. Lomb. (2), t. **34**, s. 1118 (1901).

Z powyższego twierdzenia wynika ważny wniosek:

Jeżeli przekształcenia $X_1, \ldots, X_r$ wytwarzają grupę o r parametrach, to i nawiasy $(X_j X_i)$ są przekształceniami nieskończonostkowemi, mającemi własność wytwarzania grupy, która może mieć najwyżej r parametrów.

W samej rzeczy, jeżeli mamy związki:

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ,$$

a więc i związki:

$$(X_h X_k) = \sum_{t=1}^{r} c_{hkt} X_t ,$$

to będzie:

$$((X_j X_i), (X_h X_k)) = \sum_{s,t}^{1,\ldots,r} c_{jis} c_{hkt} (X_s X_t) ,$$

t. j. tworząc nawiasy nawiasów, otrzymujemy kombinacye liniowe o spółczynnikach stałych tychże nawiasów, co dowodzi właśnie tego, że przekształcenia $(X_j\ X_i)$ tworzą grupę Ponieważ każdy z tych nawiasów jest kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych wyrażeń X, przeto jakiekolwiek przekształcenie grupy kanonicznej, przez nawiasy te wytworzonej, jest zawarte pomiędzy przekształceniami grupy danej. Stąd grupa, wytworzona przez przekształcenia $(X_j\ X_i)$, nie może mieć więcej, niż r parametrów. Jeżeli ma mniej niż r parametrów, wtedy będzie podgrupą grupy danej; w innych przypadkach będzie identyczna z grupą daną.

---

§ 15.

Związki między stałemi c. Trzecie twierdzenie zasadnicze teoryi grup. Budowa grupy.

Pomiędzy stałemi c_{jis}, o których mowa w § poprzedzającym, istnieją pewne związki, które znaleść łatwo.

W wyrażeniu:

$$(1) \qquad (X_j\ X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis}\ X_s\ ,$$

przemieńmy skaźniki i i j; ponieważ wtedy $(X_j\ X_i)$ zmienia znak, otrzymujemy więc odrazu:

$$(2) \qquad c_{jis} + c_{ijs} = 0,$$

co stanowi pierwszy z szukanych związków. Inny związek znajdziemy, stosując znany wzór Jacobi'ego (§ 8), mianowicie:

$$((X_j\ X_i)\ X_k) + ((X_i\ X_k)\ X_j) + ((X_k\ X_j)\ X_i) = 0,$$

który, po uwzględnieniu wzorów (1), przybiera postać:

$$\sum_{s=1}^{r} [c_{jts}(X_s X_k) + c_{iks}(X_s X_j) + c_{kjs}(X_j X_i)] = 0,$$

a stosując tu raz jeszcze wzory (1), otrzymamy:

$$\sum_{t=1}^{r}\sum_{s=1}^{r} [c_{jts} c_{skt} + c_{iks} c_{sjt} + c_{kjs} c_{sit}] X_t = 0 .$$

Ponieważ wielkości X są liniowo niezależne, wynika stąd, że każdy spółczynnik przy X_t musi być zerem, t. j.:

$$\sum_{s=1}^{r} (c_{jts} c_{skt} + c_{iks} c_{sjt} + c_{kjs} c_{sit}) = 0. \tag{3}$$

Związki (2) i (3) są tożsamościami, którym winny czynić zadość stałe c, zachodzące we wzorach (1).

Zbiór liczb c ma, jak widzimy, związek bardzo ścisły z grupą, wytworzoną przez r przekształceń nieskończonostkowych; zbiór ten charakteryzuje t. zw. budowę (strukturę) grupy. Zobaczymy później, jak ważnem jest to pojęcie, zwłaszcza przy porównywaniu dwu grup i dla t. zw. izormorfizmu.

Ważnem jest pytanie następujące:

Dany jest układ liczb c_{jts}, czyniących zadość warunkom (2) i (3); czy można twierdzić, że istnieje zawsze układ r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych X, związanych równaniami (1)?

Odpowiedź na to pytanie brzmi twierdząco i tym sposobem mamy twierdzenie, które można uważać za odwrotne względem twierdzenia wyżej dowiedzionego o związkach pomiędzy wielkościami c. Twierdzenie proste i odwrotne nazywają się razem trzeciem twierdzeniem zasadniczem teoryi grup.

Nie podajemy na teraz dowodu twierdzenia odwrotnego. Powiemy tylko, że pierwszą próbę dowodzenia podał Lie (Math. Ann., **25**, s. 92 i nast., 1885), lecz rozważania te podlegały poważnym zarzutom (porów. Theorie der Transfor., III, s. 598, 1893). Dowodzenie ścisłe dał później Lie w r. 1888 (Akad. Chrystiańska, 1888, Leipz. Ber., 1888, s. 14) i powtórzył je następnie w rozdz. XII t. II swego dzieła o grupach przekształceń. Inny dowód podał Schur (Leipz. Ber., 1889, s. 229, Math. Ann., **35**, s. 179, p. też Math. Ann., **41**, s. 529, nota). Wreszcie odsyłamy czytelnika do t. III Theorie d. Transfor., s. 599 i nast. W ostatnich czasach przedmiotem tym zajmował się Poincaré, wychodząc z innego punktu widzenia (Comptes rendus, **138**, s. 1065, 1899, Trans. Cambr. Phil. Soc., **18**, s. 220, 1900, oraz w dziele zbiorowem, poświęconem Sir G. G. Stokesowi). E. Pascal podał inny dowód, ogłoszony w Rend. dell'Ist. Lomb.

§ 16.

Przekształcenia nieskończonostkowe grupy r-parametrowej, określone za pomocą układu równań o pochodnych cząstkowych.

Niechaj będą przekształcenia nieskończonostkowe niezależne X_i ($i=1, \ldots, r$), tworzące dla grupy kanonicznej o r parametrach istotnych:

$$X_i = \sum_{h=1}^{n} \xi_{ih} \frac{\partial}{\partial x_h}. \tag{1}$$

Przekształcenie nieskończonostkowe ogólne, należące do grupy, daje kombinacya liniowa o spółczynnikach stałych przekształceń X_i; spółczynnikami takiego przekształcenia będą tedy:

$$\xi_h = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \xi_{ih}, \tag{2}$$

gdzie λ są spółczynniki stałe lub od wielkości x niezależne

Weźmy pochodne równań (2) względem pojedyńczych zmiennych tyle razy, ile potrzeba, aby można było wyeliminować stałe λ z tak otrzymanego układu równań; dojdziemy tym sposobem do układu równań o pochodnych cząstkowych, dla którego wielkości ξ, przedstawione przez wzór (2), stanowić będą układ całek z r stałemi dowolnemi.

Jest widocznem, że z powodu formy specyalnej równań (2) co do stałych λ, równania różniczkowe, jakie otrzymamy, będą równaniami liniowemi jednorodnemi względem wielkości ξ_h i ich pochodnych, t. j. będą postaci:

$$(3) \qquad \sum_{h=1}^{n} A_{\mu h}\, \xi_h + \sum_{h=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_{\mu hj} \frac{\partial \xi_h}{\partial x_j} + \ldots = 0 ,$$

gdzie $A, B, \ldots$ są funkcyami zmiennych x i gdzie liczba wartości, jaką przybierać może skaźnik μ, jest liczbą równań układu.

Całki te określają nam funkcye ξ, a więc i najogólniejsze przekształcenie nieskończonostkowe, należące do grupy danej; można więc powiedzieć, że równania te o k r e ś l a j ą grupę i dlatego układ (3) nazywamy u k ł a d e m r ó w n a ń r ó ż n i c z k o w y c h, s t a n o w i ą c y m d e f i n i c y ę g r u p y.

Pierwsze nasuwające się tu pytanie jest następujące: dany jest układ równań (3), czy i kiedy określa on grupę w sposób wskazany?

Przedewszystkiem najogólniejsze rozwiązanie układu zawierać winno skończoną liczbę r stałych, gdyż w przeciwnym razie nie otrzymalibyśmy grupy skończonej.

Wiemy nadto, że gdy dwa przekształcenia nieskończonostkowe X_i, X_j należą do grupy, to i przekształcenie $(X_i\, X_j)$ powinno także należeć do grupy, t. j. powinno dać się wyrazić liniowo przy pomocy spółczynników stałych przez przekształcenia nieskończonostkowe grupy (według d r u g i e g o t w i e r d z e n i a L i e g o, § 14); stąd wynika, że:

(4) $$\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}; \quad \xi_{j1}, \ldots, \xi_{jn},$$

są dwoma układami rozwiązań równania (3), to rozwiązaniem układu musi być także utworzony z nich następujący układ:

(5) $$\sum_{s=1}^{n}\left(\xi_{is}\frac{\partial\xi_{j1}}{\partial x_s}-\xi_{js}\frac{\partial\xi_{i1}}{\partial x_s}\right), \ldots, \sum_{s=1}^{n}\left(\xi_{is}\frac{\partial\xi_{jn}}{\partial x_s}-\xi_{js}\frac{\partial\xi_{in}}{\partial x_s}\right).$$

Gdy to ma miejsce, wtedy na podstawie drugiego twierdzenia Liego, wielkości ξ są istotnie spółczynnikami przekształceń nieskończonostkowych, wytwarzających grupę.

Co się tyczy warunku, że najogólniejsze rozwiązanie układu zawierać ma skończoną liczbę stałych, to można dowieść, że jest on nietylko konieczny lecz i dostateczny, to znaczy, że gdy ten warunek jest spełniony, to stałe występują liniowo w wyrażeniu najogólniejszego rozwiązania. Nie wchodząc w szczegóły, wypowiemy to tylko twierdzenie:

Aby układ (3) mógł określać grupę skończoną, jest koniecznem i dostatecznem, by najogólniejsze rozwiązanie jego zawierało skończoną liczbę stałych dowolnych, oraz gdy wielkości (4) są dwoma układami rozwiązań, by wyrażenie (6) było także rozwiązaniem.

Dajmy, że układ (3) składa się z m równań. Różniczkując ich strony pierwsze względem każdej ze zmiennych, otrzymamy równania tego samego typu lecz rzędów coraz wyższych. I tak różniczkując ν razy względem wszystkich zmiennych, otrzymamy wogóle mn^{ν} równań, które zawierać będą pochodne rzędu $\omega+\nu$ wielkości ξ, jeżeli równania (3) zawierały pochodne tych wielkości rzędu najwyższego ω. Pochodnych rzędu $\omega+\nu$ tych n wielkości ξ jest:

(6) $$n\binom{n+\omega+\nu-1}{\omega+\nu}$$

i łatwo widzieć, że można zawsze wybrać taką liczbę ν, aby

liczba (6) nie była większa niż mn^ν. W samej rzeczy, stosunek:

$$(7) \qquad \frac{mn^\nu}{n\binom{n+\omega+\nu-1}{\omega+\nu}},$$

gdy ν powiększamy o 1, pozyskuje czynnik $\frac{n(\omega+\nu+1)}{n+\omega+\nu}$; gdy więc powiększymy ν o σ jedności, wypadnie stosunek (7) pomnożyć przez iloczyn:

$$(8) \qquad \frac{n(\omega+\nu+1)}{n+\omega+\nu} \cdot \frac{n(\omega+\nu+2)}{n+\omega+\nu+1} \cdot \cdots \cdot \frac{n(\omega+\nu+\sigma)}{n+\omega+\nu+\sigma-1}.$$

Otóż, przy powiększaniu liczby σ iloczyn ten może przewyższyć wszelką liczbę, gdyż granica czynnika ogólnego $\frac{n(\omega+\nu+\sigma)}{n+\omega+\nu+\sigma-1}$ dla $\sigma=\infty$ jest n, t. j. większa od 1.

Położmy dla skrócenia $\omega+\nu=s$ i tąż samą literą literą s oznaczmy p i e r w s z ą z liczb s takich, że z równań, otrzymanych drogą wyżej wskazaną, wyznaczyć można pochodne rzędu s; wszystkich wielkości ξ przez pochodne rzędu niższego; ponieważ równania, z których wychodzimy, są liniowe względem tych wielkości ξ i ich pochodnych, przeto jest widocznem, że pochodne rzędu s wyrazić się dadzą jako funkcye liniowe i jednorodne pochodnych rzędu niższego.

Niechaj będzie punkt $x_1^0, \ldots, x_n^0$, w którym wszystkie spółczynniki tych funkcyj wymiernych są regularnemi. Wtedy w otoczeniu tego punktu funkcye ξ dadzą się rozwinąć na szeregi, uporządkowane według iloczynów różnic:

$$(9) \qquad x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^{(0)},$$

po jednej, po dwie i t. d. ze spółczynnikami stałemi, które oznaczmy odpowiednio przez c_i, c_{ij}, c_{ijh}, ..., gdzie skaźnik pierwszy jest skaźnikiem tej wielkości ξ, którą rozwijamy, skaźnik zaś drugi, trzeci i t. d. są skaźnikami różnic (10), które wchodzą jako czynniki rozwinięć do danego wyrazu.

Jest widocznem, że te spółczynniki c są wartościami, jakie przybierają w punkcie x^0 odpowiednie pochodne różnych rzędów wielkości ξ; gdyby więc wszystkie spółczynniki c aż do spółczynników z s skaźnikami były równemi zeru, wtedy byłyby też dla $x=x^0$ równemi zeru wszystkie pochodne wielkości ξ aż do pochodnych rzędu $s-1$ włącznie; a ponieważ na zasadzie powyższego pochodne rzędu s i rzędu wyższego wyrażają się liniowo i jednorodnie przez pochodne rzędów poprzedzających, wynikałoby stąd, że w punkcie x^0 byłyby też zerami pochodne wielkości ξ wszelkiego rzędu, a stąd i spółczynniki c z ilukolwiek skaźnikami byłyby także zerami. Wynikłoby stąd, że i wielkości ξ są zerami i mielibyśmy układ wartości ξ, któremu nie odpowiada żadne przekształcenie nieskończonostkowe. Wnosimy stąd, że nie jest rzeczą możliwą, aby rozwinięcia wielkości ξ na szeregi rozpoczynały się od wyrazów rzędu s lub wyższego od s, t. j. (patrz § 8) pomiędzy określonemi przekształceniami nieskończonostkowemi układu nie ma żadnego przekształcenia rzędu s lub wyższego od s. Mamy zatem twierdzenie:

Mając grupę r parametrową, powstającą z r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, można zawsze znaleść liczbę s taką, by jedno którekolwiek z przekształceń nieskończonostkowych grupy było w punkcie dowolnym przestrzeni rzędu zawsze niższego od s. Istnieje przeto granica wyższa rzędu przekształcenia nieskończonostkowego, należącego do grupy skończonej.

ROZDZIAŁ II.

TEORYA OGÓLNA NIEZMIENNICZOŚCI WZGLĘDEM GRUPY PRZEKSZTAŁCEŃ.

---

§ 1.

Niezmienniczość funkcyi względem grupy. Niezmienniki grupy.

Niechaj będzie dana funkcya $F(x_1, \ldots, x_n)$ zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ oraz pewna grupa. Mówimy, że funkcya F jest niezmiennikiem grupy, albo że zezwala na wszystkie przekształcenia grupy, albo wreszcie, że należy do grupy, gdy pozostaje niezmienną przy wszystkich przekształceniach tej grupy.

Dajmy najprzód, że mamy grupę jednoparametrową. Łatwo wtedy znaleść warunek konieczny i dostateczny na to, aby funkcya F była niezmiennikiem. W samej rzeczy, przypomniawszy sobie wzór (Rozdz. I § 6):

$$F(x')=F(x)+\frac{t}{1}X(F(x))+\frac{t^2}{2!}X^2(F(x))+\ldots$$

widzimy, że aby było $F(x')=F(x)$ dla jakiejkolwiek wartości t, trzeba, by $X(F(x))$ było zerem; z drugiej strony, gdy $X(F(x))$ jest zerem, będzie także $X^2(F(x))=0$, $X^3(F(x))=0$ i t. d. Mamy więc twierdzenie:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcya $F(x)$ była niezmiennikiem

grupy o jednym parametrze jest, by ta funkcya była rozwiązaniem równania o pochodnych cząstkowych liniowego, jednorodnego rzędu pierwszego: $XF = 0$.

Gdy to ma miejsce, mówimy zwykle, że funkcya F zezwala na przekształcenie nieskończonostkowe X.

Dajmy teraz, że mamy grupę o r parametrach (Rozdz. I, § 13). Jest widocznem, że przy pomocy analogicznego rozważania dojdziemy do tego, że aby funkcya F była niezmiennikiem, potrzeba i wystarcza, by zezwalała na każde z r przekształceń nieskończonostkowych grupy, a więc:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcya F była niezmiennikiem grupy o r parametrach jest, by ta funkcya była jednem z rozwiązań wspólnych układu zupełnego równań:

$$X_1 F = 0, \ldots\ldots, X_r F = 0.$$

Pamiętając o tem, że gdy funkcya F jest rozwiązaniem każdego z równań $X_1 F = 0$, $X_2 F = 0$, to wtedy jest także rozwiązaniem równania $(X_1 X_2) F = 0$, możemy powiedzieć:

Jeżeli funkcya F jest niezmiennikiem dwu grup wytworzonych odpowiednio z przekształceń nieskończonostkowych X_1, X_2, to jest zarazem niezmiennikiem grupy, wytworzonej z przekształcenia nieskończonostkowego $(X_1 X_2)$,

Inne własności niezmienników grupy podamy w § 1, 2 Rozdziału III-go.

§ 2.

Niezmienniczość układu równań skończonych względem grupy.

Niechaj będzie równanie $\Omega(x_1, \ldots, x_n) = 0$, przedstawiające związek pomiędzy zmiennemi, który nie zmienia się przez przekształcenia grupy; mówimy wtedy, że r ó w n a n i e $\Omega = 0$ j e s t n i e z m i e n n i c z e m d l a p r z e k s z t a ł c e ń g r u p y.

Równanie $\Omega = 0$ przedstawia geometrycznie rozmaitość w przestrzeni n-wymiarowej. Gdy jest ono niezmiennicznem w znaczeniu wyżej wskazanem, wtedy przy pomocy przekształceń grupy można zawsze przejść od jednego punktu tej rozmaitości do każdego innego jej punktu, t. j. mówiąc geometrycznie, mamy wtedy rozmaitość, k t ó r a p r z e k s z t a ł c a s i ę n a s a m ą s i e b i e przez przekształcenia grupy, albo inaczej mówiąc: r o z m a i t o ś ć n i e z m i e n n i c z ą.

Jest widocznem, że gdy funkcya jest niezmiennikiem w znaczeniu, wskazanem w § poprzedzającym, wtedy, będąc przyrównana do zera lub wogóle do stałej, daje zawsze rozmaitość niezmienniczą. Mamy wtedy szereg pojedyńczo nieskończony rozmaitości niezmienniczych. Lecz odwrotnie z takiej rozmaitości niezmienniczej nie otrzymujemy funkcyi niezmienniczej.

Poszukajmy warunku koniecznego i dostatecznego na to, aby równanie było niezmienniczem dla grupy. Dla większej zaś ogólności rozpatrzmy przypadek nie jednego równania, lecz układu $n-m$ równań $\Omega_1=0, \ldots, \Omega_{n-m}=0$, o których czynimy, naturalnie, założenie, że są z sobą zgodne, i nadto, że nie wszystkie wyznaczniki rzędu $n-m$ macierzy:

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_1} \end{matrix} \right\|,$$

są zerami na mocy równań danych, t. j. zakładamy, że macierz ta, na mocy równań danych, ma charakterystykę $n—m$.

Jeżeli równania dane mają tworzyć układ niezmienniczy dla grupy, wytworzonej z przekształcenia nieskończonostkowego:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2}$$

wtedy układ równań:

$$\Omega_1(x') = 0, \ldots, \Omega_{n-m}(x') = 0,$$

t. j. układ:

$$\Omega_1(x) + \frac{t}{1} X\Omega_1(x) + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega_{n-m}(x) + \frac{t}{1} X\Omega_{n-m}(x) + \ldots = 0,$$

powinien być równoważny układowi danemu, t. j. być powinno:

$$X\Omega_1 = 0, \ldots, X\Omega_{n-m} = 0, \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X^2\Omega_1 = 0, \ldots, X^2\Omega_{n-m} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \tag{4}$$

Związki te powinny spełniać się wogóle nie tożsamościowo, lecz na mocy równań układu danego, t. j. powinny stanowić układ, wynikający z danego.

Powstaje pytanie następujące: czy dość przyjąć, iż spełniają się równania (3), aby wnieść stąd, iż wtedy spełniają się także równania (4); czy też równania (4) przedstawiają warunki niezależne od równań (3)? Gdyby pierwsze strony równań (3) znikały tożsamościowo, jak w §poprzedzającym, pytanie to byłoby zbytecznem, gdyż wtedy widocznie i równania (4) by-

łyby tożsamościowe. Otóż okażemy, że i w naszym przypadku równania (4) są wynikiem równań (3). Aby to udowodnić, wyprowadzimy najprzód pewną tożsamość, z której wypadnie nam korzystać.

Ponieważ macierz (1) jest, według założenia, różna od zera, przeto przynajmniej jeden z wyznaczników rzędu $n-m$, w niej zawartych, jest różny od zera; dajmy, że tym wyznacznikiem jest wyznacznik, utworzony z pierwszych $n-m$ wierszy i kolumn. Na podstawie założeń, wyznacznik ten jest różny od zera na mocy równań danych, będzie więc tem bardziej różny od zera t o ż s a m o ś c i o w o, t. j. gdy nie uwzględnimy związków pomiędzy wielkościami x. Możemy więc równania dane rozwiązać względem $x_1, \ldots, x_{n-m}$, i znajdziemy:

$$(5) \qquad x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_{n-m} = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1}, \ldots, x_n).$$

Dla dogodności oznaczmy symbolem $[F]$ wynik, jaki otrzymujemy, podstawiając w funkcyi F zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, zamiast pierwszych $n-m$ zmiennych, ich wyrażenia (5); tym sposobem będzie tożsamościowo:

$$[\Omega_1] = 0, \ldots, [\Omega_{n-m}] = 0.$$

Z równań (2) otrzymamy wtedy:

$$(6) \qquad [XF] = \sum_{i=1}^{n} [\xi_i(x)] \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} [Xx_i] \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right].$$

Obliczmy teraz wynik działania X, wykonanego na funkcyi $[F]$. Ponieważ $[F]$ jest funkcyą wyrażeń φ i zmiennych $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$, przeto:

$$X[F] = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial [F]}{\partial \varphi_i} X\varphi_i + \sum_{i=n-m+1}^{n} \frac{\partial [F]}{\partial x_i} Xx_i,$$

skąd:

$$[X[F]] = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial [F]}{\partial \varphi_i} [X\varphi_i] + \sum_{i=n-m+1}^{n} \frac{\partial [F]}{\partial x_i} [Xx_i],$$

gdyż wyrażenia $\left[\frac{\partial [F]}{\partial \varphi_i}\right]$ i $\left[\frac{\partial [F]}{\partial x_i}\right]$ nie różnią się, stosownie do oznaczeń naszych, odpowiednio od $\frac{\partial [F]}{\partial \varphi_i}$ i $\frac{\partial [F]}{\partial x_i}$, albowiem w funkcyi $[F]$ podstawienie wyrażeń (5) zostało już dokonane.

Dla $i \leqslant n-m$ mamy $\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] = \frac{\partial [F]}{\partial x_i}$; stąd:

$$(7)\quad [XF]-[X[F]] = \sum_{i=1}^{n-m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] \{[Xx_i]-[X\varphi_i]\} = \sum_{i=1}^{n-m} \left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\right] [X(x_i-\varphi_i)].$$

Jest to właśnie tożsamość, którą chcieliśmy wyprowadzić.

Położmy w niej $F=\Omega_k$; wtedy z uwagi, że gdy $[\Omega_k]=0$, będzie $X[\Omega_k]=0$, $[X[\Omega_k]]=0$ i że gdy $X\Omega_k=0$, będzie $[X\Omega_k]=0$, otrzymamy:

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{n-m} \left[\frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i}\right] [X(x,-\varphi_i)] = 0, \qquad (k=1, \ldots, n-m).$$

Otóż, na podstawie założenia, wyznacznik:

$$\left| \frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i} \right| \qquad (k=1, \ldots, n-m),$$

jest różny od zera, także na mocy równań danych, t. j. równań (5), a więc i wyznacznik:

$$\left| \left[\frac{\partial \Omega_k}{\partial x_i}\right] \right|,$$

będzie różny od zera, i dlatego z równań (8) otrzymamy:

$$[X(x_i - \varphi_i)] = 0:$$

Wzór (7) sprowadza się tedy do postaci:

$$[XF] - [X[F]] = 0, \tag{9}$$

dla wszelkiej funkcyi F.

Jeżeli we wzorze (9) położymy $F = X\Omega_k$ i przyjmiemy, że równania (3) mają miejsce na mocy równań danych, t. j. że dla jakiejkolwiek wartości k jest tożsamościowo $[X\Omega_k] = 0$, a więc także $X[X\Omega_k] = 0$, $[X[X\Omega_k]] = 0$, wyniknie stąd:

$$[X \,.\, X\Omega_k] = [X^2\Omega_k] = 0,$$

t. j. że równania $X^2\Omega_k = 0$ (i podobnie dowieść by można, że i równania $X^3\Omega_k = 0, \ldots$) są wynikiem układu danego, co było do okazania.

Mamy zatem twierdzenie:

Warunkiem konieczny m i dostateczny m na to, aby układ równań $\Omega_1(x) = 0, \ldots, \Omega_{n-m}(x) = 0$ (dla którego macierz pochodnych rzędu pierwszego względem wszystkich zmiennych nie jest zerem) był niezmienniczym dla grupy jednoparametrowej, wytworzonej z przekształcenia nieskończonostkowego X, jest by równania $X\Omega_1 = 0, \ldots, X\Omega_{n-m} = 0$ były wynikiem równań danych.

Jeżeli mamy grupę o większej liczbie parametrów, wytworzoną tedy z r przekształceń $X_1, \ldots, X_r$, to pamiętając o tem, że przekształcenia tej grupy można napisać jako przekształcenia grupy jednoparametrowej, wytworzonej z przekształcenia $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i$, wniesiemy stąd, że warunkiem konieczny m i dostateczny m niezmienniczości układu równań względem uważanej grupy jest, by wyniki zastosowania działania X do

każdego z równań Ω były zerami na mocy równań danych. A zatem twierdzenie poprzedzające stosuje się nietylko do grup, wytworzonych z jednego przekształcenia nieskończonostkowego, lecz także do grup, wytworzonych z r takich przekształceń.

Poprzednie rozważania opierały się na założeniu, że macierz (1) jest różna od zera. Twierdzenie nie utrzymuje się wogólności, jeżeli ten warunek nie jest spełniony. Ale nie będziemy rozpatrywali szczegółowo tego przypadku i odsyłamy w tym względzie czytelnika do T. I dzieła „Theorie der Tranfor.“, s. 112—115. Przytaczamy tylko rezultat:

Jeżeli macierz (1) jest zerem, wtedy dla niezmienniczości układu nie wystarcza już, by równania $X\Omega_j = 0$ były wynikami równań $\Omega_j = 0$ (wszakże warunek ten pozostaje, oczywiście, koniecznym); warunek dostateczny wyraża się ogólnie przez to, że wyrażenia $X\Omega_j$ dają się przedstawić liniowo przez wyrażenia Ω_j ze spółczynnikami, będącemi funkcyami regularnemi dla tych wszystkich wartości zmiennych x_i dla których wyrażenia Ω znikają.

Twierdzenie to zawiera w sobie, oczywiście, twierdzenie poprzedzające, jako przypadek szczególny. Gdy bowiem spełnia się warunek powyższy, wtedy równania $X\Omega_j = 0$ są wynikami równań $\Omega_j = 0$; odwrotnie wszakże, ten ostatni przypadek mógłby zachodzić, jakkolwiek wyrażenia $X\Omega_j = 0$ nie dałyby się przedstawić liniowo przez wyrażenia Ω_j.

Ważnem jest twierdzenie następujące:

Jeżeli układ równań jest niezmienniczy względem grupy, której przekształceniem nieskończonostkowem jest X_j, oraz względem innej grupy, której przekształceniem nieskończonostkowem jest X_i, wtedy jest także niezmienniczym względem grupy, której

przekształceniem nieskończonostkowem jest $(X_j X_i)$.

Dowód tego twierdzenia jest taki sam, jak dowód twierdzenia analogicznego w § poprzedzającym. Jeżeli równania $X_j\Omega_k=0$ i $X_i\Omega_k=0$ są wynikiem równań $\Omega_k=0$, to będzie nim także $X_jX_i\Omega_k - X_iX_j\Omega_k=0$, t. j. $(X_jX_i)\,\Omega_k=0$ będzie wynikiem układu $\Omega_k=0$.

Dodajmy wreszcie, że zamiast mówić, iż układ równań jest niezmienniczy względem grupy, wytworzonej z przekształcenia nieskończonostkowego X_i, mówić będziemy prościej, że układ zezwala na przekształcenie nieskończonostkowe X_i.

---

§ 3

O zagadnieniu, dotyczącem wyznaczenia wszystkich możliwych układów równań, zezwalających na jedno lub więcej danych przekształceń nieskończonostkowych.

Z § poprzedzającego wypływa, że wyznaczenie układów równań różniczkowych niezmienniczych dla danej grupy o jednym lub więcej parametrach sprowadza się w istocie rzeczy do wyznaczenia funkcyj takich, że stosując do nich działania, wyrażone symbolami przekształceń nieskończonostkowych, wytwarzających grupę, i uwzględniając znikanie tych funkcyj, otrzymujemy tożsamościowo zero, czyli, jak się zwykle mówi, równania, zezwalające na dane przekształcenia nieskończonostkowe. Stąd powstaje pytanie o rozwiązaniu zagadnienia, o ktorem mowa wyżej w nagłówku. Podamy tu tylko niektóre o tem zagadnieniu uwagi.

Niechaj będzie dane jedno przekształcenie nieskończonostkowe:

$$(1) \qquad X=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Układ jakikolwiek $n-m$ równań:

$$\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_{n-m} = 0, \tag{2}$$

o jakich mowa wyżej, może być taki, że albo równania:

$$\xi_1 = 0, \ldots, \xi_n = 0 \tag{3}$$

nie są wszystkie wynikiem równań (2), albo wszystkie wynikają z tych równań.

W przypadku pierwszym, jeżeli przez $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ oznaczymy $n-1$ całek niezależnych równania $XF=0$, łatwo dowieść, że pierwsze strony równań (2) muszą być funkcyami całek φ. W samej rzeczy, jeżeli przyjmiemy, że przynajmniej jedna z wielkości ξ, np. ξ_n jest różna od zera, przy uwzględnieniu równań (2), wtedy biorąc zamiast zmiennych $x_1, \ldots, x_{n-1}$ nowe zmienne $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, sprowadzimy równanie (1) (patrz Rozdz. I § 7) do postaci:

$$X = \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{4}$$

Wprowadźmy teraz wyrażenia φ do równań $\Omega=0$. Gdyby jedno z wyrażeń, np. Ω_k, zawierało zmienną x_n, wtedy rozwiązując równanie $\Omega_k=0$ względem x_n, otrzymalibyśmy równanie równoważne:

$$x_n - \omega_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) = 0;$$

lecz powinno być także $X\Omega_k=0$, gdzie X ma postać (4), a więc być by musiało $\xi_n = 0$, wbrew powyższemu założeniu. Stąd wszystkie wyrażenia Ω mogą być tylko funkcyami samych wielkości φ. Z drugiej zaś strony jest jasnem, że biorąc $n-m$ dowolnych funkcyj całek φ, otrzymujemy zawsze rozwiązanie zagadnienia. A zatem:

Jeżeli szukamy wszystkich możliwych układów N równań, zezwalających na dane przekształcenie nieskończonostkowe X i ta-

kich, by znikanie spółczynników ξ nie było wynikiem tych równań, wtedy jest koniecznem i wystarczającem wziąć dowolnie N funkcyj $n-1$ całek niezależnych równania $Xf=0$.

Jeżeli zaś znikanie funkcyj $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ma być wynikiem równań układu niezmienniczego, wtedy przyjąć trzeba oczywiście, że równania $\xi_1=0, \ldots, \xi_n=0$ są zgodnemi, t. j. że istnieje przynajmniej jeden układ wartości zmiennych, który równania te spełnia i że ten układ jest zawarty w obszarze, w którym funkcye te uważamy za regularne. Przyjmijmy, że wogólności tylko m pierwszych równań są niezależne, t. j. że pozostałe są wynikami tych m pierwszych. Jest wtedy jasnem, że znajdziemy szukany układ niezmienniczy N równań, jeżeli rozważymy najprzód równania $\xi_1=0, \ldots, \xi_{n-m}=0$, a następnie $N-m$ równań dowolnych, lecz nie niezgodnych z poprzedzającemi.

A zatem, gdy mamy dane jedno tylko przekształcenie nieskończonostkowe, zagadnienie nasze sprowadza się do wyznaczenia wszystkich układów równań niezmienniczych dla przekształceń grupy jednoparametrowej.

Pokażemy, jak przedstawia się rozwiązanie tego zagadnienia w przypadku, gdy mamy danych więcej przekształceń nieskończonostkowych.

Wiemy już (Rozdz. II § 2), że gdy układ zezwala na dwa przekształcenia nieskończonostkowe X_1 i X_2, to zezwala też i na przekształcenie $(X_1\ X_2)$. Stąd wypływa, że mając q danych przekształceń nieskończonostkowych, dla których szukamy niezmienniczego układu równań, możemy dołączyć wszystkie inne przekształcenia nieskończonostkowe $(X_i\ X_k)$ i postępować w ten sposób dalej, aż zbiór wszystkich równań różniczkowych, otrzymanych z przyrównania do zera wszystkich wyrażeń X, nie będzie układem zupełnym (Rozdz. I § 9). Możemy tedy przyjąć, że dane przekształcenia nieskończonostkowe, w liczbie q, są takie, iż przyrównane do zera, dają układ zupełny, albo też ogólniej, że pomiędzy q przekształceniami jest $q-r$ przekształceń, będących komkinacyami liniowemi (o spółczynnikach zmien-

nych) pozostałych r przekształceń, wzajemnie niezależnych i stanowiących, po przyrównaniu do zera, układ zupełny. Wynika stąd, że, jeżeli oznaczymy, jak zwykle, przez $\xi_{j1}, \ldots, \xi_{jn}$ spółczynniki podstawienia X_j, macierz:

$$(5) \qquad \left\| \begin{array}{c} \xi_{11}, \ldots, \xi_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{q1}, \ldots, \xi_{qn} \end{array} \right\|$$

będzie miała charakterystykę r.

Układy szukanych równań $\Omega = 0$ są, jak wyżej, dwojakiego gatunku: dla jednych z nich znikanie wszystkich wyznaczników macierzy (5) nie jest wynikiem tych równań; dla drugich znikanie tych wyznaczników wynika z samych równań.

W sposób zupełnie podobny do powyższego, t. j. wprowadzając, zamiast zmiennych x, nowe zmienne φ w liczbie $n-r$, będące całkami układu zupełnego r równań $X_1 = 0, \ldots, X_r = 0$, można dowieść, że wyrażenia Ω staną się funkcyami samych wielkości φ. Stąd:

Aby otrzymać wszystkie możliwe układy N równań $\Omega = 0$, niezmienniczych względem zbioru q przekształceń nieskończonostkowych $X_1, \ldots, X_q$, z których r pierwsze, przyrównane do zera, tworzą układ zupełny, pozostałe zaś są kombinacyami liniowemi poprzedzających, i takich równań, że znikanie wszystkich wyznaczników rzędu r macierzy spółczynników nie jest wynikiem samych równań, jest koniecznem i wystarczającem przyrównanie do zera N dowolnych funkcyj $n-r$ rozwiązań układu $X_1 = 0, \ldots, X_r = 0$.

Co się tyczy układów równań drugiego gatunku, to te można podzielić na różne klasy; możemy bowiem przyjąć, że wynikiem równań układu jest znikanie nietylko wszystkich wyznaczników rzędu r macierzy (5), ale także znikanie wszystkich wy-

znaczników rzędu $r-1, r-2, \ldots, r-h+1$. Stąd dla każdej wartości liczby h będziemy mieli inną klasę, a wszystkich klas będzie r.

Ustaliwszy wartości liczby h, obliczamy wszystkie wyznaczniki rzędu r $h+1$ macierzy (5). Otóż może się zdarzyć, że znikanie wszystkich tych wyznaczników pociąga za sobą znikanie również wszystkich wyznaczników rzędu $r-h$, albo też, że znikanie tych wyznaczników rzędu $r-h+1$ ma miejsce dla wartości zmiennych x, znajdujących się zewnątrz obszaru, w którym funkcye ξ przyjmujemy jako regularne.

Gdy zdarza się jeden z tych przypadków, wtedy jest widocznem, że nie istnieje układ równań szukanych, odpowiadających danej liczbie h. Gdy zaś żaden z tych przypadków nie zachodzi, wtedy znikanie wyznaczników rzędu $r-h+1$ może zależeć wogólności od znikania pewnej liczby najmniejszej ϱ pewnych funkcyj Ξ zmiennych x. I wogólności będzie można znaleść rozmaitemi sposobami ten układ n i e p r z y w i e d l n y równań $\Xi_1=0, \ldots, \Xi_\varrho=0$.

Ustaliwszy jeden z takich układów nieprzywiedlnych, mianowicie układ, z którego nie wypływa znikanie wszystkich wyznaczników rzędu $r-h$ macierzy (5), utwórzmy układ równań:

$$(6) \qquad \Xi_i=0, \quad X_k\,\Xi_i=0, \quad X_j\,X_k\,\Xi_i=0, \ldots$$

prowadząc to postępowanie dopóty, dopóki nie otrzymamy równań, będących wynikiem poprzedzających, a które odrzucić już będzie można; albo też równań, które już to nie będą zgodne z poprzedzającemi lub spełniać się będą dla wartości x, znajdujących się poza obszarem, w których funkcye ξ są regularne. W dwóch ostatnich przypadkach nie istnieje oczywiście szukany układ równań; w pierwszym zaś przypadku będzie można wskazanym wyżej sposobem zbudować układ równań, zezwalający na wszystkie przekształcenia nieskończonostkowe X, mianowicie sposobem, jakim zbudowaliśmy układ (6).

Układ (6) daje się, w ogólności, sprowadzić do mniejszej liczby równań, mianowicie, tak, że gdy spełniają się wszystkie równania układu zredukowanego, to spełniają się też i wszystkie równania układu (6). Ten układ zredukowany będzie tedy obej-

mował z pewnością wszystkie równania $\Xi_i = 0$, co wypływa już z samego sposobu utworzenia wyrażeń Ξ_i. Niechaj:

$$(7) \qquad \Xi_1 = 0, \ldots, \Xi_\varrho = 0, \; \Xi_{\varrho+1} = 0, \ldots, \Xi_{\varrho+\sigma} = 0,$$

będzie układem zredukowanym.

W założeniu, że z równań (7) nie wypływa znikanie wyznaczników rzędu $r-h$ macierzy (5), układ (7) jest układem szukanym, należącym do liczby h i nieprzywiedlnym.

Lecz jakiż będzie układ najogólniejszy tego gatunku, obejmujący w sobie układ (7); innemi słowy, jakie równania można dołączyć do równań (7), aby układ rozszerzony zachował własności układu (7)?

Dajmy, że wyznacznik rzędu $r-h$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{1,n-r+h+1}, \ldots, \xi_{1,n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_{r-h,n-r+h+1}, \ldots, \xi_{r-h,n} \end{vmatrix}$$

nie staje się zerem na mocy równań (7). Utwórzmy jakikolwiek układ równań, zezwalający na przekształcenia $X_1, \ldots, X_\varrho$ i nie sprowadzający wyznacznika Δ do zera. Dołączywszy ten układ równań do układu (7), otrzymamy układ, mający te same własności co układ (7), a powtarzając to działanie dla wszystkich wyznaczników Δ różnych od zera, dojdziemy do wszystkich układów szukanych. Otóż przedewszystkiem łatwo widzieć, że z równań (7) nie podobna wyprowadzić związku pomiędzy samemi wielkościami $x_{n-r+h+1}, \ldots, x_n$; gdyby bowiem być mogło:

$$(8) \qquad x_n - \psi(x_{n-r+h+1}, \ldots, x_{n-1}) = 0,$$

wtedy stosując do tego związku przekształcenia $X_1, \ldots, X_{r-h}$, powinniśmy w wyniku otrzymać zawsze zero, a tym sposobem doszlibyśmy do układu równań liniowych względem pochodnych funkcyi ψ. Ponieważ równania tego układu powinnyby spółistnieć na mocy równań (7), a więc przy uwzględnieniu tych

równań wyznacznik Δ (który jest wyznacznikiem tych równań liniowych) znikałby wbrew założeniu.

Wynika stąd, że liczba $\varrho+\sigma$ równań (7) nie może być większa od $n-r+h$; gdyby bowiem była większa, wtedy rugując z równań (7) zmienne $x_1, \ldots, x_{n-r+h}$, otrzymalibyśmy związek postaci (8). A zatem:

$$\varrho + \sigma \leqslant n - (r-h). \tag{9}$$

Rozwiążmy równania (7) względem $x_1, \ldots, x_{\varrho+\sigma}$; wtedy znajdziemy układ:

$$x_1=\varphi_1(x_{\varrho+\sigma+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_{\varrho+\sigma}=\varphi_{\varrho+\sigma}(x_{\varrho+\sigma+1}, \ldots, x_n), \tag{10}$$

mogący zastąpić układ (7).

Mając te wzory, możemy zawsze wyobrazić sobie, że szukane równania, które mamy dołączyć do układu (7), zawierają jedynie zmienne $x_{\varrho+\sigma+1}, \ldots, x_n$, oraz że wyrażenia Ξ są przekształcone w ten sposób, że zawierają tylko też same zmienne. Z drugiej strony, ponieważ z pomiędzy przekształceń X dość rozważać tylko $r-h$, gdyż pomiędzy $r-h+1$ przekształceniami X na mocy równań (7) istnieć będzie zawsze związek liniowy, bo wyznaczniki rzędu $r-h+1$ macierzy (5) są wszystkie zerami; widzimy więc ostatecznie, że zagadnienie o wyznaczeniu równań, mających być dołączonemi do równań (7), sprowadza się do szukania wszystkich układów równań zawierających tylko $n-\varrho-\sigma$ zmiennych i zezwalających na $r-h$ przekształceń pomiędzy temiż zmiennemi. Zagadnienie to jest, jak widzimy, podobne do rozważanego na początku, tylko o mniejszej liczbie zmiennych i przekształceń nieskończonostkowych.

Tym sposobem wyczerpaliśmy rozbiór zagadnienia ogólnego, o którym mowa w tym paragrafie.

§ 4.

Przypadek, w którym dane przekształcenia nieskończonostkowe mają pewną własność, a w szczególności mogą wytworzyć grupę o r parametrach. Układy równań niezmienniczych względem grupy o r parametrach.

Widzieliśmy w poprzednim §, w jaki sposób można wyznaczyć wszystkie układy równań, zezwalających na dane q przekształceń nieskończonostkowych, z których istnienia wypływa znikanie wszystkich minorów rzędu $r-h+1$ macierzy wielkości ξ oraz nieznikanie minorów rzędu $r-h$. Obliczywszy wszystkie minory rzędu $r-h+1$, przyrównawszy je do zera, odrzuciwszy wszystkie te równania, które są wynikiem innych, i szukając, jeżeli to jest możliwe, układu równań najbardziej zredukowanego, z którego wynikają wszystkie już zbudowane, otrzymamy układ nieprzywiedlny, który wszakże w przypadku ogólnym nie jest układem, mającym własności żądane. Aby ten ostatni układ otrzymać, trzeba będzie koniecznie dołączyć jeszcze inne równania, których konstrukcyą zajmowaliśmy się w § poprzedzającym.

Zbadajmy teraz przypadek, w którym układ, otrzymany wprost sposobem dopiero co wskazanym, t. j. przez przyrównanie do zera wszystkich minorów rzędu $r-h+1$ zwykłej macierzy i przez następne wykonanie odpowiednich redukcyj, jest już układem, mającym żądane własności; w tym przypadku znacznie uprości się poszukiwanie, o którem mówiliśmy już ogólnie w § poprzedzającym.

Niechaj będą, jak poprzednio, przekształcenia nieskończonostkowe w liczbie q; z pomiędzy nich można wybrać, jak wyżej, r przekształceń, stanowiących układ zupełny, gdy pozostałe przekształcenia w liczbie $q-r$ wyrazić się dadzą liniowo (ze spółczynnikami zmiennemi) przez pierwsze. Jeżeli r przekształceń stanowi układ zupełny, wtedy zachodzić będą związki:

$$(1) \qquad (X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} \gamma_{jis}(x)\, X_s,$$

gdzie spółczynniki γ są wogóle funkcyami zmiennych x, regularnemi w pewnym obszarze. Przyrównajmy do zera wszystkie wyznaczniki rzędu $r-h+1$ macierzy wielkości ξ i dajmy, że otrzymujemy układ równań zgodnych; sprowadźmy go do liczby najmniejszej i wyrażenia najprostszego i rozważajmy ogół wszystkich wartości zmiennych x, dla których spełniają się te równania, w założeniu, jak zwykle, że wartości te należą do obszaru, w którym funkcye ξ są regularne.

