

Księgozbiór
Instytutu Matematyki
WSP w Krakowie

S 1970

DR. HAZIMIERZ BARTEL
PROFESOR SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE

GEOMETRYA WYKREŚLNA



LWÓW MCMXIX

KSIAŻNICA POLSKA TOW. NAUCZYCIELI SZKÓŁ
WYŻSZ. WE LWOWIE — WARSZAWA: GEBETHNER
I WOLFF. — POZNAŃ: M. NIEMIERKIEWICZ.

KSIĄŻNICA POLSKA

TOW. NAUCZYCIELI SZKÓŁ WYŻSZYCH

LWÓW, ZIMOROWICZA L. 17

POLECA NASTĘPUJĄCE PODRĘCZNIKI SZKOLNE:

KS. DR. ŚLÓSZARZ. Katechizm religii katolickiej dla młodzieży szkół średnich. Wyd. 4. (w druku) . K	6'20
DR. S. SZYDELSKI. Dzieje biblijne przed Jezusem Chrystusem (ill.).	5'50
— Dzieje biblijne Nowego Przymierza (ill.).	6'—
PRÓCHNICKI-WÓJCIK. Wypisy polskie dla I. kl. Wyd. 5. 1908	2'15
— Wypisy polskie dla II. kl. Wyd. 3. 1907	2'50
PRÓCHNICKI F. i WOJCIECHOWSKI K. DR. Wypisy polskie dla szkół średnich T. IV. (w druku)	—'—
— Wypisy polskie dla szkół śred. T. V. (w oprawie)	
CHYZANOWSKI i WOJCIECHOWSKI K. Wypisy polskie dla klas wyższych szkół średnich. Część I. (do r. 1822). Wyd. II.	11'50
PRÓCHNICKI F. O ważniejszych gatunkach poezji i prozy, dodatek do wypisów polskich. T. V. (broszurowane). Wyd. 3. (w druku)	—'—
SAMOLEWICZ Z. DR. Zwięzła gramatyka łacińska dla kl. I i II. Wyd. 10. 1918 (w druku)	—'—
SAMOLEWICZ-SOŁTYSIK. Gramatyka języka łacińskiego. Cz. II. Składnia. Wyd. 12. 1918.	9'—
CAESAR C. J. Commentarii de bello Gallico opracował Fr. Terlikowski. Wyd. 5.	5'50
TERLIKOWSKI FRANCISZEK. Słowniczek do skróconego wydania pamiętników Cezara o wojnie Gallickiej. Lwów 1918	4'—
CICERO M. T. Wybór z pism retorycznych, filozoficznych i listów, opr. Jan Szczepański. 1914	5'50
— Mowa za Rozcyszem.	1'—
TYTUSA LIWIUSA Dzieje rzymskie w wyborze opr. Jan Jędrzejowski 1914	5'50
Czytanka łacińska na podstawie Kornel. Neposa i Kurcyusza Rufusa, dla kl. III. i IV. szkół średnich, opr. A. Frączkiewicz z ilustr. Wyd. 3.	5'—
Owidius i inni elegicy rzymscy. Wiazanka wierszy, opr. Dr. T. Sinko. Wyd. 2. ilustr.	5'50

DR KAZIMIERZ BARTEL
PROF. SZKOŁY POLITECHNICZNEJ WE LWOWIE

GEOMETRYA WYKREŚLNA



LWÓW MCMXIX

KSIAŻNICA POLSKA TOW. NAUCZYCIELI SZKÓŁ
WYŻSZYCH WE LWOWIE. WARSZAWA: GEBETHNER
I WOLF. POZNAŃ: M. NIEMIERKIEWICZ



M 52 786 / 1

UP - Kraków BG



1050284283

2019 BG. UP
D. 87 - 1

15

Przeważna część tej książki — przeznaczonej dla początkujących — powstała w polu, podczas służby wojskowej, do której zmuszony byłem ogłoszoną dnia 1. sierpnia 1914 r. mobilizacją. Ostatnie arkusze pisałem w okresie walki o Lwów, w bardzo nielicznych godzinach wolnych od służby wojskowej.

Techniczne wykonanie rysunków zawdzięczam asystentom przy mojej katedrze pp. dr. Antoniemu Plamitzerowi i Mieczysławowi Teliczce.

Niezwykle trudne warunki, wśród których powstała książka, są dostatecznem usprawiedliwieniem jej braków.

We Lwowie, dnia 24. grudnia 1918.

Dr. Kazimierz Bartel

SPIS RZECZY

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

	Str.
1. Przedmiot geometrii wykreślnej	1
2. Uwagi o rysunku geometrycznym	2
3. Elementy przestrzeni. Oznaczenia	6
4. Proste przecinające się i równoległe na płaszczyźnie	6
5. } Proste skośne. Prosta i płaszczyzna	8
6. }	
7. Płaszczyzny przecinające się i równoległe	8
8. Pojęcie rzutu środkowego i równoległego	10
9. O konstrukcjach geometrycznych	11

ROZDZIAŁ PIERWSZY

GEOMETRYA WYKREŚLNA ELEMENTÓW PRZESTRZENI, UTWORÓW PŁASKICH I WIEŁOŚCIANÓW

§ 1. ZASADY RZUTÓW CECHOWANYCH

10. Określenie położenia punktu w przestrzeni	14
11. Rzut cechowany prostej	15
12. Podziałka rysunku	16
13. Kład prostej	17
14. Kąt nachylenia prostej z płaszczyzną rzutów. Ślad i nachylenie prostej	17
15. Podział odcinka	18
16. Płaszczyzny równoległe i kład prostych na nie	19
17. Stopniowanie i moduł prostej	20
18. Dwie proste przecinające się	22
19. Dwie proste skośne	22
20. } Dwie proste równoległe. Zadanie	23
21. }	
22. Wyznaczenie płaszczyzny	23

VI

	Str.
23. Prosta prostopadła do płaszczyzny	25
24. Rzut kąta prostego	26
25. Linia spadu płaszczyzny	26
26. Zadania	27
27. Przenikanie się dwóch płaszczyzn	29
28. Punkt przebicia się prostej z płaszczyzną	31
29. Zadania	31
30. Płaszczyzny równoległe	32
31. Zadania	33
32. Prosta prostopadła do płaszczyzny	34
33. Zadania	35

§ 2. ZASADY RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA DWIE PŁASZCZYZNY

34. Rzuty punktów	36
35. Różne położenia punktu w przestrzeni	39
36. Rzuty i ślady prostej na dwie płaszczyzny	42
37. Dwie proste	46
38. O płaszczyźnie i jej śladach	47
39. } Kład odcinka i jego podział. Zadanie	50
40. }	

§ 3. ZADANIA ODNOSZĄCE SIĘ DO WZAJEMNYCH POŁOŻEŃ PUNKTÓW, PROSTYCH I PŁASZCZYZN

41. Proste i punkty na płaszczyźnie	52
42. Płaszczyzny dwusieczne	53
43. Proste i punkty na płaszczyznach, wyznaczonych śladami	54
44. Zadania	56
45. Ćwiczenia	58
46. O płaszczyznach, przechodzących przez proste i punkty	60
47. } Zadania. Ćwiczenie	62
48. }	
49. O płaszczyznach przecinających się i równoległych	63
50. Wyznaczenie punktu przebicia się prostej z płaszczyzną	68
51. Dalsze przykłady wyznaczania krawędzi dwóch płaszczyzn	70
52. Zadania	73
53. O punktach „widocznych“ i „niewidocznych“	73
54. Zadania	75
55. Ćwiczenia	77
56. Proste równoległe do płaszczyzny	78
57. Zadania	79
58. Ćwiczenia	80
59. Proste prostopadłe. Prosta prostopadła do płaszczyzny	80
60. Płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny	83
61. Zadania	83
62. Ćwiczenia	87

§ 4. WPROWADZENIE TRZECIEJ PŁASZCZYZNY RZUTÓW

63.	Rzutnia boczna. Rzuty boczne punktów	88
64.	Rzuty i ślady boczne prostej	93
65.	Ślady boczne płaszczyzn	96
66.	Przykłady użycia rzutni bocznej do rozwiązania zadań	98
67.	Ćwiczenia	100

§ 5. OBROTY, KŁADY I ICH ZASTOSOWANIA

68.	} O metodzie obrotu. Obroty punktu	104
69.		
70.	Obroty prostej	106
71.	Obrót płaszczyzny	107
72.	Kład płaszczyzny rzucającej	108
73.	Kąty nachylenia prostej z płaszczyznami rzutów	109
74.	Kąty nachylenia płaszczyzny z rzutniami	111
75.	Kłady płaszczyzn dowolnie położonych w przestrzeni	114
76.	Rzut na dowolną płaszczyznę	117
77.	Podnoszenie płaszczyzn	118
78.	Zadania	120
79.	Kąt nachylenia dwóch prostych	123
80.	Ćwiczenia	124
81.	Kąt nachylenia prostej z płaszczyzną	125
82.	Zadania	127
83.	Ćwiczenia	128
84.	Kąt nachylenia dwóch płaszczyzn	128
85.	Zadania	130
86.	Ćwiczenia	135
87.	Rzuty wielościanów	135
88.	Przykłady	139
89.	Rzuty wielościanów umiarowych	141

§ 6. RZUTY UKOŚNE

90.	Rzut ukośny punktu	148
91.	O stosunkach skróceń	150
92.	Zadania	151

§ 7. POWINOWACTWO ŚRODKOWE. ELIPSA.

93.	Rzut ukośny układu płaskiego	152
94.	Powinowactwo dwóch układów płaskich, złączonych na jednej płaszczyźnie	154
95.	Rzuty prostokątne i ukośne a powinowactwo środkowe	158
96.	Rzut ukośny koła. Elipsa	160
97.	Konstrukcyje elips z danych średnic sprzężonych, względnie osi .	163
98.	Styczne do elipsy	168
99.	Rzuty prostokątne koła	170
100.	Elipsa jako krzywa powinowata z elipsą	173

§ 8. PRZEKROJE I PRZENIKANIA WIEŁOŚCIANÓW

101.	Płaskie przekroje wielościanów	173
102.	Przekroje płaskie graniastosłupów	177
103.	Zadanie	181
104.	Płaskie przekroje ostrosłupów	183
105.	Zadanie	185
106.	Punkty przebicia się prostej z wielościanem	186
107.	Rozwinięcia wielościanów	188
108.	Przenikanie się wielościanów w ogólności	190
109.	Przenikanie się ostrosłupów	191
110.	Przenikanie się graniastosłupów	200
111.	Przenikanie się ostrosłupów z graniastosłupami	205

§ 9. KOLINEACYA ŚRODKOWA UKŁADÓW PŁASKICH

112.	Rzut środkowy	209
113.	Wyznaczenie położenia płaszczyzny metodą rzutu środkowego	211
114.	Kolineacya środkowa	212
115.	Rzuty układów środkowo kolineacyjnych	213
116.	Przykłady	215

ROZDZIAŁ DRUGI

LINIE KRZYWE I POWIERZCHNIE

§ 10. KRZYWE STOŻKOWE

117.	Pęki i szeregi jednokreślne	219
118.	Pęki jednokreślne w kole	222
119.	Twierdzenie Pascala	222
120.	Kolineacya środkowa koła	224
121.	Twierdzenie Pascala w zastosowaniu do elipsy, hiperboli i paraboli	230
122.	Konstrukcyja stycznych do elipsy	236
123.	O kolineacyi i powinowactwie krzywych stożkowych	238

§ 11. O KRZYWYCH I POWIERZCHNIACH W OGÓLNOŚCI

124.	Określenie i podział linii krzywych	239
125.	Określenie i podział powierzchni	239
126.	O płaszczyznach stycznych do powierzchni	240

§ 12. POWIERZCHNIE STOŻKOWE I WALCOWE

127.	Tworzenie i podział powierzchni stożkowych i walcowych	241
128.	Płaszczyzny styczne do stożków i walców	242
129.	Podział i rzuty powierzchni walcowych rzędu drugiego	243
130.	O przekrojach walców rzędu drugiego w ogólności	245
131.	Przykłady przekrojów walców	247
132.	O punktach przebicia się prostej z walcem	252

	Str.
133. Rzuty i podział powierzchni stożkowych rzędu drugiego	254
134. Przekroje stożków płaszczyznami	256
135. Przekroje powierzchni stożkowych wzdłuż dwóch tworzących	258
136. Punkty przebicia się prostej z powierzchnią stożkową	259
137. Przykłady płaszczyzn stycznych do powierzchni stożkowych i walcowych	260
138. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdłuż elips	261
139. Kołowe przekroje stożka	268
140. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdłuż hiperbol	269
141. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdłuż parabol	273
142. O rozwijaniu powierzchni stożkowych i walcowych na płaszczyźnie	275
143. O linii śrubowej	278

§ 13. POWIERZCHNIE OBROTOWE

144. Tworzenie i podział powierzchni obrotowych	279
145. Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowych	282
146. O zarysach powierzchni obrotowych	284
147. Przedstawienie powierzchni obrotowych w rzutach prostokątnych	285
148. O kulach wpisanych w stożek i walec obrotowy	286
149. Zadania	288
150. Punkt na powierzchni obrotowej	291
151. Płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej w danym punkcie	292
152. Zadania	293
153. Przekroje powierzchni obrotowych płaszczyznami	297
154. Przekroje kuli	301
155. Przykłady przekrojów walców i stożków obrotowych płaszczyznami	303
156. O punktach przebicia się prostych z powierzchniami obrotowymi	316
157. Płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, przechodzące przez dany punkt	317
158. Płaszczyzny styczne do walca obrotowego, przechodzące przez dany punkt	318
159. Płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, równoległe do danej prostej	319
160. Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej, a równoległe do danej płaszczyzny α	321
161. Wyznaczenie linii styczności walca, o tworzących równoległych do danego kierunku, z powierzchnią obrotową	323
162. Zadanie	327
163. O rzutach powierzchni obrotowych, których osi nie są prostopadłe do płaszczyzn rzutów	327
164. O stożkach opisanych na powierzchniach obrotowych	332
165. Zadania	337