Otóż, jeżeli przyjmiemy, że obszar, w którym są regularnemi funkcye γ, obejmuje w sobie obszar, w którym znikają rzeczone wyżej wyznaczniki rzędu $r-h+1$, można okazać, że tak zbudowany układ równań zezwala na wszystkie dane przekształcenia nieskończonostkowe.

Aby tego dowieść, skorzystamy z twierdzenia, wypowiedzianego na końcu § 2, mianowicie, aby układ równań zezwalał na każde z przekształceń nieskończonostkowych X, jest dostatecznem, by przekształcenie X, zastosowane do każdego z równań układu, dało na rezultat kombinacyę liniową stron pierwszych tychże równań ze spółczynnikami, które są funkcyami regularnemi w obszarze wszystkich układów wartości, czyniących zadość tym równaniom równocześnie.

Oznaczmy przez $D_1, D_2, \ldots$ wyznaczniki rzędu $r-h+1$ macierzy wielkości ξ i zastosujmy przekształcenie X_j do jednego z wyznaczników D, dajmy na to, do wyznacznika, utworzonego z $r-h+1$ pierwszych wierszy i tyluż pierwszych kolumn. Możemy napisać:

$$(2) \qquad X_j D = \sum_{i=1}^{r-h+1} \sum_{v=1}^{r-h+1} X_j \xi_{iv} \frac{\partial D}{\partial \xi_{iv}},$$

gdzie pochodne $\frac{\partial D}{\partial \xi_{iv}}$ są oczywiście dopełnieniami algebraicznemi elementów ξ_{iv} w wyznaczniku D.

Otóż, z równania (1) mamy:

$$X_j \xi_{iv} - X_i \xi_{jv} = \sum_{s=1}^{r} \gamma_{jis} \xi_{sv},$$

t. j.:

$$X_j \xi_{iv} = \sum_{s=1}^{n} \xi_{is} \frac{\partial \xi_{jv}}{\partial x_s} + \sum_{s=1}^{r} \gamma_{jis} \xi_{sv};$$

podstawiając tę wartość we wzorze (2), otrzymujemy:

$$X_j D = \sum_{s=1}^{r} \sum_{v=1}^{r-h+1} \frac{\partial \xi_{jv}}{\partial x_s} \sum_{i=1}^{r-h+1} \xi_{is} \frac{\partial D}{\partial \xi_{iv}}$$

(3)

$$+ \sum_{s=1}^{r} \sum_{i=1}^{r-h+1} \gamma_{jis} \sum_{v=1}^{r-h+1} \xi_{sv} \frac{\partial D}{\partial \xi_{iv}}.$$

Wyrażenia:

$$\sum_{i=1}^{r-h+1} \xi_{is} \frac{\partial D}{\partial \xi_{iv}}, \quad \sum_{v=1}^{r-h+1} \xi_{iv} \frac{\partial D}{\partial \xi_{iv}},$$

są sumami iloczynów dopełnień algebraicznych elementów kolumny lub wiersza wyznacznika D przez elementy kolumny lub wiersza równoległego w tymże wyznaczniku, albo ogólniej w dwu macierzach, będących częściami całkowitej macierzy wielkości ξ, a których przecięciem jest właśnie wyznacznik D. Sumy te, odpowiednio do wartości liczby s, są albo zerem, albo równemi wyznacznikowi D, albo wreszcie są wyznacznikami rzędów $r-h+1$, zawartemi w rzeczonych dwóch macierzach. Widzimy

tedy, że wyrażenie $X_i D$ da się przedstawić liniowo przez wyznacznik D i ze spółczynnikami, które są sumami wyrazów takich, jak $\frac{\partial \xi_\rho}{\partial x_s}$ i $\gamma_{\rho i s}$. Na podstawie uczynionych założeń, ponieważ pochodne wielkości ξ są też regularnemi w obszarze, w którym są regularnemi i same funkcye ξ, i ponieważ w obszarze tym zawiera się, według założenia, obszar, w którym znikają wszystkie wyznaczniki D, a w tym ostatnim funkcye γ są regularne, stosując przeto wyżej wymienione twierdzenie, znajdujemy, że równania $D=0$ zezwalają na wszystkie przekształcenia nieskończonostkowe X.

Wielce interesującym przypadkiem szczególnym tego twierdzenia jest ten, w którym dane przekształcenia nieskończonostkowe w liczbie r mogą wytworzyć grupę r-parametrową, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy funkcye γ są wielkościami stałemi. W tym przypadku spełnia się zawsze, oczywiście, warunek regularności funkcyj γ, a więc stosować można twierdzenie powyższe. Mamy przeto ważny rezultat:

Dane są przekształcenia nieskończonostkowe w liczbie q, z których r przekształceń może wytworzyć grupę, pozostałe zaś są kombinacyami liniowemi (ze spółczynnikami zmiennemi) pierwszych. Przyrównywając do zera wszystkie minory rzędu $r-h+1$ macierzy wielkości ξ, redukując te równania do liczby najmniejszej i najprostszego wyrażenia, i zakładając, że obszar, w którym te równania spełniają się, jest obszarem regularności funkcyj ξ, otrzymujemy odrazu układ równań, zezwalający na dane przekształcenia nieskończonostkowe. Na zasadzie zaś tego, co podano w § 2, możemy jeszcze powiedzieć, że ten układ równań jest niezmienniczy dla wszystkich przekształceń grupy r-parametrowej, wytworzonej z danych r przekształceń nieskończonostkowych.

W dziele Liego (Th. d. Transfor., 1, s. 228, 239, 241) podane są trzy dowody tego ważnego twierdzenia, które co do grup wieloparametrowych, wytworzonych z przekształceń nieskończonostkowych, uzupełnia odnośne badanie grupy jednoparametrowej, wyłożone w pierwszej części § 3. Zdawało się nam bardziej odpowiedniem przedstawienie tego twierdzenia, jako wniosku z twierdzenia daleko ogólniejszego, które podaje sam Lie na str. 244—245 i dowodzi go sposobem, w istocie rzeczy, zgodnym z tu podanym.

Przy pomocy tego twierdzenia można zbudować układy równań niezmienniczych dla grupy r-parametrowej, biorąc za punkt wyjścia przekształcenia nieskończonostkowe tej grupy.

Zauważmy wszakże, że możnaby też zbudować podobne układy, odwracając uwagę od przekształceń nieskończonostkowych grupy (których grupa mogłaby nawet nie posiadać), a mając tylko wzory skończone przekształceń grupy.

Kładąc w tych wzorach za $x_1, \ldots, x_n$ wartości stałe $x_1^0, \ldots, x_n^0$, i pisząc x_i zamiast x_i', mamy wzory:

$$x_i = f_i(x^0, a_1, \ldots, a_r). \tag{4}$$

Zmieniając wielkości a wszelkiemi możliwemi sposobami, otrzymujemy nieskończenie wiele układów wartości na zmienne x, które to wartości będą spółrzędnemi nieskończenie wielu punktów, na jakie przekształca się punkt $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Niechaj $y_1, \ldots, y_n$ będzie jednym z tych punktów, dajmy na, to punktem, który odpowiada wartościom $a_1, \ldots, a_r$ parametrów; zastosujmy do niego przekształcenie grupy, np. to, które ma parametry $b_1, \ldots, b_r$; otrzymamy wtedy punkt:

$$z_i = f_i(y, b_1, \ldots, b_r) = f_i(f(x^0, a)\, b),$$

a ponieważ założyliśmy, że przekształcenia tworzą grupę, przeto $z_i = f_i(x^0, c)$, t. j. punkt $z_1, \ldots, z_n$ jest innym z punktów, na które przekształca się punkt $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Wynika stąd, że zbiór wszystkich tych punktów będzie przedstawiony przez układ równań niezmienniczych względem grupy. Otóż taki

układ równań znajdujemy odrazu, eliminując wielkości a z równań (4); mamy stąd sposób znalezienia wszystkich układów niezmienniczych grupy, gdy dane są jej równania skończone. Zwracamy uwagę na to, że w metodzie tej nie potrzeba zakładać, iż grupa posiada przekształcenie tożsamościowe, a więc i przekształcenia nieskończonostkowe.

---

§ 5.

Przedstawienie geometryczne układów równań niezmienniczych względem grupy. Podgrupa stateczności punktu.

Jest rzeczą pożyteczną zbadać znaczenie geometryczne wielu poprzednio podanych rezultatów, w celu znalezienia rezultatów nowych z punktu widzenia geometrycznego.

Układ równań, gdy zmienne x uważamy za spółrzędne punktu przestrzeni n-wymiarowej, przedstawia rozmaitość o mniejszej liczbie wymiarów, znajdującą się w tej przestrzeni.

Jeżeli układ równań zezwala na przekształcenie nieskończonostkowe X, a więc (patrz § 2) jest niezmienniczym względem grupy jednoparametrowej, wytworzonej z tego przekształcenia, wtedy punkt rozmaitości geometrycznej, którą ten układ przedstawia, przechodzi, przez zastosowanie przekształceń grupy, na inny punkt tejże rozmaitości. Lecz ponieważ, jak wiemy, każdy punkt przekształca się w ogólności na inny punkt, należący do trajektoryi, przez punkt uważany przechodzącej (patrz Rozdz. I § 7), wnosimy stąd, że cała ta trajektorya należy do rozmaitości, t. j. rozmaitość geometryczna niezmiennicza jest w ogólności miejscem nieskończenie wielu trajektoryj (oczywiście, w przypadku szczególnym może być także pojedyńczą trajektoryą).

Mamy tym sposobem interpretacyę geometryczną rozwiązania zagadnienia, którem zajmowaliśmy się na początku § 3, gdzie widzieliśmy, że, aby znaleść układ równań niezmienniczych względem grupy, trzeba rozważać układ równań dowol-

nych pomiędzy całkami $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, które, jak wiemy, przyrównane do stałych, są właśnie równaniami ogólnemi trajektoryj.

Lecz może się zdarzyć, że trajektorya punktu redukuje się do tego jednego punktu, t. j. że punkt pozostaje niezmiennym przy wszystkich przekształceniach grupy; ma to miejsce wtedy, gdy dla tego punktu wszystkie spółczynniki ξ w wyrażeniu na X znikają. Stąd, jeżeli wszystkie punkty rozmaitości geometrycznej są tego gatunku, wtedy rozmaitość ta jest niezmiennicza nietylko jako całość, ale i w każdej swej części, i układ równań, przedstawiających tę rozmaitość, obejmuje w sobie wszystkie równania $\xi=0$. Mamy wtedy drugi z przypadków, rozważanych w § 3.

Weźmy punkt rozmaitości niezmienniczej i zastosujmy do niego przekształcenie nieskończonostkowe. Punkt przesunie się wzdłuż stycznej do trajektoryi, przezeń przechodzącej; lecz ponieważ trajektorya należy do rozmaitości, przeto kierunek przesunięcia będzie styczny do rozmaitości. Jeżeli przeto punkt należy do drugiego gatunku wyżej rozważonego, to nie przesunie się w żadnym kierunku. Możemy tedy powiedzieć, że rozmaitość będzie albo nie będzie niezmienniczą dla grupy, wytworzonej z przekształcenia X, stosownie do tego, czy składa się albo nie składa z punktów, z których każdemu albo nie odpowiada żaden kierunek za pośrednictwem przekształcenia nieskończonostkowego X (t. j. punktów, które przekształcenie X pozostawia bez zmiany, p. Rozdz. I § 8), albo też odpowiada kierunek styczny do rozmaitości.

Niechaj będzie q przekształceń nieskończonostkowych $X_1, \ldots, X_q$. Wiemy, że układy równań, zezwalających na te q przekształceń nieskończonostkowych, można rozklasyfikować według najwyższego rzędu tych wyznaczników macierzy wielkości ξ, które na mocy równań układu są różne od zera (patrz § 4). Niechaj $r-h$ będzie takim rzędem najwyższym, gdzie, jak zwykle, r jest liczbą przekształceń X, odpowiadających układowi zupełnemu, gdy $q-r$ jest liczbą przekształceń, wyrażających

się liniowo przez tamte. Ponieważ spółczynniki ξ każdego przekształcenia X są proporcyonalne do dostaw kierunku, w którym punkt przesuwa się nieskończenie mało skutkiem przekształcenia nieskończonostkowego X, i ponieważ dla wszystkich punktów rozmaitości wszystkie wyznaczniki rzędu $r-h+1$ macierzy wielkości ξ są zerami, przeto kierunki przesunięć wszystkich tych punktów skutkiem wszystkich przekształceń X, redukują się do $r-h$ kierunków niezależnych. I odwrotnie, jeżeli te kierunki redukują się do $r-h$ kierunków niezależnych, wtedy oczywiście dla tych punktów nie mogą być zerami wszystkie minory rzędu $r-h$ macierzy wielkości ξ. Ponieważ rozmaitość musi być, jak zawsze, styczna do każdego z tych $r-h$ kierunków niezależnych, przeto musi ona posiadać przynajmniej $r-h$ wymiarów, a zatem:

Każdy układ równań, zezwalający na q danych przekształceń nieskończonostkowych, na mocy których macierz wielkości ξ ma charakterystykę $r-h$, daje się przedstawić za pomocą rozmaitości, mającej przynajmniej $r-h$ wymiarów, której punktom za pośrednictwem przekształceń $X_1, \ldots, X_q$ odpowiada $r-h$ kierunków niezależnych, stycznych do tej rozmaitości.

Zajmijmy się teraz rozmaitością niezmienniczą dla grupy r-parametrowej i zbadajmy, w jaki sposób można zbudować geometrycznie taką rozmaitość.

Weźmy punkt przestrzeni i zastosujmy do niego sposobem, wskazanym na końcu poprzedzającego paragrafu, wszystkie przekształcenia grupy. Wiemy już, że zbiór wszystkich punktów, na które przekształca się punkt dany, jest rozmaitością niezmienniczą względem grupy. Można okazać, że rozmaitość ta nie daje się przywieść do części mniejszych, czyli, że z jednego jej puktu można zawsze za pomocą przekształceń grupy przejść do innego punktu. W samej rzeczy, niechaj P będzie punktem początko-

wym, do którego stosujemy wszystkie przekształcenia grupy i niechaj Q i R będą dwoma punktami, na które przekształca się punkt P przez przekształcenia odpowiednie τ, σ; wtedy jest widocznem, że przez przekształcenie odwrotne τ^{-1} do przekształcenia τ przechodzimy od punktu Q do P, a przez przekształcenie, będące iloczynem przekształcenia σ przez przekształcenie τ^{-1}, t. j. przez przekształcenie $\sigma\tau^{-1}$ przejdziemy od punktu Q do R.

Pomiędzy przekształceniami grupy niechaj będzie wogóle ∞^h przekształceń, pozostawiających bez zmiany punkt oznaczony P; tworzą one oczywiście podgrupę grupy danej. Pomnożywszy jedno przekształcenie τ, które przekształca punkt P na punkt Q, przez każde z tych przekształceń, otrzymujemy wszystkie przekształcenia, zmieniające punkt P na punkt Q. Z drugiej strony, jeżeli τ_1 jest innem przekształceniem, zmieniającem P na Q, to iloczyn $\tau^{-1}\tau_1$ również pozostawi punkt P bez zmiany, będzie więc jednem z powyższych ∞^h przekształceń, skąd wynika, że τ musi być iloczynem przekształcenia τ przez jedno z ∞^h przekształceń. Wreszcie dwa takie przekształcenia, zmieniające punkt P na punkt Q, muszą być zawsze różne od siebie, gdyż gdyby przyjąć, że są równe, otrzymalibyśmy łatwo to z dwóch przekształceń, które pozostawia punkt P niezmiennym. Istnieje zatem ∞^h przekształceń, zmieniających punkt P na punkt Q i nie więcej niż ∞^h, jeżeli tylko przyjmiemy, że istnieje jedno przekształcenie τ; wszystkie te przekształcenia są postaci $\tau\sigma$, gdzie σ jest jednem z którychkolwiek ∞^h przekształceń, nie zmieniających punktu P.

Rozpatrzmy teraz przekształcenie $\tau\sigma\tau^{-1}$. Pozostawia ono niezmiennym punkt Q; jeżeli zaś będziemy zmieniali σ, otrzymamy ∞^h przekształceń różnych. Gdyby bowiem dwa takie przekształcenia były równe, to łatwo byłoby stąd wyprowadzić równość dwóch odpowiednich przekształceń σ. Nadto, każde inne przekształcenie ϑ, które pozostawia bez zmiany punkt Q, jest tejże postaci, gdyż iloczyn $\tau^{-1}\vartheta\tau$ pozostawia bez zmiany punkt P, a więc jest jednem z przekształceń σ. A zatem:

Gdy dana grupa r-parametrowa zawiera ∞^h przekształceń, pozostawiających bez zmiany punkt P, to zawiera też ∞^h przekształceń, pozostawiających bez zmiany punkt Q, na który przekształca się punkt P, t. j. wszystkie punkty rozmaitości niezmienniczej, wytworzonej przez punkt P sposobem wyżej wskazanym, zezwalają na wszystkie te przekształcenia na same siebie, na jakie zezwala punkt P. Nadto, jeżeli przez σ oznaczymy przekształcenia, nie zmieniające punktu P, to przekształcenia, nie zmieniające punktu Q, będą postaci $\tau\sigma\tau^{-1}$, gdzie τ jest jednem z przekształceń, zmieniających punkt P na punkt Q. Innemi słowy, stosując nazwę, którą wprowadzimy niżej w § 8, możemy powiedzieć: podgrupa przekształceń, nie zmieniających punktu Q, jest **przekształconą** grupy przekształceń, nie zmieniających punktu P.

Biorąc pod uwagę wszystkie takie punkty jak P, które zezwalają na ∞^h przekształceń na same siebie, widzimy, że skutkiem przekształceń grupy punkty te mogą najwyżej przechodzić jedne na drugie, możemy więc powiedzieć:

Zbiór wszystkich punktów, zezwalających na ∞^h przekształceń na same siebie, jest niezmienniczy względem grupy.

Możemy okazać, że punkt, zezwalający na ∞^h przekształceń na samego siebie, zezwala dokładnie na h przekształceń nieskończonostkowych niezależnych grupy, t. j. musi istnieć h symbolów X, które są kombinacyami liniowemi niezależnemi o spółczynnikach stałych r przekształceń, tworzących dla grupy i takich, że ich spółczynniki ξ są tożsamościowo zerem dla spółczynników punktu rozważanego; albo innemi słowy: (Rozdz. I § 8) musi istnieć h przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, które dla tego punktu są rzędu wyższego, niż zero, t. j. przedstawiają punkt ten bez zmiany (stacyonarnym).

W samej rzeczy, napiszmy przekształcenia grupy kanonicznej w postaci zwykłej:

$$(1) \qquad x_i' = x_i + \frac{t}{1} \sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j x_i + \ldots;$$

jeżeli istnieje przekształcenie (nie będące tożsamościowem, któremu odpowiadałaby wartość $t=0$), które daje $x_i'=x_i$ i któremu odpowiadają wartości $\lambda_1', \ldots, \lambda_r, t'$ parametrów, wtedy dla spółrzędnych tego punktu będą tożsamościowo zerem wyrażenia:

$$(2) \qquad (\lambda_1' X_1 + \ldots + \lambda_r' X_r) x_i,$$

t. j. jeżeli oznaczymy, jak zwykle, przez $\xi_{j1}, \ldots, \xi_{jn}$ spółczynniki wyrażenia X_j, będziemy mieli równania:

$$(3) \qquad \lambda_1' \xi_{1i} + \ldots + \lambda_r' \xi_{ri} = 0, \ \ldots, \ \lambda_1' \xi_{1n} + \ldots + \lambda_r' \xi_{rn} = 0.$$

Jeżeli ustaliwszy wartości λ', będziemy zmieniali wielkości t nieskończenie wieloma sposobami, otrzymamy oczywiście, o ile spełniają się równania (3), nieskończenie wiele przekształceń, które podobnie jak to przekształcenie, którego istnienie założyliśmy, pozostawiają punkt bez zmiany.

Dajmy, że jest ∞^h przekształceń, pozostawiających punkt bez zmiany; stąd wypływa, że będzie h układów niezależnych wartości parametrów λ, dla których spełniają się równania (3) i nie więcej, niż h takich układów. Dlatego to charakterystyka macierzy wielkości ξ, wziętych dla tego punktu, będzie dokładnie równa $r-h$ i będziemy mieli h przekształceń nieskończonostkowych niezależnych (2), na jakie ten punkt zezwala, i nie więcej, niż h.

Ponieważ z wzorów poprzedzających wypływa jasno, że każdy punkt, zezwalający na h przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, zezwala na ∞^h przekształceń na samego siebie, przeto:

Ogół punktów, zezwalających na h i nie więcej niż na h przekształceń nieskończonostkowych niezależnych z pomiędzy przekształ-

ceń, wytwarzających grupę, tworzy rozmaitość niezmienniczą.

Stąd można wywnioskować twierdzenie, udowodnione przez nas analitycznie na końcu § 4-go, mianowicie, że przyrównawszy do zera wszystkie wyznaczniki pewnego rzędu macierzy wielkości ξ, otrzymujemy układy równań niezmienniczych względem grupy.

Istotnie, gdy przyrównamy do zera wszystkie wyznaczniki rzędu $r-h+1$ macierzy wielkości ξ (gdzie h jest liczbą jakąkolwiek mniejszą albo równą r) i przyjmiemy, jak zwykle, że te równania są zgodne, otrzymamy rozmaitość, której punkty zezwalają przynajmniej na h przekształceń nieskończonostkowych niezależnych. Ponieważ w ogólności możemy wyobrazić sobie, że niektóre z nich przywodzą do zera wyznaczniki rzędu $r-h+1$, nie przywodząc do zera wyznaczników rzędu $r-h$, inne zamieniają na zero wszystkie wyznaczniki rzędu $r-h$, inne znów—wszystkie wyznaczniki rzędu $r-h-1$ i t. d, wynikie stąd, że ogół wszystkich rzeczonych punktów dzieli się na różne części, tak że punkty, należące do części pierwszej, zezwalają dokładnie na h przekształceń nieskończonostkowych, punkty, należące do drugiej na $h+1$ przekształceń i t d. Na mocy ostatniego twierdzenia, każda z tych części stanowi w sobie rozmaitość niezmienniczą, a więc i zbiór ich będzie też niezmienniczym.

Z rozważań, poczynionych w tym paragrafie, posługując się pojęciem rzędu przekształcenia nieskończonostkowego (patrz Rozdz. I § 8), możemy powiedzieć:

„Jeżeli w punkcie x^0 macierz wielkości ξ ma charakterystykę $r-h$, to istnieć będzie dokładnie h przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, należących do grupy i będących w punkcie x^0 rzędu wyższego od zera, t. j pozostawiających bez zmiany punkt ten, nie przyporządkowując doń żadnego kierunku. Lecz przekształceń nieskończonostkowych niezależ-

nych grupy jest r, przeto istnieć musi $r-h$ innych przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, które w tym punkcie są rzędu zero, t. j. które dla punktu tego wyznaczają dokładnie $r-h$ kierunków niezależnych.

Załóżmy teraz, że macierz wielkości ξ ma charakterystykę $r-h$, wszakże nie, jak wyżej, w punkcie szczególnym x^0, lecz dla jakiegokolwiek punktu x, co znaczy, że przekształcenia $X_1, \ldots, X_r$ nie są bezwzględnie niezależne, tylko jest $r-h$ pomiędzy niemi niezależnych, pozostałe zaś h wyrażają się liniowo przez pierwsze ze spółczynnikami, będącemi funkcyami zmiennych x. Przyjmijmy dla ustalenia myśli, że przekształcenia $X_1, \ldots, X_{r-h}$ są bezwzględnie niezależne (patrz Rozdz. I, § 8), pozostałe zaś wyrażają się wzorami:

$$(4) \qquad X_{r-h+s} = \chi_{s1}(x)\, X_1 + \ldots + \chi_{s,r-h}(x)\, X_{r-h},$$

gdzie spółczynniki χ są funkcyami zmiennych x. Weźmy punkt x^0, dla którego macierz spółczynników pierwszych $r-h$ przekształceń X (t. j. tych, które są bezwzględnie niezależnemi) nie znika; punkt taki dla krótkości nazywać będziemy punktem położenia ogólnego. Dla tego punktu macierz zupełna wielkości ξ będzie miała charakterystykę dokładnie równą $r-h$; możemy więc tu zastosować twierdzenie poprzedzające i powiedzieć: Jeżeli pomiędzy r przekształceniami nieskończonostkowemi grupy r-parametrowej jest $r-h$ i nie więcej przekształceń bezwzględnie niezależnych, to tyleż będzie przekształceń, które dla punktu położenia ogólnego będą rzędu zero, zaś h przekształceń będzie rzędu wyższego od zera.

Można też łatwo pokazać, które przekształcenia są pierwszemi, które drugiemi, gdyż jest widocznem, że w punkcie $x=x^0$ nie może znikać żadne z przekształceń $X_1, \ldots, X_r$ i także ich kombinacya liniowa o spółczynnikach stałych, gdyż w przeciwnym razie znikałaby w punkcie $x=x^0$ macierz spółczynników

pierwszych $r-h$ przekształceń X, co sprzeciwia się założeniu, że punkt x^0 jest punktem położenia ogólnego. A zatem przekształcenia $X_1, \ldots, X_{r-h}$ są przekształceniami rzędu zero. Z drugiej strony, jeżeli utworzymy h kombinacyj o spółczynnikach stałych:

$$(5) \qquad X_{r-h+s} - \chi_{s1}(x^0) X_1 - \ldots - X_{sr-h}(x^0) \chi_{r-h},$$

które powstają sposobem widocznym z wzorów (4) przez podstawienie wielkości x^0 zamiast x w argumentach funkcyj χ, otrzymamy przekształcenia nieskończonostkowe, należące do grupy, wzajemnie niezależne (bo związek liniowy o spółczynnikach stałych, pomiędzy niemi zachodzący, byłby z konieczności związkiem pomiędzy wszystkiemi przekształceniami $X_1, \ldots, X_r$, a to sprzeciwia się założeniu) i znikające tożsamościowo dla $x=x^0$ na mocy związków (4) i które dlatego są rzędu wyższego od zera. Tym sposobem zbudowaliśmy h przekształceń nieskończonostkowych rzędu wyższego, niż zero, o których mowa w twierdzeniu poprzedzającem. Każde przekształcenie nieskończonostkowe grupy i rzędu wyższego niż zero w punkcie $x=x^0$ jest kombinacyą o spółczynnikach stałych przekształceń (5).

Przekształcenia nieskończonostkowe (5) pozostawiają bez zmiany punkt x^0 (patrz Rozdz. I § 8); i dlatego to przekształcenia możnaby nazwać przekształceniami nieskończończonostkowemi stateczności grupy danej w punkcie x^0.

Jest widocznem, że przekształcenia te nadają się do wytworzenia grupy o h parametrach, gdyż jeżeli z dwóch takich przekształceń utworzymy nawias, otrzymamy przekształcenie nieskończonostkowe rzędu wyższego niż zero (patrz Rozdz. I § 8, gdzie mowa o twierdzeniu, dotyczącem wielkości rzędu nawiasu względem wielkości rzędów jego składowych); z drugiej zaś strony, ponieważ wszystkie przekształcenia $X_1, \ldots, X_r$ tworzą już grupę, przeto tenże nawias powinien dać się wyrazić liniowo

przez te przekształcenia (patrz drugie twierdzenie Liego w § 13 Rozdz I), a więc przez te z pomiędzy przekształceń $X_1, \ldots, X_r$, które są rzędu wyższego niż zero, t. j. właśnie przez przekształcenia (5). Grupa, utworzona z nich, jest podgrupą o h parametrach grupy danej; jest to mianowicie podgrupa wyżej rozważana, złożona z ∞^h przekształceń, pozostawiająca niezmiennym punkt $P=(x^0)$; możemy ją nazwać podgrupą stateczności punktu x^0. Mamy tedy twierdzenie: Jeżeli r przekształceń nieskończonostkowych grupy jest bezwzględnie niezależnych (t. j. jeżeli $h=0$), wtedy podgrupa stateczności punktu położenia ogólnego sprowadza się do przekształcenia tożsamościowego. Nadto: Podgrupa stateczności punktu jest przekształconą podgrupy innej grupy (p. wyżej).

---

§ 6.

Niezmienniczość układu zupełnego równań o pochodnych cząstkowych, liniowych rzędu 1-go, jednorodnych, rozważana względem grupy danej.

Niechaj będzie układ zupełny równań, rozważanych w § 10 Rozdz. I, które oznaczmy przez:

$$(1) \qquad Y_1 F = 0, \ldots, Y_q F = 0$$

i inny układ analogiczny, napisany w zmiennych x':

$$(2) \qquad Y_1' F = 0, \ldots, Y_q' F = 0.$$

Wiemy (Rozdz. I § 10), że układ pozostaje zupełnym, jeżeli zamiast równań jego weźmiemy ich kombinacye liniowe niezależne i jest rzeczą jasną, że wtedy całki wspólne układu pozostają bez zmiany.

Dajmy, że wykonaliśmy przekształcenie zmiennych x na zmienne x' w ten sposób, że układ (1) został przez te zmienne wyrażony, i niechaj każde z równań, tą drogą (1) otrzymanych, będzie kombinacyą liniową równań (2), tak że równania (1) odpowiadać będą q kombinacyom liniowym niezależnym równań (2). Jeżeli to ma miejsce, wtedy mówimy, że układy (1) i (2) są r ó w n o w a ż n e, i wtedy oczywiście każda całka równań (1), przekształcona przez wprowadzenie zmiennych x', staje się całką równań (2), i odwrotnie. Można tedy tę własność przyjąć za podstawę definicyi równoważności. Jeżeli każde z równań układu (2) jest tylko kombinacyą liniową równań układu (1), gdy w tym ostatnim zmienne x zmienimy na zmienne x', wtedy układ (1) jest r ó w n o w a ż n y s a m e m u s o b i e, i mówimy wtedy, że u k ł a d (1) j e s t n i e z m i e n n i c z y w z g l ę d e m d a n e g o p r z e k s z t a ł c e n i a

Poszukajmy warunków na to, aby układ, taki jak (1), był niezmienniczym względem danego przekształcenia, albo też względem wszystkich przekształceń grupy o jednym parametrze.

Niechaj przez przekształcenie:

$$x_i' = f_i(x), \tag{3}$$

układ (1) przekształca się sam na siebie, wtedy każda całka wspólna równań (1) powinna przez to przekształcenie przekształcać się sama na siebie; odwrotnie, jeżeli każda całka układu (1) przekształca się za pomocą przekształcenia (3) na całkę tegoż układu (napisaną naturalnie w zmiennych x'), wtedy, ponieważ układ przekształcony z układu (1) ma jako całki przekształcone całki tego układu, to układ przekształcony z układu (1) będzie równoważny układowi (1), napisanemu w zmiennych x', t. j. będzie równoważny samemu sobie. A zatem:

W a r u n k i e m k o n i e c z n y m i d o s t a t e c z n y m n a t o, a b y u k ł a d (1) b y ł n i e z m i e n n i c z y w z g l ę d e m p r z e k s z t a ł c e n i a (3) j e s t b y c a ł k ą t e g o u k ł a d u b y ł o $\varphi(f(x))$, j e ż e l i j e s t n i ą $\varphi(x)$ [1].

[1]) Dla wyjaśnienia dodajemy: jeżeli układ (1) napiszemy w zmiennych x', jedną z jego całek będzie $\varphi(x')$; zastosujmy do niej przekształcenie (3), wte-

Niechaj teraz będzie grupa, wytworzona z przekształcenia nieskończonostkowego X; poszukajmy warunku koniecznego i dostatecznego na to, aby układ (1) był niezmienniczy względem wszystkich przekształceń tej grupy.

Dla przekształceń w otoczeniu przekształcenia tożsamościowego mamy, jak wiadomo, wzory:

$$(4) \qquad \varphi(x') = \varphi(x) + \frac{t}{1} X\varphi(x) + \dots .$$

gdzie $\varphi(x)$ jest funkcyą dowolną, za którą w przypadku naszym można wziąć jednę z całek układu (1). Uwzględniając twierdzenie poprzedzające, widzimy, że dla niezmienniczości układu (1) potrzeba, by całka $\varphi(x')$, wyrażona w zmiennych x, t. j. wyrażenie po drugiej stronie wzoru (4) było całką układu (1). Ponieważ jest nią $\varphi(x)$, będzie więc całką i $\varphi(x') - \varphi(x)$ oraz $\frac{\varphi(x') - \varphi(x)}{t}$, t.j.:

$$X\varphi(x) + \frac{t}{2!} X^2\varphi(x) + \dots$$

dla jakiejkolwiek wartości t, a więc i dla $t=0$. Wynika stąd, że i $X\varphi(x)$ winno być całką układu (1). Z drugiej strony, jeżeli $X\varphi(x)$ jest całką układu (1), wtedy oznaczywszy przez $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ wszystkie $n - q$ całek niezależnych układu (1), wniesiemy na zasadzie znanego twierdzenia (Rozdz. I § 10), że $X\varphi(x)$ powinno być funkcyą całek $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$, a więc np. równą $\psi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q})$. Tworząc wtedy $X^2\varphi(x)$, t. j. $X\psi$, czyli:

$$X\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_1} X\varphi_1 + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi_{n-q}} X\varphi_{n-q},$$

i zwracając uwagę na to, że każdy z wyrazów strony drugiej na

---

dy otrzymamy $\varphi(f(x))$ i to powinno być całką układu (1) napisanego w zmiennych x.

mocy założeń naszych jest funkcyą wyrażeń φ, znajdziemy, że i $X^2\varphi(x)$ jest funkcyą tych wyrażeń, t. j całką układu (1). Podobnież całkami są $X^3\varphi(x), \ldots$, t. j. wszystkie wyrazy strony drugiej, a więc i cała strona druga, t. j. $\varphi(x')$. A zatem:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby układ (1) był niezmienniczym dla wszystkich przekształceń grupy, wytworzonej z przekształcenia X, jest, by działanie X, wykonane na każdej całce układu (1), dało znowu całkę tego układu

Warunkowi temu można nadać postać, nie wymagającą uprzedniej znajomości całek układu (1).

Ponieważ $X\varphi$ jest całką układu (1), przeto $Y_k X\varphi = 0$, lecz z równania $Y_k\varphi = 0$ mamy $XY_k\varphi$, a zatem $(Y_k X)\varphi = 0$. Jeżeli rozważamy przeto układ równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, liniowych, jednorodnych, rzędu pierwszego:

$$(5) \qquad (Y_k X) F = 0, \qquad (k=1, \ldots, q).$$

to układowi temu czynią zadość całki układu danego, a więc równania tego układu, na mocy powyższego, muszą być kombinacyami liniowemi równań układu (1). Z drugiej strony, jeżeli przypadek ten zachodzi, wtedy każda całka φ układu (1) jest także całką układu (5), a ponieważ wtedy $XY_k\varphi = 0$, będzie także $Y_k X\varphi = 0$, t. j. $X\varphi$ jest całką układu (1), a stąd na podstawie twierdzenia poprzedzającego, układ (1) jest układem niezmienniczym względem przekształceń grupy. A zatem:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym niezmienniczości układu (1) względem wszystkich przekształceń grupy, wytworzonej z przekształcenia X, jest, by wyrażenia $Y_k X$ dały się przedstawić liniowo przez wyrażenia Y.

Można wykazać, że układ (1), niezmienniczy względem grupy X_1 oraz względem innej gru-

py X_2 jest także niezmienniczym względem grupy $(X_1 X_2)$.

W samej rzeczy, na podstawie tożsamości Jacobi'ego (Rozdz. I § 8), mamy:

$$(6) \qquad ((Y_k X_1) X_2) + ((X_1 X_2) Y_k) + ((X_2 Y_k) X_1) = 0,$$

lecz:

$$(Y_k X_1) = \sum_{s=1}^{q} \lambda_{ks} Y_s,$$

przeto:

$$((Y_k X_1) X_2) = \left(\sum_{s=1}^{q} \lambda_{ks} Y_s, X_2\right) = \sum_{s=1}^{q} (\lambda_{ks} Y_s, X_2)$$

$$= \sum_{s=1}^{q} \lambda_{ks} (Y_s X_2) - \sum_{s=1}^{q} X_2 \lambda_{ks} . Y_s.$$

Na podstawie założeń, każdy z wyrazów sumy pierwszej strony ostatniej redukuje się do funkcyi liniowej wyrażeń Y. przeto i cała strona ta będzie takąż funkcyą tych wyrażeń. Wykonywając podobne działanie na ostatnim wyrazie wzoru (6) i sprowadzając go też do funkcyi liniowej wyrażeń Y, spostrzeżemy wreszcie, że wyraz $((X_1 X_2) Y_k)$ jest, na mocy założeń naszych, funkcyą liniową wyrażeń Y, i dlatego też układ (1) jest niezmienniczym względem grupy $(X_1 X_2)$.

Pokażemy wreszcie, że jeżeli układ (1) jest niezmienniczy względem grup, wytworzonych odpowiednio z przekształceń $X_1, \ldots, X_r$, to będzie też niezmienniczym względem grupy, wytworzonej z przekształcenia $c_1 X_1 + \ldots + c_r X_r$, gdzie spółczynniki c są wielkościami stałemi.

Jeżeli bowiem obliczymy nawiasy:

$$(Y_k, c_1 X_1 + \ldots + c_r X_r) = c_1 (Y_k X_1) + \ldots + c_r (Y_k X_r)$$

i zauważymy, że na zasadzie założeń naszych strona druga jest funkcyą liniową wyrażeń Y, przekonamy się o prawdzie powyższego twierdzenia.

Zauważmy jeszcze, że ponieważ wyrażenia Y stanowią układ zupełny, że więc wyrażenia $(Y_k Y_j)$ są zawsze kombinacyami liniowemi wyrażeń Y, to układ (1) jest zawsze niezmienniczym względem wszystkich grup, wytworzonych z każdego z przekształceń Y, a więc jest także kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych tychże wyrażeń.

---

§ 7.

Niezmienniczość względem grupy układu przekształceń nieskończonostkowych. Układ przekształceń nieskończonostkowych, które należą do grupy r-parametrowej, jest niezmienniczy względem tej grupy.

Niechaj będzie układ q przekształceń nieskończonostkowych:

$$(1) \qquad Y_1, \ldots, Y_q,$$

i niechaj spółczynnikami będą odpowiednio:

$$\eta_{11}, \ldots, \eta_{1n}; \ldots\ldots; \eta_{q1}, \ldots, \eta_{qn}.$$

Jeżeli wykonamy przekształcenie zmiennych x na zmienne x', wtedy wyrażenia Y przybiorą inną postać. Jeżeli każde z przekształconych wyrażeń Y jest kombinacyą liniową jednorodną o spółczynnikach stałych dawnych wyrażeń Y, napisanych w zmiennych x', wtedy mówimy, że układ (1) jest niezmienniczy względem danego przekształcenia. Jeżeli

to ma miejsce, wtedy także kombinacya liniowa o spółczynnikach stałych wyrażeń (1), po wykonaniu danego przekształcenia, sprowadza się do kombinacyi liniowej o spółczynnikach stałych tychże wyrażeń (1), gdy w nich uskutecznimy zamianę formalną zmiennych x na zmienne x'. Będziemy wtedy mieli związek postaci:

$$\sum_{s=1}^{q} c_s Y_s = \sum_{s=1}^{q} c_s' Y_s' , \tag{2}$$

gdzie przez Y' oznaczone są wyrażenia Y, napisane w zmiennych x' zamiast w zmiennych x: Związki te powinny zachodzić tożsamościowo na mocy danego przekształcenia; a gdy damy dowolnie wielkości c, wtedy wielkości c' powinny być funkcyami jedynie wielkości c i spółczynników przekształcenia, t. j. powinny zmieniać się tylko wraz z wielkościami c, jeżeli przekształcenie pozostaje niezmienionem.

Możemy wykazać, że wielkości c' są funkcyami liniowemi o spółczynnikach stałych wielkości c. W samej rzeczy, na mocy założenia, każde wyrażenie Y_s jest kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych wyrażeń Y', t. j.:

$$Y_s = \sum_{j=1}^{q} \varrho_{js} Y_j' ,$$

gdzie spółczynniki ϱ są stałe, t. j niezależne od x i od x'; mnożąc ostatnie równanie przez c_s, sumując względem s i porównywając z równaniem (2), znajdujemy:

$$c_j' = \sum_{s=1}^{q} \varrho_{js} c_s . \tag{3}$$

Możemy nadto zauważyć, że można zawsze wybrać, przynajmniej jednym sposobem, spółczynniki c tak, aby przekształ-

cenie nieskończonostkowe $\sum_{s=1}^{q} c_s Y_s$ pozostało niezmiennem przez przekształcenia, t. j. tak, aby spółczynniki c' były proporcyonalne do spółczynników c. W tym celu dość przyjąć w równaniach (3), że każde c_s' równa się c_s, pomnożonemu przez pewien czynnik ϱ, i z tak otrzymanego układu równań liniowych względem wielkości c, wyznaczyć układ wartości c.

Wyobraźmy sobie teraz wszystkie przekształcenia grupy jednoparametrowej, wytworzonej z przekształcenia nieskończonostkowego X, którego spółczynnikami niechaj będą $\xi_1, \ldots, \xi_n$, i zbadajmy, czy i kiedy spełnia się związek (2) na mocy wszystkich przekształceń grupy. Spółczynniki c' mogą naturalnie zmieniać się w ogólności od jednego przekształcenia do drugiego, gdyż, jak powiedziano wyżej, zależą one w ogólności, prócz od spółczynników c, także od parametrów przekształcenia.

Dowiedziemy najprzód wzoru:

$$Y_j' = Y_j + \frac{t}{1}(XY_j) + \ldots . \tag{4}$$

który utrzymuje się, gdy wielkości x i x' są połączone zwykłemi związkami:

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1} Xx_i + \ldots$$

W samej rzeczy:

$$Y_s' = \sum_{s=1}^{n} Y_j' x_s \frac{\partial}{\partial x_s};$$

lecz:

$$x_s = x_s' - \frac{t}{1} X' x_s' + \ldots = x_s' - \frac{t}{1} \xi_s' + \ldots$$

gdzie X' i ξ' oznaczają to samo, co X i ξ, wyrażone w zmiennych x'. Otrzymujemy stąd:

$$Y_j' x_s = Y_j' x_s' - \frac{t}{1} Y_j' \xi_s + \ldots = \eta_{js}' - \frac{t}{1} Y_j' \xi_s' + \ldots$$

gdzie η' są spółczynnikami η, napisanemi w zmiennych x'. Rozwijając za pomocą znanych wzorów wyrażenia η_{js}' i $Y_j' \xi_s'$, t. j. kładąc:

$$\eta_{js}' = \eta_{js} + \frac{t}{1} X\eta_{js} + \ldots,$$

$$Y_j' \xi_s' = Y_j \xi_s + \frac{t}{1} XY_j \xi_s + \ldots,$$

podstawiając te wyrażenia i zbierając wyrazy, zawierające pierwszą potęgę zmiennej t, otrzymujemy wzór (4).

Jeżeli tedy dla jakiejkolwiek wartości t, wyrażenie Y_j' ma być kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych wyrażeń Y_r, to na podstawie wzoru (4) potrzeba, by nawias (XY_j) był kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych wyrażeń Y_r, t. j. aby był równy $\sum_{r=1}^{q} g_{jr} Y_r$. Z drugiej strony, warunek ten jest i konieczny; możemy mianowicie dowieść, że gdy ten warunek się spełnia, wtedy można wyznaczyć takie wielkości ϱ, zależne od t i niezależne od zmiennych x, aby wyrażenie:

$$(5) \qquad \sum_{j=1}^{q} \varrho_{js} Y_j'$$

było niezależnem od t, gdy w niem zamiast zmiennych x' napiszemy wyrażenia ich w zmiennych x i t, oraz, że dla $t=0$ wszystkie wielkości ϱ znikają, prócz wielkości ϱ_{ss}, która staje się równą jedności. Jeżeli dowiedziemy tego, wtedy twierdzenie nasze będzie udowodnione, gdyż wtedy w rzeczy samej wyrażenie (5) staje się równem temu, co otrzymujemy z niego przy $t=0$. Lecz dla $t=0$ staje się ono tożsamościowo równem Y_s, będziemy zatem mieli:

$$(6) \qquad Y_s = \sum_{j=1}^{q} \varrho_{js}\, Y_j' .$$

Pochodną wyrażenia (5) względem zmiennej t jest:

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{q} \frac{d\varrho_{js}}{dt}\, Y_s' + \sum_{s=1}^{q} \varrho_{js} \frac{dY_j'}{dt} .$$

Należy wyjaśnić, co oznacza tu wyrażenie $\frac{dY_j'}{dt}$, gdzie Y' jest symbolem. Rozumieć je należy w ten sposób: w wyrażenia Y' wyobrażamy sobie wprowadzone zmienne x, t i pochodne względem x, tak że spółczynniki będą funkcyami tych zmiennych; następnie wykonywamy wskazane przez symbol ten działanie na pewnej funkcyi zmiennych x, wreszcie zamiast spółczynników wprowadzamy pochodne ich względem zmiennej t. Z wzoru (4) znajdziemy szukaną pochodną wyrażenia Y_j' względem t w postaci szeregu. Rozważmy na chwilę przekształcenie o parametrze $t+t_1$ i oznaczmy przez x'' zmienne, na które zmieniają się wtedy zmienne x, przez Y'' oznaczmy wyrażenia Y_s napisane w zmiennych x''. Z wzoru (4) otrzymamy:

$$(8) \qquad Y_j'' = Y_j + \frac{t+t_1}{1} (XY_j) + \ldots$$

Szukając po stronie drugiej tego wzoru spółczynnika pierwszej potęgi wielkości t_1, znajdziemy właśnie pochodną względem t, otrzymaną z drugiej strony wzoru (4); jeżeli więc potrafimy uporządkować stronę drugą równania (8) według potęg rosnących wielkości t_1, rozwiążemy zadanie nasze. Lecz wiemy, że przekształcenie o parametrze $t + t_1$ odpowiada iloczynowi dwóch przekształceń, jednego o parametrze t, drugiego o parametrze t_1, oraz że przekształcenie o parametrze t_1 jest właśnie tem przekształceniem, które od zmiennych x' przeprowadza do zmiennych x''. Możemy więc napisać (zawsze na podstawie wzoru (4)):

$$Y_j'' = Y_j' + \frac{t_1}{1}(X'Y_j') + \ldots$$

i tym sposobem otrzymujemy rozwinięcie wyrażenia Y_j'' według potęg wielkości t_1; stąd wnosimy, że szukaną pochodną jest:

$$\frac{dY_j'}{dt} = (X'Y_j'), \tag{9}$$

a na mocy założenia strona druga równości (9) będzie kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych wyrażeń Y', t. j. będzie:

$$\frac{dY_j'}{dt} = \sum_{\nu=1}^{q} g_{j\nu} Y_\nu'. \tag{10}$$

Podstawiając to wyrażenie w wyrażeniu (7) i odpowiednio zbierając wyrazy, znajdziemy wreszcie, że pochodna wyrażenia (5) względem t jest postaci:

$$\sum_{\nu=1}^{q} \left(\frac{d\varrho_{\nu s}}{dt} + \sum_{s=1}^{q} g_{j\nu} \varrho_{js} \right) Y_\nu' \tag{11}$$

i że będzie ona zerem, gdy spełnione będą warunki:

$$\frac{d\varrho_{\nu s}}{dt} + \sum_{j=1}^{q} g_{j\nu} \varrho_{js} = 0. \tag{12}$$

Warunki te tworzą układ q równań różniczkowych, którym winny czynić zadość funkcye $\varrho_{1s}, \ldots, \varrho_{qs}$ w liczbie q zmiennej t. Możemy równania te rozwiązać zawsze przy warunku, aby przy $t=0$ wielkości ϱ stawały się zerem, prócz wielkości ϱ_{ss}, które ma stawać się wtedy jednością. Udowodniliśmy zatem twierdzenie:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby układ przekształceń nieskończonostkowych $Y_1, \ldots, Y_q$ był niezmienniczym względem grupy jednoparametrowej, wytworzonej z przekształcenia nieskończonostkowego X, jest, by nawiasy (XY_j) były kombinacyami liniowemi o spółczynnikach stałych wyrażeń Y.

Z tego twierdzenia wynikają niektóre wnioski, łatwe do udowodnienia:

Jeżeli układ $Y_1, \ldots, Y_q$ jest niezmienniczy względem grup, określonych przez przekształcenia $X_1, X_2, \ldots$, to będzie też niezmienniczym i dla wszystkich grup, określonych przez jakąkolwiek kombinacyę liniową o spółczynnikach stałych przekształceń X.

Jeżeli układ $Y_1, \ldots, Y_q$ jest niezmienniczy dla grup, wytworzonych z przekształceń X_1, X_2, to będzie także niezmienniczym dla grupy, wytworzonej z przekształcenia $(X_1 X_2)$.

Dowody tych twierdzeń są analogiczne do dowodów, podanych już kilkakrotnie w podobnych przypadkach, i dlatego je pomijamy, nadmieniając tylko, że dowód drugiego twierdzenia uskutecznia się przy pomocy tożsamości Jacobi'ego.

Dodamy jeszcze uwagę o wzorze (4), w którym nie obliczaliśmy wyżej wyrazów dalszych. Z dowodzeń przytoczonych wypływa bezpośrednio własność tych wyrazów, mianowicie, że gdy (XY_j) jest kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych wyrażeń Y, to i te wyrazy muszą być takiemiż kombinacyami. Jest to jasnem, dlatego, że wtedy na mocy dowiedzionego twierdzenia, wyrażenie Y_j' dla każdej wartości t musi być kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych wyrażeń Y. Możemy nadto okazać, że gdy (XY) jest zerem, to i rzeczone wyrazy będą zerem. Lecz o tem będzie mowa w § następnym.

Dajmy teraz, że przekształcenia Y są przekształceniami X, t. j. że mamy układ przekształceń nieskończonostkowych $X_1, \ldots, X_r$,

mający być niezmienniczym dla wszystkich przekształceń grupy, wytworzonej przez jakąkolwiek kombinacyę liniową o spółczynnikach stałych przekształceń X, np. przez kombinacyę $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r$. Stosując wtedy twierdzenie poprzedzające, znajdziemy bezpośrednio, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to jest, by nawiasy $(X_i X_k)$ dały się wyrazić liniowo i przy pomocy spółczynników stałych przez przekształcenia X.

Otóż wiemy, że to samo stanowi warunek konieczny i dostateczny na to, aby r przekształceń nieskończonostkowych mogło wytworzyć grupę o r parametrach istotnych (p. Rozdz. I § 14). Wyprowadzamy stąd przedewszystkiem inną postać drugiego twierdzenia zasadniczego teoryi grup, a następnie i to, że przekształcenia nieskończonostkowe, należące do grupy o r parametrach, mają tę własność zasadniczą, że tworzą układ niezmienniczy względem jakiegokolwiek przekształcenia tej grupy.

Czy i kiedy każde z przekształceń nieskończonostkowych grupy samo przez się jest niezmienniczem dla grupy? Na pytanie to odpowiemy w § następnym.

---

§ 8.

Niezmienniczość jednego przekształcenia lub grupy względem przekształcenia lub grupy, czyli przemienność dwóch przekształceń lub dwóch grup. Przekształcenia nieskończonostkowe i podgrupy wyróżnione lub niezmiennicze dla grupy danej.

Niechaj będą dwa przekształcenia S, T, dane przez wzory:

(1) $x_i' = f_i(x)$, (2) $y_i' = \varphi_i(y)$;

i niechaj z drugiego będzie $y_i = \psi_i(y')$. Te ostatnie wzory na-

piszmy dwoma różnemi sposobami przy pomocy dwóch różnych układów zmiennych, mianowicie napiszmy je w postaci:

(3) $x_i = \psi_i(z)$ i (4) $z_i' = \varphi_i(x')$.

Następnie we wzorach przekształcenia S zamiast zmiennych x i x' podstawmy ich wartości, otrzymane odpowiednio z równań (3) i (4); będziemy mieli wtedy przekształcenie:

(5) $$z_i' = \varphi_i[f(\psi(z))].$$

To nowe przekształcenie nazywamy przekształconą przekształcenia (1) przy pomocy przekształcenia (2) i mówimy, że przekształcenie (1) jest niezmienniczem względem przekształcenia (2), jeżeli wzory (5) wyrażają te same związki pomiędzy zmiennemi z' i z, co wzory (1) pomiędzy zmiennemi x' i x. Łatwo poznać, że przekształcenie (5) powstaje z przekształceń danych jako iloczyn postaci:

(6) $$TST^{-1},$$

gdzie, jak zwykle, wykonywamy przekształcenie od ręki prawej ku lewej. Dowodzi się tego sposobem bardzo prostym, dość bowiem zbadać eliminacye, jakie uskutecznić należy pomiędzy wzorami (1), (3), (4), aby dojść do wzoru (5). Po wyeliminowaniu wielkości x_i z równań (1), (3), mamy przekształcenie pomiędzy wielkościami x' i z, które równa się oczywiście ST^{-1}; eliminując następnie wielkości x' pomiędzy tak otrzymanemi wzorami a wzorem (4), dochodzimy do przekształcenia (6).

Niechaj teraz przekształcenie (6) równa się przekształceniu S, t. j. $TST^{-1} = S$, wtedy będzie:

(7) $$TS = ST,$$

skąd:

(8) $$T = STS^{-1}$$

Wzory te wykazują, że:

1) Kiedy jedno przekształcenie jest niezmiennicze względem drugiego, to iloczyn ich jest niezależny od porządku czynników, i odwrotnie; wtedy te dwa przekształcenia są, jak mówimy, przemiennemi

2) Kiedy jedno przekształcenie jest niezmiennicze względem drugiego, wtedy odwrotnie i drugie jest niezmiennicze względem pierwszego.

Niechaj G będzie grupą, T jakimkolwiek przekształceniem. Przekształcić grupę G przy pomocy przekształcenia T znaczy utworzyć zbiór wszystkich przekształconych za pośrednictwem T pojedyńczych przekształceń, należących do grupy G. Łatwo widzieć, że:

Przekształcając grupę G przy pomocy przekształcenia T, otrzymujemy znów grupę.

W samej rzeczy, jeżeli S, S_1 są dwa przekształcenia, należące do grupy G, ich przekształconemi będą odpowiednio TST^{-1}, TS_1T^{-1}, a iloczyn tych dwóch:

$$TST^{-1}TS_1T^{-1} = TSS_1T^{-1} = T(SS_1)TT^{-1},$$

t. j. przekształcona iloczynu dwóch danych przekształceń, a ponieważ ten iloczyn jest zawarty w grupie G, przeto przekształcona zawierać się będzie pomiędzy przekształceniami, poprzednio otrzymanemi.

Grupa, otrzymana z przekształcenia grupy G, będzie oczywiście tąż samą grupą G, jeżeli przekształcenie T należy do grupy G; będzie zaś wogóle grupą różną od G w przypadku przeciwnym, co zresztą nie wyłącza możliwości, że nawet w przypadku, gdy przekształcenie T do grupy G nie należy, grupa przekształcona może być i grupą G.

Jeżeli przyjmiemy, że G jest podgrupą innej grupy H i że przekształcenie T należy do grupy H, to za pomocą podobnego

rozumowania stwierdzimy, że przekształcona grupy G jest inną podgrupą grupy H.

Niechaj będą dane dwa przekształcenia nieskończonostkowe X, Y. Według zasad, wyłożonych w § poprzedzającym, powiemy, że Y jest przekształceniem niezmienniczem względem wszystkich przekształceń grupy, wytworzonej z przekształcenia X, jeżeli napisawszy y w zmiennych x', połączonych ze zmiennemi x związkami, tym przekształceniom odpowiadającym, będziemy mieli $Y' = \varrho Y$, gdzie ϱ jest wielkością, zależną tylko od t, t. j. parametru przekształcenia i równą 1 dla $t=0$; stąd wypływa, jak wiemy, że:

$$(9) \qquad (XY) = cY.$$

Ważny przypadek szczególny mamy wtedy, gdy ten związek pomiędzy dwoma przekształceniami X i Y jest wzajemny, t. j. gdy i przekształcenie X jest niezmiennicze względem wszystkich przekształceń, wytworzonych z przekształceń Y. Możemy wykazać, że w przypadku tej wzajemności wielkość ϱ jest niezależną od t, ma zatem wartość równą 1. W samej rzeczy wiemy (§ poprz.), że wielkość ϱ jest określona równaniem różniczkowem:

$$\frac{d\varrho}{dt} + c\varrho = 0;$$

otóż gdy $\varrho=1$, równanie to daje $c=0$, a wtedy związek (9) sprowadza się do postaci:

$$(10) \qquad (XY) = 0,$$

wykazującej, że związek pomiędzy przekształceniami X i Y jest wzajemny, gdyż stronę drugą tego związku można uważać jako przypadek szczególny funkcyi liniowej wyrażeń X lub jako przypadek szczególny funkcyi liniowej wyrażeń Y. Jeżeli następnie przyjmiemy, że zachodzi związek (10), wtedy będzie $c=0$, stąd

$\frac{d\varrho}{dt} = 0$, a więc wielkość c jest niezależna od t, a mianowicie równa 1, gdyż ma wartość 1 dla $t=0$. Kiedy równanie (10) spełnia się, mówić będziemy, że przekształcenia X, Y są wzajemnie przemienne. Nazwa ta znajduje usprawiedliwienie też w tem, że wtedy $XY = YX$.

Możemy, na podstawie powyższego, wypowiedzieć następujące ważne twierdzenie:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby każde przekształcenie skończone grupy X pozostawiało bez zmiany przekształcenie nieskończonostkowe Y, t. j. prowadziło do prostego związku $Y' = Y$, jest, by nawias (XY) był zerem.

Należy zauważyć, że gdy $(XY)=0$, t. j. $Y'=Y$, wtedy spółczynniki przy t, t^2, ... it. d. we wzorach (4) są zerami, a więc w tem założeniu Y' musi być równem Y dla wszelkiej wartości t.

Postawmy następujące zagadnienie: Niechaj będzie r przekształceń nieskończonostkowych, nadających się do wytworzenia grupy; w jaki sposób wyznaczyć najogólniejsze przekształcenie, pozostawiające bez zmiany każde z przekształceń Y, t. j. prowadzące do tożsamości:

$$Y_1' = Y_1, \ldots, Y_r' = Y_r ?$$

Jest oczywistem, że wszystkie te przekształcenia tworzą grupę; można przeto zagadnienie to wyrazić, mówiąc: wyznaczyć grupę wszystkich przekształceń pomiędzy zmiennemi x' i x, czyniących przekształcenia Y' tożsamościowo równemi przekształceniom Y.

Nie wchodzimy w szczegółowe rozpatrzenie tego zagadnienia; tylko przypadek jego szczególny rozważymy w § 6 Rozdziału IV-go.

Rozważmy jedno przekształcenie grupy, wytworzonej z przekształcenia X, np.:

$$(T) \qquad x_i' = x_i + \frac{t}{1} Xx_i + \ldots$$

i przekształćmy je sposobem wyżej wskazanym za pomocą przekształcenia:

$$(T_1) \qquad y_i' = y_i + \frac{t_1}{1} Yy_i + \ldots$$

grupy wytworzonej z przekształcenia Y, nie zakładając na teraz żadnego związku pomiędzy X a Y. Dla znalezienia przekształconej przekształcenia T postępujemy w ten sposób:

Niechaj tą przekształconą będzie:

$$z_i' = z_i + \frac{t}{1} Zz_i + \ldots$$

mamy znaleść parametr τ i przekształcenie nieskończonostkowe Z. Otóż jest widocznem, że Z jest przekształceniem X, jeżeli w tem ostatniem zamiast zmiennych x podstawimy ich wartości w funkcyi zmiennych z, otrzymanych z przekształcenia T_1, w którem zmiennemi y' są zmienne z, a zmiennemi y zmienne x, t. j. z przekształcenia T_1, napisanego w postaci:

$$z_i = x_i + \frac{t_1}{1} Yx_i + \ldots$$

Wielkości x, otrzymane z tych wzorów, jeżeli na chwilę przez Y' oznaczymy wyrażenia Y, napisane w zmiennych z, będą:

$$x_i = z_i - \frac{t}{1} Y'z_i + \ldots$$

Jeżeli teraz w przekształceniu X zamiast wielkości x podstawimy

te wartości, to na podstawie wzoru (4) w § poprzedzającym, oznaczając przez X' wyrażenie X, napisane w zmiennych z, znajdziemy:

$$X = X' - \frac{t}{1}(Y'X') + \ldots = X' + \frac{t_1}{1}(X'Y') + \ldots .$$

Strona ostatnia tego wzoru jest właśnie szukanem wyrażeniem Z; mamy tedy:

$$z_i' = z_i + \frac{\tau}{1}\left(X' + \frac{t_1}{1}(X'Y') + \ldots\right) z_i + \ldots .$$

Parametr τ obliczymy łatwo, z uwagi, że dla $t_1 = 0$ wyrażenie T powinno pozostać niezmiennem, przeto, poza nazwą zmiennych (których zmiana pociąga z sobą zmianę notacyi X na X') przekształcenie to powinno zlewać się z przekształceniem T, a więc porównanie obu daje $\tau = t$. Przekształcenie przekształcone, jeżeli je napiszemy znów w zmiennych x i x', będzie:

$$(11) \qquad x_i' = x_i + \frac{t}{1}\left[X + \frac{t_1}{1}(XY) + \ldots\right] x_i + \ldots .$$

Aby teraz przekształcona (11) równała się przekształceniu T, bez względu na wartości parametrów t i t_1, potrzeba, aby (XY) było zerem. Z drugiej strony na zasadzie wyżej przytoczonego spostrzeżenia, wiemy, że gdy (XY) jest zerem, to są także zerami wszystkie następujące wyrazy spółczynnika przy t, t. j. przekształcenia nieskończonostkowego, występującego we wzorze (11); gdyż wiemy, że to przekształcenie nieskończonostkowe jest w istocie rzeczy tylko przekształceniem strony drugiej wzoru (4) § poprzedzającego, a więc, gdy (XY) jest zerem, przekształcenia (11) zlewają się z przekształceniem T. Mamy zatem twierdzenie:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby przekształcenia dwóch grup, wytworzonych z przekształceń X i Y były wza-

jemnie przemiennemi, jest, by nawiasy (XY) były zerami, t. j. by dwa przekształcenia nieskończonostkowe grup były przemienne.

Kiedy to ma miejsce, dwie grupy nazywają się przemiennemi.

Pokażemy, że ten sam rezultat można otrzymać z wielką łatwością, wychodząc z wzoru na iloczyn dwu przekształceń skończonych, t. j. z wzoru (7) w § 9 Rozdziału I-go.

Jeżeli przekształcenie X_3 (patrz l. c.) ma pozostać niezmienionem przy przemianie X_1 na X_2 oraz t na t', i to przy jakimkolwiek układzie wartości t, t', wtedy tożsamo powinno mieć miejsce dla:

$$t' [\gamma' (X_1 X_2) + \gamma'' t (X_1 X_1 X_2) + \ldots],$$

a więc także i dla:

$$\gamma' (X_1 X_2) + \gamma'' t (X_1 X_1 X_2) + \ldots$$

Lecz przestawiając X_1 i X_2, t i t', mamy:

$$\gamma' (X_2 X_1) + \gamma'' t' (X_2 X_2 X_1) + \ldots$$

a ponieważ to wyrażenie musi się zlewać z poprzedzającem dla jakiegokolwiek układu wartości t i t', przeto być musi $(X_1 X_2) = 0$.

Z drugiej strony, jeżeli $(X_1 X_2)=0$, wtedy są oczywiście zerami i wszystkie nawiasy, występujące we wzorze (7), i wzór ten sprowadza się do następującego:

$$X_3 = tX_1 + t'X_2,$$

t. j. pozostaje niezmieniony przy wskazanych wyżej przestawieniach. Twierdzenie nasze zostało tym sposobem udowodnione.

Z twierdzenia tego wypływa ważne zastosowanie w przypadku grup wieloparametrowych. Jeżeli rozważamy przekształcenia takiej grupy, np. przekształcenia, wytworzone z przekształ-

cenia nieskończonostkowego X_1 i wszystkie przekształcenia, wytworzone z przekształcenia X_2, wtedy warunkiem na to, aby pierwsze z nich były przemienne z drugiemi jest, by $(X_1 X_2)$ było zerem, a zatem:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wszystkie przekształcenia grupy r-parametrowej parami były przemienne, jest, by przekształcenia nieskończonostkowe niezależne tej grupy w liczbie r były przemienne parami.

Może się zdarzyć, że nie wszystkie przekształcenia grupy r-parametrowej są parami przemienne, lecz istnieje jedno pomiędzy niemi, przemienne ze wszystkiemi innemi. W tym przypadku takie przekształcenie nieskończonostkowe nazywa się przekształceniem wyjątkowem grupy. Widocznem jest twierdzenie:

Grupa, wytworzona z przekształcenia nieskończonostkowego wyjątkowego grupy o r parametrach, jest podgrupą przemienną ze wszystkiemi przekształceniami grupy całkowitej.

Przypominając sobie to, co udowodniono wyżej, że gdy (XY) jest zerem, wtedy przekształcona przekształcenia Y, utworzona przy pomocy jakiegokolwiek przekształcenia grupy X, jest temże przekształceniem Y, i stosując to twierdzenie do naszego przypadku, możemy powiedzieć, że przekształcona przekształcenia nieskończonostkowego wyjątkowego grupy, utworzona przy pomocy jakiegokolwiek przekształcenia skończonego tej grupy, jest temże samem przekształceniem nieskończonostkowem, t. j. jest sama przez się niezmienniczą względem grupy.

Oczywiście, gdy wszystkie przekształcenia grupy są wyjątkowe, t. j. gdy wszystkie nawiasy $(X_i Y_j)$ są zerami, wtedy przy wszystkich przekształceniach grupy, każde z nich pozostaje samo przez się niezmiennem.

Łatwo widzieć, że g d y z p r z e k s z t a ł c e ń n i e s k o ń c z o n o s t k o w y c h n i e z a l e ż n y c h jest $r-1$ w y j ą t k o w y c h, w t e d y i r-te p r z e k s z t a ł c e n i e, n i e z a l e ż n e o d p o p r z e d z a j ą c y c h, j e s t w y j ą t k o w e.

W poprzednich przypadkach mieliśmy przykład podgrup grupy r-parametrowej, które przekształcają się same na siebie przez przekształcenia grupy, lecz w ten sposób, że każde ich przekształcenie przekształca się samo przez się na siebie. Teraz rozważymy przypadek ogólniejszy, w którym podgrupa przekształca się sama na siebie, lecz tak, że jej przekształcenia przemieniają się wzajemnie. Gdy to zachodzi, podgrupa nazywa się w y j ą t k o w ą lub n i e z m i e n n i c z ą w z g l ę d e m g r u p y d a n e j.

Niechaj będą, jak zwykle, $X_1, \ldots, X_r$ przekształcenia nieskończonostkowe grupy r-parametrowej; rozważmy grupę jednego tylko przekształcenia X_1. Przekształcona przekształceń tej grupy, utworzona przy pomocy jednego któregokolwiek przekształcenia grupy całkowitej, któremu odpowiada np. przekształcenie nieskończonostkowe:

$$Y = \sum_{s=1}^{r} e_s X_s, \tag{12}$$

dana jest przez wzór (11), w którym kładziemy X_1 zamiast X; widzimy tedy, że aby to przekształcenie należało do grupy, wytworzonej z przekształcenia X_1, trzeba, by (X, Y) równało się stałej, pomnożonej przez X_1. Z drugiej strony, gdy to ma miejsce, wtedy na zasadzie twierdzenia, dowiedzionego w § poprzedzającym, wiemy, że w tenże sposób wyrazić się dadzą rozmaite spółczynniki przy potęgach zmiennej t_1, występujące we wzorze (11); wzór ten tedy przedstawia istotnie przekształcenie grupy X_1. Jeżeli zaś $(X_1 Y)$ ma równać się cX_1 dla jakiegokolwiek Y, danego przez wzór (12), t. j. przy zmienianiu spółczynników e_s wszystkiemi możliwemi sposobami, jest koniecznem i dostatecznem, by nawiasy, utworzone z przekształcenia X_1 i z jakiego-

kolwiek z przekształceń $X_2, \ldots, X_r$, były iloczynami stałych pomnożonych przez X_1. Możemy więc powiedzieć:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby podgrupa, wytworzona z przekształcenia X_1, była podgrupą niezmienniczą, jest, by wszystkie nawiasy $(X_1 X_2), \ldots, (X_1 X_r)$ były iloczynami stałej przez przekształcenie X_1.

Dajmy teraz, że przekształcenia nieskończonostkowe $X_1, \ldots, X_{r-m}$, z pomiędzy r przekształceń, tworzących grupę o r parametrach, same przez się tworzą grupę, a mianowicie podgrupę o $r-m$ parametrach grupy danej. Aby to miało miejsce, jest koniecznem i dostatecznem, jak wiemy, by nawiasy:

$$(X_i X_j) \qquad (i,j=1, \ldots, r-m),$$

dały się wyrazić jako kombinacye liniowe wyrażeń $X_1, \ldots, X_{r-m}$. Możemy zapytać, kiedy taka podgrupa jest niezmienniczą. Powtarzając powyższe rozumowania, znajdujemy:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby rzeczona podgrupa, wytworzona z przekształceń $X_1, \ldots, X_{r-m}$, była niezmienniczą względem grupy całkowitej, jest, by nawiasy:

$$(13) \qquad (X_i X_{r+m+j}) \qquad \begin{pmatrix} i=1, \ldots, r-m \\ j=1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

dały się przedstawić jako kombinacye liniowe o spółczynnikach stałych wyrażeń $X_1, \ldots, X_{r-m}$. Tym sposobem każde z $r-m$ przekształceń X, połączone w nawias z jednem z tychże przekształceń lub z jednem z pozostałych, powinno dać zawsze kombinacyę liniową o spółczynnikach stałych tylko pierwszych $r-m$ wyrażeń X.

Widzieliśmy (Rozdz. I § 14), że gdy $X_1, \ldots, X_r$ tworzą grupę o r parametrach, wtedy i ogół nawiasów $(X_i X_k)$ tworzy grupę,

która jest już to tożsamościową z daną, już to podgrupą danej. Możemy łatwo dowieść, że w przypadku drugim nawiasy $(X_j X_i)$ tworzą podgrupę niezmienniczą grupy danej. Gdy bowiem:

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ,$$

będzie:

$$(X_h (X_j X_i)) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} (X_h X_s) ,$$

a ten wzór, na zasadzie twierdzenia poprzedzającego, dowodzi tego, co powiedzieliśmy.

Łatwo też można dowieść twierdzenia następującego:

Jeżeli, jak wyżej, $X_1, \ldots, X_{r-m}$ tworzą podgrupę niezmienniczą grupy całkowitej, wytworzonej z przekształceń $X_1, \ldots, X_r$, wtedy i nawiasy, zbudowane tylko z pierwszych $r-m$ przekształceń X, tworzą podgrupę niezmienniczą.

W samej rzeczy, nawiasy $(X_j X_i)$ $(j, i = 1, \ldots, r-m)$ tworzą w każdym przypadku grupę, która albo jest identyczną z grupą, wytworzoną z przekształceń $X_1, \ldots, X_{r-m}$, albo jest podgrupą tej ostatniej, a więc w każdym przypadku tworzą podgrupę grupy całkowitej. Otóż, ponieważ podgrupa, wytworzona z przekształceń $X_1, \ldots, X_{r-m}$, jest niezmiennicza, mamy związki:

$$(X_i X_{r-m+j}) = \sum_{s=1}^{r-m} c_{i, r-m+j, s} X_s . \qquad \begin{pmatrix} i=1, \ldots, r-m \\ j=1, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Lecz mamy tożsamościowo:

$$((X_h X_i) X_{r-m+j}) + ((X_i X_{r-m+j}) X_h) + ((X_{r-m+j} X_h) X_i) = 0 ;$$

podstawiając tu za $(X_i X_{r-m+j})$ wartość, otrzymaną z wzoru po-

przedzającego i za $(X_h X_{r-m+j})$ wartość analogiczną, w założeniu, że tak h jak i i jest jednym ze skaźników $1, \ldots, r-m$, widzimy, że $((X_h X_i) X_{r-m+j})$ daje się wyrazić liniowo przy pomocy spółczynników stałych przez nawiasy $(X_s X_h)$, gdzie s i h przybierają tylko wartości $1, \ldots, r-m$. Tym sposobem twierdzenie jest udowodnione.

ROZDZIAŁ III.

WŁASNOŚCI, DOTYCZĄCE ISTOTY GRUPY.

---

§ 1.

Przechodniość grup.

Grupa nazywa się p r z e c h o d n i ą wtedy, gdy zawiera zawsze przynajmniej jedno takie przekształcenie przy pomocy którego od jakiegokolwiek oznaczonego układu wartości $x_1, \ldots, x_n$ (zawartego naturalnie w obszarze $((x))$, w którym zawierają się wartości zmiennych, które ta grupa przekształca) przechodzimy do innego jakiegokolwiek obranego układu wartości $x_1', \ldots, x_n'$ w tymże obszarze; albo inaczej, od punktu P przestrzeni $((x))$ n-wymiarowej przechodzimy do innego jakiegokolwiek, danego z góry, punktu P' tejże przestrzeni.

Może się zdarzyć, że istnieją przekształcenia, przy pomocy których, gdy przechodzimy od punktu P (dowolnego) do punktu P' (także dowolnego), możemy równocześnie przejść od punktu Q do punktu Q' (obu dowolnych). W tym przypadku mówimy, że grupa jest p o d w ó j n i e p r z e c h o d n i a; w przeciwnym razie jest p o j e d y ń c z o - p r z e c h o d n i ą. W podobny sposób określić można p r z e c h o d n i o ś ć potrójną, p o c z w ó r n ą, ... k-k r o t n ą.

Niechaj:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r), \qquad (i=1, \ldots, n)$$

będą wzory przekształceń grupy. Z powyższej definicyi wypływa, że możemy w obszarze $((x))$ ustalić dowolnie wartości x i x' i otrzymać w każdym przypadku przynajmniej jeden układ wartości a w obszarze $((a))$. Trzeba będzie zatem, aby liczba r była równa n lub większa od n. Gdyby bowiem liczba r była mniejsza od n, wtedy możnaby wyeliminować wielkości a z równań (1), i otrzymalibyśmy związki tożsamościowe pomiędzy wielkościami x i x', które powinnyby zachować się dla wszelkiego przekształcenia grupy; wtedy zaś nie możnaby zmiennym x i x' nadać wartości dowolnych i wzajemnie niezależnych: grupa nie mogłaby być przechodnią i byłaby nieprzechodnią. Gdy $r \geqslant n$ i przyjmiemy, że równania (1) dają się rozwiązać względem n z pomiędzy parametrów a, wtedy wybrawszy w sposób jakikolwiek w obszarze $((a))$ wartości pozostałych parametrów, wyznaczymy w obszarze $((a))$ wartości n rozważanych parametrów, i będziemy mieli przekształcenia, zmieniające ustalony układ wartości x na ustalony układ wartości x'. Możemy tedy powiedzieć:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby grupa była przechodnią, jest, by r było równe n lub większe od n, oraz aby równania (1), których jest n, były rozwiązalne względem n z pomiędzy parametrów a; rozwiązalność tę należy rozumieć w znaczeniu wyżej wskazanem.

Z tego jasno wypływa, że w każdej grupie przechodniej istnieje zawsze przekształcenie tożsamościowe, albowiem musi istnieć zawsze przekształcenie, które punkt ogólny zamienia na tenże sam punkt.

Dajmy, że mamy grupę r-parametrową, wytworzoną z r przekształceń nieskończonostkowych. Przekształcenia grupy w otoczeniu przekształcenia tożsamościowego możemy napisać w postaci:

$$x_i' = x_i + \sum_{s=}^{r} \lambda_s X_s x_i + \ldots . \tag{2}$$

Aby grupa była przechodnią, potrzeba i wystarcza, by było $r \geqslant n$, oraz aby równania te dały się rozwiązać względem wielkości λ, tak iż potrzeba i wystarcza, aby macierz:

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'}{\partial \lambda_1}, \ldots, \frac{\partial x_1'}{\partial \lambda_r} \\ \ldots \ldots \ldots \\ \frac{\partial x_n'}{\partial \lambda_1}, \ldots, \frac{\partial x_n'}{\partial \lambda_r} \end{matrix} \right\|$$

nie była tożsamościowo zerem. Macierz ta, przy $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ (gdy przez $\xi_{1s}, \ldots, \xi_{ns}$ oznaczymy, jak zwykle, spółczynniki wyrażenia X_s) przechodzi na następującą:

$$(4) \qquad \left\| \begin{matrix} \xi_{11}, \ldots, \xi_{1r} \\ \ldots \ldots \\ \xi_{n1}, \ldots, \xi_{nr} \end{matrix} \right\|.$$

Możemy tedy wypowiedzieć twierdzenie:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby grupa, wytworzona z przekształceń nieskończonostkowych niezależnych $X_1, \ldots, X_r$, była przechodnią, jest, by $r \geqslant n$, i aby macierz (4) była różna od zera, lub wyrażając to inaczej: by pomiędzy przekształceniami $X_1, \ldots, X_r$ było n i nie mniej niż n przekształceń bezwzględnie niezależnych.

W samej rzeczy, gdy macierz (4) nie jest zerem, nie będzie niem także macierz (3), gdyż druga powstaje z pierwszej, gdy $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, a więc grupa jest przechodnią. Z drugiej strony, gdyby macierz (4) była zerem i miała charakterystykę m, wtedy przynajmniej jeden wyznacznik rzędu m tej macierzy, a więc i macierzy (3) byłby różny od zera, t. j. równania (2) dałyby się rozwiązać względem m z pomiędzy parametrów λ, a więc moglibyśmy z nich otrzymać najwyżej $n-m$ związków pomię-

dzy wielkościami x i x'. Otóż, ponieważ m jest charakterystyką macierzy (4), przeto pomiędzy przekształceniami $X_1, \ldots, X_r$ jest m niezależnych, np. $X_1, \ldots, X_m$, pozostałe zaś dają się wyrazić jako ich kombinacye liniowe ze spółczynnikami, które są funkcyami wielkości x. Układ równań:

$$X_1 F = 0, \ldots, X_m F = 0, \tag{5}$$

będzie układem zupełnym, gdyż: po pierwsze, ponieważ przekształcenia X mogą wytworzyć grupę, przeto nawias, utworzony z dwóch jakichkolwiek wyrażeń (5), wyrazi się liniowo ze spółczynnikami stałemi przez wszystkie przekształcenia $X_1, \ldots, X_r$; po drugie zaś, jeżeli w takiem wyrażeniu liniowem zamiast $X_{m+1}, \ldots, X_r$ podstawimy ich wyrażenia liniowe o spółczynnikach zmiennych przez $X_1, \ldots, X_m$, znajdziemy ostatecznie, że każdy nawias, utworzony z dwóch którychkolwiek pierwszych stron równań (5), wyrazi się liniowo i ze spółczynnikami zmiennemi przez strony pierwsze tych równań, które stanowią zatem, jak powiedziano, układ zupełny (patrz Rozdz. I § 10). Równania (5) będą miały przeto $n-m$ całek niezależnych wspólnych, któremi niechaj będą:

$$\Omega_1(x), \ldots, \Omega_{n-m}(x); \tag{6}$$

będą to zarazem całki wszystkich równań pozostałych:

$$X_{m+1} F = 0, \ldots, X_r F = 0.$$

Na podstawie twierdzenia zasadniczego w § 1 Rozdz. 6-go całki (6) są niezmienniczemi dla grupy danej, to znaczy, że przekształcając w nich zmienne x na zmienne x', dane przez równania (2), mieć będziemy:

$$\Omega_1(x) = \Omega_1(x'), \ldots, \Omega_{n-m}(x) = \Omega_{n-m}(x'). \tag{7}$$

Istnieje tedy istotnie $n-m$ związków niezależnych pomiędzy wielkościami x i wielkościami x', i grupa jest z pewnością nieprzechodnią.

Z tego twierdzenia i dowodzenia możemy wyprowadzić ważny wniosek. Widzieliśmy, że można znaleść najwyżej $n-m$ związków pomiędzy wielkościami x i wielkościami x'; i istotnie znaleźliśmy $n-m$ związków (7), z których każdemu odpowiada funkcya Ω, niezmiennicza względem grupy. Gdyby była jeszcze inna funkcya niezmiennicza, znaleźlibyśmy sposobem wyżej wskazanym inny jeszcze związek, co, jak widzieliśmy, jest niemożliwe. Możemy więc powiedzieć, że grupa posiada tylko n niezmienników (6), t. j.:

Grupa przechodnia niema żadnego niezmiennika; grupa nieprzechodnia ma jakojedyne niezmienniki rozwiązania wspólne równań $X_1 F = 0, \ldots, X_r F = 0$. Znając wzory skończone na przekształcenia grupy, możemy niezmienniki te otrzymać przy pomocy eliminacyi.

Warto zauważyć, co następuje. Jeżeli liczba r parametrów jest dokładnie równa liczbie n i jeżeli jest n przekształceń nieskończonostkowych bezwzględnie niezależnych, wtedy grupa jest przechodnia. Wzory na przekształcenia dadzą się rozwiązać względem n parametrów, które będą miały wartości oznaczone, skoro obierzemy pewne wartości na wielkości x i x'. Będziemy wtedy mieli wogólności jedno tylko przekształcenie, zmieniające punkt dowolny na punkt dowolny; przechodniość będzie pojedyńcza. T. j.: Grupa przechodnia o n parametrach jest pojedyńczo przechodnia, albo też: grupa o n parametrach, której przekształcenia nieskończonostkowe w liczbie n są bezwzględnie niezależne, jest pojedyńczo przechodnia.

Nie można utrzymywać, że zachodzi i twierdzenie odwrotne; albowiem, aby mieć np. przechodniość podwójną, potrzeba, jak o tem przekonywają rozważania, podane na początku tego paragrafu, by można było temi samemi wartościami r parametrów uczynić równocześnie zadość $2n$ równaniom, zawierającym spółrzędne czterech punktów dowolnych; musiałoby zatem r nie być mniejsze od $2n$.

§ 2.

Niepierwotność grup.

Widzieliśmy w § poprzedzającym, że gdy grupa jest nieprzechodnia, wtedy istnieją funkcye $\Omega_1(x), \ldots, \Omega_{n-m}(x)$, które pozostają niezmiennemi przy przekształceniach grupy. Jeżeli napiszemy:

$$(1) \qquad \Omega_1(x) = c_1, \ldots, \Omega_{n-m}(x) = c_{n-m},$$

gdzie wielkości c mają wartości stałe dowolne, mamy wtedy rozmaitość m-wymiarową w przestrzeni n-wymiarowej wielkości x, rozmaitość, przekształcającą się na samą siebie przy wszystkich przekształceniach grupy, i to bez względu na to, jakiemi są wartości stałych c. Jeżeli więc wartości tych stałych będziemy zmieniali wszelkiemi możliwemi sposobami, otrzymamy podział przestrzeni n-wymiarowej na ∞^{n-m} przestrzeni m-wymiarowych, z których każda pozostaje niezmienną przy przekształceniach grupy.

Przyjmijmy teraz ogólniej, że możemy uskutecznić analogiczny podział przestrzeni n-wymiarowej na przestrzenie niższe m-wymiarowe w ten sposób, aby każda z tych ostatnich przy przekształceniach grupy nie pozostawała niezmienioną, lecz aby przestrzenie te przechodziły jedne na drugie, tak że gdy punkt P przechodzi na punkt P', wtedy cała przestrzeń m-wymiarowa, do której należy punkt P, przechodzi na przestrzeń, do której należy punkt P'. Jeżeli to zachodzi, mówimy, że grupa jest n i e p i e r w o t n a; w przeciwnym razie nazywamy grupę p i e r w o t n ą. Z tego punktu widzenia nieprzechodniość jest przypadkiem szczególnym niepierwotności.

K a ż d a g r u p a n i e p r z e c h o d n i a jest n i e p i e r w o t n ą; k a ż d a g r u p a p i e r w o t n a jest k o n i e c z n i e p r z e c h o d n i ą.

Niechaj, jak wyżej, równania (1) odpowiadają temu podziałowi przestrzeni. Na zasadzie twierdzenia o układach zupeł-

nych, podanego w § 10 Rozdz. I-go, można wtedy znaleść układ zupełny m równań o pochodnych cząstkowych:

$$(2) \qquad Y_1 F = 0, \ldots, Y_m F = 0,$$

którego całkami niezależnemi są wyrażenia (1).

Ponieważ grupa dana ma, według założenia, tę własność, że przy jej przekształceniach przemieniają się wzajemnie przestrzenie m-wymiarowe, dane przez równania (1), przeto grupa ta pozostawia bez zmiany układ całek (2), t. j. przemienia całki układu (2) na całki tegoż układu. Układ (2) przeto, zgodnie z definicyą w § 6 Rozdziału II, jest niezmienniczym względem grupy, i na zasadzie twierdzenia tam dowiedzionego, nawiasy $(Y_h X_k)$, gdzie wyrażenia X są przekształceniami nieskończonostkowemi grupy danej, są kombinacyami liniowemi o spółczynnikach stałych wyrażeń Y. I odwrotnie, jeżeli tak jest, to wtedy układ równań $YF = 0$ jest układem niezmienniczym względem grupy, i istnieją całki (2), dające podział przestrzeni. Możemy tedy powiedzieć:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby grupa r-parametrowa, wytworzona z przekształceń $X_1, \ldots, X_r$, była niepierwotną, jest, by istniał układ zupełny równań o pochodnych cząstkowych:

$$Y_1 F = 0, \ldots, Y_m F = 0,$$

dla którego zachodzą związki:

$$(Y_h X_k) = \sum_{s=1}^{r} \gamma_{hks} Y_s, \qquad \begin{pmatrix} h=1, \ldots, m \\ k=1, \ldots, r \end{pmatrix},$$

lub, inaczej mówiąc, by istniał układ zupełny niezmienniczy względem grupy.

Oczywiście, grupa może być niepierwotną rozmaitemi sposobami; z powyższego twierdzenia wypływa, że będzie niepier-

wotną tyloma różnemi sposobami, ile istnieje układów zupełnych niezmienniczych względem tej grupy.

Każdy taki układ, jak (1), nazywa się układem niepierwotności. Zauważmy, że jeżeli dane są dwa układy niepierwotności: jeden, odpowiadający podziałowi całkowitej przestrzeni na przestrzenie m-wymiarowe, drugi — podziałowi na przestrzenie m'-wymiarowe, to gdy $m + m'$ jest równe n lub większe od n, można otrzymać trzeci układ niepierwotności, odpowiadający podziałowi na przestrzenie o $m+m'-n$ wymiarach; przestrzenie te otrzymujemy, rozważając przecięcie ogólne każdej z rzeczonych przestrzeni m-wymiarowych przez każdą z przestrzeni m'-wymiarowych.

Z poprzedzającego twierdzenia wypływa jeszcze ważny wniosek. Załóżmy, że grupa dana zawiera przekształcenie nieskończonostkowe wyjątkowe (patrz Rozdz. II, § 8), i niechaj będzie $X = \sum c_i X_i$, gdzie spółczynniki c mają wartości stałe oznaczone. Wtedy równanie $Xf=0$ (które oczywiście uważać można jako układ zupełny) czyni zadość warunkom twierdzenia, gdyż wszystkie nawiasy (XX_i) są zerami. Możemy tedy twierdzić, że jeżeli grupa zawiera przekształcenie nieskończonostkowe wyjątkowe, wtedy jest z pewnością grupą niepierwotną.

Jeżeli dana jest grupa niepierwotna, wtedy można zawsze zbudować przynajmniej jednę grupę, będącą z nią w ścisłym związku i nazwaną grupą niepierwotności. Mówimy o niej w § 4 Rozdziału IV-go.

Powiedzieliśmy wyżej, że grupa nieprzechodnia jest niepierwotną. Teraz powiemy, że i grupa pojedyńczo-przechodnia, mająca dokładnie n przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, t. j. tyle, ile jest zmiennych x, jest także niepierwotną.

Aby dowieść tego twierdzenia, skorzystamy z własności grup, zwanych wzajemnemi, o których mowa w § 6 Rozdz. IV go. Niechaj będzie dana grupa pojedyńczo-przechodnia o $n>1$ parametrach; wtedy istnieje inna grupa pojedyńczo-

przechodnia o n parametrach, zwana wzajemną, taka mianowicie, że jej przekształcenia nieskończonostkowe Y pozostają z przekształceniami X grupy danej w związkach:

$$(X_i\ Y_j) = 0\,, \qquad (i,j=1,\ldots,n).$$

Otóż, gdy $n>1$, wtedy grupa przekształceń Y będzie posiadała z pewnością podgrupy, np. te, które są wytworzone z pojedyńczych przekształceń Y. Niechaj wogólności jedną z jej podgrup będzie podgrupa, wytworzona z przekształceń $Y_1, \ldots, Y_m$ $(m<n)$; wtedy układ równań różniczkowych $Y_1F=0, \ldots, Y_mF=0$, będzie układem zupełnym, a istnienie tego układu stwierdza odrazu niepierwotność grupy, gdyż układ ten czyni zadość związkom:

$$(X_i\ Y_j) = 0, \qquad (i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m),$$

które są przypadkiem szczególnym związków, wystarczających do określenia niepierwotności. Tym sposobem twierdzenie jest dowiedzione.

---

§ 3.

Systatyczność grupy.

Wróćmy na chwilę do rozważań, podanych na końcu § 5 w Rozdz. II. Określiliśmy tam, co rozumieć należy przez grupę stateczności względem punktu położenia ogólnego, i widzieliśmy, że jeżeli pomiędzy r-parametrami jest tylko $r-h$ bezwzględnie niezależnych, wtedy podgrupa stateczności względem punktu x^0 położenia ogólnego jest grupą o h parametrach, a przekształceniami nieskończonostkowemi, z których się ona wytwarza, są następujące przekształcenia w liczbie h:

$$(1) \qquad X_{r-h+s} - \chi_{s1}(x^0)\,X_1 - \ldots - \chi_{s,r-h}(x^0)\,X_{r-h}\,,$$

gdzie znaczenie spółczynników χ określiliśmy na wspomnianem miejscu.