§ 14. POWIERZCHNIE TOPOGRAFICZNE

166. Plan warstwicowy	340
167. Przekrój powierzchni topograficznej płaszczyzną rzucającą	342

	Str.
168. Uzupełnienie planu warstwicowego	343
169. Przekrój powierzchni topograficznej dowolną płaszczyzną	343
170. Linie największych spadów powierzchni topograficznej	344
171. Zadanie	345

§ 15. PRZENIKANIE SIĘ POWIERZCHNI

172. O przenikaniu się wielościanów z powierzchniami	346
173. O przenikaniu się powierzchni	351
174. Przykłady przenikania się powierzchni	352

ROZDZIAŁ TRZECI

O WYZNACZANIU CIENI

§ 16. CIENIE PUNKTÓW, PROSTYCH, WIELOKĄTÓW I KOŁA

175. Uwagi wstępne	361
176. Cień punktu	361
177. Cień odcinka	362
178. Cień koła	364

§ 17. CIENIE WIELOŚCIANÓW I POWIERZCHNI

179. Uwagi ogólne	366
180. Cienie ostrosłupów i stożków	368
181. Cienie graniastosłupów i walców	373
182. Cienie punktów i linii na wielościany i powierzchnie	374
183. O cieniach zespołów geometrycznych	379
184. Ćwiczenia	387
185. Cienie kuli	387
186. Cień prostej na kulę	390
187. Przykłady	391
188. Cień powierzchni obrotowej	391

ROZDZIAŁ CZWARTY

PERSPEKTYWA ŚRODKOWA

§ 18. PERSPEKTYWA ELEMENTÓW ZASADNICZYCH

189. Uwagi ogólne	394
190. Perspektywa prostych, leżących na płaszczyźnie podstawowej . .	395
191. Punkty i koło oddalenia	397
192. Proste prostopadłe do tła	398
193. Zadania	398
194. Proste prostopadłe do płaszczyzny podstawy	400
195. Proste, dowolnie położone w przestrzeni	402
196. Perspektywa jako metoda pośrednia	403

Uwaga : Rysunki¹ których liczby zaopatrzone są w gwiazdki * ujęte są w tablice.

DOSTRZEŻONE OMYŁKI W TEKŚCIE

Strona:			Zamiast:	Czytaj:
11.	7.	wiersz od dołu	w wypadkach	w wypadkach
29.	15.	" " góry	$A, B, C, D, E.$	$A B C D E.$
31.	7.	" " "	$\varepsilon' \text{ i } \varphi.$	$\varepsilon \text{ i } \varphi.$
31.	19.	" " "	P'	$P (P')$
73.	6.	" " "	$(b' b')$	$(b' b'')$
78.	9.	" " dołu	$(p_1' p_1')$	$(p_1' p_1'')$
79.	10.	" " góry	$(p' p')$	$(p' p'')$
80.	1.	" " dołu	A'	M'
80.	1.	" " "	A''	M''
90.	8.	" " góry	Rys. 176	Rys. 176*
94.	12.	" " dołu	pionowy	boczny
95.	2.	" " "	z	$- y$
96.	7.	" " góry	$+ x$	$- y$
114.	1.	" " "	A'	A
117.	10.	" " "	prostodadłej	prostopadłej
133.	5.	" " dołu	Rys. 225.	Rys. 255.
142.	1.	" " "	$A B^0 C D^0$	$A B^0 C^0 D^0$
144.	1.	" " "	przeciwprostokątną	drugą przyprostokątną
168.	21.	" " "	stycznej	stycznej do
187.	18.	" " "	$\varphi \equiv (m, l)$	$\varphi \equiv (m, p)$
269.	20.	" " "	$(t_1' t_1'')$	$(t_1' t_1'')$
300.	7.	" " góry	$H_0 (H_0' H_0'')$	$H_0 (H_0 H_0'')$
300.	14.	" " "	$2 (2' 2')$	$2 (2' 2'')$
310.	8.	" " "	b_0	b^0
347.	3.	" " "	G_0	G^0
359.	3.	" " dołu	$\pi \equiv (t, n)$	$\pi \equiv (t, u)$

DOSTRZEŻONE OMYŁKI W RYSUNKACH

Str.	13.	Na Rys.	20.	oznaczyć przez M punkt przecięcia się prostych q_1 i m .
"	55.	"	"	101 b. zamiast V_n ma być V_n^{∞} .
"	60.	"	"	113 b. prostą $V_a H_a''$ oznaczyć należy przez a'' .
"	89.	"	"	176. ma być Rys. 176*.
"	109.	"	"	218*. kąt $(H_p^0 V_p H_p^x)$ oznaczyć należy literą β .
"	165.	"	"	290. elipsę oznaczyć należy literą k .
"	211.	"	"	341. zamiast m ma być m_1 .
"	262.	"	"	403. " l_2 " " l_2' .
"	269.	"	"	410. " l' i $2'$ " " l i 2 .
"	323.	"	"	471. oznaczyć należy prostą $H A_1'$ przez k_1' .

WIADOMOŚCI WSTĘPNE

1. Przedmiot geometryi wykreślnej. Podobnie jak mowa lub pismo, jest wszelki rysunek sposobem porozumiewawczym, służącym celom nauki, techniki lub sztuki.

Prawa rządzące mową lub pismem są przedmiotem nauki gramatyki, względnie ortografii; niezmiennie, a więc w dziedzinie nauk ścisłych leżące prawa, którym podlega każdy rysunek, są przedmiotem geometryi wykreślnej. Geometrya wykreślna jest więc, nie ulegająca zmianom, gramatyką wszelkiego rysunku.

Odtworzenie przedmiotu przedstawionego rysunkiem wymaga współdziałania tej władzy naszego umysłu, którą określamy mianem *zmysłu przestrzeni*. Zdolność wyobrażania sobie ściśle określonych i określone położenie w przestrzeni zajmujących utworów przestrzennych, w najogólniejszem ich rozumieniu, nie jest właściwą w równym stopniu każdemu umysłowi. Są ludzie, którzy patrzą a nie widzą, w podwójnem znaczeniu tego wyrazu: nie umieją spostrzegać i nie posiadają zdolności należytego zapamiętania, względnie odtworzenia tego na co patrzą. Zdolność spostrzegania da się rozbudzić i wykształcić, podobnie jak i pamięć przestrzeni, a nauką, która pośrednio zadanie to spełnia, jest geometrya wykreślna.

Geometrya wykreślna podaje właściwe sposoby notowania, kreślenia tego, co spostrzegamy albo wyobrażamy sobie w przestrzeni, uczy wykresy te odczytywać, badać ich własności i wnosić na podstawie otrzymanych wyników o własnościach utworów przedstawionych rysunkiem. Umiejętność czytania rysunków polega przedewszystkiem na zdolności wywoływania wyobrażeń, ćwiczenie się w tem czytaniu jest ćwiczeniem zmysłu przestrzeni.

A wreszcie, jak zapomocą praw gramatyki sprawdzamy poprawność z jaką wyraziliśmy myśl swoją pismem, tak geometryą wykreślną sprawdzamy poprawność każdego rysunku, który jest również jedynie wyrazem naszych wyobrażeń i pojęć.

2. Uwagi o rysunku geometrycznym. Znajomość geometryi w y k r e ś l n e j łączy się ściśle z umiejętnością wykonania rysunku, który myśl geometryczną wyraża. Od najprostszych zadań poczynszy, winną być rysunkowi geometrycznemu poświęcona szczególna uwaga i stała dążność osiągnięcia jak największej w nim biegłości. Rysunek winien być zawsze dokładny i najstaranniej wykonany. W wielkim stopniu zależy osiągnięta dokładność rysunku od przyborów rysunkowych, które jednak ani w części nie zastąpią wprawy, nabytej ćwiczeniami.

Ołówek do rysunku musi być dostatecznie twardy i zawsze ostro, stożkowo zacięty; użycie ołówków w rodzaju „Penkala“ jest tu niemożliwe. Do zacinania ołówków używać należy scyzoryka; wszelkiego rodzaju maszynki nie odpowiadają celowi. Koniec ołówka musi być stale ostry jak rylec, co osiągnąć się da w doskonały, łatwy i szybki sposób tylko zapomocą małego, drobno siekanego, płaskiego pilnika; papier piaskowy, czy szklany, a także i kamień nie zastąpią pilnika. Używanie zbyt twardych ołówków z dwóch względów nie jest wskazane: Przedewszystkiem względ na oczy, które cierpią bardzo zmuszone do dłuższego, wyężdżającego wpatrywania się w zbyt cienkie, szarej barwy linie, a po drugie, niemożność usunięcia linii wykreślonych, albo raczej wyciśniętych, zbyt twardym ołówkiem.

Papier na rysunki może być bardzo rozmaity. Na ćwiczenia wykonywane tylko ołówkiem nadaje się zwykły papier do pisania, wycieranie linii jest tu jednak tylko wówczas możliwe, gdy do rysowania użyto ołówka średniej twardości, więc np. „Polonia“ Majewskiego Nr. *HB*. Początkujący, który używać będzie częściej gumy dla wytarcia swych nieudolnych prób rysunkowych, nie może posługiwać się papierem pisarskim i musi także do rysunków wykonanych tylko ołówkiem, użyć papieru rysunkowego. Jakość tych ostatnich, bardzo rozmaita, zależy od ceny i pochodzenia. Rysownik biegły zadowolony się papierem cienkim, dobrze gumowanym o powierzchni gładkiej; początkujący użyje z większą korzyścią papieru grubszego, dobrze gumowanego jednak o powierzchni mniej gładkiej, raczej

szorstkiej. Papier taki znosi bardzo cierpliwie zcieranie linii wykreślonych nie tylko ołówkiem ale i tuszem.

Przybornik. Zespół cyrkli i przyrządów do kreślenia tuszem t. zw. grafionów, stanowi przybornik. W handlu występują przyborniki od najtańszych i mało dokładnych aż do kosztownych szkatuł, wykonanych z nadzwyczajną dokładnością. Przybornik zawierać winien w każdym razie: cyrkiel z wkładką na ołówek i grafion, cyrkiel do kreślenia maleńkich kół t. zw. zerownik i grafion. Nóżki cyrkla powinny dawać się nastawiać prostopadłe do płaszczyzny papieru. Grafion służący do kreślenia, a raczej pociągania, tuszem linii narysowanych ołówkiem, winien być zawsze dostatecznie ostry i po każdorazowym użyciu starannie oczyszczony, jednak nie papierem lub bibułą, tylko cienką szmatką, która należy do przyborów rysunkowych.

Kierownica, wykonana z drzewa nie powinna być krótszą od deski rysunkowej, a głowa jej musi być dobrze przymocowaną do lineatu. Używania kierownic, w których głowa nastawiać się da względem lineatu pod rozmaitymi kątami, zalecić nie można.

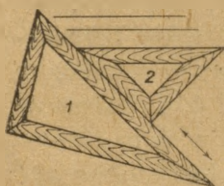
Trójkątów, które wykonywane bywają z drzewa, masy papierowej, celuloиду, twardej gumy, metalu a także i szkła, potrzebuje rysownik dwóch: prostokątny trójkąt równoramienny i prostokątny trójkąt, w którym stosunek jednej przyprostokątnej do przeciwprostokątnej wynosi 1:2. Kąty jakie przeciwprostokątna zawiera z przyprostokątnymi są więc w pierwszym trójkącie równe 45° , w drugim wynoszą 30° i 60° . Polecenia godne są przedewszystkiem trójkąty z drzewa w dobrym wykonaniu, a potem dopiero z twardej gumy, celuloиду i masy papierowej. Metal brudzi zbytnio papier, szkło jest zbyt kruchym materiałem, chociaż ze wszystkich wymienianych da się najczyszciej utrzymać. Trójkąty z drzewa odczyszczać można tylko gumą lub chlebem. Do kreślenia tuszem nadają się najlepiej trójkąty z drzewa, przy użyciu innych następuje łatwo zalewanie linii.

Deska rysunkowa służąca do przypinania zapomocą pluskiewek, względnie naklejania papieru, powinna być wykonana z zupełnie suchego drzewa lipowego, topolowego, jaworowego lub sosnowego, ujętego w dwie łaty z drzewa twardego. Ściany czołowe tych łat muszą być najdokładniej obrobione, po nich bowiem posuwa się kierownica.

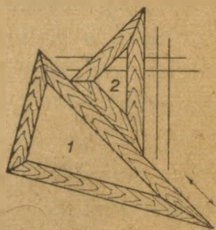
Guma do wycierania śladów ołówka musi być miękka. Wytarcie linii wykreślonych tuszem osiągnąć się da tylko na papierze nie najgorszego gatunku, a na papierach dobrych jest zawsze możliwe, przy pomocy ostrej gumy i ewentualnie bardzo ostrego scyzoryka. Użycie scyzoryka wymaga wprawy i doświadczenia, początkujący posługiwać się nim nie powinien. Usunięcie tuszem błędnie wykreślonych linii, względnie większych plam z tuszu, łączy się z umiejętnością rysowania. Przy pewnej wprawie, a zawsze przy znacznej cierpliwości, wytarcie choćby całej siatki linii, lub dowolnie wielkich plam, bez pozostawienia znaczniejszych śladów, jest zawsze możliwe.