Dla każdego punktu x^0 położenia ogólnego istnieje specyalna podgrupa stateczności grupy danej; otóż zbadajmy teraz, czy i kiedy dwie lub więcej takich podgrup stateczności zlewa się.

Jeżeli zamiast punktu x^0 weźmiemy inny punkt x', wtedy podgrupą stateczności będzie podgrupa, wytworzona z przekształceń:

$$(2) \qquad X_{r-h+s} - \chi_{s1}(x') X_1 - \ldots - \chi_{s,r-h}(x') X_{r-h};$$

stąd wypływa, że dwie podgrupy zleją się, gdy każde przekształcenie (2) jest kombinacyą liniową o spółczynnikach stałych przekształceń (1). Lecz z przyczyny niezależności z w y c z a j n e j przekształceń X (zakładamy istnienie tej niezależności dlatego, że przyjmujemy, iż przekształcenia te tworzą grupę o r-parametrach istotnych), każde z przekształceń (2) powinno być identycznem z odpowiedniem z przekształceń (1), a stąd funkcye χ dla punktu x^0 muszą być te same, co i dla punktu x'.

Jeżeli więc napiszemy:

$$\chi_{s,t}(x_1, \ldots, x_n) = \chi_{s,t}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

i znajdziemy wszystkie wartości $x_1, \ldots, x_n$, dla których spełniają się te związki w liczbie h $(r-h)$, to otrzymamy w s z y s t k i e punkty x, których grupy stateczności są te same, co dla x^0.

Otóż zachodzić mogą dwa przypadki: albo te równania, w których x^0 jest punktem położenia ogólnego, redukują się do m n i e j s z e j niż n liczby równań, albo też nie redukują się.

W przypadku pierwszym będziemy mieli oczywiście nieskończenie wiele punktów, tworzących rozmaitość ciągłą, do której należy punkt x^0, a podgrupy stateczności tych punktów zlewać się będą z grupą stateczności punktu x^0; w przypadku drugim mogą istnieć tylko punkty odosobnione tego gatunku. Gdy zachodzi przypadek pierwszy, t. j. gdy przy danym punkcie x^0 położenia ogólnego, istnieje rozmaitość

ciągła, do której on także należy i której punkty mają wszystkie tę samę podgrupę stateczności, wtedy grupę nazwiemy systatyczną (Engel); w przypadku przeciwnym nazywamy ją asystatyczną.

Możemy tedy, oczywiście, wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Jeżeli dana jest grupa z r przekształceniami nieskończonostkowemi, z których pierwsze $r-h$ są bezwzględnie niezależne, pozostałe zaś wyrażają się przez poprzednie przy pomocy wzorów:

$$X_{r-h+s} = \chi_{1s}(x)\, X_1 + \ldots + \chi_{s,r-h}(x)\, X_{r-h},$$

grupa jest systatyczną, albo asystatyczną, stosownie do tego, czy liczba funkcyj niezależnych pomiędzy $h(r-h)$ funkcyami χ jest mniejsza od n, albo też jest równa lub większa od n.

Można dowieść, że grupa systatyczna jest zawsze niepierwotna.

Aby dowieść tego, odróżnimy dwa przypadki: pierwszy, w którym liczba funkcyj χ (liczba funkcyj χ niezależnych musi być wtedy mniejsza od n) jest większa od zera, t. j. n jest większe od zera; drugi, w którym h jest zerem, t. j. gdy mamy r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, kiedy niema wcale funkcyj χ.

Dajmy najprzód, że funkcyj χ niezależnych jest $n-\varrho$; niechaj niemi będą: $\chi_1, \ldots, \chi_{n-\varrho}$. Utwórzmy równania:

$$(4) \qquad \chi_1(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.}, \ \ldots \ \chi_{n-\varrho}(x_1, \ldots, x_n) = \text{const.},$$

przedstawiające podział przestrzeni n-wymiarowej na $\infty^{n-\varrho}$ przestrzeni ϱ-wymiarowych. Powiadamy, że podział ten odpowiada układowi niepierwotności; to znaczy, że jeżeli przez M oznaczymy jednę z rozmaitości, przedstawionych przez równania (4), i jeżeli pewne przekształcenie τ zmienia wszystkie punkty rozmai-

tości M na punkty innej rozmaitości M', to i ta ostatnia da się przedstawić przez równania (4) z innemi wartościami stałych.

Jeżeli w równaniach (4) nadamy stałym wartości określone, wtedy otrzymamy rozmaitość M, której punkty mają wszystkie tęż samą podgrupę stateczności; podgrupą stateczności punktów rozmaitości M', powstałych z punktów rozmaitości M przez przekształcenie τ, jest przekształcona podgrupy punktów tej ostatniej, a to na zasadzie twierdzenia, podanego na końcu § 5 Rozdziału II-go Stąd wszystkie punkty rozmaitości M' mają tęż samą podgrupę stateczności, co dowodzi, że rozmaitość M' jest inną z rozmaitości, przedstawionych przez wzory (4), a właśnie tego chcieliśmy dowieść.

Jeżeli h jest zerem, t. j. wszystkie r przekształceń nieskończonostkowych są bezwzględnie niezależne, wtedy liczba r nie może być większa od n (patrz Rozdz. I § 8), a więc $r < n$, albo $r = n$. Jeżeli $r < n$ grupa jest nieprzechodnia, a więc i niepierwotna; jeżeli $r = n$, to przy niezależności bezwzględnej wszystkich przekształceń nieskończonostkowych, grupa jest pojedyńczo przechodnia i ma dokładnie n przekształceń nieskończonostkowych (patrz § I Rozdz. III), a więc jest niepierwotna.

Tym sposobem twierdzenie zostało udowodnione dla każdego przypadku.

---

§ 4.

Izomorfizm dwu grup.

Niechaj będzie dana grupa o r parametrach istotnych, wytworzona, jak zwykle, z przekształceń nieskończonostkowych $X_1, \ldots, X_r$. Wiemy, że zachodzą wtedy związki:

$$(1) \qquad (X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{ijs} X_s,$$

a ogół stałych c stanowi to, co nazywamy budową lub strukturą grupy. Jest jasnem, że liczby c nie są określone w sposób jedyny przez tę samą grupę, lecz wartości tych stałych zmieniają się wraz z wyborem r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych. Jeżeli np. zamiast przekształcenia X_1 weźmiemy pewną kombinacyę liniową o spółczynnikach stałych wszystkich przekształceń X, otrzymamy nowe liczby c, i będzie można łatwo wyznaczyć związki pomiędzy nowemi a dawnemi liczbami c.

Nadto, jeżeli zamiast przekształceń $X_1, \ldots, X_r$, które naturalnie przyjmujemy za wprost niezależne, weźmiemy ich kombinacyę liniową o spółczynnikach stałych—nazwijmy ją X_{r+1}—wtedy układ całkowity przekształceń $X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}$, które nie są już niezależnemi, będzie też, oczywiście, czynił zadość związkom postaci (1), i będzie można znaleźć liczby c, odpowiadające temu nowemu układowi przekształceń X. Podobnież rzecz będzie się miała, jeżeli dołączymy w tenże sposób jakąkolwiek liczbę przekształceń nieskończonostkowych, należących do grupy danej.

Jeżeli dwie grupy o tej samej liczbie r parametrów istotnych są takie, iż ustaliwszy w jednej z nich w sposób określony układ przekształceń $X_1, \ldots, X_r$ niezależnych, możemy dla drugiej obrać układ przekształceń niezależnych $Y_1, \ldots, Y_r$ w ten sposób, aby liczby c były odpowiednio równemi dla obu grup, wtedy mówimy, że te dwie grupy o równej liczbie parametrów są równej budowy.

Spostrzeżenie powyższe, polegające na tem, że można rozważać liczby c, odnoszące się do układu przekształceń nieskończonostkowych, które nie są wszystkie niezależne, a więc układu rozleglejszego, niż układ przekształceń tylko samych niezależnych, pozwala na uogólnienie poprzedniego pojęcia i prowadzi do pojęcia izomorfizmu dwu grup o różnej liczbie parametrów istotnych. Mianowicie, jeżeli mamy dwie grupy, jednę o r, drugą o r' parametrach istotnych, gdzie $r' \leqslant r$, i jeżeli, obrawszy r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych $X_1, \ldots, X_r$ pierwszej grupy, można wybrać r przekształceń nieskończonostkowych $Y_1, \ldots, Y_r$ drugiej (które, oczywiście, nie wszystkie są niezależne, a zawierają tylko r' niezależnych), w ten sposób, aby liczby c dla obu układów wypadły odpowied-

nio równe, wtedy te dwie grupy nazywać będziemy izomorficznemi. Odróżniać będziemy izomorfizm holoedryczny od meriedrycznego; dla pierwszego jest $r' = r$, t. j. obie grupy mają równą liczbę parametrów istotnych; w drugim liczba r' jest mniejsza od r.

Gdy izomorfizm jest meriedryczny, wtedy oczywiście pewnej liczbie przekształceń nieskończonostkowych grupy pierwszej (t. j. grupy, mającej większą liczbę parametrów istotnych) odpowiada jedno tylko przekształcenie grupy drugiej. W samej rzeczy, jeżeli $r' < r$, wtedy pomiędzy przekształceniami $Y_1, \ldots, Y_r$ zachodzi $r - r'$ związków liniowych jednorodnych o spółczynnikach stałych; niechaj niemi będą:

$$(2) \qquad \left| \begin{array}{l} e_{11} Y_1 + \ldots + e_{1r} Y_r = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{r-r',1} Y_1 + \ldots e_{r-r',r} Y_r = 0. \end{array} \right.$$

Niechaj teraz:

$$(3) \qquad \lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_r Y_r,$$

będzie pewnem przekształceniem nieskończonostkowem drugiej grupy; w pierwszej grupie odpowiadać mu będzie przekształcenie nieskończonostkowe:

$$(4) \qquad \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r.$$

Lecz przy pomocy związków (2) przekształcenie (3) może zmieniać postać swoją $\infty^{r-r'}$ sposobami; istotnie, napisawszy to przekształcenie (3) w postaci:

$$(5) \qquad \mu_1 Y_1 + \ldots + \mu_r Y_r$$

i odjąwszy od przekształcenia (3), otrzymamy równanie:

$$(\mu_1 - \lambda_1) Y_1 + \ldots + (\mu_r - \lambda_r) Y_r = 0,$$

które powinno być wynikiem równań (2); a więc jeżeli przyrównamy do zera macierz spółczynników wyrażeń (2) i (5), otrzymamy r' równań liniowych pomiędzy r wielkościami μ, stąd wynika właśnie, że te ostatnie mogą mieć $\infty^{r-r'}$ wartości różnych. Jeżeli zaś przekształcenie (3) napiszemy w postaci równoważnej (5), wtedy w pierwszej grupie odpowiadać mu będzie już nie przekształcenie (4), ale przekształcenie:

$$(6) \qquad \mu_1 X_1 + \ldots + \mu_r X_r,$$

co wskazuje, że temu samemu przekształceniu nieskończonostkowemu grupy drugiej odpowiada $\infty^{r-r'}$ przekształceń pierwszej.

Powyższa definicya ustanawia odpowiedniość pomiędzy przekształceniami nieskończonostkowemi dwu grup izomorficznych, a więc—ponieważ każde przekształcenie nieskończonostkowe wytwarza grupę o jednym parametrze, zawartą w danej—ustanawia także odpowiedniość pomiędzy podgrupami o jednym parametrze, zawartemi w dwu grupach danych. Stąd można już łatwo przejść do ustanowienia odpowiedniości i pomiędzy przekształceniami skończonemi, mianowicie ustalając, że odpowiadają sobie przekształcenia dwu odpowiadających sobie podgrup o jednym parametrze, d l a k t ó r y c h w a r t o ś ć p a r a m e t r u t j e s t j e d n a k o w a.

Ta odpowiedniość pomiędzy pojedyńczemi przekształceniami skończonemi dwu grup izomorficznych ma pewną własność zasadniczą charakterystyczną, która może też posłużyć za podstawę definicyi izomorfizmu, mającej zupełną analogię z definicyą w teoryi nieciągłych grup podstawień. Własność tę stanowi mianowicie to, że i l o c z y n o w i d w u p r z e k s z t a ł c e ń j e d n e j g r u p y o d p o w i a d a w g r u p i e i z o m o r f i c z n e j i l o c z y n d w ó c h o d p o w i a d a j ą c y c h t a m t y m p r z e k s z t a ł c e ń. Własność tę, ustanawiającą doskonałą analogię pomiędzy izomorfizmem L i e g o w teoryi przekształceń a izomorfizmem w zwykłej teoryi podstawień, udowadnia L i e w Traktacie swym (Theorie de Transfgr., I,

str. 203 i 418—420) przy pomocy t. zw. grupy parametrycznej (Parametergruppe) (patrz § 3, Rozdz. IV).

Pokażemy, że własność tę można łatwo udowodnić także za pomocą wzoru na iloczyn dwu przekształceń skończonych, podanego przez nas w § 9, Rozdziału I-go. Istotnie, niechaj Z_1, Z_2 będą dwie kombinacye liniowe o spółczynnikach stałych przekształceń X; Z_1', Z_2' — analogiczne kombinacye liniowe przekształceń Y. Przekształcenie, będące iloczynem dwóch przekształceń:

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1!} Z_1 x_i + \ldots,$$

$$x_i'' = x_i' + \frac{t}{1!} Z_2 x_i' + \ldots,$$

będzie postaci:

$$x_i'' = x_i + \frac{t}{1!} Z_3 x_i + \ldots,$$

gdzie Z_3 otrzymujemy z wzoru (7) w § 9 Rozdziału I-go (zmieniwszy oczywiście wyrażenia X na Z); wzór ten przy pomocy związków (1) sprowadza się do kombinacyi liniowej wyrażeń X ze spółczynnikami liczbowemi, zależnemi od t, t', γ i od spółczynników c.

Jeżeli teraz od grupy pierwszej przejdziemy do drugiej, pozostawiając bez zmiany t i t', to musimy zmienić tylko X na Y, a więc Z na Z'; a ponieważ spółczynniki c nie zmieniają się przy przejściu od pierwszej grupy do drugiej, przeto przekształcenie Z_3', odnoszące się do nowego iloczynu, będzie tą samą kombinacyą liniową wyrażeń Y, jaką Z_3 jest wyrażeń X. W ten sposób twierdzenie jest dowiedzione. (Patrz Pascal: Sulla formola del prodotto etc. Rend. Ist. Lomb. (2) 34, 1901).

Godzi się zaznaczyć, że dowodzenie to stosuje się zupełnie jednakowo do izomorfizmu holoedrycznego, jak i meriedrycznego; dowód, podany we wspomnianem dziele Liego, tej zalety nie posiada.

Niechaj będą dwie grupy meriedrycznie izomorficzne, jedna o r, druga o $r' < r$ parametrach istotnych; niechaj przekształceniami nieskończonostkowemi niezależnemi pierwszej będą $X_1, \ldots, X_r$, odpowiadającemi zaś im r przekształceniami nieskończonostkowemi grupy drugiej, związanemi $r-r'$ równaniami (2), niechaj będą $Y_1, \ldots, Y_r$. Rozważmy równania (2) względem $r-r'$ wyrażeń Y, mianowicie założywszy, dla ustalenia myśli, że $Y_1, \ldots, Y_{r'}$ są przekształceniami niezależnemi, rozwiążmy te równania względem $Y_{r'+1}, \ldots, Y_r$; niechaj będzie:

$$(7) \qquad Y_{r'+h} - \sum_{i=1}^{r'} \varepsilon_{hi} Y_i = 0, \qquad (h=1, \ldots, r-r').$$

Jeżeli uważać będziemy stronę pierwszą równania (7) jako przekształcenie nieskończonostkowe grupy drugiej, wtedy w pierwszej odpowie mu przekształcenie nieskończonostkowe:

$$(8) \qquad X_{r'+h} - \sum_{i=1}^{r'} \varepsilon_{hi} X_i \qquad (h=1, \ldots, r-r')$$

i odpowiadać sobie będą, jak zwykle, dwie podgrupy o jednym parametrze, wytworzone odpowiednio przez jedno i drugie przekształcenie. Ponieważ zaś strona pierwsza równania (7) jest tożsamościowo zerem, przeto podgrupa, wytworzona przez przekształcenie nieskończonostkowe, przez tę stronę pierwszą wyrażone, składa się jedynie z przekształcenia tożsamościowego; gdy tymczasem, ponieważ h może przybierać $r-r'$ wartości, przekształceń nieskończonostkowych (8) różnych będzie $r-r'$, i tyleż będzie podgrup o jednym parametrze. Będzie tedy $\infty^{r-r'}$ przekształceń skończonych, wytworzonych ze wszystkich przekształceń (8); możemy więc powiedzieć:

Jeżeli dwie grupy dane są meriedrycznie izomorficzne, wtedy przekształceniu tożsamościowemu grupy drugiej odpowiada $\infty^{r-r'}$

przekształceń grupy pierwszej, tworzących $r-r'$ podgrup tejże o jednym parametrze.

Można dowieść przedewszystkiem, że te $\infty^{r-r'}$ przekształceń tworzą grupę. W tym celu okażemy, że wyrażenia (8) czynią zadość drugiemu twierdzeniu zasadniczemu teoryi grup (Rozdz. I, § 14). Oznaczmy na chwilę wyrażenie (8) przez Ξ_h, przez Υ_h zaś stronę pierwszą równań (7) i utwórzmy nawiasy $(\Xi_h\,\Xi_k)$; otrzymamy wtedy wogólności kombinacye liniowe wyrażeń X o spółczynnikach stałych, których wartości, z powodu izomorfizmu, powinny być dokładnie równe spółczynnikom, otrzymanym po utworzeniu nawiasu $(\Upsilon_h\Upsilon_k)$. Te ostatnie nawiasy są równe zeru, ponieważ taką wartość mają wyrażenia (7). Możemy właściwie powiedzieć, że nawiasy te są równe zeru przy uwzględnieniu równań (7); albo też, że znikanie wyrażeń liniowych, utworzonych z przekształceń Y, którym to wyrażeniom te nawiasy są równe, jest wynikiem równań (7); albo wreszcie, że nawiasy $(\Upsilon_h\Upsilon_k)$ dają się przedstawić liniowo i ze spółczynnikami, naturalnie, stałemi, za pomocą wyrażeń Υ. Stąd wynika także, że i nawiasy $(\Xi_h\,\Xi_k)$ dają się przedstawić liniowo i ze spółczynnikami stałemi za pomocą wyrażeń Ξ, że więc te ostatnie tworzą grupę.

Grupa ta, która będzie, naturalnie, podgrupą grupy, wytworzonej z przekształceń X, jest podgrupą niezmienniczą tej ostatniej (p. Rozdz. II, § 8).

Aby tego dowieść, dość okazać, że nawiasy:

$$(X_i\,\Xi_h), \qquad (i=1,\ \ldots,\ r,\ h=1,\ \ldots,\ r-r')$$

wyrażają się liniowo i ze spółczynnikami stałemi przez przekształcenia Ξ. W tym celu dość powtórzyć powyższe rozumowanie, ponieważ nawiasy $(\Upsilon_i\Upsilon_h)$ są zerami, gdyż są zerami wyrażenia Υ_h, więc powinny dać się przedstawić liniowo i ze spółczynnikami stałemi przez wyrażenia Υ, a stąd, na zasadzie izomorfizmu, tożsamo winno zachodzić i dla nawiasów $(X_i\,\Xi_h)$.

§ 5.

Podobieństwo dwu grup.

Powiedziano już w § 2 Rozdziału I-go, co rozumieć należy przez podobieństwo dwu grup: dwie grupy:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x, a), \qquad (2) \qquad y_i' = \varphi_i(y, a'),$$

nazywają się p o d o b n e m i, gdy możemy za zmienne x wziąć funkcye zmiennych y, za zmienne x'—analogiczne funkcye zmiennych x', za wielkości a—funkcye wielkości a', w ten sposób, że wzory przekształceń (1) przechodzą na wzory przekształceń (2). W ten sposób można—jak to już w swoim czasie zauważyliśmy—ustanowić odpowiedniość dwujednoznaczną pomiędzy przekształceniami obu grup; i bezpośrednio widać, że przekształceniu tożsamościowemu (o ile ono istnieje) jednej grupy odpowiada przekształcenie tożsamościowe drugiej.

Przedewszystkiem jest widocznem, że w a r u n k i e m k o n i e c z n y m p o d o b i e ń s t w a j e s t, b y o b i e g r u p y p o s i a d a ł y t ę s a m ą l i c z b ę p a r a m e t r ó w i s t o t n y c h.

Dajmy, że mamy, jak zwykle, dwie grupy o r parametrach issotnych, i niechaj $X_1, \ldots, X_r$ będą r przekształceniami nieskończonostkowemi niezależnemi pierwszej grupy, $Y_1, \ldots, Y_r$ takiemiż przekształceniami drugiej. Niechaj

$$(3) \qquad y_i = F_i(x)$$

będą wzory, przy pomocy których zmienne x przekształcamy na zmienne y, w ten sposób, że wzory (1) przechodzą na wzory (2); jeżeli wzory (1) napiszemy (dla otoczenia przekształcenia nieskończonostkowego) w postaci zwykłej:

$$(4) \qquad x_i' = x_i + \frac{t}{1} \sum_{s=1}^{r} \lambda_s X_s x_i + \ldots$$

gdzie parametrami są wielkości $t\lambda_1, \ldots, t\lambda_r$, będzie:

$$(5) \qquad F_i(x') = F_i(x) + \frac{t}{1} \sum_{s=1}^{r} \lambda_s X_s F_i(x) + \ldots$$

Przez wprowadzenie zmiennych y zamiast zmiennych x przekształcenie nieskończonostkowe X_s staje się przekształceniem nieskończonostkowem Υ_s, wyrażonem w zmiennych y Jeżeli $X_1, \ldots, X_r$ są przekształceniami wprost niezależnemi, to takiemiż będą $\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_r$; a równania (5) przejdą na następujące:

$$(6) \qquad y_i' = y_i + \frac{t}{1} \sum_{s=1}^{r} \lambda_s \Upsilon_s y_i + \ldots.$$

Lecz takąż postać powinny, na zasadzie uczynionych założeń, mieć wzory przekształceń grupy (2); powinny mianowicie dać się wyrazić (zawsze w otoczeniu przekształcenia tożsamościowego) w postaci:

$$(7) \qquad y_i' = y_i + \frac{t}{1} \sum_{s=1}^{r} \lambda_s' Y_s y_i + \ldots$$

i dlatego te wzory winny zlewać się z wzorami (6), gdyż, jak zauważyliśmy już, że w obu grupach odpowiadać winny sobie przekształcenia tożsamościowe; a więc także, według zasady ciągłości, odpowiadać sobie winny przekształcenia, zawarte w odpowiednich otoczeniach przekształceń tożsamościowych. Stąd wypływa, że wyrażenia Υ powinny być kombinacyami liniowemi o stałych spółczynnikach wyrażeń Y, i odwrotnie. Innemi słowy, jeżeli dwie grupy są podobne, to przekształcenia nieskończonostkowe niezależne jednej z nich powinny przekształcać się na przekształcenia nieskończonostkowe niezależne drugiej. Z drugiej strony jest jasnem, że, gdy to zachodzi, dwie grupy są podobne. Mamy tedy:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby dwie grupy o r parametrach istotnych były podobne, jest, by istniały związki pomiędzy zmiennemi jednej i drugiej grupy, pozwalające od przekształceń nieskończonostkowych jednej przechodzić do przekształceń nieskończonostkowych drugiej.

Z powyższego dowodzenia wynika, że jeżeli zamiast przekształceń Y przyjmiemy przekształcenia Υ jako przekształcenia nieskończonostkowe niezależne grupy drugiej, wtedy parametrami kanonicznemi przekształcenia, które w grupie drugiej odpowiada przekształceniu (4) w pierwszej, będą $t\lambda_1, \ldots, t\lambda_r$, t. j. parametry kanoniczne przekształcenia (4). Stąd, jeżeli dwie grupy są podobne, wtedy przez odpowiednią zmianę parametrów można sprawić to, że odpowiadające sobie przekształcenia dwu grup będą miały te same wartości parametrów.

Nadto, gdy przekształcenia Υ_s będą równe przekształceniom X_s, to nawias $(\Upsilon_h \Upsilon_k)$ będzie równy nawiasowi $(X_h X_k)$, a więc nawiasy te wyrażą się liniowo przez Υ_s i X_s odpowiednio, z temi samemi spółczynnikami stałemi c_{hks}; innemi słowy, jest jasnem, że obie grupy mają tę samą budowę, t. j. są holoedrycznie izomorficzne (patrz § poprzedzający). Stąd: Dwie grupy podobne są holoedrycznie izomorficzne.

Nie można twierdzić, że, odwrotnie, dwie grupy holoedrycznie izomorficzne są podobne, i aby to miało miejsce, potrzeba, aby spełniały się pewne warunki.

Aby to pokazać, dajmy, że pomiędzy przekształceniami $X_1, \ldots, X_r$ jest $\varrho \leqslant r$ przekształceń bezwzględnie niezależnych, nie połączonych żadnym związkiem liniowym o spółczynnikach, będących funkcyami zmiennych x; niechaj temi przekształceniami będą $X_1, \ldots, X_\varrho$, a pozostałe niechaj wyrażają się przez nie w ten sposób:

$$(8) \qquad X_{\varrho+h} = \sum_{s=1}^{\varrho} \chi_{hs}(x)\, X_s.$$

Jeżeli teraz dwie grupy są podobne, jeżeli więc istnieje przekształcenie, zamieniające przekształcenie nieskończonostkowe jednej grupy na takież przekształcenie drugiej, trzeba, by przekształcenia $\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_r$, na które zamieniają się odpowiednio przekształcenia $X_1, \ldots, X_r$, posiadały własności tych ostatnich, t. j. aby pierwsze ϱ z pomiędzy z nich były bezwzględnie niezależne (t. j., aby nie zachodził pomiędzy niemi żaden związek o spółczynnikach stałych) i aby pozostałe $r-\varrho$ przekształceń dały się wyrazić przez ϱ pierwszych przy pomocy związków, podobnych do związku (8). W związkach tych spółczynniki $\psi_{hs}(y)$, występujące zamiast spółczynników $\chi_{hs}(x)$, powinny być temiż samemi funkcyami $\chi(x)$, w których za zmienne x podstawiono ich wyrażenia w zmiennych y. Z drugiej strony, te wyrażenia Υ powinny być takie, że ich kombinacye nawiasowe po dwa, prowadzą do układu stałych c_{hks}, dokładnie identycznego z układem stałych, utworzonym z wyrażeń X. Widzimy tedy, że:

Warunkiem koniecznym na to, aby dwie grupy izomorficzne były podobne, jest, by, po obraniu w jakikolwiek sposób przekształceń niezależnych X grupy pierwszej, istniał dla grupy drugiej układ przekształceń $\Upsilon_1, \ldots, \Upsilon_r$, mający równocześnie wyżej wskazane własności, mianowicie: by liczby c, otrzymane dla tego układu, były identyczne z liczbami c, otrzymanemi dla układu przekształceń X; aby pierwsze ϱ przekształceń Υ były bezwzględnie niezależne, pozostałe zaś $r-\varrho$ wyrażały się liniowo przez pierwsze, ze spółczynnikami $\psi_{hs}(y)$ takiemi, że różnice $\chi_{hs}(x) - \psi_{hs}(y)$, przyrównane do zera, dają układ $\varrho(r-\varrho)$ równań niesprzecznych, z których nie można wy-

rugować równocześnie albo wszystkich zmiennych x, albo wszystkich zmiennych y.

Jak widzimy, warunek powyższy jest warunkiem koniecznym podobieństwa dwu grup; jest on wszakże zarazem i dostatecznym, t. j. jeżeli on się spełnia, to można zawsze znaleść takie przekształcenie zmiennych x na zmienne y, aby przekształcenia nieskończonostkowe jednej grupy przechodziły na takież przekształcenia drugiej. Nie będziemy się tu zatrzymywali nad szczegółami dowodzenia tego twierdzenia w przypadku ogólnym, co do którego odsyłamy do Tomu I cytowanego wielokrotnie dzieła Liego (str. 341 i nast.); ograniczymy się tylko, idąc za tem dziełem, na przypadku szczególnym, w którym ϱ równa się r, t. j. w którym wszystkie r przekształceń nieskończonostkowych są bezwzględnie niezależne.

Ponieważ wiemy, że pomiędzy $n+1$ przekształceniami nieskończonostkowemi o n zmiennych zachodzi zawsze związek liniowy, przeto gdy $\varrho=r$, musi być $n \geqslant r$. Ponieważ dalej, na podstawie założenia, wszystkie przekształcenia X są liniowo niezależne, przeto w naszym przypadku nie istnieją funkcye χ, o których mowa w twierdzeniu powyższem, a twierdzenie to sprowadza się wprost do następującego:

Dwie grupy izomorficzne, z których pierwsza jest taką, iż jej r przekształceń nieskończonostkowych są bezwzględnie niezależne (a więc $n \geqslant r$), są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy i r przekształceń nieskończonostkowych drugiej grupy są bezwzględnie niezależne.

Aby dowieść tego twierdzenia, dajmy, że, obrawszy przekształcenia X pierwszej grupy, znaleźliśmy odpowiednio przekształcenia Υ drugiej, tak, że układ liczb c_{hks} dla jednych i drugich jest ten sam. Położmy:

$$X_k + \Upsilon_k = Z_k , \tag{9}$$

otrzymamy wtedy symbole przekształceń nieskończonostkowych Z, wyrażone już to w zmiennych x, już to w zmiennych y; ponieważ:

$$(X_h X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} X_s, \quad (Y_h Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} Y_s,$$

będzie:

$$(10) \qquad (Z_h Z_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} Z_s,$$

a stąd przekształcenia Z wytworzą grupę o r parametrach istotnych, której zmiennemi będą równocześnie zmienne x i y; wzory kanoniczne przekształcenia tej grupy otrzymamy odrazu, łącząc wzory kanoniczne obu grup danych dla tych samych wartości parametrów. Gdyż, jeżeli weźmiemy zwykłe wzory kanoniczne dla każdej z dwu grup i w nich zamiast X_h i Y_k odpowiednio położymy Z_k, wzory te pozostaną niezmienne, ponieważ wynik działania przekształceń Z na funkcyę samych zmiennych x jest ten sam, co wynik działania przekształceń X, a wynik tychże przekształceń Z na funkcyę samych zmiennych y jest ten sam, co wynik działania symboli Y. Lecz właśnie przez takie podstawienie powstaje grupa, którą wytwarzają przekształcenia Z.

Ponieważ założyliśmy, że przekształcenia X są bezwzględnie niezależne, przeto macierz spółczynników tych przekształceń, t. j. zwykła macierz spółczynników ξ musi być różna od zera. Jeżeli przez ζ oznaczymy spółczynniki przekształceń Z, to spostrzeżemy odrazu, że dla każdego przekształcenia Z pierwsze n spółczynników ζ są równe odpowiednio spółczynnikom ξ, a stąd macierz spółczynników ζ zawiera w sobie macierz spółczynników ξ, a więc jest także różna od zera. Wnosimy stąd, że i przekształcenia Z są bezwzględnie niezależne.

Rozważmy teraz układ równań o pochodnych cząstkowych:

$$(11) \qquad Z_k F = 0;$$

układ ten, na podstawie równań (10), jest układem zupełnym i jest też nieprzywiedlnym, gdyż przekształcenia Z są bez-

względnie niezależne. Układ ten będzie miał tedy $2n-r$ rozwiązań wspólnych. Jest jasnem, że $n-r$ z tych rozwiązań stanowi rozwiązania układu zupełnego nieprzywiedlnego $X_k F = 0$; są one funkcyami samych zmiennych x; inne $n-r$ z pomiędzy tych rozwiązań wspólnych są rozwiązaniami układu zupełnego nieprzywiedlnego $\Upsilon_k F = 0$, mianowicie są one funkcyami samych zmiennych y. Pozostaje jeszcze $2n-r-(n-r)-(n-r)$, t. j. r rozwiązań układu (11), niezależnych od powyższych; są one funkcyami zmiennych x i zmiennych y. Bo gdyby jedno z nich było funkcyą samych zmiennych x, to musiałoby być rozwiązaniem układu $X_k F = 0$, a więc nie byłoby niezależne od całek już znalezionych. Niechaj:

$$(12)\quad u_1(x), \ldots, u_{n-r}(x);\quad v_1(y), \ldots, v_{n-r}(y);\quad w_1(x,y), \ldots, w_r(x,y),$$

będą wszystkie całki niezależne układu (11). Można okazać, że u i w, uważane za funkcye zmiennych x, muszą być od siebie niezależne, t. j. że ich wyznacznik funkcyjny względem zmiennych x musi być różny od zera; podobnież różnym od zera jest wyznacznik funkcyjny wielkości v i w względem zmiennych y. W samej rzeczy, ponieważ u, v, w są całkami niezależnemi układu (11), przeto macierz funkcyjna:

$$(13)\quad \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u_{n-r}}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial u_{n-r}}{\partial x_n}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \ldots, & 0, & \frac{\partial v_1}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial v_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \ldots, & 0, & \frac{\partial v_{n-r}}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial v_{n-r}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial w_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial w_1}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial w_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial w_r}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial w_r}{\partial x_n}, & \frac{\partial w_r}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial w_r}{\partial y_n} \end{array} \right\|$$

musi być różna od zera. Gdyby wyznacznik funkcyjny:

$$\frac{\partial (u_1, \ldots, u_{n-r}, w_1, \ldots, w_r)}{\partial (x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \tag{14}$$

był zerem, wtedy dla jakiejkolwiek wartości k musiałyby zachodzić związki postaci:

$$\sum_{i=1}^{r} W_i \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n-r} U_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \tag{15}$$

gdzie W_i, U_j są funkcye zmiennych x i y. Mnożąc te związki przez ξ_{sk} (t. j. przez spółczynniki przekształceń X_s) i sumując względem k od 1 do n, mielibyśmy:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{r} \xi_{sk} W_i \frac{\partial w_i}{\partial x_k} = -\sum_{j=1}^{n-r} U_j \sum_{k=1}^{n} \xi_{sk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\sum_{j=1}^{n-r} U_j (X_s u_j) = 0. \tag{16}$$

Ponieważ wyrażenia w są całkami równań (11), przeto:

$$\sum_{h=1}^{n} \xi_{sk} \frac{\partial w_i}{\partial x_h} + \sum_{k=1}^{n} \eta_{sh} \frac{\partial w_i}{\partial y_k} = 0,$$

gdzie η_{sk} są spółczynniki, występujące w przekształceniach Y_s; mnożąc przez W_i i sumując od $i=1$ do $i=r$, znajdziemy:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n} \xi_{sk} W_i \frac{\partial w_i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} \eta_{sk} \left(\sum_{i=1}^{r} W_i \frac{\partial w_i}{\partial y_k} \right) = 0,$$

co, na mocy równań (16) sprowadza się do:

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_{sk} \left(\sum_{i=1}^{r} W_i \frac{\partial w_i}{\partial y_k} \right) = 0; \tag{17}$$

a ponieważ wyrażenia v są całkami równań $\Upsilon_s f = 0$, przeto:

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_{sk} \frac{\partial v_i}{\partial y_k} = 0. \qquad (i=1, \ldots, n-r). \tag{18}$$

Równania (17) i (18) utrzymują się dla każdej z wartości $s=1, 2, \ldots, r$. Stąd wypływa, że $n-r+1$ równań liniowych z n niewiadomemi, jakie otrzymujemy z równań (17) i (18), kładąc wielkości nieoznaczone η_k zamiast spółczynników η_{sk}, miałyby r układów rozwiązań na wielkości η, a więc nie mogłyby być wszystkie niezależne. Lecz rozwiązania, otrzymane tylko z równań (18), są niezależne, gdyż $v_1, \ldots, v_{n-r}$ są całkami niezależnemi układu $\Upsilon_s f = 0$, przeto macierz funkcyjna wielkości v względem zmiennych y nie może być zerem. Stąd rozwiązanie, otrzymane z równań (17) powinnoby być wynikiem liniowym rozwiązań, otrzymanych z równań (18), t. j. byćby powinno dla jakiejkolwiek wartości k:

$$\sum_{i=1}^{r} W_i \frac{\partial w_i}{\partial y_k} + \sum_{j=1}^{n-r} V_j \frac{\partial v_j}{\partial y_k} = 0; \tag{19}$$

równania te wraz z równaniami (14) wskazują, że macierz (13) byłaby tożsamościowo zerem, wbrew założeniu.

Powróćmy teraz do dowodzenia głównego.

Z wyników § 2 w Rozdziale II, wypływa, że jeżeli mieć chcemy układ n równań, pozostający niezmiennym dla wszystkich przekształceń grupy, wytworzonej z przekształceń Z, t. j. niezmienny przy zamianie zmiennych x na zmienne x' przy pomocy przekształceń pierwszej grupy danej, oraz przy zamianie zmiennych y na zmienne y' przy pomocy przekształceń drugiej grupy danej, mającej te same wartości parametrów, co pierwsza (i którą uważamy za odpowiadającą pierwszej), wtedy jest koniecznem i dostatecznem przyrównanie do zera n funkcyj całek (12). Otóż, jeżeli okażemy, że można obrać n rzeczonych funkcyj tych całek (12) tak, aby równania, otrzymane z przyrówna-

nia ich do zera, dały się rozwiązać tak względem zmiennych x, jak i względem y, i aby przedstawiały takie przekształcenie zmiennych x na zmienne y, które przekształcenia nieskończonostkowe X przeprowadzają na przekształcenia nieskończonostkowe Y, wtedy twierdzenie nasze będzie dowiedzione, skoro wykażemy istnienie przekształcenia, które pierwszą grupę zamienia na drugą. Utwórzmy tedy n następujących funkcyj całek (12) i przyrównajmy je do zera:

$$\begin{aligned} &v_1 - \Phi_1(u_1, \ldots, u_{n-r}) = 0, \ldots, v_{n-r} - \Phi_{n-r}(u_1, \ldots, u_{n-r}) = 0, \\ &w_1 - \Psi_1(u_1, \ldots, u_{n-r}) = 0, \ldots, w_r - \Psi_r(u_1, \ldots, u_{n-r}) = 0; \end{aligned} \tag{20}$$

tu Φ oznaczają funkcye niezależne, zresztą jakiekolwiek, argumentów, Ψ zaś są też funkcyami dowolnemi.

Układ (20) będzie z pewnością rozwiązalny tak względem zmiennych x, jak i względem zmiennych y, gdyż, jak już powiedziano, wyznacznik funkcyjny wielkości v i w względem zmiennych y jest różny od zera; ten zaś wyznacznik jest zarazem wyznacznikiem funkcyjnym pierwszych stron równań (20) względem zmiennych y. Podobnież, rozwiązując $n-r$ pierwszych z powyższych równań względem $u_1, \ldots, u_{n-r}$ (co można uczynić na zasadzie założenia o funkcyach Φ), można otrzymać układ równań, identyczny z powyższym, w którym zmieniono tylko u na v, i który, dla powodu analogicznego do wskazanego wyżej, będzie rozwiązalny względem zmiennych x.

Z drugiej strony, jeżeli chcemy mieć układ równań, otrzymany z przyrównania do zera n funkcyj całek(12) i rozwiązalny tak względem zmiennych x, jak i względem zmiennych y, to układ ten może mieć jedynie postać wskazaną. Albowiem, jeżeli przyjmiemy, że istnieje taki układ, rozwiązany względem zmiennych y, to podstawiwszy wartości tych zmiennych do każdej z całek $v_1, \ldots, v_{n-r}$ i $w_1, \ldots, w_r$, powinniśmy otrzymać całkę, będącą funkcyą samych wielkości x, a więc funkcyą wielkości $u_1, \ldots, u_{n-r}$; stąd z przyjętego układu otrzymalibyśmy układ równoważny, będący postaci (20).

Pozostaje wykazać, że przekształcenie zmiennych x na zmienne y, przedstawione przez równania (20), zamienia prze-

kształcenia X na przekształcenia Γ. Wynika to z następującego rozważania. Równania (20) przedstawiają układ równań niezmienniczych względem grupy przekształceń Z, a więc gdy z tego układu otrzymujemy jakimkolwiek sposobem jakieś równanie, to wynik działania Z, zastosowanego do strony pierwszej tego równania, musi być zerem. Rozwiążmy równania (20) względem zmiennych y, i niechaj będzie:

$$y_i - F_i(x) = 0, \tag{21}$$

musi być zatem $Z_k\,(y_i - F_i(x)) = 0$, t. j.

$$\Gamma_k\, y_i - X_k\, F_i(x) = 0.$$

Lecz wprowadziwszy do przekształceń X zmienne y na podstawie równania (21), mieć będziemy:

$$X_k = \sum_{i=1}^{r} X_k\, F_i(x)\, \frac{\partial}{\partial y_i},$$

a że:

$$\Gamma_k = \sum_{i=1}^{r} \Gamma_k\, y_i\, \frac{\partial}{\partial y_i},$$

przeto:

$$X_k = \Gamma_k,$$

czego właśnie należało dowieść.

Z dowodzenia tego wypływa jeszcze sposób, w jaki otrzymać można najogólniejsze przekształcenie, zamieniające przekształcenia X na przekształcenia Γ.

Zasługuje na wyróżnienie przypadek szczególny powyższego twierdzenia, w którym wszystkie nawiasy $(X_h\, X_k)$ są równe zeru, co ma miejsce, gdy wszystkie przekształcenia nieskończonostkowe grupy są wyjątkowe. (patrz § 8 Rozdz. II). Jeżeli mamy grupę, wytworzoną z przekształceń nieskończonostkowych:

$$\Gamma_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \Gamma_r = \frac{\partial}{\partial y_r},$$

której zatem wzorami przekształcenia są wprost:

$$y_1' = y_1 + \mu_1, \ldots, y_r' = y_r + \mu_r$$
$$y_{r+1}' = y_{r+1}, \ldots, y_n' = y_n, \qquad \text{(grupa przesunięć)}$$

o grupa ta jest oczywiście izomorficzna z daną i przekształcenia Γ są bezwzględnie niezależne. Stąd, przyjąwszy, że przekształcenia X są bezwzględnie niezależne, można zastosować twierdzenie, i będzie:

Grupa, której wszystkie $r \leqslant n$ przekształceń nieskończonostkowych są wyjątkowe i bezwzględnie niezależne, jest podobna do grupy przesunięć.

Jeżeli przyjmiemy, że $r=n$ i że dwie grupy izomorficzne są pojedyńczo-przechodnie, wtedy z pewnością n przekształceń nieskończonostkowych każdej z nich są bezwzględnie niezależne, i możemy powiedzieć: Dwie grupy holoedrycznie izomorficzne o tej samej liczbie zmiennych i pojedyńczo-przechodnie, są grupami podobnemi.

ROZDZIAŁ IV.

GRUPY, ZWIĄZANE Z DANĄ.

Mamy zamiar zebrać tu wszystkie własności główne pewnych grup, które określić się dają, gdy dana jest grupa zasadnicza. Grupy takie, które nazywać będziemy grupami, związanemi z daną, tworzyć można z różnych punktów widzenia; są niemi: 1) t. zw. grupa dołączona; 2) grupa budowy; 3) t. zw. grupa parametryczna; 4) grupa izomorficzna z grupą niepierwotną, a której elementami są rozmaitości, na jakie dzieli się przestrzeń przez jakikolwiek określony układ niepierwotności; 5) t. zw. grupy rozszerzone; 6) grupy wzajemne z grupami pojedyńczo-przechodniemi o n parametrach istotnych.

§ 1.

Grupa dołączona.

W § 7 Rozdziału II, badając nieprzechodniość względem grupy danej układu przekształceń nieskończonostkowych, dowiedliśmy, że układ przekształceń nieskończonostkowych $X_1, \ldots, X_r$,

należących do grupy o r parametrach istotnych, jest niezmienniczy względem tej grupy. Jeżeli przeto:

$$x_i' = f_i(x, a), \tag{1}$$

jest przekształceniem grupy, i jeżeli przez $X_1', \ldots, X_r$ oznaczymy przekształcenia X, napisane w zmiennych x', otrzymamy zawsze, jakiemikolwiek będą równania (1):

$$\sum_{s=1}^{r} e_s X_s = \sum_{s=1}^{r} e_s' X_s, \tag{2}$$

gdzie e i e' są stałe; stałe e' wyrażają się jako funkcye liniowe jednorodne stałych e ze spółczynnikami, które zależą jedynie od parametrów przekształcenia; mieć więc będziemy:

$$e_j' = \sum_{s=1}^{r} \varrho_{js}(a_1, \ldots, a_r)\, e_s. \tag{3}$$

Jeżeli zmieniamy $a_1, \ldots, a_r$, zmieniają się i spółczynniki ϱ_{js}; otoż można okazać, że przekształcenia (3), jeżeli w nich wielkości e uważamy za zmienne, tworzą grupę.