Tusz t. j. czarna farba służąca do pociągania linii wykreślonych ołówkiem, występuje w handlu w dwojakiej formie: płynny, a więc gotowy do użytku i stały w laseczkach, który rysownik przez roztarcie z wodą na szkłe matowem lub w miseczce przygotowuje do użytku. Pierwszy, przy małej wprawie w posługiwaniu się grafionem „zalewa“, t. zn. spływa zbyt gwałtownie, zwłaszcza przy kreśleniu grubych linii. Tusz tarty wady tej nie posiada i jest zawsze znacznie czarniejszy.

Jeżeli rysunek wykonywamy na małych kartkach papieru, względnie w notatce, a więc bez posługiwania się deską rysunkową i kierownicą, to linie równoległe i prostopadłe do nich kreślimy przy pomocy dwóch trójkątów. Jeżeli trójkąt 1, (Rys. 1.), przytrzymamy lewą ręką, zaś trójkąt 2 oparty stale o 1 posuwać będziemy prawą ręką w kierunkach oznaczonych strzałkami, to proste kreślone wzdłuż przeciwprostokątnej trójkąta 2 są do siebie równoległe. Przez obrót trójkąta 2, (Rys. 2.), przy zachowaniu położenia trójkąta 1 uzyskujemy możliwość kreślenia prostych prostopadłych do poprzednich. Jeżeli rysujemy na desce, to kierownica, której głowa posuwać się musi zawsze po lewej krawędzi deski, służy do rysowania prostych poziomych, użycie trójkąta umożliwia kreślenie prostych prostopadłych do pierwszych lub nachylonych do nich pod $\approx 30^\circ, 45^\circ$ i 60° (Rys. 3.). Aby rysunek geometryczny, którego konstrukcja jest

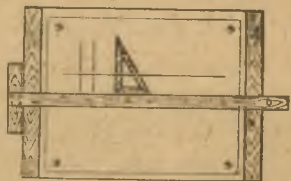


Rys. 1.



Rys. 2.

niejednokrotnie zawią, uczynić przejrzystym i łatwo czytelnym, nadajemy liniom odpowiednie grubości. W szczególności odróżniamy linie pomocnicze, prowadzące do wyniku, od innych. W zadaniach początkowych wyróżniać będziemy trojakiemu rodzaju linie: dane, pomocnicze i wynikowe. Pierwsze wykreślać będziemy zawsze pełne, średniej grubości, drugie tak cienko, jak tylko pozwala grafion, a to albo jako linie ciągłe, albo jako złożone z punktów i kresek. Linie wynikowe kreślimy jako ciągłe, czyli jak mówimy pełne i znacznie od danych grubsze. W zadaniach odnoszących się do utworów przestrzennych, więc wielościanów i powierzchni, używać będziemy również trojakiemu rodzaju linii, jednak często w innem ich znaczeniu. Linie pomocnicze pozostaną jak poprzednio, liniami najgrubszymi wykreślamy nie tylko wynik, ale także i obrazy danego utworu przestrzennego, jeśli linie wynikowe leżą na tych utworach. Przykład najlepiej sprawę wyjaśni: zadanie wymaga wyznaczenia przecięcia kuli płaszczyzną. Obrazy kuli wraz z wyznaczonym przekrojem wykreślimy grubo, obraz płaszczyzny, która jest dana, średnią grubością, a resztę linii jako linie pomocnicze bardzo cienko i w rozmaity sposób poprzerywane. Linie pomocnicze wykreślać można tuszem barwnym, jednak tylko barwy niebieska i sepia są polecenia godne.



Rys. 3.

Ale najlepiej pod względem doboru linii wykonany rysunek geometryczny nie jest zupełny, dopóki nie jest opisany, t. j. dopóki punkty i linie nie otrzymają oznaczeń. Staranne opisanie rysunku należy do ważnych zadań rysownika, gdyż dopiero opisanie rysunku czyni go czytelnym.

Do opisywania używać należy pisma według niżej podanego wzoru (Rys. 4.), pismo t. zw. rondowe uważamy dla rysunków geometrycznych za nieodpowiednie.

a b c d e f g h i j k l m n o p q r s t u v w x y z

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Rys. 4.

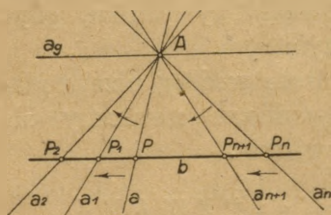
ALFABET GRECKI

A, α	Alpha	I, ι	Iota	P, ρ	Rho
B, β	Beta	K, κ	Kappa	Σ , σ	Sigma
Γ , γ	Gamma	Λ , λ	Lambda	T, τ	Tau
Δ , δ	Delta	M, μ	My	Υ , υ	Ypsilon
E, ϵ	Epsilon	N, ν	Ny	Φ , φ	Phi
Z, ζ	Zeta	Ξ , ξ	Xi	X, χ	Chi
H, η	Eta	O, $\omicron$	Omikron	Ψ , ψ	Psi
Θ , θ	Theta	Π , π	Pi	Ω , ω	Omega

3. Elementy przestrzeni. Oznaczenia. Przedmiotem rozważań geometrycznych wogóle jest **prze-strzeń**, a w szczególności **u-two-ry geometryczne**, powstające wskutek rozważań geometrycznych.

Najprostszymi utworami geometrycznymi, stanowiącymi punkt wyjścia dla naszych rozumowań, utworami **zasadniczymi**, które też zwiemy **elementami przestrzeni** są: punkt, linia prosta czyli krótko prosta i płaszczyzna. Dla jednostajności wykładu oznaczać będziemy stale: punkty dużymi literami alfabetu łacińskiego np. $A, B, C \dots$ względnie liczbami arabskimi, proste małymi literami tegoż alfabetu ($a, b, c \dots$), płaszczyzny małymi literami alfabetu greckiego ($\alpha, \beta, \gamma \dots$).

4. Proste przecinające się i równoległe na płaszczyźnie. Dwie proste posiadać mogą jeden punkt wspólny, czyli jak mówimy, przecinać się. Wtedy istnieje jedna płaszczyzna, prostą tę wyznaczona, czyli przez owe proste „przechodząca“, albo jak też wyrażać się będziemy, na prostych owych leżąca.



Rys. 5.

Weźmy pod uwagę dwie proste a i b przecinające się w punkcie P , (Rys. 5.), a na prostej a punkt A . Jeżeli prosta a obraca się około punktu A , w kierunku wskazówki zegara, przyjmując położenia $a_1, a_2, \dots, a_g, \dots, a_n$, to punkt P posuwa się po prostej b od ręki prawej ku lewej,

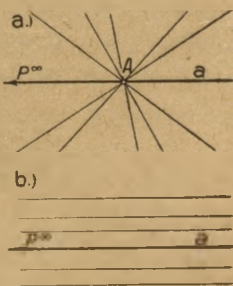
oddalając się od pierwszego uważanego położenia P i przyjmując położenia $P_1, P_2 \dots$. Przez dalszy obrót prostej a , ruchomy punkt P , znajdzie się po prawej stronie punktu P , zbliżając

się do niego od ręki prawej ku lewej. Najwidoczniej prosta a , obracając się około punktu A i przecinając prostą b w punktach coraz dalej leżących od punktu P , osiągnęła pewne położenie graniczne a_g , po przekroczeniu którego, jej punkty przecięcia się $P_n, P_{n+1} \dots$ z prostą b , poczęły zbliżać się do punktu P . Owo graniczne położenie prostej a względem prostej b nazywamy położeniem równoległym, a prostą a_g , prostą równoległą do b .

O punkcie przecięcia się prostej a z prostą b w położeniu granicznym mówimy, że leży w odległości nieograniczonej, albo nieskończenie dalekiej na prostej b i nazywamy go punktem niewłaściwym, w odróżnieniu od punktów właściwych, leżących w odległości skończonej na prostej. Dla oznaczenia punktów niewłaściwych używamy znaku ∞ , pisząc go jako wskaźnik więc np. P_∞ , a położenie punktu niewłaściwego na płaszczyźnie oznaczamy linią opatrzoną strzałką czyli t. zw. kierunkiem.

Z powyższego widzimy, że przez punkt A przechodzi jedna prosta a_g równoległa do danej prostej b i, że nawzajem prosta b jest równoległa do prostej a_g , gdyż punkt niewłaściwy P_∞ jest punktem wspólnym obu prostych a_g i b . Dwie proste równoległe stanowią tedy szczególny przykład prostych przecinających się, gdzie punkt wspólny leży w odległości nieograniczonej dalekiej, czyli jest punktem niewłaściwym. Przeprowadzone rozumowanie poucza nas dalej, że prostą uważać możemy za zbiór (mnogość) nieograniczonej ilości, następujących po sobie, w sposób ciągły, punktów właściwych i jednego punktu niewłaściwego.

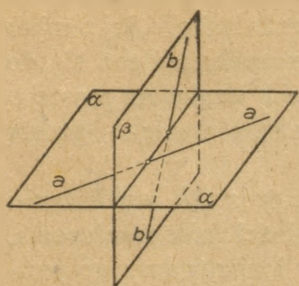
Przez każdy punkt A , prostej a , przechodzi dowolna, nieograniczona ilość prostych, których mnogość, wraz z prostą a nazywamy pękiem prostych, a punkt A wierzchołkiem tego pęku (Rys. 6a.). Przez punkt niewłaściwy P_∞ prostej a przechodzi również pęk prostych, który nazywamy pękiem prostych równoległych. (Rys. 6b.).



Rys. 6.

Nieograniczona ilość punktów linii prostej stanowi t. zw. szereg punktów, dla którego prosta ta jest podstawą.

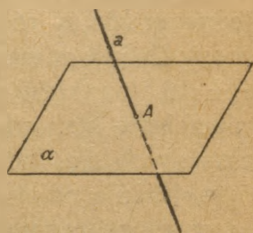
5. Proste skośne. Jeżeli dwie proste a i b znajdujące się w przestrzeni, nie posiadają punktu wspólnego ani właściwego ani niewłaściwego — to położenie ich określamy jako skośne lub wchrowate (Rys. 7.).



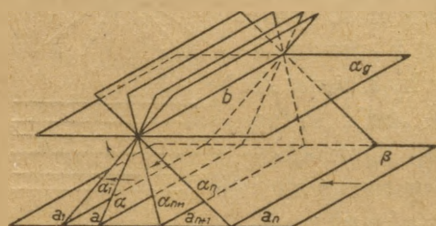
Rys. 7.

6. Prosta i płaszczyzna. Prosta posiadać może jeden punkt wspólny, właściwy z płaszczyzną, a wtedy ją przebija (Rys. 8.), albo jeden punkt wspólny leżący w odległości nieograniczonej, czyli punkt niewłaściwy. Wtedy mówimy, że prosta jest do płaszczyzny równoległą.

7. Płaszczyzny przecinające się i równoległe. Przyjmijmy dwie płaszczyzny α i β przecinające się w prostej a (Rys. 9.), a na płaszczyźnie α dowolną prostą b równoległą do prostej a . Niechaj położenie prostej b , w odniesieniu do płaszczyzny β będzie niezmiennie i niechaj płaszczyzna α obraca się około tej prostej jako osi i to np. w kierunku wskazówki zegara, przyjmując położenia $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_g, \alpha_n \dots$. Prosta a posuwać się będzie na płaszczyźnie β od ręki prawej ku lewej, oddalając się od pierwszego uważanego położenia a , przyjmując położenie $a_1, a_2 \dots$ aż przekroczywszy pewne położenie graniczne a_g pojawia się po drugiej stronie prostej a , zbliżając się do niej. Owo graniczne położenie płaszczyzny α , nazywamy położeniem równoległym,



Rys. 8.



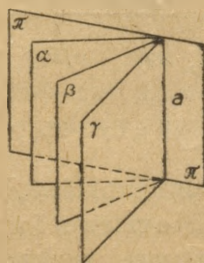
Rys. 9.

zaniem równoległym, a płaszczyznę α , która osiągnęła owo położenie, płaszczyzną równoległą do płaszczyzny β . O prostej przecięcia się płaszczyzn α_g i β w położeniu granicznym mówimy, że leży w odległości nieograniczonej, albo nieskoń-

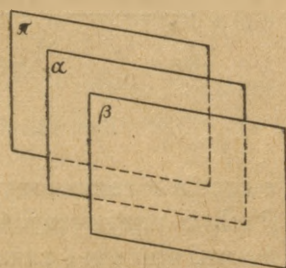
czenie dalekiej i nazywamy ją prostą niewłaściwą płaszczyzn α_g i β . Podobnie, gdy w miejsce prostej b przyjmujemy

dowolny punkt B , dojdziemy do tegoż samego rezultatu i stwierdzimy, że przez punkt ten przechodzi dowolna ilość płaszczyzn przecinających płaszczyznę β , ale jedna tylko płaszczyzna do niej równoległa. Płaszczyzny α_g i β są w tym przypadku wzajemnie równoległe, a prosta niewłaściwa a_∞ jest prostą wspólną obu płaszczyzn. Podobnie jak przy prostych równoległych — stanowią dwie płaszczyzny równoległe szczególnie przykład płaszczyzn przecinających się, przyczem prosta przecięcia się leży w odległości nieograniczenie dalekiej i jest prostą niewłaściwą.

Przez każdą prostą a (Rys. 10.) na płaszczyźnie π przechodzi dowolna, nieograniczona ilość płaszczyzn, których zbiór wraz z płaszczyzną π tworzy t. zw. pęk płaszczyzn o osi a . Przez pro-



Rys. 10.



Rys. 11.

stą niewłaściwą płaszczyzny π przechodzi również pęk płaszczyzn, który nazywamy pękiem płaszczyzn równoległych (Rys. 11.).