W samej rzeczy, na skutek przekształcenia $x_i'' = f_i(x', b)$ powinno być podobnie:

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{s=1}^{r} e_s' X_s' = \sum_{s=1}^{r} e_s'' X_s'', \\ \\ \displaystyle e_j'' = \sum_{s=1}^{r} \varrho_{js}(b_1, \ldots, b_r)\, e_s', \end{array}\right. \tag{4}$$

a tworząc przekształcenie, będące iloczynem dwu poprzednich, i oznaczając jego parametry przez $c_1, \ldots, c_r$ (patrz Rozdz. I § 2), mieć będziemy:

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum_{s=1}^{r} e_s'' X_s'' = \sum_{s=1}^{r} e_s X_s \\ e_j'' = \sum_{s=1}^{r} \varrho_{js}(c_1, \ldots, c_r)\, e_s, \end{cases}$$

stąd być musi:

$$e_j'' = \sum_{s=1}^{r}\sum_{\nu=1}^{r} \varrho_{js}(b_1, \ldots, b_r)\, \varrho_{s\nu}(a_1, \ldots, a_r)\, e_\nu = \sum_{\nu=1}^{r} \varrho_{j\nu}(c_1, \ldots, c_r)\, e_\nu$$

a zatem:

$$(6)\qquad \varrho_{j\nu}(c_1, \ldots, c_r) = \sum_{s=1}^{r} \varrho_{js}(b_1, \ldots, b_r)\, \varrho_{s\nu}(a_1, \ldots, a_r).$$

Strona druga wzoru (6) przedstawia spółczynnik ogólny wzorów liniowych jednorodnych, które otrzymujemy, tworząc iloczyn dwóch przekształceń (4) i (3); tożsamość (6) orzeka właśnie, że ten spółczynnik ogólny jest wartością wielkości ϱ, gdy zmieniają się wartości parametrów. Stwierdza to, że przekształcenia (3) tworzą grupę.

Każde przekształcenie (3) odpowiada pewnemu przekształceniu (1) grupy danej; tożsamość (6) wyraża, że parametrami przekształcenia, będącego iloczynem dwu przekształceń są wielkości c, t. j. właśnie parametry przekształcenia, będącego iloczynem dwu przekształceń grupy danej. Możemy więc powiedzieć, że przekształcenia (3) odpowiadają przekształceniom (1) w ten sposób, że iloczynowi dwóch przekształceń (1) odpowiada iloczyn dwu przekształceń (3).

Grupa, dana przez wzory (3), nazywa się g r u p ą d o ł ą c z o n ą d o d a n e j; jest ona widocznie grupą liniową jednorodną (patrz Rozdz. I § 2).

Ponieważ grupa dana posiada przekształcenia tożsamościowe, jest widocznem, iż będą takie wartości parametrów a, dla których wielkości e' wypadną tożsamościowo równe wielkościom e, t. j. grupa, dołączona do grupy danej, posiada przekształcenie tożsamościowe.

Znajdziemy teraz przekształcenia nieskończonostkowe grupy dołączonej. W tym celu przypomnijmy rozważania, podane w § 7 Rozdz. II-go. Pokazaliśmy tam, że aby przekształcenia $Y_1, \ldots, Y_q$ przedstawiały układ przekształceń nieskończonostkowych, niezmienniczy względem grupy, wytworzonej z przekształceń X, jest koniecznem i wystarcza, by było:

$$(7) \qquad (XY_j) = \sum_{v=1}^{q} g_{jv} Y_v,$$

gdzie g są wielkości stałe. Jeżeli położymy nadto:

$$(8) \qquad \sum_{s=1}^{q} c_s Y_s = \sum_{s=1}^{q} c_s' Y_s, \qquad (9) \qquad c_j' = \sum_{s=1}^{q} \varrho_{js} c_s,$$

wielkości ϱ będą określone przez równania różniczkowe:

$$(10) \qquad \frac{d\varrho_{vs}}{dt} + \sum_{j=1}^{q} g_{jv} \varrho_{js} = 0.$$

Aby wynik ten zastosować do naszego przypadku, w którym układ $X_1, \ldots, X_r$ jest niezmienniczy dla każdej grupy, wytworzonej z przekształcenia:

$$(11) \qquad X = \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_r X_r,$$

gdzie λ, jak zwykle, są jakiekolwiek wielkości stałe, dość położyć:

$$q = r, \quad Y_j = X_j, \quad c_j = e_s, \quad c_s' = e_s',$$

X zaś równe drugiej stronie wzoru (11); otrzymamy wtedy:

$$(12) \qquad (XX_j) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (X_i X_j) = \sum_{\nu=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_{ij\nu} \right) X_\nu,$$

stąd znajdziemy wartości na wielkości g:

$$(13) \qquad g_{j\nu} = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i c_{ij\nu},$$

a te podstawione w równania (10), dają równania różniczkowe, którym czynią zadość wielkości ϱ:

$$(14) \qquad \frac{d\varrho_{\nu s}}{dt} + \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_{ij\nu} \right) \varrho_{js} = 0.$$

Jeżeli teraz pomnożymy równania (14) przez e_s, zsumujemy względem s od 1 do r i uwzględnimy równania (9), po zmienieniu w nich wielkości c na wielkości e, znajdziemy:

$$\frac{de_\nu'}{dt} = -\sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_{ij\nu} \right) e_j' = 0,$$

t. j.

$$(15) \qquad \frac{de_\nu'}{dt} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{r} c_{ij\nu} e_j \right) = 0,$$

i to są równania różniczkowe, którym czynią zadość zmienne e', odnoszące się do grupy dołączonej. Równania te są tego samego typu, co równania (6) w § 12 Rozdziału II-go, a funkcye $\xi_{jh}(x')$, które w tych ostatnich występują, są w obecnym przypadku—przy uwzględnieniu zmiany wielkości x' na wielkości e'—równe wprost $-\sum_{j=1}^{r} c_{ij\nu} e_j'$.

Otóż funkcye ξ_{ih} tych równań (6), napisane w zmiennych x_r są spółczynnikami przekształceń nieskończonostkowych X_j, należących do grupy, określonej przez te równania różniczkowe; stąd i spółczynniki przekształceń nieskończonostkowych grupy dołączonej, które oznaczymy przez E_i, są równe $-\sum_{j=1}^{r} c_{ijv}\, e_j$, możemy więc napisać:

$$E_i = -\sum_{v=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r} c_{jiv}\, e_j\right)\frac{\partial}{\partial e_v} \qquad (i=1,2,\ldots,r),$$

a pamiętając, że wielkości c zmieniają znak, gdy przestawiamy wzajemnie ich dwa pierwsze skaźniki, można napisać:

$$E_i = \sum_{v=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{r} c_{jiv}\, e_j\right)\frac{\partial}{\partial e_v} \tag{16}$$

i to są właśnie szukane przekształcenia nieskończonostkowe.

Tą drogą znaleźliśmy r przekształceń nieskończonostkowych grupy dołączonej. Nie wynika stąd bynajmniej wszakże, by te wszystkie przekształcenia były niezależne. Ponieważ grupa dołączona zależy, podobnie jak dana, od r parametrów, widocznem jest, że przekształceń nieskończonostkowych niezależnych nie może być więcej, niż n; ale może się zdarzyć, że ich jest mniej, i wtedy grupa dołączona ma mniej niż r parametrów istotnych.

W każdym wszakże przypadku znalezione wyżej r przekształceń E wykazują własność zasadniczą grupy zasadniczej, oraz że grupa dołączona jest izomorficzną z daną; izomorfizm ten będzie naturalnie holoedryczny lub meriedryczny, stosownie do tego, czy przekształcenia E są lub nie są niezależne.

Dla przekonania się o tej własności, dość wykonać rachunek nawiasów, utworzonych z dwóch przekształceń E. Jeżeli mamy:

$$E_h = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jhi}\, e_j \right) \frac{\partial}{\partial e_i}, \qquad E_k = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jki}\, e_j \right) \frac{\partial}{\partial e_i},$$

będzie:

$$(E_h\, E_k) = \sum_{i=1}^{r} \left[E_h \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jki}\, e_j \right) - E_k \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jhi}\, e_j \right) \right] \frac{\partial}{\partial e_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left[\sum_{s=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jhs}\, e_j \right) c_{ski} - \sum_{s=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jks}\, e_j \right) c_{shi} \right] \frac{\partial}{\partial e_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} (c_{jhs}\, c_{ski} - c_{jks}\, c_{shi})\, e_j \frac{\partial}{\partial e_i},$$

a uwzględniając własność, że wielkości c zmieniają znak po przestawieniu wzajemnem dwóch pierwszych skaźników (Rozdz. I § 15), możemy napisać poprzednie wyrażenie w postaci:

$$(E_h\, E_k) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} \left\{ \sum_{s=1}^{r} (c_{jhs}\, c_{ski} + c_{kjs}\, c_{shi}) \right\} e_j \frac{\partial}{\partial e_i}.$$

Otóż na mocy związków pomiędzy wielkościami c, a mianowicie na mocy związku (3) w § 15 Rozdziału I-go, suma względem s w ostatniem wyrażeniu równa się:

$$-\sum_{s=1}^{r} c_{hks}\, c_{sji}, \quad \text{t. j.} \quad \sum_{s=1}^{r} c_{hks}\, c_{jsi},$$

a stąd.

$$(17) \qquad (E_h\, E_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} c_{jsi}\, e_j \right) \frac{\partial}{\partial e_i} = \sum_{s=1}^{r} c_{hks}\, E_j,$$

a to właśnie dowodzi izomorfizmu dwu grup (patrz Roz. III, § 3).

Badając konstrukcyę przekształceń E, widzimy, że ich spółczynniki pozostają niezmiennemi, jeżeli nie zmieniają się spółczynniki c_{jiv}; otrzymujemy więc odrazu rezultat:

Dwie grupy o r parametrach istotnych, dla których układ liczb c jest ten sam, t. j. dwie grupy holoedrycznie izomorficzne, mają tę samą grupę dołączoną.

Powstaje teraz ważna kwestya zbadania, jaki jest warunek konieczny i dostateczny na to, aby przekształcenia E były niezależne.

Dajmy, że istnieje związek liniowy o spółczynnikach stałych pomiędzy przekształceniami E:

$$(18) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i E_i = \sum_{v=1}^{r} \left[\sum_{j=1}^{r} e_j \sum_{i=1}^{r} \gamma_i c_{jiv} \right] \frac{\partial}{\partial e_v}.$$

Wyrażenia, zawarte w nawiasie kwadratowym, powinny być osobno równe zeru, stąd wyprowadzamy układ równań liniowych jednorodnych pomiędzy wielkościami e; a ponieważ wielkości e są niezależne, wynika stąd koniecznie znikanie pojedyńczych spółczynników, t. j.:

$$(19) \qquad \sum_{i=1}^{r} \gamma_i c_{jiv} = 0.$$

Jeżeli utworzymy tedy wyrażenie:

$$(20) \qquad \left(X_j \sum_{i=1}^{r} \gamma_i X_i \right) = \sum_{v=1}^{r} \left[\sum_{i=1}^{r} \gamma_i c_{jiv} \right] X_v,$$

spostrzeżemy, że strona druga jest tożsamościowo zerem, t. j. że przekształcenie nieskończonostkowe:

$$(21) \qquad \sum_{i=1}^{r} \gamma_i X_i,$$

skombinowane w nawiasy z innemi jakiemikolwiek przekształceniami nieskończonostkowemi tej grupy, daje zawsze jako wynik zero; jest to zatem jedno z przekształceń, zwanych wyjątkowemi (p. § 8, Rozdz. II-go). A zatem, jeżeli pomiędzy przekształceniami E zachodzi związek liniowy o spółczynnikach stałych, wtedy istnieć będzie odpowiednie przekształcenie nieskończonostkowe wyjątkowe grupy.

Z drugiej strony, niechaj istnieje przekształcenie nieskończonostkowe, mianowicie przekształcenie, dane przez wzór (21); druga strona równania (20) będzie zerem, będą zatem zachodziły równania (19), a więc i (18), a pomiędzy przekształceniami E zachodzić będzie związek liniowy o spółczynnikach stałych. Pomiędzy temi przekształceniami będzie tedy niezależnych tyle i tylko tyle, ile jest przekształceń wyjątkowych, niezależnych, należących do grupy. Możemy więc powiedzieć:

Jeżeli grupa dana nie zawiera przekształceń nieskończonostkowych wyjątkowych, to jej grupa dołączona zależy od r parametrów istotnych, i odwrotnie: jeżeli w grupie danej istnieje ν przekształceń nieskończonostkowych wyjątkowych, to grupa dołączona zależeć będzie od $r-\nu$ parametrów istotnych.

Tym sposobem, jeżeli wszystkie przekształcenia nieskończonostkowe grupy są wyjątkowe, t. j. gdy wszystkie przekształcenia grupy są parami przemienne (patrz Rozdz II, § 8), wtedy grupa dołączona sprowadza się do jednego przekształcenia tożsamościowego.

Jeżeli grupa dana zawiera przekształcenie nieskończonostkowe, wtedy jest z pewnością grupą niepierwotną (patrz Rozdz III, § 2), a stąd wnosimy, że:

Grupa dołączona grupy pierwotnej nie może mieć mniej, niż r parametrów istotnych, ma ich tedy dokładnie r.

---

§ 2.

Grupa budowy.

Powiedziano już wyżej, co rozumieć należy przez budowę grupy o r parametrach istotnych (patrz Rozdz. I, § 14). Drugie twierdzenie zasadnicze teoryi grup orzeka, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby przekształcenia nieskończonostkowe niezależne $X_1, \ldots, X_r$ mogły wytworzyć grupę o r parametrach istotnych jest, by nawiasy $(X_i X_j)$ dały się przedstawić jako kombinacye liniowe o spółczynnikach stałych c_{ijs} wyrażeń X. Ogół liczb c_{ijs} stanowi budowę grupy i pozostaje w bardzo ścisłym związku z samą grupą: własności grupy zależą w istocie rzeczy od natury tych liczb. Aby przekonać się o tem, dość np. uprzytomnić sobie, że we wszystkiem tem, co dotyczy izomorfizmu dwu grup, liczby c_{ijs} grają rolę podstawową. Możemy także przypomnieć to, co powiedziano o podgrupach niezmienniczych grupy danej, oraz o przekształceniach nieskończonostkowych wyjątkowych, zawartych w grupie. Tak np., jeżeli te wszystkie spółczynniki c_{ijs}, których pierwszy skaźnik jest stały, drugi i trzeci zmienne, są równe zeru, to stąd wypływa bezpośrednio, że przekształcanie X_i jest wyjątkowe, że więc wszystkie przekształcenia skończone grupy, wytworzonej z przekształcenia X_i, są przemienne z przekształceniami grupy. Jeżeli zaś są równemi zeru te spółczynniki c, których pierwszy skaźnik jest zawsze i, prócz tych, w których i trzeci skaźnik jest też i, wtedy na podstawie twierdzenia w § 8 Rozdziału II-go wynika stąd, że podgrupa, wytworzona z przekształcenia X_i, jest niezmiennicza względem grupy. Jeżeli dalej wszystkie spółczynniki c są równe zeru, wtedy przekształcenia grupy są parami

przemienne, sama zaś grupa sprowadza się do jednego przekształcenia tożsamościowego i t. d. Nadto w przytoczonych wyżej przypadkach możemy zawsze wywnioskować, że grupa dana jest niepierwotna (patrz Rozdz. III § 2) i t. d. i t. d.

Pomiędzy liczbami c zachodzą związki, znalezione przez nas w § 14 Rozdziału I-go, mianowicie:

$$(1)\qquad \begin{cases} c_{jis} + c_{ijs} = 0, \\ \sum_{s=1}^{r} (c_{jis}\, c_{skt} + c_{iks}\, c_{sjt} + c_{kjs}\, c_{sit}) = 0. \end{cases}$$

Gdy mamy grupę, to układ liczb c nie jest, jak wiemy, określony w sposób jedyny, lecz można znaleść nieskończenie wiele układów liczb c, odpowiadających tej samej grupie. Nie będziemy wszakże mówili, że każdemu z tych układów odpowiada budowa różna, gdyż przez budowę grupy rozumiemy ogół tych wszystkich układów.

Tu samo przez się nasuwa się pytanie o związkach, zachodzących pomiędzy temi nieskończenie wieloma układami liczb c. Okażemy, że przejście od jednego do innego układu liczb c dokonywa się przy pomocy przekształceń liniowych, które tworzą grupę. Grupę tę nazywać będziemy grupą budowy, a własności tej ostatniej są oczywiście ściśle związane z własnościami grupy danej.

Niechaj będzie układ r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych $X_1, \ldots, X_r$ grupy danej, której niechaj odpowiada układ liczb c, danych przy pomocy związku:

$$(2)\qquad (X_i\, X_j) = \sum_{s=1}^{r} c_{ijs}\, X_s.$$

Niechaj będzie inny układ przekształceń niezależnych $Y_1, \ldots, Y_r$ tejże grupy; każde z nich będzie kombinacyą liniową, o spółczynnikach stałych, wyrażeń X:

$$(3) \qquad Y_k = \sum_{i}^{r} h_{ki} X_i,$$

gdzie wyznacznik spółczynników h jest różny od zera; stąd:

$$(4) \qquad (Y_k\ Y_l) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_{ki} h_{lj} (X_i X_j).$$

Lecz układ liczb c, odpowiadających przekształceniom Y, a które oznaczymy przez c'_{kls}, dany jest przez równania:

$$(5) \qquad (Y_k\ Y_l) = \sum_{\sigma=1}^{r} c'_{kl\sigma}\ Y = \sum_{s=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} c'_{kls}\ h_{\sigma s}\ X_s.$$

Porównywając równania (4) i (2), otrzymujemy następujące wzory na przekształcenie spółczynników c na spółczynniki c':

$$(6) \qquad \sum_{\sigma=1}^{r} c'_{kl\sigma}\ h_{\sigma s} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_{ki}\ h_{lj}\ c_{ijs}\,. \qquad (s=1, \ldots, r).$$

Ponieważ wyznacznik spółczynników h jest różny od zera, przeto równania te dadzą się rozwiązać względem wielkości c', które tym sposobem wyrażają się liniowo przez wielkości c. Jeżeli teraz będziemy zmieniali wszelkiemi możliwemi sposobami spółczynniki h, bacząc tylko na to, by ich wyznacznik był różny od zera, to równania (6) dadzą nam nieskończenie wiele przekształceń liczb c na liczby c'. Możemy dowieść, że te przekształcenia tworzą grupę.

W rzeczy samej, zmieńmy wartości spółczynników h i niechaj nowemi ich wartościami będą h'; jeżeli przy tej zmianie spółczynniki c' przechodzą na spółczynniki c'', będziemy mogli napisać:

$$(7) \qquad \sum_{\sigma=1}^{r} c''_{kl\sigma} h'_{\sigma s} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h'_{ki} h'_{lj} c'_{ijs}, \qquad (s=1, \ldots, r).$$

Wyrugujmy wielkości c' pomiędzy równaniami (6) i (7), a to w celu otrzymania wzorów, wyrażających wielkości c'' przez wielkości c, t. j. wzorów na przekształcenie, będące iloczynem dwóch poprzednich przekształceń. Jeżeli pomnożymy równania (7) przez $h_{s\tau}$, a następnie zsumujemy je względem s od 1 do r, będzie:

$$(8) \qquad \sum_{\sigma=1}^{r} c''_{kl\sigma} \left(\sum_{s=1}^{r} h_{s\tau} h'_{\sigma s} \right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h'_{ki} h'_{lj} \sum_{s=1}^{r} c'_{ijs} h_{s\tau};$$

przy uwzględnieniu równań (6), widzimy, że ze strony drugiej wzoru (8) możemy wyrugować wielkości c', a wtedy otrzymamy:

$$\sum_{\sigma=1}^{r} c''_{kl\sigma} \left(\sum_{s=1}^{r} h'_{\sigma s} h_{s\tau} \right) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h'_{ki} h'_{lj} \sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{r} h_{ip} h_{jq} c_{pq\tau}$$

$$= \sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} h'_{ki} h_{ip} \right) \left(\sum_{j=1}^{r} h'_{lj} h_{jq} \right) c_{pq\tau}.$$

Jeżeli położymy wogólności:

$$(9) \qquad h''_{\sigma\tau} = \sum_{s=1}^{r} h'_{\sigma s} h_{s\tau},$$

to wzór poprzedni sprowadzi się wprost do postaci:

$$(10) \qquad \sum_{\sigma=1}^{r} c''_{kl\sigma} h''_{\sigma\tau} = \sum_{p=1}^{r}\sum_{q=1}^{r} h''_{kp} h''_{lq} c_{pq\tau},$$

t. j. do wzoru tego samego typu, co (6), a to stwierdza, że prze-

kształcenia (6) tworzą istotnie grupę. Parametry przekształcenia, będącego iloczynem dwu przekształceń, wyrażają się przez parametry czynników przy pomocy wzorów (9), z których ujawnia się także, że wyznacznik spółczynników h'' jest równy iloczynowi wyznaczników spółczynników h i h', a więc że jest różnym od zera, skoro różnym od zera jest każdy z tych dwóch ostatnich.

Ponieważ wielkości c' powinny czynić jeszcze zadość związkom takim, jak (1), wynika stąd przeto, że dla przekształceń grupy budowy układ równań (1) pozostaje niezmienny.

Jeżeli pomiędzy spółczynnikami c rozważać będziemy tylko te, w których pierwszy skaźnik jest mniejszy od drugiego, pominiemy zaś inne spółczynniki, które zresztą na podstawie pierwszego ze związków (1) są równe tamtym ze znakiem przeciwnym, to liczba wielkości c będzie wtedy $\frac{r^2(r-1)}{2}$, a pomiędzy niemi zachodzić będą związki dwuliniowe, t. j. drugie równania (1). Jeżeli te wielkości c uważać będziemy jako spółrzędne w przestrzeni o $\frac{r^2(r-1)}{2}$ wymiarach, to grupa budowy będzie w tej przestrzeni grupą kolineacyj, które pozostawiają bez zmiany pewien układ nadpowierzchni rzędu drugiego. Jeżeli zaś będziemy uważali wszystkie r^3 wielkości c jako spółrzędne w przestrzeni r^3-wymiarowej, to równania (1) określą w przestrzeni tej pewną rozmaitość, która pozostaje niezmienną dla wszystkich przekształceń grupy. Każdy punkt tej rozmaitości odpowiada pewnemu układowi liczb c, nadającemu się do przedstawienia budowy grupy o r parametrach istotnych.

§ 3.

Grupa parametryczna.

Widzieliśmy już, że mając grupę i dwa w niej przekształcenia odpowiednio o parametrach $a_1, \ldots, a_r$; $b_1, \ldots, b_r$, możemy wyrazić parametry $c_1, \ldots, c_r$ przekształcenia, będącego iloczynem tamtych dwóch, jako funkcye parametrów a i b, co można napisać tak:

(1) $$c_k = \varphi_k (a, b).$$

Podaliśmy już niektóre własności ogólne tych funkcyj φ; tak np. powiedzieliśmy, że dają się one rozwiązać tak względem wielkości a, jak i względem wielkości b. Obecnie pragniemy pogłębić badanie tych funkcyj, a to posługując się rozpatrzeniem t. zw. własności łączności owej, którą posiadać winny przekształcenia (patrz § 1 Rozdz. I-go).

Niechaj będą dwa przekształcenia: jedno o parametrach a. drugie o parametrach α, oraz trzecie o parametrach β.

Na mocy własności łączności owej powinniśmy otrzymać jeden i ten sam rezultat, czy pomnożymy pierwsze przekształcenie przez drugie i iloczyn ich przez trzecie, czy też pomnożymy pierwsze z nich przez iloczyn drugiego przez trzecie. Zobaczymy, do jakiej własności funkcyj φ prowadzi to spostrzeżenie.

Iloczyn pierwszych dwóch przekształceń posiada parametry:

$$\varphi_1 (a, \alpha), \ldots, \varphi_r (a, \alpha),$$

a iloczyn tego iloczynu przez trzecie przekształcenie ma parametry:

(2) $$\varphi_1 (\varphi (a, \alpha), \beta), \ldots, \varphi_r (\varphi (a, \alpha), \beta).$$

Iloczyn zaś trzech przekształceń, wykonany drugim ze wskazanych sposobów, będzie miał parametry:

(3) $$\varphi_1 (a, \varphi (\alpha, \beta)), \ldots, \varphi_r (a, \varphi (\alpha, \beta)).$$

Porównywając wyrażenia (2) z wyrażeniami (3), otrzymujemy związki tożsamościowe:

$$(4) \qquad \varphi_k(\varphi(a, \alpha)\beta) = \varphi_k(a, \varphi(\alpha, \beta)).$$

Uważajmy wielkości a za zmienne, które niechaj przekształcają się na zmienne a' za pomocą wzorów:

$$(5) \qquad a'_k = \varphi_k(a, \alpha),$$

gdzie wielkości α grają rolę parametrów, mogących przybierać i wartości β. Wzory (5) są to właśnie wzory grupy, którą nazywać będziemy grupą parametryczną. Grupa taka jest oczywiście określona przez grupę daną. W samej rzeczy, iloczyn przekształcenia (5) przez przekształcenie:

$$a''_k = \varphi_k(a', \beta)$$

równa się:

$$a''_k = \varphi_k(\varphi(a, \alpha), \beta),$$

co, na mocy związku (4), wychodzi na:

$$a''_k = \varphi_k(a, \varphi(\alpha, \beta)),$$

t, j. na inne z przekształceń, zawartych we wzorze (5), przy zmianie parametru α na parametr $\varphi(\alpha, \beta)$. Z tego dowodzenia wynika także, że parametr iloczynu wyraża się przez parametry czynników przy pomocy funkcyj φ, odpowiadających grupie danej, co stwierdza, że grupa parametryczna grupy danej jest parametryczną dla siebie samej.

Wiemy, że równania (1) są rozwiązalne względem wielkości b, więc i równania (5) będą rozwiązalne względem wielkości a, a zatem: grupa parametryczna grupy danej ma, jak i dana, r parametrów istotnych i jest zawsze pojedyńczo-przechodnią.

Łatwo widzieć, że grupa parametryczna zawiera przekształcenie tożsamościowe, jeżeli zawiera je grupa dana.

W rzeczy samej, jeżeli grupa dana zawiera przekształcnie tożsamościowe, to będą istniały takie wartości parametrów b, dla których we wzorze (1) wielkości c stają się tożsamościowo równe wielkościom a; jest tedy widocznem, że gdy w równaniach (5) położymy zamiast wielkości a te właśnie wartości parametrów b, to wielkości a' staną się równe wielkościom b, a to stwierdza istnienie przekształcenia tożsamościowego.

Przyjmijmy, że dana grupa wytworzona została z r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych $X_1, \ldots, X_r$; można dowieść, że i grupa parametryczna wytwarza się z r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych $A_1, \ldots, A_r$, które przedstawić można przy pomocy wzorów analogicznych do wzorów w § 14 Rozdz. I, t. j.:

$$A_j = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}(a) \frac{\partial}{\partial a_k}, \tag{6}$$

gdzie spółczynniki a_{jk} mają znaczenie, wskazane w § 4 Rozdziału I-go.

Przekształcenia grupy parametrycznej, dane przez wzory (5), powinny, jako tworzące grupę, czynić zadość równaniom różniczkowym charakterystycznym, t. j. równaniom typu równań (A) w § 4 Rozdziału I-go. Na podstawie tego, co w tamtem miejscu wyprowadzono, możemy powiedzieć, że muszą zachodzić związki postaci:

$$\frac{\partial \iota'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \bar{a}_{jh}(a') \bar{\psi}_{jk}(a), \tag{7}$$

w których wielkości $\bar{a}_{jh}$ i $\bar{\psi}_{jk}$ mają dla grupy tej takie samo znaczenie, jakie miały wielkości $\xi_{jh}(x')$ i $\psi_{jk}(a)$ dla grupy danej.

Otóż funkcye $\psi_{jk}(a)$, na mocy wzoru (a) w § 4 Rozdz. I, były pochodnemi wielkości b_j względem wielkości a_k dla ustalonych wartości szczególnych wielkości b; te pochodne rozumieć należy jako otrzymane z równań $c_i = \varphi_i(a, b)$, które dla grupy danej dają parametry iloczynu dwu przekształceń, wyrażone przez parametry czynników. W naszym przypadku parametrami a, b są wielkości α, β, funkcye zaś φ_i pozostają poprzednie, jak to wyżej okazano; widzimy więc, że poza zmianą nazwy zmiennych, funkcye $\overline{\psi}$ w tym przypadku są dawnemi funkcyami ψ.

Podobnież na mocy wzoru (6) w tymże § 4 Rozdz. I-go wielkości ξ_{jh} były wielkościami Ξ, w których zamiast wielkości b podstawiono też same, co wyżej, wartości szczególne, t. j. były pochodnemi wielkości x' względem wielkości b_j, w których uczyniono wskazane podstawienie.

Lecz w naszym przypadku wielkościami x'_h są a'_h, wielkościami b_j są β_j, równania zaś $x''_h = f_h(x', b)$, z których otrzymane być mają powyższe pochodne, stają się równaniami $a''_h = \varphi_h(a'\beta)$; stąd wypływa, że $\overline{a}_{jh}(a')$ są pochodnemi wielkości a'_h względem wielkości β_j, otrzymanemi z tych ostatnich równań, gdy w nich zamiast wielkości β położymy wartości specyalne ustalone.

Jeżeli z wzorów zwykłych $c_k = \varphi_k(a, b)$ wyznaczymy pochodne wielkości a względem wielkości b, a potem tym ostatnim nadamy wartości specyalne ustalone, otrzymamy—poza zmianą nazwy zmiennych—te same wyniki, co poprzednio. Czyniąc tak i uwzględniając wzór (c) w § 4 Rozdz. I-go, otrzymamy funkcye a_{jh}; możemy więc być pewni, że funkcye $\overline{a}_{jk}(a')$ zlewają się z funkcyami $a_{jk}(a')$, rozpatrywanemi kilkakrotnie tak w § 4 Rozdz. I-go, jak i gdzieindziej. Dlatego to równania różniczkowe (7) grupy parametrycznej będą postaci:

$$\frac{\partial a'_h}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} a_{jh}(a')\,\psi_{jk}(a)\,, \tag{8}$$

i dlatego przekształcenia nieskończonostkowe grupy parametry-

cznej dane są przez równania (6), rozpatrzone już przez nas w § 14 Rozdz. I-go. W tem to miejscu udowodniliśmy pewną własność symboli A, która ma dla nas wielką ważność; polega ona na tem, że nawiasy, utworzone z dwóch takich symboli, dają układ liczb c_{ijs} identyczny z układem, powstałym z nawiasów, utworzonych przez dwa symbole X. Oznacza to, że budowa grup danej i parametrycznej jest jednakowa, stąd: Grupa parametryczna jest holoedrycznie izomorficzna z daną.

I, oczywiście, możemy także powiedzieć:

Aby dwie grupy miały tę samą grupę parametryczną, koniecznem jest, by były holoedrycznie izomorficzne.

Grupa parametryczna grupy danej jest określona jednoznacznie tylko wtedy, jeżeli ustalony jest sposób, w jaki wzory przekształcenia zależą od parametrów. Inaczej mówiąc, jest widocznem, że jeżeli przyjmiemy, iż parametry grupy są równe funkcyom dowolnym niezależnym innych r wielkości, przedstawiających nowe parametry, to grupa parametryczna zmienia się. Ale łatwo pokazać, jakiego rodzaju zmianom podlega.

Niechaj $a_1^{(1)}, \ldots, a_r^{(1)}$ będą te nowe parametry, które wprowadzamy zamiast parametrów $a_1, \ldots, a_r$, i niechaj będzie:

$$a_j = \zeta_j (a_1^{(1)}, \ldots, a_r^{(1)}). \tag{9}$$

Niechaj wartościom $a_1, \ldots, a_r$ parametrów a odpowiadają wartości $\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_r^{(1)}$ parametrów $\alpha^{(1)}$; wzorami przekształcenia nowej grupy parametrycznej będą:

$$\zeta_k (a'^{(1)}_1, \ldots, a'^{(1)}_r) = \varphi_k (\zeta (a_1^{(1)}, \ldots, a_r^{(1)}), \zeta (a_1^{(r)}, \ldots, a_r^{(1)})).$$

Widzimy więc, że przechodzi się od dawnej grupy parametrycznej do nowej, kładąc za wielkości a i α grupy dawnej też same funkcye ζ wielkości $a^{(1)}$ i $\alpha^{(1)}$ grupy nowej; wnosimy stąd, że dwie grupy parametryczne są do siebie podobne (patrz § 4 Rozdz. III-go).

Łącząc wyniki, otrzymane w § 14 Rozdz. I-go z wynikami niniejszego paragrafu, możemy powiedzieć: Jeżeli znane są przekształcenia nieskończonostkowe A grupy parametrycznej, odpowiadające jedno po jednem w sposób zwykły przekształceniom nieskończonostkowym X grupy danej, to równania skończone tej grupy otrzymamy, całkując układ zupełny:

$$(10) \qquad \Omega_j F = X_j' F + A_j F = 0,$$

gdzie X' jest to X, napisane w zmiennych x'. Całki tych równań nie są wszakże, jak zwykle, zupełnie określone w funkcyi stałych, któremi w tym przypadku są wielkości x (patrz § 5 Rozdz. I-go). Lecz jeżeli znamy wartości parametrów, odpowiadające przekształceniu tożsamościowemu, grupa jest określoną. Odwrotnie, grupa, określona w sposób wskazany przez równania (10), ma grupę parametryczną, określoną przez wyrażenia A, i jako przekształcenia nieskończonostkowe tworzące—przekształcenia X.

Z tej własności skorzystamy przy udowodnieniu następującego twierdzenia, które jest odwrotnem do dowiedzionego wyżej:

Jeżeli dane są dwie grupy holoedrycznie izomorficzne, to można w nich zawsze zmienić parametry w ten sposób, aby te dwie grupy miały tę samą grupę parametryczną.

Niechaj $X_1, \ldots, X_r$ będą przekształcenia nieskończonostkowe grupy pierwszej, i niechaj będzie:

$$(X_j X_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s ;$$

Możemy zawsze wybrać przekształcenia nieskończonostkowe $Y_1, \ldots, Y_r$ grupy drugiej, aby było:

$$(Y_j\ Y_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis}\ Y_s,$$

i takie przekształcenia nieskończonostkowe $A_1, \ldots, A_r$ grupy parametrycznej dla grupy pierwszej, aby było:

$$(A_j\ A_i) = \sum_{s=1}^{r} c_{jis}\ A_s.$$

Otóż powiadamy, że w grupie drugiej można zmienić parametry tak, aby jej grupa parametryczna stała się grupą przekształceń A. W rzeczy samej, na mocy tego, co podano wyżej, jeżeli zcałkujemy równania układu zupełnego:

$$X_j' F + A_j F = 0$$

i ustanowimy, że w całkach wielkości x' mają być równe wielkościom x (odgrywającym rolę stałych całkowania) dla wartości a^0 parametrów a (w założeniu, że w grupie danej wartości a^0 odpowiadają przekształceniu tożsamościowemu), otrzymamy przekształcenia skończone pierwszej grupy. Jeżeli teraz podobnie zcałkujemy układ zupełny:

$$Y_j' F + A_j F = 0,$$

z tymże warunkiem, aby wielkości y' były równe wielkościom y dla wartości a^0 parametrów a, otrzymamy, jak powiedziano wyżej, grupę, której grupą parametryczną jest grupa przekształceń A, i której przekształceniami nieskończonostkowemi tworzącemi są przekształcenia Y_i, która zatem staje się grupą drugą, gdy w odpowiedni sposób zmienimy parametry. Tym sposobem twierdzenie jest dowiedzione.

Z tego twierdzenia wypływa własność podstawowa dwu grup holoedrycznie izomorficznych, mianowicie: m a j ą c d w i e t a k i e g r u p y, m o ż e m y z a p a r a m e t r y j e d n e j z n i c h w z i ą ć t a k i e f u n k c y e p a r a m e t r ó w d r u-

giej, aby funkcye φ (t. j. funkcye, przy pomocy których parametry iloczynu dwu przekształceń wyrażają się przez parametry dwu czynników) były jednakowe dla obydwóch grup.

Prowadzi to do udowodnienia, dla przypadku izomorfizmu holoedrycznego, własności, której w inny sposób dowiedliśmy już w § 3 Rozdz. III-go, mianowicie, że można sprawić, iż przekształcenia dwu grup izomorficznych odpowiadać będą sobie wzajemnie w ten sposób, iż iloczynowi dwu przekształceń jednej grupy odpowiada iloczyn odpowiednich przekształceń drugiej.

Ponieważ przyjmujemy, że przekształciliśmy drugą grupę w ten sposób, iż do obu grup należą sposobem wyżej wskazanym, te same funkcye φ, i rozumiemy jako odpowiadające sobie przekształcenia, mające te same wartości parametrów, to parametry $c_k = \varphi_k(a, b)$ iloczynu dwu przekształceń grupy pierwszej równać się będą parametrom iloczynu dwóch odpowiadających tamtym przekształceń grupy drugiej, a stąd oba iloczyny odpowiadać sobie będą wzajemnie, co właśnie dowodzi naszego twierdzenia.

Możnaby dowieść tejże własności i dla przypadku izomorfizmu meriedrycznego, lecz nie zatrzymujemy się nad tem, przypominając tylko, że dowód, podany w § 3 Rozdz. III, stosuje się i do tego przypadku.

Pokażemy tu jeszcze, że wzór na iloczyn dwu przekształceń, podany w § 9 Rozdz. I[1]), może posłużyć do zbudowania przekształceń nieskończonostkowych grupy parametrycznej grupy danej, której dane są przekształcenia nieskończonostkowe.

Niechaj będzie grupa o r parametrach, wytworzona z r przekształceń nieskończonostkowych $Z_1, \ldots, Z_r$; utwórzmy iloczyn dwu przekształceń:

$$x_i'' = e^{X_1'} x_i, \quad x_i' = e^{X_2} x_i, \tag{11}$$

[1]) Porów. E. Pascal: „Altre ricerche sulla formola del prodotto etc.“. (Ist. Lomb. (2), t. 35, 1902).

gdzie niechaj będzie:

$$(12) \qquad X_1 = v_1 Z_1 + \ldots + v_r Z_r; \quad X_2 = u_1 Z_1 + \ldots + u_r Z_r;$$

tu v i u są parametrami dwu przekształceń, X' zaś znaczy to samo, co X, lecz jest napisane w zmiennych x', zamiast w zmiennych x.

Przekształceniem wypadkowem będzie:

$$(13) \qquad x_i'' = e^{X_3} x_i,$$

gdzie X_3 powinno być także kombinacyą liniową wyrażeń Z. mianowicie:

$$(14) \qquad X_3 = u_1' Z_1 + \ldots + u_r' Z_r.$$

tu $u_1', \ldots, u_r'$ są fnnkcyami parametrów v i u, t. j.:

$$(15) \qquad u_h' = \varphi_h (u; v).$$

Wzery (15) są wzorami przekształceń grupy parametrycznej, jeżeli w nich u i u' uważamy jako zmienne, v zaś jako parametry przekształcenia.

Przy pomocy badań, zawartych w cytowanej w przypisku na str. 218 pracy, możemy wyznaczyć zupełnie funkcye φ_h i do tego wyznaczenia nie jest potrzebna znajomość wszystkich spółczynników wzoru na iloczyn dwu przekształceń: wystarcza znajomość niektórych tylko spółczynników z pomiędzy tych, które już obliczyliśmy wyżej. I w samej rzeczy wystarczy nam obliczenie tylko przekształceń nieskończonostkowych grupy, wytworzonej z przekształceń (15); te przekształcenia nieskończenie małe otrzymamy, wyobrażając sobie, że $v_1, \ldots, v_r$ są nieskończenie małe. Z tego powodu, w obliczaniu przekształcenia X_3 dość będzie ograniczyć się do wyrazów, zawierających potęgi wielkości $v_1, \ldots, v_r$, nie wyższe od pierwszej, co wychodzi na to samo, co powiedzenie, że we wzorze (7) § 9 w Rozdz. I-ym występować będą tylko wyrazy, mnożące pierwszą potęgę wielkości t, a które—jak wiemy—są następujące:

$$X_1 + t'\,\gamma'(X_1X_2) - t'^2\,\gamma''(X_2X_1X_2) - \dots$$

lub:

$$(16)\qquad X_i - t'\,\gamma'(X_2X_1) + \sum_{n=1}^{\infty} t^{2n}\gamma^{(2n)}(\overbrace{X_2 \dots X_2}^{2n}\,X_1).$$

Jeżeli w tym wzorze położymy za X_1 i X_2 wyrażenia ich przez symbole Z, to spółczynniki przy $v_k Z_1, \dots, v_k Z_r$ będą spółczynnikami przekształcenia nieskończonostkowego A_k grupy parametrycznej.

Ponieważ przekształcenia Z wytwarzają grupę, to na zasadzie drugiego twierdzenia Liego być winno:

$$(17)\qquad (Z_t\,Z_s) = \sum_h c_{tsh}\,Z_h\,,$$

gdzie spółczynniki c są stałemi budowy.

Z wzoru tego mamy:

$$(X_2\,X_1) = \sum_{t_1 s_1} u_{t_1}\,v_k\,(Z_{t_1}\,Z_k) = \sum_{t_1 k h} c_{t_1 k h}\,u_{t_1}\,v_k\,Z_h,$$

$$(X_2X_2\,X_1) = \sum_{t_1 t_2 s_1 k h} c_{t_1 k s_1}\,c_{t_2 s_1 h}\,u_{t_1}\,u_{t_2}\,v_k\,Z_h\,, \dots.$$

i wogólności:

$$(\overbrace{X_2 \dots X_2}^{2n}X_1 = \sum_{t_1 t_2 \dots\, s_1 s_2 \dots} \sum_{k h} \sum c_{t_1 k s_1}\,c_{t_2 s_1 s_2}\,c_{t_3 s_2 s_3} \dots c_{t_{2n} s_{n-1} h} \dots u_{t_1} u_{t_2} \dots v_k\,Z_{kh}$$

Podstawiając to we wzorze (16) i stosując dla skrócenia symbol, wprowadzony w nocie mojej o trzeciem twierdzeniu Liego[1]), t. j. kładąc:

$$\sum_{s_1 s_2 \dots s_{m-1}} \dots \sum c_{t_1 k s_1}\,c_{t_2 s_1 s_2}\,c_{t_3 s_2 s_3} \dots c_{t_m s_{m-1} h} = (t_1\,t_2 \dots t_m;\,kh),$$

[1]) Ist. Lomb. (2) 35, 1902.

otrzymamy przekształcenie nieskończonostkowe A_k w postaci:

$$(18)\quad A_k = \sum_h \left[\varepsilon_{hk} - \gamma' \sum_{t_1} (t_1 kh)\, u_{t_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1,\ldots,t_{2n}} (t_1,\ldots,t_{2n}; kh)\, u_{t_1},\ldots,u_{t_{2n}} \right] \frac{\partial}{\partial u_h},$$

gdzie ε_{kh} jest zerem dla $k \leqq h$, jednością dla $k=h$.

Znaleźliśmy tym sposobem funkcye φ wzoru (15) i otrzymujemy:

$$(19)\quad u'_h = u_h + \left(\sum_k v_h A_k\right) u_h + \frac{1}{2!}\left(\sum_k v_k A_k\right)^2 u_h + \ldots$$

jako wzory przekształcenia grupy parametrycznej.

---

§ 4.

Grupa niepierwotności.

Niechaj będzie grupa niepierwotna, której przekształceniami nieskończonostkowemi są $X_1,\ldots,X_r$, oraz równania, dające podział całkowitej przestrzeni n-wymiarowej na ∞^{n-m} przestrzeni m-wymiarowych (patrz § 2 Rozdz. III):

$$(1)\qquad \Omega_1(x_1) = c_1,\ \ldots,\ \Omega_{n-m}(x) = c_{n-m},$$

t. j. całki układu zupełnego:

$$(2)\qquad Y_1 F = 0,\ \ldots,\ \Omega_{n-m} F = 0.$$

Na mocy tego, co powiedziano w § 2 Rozdz. III-go, układ (2) musi być układem niezmienniczym dla grupy; stosując przeto jedno z działań X do którejkolwiek z całek (1), otrzymujemy funkcyę pierwszych stron wzorów (1), t. j. mamy wogólności:

(3) $$X_k \Omega_i = \gamma_{ki}(\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-m}).$$

Uważajmy teraz $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-m}$ za zmienne, oznaczmy je odpowiednio do równań (1) przez $c_1, \ldots, c_{n-m}$, i rozpatrzmy następujące przekształcenia nieskończonostkowe w tych zmiennych c:

(4) $$\Gamma_k = \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_{ki}(c) \frac{\partial}{\partial c_i}, \qquad (k=1, \ldots, r).$$

Możemy dowieść, że te przekształcenia wytwarzają grupę izomorficzną z daną. Grupę tę nazywać będziemy grupą niepierwotności grupy danej. Aby dowieść, że przekształcenia (4) wytwarzają grupę, rozpatrzmy, jak zwykle, nawiasy, utworzone z dwóch przekształceń Γ. Mamy:

$$\Gamma_k c_i = \gamma_{ki}(c) = X_k c_i,$$

$$\Gamma_k \gamma_{hi} = \sum_{s=1}^{n-m} \frac{\partial \gamma_{hi}}{\partial c_s} \Gamma_k c_s = \sum_{s=1}^{n-m} \frac{\partial \gamma_{hi}}{\partial c_s} X_k c_s = X_k \gamma_{hi},$$

a stąd:

$$(\Gamma_h \Gamma_k) = \sum_{i=1}^{n-m} (\Gamma_h \gamma_{ki} - \Gamma_k \gamma_{hi}) \frac{\partial}{\partial c_i} = \sum_{i=1}^{n-m} (X_h \gamma_{ki} - X_k \gamma_{hi}) \frac{\partial}{\partial c_i}.$$

Lecz:

$$(X_h X_k) c_i = X_h X_k c_i - X_k X_h c_i = X_h \gamma_{ki} - X_k \gamma_{hi},$$

a zatem:

(5) $$(\Gamma_h \Gamma_k) = \sum_{i=1}^{n-m} (X_h X_k) c_i \frac{\partial}{\partial c_i}.$$

Ten wzór wystarcza do zupełnego udowodnienia naszych dwóch twierdzeń. W samej rzeczy, ponieważ przekształcenia X tworzą grupę, będzie:

$$(X_h\ X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{hks}\ X_s\ ,$$

a zatem:

$$(X_h X_k)\, c_i = \sum_{s=1}^{r} c_{hks}\, X_s\, c_i = \sum_{s=1}^{r} c_{hks}\ \Gamma_s\, c_i\ ,$$

i wreszcie:

$$(\Gamma_h\ \Gamma_k) = \sum_{i=1}^{n-m}\sum_{s=1}^{r} c_{hks}\ \Gamma_s\ c_i \frac{\partial}{\partial c_s} = \sum_{s=1}^{r} c_{hks} \sum_{i=1}^{n-m} \gamma_{si} \frac{\partial}{\partial c_i} = \sum_{s=1}^{r} c_{hks}\ \Gamma_s\ .$$

Jeżeli ustalimy wartości $c_1, \ldots, c_{n-m}$, to sprawiony przez grupę daną podział przestrzeni n-wymiarowej na ∞^{n-m} przestrzeni m-wymiarowych, będzie określony. Grupa niepierwotności jest jednym z pomiędzy układów wielkości c, jest to mianowicie ten układ, który na podstawie grupy niepierwotnej danej, sprawia wzajemną przemianę ∞^{n-m} przestrzeni m-wymiarowych.