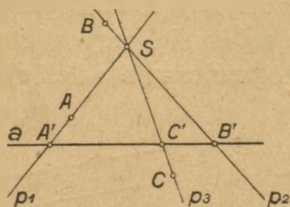
Dowolna płaszczyzna przecina pęk płaszczyzn w pęku promieni, którego wierzchołkiem jest punkt przecięcia się osi pęku z płaszczyzną sieczną. Gdy pęk płaszczyzn jest pękiem równoległym — otrzymany pęk promieni jest również równoległy, punkt bowiem przebicia się osi pęku, którą jest prosta niewłaściwa, jest niewłaściwym wierzchołkiem pęku promieni.

Z rozważań ustępu 4. i powyższego widzimy, że na płaszczyźnie znajduje się nieograniczona ilość punktów i prostych właściwych i jedna prosta niewłaściwa. Owo pojęcie wszystkich punktów względnie prostych danej płaszczyzny określamy mianem układu płaskiego.

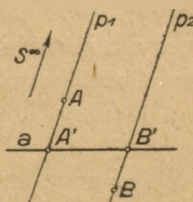
Zbiór nieograniczony prostych przechodzących przez jeden punkt w przestrzeni nazywamy wiązką promieni, a punkt ów środkiem albo wierzchołkiem tej wiązki. Jeżeli środek wiązki leży nieograniczenie daleko, to wiązka składa się z promieni równoległych.

8. Pojęcie rzutu środkowego i równoległego.

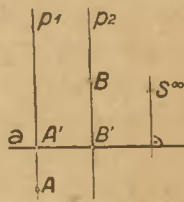
a) *Rzuty na prostą.* Przyjmijmy na pł. rysunku prostą a (Rys. 12.) i zewnątrz niej punkt S , a nadto dowolne punkty $A, B, C, \dots$. Wykreślmy proste $p_1, p_2, p_3 \dots$ łączące punkt S z punktami $A, B, C \dots$, to punkty przecięcia się $A', B', C' \dots$



Rys. 12.



Rys. 13.



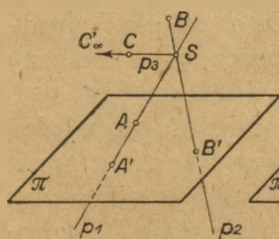
Rys. 14.

z prostą a nazywamy rzutami punktów $A, B, C \dots$ na prostą a . Punkt S nazywamy środkiem rzutów, a proste $p_1, p_2, p_3 \dots$ promieniami rzucającymi punkty $A, B, C \dots$ na podstawę a .

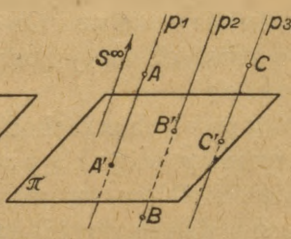
Jeżeli środek rzutów jest punktem niewłaściwym S^∞ płaszczyzny rysunkowej, a więc wyznaczony kierunkiem, to promienie rzutów są do danego kierunku równoległe (Rys. 13.).

Rzut $A', B' \dots$ punktów $A, B, \dots$ ze środka rzutów S (Rys. 12.), który jest punktem właściwym płaszczyzny rysunkowej, nazywamy rzutem środkowym; gdy środek rzutów jest punktem niewłaściwym, rzut nosi nazwę rzutu równoległego (Rys. 13.).

Szczególny, a dla nas bardzo ważny, przypadek rzutu równoległego stanowi rzut, którego kierunek jest prostopadły do podstawy a , a który nazywamy rzutem prostokątnym (Rys. 14.).



Rys. 15.



Rys. 16.

b) *Rzuty na płaszczyznę.* Przyjmijmy płaszczyznę π (Rys. 15.) i zewnątrz niej punkt S , to proste, łączące dane punkty $A, B, \dots$ z punktem S , przebijają pł. π w punktach $A', B' \dots$,

które nazywamy rzutami środkowymi punktów $A, B...$ na płaszczyznę π . Punkt S jest środkiem rzutów, pł. π pł. rzutów albo krótko rzutnią, a proste $p_1, p_2...$ promieniami rzucającymi. Jeśli położenie punktu C w przestrzeni jest tego rodzaju, że promień p_3 rzucający go na pł. π jest do niej równoległy, to rzut punktu C jest punktem niewłaściwym, leży w odległości nieograniczonej wielkiej na pł. π .

Przyjmijmy, że środek rzutów jest punktem niewłaściwym S_∞ (Rys. 16.), to wówczas promienie rzutów tworzą pęk równoległy i równoległy do danego kierunku, zwanego kierunkiem rzutu. Mówimy w tym wypadku o rzucie równoległym punktów na płaszczyznę.

Jeżeli kierunek rzutu jest prostopadły do rzutni, to mamy szczególnie ważny przypadek rzutu równoległego, zwany rzutem prostokątnym.

Prócz punktów odosobnionych rzucać można na płaszczyznę całe ich skupienia, zbiory, w formie linii, figur i t. d.; poznanie sposobów kreślenia rzutów tych utworów jest jednym z zadań geometrii wykreślnej.

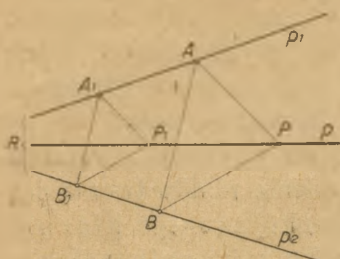
9. O konstrukcjach geometrycznych. Przy założeniu, że przyrządy rysunkowe, którymi się posługujemy, są dokładne, że ołówek jest ostro zacięty, a papier gładki, rysunek nasz nie będzie nigdy dokładny w znaczeniu matematycznym. Możemy tylko bardziej lub mniej zbliżyć się do tej idealnej dokładności, a stopień tego zbliżenia stanowi o stopniu dokładności rysunku. Rysujemy więc zawsze z pewnym błędem, a staraniem naszym popartem doświadczeniem i wprawą jest, by błędy rysunkowe nie przekraczały pewnych granic.

Jest rzeczą zrozumiałą, że np. linia prosta tem dokładniej wyznaczona jest na płaszczyźnie rysunkowej, im dalej leżą od siebie punkty, prostą tę wyznaczające, że punkt przecięcia się dwóch prostych tem dokładniej jest wyznaczony, im bardziej zbliża się do kąta prostego kąt, jakie proste te tworzą, i t. p. Pamiętając o tem, możemy w wypadkach, w których konstrukcja pozwala na pewną dowolność i pozostawia rysownikowi zastosowanie tej lub innej metody — użyć zawsze tej, która zabezpiecza osiągnięcie najdokładniejszego rezultatu.

Dalsze trudności wynikają z tego, że płaszczyzna rysunkowa jest ograniczona i że potrzebne nam do konstrukcji punkty i proste leżą poza jej obrybem. W tych wypadkach

stosować będziemy szczególne konstrukcje, z których najważniejsze poniżej podamy.

a) Przez dany punkt P i nie leżący w obrębie płaszczyzny rysunkowej punkt R , przecięcia się prostych p_1 i p_2 , wykreślić prostą (Rys. 17.).

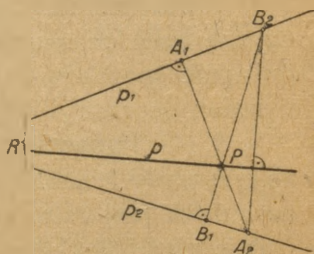


Rys. 17.

Pierwszy sposób. Z punktu P kreślimy dowolnie dwie proste PA i PB , a do prostej AB w dowolnym miejscu równoległą A_1B_1 . Równoległą wykreśloną z punktu A_1 do AP przecina prostą wykreśloną z punktu B_1 , równoległą do BP , w punkcie P_1 ,

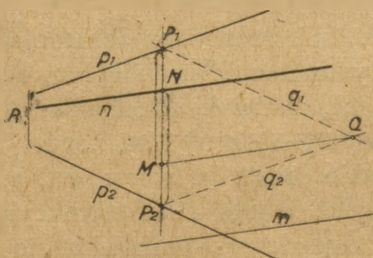
który jest punktem szukanej prostej PR , gdyż punkt R jest środkiem podobieństwa trójkątów ABP i $A_1B_1P_1$.

Drugi sposób. Z punktu P kreślimy $PA_1 \perp p_1$ i $PB_1 \perp p_2$ (Rys. 18.), to prostopadła wykreślona z punktu P do prostej A_2B_2 rozwiązuje zadanie. W istocie proste A_1A_2 , B_1B_2 a także PR są wysokościami trójkąta RA_2B_2 .



Rys. 18.

b) Przez niedostępny punkt R , przecięcia się prostych p_1 i p_2 , wykreślić równoległą do danej prostej m (Rys. 19.). Kreślimy dowolnie prostą P_1P_2 , a przez punkty P_1 i P_2 równoległe do danych prostych ($q_1 \parallel p_2$, $q_2 \parallel p_1$). Z punktu Q prowadzimy równoległą QM



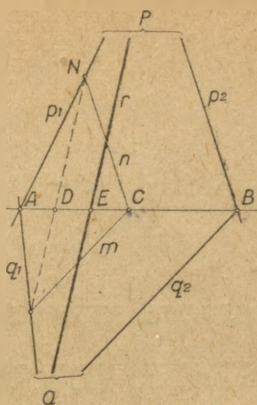
Rys. 19.

do m , a następnie odcinamy $P_2N = P_1M$. Prosta n wykreślona przez punkt N , równoległa do prostej m , rozwiązuje zadanie.

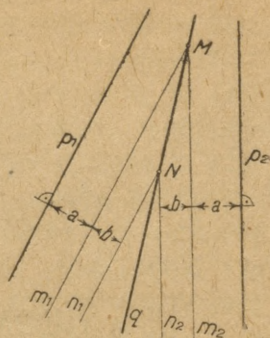
c) Wykreślić prostą przechodzącą przez dwa niedostępne punkty P i Q przecięcia się prostych p_1p_2 i q_1q_2 . Z dowolnego punktu C (Rys. 20.) prostej AB kreślimy $n \parallel p_2$ i $m \parallel q_2$, to prosta

MN jest równoległą do szukanej, której punkt E na prostej AB znajdziemy na podstawie proporcji $AE : AD = AB : AC$. Jeżeli punkt C jest środkiem odcinka AB , to wówczas $AD = DE$.

d) Znaleźć dwusieczną kąta, którego wierzchołek leży poza obrębem rysunku (Rys. 21.). Do prostej p_1 kreślimy równoległe m_1 i n_1 a do prostej p_2 w tych samych odległościach równoległe m_2 i n_2 . Prosta q , przechodząca przez otrzymane punkty M i N równo oddalone od ramion p_1 i p_2 , rozwiązuje zadanie.



Rys. 20.



Rys. 21.

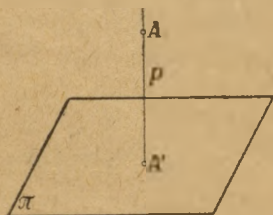
ROZDZIAŁ PIERWSZY

GEOMETRYA WYKREŚLNA ELEMENTÓW PRZESTRZENI, UTWORÓW PŁASKICH I WIEŁOŚCIANÓW

§ 1. ZASADY RZUTÓW CECHOWANYCH

10. Określenie położenia punktu w przestrzeni. Przyjmijmy dowolny punkt A i postanówmy stworzyć warunki, umożliwiające względne ustalenie położenia tego punktu w przestrzeni.

W tym celu przyjmijmy dowolną płaszczyznę π (Rys. 22.), z punktu A wyprowadzimy prostą p , prostopadłą do tej płaszczyzny i znajdziemy punkt przebiecia się A' tej prostopadłej z płaszczyzną π . Punkt A' , odcinek AA' i zaznaczenie, po



Rys. 22.

której stronie płaszczyzny π znajduje się punkt A , wyznaczają położenie tego punktu, w odniesieniu do płaszczyzny π . Płaszczyznę π , która z reguły jest płaszczyzną poziomą, nazywamy płaszczyzną rzutów, lub krócej rzutnią, prostą p zwiemy promieniem rzucającym lub krótko rzucającą, a punkt A' rzutem prostokątnym punktu A . Liczbę wyrażającą, w przyjętych jednostkach długości, odległość punktu A od jego rzutu A' , czyli długość odcinka AA' nazywamy cechą lub znamieniem punktu A .

Odległość punktu, leżącego nad płaszczyzną rzutów od tejże płaszczyzny, nazywamy „wysokością” tego punktu;

miarą odległości punktów leżących pod płaszczyzną rzutów od tej płaszczyzny jest „głębokość” tych punktów. Cechom punktów znajdujących się nad płaszczyzną rzutów dajemy znak dodatni, cecha wyrażająca głębokość punktu otrzymuje znak ujemny. Jeżeli w rysunku występują jedynie cechy ze znakami dodatnimi albo jedynie ujemnymi, to znaki te pomijamy.

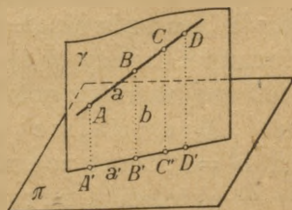
Rzut prostokątny A' , punktu A , na płaszczyznę π , przy znajomości względnej wartości cechy tego punktu, nazywamy rzutem cechowanym punktu A . Niechaj płaszczyzna rzutów jest płaszczyzną tej kartki; jeśli na prostopadłej, wyprowadzonej w punkcie A' do płaszczyzny rzutów, odmierzymy 6·7 przyjętych jednostek długości, więc np. 7·6 cm nad płaszczyzną kartki — to otrzymamy punkt A (Rys. 23.). Punkt B , którego rzut znajduje się w punkcie B' a cecha wynosi — 3 cm, leży o 3 cm pod płaszczyzną kartki. Punkt leżący na płaszczyźnie rzutów oznaczmy np. literą C bez kreski i bez cechy, która równa jest zeru. Aby zaznaczyć, że w danym wypadku chodzi o punkt np. A , którego rzut A' i cecha np. 7·6 cm są dane, używać będziemy następującego wyrażenia: Dany jest punkt A (A' , 7·6). Rzut prostokątny punktu na daną płaszczyznę wyznacza położenie tego punktu względem tej płaszczyzny, jeśli opatrzony jest cechą czyli znamieniem. Metoda geometrii wykreślnej posługująca się cechami, nazywa się metodą rzutów cechowanych i ona będzie przedmiotem naszych rozważań w następnych ustępach.

$A'(7\cdot6)$ $B'(-3)$

Rys. 23.

11. Rzut cechowany prostej. Przez rzut prostokątny prostej rozumiemy miejsce geometryczne rzutów prostokątnych dowolnej ilości punktów tej prostej.

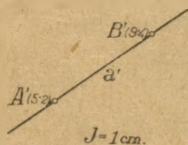
Prosta a i promień b (Rys. 24.), rzucający dowolny jej punkt B na pł. π , wyznaczają (ust. 4.) płaszczyznę γ , która przecina pł. π w prostej a' . Ponieważ na pł. tej, którą nazywamy płaszczyzną rzucającą, leżą wszystkie promienie rzucające punkty prostej a , więc prosta a' jest miejscem geometrycznym rzutów wszystkich punktów prostej a , jest tedy rzutem prostej a . Widoczne stąd, że rzut linii prostej jest prostą.



Rys. 24.

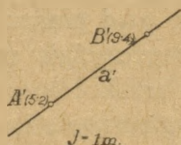
Prostą wyznaczają dwa punkty; znajomość więc rzutów dwóch punktów i ich cech określa jednoznacznie położenie prostej w przestrzeni, w odniesieniu do danej rzutni. Jeżeli np. płaszczyznę tej kartki uważamy za rzutnię, to w odniesieniu do niej określone jest jednoznacznie położenie prostej a , której rzuty cechowane dwóch punktów, a mianowicie A i B są dane, jeśli przytem podana jest jednostka miary w której cechy tych punktów wyrażamy. Napis „ $J=1\text{ cm}$ ” na Rys. 25. oznacza, że przyjętą dla tego rysunku jednostką długości jest centymetr.

12. Podziałka rysunku. Odcinek $A'B'$ w Rys. 25. wyraża prawdziwą odległość rzutów punktów A i B ; rysunek wykonany jest w podziałce (wielkości) naturalnej, co ża-



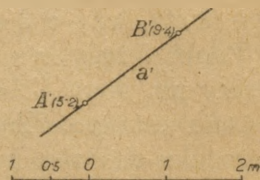
n. w.

Rys. 25.



Podziałka 1:100.

Rys. 26.



Rys. 27.

czamy na rysunku literami *n. w.* Jeżeli jednak jednostka długości w stosunku do płaszczyzny rysunku jest za wielka, to wówczas rysunek wykonać musimy — w stosunku do prawdziwych wymiarów — w pewnym pomniejszeniu, w pewnej podziałce pomniejszonej. W tym wypadku obok jednostki długości np.: „ $J=1\text{ m}$ ” (Rys. 26.) podać musimy na rysunku stosunek jego wymiarów do wymiarów naturalnych, czyli „podziałkę”. Napis „Podziałka: 1:100” (Rys. 26.) rozumieć należy w ten sposób, że 1 cm na rysunku oznacza 100 cm w rzeczywistości, że w celu otrzymania naturalnej, prawdziwej długości odcinka $A'B'$ należy odcinek $A'B'=1.55\text{ cm}$ pomnożyć sto razy.

Notowanie na rysunku rodzaju przyjętej jednostki długości i stosunku pomniejszenia zastępujemy zazwyczaj umieszczeniem na tymże rysunku pojedynczej lub podwójnej linii prostej, na której odmierzamy pewną ilość w żądanym stosunku pomniejszonych jednostek długości, pisząc obok ostatniej miano jednostki naturalnej.

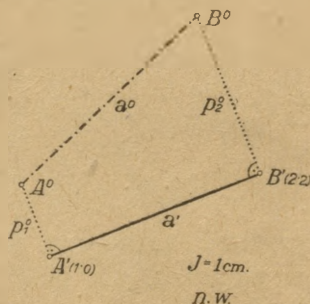
W Rysunku 27. jednostkę długości metr wyraziliśmy również centymetrem, stosunek więc wymiarów rysunku do wymiarów rzeczywistych ma się tak, jak $1:100$. Rysunek ten wykonany jest w setnym pomniejszeniu, czyli w podziałce $1:100$.

13. Kład prostej. Rzuty cechowane $A'(1\cdot0)$ i $B'(2\cdot2)$ (Rys. 28.) określają położenie prostej a , wyznaczonej punktami A i B . Wyprowadziwszy bowiem w punktach A' i B' prostopadłe p_1 i p_2 do pł. rysunku i odmierzywszy na pierwszej z nich od punktu A' nad pł. rysunku 1 cm , zaś na drugiej $2\cdot2\text{ cm}$ od punktu B' również nad pł. rysunku — otrzymamy punkta A i B , a więc i prostą a punktami tymi wyznaczoną.

W celu wyznaczenia prawdziwej wielkości odcinka, którego rzut cechowany dwóch punktów jest znany, weźmy pod uwagę punkta A , B , A' i B' , będące wierzchołkami trapezu, którego trzy boki i dwa kąty są znane. Bokami tymi są odcinki $A'B'$, $A'A$ i $B'B$; kątami, kąty proste $AA'B'$ i $BB'A'$. Przez wyrysowanie więc tego trapezu otrzymamy nieznaną bok AB . Na prostopadłych, wyprowadzonych w punktach A' i B' do prostej a' (Rys. 28.), odmierzymy $A'A^0 = 1\cdot0\text{ cm}$, $B'B^0 = 2\cdot2\text{ cm}$; otrzymany odcinek A^0B^0 równy jest prawdziwej długości odcinka AB . Przeprowadzenie konstrukcyi trapezu $A'B'A^0B^0$ nazywamy wykonaniem kładu odcinka AB . W istocie bowiem trapez $A'B'A^0B^0$ powstaje, jeśli trapez $AB A' B'$, znajdujący się na płaszczyźnie poziomo-rzucającej, położymy około jego boku $A'B'$ na pł. rysunku. Odcinek A^0B^0 jest kładem odcinka AB i równy jego długości; odcinki $A'A^0$ i $B'B^0$ są kładami promieni rzucających AA' i BB' .

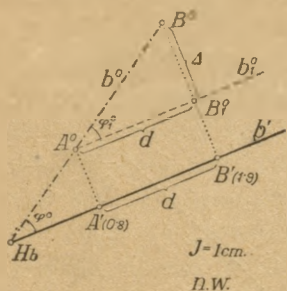
Jeśli rysunek wykonany jest w podziałce pomniejszającej, to długość odcinka AB równa jest ilorazowi z długości jego kładu A^0B^0 i wykładnika stosunku pomniejszenia.

14. Kąt nachylenia prostej z płaszczyzną rzutów. Ślad i nachylenie prostej. Kąt φ , jaki prosta b tworzy ze swoim rzutem poziomym b' , nazywamy kątem nachylenia prostej b z płaszczyzną poziomą. Kąt ten otrzymamy przez wykonanie



Rys. 28.

kładu prostej, a więc układu dwóch jej punktów na pł. rysunku. Kąt bowiem φ^0 (Rys. 29.) jaki zamyka prosta b^0 , będąca kładem prostej b , z prostą b' , równy jest kątowi φ , bez względu na podziałkę w jakiej wykonany jest rysunek. W istocie bowiem gdy podziałka rysunku wynosi np. $1:n$, to boki $\Delta B^0 H_b B'$ są proporcjonalne do boków trójkąta wyrażonego rysunkiem; oba trójkąty są więc podobne, a zatem kąty ich są równe.



Rys. 29.

Poprowadźmy przez punkt A^0 prostą b_1^0 równoległą do b' , to kąt φ_1^0 jaki tworzą proste $b^0 b_1^0$ równy jest oczywiście kątowi φ^0 , a więc i kątowi φ jaki prosta b zawiera z pł. poziomą. Prostą b_1^0 posłużymy się w wypadku, gdy punkt przecięcia się H_b prostych b' i b^0 nie leży w obrębie rysunku.

Punkt H_b , którego wysokość (cecha) równą jest zeru, jest punktem przebiecia się prostej b z pł. rzutów, a więc elementem wspólnym prostej b i rzutni i nazywa się śladem poziomym tej prostej.

Oznaczmy odcinek $A' B' = A^0 B_1^0$ literą d , zaś różnicę wysokości punktów A i B równą odcinkowi $B^0 B_1^0$ literą Δ , to stosunek:

$$\frac{\Delta}{d} = \operatorname{tg} \varphi = \dots \dots \dots 1.$$

nazywamy nachyleniem prostej b .

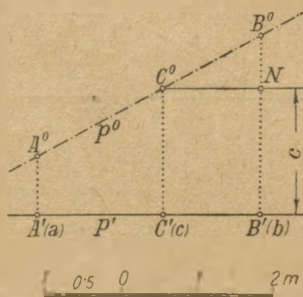
Jeżeli cechy dwóch punktów wyznaczających prostą są równe, to cechy każdego dowolnego punktu tej prostej są równe, a prosta jest równoległą do płaszczyzny rzutów.

15. Podział odcinka. Obierzmy na danej prostej, wyznaczonej punktami A (A' , a) i B (B' , b) punkt C , którego cecha wynosiłaby c jednostek długości w podziałce rysunku. W tym celu (Rys. 30.) wykonamy kład $A^0 B^0$ odcinka AB , a następnie odmierzymy od punktu B' , w podziałce rysunku, odcinek $B' N = c$. Prosta wykreślona z punktu N , równoległe do p' , przecina prostą p^0 w punkcie C^0 ; prostopadła z C^0 do p' przecina tę ostatnią w punkcie C' , który jest szukanym rzutem punktu C o cesze c . Na Rys. 30., wykonanym w podziałce $1:100$ przy przyjętej jednostce miary równej 1 m (1 cm na

na rysunku wyraża 1 m w rzeczywistości) obrano: $a=0.8\text{ m}$, $b=2.3\text{ m}$, $c=1.65\text{ m}$.

Ponieważ $A^0 C^0 : C^0 B^0 = A' C' : C' B'$, więc punkt C' dzieli odcinek $A' B'$ w tym samym stosunku, w jakim punkt C^0 dzieli odcinek $A^0 B^0$. A ponieważ odcinek $A^0 B^0$, jako kład odcinka AB leżącego w przestrzeni, wyraża jego prawdziwą wielkość i położenie względem swego rzutu, więc stosunek podziału odcinka w przestrzeni nie zmienia się wskutek rzutu tego odcinka.

Innymi słowy: podzieliwszy odcinek w przestrzeni w pewnym stosunku, a więc także na pewną ilość części i rzuciwszy punkty podziału na rzut tego odcinka, podzielimy ten rzut w tym samym stosunku, względnie na tę samą ilość części. W szczególności, punktowi połowiącemu odcinek w przestrzeni, odpowiada punkt połowiący rzut odcinka, jako rzut punktu połowiącego.



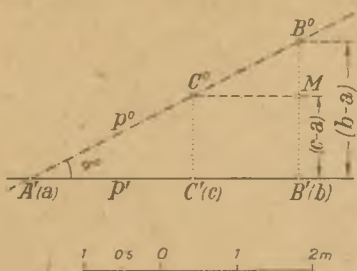
Rys. 30.

16. Płaszczyzny równoległe i kład prostych na nie. Płaszczyzny równoległe do rzutni poziomej nazywamy płaszczyznami warstwowymi albo poziomymi. Przez wysokość płaszczyzny poziomej rozumiemy oddalenie jej od płaszczyzny rzutów, którą w odniesieniu do pierwszych nazywamy płaszczyzną porównawczą. Płaszczyzny warstwowe, których wysokości są liczbami całymi, nazywamy głównymi, inne pośrednimi.

Jeżeli cechy końcowych punktów odcinka są duże, to wykonanie jego kładu, ze względu na ograniczoną pł. rysunku, natrafia na trudności, albo też jest nawet niewykonalne. W tych wypadkach kład odcinka wykonujemy na pł. warstwową, przechodzącą przez jeden z punktów końcowych, zazwyczaj przez punkt o cesze mniejszej.

Rys. 31. podaje konstrukcję kładu prostej $[A (A', a=18), B (B', b=19.8)]$ na pł. warstwową, przechodzącą przez punkt $A (A', 18)$. Na prostopadłej wykreślonej w punkcie B' odmierzymy w podziałce rysunku odcinek $B' B^0$, równy różnicy wysokości punktów B i A , więc $b - a = 1.8\text{ m}$ i punkt B^0 po-

łączymy z A' , otrzymując tym sposobem kład odcinka $\overline{AB}$ na główną pł. warstwową o wysokości $a=18\text{ m}$. Oczywiście, że $\sphericalangle B^0 A' B' = \varphi^0$ równy jest kątowi, jaki prosta (AB) zawiera z pł. porównawczą.



Rys. 31.

Rzut punktu C , któryby leżał na prostej (AB) , a miał żadaną cechę np. $c=19.1\text{ m}$, znajdziemy podobnie jak w ust. 15., odmierając jednak na prostej $B' B^0$ odcinek $B' M$, równy różnicy wysokości punktów C i A , więc $c - a = 1.1\text{ m}$.