---

§ 5.

Grupy rozszerzone.

Dana grupa przekształceń określa inne grupy o większej liczbie zmiennych, mianowicie t. zw. grupy rozszerzone, któremi w krótkości chcemy tu się zająć.

Niechaj będzie dane przekształcenie:

$$(1) \qquad x_i' = f_i(x, a_1, \ldots, a_r), \qquad (i=1, \ldots, n)$$

i dajmy, że $x_1, \ldots, x_q$ $(q<n)$ są funkcyami ψ zmiennych $x_{q+1}, \ldots, x_n$, i podobnie $x_1', \ldots, x_q'$ funkcyami ψ' zmiennych $x'_{q+1}, \ldots, x'_n$. Naturalnie, funkcye ψ' nie są dowolnemi, skoro dane są funkcye ψ, gdyż pomiędzy wielkościami x i x' zachodzą związki (1); otrzymujemy tedy funkcye ψ', wykonywając przekształcenie (1) na zmiennych $x_{q+s} = \psi_s(x_1, \ldots, x_q)$ i rozwiązując te ostatnie równania względem zmiennych $x_1', \ldots, x_q'$.

Wraz ze zmiennemi x rozpatrzmy ich pochodne pierwsze p_{ij} $(i=1, \ldots, q;\ j=q+1, \ldots, n)$ zmiennych $x_1, \ldots, x_q$ względem pozostałych zmiennych $x_{q+1}, \ldots, x_n$ i wraz ze zmiennemi x' ich analogiczne pochodne p_{ij}'. Można znaleść łatwo wzory, wyrażające pochodne p' przez pochodne p i zmienne x; rozważając więc zbiór zmiennych $x_1, \ldots, x_n, p_{1,q+1}, \ldots, p_{b,n}$, otrzymamy wzory przekształcenia tego układu $n+q(n-q)$ zmiennych, przekształcenia, które będzie naturalnie typu specyalnego. Przekształcenie to nazwiemy przekształceniem rozszerzonem danego; jest ono, oczywiście, niezależne od specyalnej natury funkcyj ψ.

Pokażemy przedewszystkiem, jak znaleść wzory, wyrażające wielkości p' przez wielkości p i x. Weźmy pochodne równania (1) względem x_j' $(j=q+1, \ldots, n)$:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial x_i'}{\partial x_j'} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial x_{q+1}}\dfrac{\partial x_{q+1}}{\partial x_j'} + \ldots + \dfrac{\partial x_1}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_j'}\right) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_q}\left(\dfrac{\partial x_q}{\partial x_{q+1}}\dfrac{\partial x_{q+1}}{\partial x_j} + \ldots + \dfrac{\partial x_q}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_j'}\right) \\ \quad + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_{q+1}}\dfrac{\partial x_{q+1}}{\partial x_j'} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots \\ \quad + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}\dfrac{\partial x_n}{\partial x_j'} \end{array} \right.$$

Tu strona pierwsza jest p'_{ij} jeżeli $i=1,\ldots,q$; jest zerem, jeżeli $i=q+1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,n$; jest jednością, jeżeli $i=j$.

Rozpatrzmy wszystkie te równania (2), w których skaźnik j jest stały, i zaś większe od q, i zarazem jedno z równań (2), w którem i jest mniejsze od q lub równe q. Mamy wtedy układ $n-q+1$ równań liniowych względem pochodnych $\frac{\partial x_{q+1}}{\partial x'_j},\ldots,\frac{\partial x_n}{\partial x'_j}$, których jest $n-q$. Rugując te pochodne, otrzymujemy wielkości p'_{ij}, wyrażone przez wielkości $\frac{\partial f_i}{\partial x_h}$, które są funkcyami zmiennych x, i przez wielkości $\frac{\partial x_h}{\partial x_k}$ $(h\leqslant q,\ k>q)$, które są pochodnemi p_{hk}. Znajdujemy więc tym sposobem szukane wyrażenia pochodnych p'_{ij} przez pochodne p_{hk}.

Zatrzymamy się tylko na przypadku szczególnym tego postępowania ogólnego. Dajmy, że, obok układu zmiennych $x_1,\ldots,x_n$, mamy zmienną x_{n+1}, która nie występuje w n wzorach (1), lecz tylko we wzorze $(n+1)$-ym postaci specyalnej:

$$x'_{n+1}=x_{n+1}. \tag{3}$$

Przekształcenie, które przedstawiają równania (1) i (3), nie różni się w istocie od samego przekształcenia (1), jest tylko nową formą, w której napisać można to przekształcenie (1). Zastosujmy teraz poprzednią metodę, zakładając $q=n$. Jeżeli przez $p_1,\ldots,p_n$ oznaczymy pochodne wielkości $x_1,\ldots,x_n$ względem x_{n+1}, to biorąc pochodną równania (1), otrzymamy:

$$p'_i=\sum_{h=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_h}p_h. \tag{4}$$

Dajmy, że przekształcenia (1) są przekształceniami grupy o r parametrach istotnych; dowiedziemy ważnego twierdzenia:

Przekształcenia o $2n$ zmiennych $x_1,\ldots,x_n$, $p_1,\ldots,p_n$, przedstawione przez równania (1) i (4),

tworzą grupę o r parametrach istotnych, holoedrycznie izomorficzną z grupą daną.

Grupa ta nazywa się pierwszą grupą rozszerzoną grupy danej, i jest ona, jak widzimy, określona przez grupę daną, jak to wyżej powiedziano.

Możnaby rozważać nieskończenie wiele grup innych, które otrzymać można albo według metody ogólnej, obierając na q wartość specyalną, albo też dołączając do zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ jakąkolwiek liczbę s innych zmiennych i stosując postępowanie, podobne do dopiero co opisanego w przypadku $s=1$. Jeżeli zaś drogą wskazaną wprowadzimy, prócz pochodnych rzędu pierwszego, jeszcze pochodne rzędu drugiego, otrzymamy podobnie drugie grupy rozszerzone i t. d.

Aby dowieść, że przekształcenia (1) i (4) tworzą grupę, trzeba okazać, że gdy od wielkości p przechodzimy do wielkości p' przy pomocy przekształcenia, którego parametrami są wielkości a, od wielkości zaś p' do wielkości p'' za pomocą przekształcenia o parametrach b, to przejdziemy od wielkości p do wielkości p'' przy pomocy przekształcenia, będącego iloczynem dwóch poprzednich, t. j. przekształcenia, którego parametry c są połączone z parametrami a i b zwykłemi związkami. Otóż:

$$p'_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_h} p_h ,$$

$$p_k'' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x', b)}{\partial x_i'} p'_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x', b)}{\partial x_i'} \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_h} p_h$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x', b)}{\partial x_h'} \cdot \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial x_h} \right) p_h .$$

Ponieważ:

$$x_k'' = f_k(x, c) = f_k(x', b),$$

przeto:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x',b)}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial x_h} = \frac{\partial f_k(x,c)}{\partial x_h},$$

lub:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k(x',b)}{\partial x_i'} \frac{\partial f_i(x,a)}{\partial x_h} = \frac{\partial f_k(x,c)}{\partial x_h},$$

stąd zaś:

$$p_k'' = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial f_k(x,c)}{\partial x_h} p_h .$$

Do tegoż samego wzoru doszlibyśmy, wychodząc z przekształcenia $x''_k = f_k(x,c)$, które jest iloczynem dwu przekształceń danych. Tym sposobem dowiedliśmy, że przekształcenia rozszerzone tworzą grupę.

Jest widocznem, że jest to grupa o r-parametrach istotnych, jak i dana. Jeżeli grupa dana zawiera przekształcenie tożsamościowe, to i grupa rozszerzona będzie zawierała takież przekształcenie, a parametry przekształcenia tożsamościowego będą jednakowe dla obu grup.

Ponieważ grupa rozszerzona zawiera przekształcenie tożsamościowe, gdy je zawiera grupa dana, przeto, na zasadzie twierdzenia w § 12 Rozdz. I-go, zawierać będzie r przekształceń nieskończonostkowych niezależnych, które będą znane, jeżeli będą znane równania różniczkowe charakterystyczne grupy. Szukajmy tych równań różniczkowych dla grupy rozszerzonej.

Niechaj:

$$(5) \qquad \frac{\partial x_h'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \xi_{jh}(x') \psi_{jk}(a), \qquad (h=1,\ldots,n),$$

będą równania różniczkowe, odnoszące się do grupy zasadniczej

danej. Weźmy pochodne względem x_{n+1}, to z uwagi, że wielkości a są od tej zmiennej niezależne, będziemy mieli:

$$\frac{\partial p_h'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_{jh}(x')}{\partial x_s'} p_s' \right) \psi_{jk}(a);$$

kładąc zaś:

$$\pi_{jh}(x', p') = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_{jh}(x')}{\partial x'_s} p'_s, \tag{6}$$

napiszemy:

$$\frac{\partial p_h'}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \pi_{jh}(x', p') \psi_{jk}(a), \qquad (h=1,\ldots,n). \tag{7}$$

Równaniami różniczkowemi grupy rozszerzonej są równania (5) i (7), odpowiadające zaś im przekształcenia nieskończonostkowe są:

$$\sum_{h=1}^{n} \xi_{jh} \frac{\partial}{\partial x_h} + \sum_{h=1}^{n} \pi_{jh} \frac{\partial}{\partial p_h}; \tag{8}$$

można je napisać symbolicznie w postaci:

$$X_j + \Pi_j, \qquad (j=1,\ldots,r). \tag{9}$$

Zauważmy, że z wzoru (6) otrzymujemy bezpośrednio:

$$\frac{\partial \pi_{jh}(x, p)}{\partial p_s} = \frac{\partial \xi_{jh}(x)}{\partial x_s} \tag{10}$$

Przekształcenie nieskończonostkowe (8) lub (9) grupy rozszerzonej nazywa się przekształceniem nieskończonostkowem rozszerzonem, i mówić będziemy, że

$X_j + \Pi_j$ jest przekształceniem nieskończonostkowem rozszerzonem przekształcenia X_j.

Dowiedziemy teraz drugiej części twierdzenia, mianowicie, że grupa rozszerzona jest holoedrycznie izomorficzna z daną.

W tym celu utwórzmy nawiasy:

$$(X_j + \Pi_j, X_i + \Pi_i) F = (X_j X_i) F + (X_j \Pi_i) F + (\Pi_j X_i) F + (\Pi_j \Pi_i) F. \tag{11}$$

Łatwo widzieć, że z czterech wyrazów po stronie drugiej tylko pierwszy wyraz zawiera pochodne funkcyi F względem zmiennych x, pozostałe zaś wyrazy zawierają tylko pochodne względem wielkości p. Ponieważ przekształcenia $X_j + \Pi_j$ wytwarzają grupę, przeto strona pierwsza powyższego wzoru powinno być tożsamościowo równa wyrażeniu:

$$\sum_{s=1}^{r} c'_{jis} (X_s + \Pi_s) F, \qquad \text{(patrz § 14 Rozdz. I-go)}$$

którego wyrazami, zawierającemi tylko pochodne funkcyi F względem zmiennych x, są wyrazy, zawarte w wyrażeniu:

$$\sum_{j=1}^{r} c'_{jis} X_s F.$$

To ostatnie więc wyrażenie musi zlewać się tożsamościowo z wyrażeniem $(X_j X_i) F$, t. j. z wyrażeniem:

$$\sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s F.$$

Widać stąd, że stałe c' są równe stałym c, czyli że obie grupy są izomorficzne.

Widzieliśmy, że przekształceniem nieskończonostkowem rozszerzonem przekształcenia X_j jest $X_j + H_j$; widzimy dalej, że przekształcenie rozszerzone nawiasu $(X_j X_i)$ jest równe nawiasowi, utworzonemu z przekształcenia rozszerzonego dla X_j i przekształcenia rozszerzonego dla X_i, t. j. równa się stronie pierwszej równania (11).

Wynika to odrazu z wzorów poprzedzających, gdyż, jak dowiedziono, strona pierwsza wzoru (11) jest równa:

$$\sum_{s=1}^{n} c_{jis} (X_s + H_s) F,$$

lecz ponieważ $(X_j X_i)$ równa się $\sum_{s=1}^{r} c_{jis} X_s F$, przeto przekształcenie rozszerzone nawiasu $(X_j X_i)$ jest właśnie dane przez wzór poprzedni, a więc twierdzenie powyższe jest prawdziwe.

Wszystko, co powiedziano wyżej o grupie rozszerzonej specyalnej, daje się rozciągnąć na grupę rozszerzoną ogólniejszą, utworzoną w założeniu, że zmiennych niezależnych jest więcej niż jedna, i że wprowadzamy, prócz pochodnych rzędu pierwszego, pochodne wyższe. I wtedy utrzymuje się twierdzenie, że grupa rozszerzona jest holoedrycznie izomorficzna z daną. Ale nie będziemy zajmowali się tu temi rozważaniami ogólniejszemi.

---

§ 6.

Grupa wzajemna z grupą pojedyńczo-przechodnią o n parametrach istotnych.

W § 8 Rozdz. II-go postawiliśmy zagadnienie o wyznaczeniu grupy tych wszystkich przekształceń, które pozostawiają

bez zmiany pojedyńcze przekształcenia nieskończonostkowe grupy i obiecaliśmy rozwiązać to zagadnienie w przypadku specyalnym.

Otóż rozpatrzymy następujący przypadek: mamy n przekształceń nieskończonostkowych bezwzględnie niezależnych (patrz § 1 Rozdz. III-go), takich, że grupa, z nich utworzona, jest pojedyńczo-przechodnia. Oznaczmy te przekształcenia przez $Y_1, \ldots, Y_n$. Wprowadźmy nowy szereg zmiennych $x_1', \ldots, x_n'$ i oznaczmy przez $Y_1', \ldots, Y_n'$ przekształcenia Y, napisane w tych nowych zmiennych. Położmy:

$$(11) \qquad Y_k + Y_k' = Z_k ; \qquad (k=1, \ldots, n),$$

to wyrażenia Z będą symbolami n przekształceń nieskończonostkowych, bezwzględnie niezależnych (bo takiemi są, według założenia, przekształcenia Y i Y') o $2n$ zmiennych $x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$.

Układ równań:

$$(2) \qquad Z_k F = 0,$$

jest jak łatwo widzieć (na podstawie naszych założeń), układem zupełnym i nieprzywiedlnym; będzie on więc miał $2n-n=n$ całek niezależnych $w_1, \ldots, w_n$. Przyrównywając te całki do stałych dowolnych:

$$(3) \qquad w_1(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') = a_1, \ldots, w_n(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') = a_n,$$

otrzymamy to przekształcenie zmiennych x na zmienne x', przez które przekształcenia Y' stają się tożsamościowo równe przekształceniom Y. Wszystko to wypływa z rozważań zupełnie analogicznych do rozważań, podanych w § 5 Rozdz. III-go. A zatem najogólniejszem szukanem przekształceniem jest przekształcenie, dane przez wzory (3).

Otóż wzory (3) są rozwiązane względem parametrów, których jest n istotnych, a więc grupa przekształceń (3) będzie pojedyńczo-przechodnia. Nadto jest widocznem, że pomiędzy przekształceniami (3) zawiera się przekształcenie tożsamościowe,

gdyż przez to przekształcenie wyrażenia Y' stają się wprost wyrażeniami Y. Możemy więc powiedzieć, że istnieje n przekształceń nieskończonostkowych $X_1, \ldots, X_n$, które wytwarzają grupę (3), która, podobnie jak i dana, jest pojedyńczo-przechodnią. Przekształcenia te, na mocy twierdzenia w § 8 Rozdz. II-go, winny czynić zadość związkom:

$$(4) \qquad (Y_i X_j) = 0, \qquad (i,j=1,\ldots,n).$$

A zatem:

Grupa dana pojedyńczo-przechodnia o n parametrach istotnych określa inną grupę również pojedyńczo-przechodnią o n parametrach, której przekształcenia nieskończonostkowe są przemienne z przekształceniami grupy danej.

Ta grupa nazywa się wzajemną dla grupy danej. Jest widocznem, że zależność tych dwóch grup jest wzajemna.

Przy uwzględnieniu określenia przekształceń nieskończonostkowych wyjątkowych grupy, podanego w § 8 Rozdz. II-go, możemy powiedzieć:

Przekształcenia nieskończonostkowe, wspólne dwóm grupom wzajemnym pojedyńczo-przechodnim, są przekształceniami nieskończonostkowemi wyjątkowemi tych dwu grup.

Zauważmy jeszcze, że gdy $n=1$, wtedy obie grupy wzajemne stają się identycznemi.

ROZDZIAŁ V.

TEORYA NIEZMIENNICZA GRUP ROZSZERZONYCH.

---

§ 1.

Niezmienniczość Pfaffa względem grupy przekształceń równań i wyrażeń.

Niechaj będzie forma różniczkowa rzędu i stopnia 1-go o zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, t. j. wyrażenie postaci:

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{n} U_s \, dx_s ,$$

w którem $U_1, \ldots, U_n$ są funkcyami zmiennych x. Przyrównawszy tę formę do zera, otrzymujemy t. zw. równanie o różniczkach całkowitych rzędu pierwszego i stopnia pierwszego. Ważna część Analizy matematycznej poświęcona jest teoryi tych równań, a mianowicie ich t. zw. całkowaniu, t. j. szukaniu zależności skończonych pomiędzy zmiennemi x a stałemi, z których wynikają te związki różniczkowe. Pfaff pierwszy (w r. 1815) odkrył ważny rezultat, do tego całkowania odnoszący się, i dlatego równania,

o których mowa, nazwano r ó w n a n i a m i P f a f f a, a wyrażenia postaci (1) w y r a ż e n i a m i P f a f f a.

Teoryę niezmienniczą tych równań, albo układu takich równań, utworzyć można bez trudności, stosując wyniki, otrzymane w Rozdz. II, należy tylko oczywiście, zamiast grupy ze zmiennemi $x_1, \ldots, x_n$, rozważać grupę rozszerzoną, albowiem w równaniach Pfaffa, oprócz zmiennych x, występują i różniczniki tych zmiennych. Wynika stąd, że możemy, jeżeli chcemy, wprowadzić tam pochodne wielkości $x_1, \ldots, x_n$ względem x_{n+1}, t. j. $p_1, \ldots, p_n$, a to osiąga się bezpośrednio, dzieląc obie strony równania przez dx_{n+1}.

Tym sposobem zagadnienie o niezmienniczości równania Pfaffa względem grupy sprowadza się do zagadnienia o niezmienniczości równania:

$$\sum_{s=1}^{n} U_s p_s = 0 \tag{2}$$

względem pierwszej grupy rozszerzonej dla grupy danej. Stosownie do wyników § 2 w Rozdz. II-gim, warunek na to, aby równanie (2) pozostało niezmiennem dla wszystkich przekształceń grupy rozszerzonej, t. j. grupy, której przekształceniem nieskończonostkowem ogólnem jest (§ 5 Rozdz. IV):

$$X_j + \Pi_j, \tag{3}$$

polega na tem, by wyrażenie:

$$(X_j + \Pi_j) \sum_{s=1}^{n} U_s p_s , \tag{4}$$

znikało na mocy równania (2). Otóż, obliczając wyrażenie (4), zważając, że wyrażenia U zawierają pochodne p, i uwzględniając wartość wyrażenia Π_j, znajdziemy:

$$\sum_{s=1}^{n} X_j U_s p_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \Pi_j p_s = \sum_{s=1}^{n} X_j U_j p_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \pi_{j_s}$$

$$= \sum_{s=1}^{n} X_j U_s p_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_{j_s}}{\partial x_i} p_i ,$$

skąd widzimy, że wyrażenie (4) jest funkcyą liniową jednorodną wielkości $p_1, \ldots, p_n$. Jeżeli zatem znikanie tego wyrażenia ma być wynikiem związku (2) pomiędzy wielkościami x i p, potrzeba i wystarcza, aby wyrażenie (4) równało się iloczynowi pierwszej strony związku (2) przez pewną funkcyę ϱ samych zmiennych x. Ten wynik możemy odnieść, zamiast do równania (2), do odpowiadającego mu równania Pfaffa $\sum_{s=1}^{n} U_s dx_s = 0$, i do tego wystarczy, jeżeli wszystkie wielkości p pomnożymy przez dx_{n+1}, t. j. jeżeli zamiast wielkości p podstawimy różniczki zmiennych x. Czyniąc to w obliczeniu wyrażenia (4), mieć będziemy:

$$\sum_{s=1}^{n} X_j U_s dx_s + \sum_{s=1}^{n} U_s d(X_j x_s).$$

A zatem: warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby równanie Pfaffa pozostało niezmiennem dla przekształceń grupy o zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, jest, by było:

$$(5) \qquad \sum_{s=1}^{n} (X_j U_s) dx_s + \sum_{s=1}^{n} U_s d(X_j x_s) = \varrho_j(x) \sum_{s=1}^{n} U_s dx_s .$$

Wynik analogiczny otrzymamy, jeżeli zamiast jednego równania Pfaffa weźmiemy układ m takich równań:

$$(6) \qquad \sum_{s=1}^{n} U_{ks}\, dx_s = 0, \qquad (k=1,\ldots,m).$$

Przy pomocy podobnych, jak wyżej, rozumowań, dojdziemy do tego, że warunki konieczne i dostateczne na to, aby układ (6) był niezmienniczy względem grupy, której przekształceniami nieskończonostkowemi są przekształcenia X_j, stanowi zachodzenie rm równań:

$$(7) \qquad \sum_{s=1}^{n} X_s U_{ks}\, dx_s + \sum_{s=1}^{n} U_{ks}\, d(X_j x_s) = \sum_{\sigma=1}^{m} \varrho_{k\sigma}(x) \sum_{s=1}^{n} U_{\sigma s}\, dx_s.$$

$$(j=1,\ldots,r,\ k=1\ \ldots,\ m).$$

Gdy te warunki sprawdzają się, wtedy mówimy zwykle, że dany układ równań Pfaffa zezwala na przekształcenie nieskończonostkowe X_j. I łatwo widzieć, że gdy dany układ zezwala na dwa przekształcenia nieskończonostkowe X_j, X_i, to zezwala także na przekształcenie nieskończonostkowe $(X_j\ X_i)$.

Dowód tego twierdzenia przeprowadza się na tej zasadzie (patrz § 2 Rozdz. II-go), że podobne twierdzenie ma miejsce dla układów niezmienniczych równań skończonych. Otóż na zasadzie powyższego, badanie niezmienniczości układów równań Pfaffa względem grupy przekształceń X_j wychodzi na to samo, co badanie równań typu (2) względem grupy rozszerzonej, a przejście od jednego do drugiego badania dokonywa się wprost przez podstawienie przedewszystkiem różniczek $dx_1, \ldots, dx_n$, zamiast wielkości $p_1, \ldots, p_n$. I gdy układ równań Pfaffa zezwala w znaczeniu, powyżej podanem, na przekształcenie nieskończonostkowe X_i, to odpowiedni układ równań (2) zezwala (w znaczeniu zwykłem według § 2 Rozdz. II-go) na przekształcenie rozszerzone przekształcenia X_j, t. j. na przekształcenie (3), i odwrotnie. Stąd, ponieważ układ równań (2) na zasadzie powyż-

szego twierdzenia, zezwala na przekształcenie nieskończonostkowe $(X_j + \Pi_j, X_i + \Pi_i)$, przeto układ równań Pfaffa zezwalać będzie na przekształcenie, którego to ostatnie jest rozszerzeniem. Lecz wiemy (§ 5 Rozdz. IV-go), że jest to rozszerzenie przekształcenia $(X_j X_i)$, a zatem twierdzenie nasze jest udowodnione.

Jeżeli, zamiast układu równań Pfaffa, rozważamy wprost układ form o różniczkach całkowitych rzędu i stopnia pierwszego, t. j. t. zw. wyrażenia Pfaffa, to możemy powtórzyć powyższe rozważania, stosując, obok wyników § 2 Rozdz. II, wyniki § 1-go tegoż rozdziału. Tym sposobem dochodzimy do twierdzenia: warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby wyrażenie Pfaffa:

$$\sum_{s=1}^{n} U_s \, dx_s ,$$

pozostało niezmiennem dla wszystkich przekształceń grupy, wytworzonej z przekształceń X_j, jest, by było tożsamościowo:

$$(8) \qquad \sum_{s=1}^{n} X_j \, U_s \, dx_s + \sum_{s=1}^{n} U_s d\,(X_j x_s) = 0.$$

---

§ 2.

Niezmiennik jednoczesny wyrażenia Pfaffa i przekształcenia nieskończonostkowego.

Niechaj będzie wyrażenie Pfaffa U, jak w poprzedzającym paragrafie, oraz przekształcenie nieskończonostkowe X, którego

spółczynnikami niechaj będą wielkości ξ. Przy pomocy jakiegokolwiek przekształcenia $x'_s = f_s(x)$, tak U, jak i X sprowadzą się do postaci, w której zachodzić będą tylko zmienne x'; niechaj U'_s i ξ'_s będą spółczynniki tych form przekształconych. Będzie:

$$(1) \qquad U_s' = \sum_{h=1}^{n} U_h \frac{\partial x_h}{\partial x_s'}, \quad \xi_s' = \sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial x_s'}{\partial x_h}.$$

Weźmy sumę iloczynów $U_s' \xi_s'$:

$$\sum_{s=1}^{n} U_s' \xi_s' = \sum_{s=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} U_h \xi_k \frac{\partial x_h}{\partial x_s'} \frac{\partial x_s'}{\partial x_k}$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} U_h \xi_k \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_h}{\partial x_s'} \frac{\partial x_s'}{\partial x_k}.$$

Zauważmy, że:

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x_h}{\partial x_s'} \frac{\partial x_s'}{\partial x_k}$$ jest 1, gdy $h=k$; jest 0, gdy $h \lesseqgtr k$;

tym sposobem stąd wzór poprzedni sprowadza się wprost do następującego:

$$\sum_{s=1}^{n} U_s' \xi_s' = \sum_{h=1}^{n} U_h \xi_h,$$

co dowodzi, że wyrażenie:

$$(2) \qquad \Delta = \sum_{h=1}^{n} U_h \xi_h$$

pozostaje niezmiennem przy wszelkich przekształceniach wielkości zmiennych.

Mamy tym sposobem niezmiennik jednoczesny wyrażenia Pfaffa i przekształcenia nieskończonostkowego.

Okażemy, że ten niezmiennik A występuje we wzorze, wyrażającym wynik działania X na stronę pierwszą wyrażenia Pfaffa, wzorze, podanym w § poprzedzającym. Istotnie, znaleźliśmy tam, że:

$$XU = \sum_{s=1}^{n} XU_s\, dx_s + \sum_{s=1}^{n} U_s\, d(Xx_s). \tag{3}$$

Stronę drugą tego związku można tak napisać:

$$\sum_{s=1}^{n} XU_s\, dx_s + \sum_{s=1}^{n} U_s\, dx_s = \sum_{s=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial U_s}{\partial x_h}\, dx_s + \sum_{s=1}^{n} U_s \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_h}\, dx_h,$$

a dodając i odejmując wyraz:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \xi_h \frac{\partial U_s}{\partial x_s}\, dx_s,$$

możemy napisać (po przestawieniu w tym wyrazie skaźników s i h, gdy go bierzemy ze znakiem dodatnim):

$$XU = \sum_{s=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \xi_h \left(\frac{\partial U_s}{\partial x_h} - \frac{\partial U_h}{\partial x_s}\right) dx_s + \sum_{s=1}^{n} d(U_s\, \xi_s).$$

Wprowadzając zwykłe w tej teoryi oznaczenie:

$$\frac{\partial U_s}{\partial x_h} - \frac{\partial U_h}{\partial x_s} = (s, h), \tag{4}$$

otrzymujemy wreszcie:

$$(5) \qquad \varkappa U = \sum_{s=1}^{n} \left[\sum_{=1}^{n} \xi_h (s, h) \right] dx_s + d\Lambda .$$

Posługując się tym wzorem, możemy inaczej wyrazić twierdzenie, rozwinięte w § poprzedzającym, mianowicie twierdzenie o warunku koniecznym i dostatecznym na to, aby równanie Pfaffa $U = 0$ było niezmiennicze dla przekształceń grupy X. Przyrównywając stronę drugą wyrażenia (5) do ϱU, otrzymujemy, że: aby równanie $U = 0$ było niezmiennicze względem grupy, wytworzonej z przekształceń X, jest koniecznem i dostatecznem, by sprawdzał się związek:

$$(6) \qquad \sum_{s=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} \xi_h (s,h)\, ds + d\Lambda = \varrho U .$$

Jeżeli, zamiast jednego równania Pfaffa, mamy, jak w § poprzedzającym, układ takich równań, i jeżeli po drugiej stronie tego wzoru napiszemy kombinacyę liniową pierwszych stron tych równań, otrzymamy wzory, które powinny utrzymywać się, aby układ dany zezwalał na przekształcenie nieskończonostkowe X (patrz wzór (7) § poprzedz.).

Niezmiennik, o którym mowa w tym paragrafie, rozciągnąłem na przypadek wyrażenia o różniczkach całkowitych rzędu drugiego, a następnie na przypadek różniczek jakiegokolwiek rzędu.

Porówn. Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni ai differenziali totali di second'ordine, Ann. di mat. (**3**), **7**, § 3; Su di invariante simultaneo etc. Rend. Ist. Lomb. (**2**) **35**, 1902. O rozciągnięciu wzoru (5) na przypadek różniczek rzędu 2-go patrz prace moje: Sulla teoria invariantiva delle espresioni ai differenziali totali di 2 ordine etc. Rend. Acc. Lincei (**5**) **11**, 2 Sem. 1902, Trasformazioni infinitisime e forme a differenziali di 2° ord., tamże.

§ 3.

Układ dołączony do danego układu równań Pfaffa. Układy zupełnie całkowalne.

Wskazaliśmy już w § 10 Rozdz. Igo ścisły związek, zachodzący pomiędzy układami równań o pochodnych cząstkowych, liniowych jednorodnych rzędu pierwszego a układami równań liniowych o różniczkach całkowitych rzędu pierwszego (równań Pfaffa). Obecnie zajmiemy się tym związkiem nieco szczegółowiej.

Niechaj będzie układ $m<n$ równań Pfaffa:

$$\sum_{s=1}^{n} U_{ks}\, dx_s = 0, \qquad (k=1, \ldots, m),\ (m<n)$$

i dajmy, że równania te są liniowo-niezależne, t. j., że macierz spółczynników U, t. j.:

$$(2) \qquad \left\| \begin{matrix} U_{11}, \ldots, U_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ U_{m1}, \ldots, U_{mn} \end{matrix} \right\|, \qquad (m<n),$$

jest różna od zera. Wtedy istnieje takich układów $n-m$ n i e z a l e ż n y c h po n wielkości:

$$\xi_{11}, \ldots, \xi_{1n};\ \ldots\ldots;\ \xi_{n-m,1}, \ldots, \xi_{n-m,n},$$

że zachodzą tożsamościowo związki:

$$(3) \qquad \sum_{h=1}^{n} U_{kh}\, \xi_{ih} = 0. \qquad \begin{pmatrix} k=1, \ldots, m \\ i=1, \ldots, n-m \end{pmatrix}$$

W samej rzeczy, jeżeli w tych równaniach liniowych jednorodnych uważać będziemy wielkości ξ jako niewiadome, i bę-

dziemy zmieniali skaźnik k, otrzymamy układ m równań pomiędzy n niewiadomemi, dla którego macierz spółczynników, czyli macierz (2), jest różna od zera, t. j. ma charakterystykę m. Będziemy mieli tedy $n-m$ niezależnych układów rozwiązań, których macierz będzie też różna od zera. A zatem macierz:

$$(4) \qquad \left\| \begin{array}{c} \xi_{11}, \ldots, \xi_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n-m,1}, \ldots, \xi_{n-m,n} \end{array} \right\|,$$

jest różna od zera.

Utwórzmy układ równań o pochodnych cząstkowych liniowych jednorodnych rzędu pierwszego, których spółczynnikami niechaj będą wielkości ξ, t. j. układ:

$$(5) \qquad X_i F \equiv \sum_{s=1}^{n} \xi_{is} \frac{\partial F}{\partial x_s} = 0, \qquad (i=1, \ldots, n-m).$$

Ten układ $n-m$ równań nazywamy układem dołączonym do układu (1); same zaś strony pierwsze wzoru (5) stanowią to, co nazywamy układem przekształceń nieskończonostkowych dołączonym do układu (1).

Zależność pomiędzy układami (1) i (5) jest wzajemna, gdyż dawszy sobie przekształcenie (5) bezwzględnie niezależne (patrz § 8 Rozdz. I-go), t. j. takie, by macierz (4) była różna od zera, możemy znaleść m niezależnych układow wielkości U, czyniących zadość równaniom (3), możemy przeto utworzyć wyrażenia (1). I dlatego też i układ (1) nazywać będziemy układem dołączonym do układu (5).

Zauważmy, że układy (1) i (5) można wyrazić w postaci, pod pewnym względem, zwięźlejszej i bardziej symetrycznej. W samej rzeczy, zamiast układu (1) możemy napisać:

$$(6) \qquad \begin{Vmatrix} dx_1, \ldots, dx_n \\ \xi_{11}, \ldots, \xi_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n-m,1}, \ldots, \xi_{n-m,n} \end{Vmatrix} = 0,$$

rozumiejąc przez to znakowanie, że wszystkie wyznaczniki w liczbie m rzędu $n-m+1$, z tej macierzy otrzymane, są zerem. Podobnie, zamiast układu (5), można napisać:

$$(7) \qquad \begin{Vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \\ U_{11}, \ldots, U_m \\ \ldots\ldots\ldots \\ U_{m1}, \ldots, U_{mn} \end{Vmatrix} = 0.$$

Gdyż łatwo widzieć, że, na mocy równań (1), pomiędzy elementami każdego wiersza macierzy (6) zachodzi zawsze ten sam związek liniowy jednorodny; pomnóżmy pierwszą kolumnę macierzy (6) przez U_{k1}, drugą przez $U_{k2}, \ldots,$ n-tą przez U_{kn} i dodajmy otrzymane iloczyny, a otrzymamy zero dla każdego wiersza na podstawie równań (1) i (3). W podobny sposób możnaby tego dowieść dla macierzy (7).

W przypadku j e d n e g o równania Pfaffa układ dołączony składa się z $n-1$ równań.

Gdy układ dołączony (5) jest układem zupełnym (patrz Rozdz. I § 9), wtedy mówimy, że układ równań Pfaffa jest z u p e ł n i e c a ł k o w a l n y.

Jeżeli strony pierwsze równań (5) uważać będziemy za symbole przekształceń nieskończonostkowych i damy sobie punkt P w przestrzeni $x_1, \ldots, x_n$, to każdemu z tych przekształceń nieskończonostkowych odpowiadać będzie jeden k i e r u n e k, wychodzący z punktu P (patrz Rozdz. II § 5). Będzie $n-m$ kierunków niezależnych, wychodzących z tego punktu, które właśnie, jako niezależne, nie będą leżały w jednej rozmaitości liniowej

rzędu niższego od $n-m$, tak, że najniższy rząd rozmaitości, w której leżeć będą, będzie $n-m$.

Jakież będą równania tej rozmaitości liniowej? Ponieważ dostawy kątów, jakie każdy z $n-m$ kierunków tworzy z osiami spółrzędnych (prostokątnych), są proporcyonalne do $\xi_{11}, \ldots, \xi_{1n}$, jeżeli więc utworzymy macierz taką, jak (6), w której, zamiast elementów pierwszego wiersza, napiszemy $Y_1-x_1, \ldots, Y_n-x_n$, gdzie $x_1, \ldots, x_n$ są spółrzędne punktu P, wielkości zaś $Y_1, \ldots, Y_n$ są spółrzędnemi b i e ż ą c e m i rozmaitości, i przyrównamy tę macierz do zera, znajdziemy szukane równania rozmaitości:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} Y_1-x_1, & \ldots, & Y_n-x_n \\ \xi_{11}, & \ldots, & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{n-m,1}, & \ldots, & \xi_{n-m,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Lecz ponieważ układ macierzy (6) jest, jak powiedzieliśmy, równoważny układowi równań (1), przeto m równań rozmaitości liniowej $(n-m)$-wymiarowej, utworzonej przez $n-m$ kierunków niezależnych, odpowiadających $n-m$ przekształceniom X_f stanowić będą równania:

$$(9) \qquad \sum_{s=1}^{n} U_{ks}(Y_s-x_s)=0, \qquad (k=1, \ldots, m).$$

które, jak widzimy, budową swą ściśle związane są z układem (1) równań Pfaffa.

Dajmy, że układ (5) jest zupełny; będzie on miał wtedy m całek:

$$(10) \qquad \varphi_1-c_1=0, \ldots, \varphi_m-c_m=0,$$

a równania (10), ponieważ ich strony pierwsze czynią zadość równaniom (5), tworzą układ równań, zezwalający na przekształcenia nieskończonostkowe X_f. Na zasadzie zaś twierdzenia, po-

danego w § 5 Rozdz. II-go, rozmaitość m-wymiarowa, którą te równania przedstawiają. ma, jako rozmaitość liniową styczną, rozmaitość $n-m$ kierunków, odpowiadającą przekształceniom $X_1, \ldots, X_{n-m}$, t. j. rozmaitość, której równaniami są równania (9). Otóż, jeżeli $Y_1, \ldots, Y_n$ są spółrzędnemi punktu rozmaitości liniowej stycznej, to dwumiany $Y_1-x_1, \ldots, Y_n-x_n$, gdzie $x_1, \ldots, x_n$ są spółrzędnemi punktu P styczności, są proporcyonalne do różniczek $dx_1, \ldots, dx_n$, jeżeli te różniczki poddane są warunkowi, aby punkt $x_1, \ldots, x_n$, pozostawał zawsze na rozmaitości (10), t. j. aby było:

$$(11) \qquad d\varphi_1=0, \ldots, d\varphi_m=0.$$

Jest stąd widocznem, że równania (9) będą spełnione, gdy w nich, zamiast dwumianów Y_s-x_s, położymy różniczki dx_s, poddane warunkom (11); innemi słowy, ponieważ przy tem podstawieniu równania (9) przechodzą na równania (1), możemy przeto powiedzieć, że równaniom (1) czynią zadość równania (10), lub inaczej, że układowi m równań Pfaffa (1) czyni zadość m całek (10) z m stałemi dowolnemi.

Mamy tedy:

Gdy układ dołączony do układu Pfaffa jest układem zupełnym, t. j. gdy układ Pfaffa jest, według definicyi, układem zupełnie całkowalnym, wtedy całkuje się on przy pomocy tylu równań z tyloma stałemi dowolnemi, ile jest równań układu.

Możnaby, odwrotnie, przyjąć tę własność za podstawę definicyi układu Pfaffa zupełnie całkowalnego.

Układ $n-1$ niezależnych równań Pfaffa pomiędzy n zmiennemi jest zawsze zupełnie całkowalny.

Rozpatrzmy niezmiennik jednoczesny Δ (patrz § poprzedz.) wyrażenia Pfaffa, stanowiącego stronę pierwszą jednego z równań (1), i jednego z przekształceń X_i układu dołączonego. Niezmiennikiem jest oczywiście strona pierwsza równań (3), a więc

jest on zawsze równy zeru. Odwrotnie, jeżeli dane jest wyrażenie Pfaffa U i przekształcenie nieskończonostkowe X, i jeżeli niezmiennik Δ jest zerem tożsamościowo, to spółczynniki ξ przekształcenia nieskończonostkowego czynić będą zadość związkowi:

$$\sum_{h=1}^{n} U_h \xi_h = 0,$$

a stąd przekształcenie X należeć będzie do układu dołączonego do układu $X=0$, stąd:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby przekształcenie nieskończonostkowe należało do układu dołączonego danego układu równań Pfaffa, jest, by wszystkie niezmienniki jednoczesne pierwszych stron tych równań i danego przekształcenia nieskończonostkowego były równe zeru.

Z powyższego wynika także, że dwa układy, dołączony i dany, są związane ze sobą niezmienniczo.

Wyprowadzimy jeszcze postać, jaką przybiera układ dołączony do danego układu równań Pfaffa, jeżeli ten jest dany w postaci specyalnej, nie różnej zresztą zasadniczo od postaci (1), a otrzymanej przez rozwiązanie tej ostatniej względem różniczek m zmiennych. Rozwiążmy równania (1) względem różniczek $dx_{n-m+1}, \ldots, dx_n$; otrzymamy wtedy układ równoważny naturalnie układowi (1):

$$(12) \qquad dx_{n-m+k} - \sum_{s=1}^{n-m} V_{ks}\, dx_s = 0. \qquad (k=1, \ldots, m).$$

Znajdźmy wielkości ξ, należące do tego układu. Rozpatrzmy na chwilę formalnie układ (12), jako przypadek szczególny układu (1); wtedy spółczynniki ogólne U_{ks} będą miały wartości: $-V_{ks}$, gdy $s = 1, \ldots, n-m$; 1, gdy $s = n-m+k$; 0, gdy $s = n-m+\tau$, gdzie τ różne od k.

Związki (3) przybierają wtedy postać:

$$-\sum_{h=1}^{n-m} V_{kh}\,\xi_{ih} + \xi_{i,n-m+k} = 0;$$

z tych równań mamy wyznaczyć $n-m$ niezależnych układów ilości ξ, z których każda jest opatrzona skaźnikiem i. Mamy więc rozwiązać układ równań:

$$-\sum_{h=1}^{n-m} V_{kh}\,\xi_h + \xi_{n-m+k} = 0, \tag{13}$$

uważając jako niewiadome wielkości ξ, których liczba jest większa od liczby równań. Możemy rozporządzić dowolnie pierwszemi $n-m$ z pomiędzy nich i otrzymać wartości pozostałych. Położmy więc raz:

$$\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0, \ldots, \xi_{n-m} = 0,$$

a otrzymamy:

$$\xi_{n-m+k} = V_{k1},$$

t. j. pierwszy układ wielkości ξ, w którym jako p i e r w s z y skaźnik przyjmiemy $i=1$, to jest położymy:

$$\xi_{11} = 0,\ \xi_{12} = 0, \ldots, \xi_{1,n-m} = 0,\ \xi_{1,n-m+1} = V_{11}, \ldots, \xi_{1n} = V_{m1},$$

Położmy następnie w równaniach (13):

$$\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1,\ \xi_3 = 0, \ldots, \xi_{n-m} = 0,$$

a otrzymamy:

$$\xi_{n-m+k} = V_{k2},$$

a stąd układ drugi:

$$\xi_{21}=0,\ \xi_{22}=1,\ \ldots,\ \xi_{2,n-m}=0,\ \xi_{2,n-m+1}=V_{12},\ \ldots,\ \xi_{2,n}=V_{m,2}$$

i tak dalej, tak że będzie ogólnie: $\xi_{is}=0$ dla $s\leqslant n-m$ i różnego od i, $\xi_{ii}=1$, $\xi_{1,n-m+k}=V_{ki}$, a układ dołączony (5) przybierze postać:

$$X_iF=\frac{\partial F}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{m} V_{ki}\frac{\partial F}{\partial x_{n-m+k}}=0. \qquad (i=1,\ldots,n-m). \tag{14}$$

Mamy więc ważny rezultat: „jeżeli układ równań Pfaffa jest rozwiązany względem różniczek $dx_{n-m+1},\ldots,dx_n$, to układ dołączony jest rozwiązany względem $\frac{\partial F}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_{n-m}}$.“

Własnością charakterystyczną układu (14) i właściwą jedynie tej jego postaci jest to: że jeżeli układ ten jest zupełny (patrz § 10 Rozdz. I-go), to nawiasy $(X_i X_j)$, zamiast być, jak ogólnie, kombinacyami liniowemi przekształceń X, są zerami. Istotnie, jeżeli wykonamy działania, wskazane nawiasami, to łatwo widzieć, że spółczynniki pochodnych:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial x_{n-m}}, \tag{15}$$

będą wszystkie równe zeru, i pozostaną tylko wyrazy, zawierające $\frac{\partial F}{\partial x_{n-m}}$. Jeżeli przeto wynik ma być kombinacyą liniową pierwszych stron równań (14) (w każdej z nich występuje zawsze jedna i tylko jedna z pochodnych (15) i nadto ta z pochodnych (15), ktora występuje w jednem z tych równań, nie występuje już w żadnem innem), to musi być zerem. Układ zupełny, dany w postaci (14), nazywać będziemy specyalnym układem Jacobi'ego, pozostawiając nazwę ogólnego układu Jacobi'ego dla układu, mającego tę własność, że nawiasy $(X_i X_j)$ są równe zeru, bez potrzeby warunku, by przekształcenia X_i miały formę specyalną (14).