Z Rys. 31. czytamy:

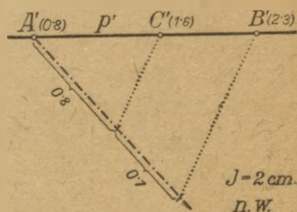
$$\overline{A' C'} : \overline{C' B'} = \overline{A' C^0} : \overline{C^0 B^0} = \overline{B' M} : \overline{M B^0} = (c - a) : (b - c)$$

jeśli literami a, b, c , oznaczymy cechy punktów A, B i C .

Z równości powyższych wynika, że

$$\overline{A' C'} : \overline{C' B'} = (c - a) : (b - c) \quad . \quad . \quad . \quad 1.$$

co oznacza, że punkt C' dzieli odcinek $\overline{A' B'}$ w stosunku $(c - a) : (b - c)$, albo, że wyznaczenie rzutu punktu C o żadanej cesze c na prostej, danej cechowanymi rzutami dwóch punktów $A (A', a)$ i $B (B', b)$, sprowadza się do znalezienia punktu C' , dzielącego odcinek $\overline{A' B'}$ w stosunku $(c - a) : (b - c)$. W Rys. 32. przyjęliśmy $a=0.8$, $b=2.3$, $c=1.6$ — odcinek tedy $\overline{A' B'}$ podzielimy w stosunku $(c - a) : (b - c) = 0.8 : 0.7$, a otrzymany punkt C' rozwiązuje zadanie.



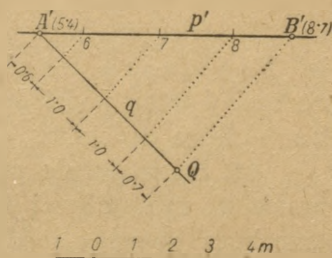
Rys. 32.

17. Stopniowanie i moduł prostej. Wyznaczenie rzutów tych punktów danej linii prostej, których cechy są liczbami całymi, nazywamy zestopniowaniem prostej, albo wyznaczeniem jej podziałki nachylenia.

Gdy cechy dwóch danych punktów prostej są liczbami całymi, to zestopniowanie prostej wykonać można zapomocą podziałki milimetrowej, dzieląc dany odcinek na części, których ilość równa jest różnicy cech.

Zestopniowanie prostej A (A' , 5·4), B (B' , 8·7) (Rys. 33.) wykonać można zapomocą jej kładu na pł. warstwową 5·4 — powtarzając zadanie w ustępie 16., albo dzieląc dany odcinek według proporcji (równanie I.), podobnie jak w Rys. 32.

W tym celu w punkcie $A'(5·4)$ poprowadzimy dowolną prostą q (Rys. 33.) i odmierzymy na niej kolejno, od punktu A' począwszy, odcinki równe 0·6, 1·0, 1·0, 0·7 dowolnej jednostki długości, a przez punkta podziału wykreślimy równoległe do boku QB' . Otrzymane punkty na prostej p' posiadają cechy 6, 7, 8 i tworzą podziałkę nachylenia.



Rys. 33.

Odległość rzutów poziomych dwóch punktów prostej, których różnica wysokości, a więc i różnica cech, równa jest jednostce, stanowi jednostkę podziałki nachylenia i nazywa się **modułem** (μ) prostej. Modułem np. prostej (AB), Rys. 34. jest odcinek $C'D' = D'E' = \mu$. Rys. ten poucza też nas bezpośrednio, że im większy jest kąt nachylenia prostej do rzutni, tem mniejszy jest jej moduł i odwrotnie.

Proste nachylone do pł. rzutów pod tym samym kątem, mają równe, moduły. Moduł prostej nachylonej pod 45° równy jest

przyjętej na rysunku jednostce długości.

Jeżeli w równaniu I. (str. 18.) wstawimy $\Delta=1$, to według określenia powyżej podanego d stanie się modułem μ prostej, czyli:

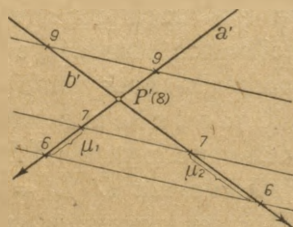
$$\frac{1}{d} = v = \frac{1}{\mu} \dots \dots \dots II.$$

co znaczy, że nachylenie i moduł prostej są liczbami odwrotnymi.

Położenie prostej w przestrzeni w odniesieniu do pł. rzutów jest w zupełności wyznaczone, gdy prócz jej rzutu i cechy jednego jej punktu, znany jest jej moduł i wskazany (strzałką) kierunek jej nachylenia, przez który rozumiemy kierunek następstwa punktów prostej, o cechach malejących.

W dalszym ciągu wyznaczać będziemy prostą przeważnie jej podziałką nachylenia czyli jej zestopniowanym rzutem. Liczby podziałki nachylenia nazywamy *wskaznikami* tejże podziałki.

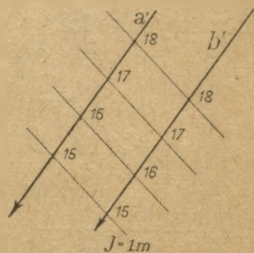
18. Dwie proste przecinające się. Przez każdy punkt P prostej a , wyznaczonej np. podziałką nachylenia o module μ_1 , przechodzi dowolna ilość prostych, które prostą a przecinają w punkcie P . Aby określić położenie jednej z nich, np. b (Rys. 35.), musimy dowolnie przyjętym modulem μ_2 zestopniować prostą b' przeprowadzoną dowolnie przez punkt P' (8),



$J=1\text{cm.}$

n.w.

Rys. 35.



$J=1\text{m}$

Podziałka 1:100.

Rys. 36.

który jest punktem wspólnym prostych a i b . Proste, łączące jednakowe wskazniki prostych a' i b' , są do siebie równoległe i odwrotnie: jeżeli proste, łączące równowartościowe wskazniki rzutów dwóch prostych, tworzą pęk równoległy — to rzuty owe wyrażają dwie proste przecinające się.

19. Dwie proste skośne. Jeżeli punkt przecięcia się M' rzutów a' i b' dwóch prostych, uważany za rzut punktu prostej b , ma inną cechę aniżeli uważany za rzut punktu prostej a , to proste a i b nie posiadają punktu wspólnego, nie przecinają się; ich wzajemne położenie określamy jako *skośne* lub *wichrowate*. Przez kąt nachylenia dwóch prostych skośnych rozumiemy kąt, jaki otrzymamy, jeśli przez dowolny punkt

lub równoległych, względnie trzech punktów, znamy położenie płaszczyzny elementami tymi wyznaczonej i że:

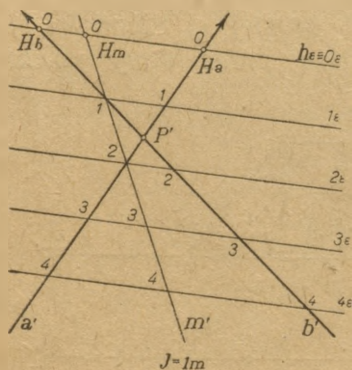
3) znajomość położenia dwóch prostych przecinających się lub równoległych, względnie trzech punktów, pozwala na wyznaczenie położenia każdej dowolnej ilości punktów i prostych płaszczyzny, owymi elementami określonej.

Ponieważ prostą wyznaczają dwa jej punkty, więc gdy dwa punkty prostej leżą na płaszczyźnie, to prosta — a więc zbiór wszystkich jej punktów, leży na płaszczyźnie.

Proste a' i b' (Rys. 38.) są rzutami dwóch prostych przecinających się, wyznaczają więc położenie pewnej płaszczyzny, którą nazwijmy literą ε .

Połączmy wskaźnik 2 prostej a' ze wskaźnikiem 1 prostej b' , to otrzymana prosta m' jest rzutem prostej m przecinającej zarówno prostą a jak i b , a więc leżącej na płaszczyźnie ε , wyznaczonej prostymi a i b .

Na szczególną uwagę zasługują proste, leżące na płaszczyźnie ε a równoległe do rzutni. Rzuty O_ε , 1_ε , 2_ε , 3_ε ... tych prostych otrzymamy, łącząc punkty o jednako-



Podziałka 1:75.

Rys. 38.

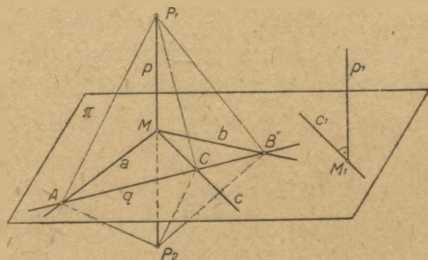
wych cechach prostych a' i b' . Proste te, leżące na płaszczyźnie ε , a równoległe do poziomej, są liniami łączącymi punkty przebiecia się prostych a i b z głównymi płaszczyznami warstwowymi, a więc także liniami przecięcia się tych płaszczyzn z płaszczyzną ε . Proste O_ε , 1_ε , 2_ε ... nazywamy liniami warstwowymi albo liniami poziomymi, rzuty zaś tych linii warstwicami płaszczyzny ε .

Linia warstwowa $O_\varepsilon \equiv h_\varepsilon$ leży na rzutni poziomej (pł. porównawczej), jest prostą przecięcia się pł. ε z tą rzutnią i nazywa się śladem poziomym płaszczyzny ε . Ślad poziomy płaszczyzny oznaczamy będziemy stale literą h .

Płaszczyzna prostopadła do rzutni, czyli t. zw. płaszczyzna rzucająca (ustęp 11.), wyznaczona będzie swoim śladem poziomym, z którym schodzą się rzuty wszystkich punktów i prostych,

leżących na tej płaszczyźnie, która tym sposobem rzuca je w swój ślad.

23. Prosta prostopadła do płaszczyzny. Przyjmijmy na płaszczyźnie π (Rys. 39.) trzy proste a , b , c przechodzące przez punkt M , i w którym to punkcie wyprowadźmy prostą p prostopadłą zarówno do prostej a jak i b . Niechaj dowolnie na płaszczyźnie π przyjęta prosta q przecina proste a , b i c w punktach A , B i C . Obierzmy następnie na prostej p punkty P_1 i P_2 , przyczem niech $P_1 M = P_2 M$ i połączmy je z punktami A , B i C . Z rysunku 39. czytamy:



Rys. 39.

$$\triangle AMP_1 \cong \triangle AMP_2 \text{ i } \triangle BMP_1 \cong \triangle BMP_2$$

więc $P_1 A = P_2 A$, $P_1 B = P_2 B$ jako odpowiednie boki w trójkątach przystających. Następnie mamy:

$$\triangle ABP_1 \cong \triangle ABP_2 \text{ więc}$$

$\sphericalangle P_1 AB = \sphericalangle P_2 AB$ jako odpowiednie kąty w trójkątach przystających. Z kolei otrzymujemy:

$$\triangle ACP_1 \cong \triangle ACP_2, \text{ a więc } P_1 C = P_2 C.$$

A wreszcie:

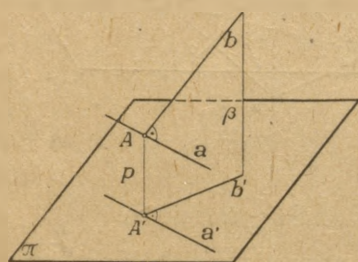
$$\triangle MCP_1 \cong \triangle MCP_2, \text{ zatem}$$

$\sphericalangle CMP_1 = \sphericalangle CMP_2$, a ponieważ kąty te są kątami przyległymi, więc skoro oba są równe, to każdy z nich musi być kątem prostym czyli: $p \perp c$. Tym sposobem dowiedliśmy następującego twierdzenia: *Jeżeli prosta p , przechodząca przez punkt przecięcia się dwóch prostych, jest do nich prostopadłą, to wówczas jest prostopadłą do każdej prostej przechodzącej przez ten punkt, a leżącej na płaszczyźnie π wyznaczonej przez owe dwie proste.* Mówimy, że prosta p jest prostopadłą albo normalną do płaszczyzny π . Innymi słowy: gdy prosta jest normalną do dwóch prostych w ich punkcie przecięcia się, to jest normalną do płaszczyzny temi prostymi wyznaczonej.

Przez dowolny punkt M_1 płaszczyzny π (Rys. 39.) poprowadzimy proste $c_1 \parallel c$ i $p_1 \parallel p$. Kąt, jaki zawierają proste

skośne p i c_1 , równy kątowi jaki tworzą proste p_1 i c_1 , jest kątem prostym (ust. 19.), a ponieważ prosta p jest prostopadłą do każdej prostej przechodzącej przez punkt M , a leżącej na płaszczyźnie π , więc jest prostopadłą do każdej prostej płaszczyzny π . Czyli: *gdy prosta jest prostopadłą do płaszczyzny, to jest prostopadłą do wszystkich prostych, leżących na tej płaszczyźnie.*

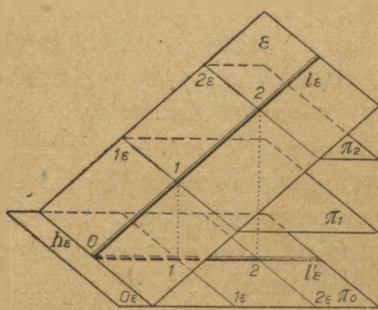
24. Rzut kąta prostego. Twierdzenie: *Rzut kąta prostego na płaszczyznę jest kątem prostym, gdy jedno jego ramie jest równoległe do płaszczyzny rzutów.*



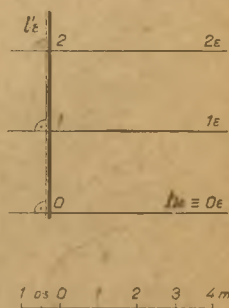
Rys. 40.

Przyjmijmy ramie a kąta prostego, jaki tworzą proste a i b , równoległe do pł. rzutów π (Rys. 40.), to rzut a' jest równoległy do prostej a . Ponieważ promień rzucający p jest $\perp$ do prostej a , a ta znowu $\perp$ do prostej b , zatem prosta a jest $\perp$ równocześnie do prostych b i p , a więc prostopadła do płaszczyzny β prostymi temi wyznaczonej. Ale z ustępu poprzedniego wiemy, że gdy prosta jest normalną do płaszczyzny, to jest normalną do każdej prostej, leżącej na tej płaszczyźnie; prosta tedy a jest prostopadłą do prostej b' , która leży na płaszczyźnie $\beta \equiv (p, b)$ i jest rzutem prostej b na pł. π . Ponieważ wkońcu prosta a' jest równoległą do prostej a , więc i a' jest $\perp$ do b' — co było do wykazania.

25. Linia spadu płaszczyzny. Prosta l_ϵ , leżąca na płaszczyźnie ϵ a prostopadła do jej linii warstwowych, nazywa się linią największego spadku, lub krócej linią spadku tej płaszczyzny (Rys. 41.). Ponieważ linie warstwowe są równoległe do pł. porównawczej, więc na podstawie ustępu poprzedniego rzut l'_ϵ linii największego spadku



Rys. 41.



Rys. 42.

l_ϵ jest prostopadły do warstwic płaszczyzny (Rys. 42.). Kąt nachylenia linii spadu pł. ϵ do płaszczyzny rzutów nazywamy kątem nachylenia pł. ϵ do pł. rzutów.

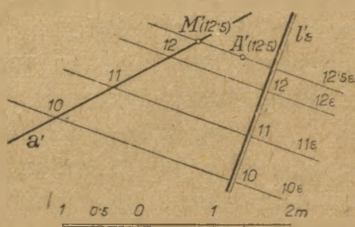
Prosta l_ϵ jest $\perp$ do h_ϵ podobnie jak $l'_\epsilon \perp h_\epsilon$ — a ponieważ h_ϵ jest prostą wspólną (przecięcia się) płaszczyzn ϵ i π_0 — więc ogólnie powiedzieć możemy: przez kąt nachylenia dwóch płaszczyzn rozumiemy kąt, jaki tworzą dwie proste tych płaszczyzn, poprowadzone w dowolnym punkcie prostopadle do wspólnej prostej obu płaszczyzn.

Podziałkę nachylenia rzutu l'_ϵ , linii spadu płaszczyzny, nazywamy podziałką nachylenia płaszczyzny, moduł linii spadu płaszczyzny — modułem tej płaszczyzny. Najczęściej wyznaczać będziemy położenie płaszczyzny jej podziałką nachylenia, którą rysujemy jako dwie blisko siebie leżące równoległe proste. Wskaźniki podziałki są oczywiście liczbami całymi, a odcinek ograniczony dwiema liczbami porządkowymi jest modułem płaszczyzny; odwrotną wartość modułu nazywamy nachyleniem płaszczyzny. Im większy jest więc moduł, tem mniejsze nachylenie płaszczyzny, czyli tem mniejszą jest styczna trygonometryczna kąta, jaki uważana płaszczyzna zamyka z płaszczyzną porównawczą (rzutów). W dalszym ciągu wykładu używać będziemy zwrotów: dana jest linia spadu, wykreślić linię spadu i t. p. rozumiejąc zawsze przez linię spadu jej rzut.

Płaszczyzna $\perp$ do rzutni wyznaczona jest swoim śladem poziomym t. j. prostą przecięcia się z rzutnią; położenie płaszczyzny równoległej do rzutni wyznacza cecha jednego, dowolnego jej punktu.

26. Zadania. 1. Wykreślić podziałkę nachylenia płaszczyzny ϵ , wyznaczonej prostą a i punktem A (Rys. 43.).

Na prostej a szukamy punktu M o cecie punktu A . Prosta AM — jako równoległa do pł. porównawczej i leżąca na pł., której linii spadu szukamy, jest warstwicą tejże płaszczyzny. W ten sposób linia spadu i jej podziałka są wyznaczone.

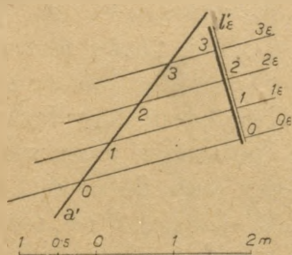


Rys. 43.

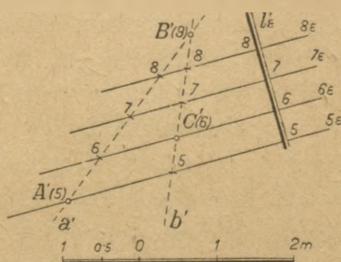
2. Wyznaczyć płaszczyznę,

przechodzącą przez prostą a , której podziałka nachylenia a' jest dana (Rys. 44.).

Przez prostą przechodzi dowolna ilość płaszczyzn; proste równoległe $0_\epsilon, 1_\epsilon, \dots$ przechodzące przez wskaźniki podziałki nachylenia a' są warstwicami jednej z tych płaszczyzn. Rzutem linii spadu tej płaszczyzny jest prosta l'_ϵ prostopadła do tych warstw. Punkty przecięcia się linii l'_ϵ z warstwicami są wskaźnikami podziałki nachylenia płaszczyzny ϵ .



Rys. 44.



Rys. 45.

3. Wyznaczyć podziałkę nachylenia płaszczyzny ϵ , wyznaczonej trzema punktami A (A' , 5), B (B' , 9), C (C' , 6). (Rys. 45.).

Z trzech prostych, wyznaczonych danymi punktami, weźmy pod uwagę dwie n. p. $a \equiv (AB)$ i $b \equiv (BC)$, które przecinają się w punkcie B . Zestopniujmy obie proste — to linie łączące równoliczbowe wskaźniki są warstwicami pł. ϵ i wyznaczają na prostopadłej l'_ϵ podziałkę nachylenia.

4. Wykreślić rzut pięciokąta płaskiego, leżącego dowolnie w przestrzeni.

Rozróżniamy wielokąt płaski od przestrzennych, zwanych także skośnymi. Wielokąt, którego wszystkie wierzchołki, — a więc i boki, leżą na płaszczyźnie, nazywamy płaskim; dowolna ilość punktów przestrzeni połączona prostymi daje wielokąt, którego nie można położyć na płaszczyźnie, który nazywamy wielokątem skośnym.

Ponieważ trzy dowolne punkty wyznaczają płaszczyznę, więc trójkąt jest utworem płaskim.

Z pięciu wierzchołków żądanego wielokąta trzy, np. A (A' , 3), B (B' , 7) i C (C' , 9) (Rys. 46.), przyjmujemy do-

wolnie, dwa dalsze t. j. D i E obrać musimy na płaszczyźnie wyznaczonej trzema pierwszymi.

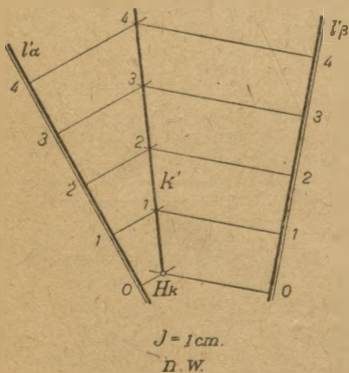
W tym celu zestopniujemy prostą $A'B'$ i dwa dowolne wskaźniki np. 5 i 6 połączymy prostymi p' i q' z punktem C' .

Proste p i q , wyznaczone rzutami p' i q' , leżą na płaszczyźnie trójkąta ABC , gdyż mają z tą płaszczyzną po dwa punkty wspólne.

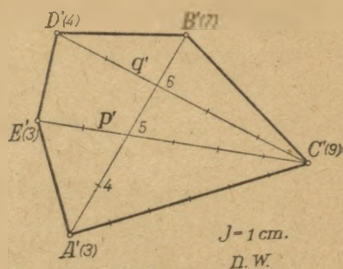
Zatem każdy punkt tych prostych np. D (D' , 4) i E (E' , 3) leżą na płaszczyźnie trójkąta, mogą więc być przyjęte za dalsze wierzchołki pięciokąta płaskiego A, B, C, D, E .

27. Przenikanie się dwóch płaszczyzn. Dwie płaszczyzny przenikają się w linii prostej, którą nazywamy *krawędzią* tych płaszczyzn. Ponieważ prostą wyznaczają dwa jej punkty, a krawędź jest prostą leżącą równocześnie na dwóch płaszczyznach — więc dwa punkty, leżące równocześnie na obu płaszczyznach, wyznaczają ich krawędź.

Dowolna płaszczyzna warstwowa przecina dwie płaszczyzny α i β w dwóch warstwicach, których punkt przecięcia się leży równocześnie na obu płaszczyznach, a więc jest punktem szukanej krawędzi.



Rys. 47.

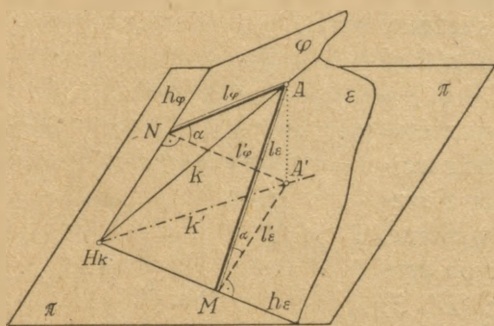


Rys. 46.

Krawędź dwóch płaszczyzn określić więc można jako miejsce geometryczne punktów przecięcia się linii warstwowych obu płaszczyzn, leżących w tych samych wysokościach, a więc na wspólnych płaszczyznach warstwowych (Rys. 47.). Punkt przecięcia się śladów poziomych obu płaszczyzn jest śladem poziomym Hk krawędzi, której rzut oznaczyliśmy literą k' .

Przykłady. 1. Obie płaszczyzny zamykają z poziomem jednokątne kąty. W tym przypadku rzut k' krawędzi jest dwusieczną kąta, jaki tworzą warstwicę danych

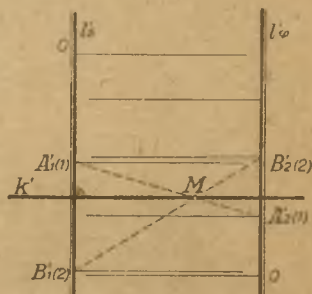
płaszczyzn. W istocie bowiem niechaj w Rys. 48. ε i φ uzmysławiają nam dwie płaszczyzny, nachylone pod jednakowym



Rys. 48.

krawędzi k . Prosta $k' \equiv (A' H_k)$ jest rzutem poziomym krawędzi k . Płaszczyzna, przechodząca przez prostą AA' i $\perp$ do h_ε , przecina pł. ε w linii spadu l_ε , a płaszczyznę π w prostej l'_ε , będącej rzutem prostej l_ε . Podobnie płaszczyzna, przechodząca przez prostą AA' i $\perp$ do h_φ , wyznacza linię spadu l_φ płaszczyzny φ i rzut l'_φ tejże linii. Weźmy pod uwagę trójkąty prostokątne $AA'M$ i $AA'N$ — to ponieważ bok AA' jest wspólny, kąty $AM A'$ i $AN A'$, będące kątami nachylenia obu płaszczyzn ε i φ , według założenia równe — więc oba uważane trójkąty są przystające. Wobec tego $A'M = A'N$, a ponieważ $l'_\varepsilon \perp h_\varepsilon$ zaś $l'_\varphi \perp h_\varphi$, więc punkt A' jest równo oddalony od śladów obu płaszczyzn, leży zatem na dwusiecznej kąta, jaki owe ślady ze sobą zawierają.

2. *Podziałki nachylenia obu płaszczyzn są równoległe* (Rys. 49.). Warstwie obu danych płaszczyzn ε i φ są wzajemnie równoległe. Ponieważ krawędź określiliśmy jako miejsce geometryczne punktów przecięcia się warstw dwóch płaszczyzn, więc wobec wzajemnej równoległości warstw — wyznaczają te ostatnie tylko jeden punkt w odległości nieograniczonej, czyli kierunek krawędzi, równoległy do



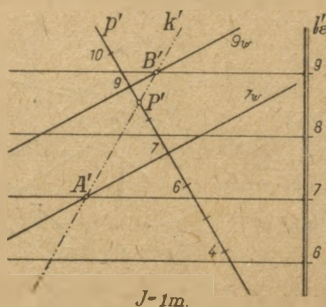
$J = 1 \text{ cm}$
D.W.

Rys. 49.

warstwic. Połączmy dwa punkty np. $A_1'(1)$ i $B_1'(2)$ prostej l'_ε z punktami A_2' i B_2' o tych samych cechach na prostej l'_φ — to, wskutek zachodzącej proporcjonalności odcinków, każda prosta, przechodząca przez punkt M , wyznacza na podziałkach l'_ε i l'_φ punkty o jednakowych cechach. Prosta więc k' , przechodząca przez punkt M i równoległa do warstwic, jest rzutem krawędzi płaszczyzn ε' i φ .

28. Punkt przebicia się prostej z płaszczyzną wyznaczamy w ten sposób, że przez prostą poprowadzimy dowolną płaszczyznę, znajdziemy krawędź tej pł. z pł. daną, a punkt przecięcia się tej krawędzi z daną prostą jest szukanym punktem.

Niechaj zestopniowana linia spadu l'_ε wyznacza pł. ε , a zestopniowana prosta p' prostą p (Rys. 50.). Dowolną płaszczyznę ψ przechodzącą przez prostą p wyznaczą dwie warstwie 7_ψ i 9_ψ . Prosta $k' \equiv (A' B')$ jest rzutem krawędzi płaszczyzn ε i ψ , a punkt P' szukanym punktem przecięcia się prostej p z pł. ε .



J-1m.