Dowiedziemy teraz ważnego twierdzenia, wykazującego związek ścisły pomiędzy całkowalnością zupełną układu równań Pfaffa a dopuszczalnemi przekształceniami nieskończonostkowemi układu, a mianowicie:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby układ równań Pfaffa był zupełnie całkowalny, jest, by zezwalał na wszystkie przekształcenia nieskończonostkowe, przedstawione przez jego własny układ dołączony.

Dowiedziemy z łatwością tego twierdzenia, rozważając dany układ Pfaffa w postaci (12), tak, by jego układ dołączony można było rozważać w postaci (14).

Gdy układ (14) jest zupełny, wtedy powinny spełniać się tożsamościowo warunki:

$$X_i V_{ks} - X_s V_{ki} = 0; \qquad (i,s=1,\ldots,n-m), \tag{16}$$

z drugiej strony warunki te są też i dostateczne na to, aby układ (14) był zupełny.

Zastosujmy wzór (6) § 2 i szukajmy warunków na to, aby każde równanie układu (12), np. równanie k-te, zezwalało na przekształcenie nieskończonostkowe typu, który przedstawia strona pierwsza równania (14). Zauważywszy, że w tym przypadku należy położyć we wspomnianym wzorze (6):

$$A=0,\ \xi_1=0,\ldots,\ \xi_{i-1}=0,\ \xi_i=1,\ \xi_{i+1}=0,\ldots,\ \xi_{n-m}=0,\ \xi_{n-m+h}=V_{hi}, \qquad (h=1,\ldots,m),$$

otrzymamy:

$$\sum_{s=1}^{n}\left[(s,i)+\sum_{h=1}^{m} V_{hi}\,(s,\ n-m+h)\right]dx_s, \qquad (i=1,\ldots,n-m), \tag{17}$$

jako wynik działania X_i na pierwszą stronę jednego z równań (12). We wzorze tym trzeba obliczyć dla naszego przypadku wartości wyrażeń (s,i) i $(s,n-m+h)$, których wartości ogólne dane są przez wzór (4) §-u poprzedzającego.

Spółczynniki w równaniu (12) mają wartości:

$$U_1 = -V_{k,1}, \ldots, U_{n-m} = -V_{k,n-m},$$
$$U_{n-m+1} = 0, \ldots, U_{n-m+k-1} = 0,$$
$$U_{n-m+k} = 1, \; U_{n-m+k+1} = 0, \ldots, U_n = 0,$$

przeto:

$$(s, i) = -\frac{\partial V_{ks}}{\partial x_i} + \frac{\partial V_{ki}}{\partial x_s} \quad \text{dla } s = 1, \ldots, n-m,$$

$$(s, i) = \frac{\partial V_{ki}}{\partial x_s} \quad \text{dla } s = n-m+1, \ldots, n,$$

$$(s, n-m+h) = -\frac{\partial V_{ks}}{\partial x_{n-m+h}} \quad \text{dla } s = 1, \ldots, n-m,$$

$$(s, n-m+h) = 0 \quad \text{dla } s = n-m+1, \ldots, n.$$

Wyrażenie (17) przyjmie tedy postać:

$$\sum_{s=1}^{n-m} \left[\left(\frac{\partial V_{ki}}{\partial x_s} - \frac{\partial V_{ks}}{\partial x_i} \right) - \sum_{h=1}^{m} V_{hi} \frac{\partial V_{ks}}{\partial x_{n-m+h}} \right] dx_s + \sum_{h=1}^{m} \frac{\partial V_{ki}}{\partial x_{n-m+h}} dx_{n-m+h},$$

co możemy jeszcze tak napisać:

$$(18) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=1}^{m} \frac{\partial V_{ki}}{\partial x_{n-m+h}} \left[dx_{n-m+h} - \sum_{s=1}^{n-m} V_{hs} \, dx_s \right] \\ + \displaystyle\sum_{s=1}^{n-m} \left[\left(\frac{\partial V_{ki}}{\partial x_s} - \frac{\partial V_{ks}}{\partial x_i} \right) + \sum_{h=1}^{m} \left(V_{hs} \frac{\partial V_{ki}}{\partial x_{n-m+h}} - V_{hi} \frac{\partial V_{ks}}{\partial x_{n-m+h}} \right) \right] dx_s. \end{cases}$$

Wyrażenie, zawarte tu wewnątrz drugiego nawiasu kwadratowego, jest stroną pierwszą równania (16); widzimy więc, że jeżeli równania (16) spełniają się tożsamościowo, wtedy wyrażenie (18) redukuje się do kombinacyi liniowej pierwszych stron równań (12). Na zasadzie tego, co powiedziano w § poprzedzającym, oznacza to, że równania (12) zezwalają na przekształcenia nieskończonostkowe układu dołączonego (14). Z drugiej strony, jeżeli wyrażenie (18) jest tożsamościowo równe kombinacyi liniowej stron pierwszych równań (12):

$$\sum_{h=1}^{m} \gamma_h \left[dx_{n-m+h} - \sum_{s=1}^{n-m} V_{hs}\, dx_s \right]$$

i porównamy spółczynniki różniczek dx_{n-m+h}, wyniknie stąd z koniecznością:

$$\gamma_h = \frac{\partial V_{ks}}{\partial x_{n-m+h}}.$$

Będzie zatem druga suma we wzorze (18) zerem tożsamościowo, t. j. niezależnie od wartości różniczek dx_s; a więc związki (16) będą spełnione i twierdzenie nasze dowiedzione.

---

§ 4.

Układy równań Pfaffa, złączone niezmienniczo z układem danym. Bibliografia teoryi równań Pfaffa.

Widzieliśmy w § poprzedzającym; że mając dany układ równań Pfaffa, wyprowadzamy z niego układ dołączony (równań o pochodnych cząstkowych), zjednoczony niezmienniczo z danym. Poszukamy teraz innych układów, mających własność analogiczną.

Przedewszystkiem, uważając jak w § poprzedzającym, strony pierwsze równań układu dołączonego, jako przedstawiające przekształcenia nieskończonostkowe X_t, zbadamy inny (prócz podanego w § poprzedzającym) związek ścisły pomiędzy temi przekształceniami nieskończonostkowemi a równaniami układu danego.

Ponieważ niezmiennik A, należący do jakiegokolwiek równania układu danego i do jednego z przekształceń nieskończonostkowych X_i, jest zerem, przeto, stosując wzór (6) § 2-go, widzimy odrazu, że wynik działania X_t na k-te równanie Pfaffa układu (1) dany będzie przez wzór:

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} \xi_{th}\left(\frac{\partial U_{ks}}{\partial x_h} - \frac{\partial U_{kh}}{\partial x_s}\right) dx_s ,$$

z którego okazuje się, że jeżeli zamiast działania X_t stosować będziemy toż działanie, pomnożone przez czynnik σ, będący funkcyą zmiennej x, to wynik tego drugiego działania będzie równy wynikowi pierwszego, pomnożonemu przez tenże czynnik σ; stąd zaś wypływa, że jeżeli układ równań Pfaffa zezwala na przekształcenie X_t, to zezwala także na przekształcenie σX_t.

Stąd wypływa także i to, że jeżeli układ dany zezwala na pewną liczbę przekształceń X, należących do układu dołączonego, to zezwala też na jakąkolwiek kombinacyę liniową tych przekształceń o spółczynnikach zmiennych.

To mając, rozważmy układ przekształceń nieskończonostkowych:

$$(1) \qquad \chi_1 X_1 + \ldots + \chi_{n-m} X_m ,$$

w którym przekształcenia X dane są przez wzór (5) §-u poprzedzającego, spółczynniki zaś χ są funkcyami dowolnemi.

Ten układ przekształceń nieskończonostkowych jest związany niezmienniczo z danym układem równań Pfaffa, gdyż jest widocznem, iż niezmiennik A, należący do jednego z równań (1) i do jednego z równań Pfaffa, jest zawsze zerem.

Jeżeli przeto stosować będziemy jedno z przekształceń (1) do stron pierwszych każdego z równań Pfaffa, otrzymamy inne formy Pfaffa, które będą wogóle różne od danych, lecz związane z niemi niezmienniczo. Tylko w przypadku, w którymby układ dany był zupełnie całkowalny, nowy układ, w ten sposób otrzymany, byłby identyczny z danym, a to na mocy twierdzenia w § poprzedzającym.

Zbadajmy teraz, w jaki sposób tworzy się ten układ. Przyjmijmy dla prostoty, że układ dany i dołączony dane są w postaciach zredukowanych (12 i (14) §-u poprzedzającego, t. j. że pierwszy jest postaci:

$$(2) \qquad \Delta_k \equiv dx_{n-m+k} - \sum_{s=1}^{n-m} V_{ks}\, dx_s = 0, \qquad (k=1,\ldots m),$$

drugi zaś postaci:

$$(3) \qquad X_i F \equiv \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} V_{ki} \frac{\partial F}{\partial x_{n-m+k}} = 0, \qquad (i=1,\ldots,n-m).$$

Wynik działania X_i na pierwszą stronę równania (2) podaliśmy już w § poprzedzającym (wzór (18)); jest on:

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V_{ki}}{\partial x_{n-m+k}} \Delta_k + \sum_{s=1}^{n-m} [X_i\, V_{ks} - X_s\, V_{ki}]\, dx_s .$$

Mnożąc przez χ_i i sumując względem i od 1 do $n-m$, otrzymalibyśmy wynik działania (1) na Δ_k. Lecz ponieważ funkcye χ są dowolne, to układ wszystkich równań, które otrzymujemy, przyrównywając te wyniki do zera, jest równoważny układowi

równań, które otrzymujemy, przyrównywając do zera wyrażenia (4). Jeżeli dołączymy dalej do tego układu układ równań $\Delta_h=0$, to wyrazy pierwsze wzorów (4) znikną i pozostaną równania:

$$(5) \qquad \Delta_{ki} \equiv \sum_{s=1}^{n-m} [X_i V_{ks} - X_s V_{ki}]\, dx_s = 0; \qquad \begin{pmatrix} k=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n-m \end{pmatrix},$$

które można i tak napisać:

$$(6) \qquad \Delta_{ki} \equiv \sum_{s=1}^{n-m} (X_i X_s)\, x_{n-m+k}\, dx_s = 0.$$

Doszliśmy tym sposobem do twierdzenia:
Układ równań Pfaffa:

$$(7) \qquad \Delta_k = 0, \quad \Delta_{ki} = 0,$$

jest związany niezmienniczo z układem danym $\Delta_k=0$. Dowiedziemy, że układ (7) jest zawsze układem zupełnie całkowalnym.

Oczywiście, układ (7) nie będzie się składał w ogólności z samych równań niezależnych, albowiem, skoro liczba zmiennych x jest n, to nie może być więcej, niż $n-1$ równań Pfaffa, niezależnych i zgodnych ze sobą. Gdy więc mówimy o układzie (7), to mamy zawsze na myśli układ możliwie największej liczby z pomiędzy równań (7), które są wzajemnie niezależne.

Poszukajmy przedewszystkiem układu dołączonego do układu (7), lub, co na jedno wychodzi, przekształceń nieskończonostkowych, które przedstawia układ dołączony. Jednem z tych przekształceń będzie:

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

lub:

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{n-m} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \xi_{n-m+k} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+k}},$$

gdzie spółczynniki ξ czynią, jak zwykle, zadość warunkom (3) §-u poprzedzającego, jeżeli tam zamiast wyrażeń U podstawimy odpowiednie spółczynniki układu (7). Spółczynnikami temi są:

	dla Δ_k:	dla Δ_{hi}:
	$-V_{k,1}$	$(X_i X_1)\, x_{n-m+h}$
	.	.
	.	.
	.	.
	$-V_{k,n-m}$	$(X_i X_{n-m})\, x_{n-m+h}$
$k-1$	0	0
	.	.
	.	.
	.	.
	0	0
	1	0
	0	0
	.	.
	.	.
	.	.
	0	0

Stąd spółczynniki ξ czynią zadość związkom:

$$(9) \qquad -\sum_{j=1}^{n-m} V_{kj}\, \xi_j + \xi_{n-m+k} = 0, \qquad (k=1, \ldots, m)$$

$$(10) \qquad \sum_{j=1}^{n-m} (X_i X_j)\, x_{n-m+h}\, \xi_j = 0. \qquad \begin{pmatrix} h=1, \ldots, m \\ i=1, \ldots, n-m \end{pmatrix}.$$

Uwzględniając wartości wyrażeń X (patrz wzory (3)), łatwo widzieć, że przekształcenie (8) można napisać wprost w postaci:

$$\sum_{j=1}^{n-m} \xi_j X_j;$$

istotnie mnożąc równania (3) (po zmianie w nich i na j), przez ξ_j i sumując względem j, otrzymujemy:

$$\sum_{j=1}^{n-m} \xi_j X_j = \sum_{j=1}^{n-m} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n-m} V_{kj} \xi_j \right) \frac{\partial}{\partial x_{n-m+k}};$$

na mocy wzoru (9) spółczynnik części drugiej sprowadza się wprost do ξ_{n-m+k}, a całe to wyrażenie do wzoru (8).

Zastosujmy teraz przekształcenie nieskończonostkowe (11) do jakiegokolwiek Δ_k; będzie:

$$\sum_{j=1}^{n-m} \xi_j X_j \Delta_k,$$

co, na mocy wzoru (4), można tak napisać:

$$\sum_{h=1}^{m} \sum_{j=1}^{n-m} \xi_j \frac{\partial V_{kj}}{\partial x_{n-m+h}} \Delta_h + \sum_{s=1}^{n-m} \sum_{j=1}^{n-m} \xi_j [X_j V_{ks} - X_s V_{kj}] dx_s.$$

Lecz część druga, gdy do niej zastosujemy tę samą redukcyę, która od wzoru (5) doprowadziła do wzoru (6), daje się napisać w postaci:

$$\sum_{s=1}^{n-m} \sum_{j=1}^{n-m} \xi_j (X_j X_s) x_{n-m+k} \cdot dx_s;$$

wyrażenie to jest zerem na mocy związku (10), któremu czynią zadość spółczynniki ξ. Widzimy stąd, że przekształcenie nieskończonostkowe (11), zastosowane do wyrażenia Δ_k, daje jako rezultat związek liniowy wyrażeń Δ_k, te wyrażenia przeto zezwalają na przekształcenia nieskończonostkowe układu dołączonego do układu (7). Ponieważ nadto układ (7) jest związany niezmienniczo z układem danym (2), przeto na te same przekształcenia nieskończonostkowe zezwalać będzie układ (7), t. j. układ

ten zezwala na wszystkie przekształcenia nieskończonostkowe, które przedstawia jego własny układ dołączony. A zatem, na podstawie twierdzenia w § poprzedzającym, układ (7) jest układem zupełnie całkowalnym. Doszliśmy tedy do następującego twierdzenia:

Jeżeli mając dany jakikolwiek układ (2) równań Pfaffa, zastosujemy do niego przekształcenia nieskończonostkowe jego układu dołączonego i przyłączymy do tak otrzymanego układu układ dany, otrzymamy inny układ równań Pfaffa (t. j. układ (7)), niezmienniczo związany z danym. Przekształcenia nieskończonostkowe, przedstawione przez układ dołączony do ostatniego, będą przekształceniami, na które zezwala też układ dany. Wreszcie, układ, otrzymany wskazanym sposobem, jest układem zupełnie całkowalnym.

Stąd wynika także, że stosując ponownie do układu (2) lub (7) przekształcenia nieskończonostkowe, które przedstawia układ dołączony do układu (7), t. j. powtarzając działania analogiczne do działania, stosowanego na początku tego §, nie doszlibyśmy do nowych układów równań Pfaffa.

Zbadajmy teraz przypadek szczególny, w którym $m=1$, t. j. w którym dane jest jedno tylko równanie Pfaffa:

$$\sum_{s=1}^{n} U_s\, dx_s = 0.$$

Aby przystosować się do wyżej użytych znakowań, wyobraźmy sobie, że to równanie zostało rozwiązane względem różniczki dx_n (zakładając, oczywiście, że U_n jest różne od zera); napiszmy więc:

$$(12) \qquad \Delta = dx_n - \sum_{s=1}^{n-1} V_s\, dx_s = 0, \quad V_s = -\frac{U_s}{U_n}.$$

Przekształceniami nieskończonostkowemi X_i układu dołączonego będą:

$$(13) \qquad X_i F \equiv \frac{\partial F}{\partial x_i} + V_i \frac{\partial F}{\partial x_n}, \qquad (i=1, \ldots, n-1)$$

Równania (6), t. j. równania $\Delta_{k_i}=0$ paragrafu poprzedzającego, będą postaci:

$$\sum_{s=1}^{n-1} (X_i X_s) x_n . dx_s = 0 .$$

Przy pomocy łatwych rachunków i stosując symbol, wprowadzony we wzorze (4) § 2, otrzymamy układ równań:

$$(14) \qquad \Delta_i \equiv \sum_{s=1}^{n-1} [(s,i) U_n + (i,n) U_s + (n,s) U_i] dx_s = 0, \qquad (i=1, \ldots, n-1),$$

który wraz z równaniem (12) przedstawia, na zasadzie powyższego, układ zupełnie całkowalny i niezmienniczo połączony z równaniem (12). A zatem układ, złożony z równań (12) i (14), b ę d z i e u k ł a d e m z u p e ł n y m, n i e z m i e n n i c z o z w i ą z a n y m z u k ł a d e m d a n y m; nazwijmy go układem V.

Ten układ zupełny V utworzony będzie z równań:

$$(15) \qquad \sum_{s=1}^{n} \xi_s' \frac{\partial F}{\partial x_s} = 0, \qquad (V)$$

w których wielkości ξ' są wszystkiemi możliwemi układami niezależnemi rozwiązań równań:

$$(16) \qquad \sum_{s=1}^{n-1} [(s,i) U_n + (i,n) U_s + (n,s) U_i] \xi_s' = 0, \qquad (i=1, \ldots, n-1).$$

$$(17) \qquad \sum_{s=1}^{n} U_s \xi_s' = 0.$$

Spółczynniki równań (16) są to wyrażenia, które zmieniają znak, gdy przestawiamy dwa z pomiędzy skaźników s, i; możemy je na chwilę przedstawić za pomocą symboli $[s, i]$, które czynią zadość związkowi $[s,i] = -[i,s]$. I dlatego to macierz spółczynników równań (16) jest wyznacznikiem półsymetrycznym rzędu $n-1$. Jeżeli przyjmiemy, że n jest parzyste, wyznacznik ten będzie zerem, równania (16) i (17) sprowadzą się najwyżej do n—1 równań, a układ V zawierać będzie przynajmniej jedno równanie.

Wogóle, jeżeli jest λ charakterystyką macierzy:

$$(18) \qquad \left\| \begin{matrix} 0, & [2,1], \ldots, & [n-1,1], & 0 \\ [1,2], & 0, \ldots, & [n-1,2], & 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ [1,n-1], & [2,n-1], \ldots, & 0, & 0 \\ U_1, & U_2, \ldots, & U_{n-1}, & U_n \end{matrix} \right\|,$$

układ (15) składać się będzie z $n-\lambda$ równań niezależnych.

Macierz poprzednia pozostaje w najściślejszym związku z macierzą:

$$(19) \qquad \left\| \begin{matrix} 0, & (21), \ldots, & (n-1,1) & (n,1) \\ (12), & 0, \ldots, & (n-1,2) & (n,2) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ (1,n), & (2,n), \ldots, & (n-1,n), & 0 \\ U_1, & U_2, \ldots, & U_{n-1}, & U_n \end{matrix} \right\|$$

której charakterystyka jest — jak tego łatwo dowieść — liczbą niezmienną dla każdego prze-

kształcenia danej formy Pfaffa. Nie możemy wszakże wchodzić w bliższe szczegóły co do tego przedmiotu.

Zbadamy jeszcze tylko przypadek, w którym charakterystyką macierzy (19) jest liczba 2. Wtedy znikać muszą tożsamościowo wyznaczniki rzędu trzeciego, t. j.:

$$\begin{vmatrix} U_i, & U_j, & U_h \\ 0, & (i,j), & (i,h) \\ (h,i), & (h,j), & 0 \end{vmatrix}$$

t. j. będzie:

$$U_i(j,h) + U_j(h,i) + U_h(i,j) = 0.$$

Widzimy stąd, że wszystkie elementy pierwszych $n-1$ wierszy macierzy (18) staną się zerami, a sama macierz (18) będzie miała charakterystykę 1, układ przeto V stanie się identyczny z układem dołączonym równania Δ, t. j. z układem (13). Lecz V jest układem zupełnym, takim więc będzie i układ (13), a zatem równanie Δ będzie zupełnie całkowalne. Możemy więc powiedzieć: jeżeli macierz (19) ma charakterystykę 2, wtedy równanie (12) jest zupełnie całkowalne.

Inne ważne zagadnienie z teoryi niezmienniczości równań Pfaffa dotyczy szukania najogólniejszego przekształcenia nieskończonostkowego, które pozostawia takie równanie bez zmiany. Nie będziemy wchodzili w szczegóły, dotyczące tego zagadnienia, a podamy tylko spis prac głównych, odnoszących się do tej teoryi.

Jeżeli pominiemy próby Eulera i Monge'a, to początki tej teoryi znajdujemy u Pfaffa (Abh. de Berl. Ak., 1814 — 15, s. 76), który posługuje się nią w zagadnieniu o całkowaniu równań o pochodnych częściowych, które najściślej z teoryą tą jest związane. Tak nazwane zagadnienie Pfaffa polega na całkowaniu równania o pochodnych całkowitych rzędu pierwszego przy pomocy najmniej-

szej liczby całek, a rozwiązanie tego zagadnienia zależy od rozwiązania równań o pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. Jeżeli μ jest charakterystyką macierzy (19), to najmniejsza liczba całek jest $\frac{\mu}{2}$ dla μ parzystego, $\frac{\mu+1}{2}$ dla μ nieparzystego. Innemi słowy, dana forma różniczkowa może, przy pomocy przekształcenia zmiennych, być zredukowana do formy, zawierającej odpowiednio $\frac{\mu}{2}$ lub $\frac{\mu+1}{2}$ wyrazów. Znalezienie tych wyrazów zależy od całkowania układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Po pracach Pfaffa nastąpiły prace Jacobi'ego, które rzuciły wiele światła na ten przedmiot i posunęły teoryę (Crelle, **2**, s. 317 i 347, **17**, s. 97).

Do następnych ważnych prac należą prace Natani'ego (Crelle, **58**, s. 301), Clebscha (Crelle, **59**, s. 190, **60**, s. 193, **61**, s. 146, **65**, s. 257), Grassmanna: (Die Ausdehnungslehre, Berlin, 1862), Frobeniusa (Crelle, **82**, s. 230, **86**, s. 1 i 54), Mayera (Math. Ann., **5**, s. 448, **17**, s. 523), Darboux'a (Bull. des sciences math. (2), **6**, s. 14 i 49, Compt. Ren., **94**, s. 835).

Z punktu widzenia teoryi przekształceń i niezmienników zasadniczemi są: liczne prace Liego (Tow. nauk w Chrystyan., 1873, s. 320, Archiv. for Math, **2**, s. 338, Leipz. Ber., 1896, s. 405), Mayera (cyt. wyżej oraz Math. Ann., **6**, s. 162 i 192, **8**, s. 313, **12**, s. 132 i t. d.), Engela (Leipz. Ber., 1889, s. 157, 1890, s. 192, 1896, s. 413, 1899, str. 296), Ed. v. Webera (Leipz. Ber., 1898, s. 207). Wymieniamy tu nadto C. Rusjana: Math. Ann., **50**, p. 247 (1878) i „Teoryę przekształceń Pfaffa", ogłoszoną w „Pracach mat.t.-fiz." **8**, s. 61—98, r. 1897 i **9**, s. 61—102, r. 1898.

Wykład tej teoryi zawiera dzieło Forsytha (Th. of. Diff. Equ. I, Cambridge, 1890, przekład niemiecki, Lipsk, 1893), oraz nowa książka Ed. v. Webera (Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Diffg. erster Ordnung, Lipsk, 1900), na końcu której znajdujemy zupełną listę prac o tym przedmiocie.

Analogiczne badania dla różniczek rzędu 2-go i wyższego podjął w ostatnich czasach E. Pascal (Compt. Rend., **130**, 1900, Math. Ann., **54**, Rend. Ist. Lomb. (2), **33**, 1900, s. 287, 675, **34**, 1901, s. 563, 1180, **35**, 1902, s. 344, 691, Annali di Mat. (3), **7**, Rend. Acc. Lincei (5), **11**, 1902, 2-gi sem.).

§ 5.

Niezmienniki różniczkowe grupy danej. Parametry różniczkowe.

W §§ 1 i 2 Rozdziału II-go ustanowiliśmy zasady teoryi niezmienniczości układu funkcyj i układu równań skończonych względem danej grupy przekształceń. Jeżeli rozszerzymy grupę w sposób, wskazany w § 5 Rozdz. IV-go, i rozważać będziemy funkcyę niezmienniczą lub niezmiennik grupy rozszerzonej, otrzymamy to, co nazywa się niezmiennikiem różniczkowym grupy danej. To pojęcie ogólne niezmiennika różniczkowego wprowadził Lie (patrz zwłaszcza Math. Ann., **24**, s. 537); specyalizowane rozmaitemi sposobami, obejmuje ono w sobie, jako przypadki szczególne, pojęcia, któremi, z innych punktów widzenia, zajmowali się różni autorowie.

Wiemy, że grupa nieprzechodnia (a taką jest zawsze grupa, w której liczba r parametrów jest niższa od liczby zmiennych) posiada zawsze pewną liczbę niezmienników. Otóż, jeżeli mamy daną jakąkolwiek grupę o r parametrach, to będzie można wyznaczyć takie jej rozszerzenie (rzędu 1-go, 2-go..), aby liczba zmiennych grupy rozszerzonej była wyższa od liczby parametrów, aby zatem grupa rozszerzona była nieprzechodnia. Widzimy tedy, iż można zawsze znaleść nieskończenie wiele niezmienników różniczkowych, należących do grupy danej. Ponieważ zaś z drugiej strony niezmienniki znaleść można przy pomocy jedynie procesów eliminacyi, gdy znane są wzory przekształcenia grupy (patrz § 1 Rozdz III-go), przeto jest rzeczą jasną, że niezmienni-

ki różniczkowe grupy można znaleść zawsze bez całkowania.

Jeżeli rozważana grupa jest grupą rzutową (patrz § 3 Rozdziału I-go), wtedy niezmienniki różniczkowe nazywają się niezmiennikami różniczkowemi rzutowemi.

Jeżeli, zamiast funkcyj niezmienniczych grupy rozszerzonej, rozważać będziemy układy równań niezmienniczych, wtedy, zamiast niezmienników różniczkowych grupy danej, otrzymamy układy równań różniczkowych, które pozostaną niezmienne przy przekształceniach grupy, t. j. zezwalać będą na przekształcenia grupy danej. W ten sposób pozyskujemy środek stosowania teoryi przekształceń do teoryi równań różniczkowych i osiągnięcia przez to ważnych korzyści.

Jednym z pierwszych przykładów niezmienników różniczkowych był niezmiennik H. A. Schwarza, stosowany przez niego w badaniach nad powierzchniami najmniejszemi (Abh. d. Berl. Akad., 1871; Werke, Berlin, 1890, 2, s. 351). Jest nim wyrażenie:

$$J = \frac{\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Grupa, do której ten niezmiennik różniczkowy należy, jest grupą przekształceń:

$$x' = x, \quad y' = \frac{a + by}{c + dy};$$

łatwo sprawdzić, że obliczając pochodne wielkości y' względem x' i tworząc wyrażenie takie, jak J, otrzymamy wynik równy temu wyrażeniu. Ponieważ grupa, do której należy J, jest rzutowa, przeto J jest niezmiennikiem różniczkowym rzutowym.

Wyrażenie J ma godną uwagi własność taką, że jeżeli zamienimy pomiędzy sobą zmienne x i y, to J pozostanie bez zmiany poza przybywającym czynnikiem $-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$. W rzeczy samej:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy} + 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}.$$

skąd znajdujemy:

$$J = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Z tego powodu Sylvester nazwał ten niezmiennik wzajemnikiem (recyprokanten), a później rozciągnął tę nazwę na wszystkie niezmienniki różniczkowe rzutowe.

Z pomiędzy niezmienników różniczkowych badano specyalnie rzutowe, ze względu na ich piękne zastosowania do teoryi równań różniczkowych liniowych, do teoryi krzywych i t. d. Najważniejszemi pracami w tym przedmiocie są prace Brioschi'ego (Ann. di mat. (2), **13**, Acta math. **14**), Sylvestera (American Journal of Math. **8** i **10**), a zwłaszcza Halphena (Sur les invariants différentiels Thèse, 1878; Journ. de l'Ecol. Polyt., 1880; Compt. Rend., **81**, 1875; Journ. de Liouv., 1876, 1880, 1883, Acta Math., 3.

Przypuśćmy, że grupa zasadnicza, której niezmienniki różniczkowe rozważać chcemy, tworzy się w sposób następujący: Niechaj będzie forma różniczkowa kwadratowa:

$$(1) \qquad \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} z_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

w której wielkości z są funkcyami zmiennych x. Wyobraźmy sobie, żeśmy uskutecznili pewne przekształcenie zmiennych, i niechaj ta forma (1) przejdzie wtedy na następującą:

$$\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z'_{hk}\, dx'_h\, dx'_k ,$$

gdzie spółczynniki z' są funkcyami liniowemi wielkości z o spółczynnikach, które są łatwo wyznaczyć się dającemi funkcyami zmiennych x, mianowicie:

$$(2) \qquad z'_{hk} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} z_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial x_h'} \frac{\partial x_s}{\partial x_k'} .$$

Rozważmy razem ogół zmiennych x i z, wyobrażając sobie pierwsze z nich poddane jakimkolwiek przekształceniom, drugie zaś przekształceniom (2). Jest widocznem, że forma (1) pozostanie niezmienioną; i dlatego jeżeli rozważamy grupę przekształceń tego gatunku, będziemy mieli grupę przekształceń zmiennych x i z na zmienne x' i z', przez które forma (1) pozostaje niezmienioną. Uważając wielkości z jako funkcye wielkości z, możemy utworzyć dla grupy tej grupy rozszerzone, według teoryi, wyłożonej w § 5 Rozdz. IV-go, i rozważać niezmienniki różniczkowe tych grup rozszerzonych. Będziemy wtedy mieli funkcye zmiennych x, zmiennych z i ich pochodnych, pozostające niezmiennemi, gdy przy stosowaniu tych specyalnych przekształceń x, stanowiących grupę wyżej podaną, forma różniczkowa (1) pozostaje niezmienioną.

Możemy rzecz tę rozpatrzeć ze stanowiska szerszego, mianowicie, zamiast grupy specyalnej przekształceń zmiennych x, można wyobrazić sobie ogół wszystkich możliwych przekształceń; ten, wraz z odpowiedniemi przekształceniami (2) zmiennych z, dałby ogół wszystkich przekształceń, które pozostawiają bez zmiany formę (1). Jeżeli teraz zbudujemy niezmiennik różniczkowy takiej grupy, zawierający w sobie, dla większej ogólności, także jednę lub więcej dowolnych funkcyj zmiennych x i ich pochodne, będziemy mieli pojęcie p a r a m e t r u r ó ż n i c z k o w e g o, należącego do formy (1).

Widzimy więc, że teoryę parametrów różniczkowych można uważać za wypływającą wprost z teoryi niezmienników różniczkowych, lubo rozwinęła się ona niezależnie od tej ostatniej. Początek jej znajdujemy w pracach Gaussa nad krzywizną całkowitą powierzchni i w badaniach Lamégo, któremu właśnie zawdzięczamy nazwę parametrów różniczkowych.

Nie będziemy wchodzili w szczegóły tej teoryi, wymienimy tylko najważniejsze prace w tej dziedzinie po pracach Gaussa i Lam'ego (Leçons sur les coordonnées curvilignes); są niemi rozprawy Jacobi'ego (Crelle, **36**), Beltrami'ego (Mem. Acc. Bologne (2), **8**, 1869), Christoffela (Crelle, **70**), Lipschitza (Crelle, **70**, **71**, **72**, **74**, 78. **81**), Ricci'ego (Ann. di Mat. (2), **12**, **14**, Rend. Lincei, 1888—1889, Atti Ist. Veneto, 1893 etc.), Żorawskiego (Acta math., **16**, 1892—3, Rozprawy Akad. Krak., t. **23** 1891), Tresse'a (C. R., **115**, 1892, Acta mat., **18**, 1894., Frobeniusa (Crelle, **110**), Knoblaucha (Crelle, **111**), i t. d.

DOPEŁNIENIA.

1. O parametrach istotnych[1]). Przyjacielowi memu, prof. Luigi Bianchi, zawdzięczam następujące kryteryum w celu poznania, czy parametry $a_1, \ldots, a_r$ są albo nie są istotnemi.

Utwórzmy macierz:

$$M = \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial a_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial f_1}{\partial a_r}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial a_r} \end{array} \right\|,$$

następnie drugą macierz M_1 tymże sposobem, dołączając tylko do funkcyj $f_1, \ldots, f_n$ wszystkie ich pochodne pierwsze względem $x_1, \ldots, x_n$, potem macierz M_2 przez dołączenie do funkcyj $f_1, \ldots, f_n$ wszystkich ich pochodnych pierwszych i drugich względem zmiennych x i t. d.

Charakterystyki $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ tych macierzy są wszystkie nie większe od r, a mianowicie:

$$\mu \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \ldots \leqslant r.$$

Otóż dojdziemy do miejsca, w którem szereg liczb μ z konieczności zatrzymuje się.

---

[1]) Do I § 1 str. 8.

Parametry będą albo nie będą istotnemi, odpowiednio do tego, czy największa liczba ϱ z liczb μ jest równa r lub mniejsza od r.

Kryteryum to jest pewnem przekształceniem kryteryum Liego, podanego przez nas na str. 7 tekstu. W samej rzeczy kryteryum Liego możnaby przedewszystkiem tak zmodyfikować. Zamiast przyjęcia, że wartości x'' są różne od wartości x' i tworzenia dla nich równań (4) na str. 7, utwórzmy pochodne równań (4) względem $x_1, \ldots, x_n$ i podstawmy tam zamiast φ funkcye $f_1, \ldots, f_n$, a zamiast wielkości x wartości x'; odpowiadać to będzie w pewnej mierze przyjęciu, że wielkości x'' są jedna po jednej nieskończenie bliskie wielkości x'. Podobnie tworzymy pochodne drugie równań (4) i t. d.

Wszystkie te równania powinny spółistnieć. Jeżeli pomiędzy niemi można znaleść r niezależnych, co zajdzie wtedy, kiedy jedna z macierzy $M, M_1, M_2, \ldots$ będzie miała charakterystykę r, wtedy spółczynniki α_k będą zerami i parametry będą istotnemi. Nie będą zaś istotnemi w razie przeciwnym.

2. O nawiasach Poissona[1]) Musimy powiedzieć tu nieco dla usprawiedliwienia nazwy nawiasów Poissona, nadanej wyrażeniom $(X_i X_j)$, gdyż z pierwszego wejrzenia zdawałoby się, że nawiasy Poissona mają definicyę całkiem różną. W samej rzeczy, jeżeli f i φ są dwie funkcye dwóch szeregów zmiennych $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, wtedy nawiasem Poissona jest wyrażenie:

$$(f, \varphi) = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \frac{\partial f}{\partial p_s} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} \frac{\partial f}{\partial x_s} \right).$$

Otóż nazwa nasza jest całkowicie usprawiedliwiona tem, że symbol $(X_i X_j) f$ jest prawdziwym nawiasem Poissona, zastosowanym do dwu funkcyj:

$$X_i f = \xi_{i1} p_1 + \ldots + \xi_{in} p_n, \quad X_j f = \xi_{j1} p_1 + \ldots + \xi_{jn} p_n,$$

[1]) Patrz Rozdział I, § 8, str. 55.

gdzie $p_1, \ldots, p_n$ są pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcyi f. W samej rzeczy, jeżeli utworzymy nawias $(X_i f, X_j f)$, mieć będziemy:

$$\sum_s \left[\sum_r \left(\xi_{ir} \frac{\partial \xi_{js}}{\partial x_r} - \xi_{jr} \frac{\partial \xi_{is}}{\partial x_r} \right) \right] p_s,$$

t. j.:

$$\sum_s [X_i \xi_{js} - X_j \xi_{is}] \frac{\partial f}{\partial x_s},$$

a to równa się dokładnie wyrażeniu $(X_i X_j) f$, możemy więc napisać:

$$(X_i f, X_j f) = (X_i X_j) f,$$

co stanowi właśnie usprawiedliwienie, o którem mowa.

3. Tożsamości, otrzymać się dające z tożsamości Jacobi'ego[1]. Niechaj Z będzie symbolem przekształcenia nieskończonostkowego i zastosujmy symbol wzoru (7) na str. 59-ej, wtedy tożsamość Jacobi'ego da się tak napisać:

$$(ZX_1, X_2) = -(X_1 X_2 Z) + (X_2 X_1 Z).$$

Stosując tu kolejno tenże wzór, znajdziemy:

$$(ZX_1 X_1 X_2) = -(X_1 (X_1 X_2) Z) + ((X_1 X_2) X_2 Z)$$
$$= -(X_1 X_1 X_2 Z) + 2(X_1 X_2 X_1 Z) - (X_2 X_1 X_1 Z),$$

$$Z(X_1 X_1 X_1 X_2) = -(X_1 (X_1 X_1 X_2) Z) + ((X_1 X_1 X_2) X_1 Z)$$
$$= (X_1 X_1 X_1 X_2 Z) + 3(X_1 X_1 X_2 X_1 Z) - 3(X_1 X_2 X_1 X_1 Z)$$
$$+ (X_2 X_1 X_1 X_1 Z).$$

[1] Patrz Rozdz. I § 8, str. 56.

i wogólności:

$$(Z_1 \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu} X_2) = -(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu} X_2 Z) + \binom{\nu}{1} (\overbrace{X \ldots X_1}^{\nu-1} X_2 X_1 Z)$$

$$- \binom{\nu}{2} (\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu-2} X_2 X_1 X_1 Z) + \ldots .$$

$$= -\sum_{r=0}^{r} (-1)^r \binom{\nu}{r} (\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{\nu-r} X_2 \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{r} Z) .$$

Tą tożsamością posługiwaliśmy się w nocie naszej „Altre ricerche sulla formola del prodotto etc.“, Rend. Ist. Lomb. (2), **35**, s. 555.

4. O spółczynnikach liczbowych Γ (patrz str. 59—60). Wyznaczenie liczb, odpowiadających każdemu z symboli (7), na str. 59 uskuteczniłem w trzech przypadkach, mianowicie: 1) gdy $i_1 = i_2 = \ldots = i_s = 1$; 2) gdy $i_1 = i_2 = \ldots = i_s = 2$; 3) gdy jeden tylko ze skaźników $i_1, \ldots, i_s$ jest równy 2, inne zaś są równe 1 (patrz Notę w Rend. Ist. Lomb. (2), **35**, 1902, s. 555). Wynik, odpowiadający pierwszemu przypadkowi, podaliśmy w tekście na str. 59; w dwóch pozostałych przypadkach wyraża się on tak:

Liczbą, odpowiadającą symbolowi $(\overbrace{X_2 \ldots X_2}^{n} X_1 X_2)$, jest $-\gamma^{(n+1)}$, symbolowi zaś $(\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{n} X_2 \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{n} X_2)$ jest:

$$c_{mn} = -\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{n+r+1}{n} \gamma^{(n+r+1)} \gamma^{(m-r)} .$$

Zanotujmy wreszcie, że wszystkie liczby γ o skaźniku nieparzystym (prócz γ') są zerami i że mają związek ścisły z liczbami Bernoulli'ego (patrz **5**, str. 271). Ich wartościami są, jak podano na str. 60:

$$\gamma' = -\frac{1}{2}, \quad \gamma'' = \frac{1}{12}, \quad \gamma^{IV} = -\frac{1}{6!}, \ldots .$$

5. O liczbach Bernoulli'ego. Na str. 59 wprowadziliśmy liczby $\gamma', \gamma'', \ldots$; powiedzieliśmy tam, że pozostają one w prostym związku z liczbami Bernoulli'ego i że liczby γ o skaźniku nieparzystym (prócz γ') są zerami. Dowiedziemy tej własności i podamy niektóre rezultaty, zawarte w nocie naszej „Sopra i numeri Bernoulliani", Rend. Ist. Lomb. (2) **35**, 1902, por. „Prace mat.-fizycz.", t. **14**, 1903, str. 2—6), które mogą posłużyć do otrzymania nowego, innego niż zwykły, dowodu trzeciego twierdzenia Liego (patrz wyżej str. 139 i niżej str. 279).

Liczby $\gamma', \gamma'', \gamma''', \ldots$ łączy następujący wzór zwrotny:

$$(1)\quad \gamma^{(s)} + \frac{1}{2!}\gamma^{(s-1)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(s-2)} + \ldots + \frac{1}{(s-1)!}\gamma' + \frac{s-1}{2(s+1)!} = 0,$$

który,—ponieważ $\gamma' = -\frac{1}{2}$, można i tak napisać:

$$(2)\quad \gamma^{(s)} + \frac{1}{2!}\gamma^{(s-1)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(s-2)} + \ldots + \frac{1}{(s-1)!}\gamma'' - \frac{s-1}{2(s+1)!} = 0.$$

Liczby te pozostają w prostym związku z liczbami Bernoulli'ego, które są spółczynnikami $B_1, B_2, \ldots$ rozwinięcia następującej funkcyi parzystej na szeregi potęgowe:

$$(3)\quad \frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + B_2\frac{x^2}{2!} - B_4\frac{x^4}{4!} + \ldots$$

W samej rzeczy, jeżeli przyjmiemy, że strona pierwsza równania (3), równa się:

$$(4)\quad 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

gdzie c są spółczynniki nieoznaczone, jeżeli pomnożymy pierwszą i drugą stronę przez e^x-1, podstawimy za e^x rozwinięcie tej funkcyi

[1]) Co do szczegółów patrz Saalschütz: Vorl. über die Bernoulli'sche Zahlen, Berlin, 1893 i Pascal: Repertoryum matematyki wyższej, przekład polski, tom I, str. 420.

i porównamy spółczynniki równych potęg zmiennej x, po obu stronach, znajdziemy na spółczynniki c wzór zwrotny:

$$c_s + \frac{1}{2!}c_{s-1} + \frac{1}{3!}c_{s-2} + \ldots + \frac{1}{s!}c_1 + \frac{1}{(s+1)!} = \frac{1}{2.s!}$$

$$c_1 = 0,$$

a stąd także:

$$(5) \qquad c_s + \frac{1}{2!}c_{s-1} + \ldots + \frac{1}{(s-1)!}c_2 - \frac{s-1}{2(s+1)!} = 0.$$

Widzimy więc, że spółczynniki c, poczynając od spółczynnika c ze skaźnikiem 2, czynią zadość wzorowi zwrotnemu, podobnemu do wzoru, któremu czynią zadość $\gamma', \gamma'', \ldots$; i dlatego możemy stąd wnieść, że ogólnie jest:

$$(6) \qquad \gamma^{(s)} = c_s .$$

Ponieważ strona pierwsza wzoru (3) jest funkcyą p a r z y s t ą, a stąd wszystkie spółczynniki c o skaźnikach nieparzystych są zerami, a zatem są też z e r a m i w s z y s t k i e l i c z b y γ o s k a ź n i k a c h n i e p a r z y s t y c h (p r ó c z γ'); nadto porównanie wzoru (4) z wzorami (3) i (6) daje nam:

$$(7) \qquad \gamma^{(2n)} = (-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n)!} .$$

Wzór zwrotny (2) łatwo przekształcić na wzór zwrotny pomiędzy liczbami B e r n o u l l i'ego B i łatwo też widzieć, że otrzymujemy w ten sposób wzór, zwany wzorem M o i v r e a (patrz P a s c a l: Repertoryum matematyki wyższej, przekład polski, t. I, str. 421).

Przez wprowadzenie liczb γ wzór (3) zamienia się na następujący:

$$\frac{x}{2}\,\frac{e^x+1}{e^x-1} = 1 + \gamma'' x^2 + \gamma^{IV} x^4 + \ldots$$

a uwzględniając wzór na rozwinięcie funkcyi $\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ na szereg potęgowy (patrz Repertoryum, przekład polski, t. 1, str. 137), możemy także napisać:

$$\frac{x}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = 1 - \gamma'' x^2 + \gamma^{IV} x^4 - \gamma^{VI} x^6 + \ldots$$

Ten ostatni wzór można też otrzymać z poprzedzającego, kładąc w nim ix zamiast x.

Ze względu na to, że liczby γ o skaźnikach nieparzystych znikają, otrzymujemy z wzoru zwrotnego (2) dwa wzory:

$$\gamma^{(2n)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(2n-2)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)!}\gamma'' - \frac{2n-1}{2(2n+1)!} = 0,$$

$$\frac{1}{2!}\gamma^{(2n)} + \frac{1}{4!}\gamma^{(2n-2)} + \ldots + \frac{1}{(2n)!}\gamma'' - \frac{n}{(2n+2)!} = 0.$$

Związki główne, zachodzące pomiędzy liczbami Bernoulli'ego i stanowiące tyleż wzorów zwrotnych, są najprzód stopnia pierwszego, następnie stopnia drugiego; w tych ostatnich wzorach suma skaźników dwóch czynników każdego wyrazu jest stała. Pierwsze z nich, wyrażone w liczbach γ, są postaci:

$$(8)\quad \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{(2n-1)!}\gamma'' + \frac{\alpha_2}{(2n-3)!}\gamma^{IV} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{3!}\gamma^{(2n-2)} + \frac{\alpha_n}{1!}\gamma^{(2n)} = 0,$$

drugie zaś postaci:

$$(9)\quad \beta_0 + \beta_1\gamma''\gamma^{(2n-2)} + \beta_2\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)} + \ldots + \beta_{n-1}\gamma^{(2n-2)}\gamma'' + \beta_n\gamma^{(2n)} = 0;$$

gdzie α i β są spółczynniki liczbowe.

Z wzorów zwrotnych drugiego gatunku znane są niektóre (podane na str. 15—17 cytowanego dzieła Saalschütza); najprostszym z nich jest ten, który przedstawia się w liczbach γ w sposób następujący:

$$(10)\qquad \gamma''\gamma^{(2n-2)}+\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)}+\ldots+\gamma^{(2n-2)}\gamma''+(2n+1)\,\gamma^{(2n)}=0.$$

Klasa tożsamości, którą chcemy teraz podać, a która, jak to powiedzieliśmy, ma zastosowanie w dowodzeniu trzeciego twierdzenia Liego (patrz niżej str. 279) ma jako pierwszą przedstawicielkę właśnie wzór (10). Lecz forma ogólna tych tożsamości nie przedstawi się za pomocą prawa dostatecznie prostego, jeżeli nie wprowadzimy pewnych wyrażeń Γ, będących stopnia drugiego względem liczb γ. Położmy:

$$(11)\qquad \begin{cases} \Gamma_{1,1}^{(2n)}=+\sum_{\nu=1}^{n-1}\gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)}-\gamma^{(2n)}, \\ \Gamma_{2,1}^{(2n)}=-\sum_{\nu=1}^{n-1}\binom{2\nu}{1}\gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)}-\gamma^{(2n)}, \\ \Gamma_{3,1}^{(2n)}=+\sum_{\nu=2}^{n-1}\binom{2\nu}{2}\gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)}-\gamma^{(2n)}, \\ \Gamma_{4,1}^{(2n)}=-\sum_{\nu=2}^{n-1}\binom{2\nu}{3}\gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2\nu-2\nu)}-\gamma^{(2n)}, \\ \Gamma_{5,1}^{(2n)}=+\sum_{\nu=3}^{n-1}\binom{2\nu}{4}\gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)}-\gamma^{(2n)}, \\ \Gamma_{6,1}^{(2n)}=-\sum_{\nu=3}^{n-1}\binom{2\nu}{5}\gamma^{(2\nu)}\gamma^{(2n-2\nu)}-\gamma^{(2n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Gamma_{2n-1,1}^{(2n)}=-\gamma^{(2n)}, \\ \Gamma_{2n,1}^{(2n)}=-\gamma^{(2n)} \end{cases}$$

i prócz tego:

$$(12)\qquad \begin{cases} \Gamma^{(2n)}_{k,2} = \Gamma^{(2n)}_{1,1} + \Gamma^{(2n)}_{2,1} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{k,1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Gamma^{(2n)}_{k,s} = \Gamma^{(2n)}_{1,s-1} + \Gamma^{(2n)}_{2,s-1} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{k,s-1}. \end{cases}$$

Przy tych oznaczeniach będzie można napisać związki, o których mowa, w następującej prostej postaci:

$$(13)\qquad \begin{cases} \Gamma^{(2n)}_{1,1} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{2n-3,1} + \Gamma^{(2n)}_{2n-2,1} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{2n-1,1} + 2\Gamma^{(2n)}_{2n,1} = 0, \\ \Gamma^{(2n)}_{1,k} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{2n-3,2} + 2\Gamma^{(2n)}_{2n-2,2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Gamma^{(2n)}_{1,k} + \ldots + \Gamma^{(2n)}_{2n-2k+1,k} + 2\Gamma^{(2n)}_{2n-2k+2,k} = 0, \\ \Gamma^{(2n)}_{1,n} + 2\Gamma^{(2n)}_{2n} = 0. \end{cases}$$

Z nich związki, znajdujące się w wierszu 2-gim, 3-im, ... można, oczywiście, przy pomocy wzorów (12) wyrazić wszystkie przez wielkości Γ, których drugi skaźnik jest 1, t. j. przez wielkości Γ tablicy (11). Będzie tedy:

$$(14)\qquad \begin{cases} \sum_{r=1}^{2n-1} \Gamma^{(2n)}_{r,1} + 2\Gamma^{(2n)}_{2n,1} = 0, \\ \sum_{r=1}^{2n-2} (2n-r)\,\Gamma^{(2n)}_{r,1} = 0, \\ \sum_{r=1}^{2n-4} \left[\binom{2n-r-1}{2} - 1\right] \Gamma^{(2n)}_{r,1} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{r=1}^{2n-2k} \left[\binom{2n-r-k+1}{k} - \binom{2n-r-k-1}{k-2}\right] \Gamma^{(2n)}_{r,1} = 0. \end{cases}$$

Drugi i trzeci z tych związków sprowadzają się do związku (10). W samej rzeczy, jeżeli dodamy do siebie wszystkie wielkości Γ tablicy (11), dołączymy jeszcze $-\gamma^{(2n)}$ i pamiętać będziemy, że:

$$\binom{2k}{0}-\binom{2k}{1}+\binom{2k}{2}-\ldots-\binom{2k}{2k-1}=-1,$$

spostrzeżemy odrazu, że pierwszy ze zwlązków (14) sprowadza się do związku (10). Co się tyczy drugiego ze związków (14), dość przypomnieć, że [1]):

$$(2n-1)\binom{2k}{0}-(2n-2)\binom{2k}{1}+\ldots+(2n-2k)\binom{2k}{2k-1}=-(2n-2k-1),$$

a związek, o którym mowa, przybierze postać:

$$-(2n-3)\,\gamma''(\gamma^{(2n-2)}-(2n-5)\,\gamma^{IV}\,\gamma^{(2n-4)}$$
$$-\ldots-1\,.\,\gamma^{2n-2}\,\gamma''-\left[\binom{2n}{2}-1\right]\gamma^{(2n)}=0,$$

co—przemieszczając odpowiednio wyrazy podobne—można tak napisać;

$$-(n-1)\left[\gamma''\,\gamma^{(2n-2)}+\gamma^{IV}\,\gamma^{(2n-4)}+\ldots+\gamma^{(2n-2)}\,\gamma''+(2n+1)\,\gamma^{(2n)}\right]=0,$$

to zaś wykazuje tożsamość tego związku i związku (10).

Innych ze związków (14) nie można sprowadzić do związku (10). Posługując się wzorem, stosowanym wyżej, znajdziemy łatwo dla trzeciego z tych związków:

---

[1]) Twierdzenie, zwane twierdzeniem Arndta (Crelle, **31**, str. 239), które można przypisać także i Cauchy'emu, mówi, że gdy $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tworzą postęp arytmetyczny rzędu mniejszego od n, wtedy jest zawsze:

$$\binom{n}{0}a-\binom{n}{1}a_1+\binom{n}{2}a_2-\ldots+(-1)^n a_n=0.$$

$$\left[\binom{2n-4}{2}-1\right]\gamma''\gamma^{2n-2}+\left[\binom{2n-6}{2}-1\right]\gamma^{IV}\gamma^{(2n-4)}$$
$$+\ldots+\left[\binom{2}{2}-1\right]\gamma^{(2n-4)}\gamma^{IV}+\left[\binom{0}{2}-1\right]\gamma^{(2n-2)}\gamma''$$
$$+(2n-3)\,\gamma^{(2n-2)}\gamma''+\left[\binom{2n-1}{3}-\binom{2n-3}{1}\right]\gamma^{(2n)}=0,$$

dla czwartego zaś:

$$\left[\binom{2n-5}{3}-\binom{2n-7}{1}\right]\gamma''\gamma^{(2n-2)}+\left[\binom{2n-7}{3}-\binom{2n-9}{1}\right]\gamma^{IV}\gamma^{2n-4}+\ldots$$
$$+\left[\binom{-1}{3}-\binom{-3}{1}\right]\gamma^{(2n-2)}\gamma''+(2n-3)\,(n-4)\,\gamma^{(2n-2)}\gamma''$$
$$+\left[\binom{2n-2}{4}-\binom{2n-4}{2}\right]\gamma^{(2n)}=0.$$

6. O iloczynie dwu przekształceń. (Patrz Rozdz. I § 9). Nie jest dość jasnym sposób eliminacyi wielkości x' pomiędzy równaniami (1) i nadto, aby rezultat otrzymany był ścisłym, jest koniecznem, by równania (1) były napisane w postaci:

$$(1)\qquad \begin{cases} (S) & x_i'' = e^{tX_1'}\,x_i' \\ (T) & x_i' = e^{t'X_2}\,x_i \end{cases}$$

i aby utworzony był iloczyn ST (t. j. najprzód wykonano działanie S, potem zaś działanie T), a nie iloczyn TS.

W wyrażeniu S rozumieć należy przekształcenie X_1, napisane w zmiennych x', a nie w zmiennych x, i dlatego to napisaliśmy X_1'.

Dla wykonania eliminacyi postępujemy w ten sposób. Wyraz którykolwiek strony drugiej wyrażenia S (po rozwinięciu ilości wykładniczej) jest postaci:

$$\frac{t^r}{r!}\,X_1'^r\,x_i'.$$

Otóż ta funkcya zmiennych x', na mocy wzoru ogólnego (3) w § 6 Rozdziału I-go i na mocy przekształcenia T daje się (z pominięciem czynnika $\frac{t^r}{r'}$) tak napisać:

$$X_1^{t_r} x_i' = X_1^r x_i + \frac{t'}{1!} X_2 X_1^r x_i + \frac{t'^2}{2!} X_2^2 X_1^r x_i + \ldots$$

stąd iloczyn ST wyraża się sposobem następującym:

$$x_i'' = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \frac{t'^s}{s!} X_2^s X_1^r x_i.$$

Jest to właśnie wzór (3) na str. 64.

Zauważmy jeszcze, że gdy w iloczynie ST wykonywamy najprzód działanie T, a potem działanie S, to w rozmaitych wyrazach tego wzoru pierwszy symbol, który najprzód stosować należy, jest X_1, a nie X_2, t. j. symbol, należący do działania S, a nie do działania T.

Zamiast wzoru (7) na str. 67 (Rozd. I § 9), należy napisać następujący:

$$X_3 = tX_1 + t'X_2 + t' \sum_{n=1}^{\infty} t^n \gamma^{(n)} (\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{n} X_2)$$

$$+ t'^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} t^{m+n} c_{mn} (\overbrace{X_1 \ldots X_1}^{n} X_2 \overbrace{X_1 \ldots X_1}^{m} X_2)$$

$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

którego każdy wyraz jest przekształceniem nieskończonostkowem typu (7), na str. 59 tekstu, pomnożonem przez taki spółczynnik liczbowy, który odpowiada temu przekształceniu według twierdzenia w § 8, i gdzie t i t' są podniesione do

potęg o wykładnikach, równych odpowiednio liczbom, wskazującym, ile razy symbole X_1 i X_2 występują w tem przekształceniu.

Liczby γ o skaźniku nieparzystym są zerami $\left(\text{prócz } \gamma' = -\frac{1}{2}\right)$, pozostałe zaś określają się, jak wiemy, wzorami zwrotnemi:

$$\gamma^{(2n)} + \frac{1}{3!}\gamma^{(2n-2)} + \frac{1}{5!}\gamma^{(2n-4)} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)!}\gamma'' - \frac{2n-1}{2(2n-1)!} = 0,$$

spółczynniki zaś c_{mn} wyrażają się przez liczby γ przy pomocy wzoru:

$$c_{mn} = -\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r \binom{n+r+1}{n} \gamma^{(n+r+1)}\gamma^{(m-r)}.$$

7. O trzeciem twierdzeniu Liego. Dla uzupełnienia wykładu, podanego w tekście, przytoczę tu dowodzenie, ogłoszone przezemnie w Rend. Ist. Lomb. (2) **35**, s. 419 i w Pracach mat.-fizycznych. **14**, s. 1—28.

Położmy dla krótkości:

$$\sum_{s_1}\sum_{s_2}\ldots\sum_{s_{m-1}} c_{t_1 k s_1}\, c_{t_2 s_1 s_2}\ldots c_{t_m s_{m-1} h} = (t_1\, t_2 \ldots t_m;\, kh) = -(k t_2 \ldots t_m;\, th)$$

i nadto:

$$((s t_1 \ldots t_m;\, kh)) = (s t_1 \ldots t_m;\, kh) + (t_1\, s t_2 \ldots t_m;\, kh) + \ldots + (t_1\, t_2 \ldots t_m s;\, kh).$$

Na zasadzie pierwszego przyjęcia pojedyńcze elementy c_{tks} można będzie oznaczać przy pomocy dogodnego symbolu $(t;\, ks)$. Łatwo widzieć, że zachodzą tożsamości:

$$(t_1 \dots t_m; kh) = \sum_{s=1}^{r} (t_1 \dots t_r; ks)\,(t_{r+1} \dots t_m; sh),$$

$$(t_1 \dots t_r\ k't_{r+1} \dots t_m; kh) = -\sum_{s=1}^{r} (t_1 \dots t_r; ks)\,(st_{r+1} \dots t_m; k'h).$$

Można nadto dowieść, że gdy liczby c czynią zadość dwóm związkom (2), (3) w § 15 Rozdz. I, str. 106—107, to czynią także zadość następującym związkom bardziej złożonym:

$$\sum_{t_1 \dots t_m} (t_1 \dots t_m k'; kh)\, u_{t_1} \dots u_{t_m}$$

$$+ \sum_{t_1 \dots t_m} \sum_{s} \{(t_1 \dots t_{m-1} s; kh) + (t_1 \dots t_{m-2} st_{m-1}; kh) + \dots$$

$$+ (t_1 st_2 \dots t_{m-1}; kh)\}\,(t_m; k's)\, u_{t_1} \dots t_{t_m}$$

$$= \sum_{t_1 \dots t_m} (t_1 k't_2 \dots t_m; kh)\, u_{t_1} \dots u_{t_m},$$

gdzie $\sum_{t \dots t_m}$ rozciąga się na wszystkie wartości $1, 2, \dots, r$ skaźników $t_1, \dots, t_m$, wielkości zaś $u_1, \dots, u_r$ są jakiemikolwiek zmiennemi.

Jeżeli przez S_t oznaczymy działanie, polegające na zsumowaniu wszystkich wyrażeń, otrzymanych z jednego z nich przez przemiany pomiędzy sobą wszelkiemi możliwemi sposobami skaźników $t_1, t_2, \dots$, które w tem wyrażeniu występują, przez $S'_{kk'}$ zaś oznaczymy działanie, polegające na odjęciu od jednego danego wyrażenia, zależnego od skaźników k, k', wyrażenia, otrzymanego przez przestawienie wzajemne dwóch tych skaźników, wtedy drugi związek, będący wynikiem wspomnianych wzorów (2) i (3) na str. 106—107, wyrazi się tak:

$$S'_{kk'}\ S_t \Big\{ \gamma''\,\gamma^{(2n-2)} \sum_s (t_1 \dots t_{2n-2};\ ks)\ ((st_{2n-1};\ k'h))$$

$$+ \gamma^{IV}\,\gamma^{2n-4} \sum_s (t_1 \dots t_{2n-4};\ ks)\ ((st_{2n-3}\ t_{2n-1};\ k'h))$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ \gamma^{(2n-2)}\,\gamma'' \sum_s (t_1\ t_2;\ ks)\ ((st_3 \dots t_{2n-1};\ k'h))$$

$$+ \gamma^{(2n)}\ ((kt_1 \dots t_{2n-1};\ k'h)) \Big\} = 0,$$

gdzie liczby γ są liczby, pokrewne liczbom Bernoulli'ego (patrz wyżej str. 272).

Ustaliwszy te związki, możemy już przejść do przedstawienia zarysu dowodu trzeciego twierdzenia Lie'go. Pokażemy bezpośrednio, że mając dany układ stałych budowy, możemy zbudować wzory, będące wzorami przekształceń nieskończonostkowych pewnej grupy, jeżeli tylko założymy, że rzeczone stałe czynią zadość związkom (2) i (3) na str. 106—107.

I w dowodzeniu, podanem przez Schura, buduje się podobnie przekształcenia nieskończonostkowe grupy, gdy dane są stałe c_{ijs}, lecz dowód mój różni się zasadniczo od dowodu Schura pod tym względem, że polega w znacznej części na wspomnianych wyżej tożsamościach, z których druga polega znów na tożsamościach, zachodzących pomiędzy liczbami Bernoulli'ego (patrz str. 271). Dowód mój jest zatem bardziej bezpośredni i jest bardziej elementarny, bo nie wymaga żednego innego pojęcia z teoryi grup, prócz drugiego twierdzenia Liego.

Dawszy sobie układ r^3 licz c_{ijs}, czyniących zadość związkom (2) i (3) na str. 106—107, i przyjąwszy $u_1, \dots, u_r$ za zmienne, utwórzmy nattępujące przekształcenia nieskończonostkowe:

$$(1)\ U_k = \sum_{h=1}^{r} \Big[\varepsilon_{kh} - \gamma' \sum c_{t,kh}\ u_t + \gamma'' \sum_{t_1 t_2 s_1} c_{t_1 k s_1}\ c_{t_2 s_1 h}\ u_{t_1}\ u_{t_2} + \dots \Big] \frac{\partial}{\partial u_h},$$

ε_{kh} równa się zeru dla $h \leqq k$, jedności dla $h=k$, i gdzie wyraz ogólny szeregu zamkniętego w nawiasie jest:

$$(2) \qquad \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 t_2 \ldots} \sum_{s_1 s_2 \ldots} c_{t_1 k s_1} c_{t_2 s_1 s_2} c_{t_3 s_2 s_3} \ldots c_{t_{2n} s_{2n-1} h} u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}}.$$

Można zawsze znaleść obszar wartości zmiennych u, w którym szereg rzeczony (będący szeregiem potęgowym) jest zbieżny.

W samej rzeczy, niechaj C będzie wartością tego z pomiędzy spółczynników, który ma największą wartość liczebną; utwórzmy szereg:

$$(3) \qquad \varepsilon_{kh} - \gamma' r C M + \gamma'' r^3 C^2 M^2 + \gamma^{IV} r^4 C^4 M^4 + \ldots + \gamma^{(2n)} r^{2n-1} C^{2n} M^{2n} + \ldots$$

Przypomnijmy sobie związek następujący (Reper. mat. wyż., przekład polski, t I, str. 420) pomiędzy liczbami Bernoulli'ego:

$$\lim_{n=\infty} B_{2n} \left(\frac{\pi e}{n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = 4\pi\sqrt{e};$$

jeżeli podstawimy tu zamiast B_{2n} wartość tej liczby, wyrażoną przez liczbę $\gamma^{(2n)}$ (patrz str. 272), i weźmiemy stosunek dwóch kolejnych liczb γ, otrzymamy:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma^{(2n)}}{\gamma^{(2n-2)}} \frac{(2n)!}{(2n-2)!} (\pi e)^2 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(n-1)^2} = 1,$$

a ponieważ:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n+\frac{1}{2}} = e^{-2}; \qquad \lim_{n=\infty} \frac{(2n)!}{(2n-2)!} \frac{1}{(n-1)^2} = 4,$$

przeto ostatecznie:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\gamma^{(2n)}}{\gamma^{(2n-2)}} = \frac{1}{4\pi^2} \quad (4)$$ [1]).

Jeżeli więc przyjmiemy, że:

$$M < \frac{2\pi}{r^2 C} \quad (5)$$,

otrzymamy obszar zbieżności szeregu (3); zakładając zaś, że każda z wielkości $u_1, \ldots, u_r$ jest mniejsza od $\frac{2\pi}{r^2 C}$, otrzymamy oczywiscie pole, w którym szereg o wyrazie ogólnym (2) jest zbieżny.

Otóż powiadamy, że przekształcenia nieskończonostkowe (1) nadają się do wytworzenia grupy o r parametrach, albowiem czynią zadość drugiemu twierdzeniu Liego, i nadto budowa tak wytworzonej grupy jest ściśle określona przez dane liczby c.

Stosując symbol $S'_{kk'}$ (patrz wyżej str. 280) do nawiasu, utworzonego z dwóch przekształceń nieskończonostkowych U_k, $U_{k'}$, możemy napisać:

$$(U_k\, U_{k'}) = S'_{kk'} \sum_h \sum_s \left[\varepsilon_{ks} - \gamma' \sum_{t_1} c_{t_1 ks} u_{t_1} + \gamma'' \sum_{t_1 t_2 s_1} c_{t_1 k s_1} c_{t_2 s_1 s} u_{t_1} u_{t_2} + \ldots \right]$$

$$\times \left[-\gamma' c_{sk'h} + \gamma'' \sum_{t_1' s_1'} c_{t's_1'} c_{ss_1'h} + c_{sks_1'} c_{t's_1'h}) \; u_{t_1}' + \ldots \right] \frac{\partial}{\partial u_h},$$

a stosując symbol, wprowadzony na str. 279, możemy temu wyrażeniu nadać postać:

---

[1]) Do tego samego wyniku dojść by można przy pomocy wzorów na str. 13 cytowanej książki Saalschütza.

$$(U_k U_{k'}) = \sum_h S'_{kk'} \sum_s \Big[\varepsilon_{ks} - \gamma' \sum_{t_1} (t_1; ks)\, u_{t_1}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} (t_1 \dots t_{2n}; ks)\, u_{t_1} \dots u_{t_{2n}} \Big] \tag{6}$$

$$\times \Big[-\gamma'(s; k'h) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1' \dots t_{2n-1}} ((st_1'\, t_2' \dots t'_{2n-1}; k'h))\, u_{t_1'} \dots u_{t'_{2n-1}} \Big] \frac{\partial}{\partial u_h}.$$

Rozwińmy iloczyn dwóch nawiasów kwadratowych i uporządkujmy wyrazy według ich stopnia względem zmiennych u. Wyrazami stopnia z e r o będą:

$$-2\gamma'(kk'h) = c_{kk'h},$$

a ponieważ $\gamma' = -\frac{1}{2}$, przeto to wyrażenie można napisać:

$$\sum_s c_{kk's}\, \varepsilon_{sh}. \tag{7}$$

Wyrażenia stopnia p i e r w s z e g o będą:

$$\gamma''\, S''_{kk'} \sum_{t_1'} \Big\{ (t_1' k; k'h) + (kt_1'; k'h)\, u_{t_1'} + \gamma'^2\, S_{kk'} \sum_{t_1} \sum_s (t_1; ks)(s; k'h) u_{t_1} \Big\}$$

t. j.:

$$\sum_t \Big\{ \gamma'' \sum_s (c_{tk's}\, c_{ksh} - c_{tks}\, c_{k'sh}) + \gamma'' \sum_s (c_{kk's}\, c_{tsh} - c_{k'ks}\, c_{tsh})$$

$$+ \gamma'^2 \sum_s (c_{tks}\, c_{sk'h} - c_{tk's}\, c_{skh}) \Big\} u_t,$$

lub na mocy związków pomiędzy spółczynnikami c:

$$(3\gamma'' + \gamma'^2) \sum_t \sum_s c_{kk's}\, c_{tsh}\, u_t .$$

Lecz $3\gamma'' + \gamma'^2 = \frac{1}{2} = -\gamma'$, otrzymujemy więc:

$$(8) \qquad \sum_s c_{kk's} \left(-\gamma' \sum_t c_{tsh}\, u_t \right) .$$

Wyrazami stopnia $2n$ są następujące:

$$-\gamma'\, \gamma^{(2n)}\, S'_{kk'} \sum_{t_1 \ldots t_{2n}} \left[\sum_s ((st_1 \ldots t_{2n-1};\, k'h))\, (t_{2n};\, kr) \right.$$

$$\left. - (t_1 \ldots t_{2n} k';\, kh) \right] u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}} .$$

Jeżeli przestawimy pomiędzy sobą skaźniki k i k', uwzględnimy znaczenie symboli $((\,))$ i zastosujemy wzór na str. 280 i zauważymy, że:

$$\sum_s (st_1 \ldots t_{2n-1};\, kh)\, (t_{2n};\, ks) = -(t_{2n} k' t_1 \ldots t_{2n-1};\, kh)$$

i że, gdy bierzemy sumę względem wszystkich liczb t, można w wyrazie którymkolwiek przemienić wzajemne liczby t,—to wyrażenie powyższe przejdzie na następujące:

$$-2\gamma'\, \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \ldots t} \{t_1\, kt_2 \ldots t_{2n};\, k'h) - (t_1 k' t_2 \ldots t_{2n};\, kh)\}\, u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}} .$$

a na mocy wzoru (3) na str. 107, przybierze postać:

$$-2\,\gamma'\, \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \ldots t} (kt_1 \ldots t_{2n};\, k'h)\, u_{t_1} \ldots u_{t_{2n}} ,$$

lub:

$$(9) \qquad \sum_{s} c_{kk'r} \left\{ \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} (t_1 \dots t_{2n};\, sh)\, u_{t_1} \dots u_{t_{2n}} \right\} .$$

Przejdźmy nakoniec do wyrazów rzędu nieparzystego $2n-1$.

Jeżeli uwzględnimy we wzorze (6) możliwość zamiany wzajemnej liczb t, spostrzeżemy, że spółczynnik przy $u_{t_1}, \dots, u_{t_{2n-1}}$ jest —poza czynnikiem $\frac{1}{(2n-1)!}$ —pierwszą stroną wzoru na str. 281, a więc jest zerem.

Zbierając otrzymane wyniki, otrzymujemy:

$$(U_k U_{k'}) = \sum_{s} c_{kk'r} \sum_{h} \left[\varepsilon_{sh} - \gamma' \sum_{t} c_{tsh}\, u_t + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{(2n)} \sum_{t_1 \dots t_{2n}} (t_1 \dots t_{2n};\, sh)\, u_{t_1} \dots u_{t_{2n}} \right] \frac{\partial}{\partial u_h} = \sum_{s} c_{kk's}\, U_s .$$

Wzór ten dowodzi, że przekształcenia nieskończonostkowe U wytwarzają grupę i że ta grupa ma dokładnie budowę z góry daną.

8. Grupy proste i złożone. Pomiędzy podgrupami niezmienniczemi grupy danej należy wyszczególnić daną grupę i grupę, utworzoną z jednego tylko podstawienia tożsamościowego.

Na istnieniu podgrup niezmienniczych opiera się ważne rozróżnienie grup, mianowicie: grupa jest prostą, wtedy, gdy prócz wymienionych dwóch podgrup nie posiada żadnej podgrupy niezmienniczej; nazywa się złożoną w razie przeciwnym.

O podgrupach niezmienniczych łatwo dowieść dwóch twierdzeń następujących:

Przekształcenia wspólne dwóm podgrupom niezmienniczym, tworzą podgrupę niezmienniczą.

Dwie podgrupy niezmiennicze grupy danej, nie mające żadnego przekształcenia nieskończonostkowego wspólnego, mają tę własność, że każde przekształcenie jednej jest przemienne z każdem z przekształceń drugiej.

9. Grupy pochodne i grupy całkowalne. Niechaj będzie grupa, wytworzona z przekształceń nieskończonostkowych $X_1, \ldots, X_r$; przekształcenia $(X_i X_j)$ tworzą wogólności podgrupę grupy danej, nazwaną grupą pochodną. Jeżeli utworzymy grupę pochodną tej grupy, otrzymamy grupę pochodną drugą grupy danej i t. d.

Z twierdzenia, dowiedzionego w tekście, wypływa bezpośrednio:

Grupa pochodna podgrupy niezmienniczej danej grupy G_r jest sama podgrupą niezmienniczej grupy G_r.

Stąd zaś: Wszystkie podgrupy pochodne grupy G_r są podgrupami niezmienniczemi tej grupy.

Jest widocznem, że gdy grupa pochodna grupy G_r składa się z samego przekształcenia tożsamościowego, wtedy przekształcenia nieskończonostkowe grupy G_r każde z każdem są przemienne (patrz Rozdz. II, § 8), oraz że jeżeli grupa pochodna jest identyczna z grupą G_r, to i wszystkie następne grupy pochodne będą z nią identyczne.

Szereg grup pochodnych jest oczywiście skończony. Jeżeli daną jest grupa G_r i utworzymy jej kolejne grupy pochodne, znajdziemy, że grupa $(q+1)$-sza zlewa się z q-tą. Może wtedy zdarzyć się, że albo ta q-ta grupa pochodna składa się z samego przekształcenia tożsamościowego, albo też składa się prócz tego z innych jeszcze przekształceń. W pierwszym przypadku powiemy, wraz z Liem, że grupa dana jest całkowalna, w drugim zaś niecałkowalna.

Jest widocznem, że:

Każda podgrupa grupy całkowalnej jest też całkowalna.

Można dowieść łatwo następującego twierdzenia:

Każda grupa G_{r-m} o $r-m$ parametrach izomorficzne meriedrycznie z grupą całkowalną G_r o r parametrach, jest całkowalna.

Po szczegóły odsyłamy czytelnika do dzieła Transfgr. III, str. 679 i nast.

10. Równanie charakterystyczne Killinga. Porządek grupy. Niezmienniki grupy dołączonej[1]). Niechaj będzie grupa G_r o r parametrach i niechaj $X_1, \ldots, X_r$ będą jej przekształcenia nieskończonostkowe. Rozpatrzmy podgrupę o jednym parametrze i niechaj będzie $\sum_{k=1}^{r} e_k X_k$ jej przekształcenie nieskończonostkowe, gdzie stałe e są wielkości ustalone. Stawiamy następujące pytanie: Czy istnieje podgrupa o dwóch parametrach grupy G_r, i taka, że jednem z jej przekształceń nieskończonostkowych jest $\sum_{k=1}^{r} e_k X_k$? Pytanie to jest równoważne z następującem: czy można zawsze wyznaczyć stałe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tak, aby dwa przekształcenia $\sum_k e_k X_k$, $\sum_s \lambda_s X_s$ tworzyły grupę?

Aby to było, jest koniecznem i dostatecznem, by nawias $\left(\sum_k e_k X_k, \sum_s \lambda_s X_s\right)$ był tożsamościowo równy kombinacyi liniowej o spółczynnikach stałych tych dwóch tylko przekształceń, t. j. aby był równy:

$$\varrho \sum_k e_k X_k + \omega \sum_s \lambda_s X_s.$$

Gdyby ω było zerem, wtedy grupa $\sum e_k X_k$ byłaby grupą pochodną (patrz notę poprzednią) grupy o dwóch parametrach, o której

[1]) Patrz Rozdział IV § 1, str. 197.

mowa, przypadek ten wyłączony, t. j. zakładamy, że ω jest zawsze różne od zera. Podstawiając za niewiadome $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ odpowiednie wielkości, możemy zawsze sprawić, by strona druga sprowadzona została do wyrażenia, składającego się z jednego tylko wyrazu. W samej rzeczy, jeżeli położymy:

$$\lambda_s = \mu_s - \frac{\varrho}{\omega} e_s,$$

wzór powyższy przybierze postać:

$$\left(\sum_k e_k X_k, \sum_s \mu_s X_s - \frac{\varrho}{\omega} \sum_s e_s X_s\right) = \omega \sum_s \mu_s X_s,$$

t. j.

$$\left(\sum_k e_k X_k, \sum_s \mu_s X_s\right) = \omega \sum_s \mu_s X_s, \tag{1}$$

gdzie niewiadomemi są $\mu_1, \ldots, \mu_r$ i ω.

Aby rozwiązać postawione zagadnienie, winniśmy zadość uczynić temu równaniu. Ponieważ przekształcenia X tworzą już grupę, przeto stronę pierwszą można rozwinąć na wyrażenie:

$$\sum_\nu \sum_k \sum_s e_k \mu_s c_{ks\nu} X_\nu,$$

stąd, by wzór (1) zachodził, być musi:

$$\sum_{s=1}^{r} \mu_s \sum_{k=1}^{r} c_{ks\nu} e_k = \omega \mu_\nu. \qquad (\nu = 1, \ldots, r). \tag{2}$$

Mamy tu r równań liniowych jednorodnych względem wielkości μ; warunkiem koniecznym spółistnienia tych równań jest to, by wyznacznik spółczynników był zerem. Wyznacznik ten jest funkcyą całkowitą wymierną stopnia r względem wielkości ω; będą zatem istniały wogóle

wartości ω, dla których równania (2) są zgodne. Możemy zatem powiedzieć: Każde przekształcenie nieskończonostkowe grupy G_r należy wogólności zawsze do podgrupy o dwóch parametrach grupy danej (Lie).

Wyznacznikiem spółczynników równań (2) jest:

$$\Delta \equiv \left| \varepsilon_{sv}\,\omega - \sum_{k=1}^{r} c_{ksv}\,e_k \right|, \qquad (s,v=1,\ldots,r),$$

gdzie ε_{sv} jest 1 albo 0, stosownie do tego, czy $s=v$, albo $s \lesseqgtr v$. Wyznacznik ten, przyrównany do zera, daje t. zw. równanie charakterystyczne Killinga.

Widzimy, że jednym z pierwiastków równania $\Delta=0$ jest zawsze $\omega=0$, a stąd Δ można rozwinąć w ten sposób:

$$\Delta=\omega^r-\psi_1(e)\,\omega^{r-1}+\psi_2(e)\,\omega^{r-2}+\ldots+(-1)^{r-1}\psi_{r-1}(\omega),$$

gdzie $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{r-1}$ są funkcye wymierne całkowite jednorodne względem wielkości e; można dowieść ważnej ich własności, że są one niezmiennikami (p. Rozdz. II § 1) grupy dołączonej.

Na tych funkcyach ψ Killing opiera ważną klasyfikacyę grup. Mówimy G_r jest porządku l, jeżeli pomiędzy $r-1$ funkcyami ψ jest ściśle l niezależnych. Jeżeli wszystkie funkcye ψ są zerem dla jakiegokolwiek układu wartości e, wtedy $l=0$ i mamy grupy porządku zero.

Jest widocznem, że wszystkie grupy o dwóch parametrach, zawarte w takich grupach, posiadają przekształcenia, każde z każdem przemienne. Łatwo też można dowieść, że każda grupa porządku zero jest grupą całkowalną (patrz dopełnienie 9)

11. Niezmienniki całkowe. Jeżeli pewna skończona lub nieskończona ciągła grupa przekształceń zmiennych $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_N$, gdzie wielkości y są funkcyami zmiennych x, wielkości

zaś z są pochodnemi tych funkcyj względem x, aż do pewnego rzędu p, posiada tę własność, że każde przekształcenie tej grupy nie zmienia postaci elementu całki wielokrotnej:

$$\int \Omega(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; z_1, \ldots, z_N)\, dx_1, \ldots, dx_n,$$

to całka ta nazywa się niezmiennikiem całkowym uważanej grupy.

Oprócz takich całek można rozważać całki postaci:

$$\int \Omega(x_1, \ldots, x_n; l_1, \ldots, l_m)\, dx_1, \ldots, dx_n,$$

gdzie $l_1, \ldots, l_m$ są inne zmienne. Jeżeli przy zastosowaniu do całki przekształceń pewnej grupy r-parametrowej T zmiennych x i izomorficznej z nią grupy L zmiennych l, postać elementu całkowego pozostaje bez zmiany, to całka ta nazywa się także niezmiennikiem całkowym kategoryi drugiej, gdy poprzednia jest niezmiennikiem całkowym kategoryi pierwszej (Żorawski).

Niezmiennikami całkowemi zajmowali się: Poincaré (Acta math., **1**), Żorawski (Rozpr. Akad. Krak., **28**, 1895, Prace mat.-fizyczne, **13**, 1902), Lie (Leipz. Ber. **49**, 342—357, 369—410; 1897), Donder (Rend. del Circolo mat. di Palermo, 1901) i inni.

W KRAKOWIE

Bibliografia prac z teoryi grup przekształceń

w literaturze polskiej.

K. Żorawski. O pewnem odkształceniu z teoryi powierzchni. Rozpr. Akad. Um. w Krak., 23, s. 225—291; 1891.

„ O całkowaniu układów równań różniczkowych cząstkowych rzędu pierwszego liniowych i jednorodnych z jedną zmienną zależną. Prace mat.-fiz., 3, s. 1—32; 1892.

„ Niezmienniki różniczkowe pewnej nieskończonej grupy przekształceń. Roz. Ak., 24, s. 41—55; 1893.

„ Przyczynek do teoryi zamiany zmiennych w równaniach różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego. Rozpr. Ak. 26, str. 67—79; 1893.

„ Drobne przyczynki do teoryi przekształceń i jej zastosowań. Tamże, 26, s. 299—300; 1893.

„ O całkach niezmiennych ciągłych grup przekształceń. Rozpr. Ak., 28, s. 232—273; 1895.

„ O linii wskazującej krzywiznę powierzchni. Rozpr. Ak, 29, str. 250—265; 1895.

S Lie. Przyczynek do ogólnej teoryi równań różniczkowych dowolnego rzędu, przełożył z niemieckiego za zezwoleniem autora K. Żorawski. Prace mat.-fiz., 7, s. 69—136; 1896.

J. Paczowski. O równaniach różniczkowych, zezwalających na nieskończenie małe przekształcenia. Streszczenie dzieła Liego-Schefersa. Z seminaryum mat. prof. K. Żorawskiego w Krakowie. Prace mat.-fiz., 7, s 178—211; 1896.

K. Żorawski. O pewnych związkach w teoryi powierzchni. Rozpr. Ak., 33, 107—119; 1897.

„ O całkowaniu pewnej klasy zwyczajnych równań różniczkowych. Rozpr. Akad., 34, 141—205; 1898.

E. Wierzbicki. Streszczenie dzieła Liego: „Geometrya przekształceń styczności owych". Z seminaryum mat. prof. K. Żorawskiego w Krakowie. Prace mat.-fiz., 9, 170—212, 1898.

W. Arvay i H. Komperda. O pewnych cechach charakterystycznych grupy ruchów euklidesowych. Z seminaryum matem. prof. K. Żorawskiego. Prace mat.-fiz, 9, 113—128; 1899.

E. Wierzbicki. Odwzorowania, nie zmieniające pól powierzchni, jako przykład do teoryi niezmienników różniczkowych. Z seminaryum matematycznego prof. K. Żorawskiego. Prace mat. fiz., 9, s. 129—134; 1899.

H. Pająk. O całkowaniu pewnych równań różniczkowych rzędu drugiego. Z seminaryum mat. prof. K. Żorawskiego w Krakowie. Prace mat.-fiz., 11, s. 32—45; 1900.

K. Żorawski. Przyczynek do geometryi nieskończenie małych przekształceń. Rozpr. Akad., 37, s. 154—175; 1900.

„ O warunkach niezmienności pewnych równań różniczkowych przy nieskończenie małych przekształceniach. Prace mat.-fiz., 12, 1—10; 1901.

„ O pewnych zmianach długości liniowych elementów podczas ruchu ciągłego układu materyalnych punktów. Część pierwsza. Rozpr. Akad., 38, s. 353—365, 1901. Część druga, Rozpr. Akad., 42, s. 212—215; 1902.

„ O własnościach pewnej całki wielokrotnej, będącej uogólnieniem dwóch twierdzeń z teoryi wirów. Prace mat.-fiz., 13, str. 107—161; 1902.

„ O pewnem zagadnieniu z teoryi podobnego odwzorowania Rozpr. Akad., 39, s. 218—235; 1902.

„ O zachowaniu ruchu wirowego. Rozpr. Akad., 39, s. 236-250; 1902.

Dodajemy nadto rozprawy treści historycznej:

K. Żorawski. O działalności naukowej Sophusa Liego. Wiad. mat., 3, str. 85—119; 1899.

Fr. Meyer. O stanie obecnym teoryi niezmienników. Przełożył za upoważnieniem autora S. Dickstein. Warszawa, 1899. W dziele, tem, zwłaszcza we Wstępie (str. 11), w Części I (str. 35) w Części II (s. 138, 174), mowa jest o niektórych częściach teoryi przekształceń Liego.

WYKAZ ALFABETYCZNY RZECZY.

Asystatyczne i systatyczne grupy, 177.

Bernoulli'ego liczby, 271.
Budowa grupy, 206.

Całkowalne grupy, 287.
Charakterystyczne równania, 27.
Ciągłe grupy, 11.

Dołączony p. Grupa dołączona, 197.

Grupa budowy, 206.
„ całkowalna, 287.
„ ciągła i nieciągła, 11.
„ dołączona, 197.
„ jednoparametrowa, 34.
„ kanoniczna, 38.
„ Liego, 13.
„ liniowa ogólna, 22.
„ „ specyalna, 23.
„ „ „ jednorodna, 23.
„ niecałkowalna, 287.
„ niepierwotności, 221.
„ nieskończona i skończona, 13.
„ parametryczna, 211.
„ pochodna, 287.
„ prosta i złożona, 288.
„ przechodnia, 167.
„ przekształceń, 10.
„ rozszerzona pierwsza, druga i t. d., 124.
„ r-parametrowa, 72.
„ systatyczna i asystatyczna, 177.
„ wzajemna, 231.
Grupy izomorficzne, 178.
Grupy izomorficzne holoedrycznie i meriedrycznie, 181.

Holoedryczny izomorfizm, p. izomorfizm, 178.

Iloczyn przekształceń, 3, 63, 277.
Izomorfizm grup, 178.

Jacobi'ego tożsamości, 59, 259.
Jednoparametrowe grupy, 34.

Kanoniczna grupa, 38.
Konstrukcya ∞^{2r} przekształceń grupy o r parametrach, 72.

Meriedryczny izomorfizm, p. izomorfizm, 178.

Nawiasy Poissona, p. Poissona nawiasy.
Nieciągłe grupy, 11.
Niepierwotność grup, 172.
Niezmienniczość układu równań skończonych względem grupy, 115.
Niezmienniczość układu przekształceń nieskończonych względem grupy, 147.
Niezmienniczość układu zupełnego równań o pochodnych cząstkowych, 143.
Niezmiennik jednoczesny wyrażenia Pfaffa i przekształcenia nieskończonostkowego, 257.
Niezmiennik Schwarza, 263.
Niezmienniki grupy, 113
Niezmienniki grupy dołączonej, 288.
Niezmienniki całkowe, 290.
Niezmienniki różniczkowe, 263.

Odwrotne przekształcenia, 2.

Parametry, 2.
„ istotne, 5, 267.
„ różniczkowe, 263.
Pfaffa równania i wyrażenia, 234.
Podgrupa, 11.
„ gatunku 1-go, 12.
„ „ 2-go. 12.
„ stateczności punktu, 142.
Podgrupy wyjątkowe, 162.
Podobieństwo dwu grup, 185.
Poissona nawiasy, 55, 268.
Porządek grupy, 288.
Przechodniość grup, 167.
Przekształcenia Cremony, 23.
„ nieskończonostkowe, 44.
Przekształcenia nieskończonostkowe zwyczajne i bezwzględnie niezależne, 55.
Przekształcenia nieskończonostkowe rozszerzone, 229.
Przekształcenia odwrotne, 2.
„ podobne. 21.
„ tożsamościowe, 18.

Równania charakterystyczne, 27.
„ Pfaffa, 234.
„ charakterystyczne Killinga 288.
Rozszerzenie przekształcenia, 229.
Rząd przekształcenia nieskończonostkowego, 60.

Suma elementarna działań rzędu k, 57
Symbol przekształcenia nieskończonostkowego, 45.
Systatyczność grupy, 175.

Tożsamościowe przekształcenie, 18.
Trajektorye grupy, 47.
Twierdzenia zasadnicze teoryi ciągłych grup przekształceń: pierwsze, 26.
„ „ drugie, 102.
„ „ trzecie, 106, 279

Układy równań Pfaffa, 256.

Wyrażenia Pfaffa, 234.
Wzajemniki, 264.

Zmienne spółpodstawieniowe, 2.