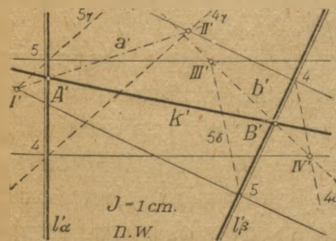
Podziałka: 1:100.

Rys. 50.

29. Zadania. 1. Wyznaczyć rzut krawędzi dwóch płaszczyzn, których równoważnościowe warstwie przecinają się zewnątrz płaszczyzny rysunkowej.

Krawędź dwóch płaszczyzn określić także można jako miejsce geometryczne punktów przebicia się prostych jednej płaszczyzny z pł. drugą. Prosta więc, łącząca punkty przebicia się dwóch dowolnie obranych prostych na jednej pł. z pł. drugą, jest krawędzią owych płaszczyzn.

W naszym przykładzie (Rys. 51.), gdzie płaszczyzny α i β wyznaczone są swojemi podziałkami nachylenia l'_α i l'_β , znajdziemy rzut k' krawędzi, łącząc rzut A' punktu przebicia się linii l_α z pł. β — z rzutem B' punktu przebicia się linii l_β z pł. α .

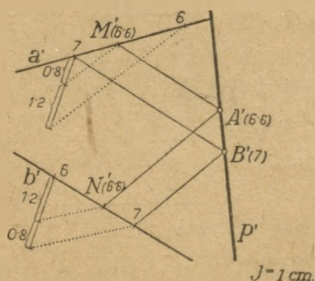


Rys. 51.

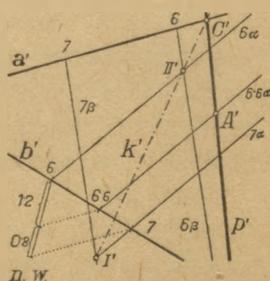
2. Wykreślić rzut prostej, przechodzącej przez punkt A (A' , 6·6) i przecinającej dwie proste skośne a (a') i b (b').

Pierwszy sposób. Przez punkt A i prostą a , a następnie przez punkt A i prostą b , poprowadzimy płaszczyzny, których krawędź jest rozwiązaniem zadania.

Na prostych a' i b' (Rys. 52.) szukamy punktów M' i N' o cechach równych cesze punktu A , więc 6·6. Prosta $A' M'$ jest warstwicą pł. (A , a), prosta $A' N'$ warstwicą pł. (A , b). Wyznaczymy punkt przecięcia się B' (7) warstwic 7 obu płaszczyzn i połączymy go z punktem A' (6·6) otrzymamy żądany rzut p' prostej p , przechodzącej przez dany punkt A i przecinającej dane proste a i b .



Rys. 52.



Rys. 53.

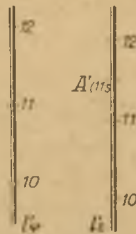
Drugi sposób. Przez punkt A i jedną z prostych poprowadzimy płaszczyznę α i wyznaczmy punkt przebiecia się drugiej prostej z tą pł., a prosta łącząca otrzymany punkt z punktem A , rozwiązuje zadanie (Rys. 53.).

30. Płaszczyzny równoległe. Przeciawwszy pęk płaszczyzn warstwowych płaszczyznami równoległymi, otrzymamy pęk promieni równoległych, jako linie warstwowe, wzajemnie do siebie równoległe. Ponieważ rzuty prostych równoległych są do siebie równoległe, więc otrzymane warstwy płaszczyzn równoległych, a więc i ich linie spadu, są do siebie wzajemnie równoległe. Z pojęcia płaszczyzn równoległych wynika, że ich moduły muszą być równe.

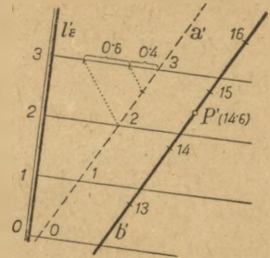
Stąd: równoległe, o zgodnym kierunku nachylenia i tym samym modułem zestopniowane linie spadu, wyznaczają płaszczyzny równoległe.

31. Zadania: 1. Wyznaczyć położenie pł. ε , przechodzącej przez punkt $A(A', 11 \cdot 5)$, a równoległej do pł. φ , której linia spadu l'_φ jest dana (Rys. 54.). Linia $l'_\varepsilon \parallel l'_\varphi$, a poprowadzona przez punkt A' , zestopniowana modulem prostej l'_φ , stanowi podziałkę nachylenia pł. ε , a więc płaszczyznę tę wyznacza.

2. Przez punkt $P(P', 14 \cdot 6)$ poprowadzić prostą równoległą do pł. ε , wyznaczonej linią spadu l'_ε (Rys. 55.). Na pł. ε przyjmiemy dowolną prostą $a(a')$,



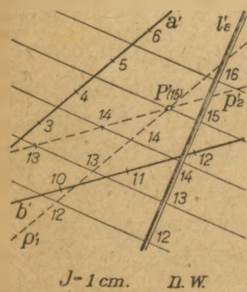
Rys. 54.



Rys. 55.

jest rzutem prostej równoległej do prostej a , a więc także i do płaszczyzny ε .

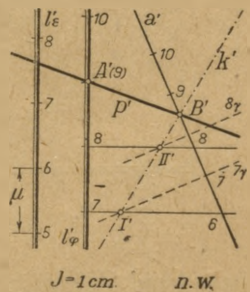
3. Przez punkt $P(P', 15)$ poprowadzić pł. równoległą do dwóch danych prostych skośnych $a(a')$ i $b(b')$ (Rys. 56.). Przez punkt P kreślimy proste p_1 i p_2 równoległe do a i b . Płaszczyzna, prostymi temi wyznaczona, jest równoległa do danych prostych; l'_ε jest linią spadu tejże płaszczyzny.



Rys. 56.

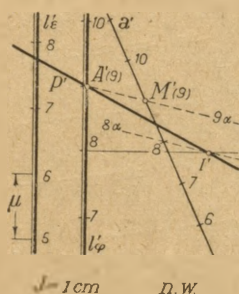
4. Wyznaczyć prostą, przechodzącą przez dany punkt $A(A', 9)$, przecinającą daną prostą $a(a')$ i równoległą do danej płaszczyzny ε (l'_ε).

1. Sposób. Szukana prosta łączy punkt A z punktem przebiecia się prostej a z płaszczyzną φ , przechodzącą przez punkt A równoległe do pł. ε (Rys. 57.). Prosta l'_φ , wykreślona przez A' równoległe do l'_ε i zestopniowana jej modulem μ , wyznacza, jako podziałka nachylenia, płaszczyznę φ równoległą do ε i przechodzącą przez punkt A . Punkt B' jest rzutem punktu przebiecia się prostej a z płaszczyzną φ , a prosta $p' \equiv (A'B')$ rzutem prostej przechodzącej przez punkt A , przecinającej prostą a w punkcie B i równoległej do pł. ε .



Rys. 57.

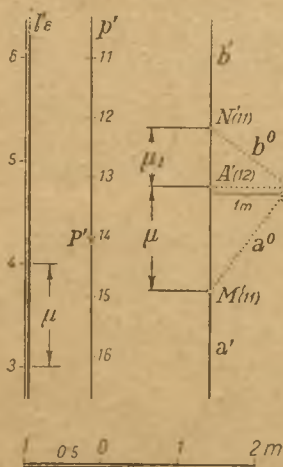
2. Sposób. Szukana prosta jest krawędzią płaszczyzny $\alpha \equiv (A, a)$ i płaszczyzny φ , poprowadzonej przez punkt A równolegle do pł. ε (Rys. 58.). Płaszczyznę φ wyznacza — jak poprzednio — jej podziałka nachylenia l'_φ . Łącząc punkt A' z punktem M' prostej a' o tej samej co punkt A' cesze, otrzymamy warstwicę 9_α pł. α . Punkt A' i punkt przecięcia się warstwic 8 płaszczyzn φ i α wyznaczają szukaną prostą p' .



Rys. 58.

32. Prosta prostopadła do płaszczyzny. Wiemy (ust. 23.), że prosta prostopadła do płaszczyzny jest prostopadłą do każdej prostej, leżącej na tej płaszczyźnie.

Ponieważ linie warstwowe płaszczyzny są równoległe do pł. rzutów, więc rzut prostej prostopadłej do pł. musi być prostopadły do warstwic (t.j. rzutu linii warstwowych), rzut kąta prostego jest bowiem kątem prostym, jeśli jedno jego ramię jest równoległe do pł. rzutów. Ponieważ dalej warstwicę pł. są prostopadłe do rzutu linii największego spadku, więc: rzut prostej prostopadłej do płaszczyzny jest równoległy do rzutu jej linii spadku.



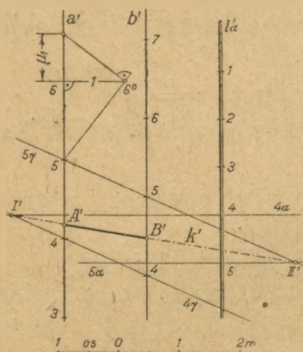
Rys. 59.

Jeżeli podziałka nachylenia l'_ε (Rys. 59.) wyznacza położenie pł. ε , to prosta b' , przechodząca przez dany punkt $A(A', 12)$ równoległa do l'_ε , jest rzutem prostej b , prostopadłej do tej płaszczyzny. Jednak do wyznaczenia położenia prostej potrzebna jest znajomość jej modułu i kierunku nachylenia, które znajdziemy w sposób następujący. Wyobraźmy sobie, że prócz prostej b ,

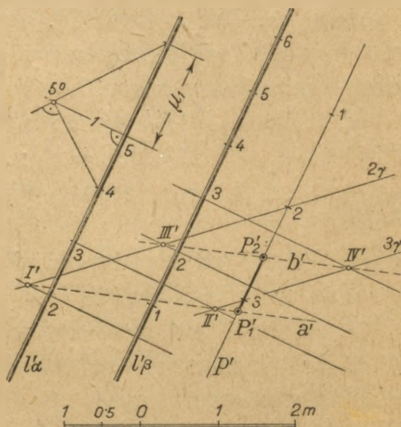
poprowadziliśmy przez punkt A prostą a , równoległą do linii spadku pł. ε . Położymy następnie pł. poziomo-rzucającą, przechodzącą przez owe dwie, do siebie prostopadłe proste, wraz z temi prostymi na pł. warstwową w wysokości 11. W tym celu odmierzymy na prostopadłej w punkcie A' do prostej a'

prostopadłą do prostej p i znajdziemy punkt przecięcia P . Odcinek AP rozwiązuje zadanie.

Rzut l'_α , linii spadu l_α płaszczyzny α , będzie równoległy do p' , a jego zestopniowanie przeprowadzimy jak w Rys. 60.



Rys. 62.



Rys. 63.

Prosta p przebija płaszczyznę α w punkcie P (P' , 5.6), który otrzymaliśmy w znany sposób. Odcinek $A'P'$ jest rzutem odległości punktu A od prostej p , zaś odcinek $A'P^0 = a$ jej kładem na płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez punkt A .

3. *Znaleźć odległość dwóch prostych równoległych.* Prowadzimy płaszczyznę α , prostopadłą do danych prostych a i b , a odcinek zawarty między punktami przecięcia A i B rozwiązuje zadanie (Rys. 62.). Prawdziwą wielkość tego oddalenia, otrzymanego w rzucie cechowanym, znajdziemy, kładąc odcinek AB na jedną z płaszczyzn poziomych.

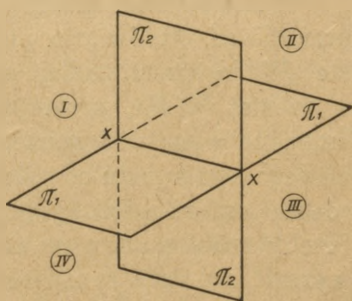
4. *Znaleźć odległość dwóch płaszczyzn równoległych.* Prowadzimy prostą p prostopadłą do danych płaszczyzn α i β , a odcinek, zawarty między punktami przecięcia, wyraża żadaną odległość (Rys. 63.).

§ 2. ZASADY RZUTÓW PROSTOKĄTNYCH NA DWIE PŁASZCZYZNY

34. *Rzuty punktów.* Rozważania, przeprowadzone w § 1, opierały się na wyznaczeniu położenia punktu w przestrzeni zapomocą jego rzutu i cechy, t. j. liczby wyrażającej odległość danego punktu od rzutni. Rzutom towarzyszyły tam zawsze

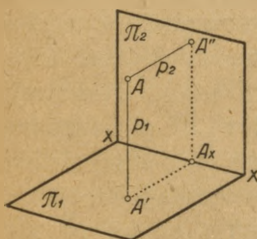
liczby, a przeprowadzenie zadań wymaga znajomości podziałki, w której rysunek jest wykonany. Od cechy punktu uwolnimy się, jeśli jego położenie ustalimy w odniesieniu do drugiej płaszczyzny rzutów, na której zaznaczymy w formie odcinka wysokość danego punktu. Tę nową płaszczyznę rzutów przyjmujemy z reguły prostopadle do pierwszej i nazywamy płaszczyzną pionową rzutów, albo krótko rzutnią pionową. Przez wprowadzenie drugiej płaszczyzny rzutów, otrzymaną metodę geometrii wykreślnej nazywać będziemy od jej twórcy metodą *Monge'a*. (*Gaspard Monge*, znakomity matematyk francuski, twórca geometrii wykreślnej, jako nauki, ur. 10. maja 1746, um. 28. lipca 1818 w Paryżu).

Rzutnia pionowa π_2 przecina rzutnię poziomą π_1 wzdłuż prostej x , którą zwiemy osią rzutów. Obie rzutnie dzielą przestrzeń na cztery obszary, których następstwo oznaczone jest liczbami *I*, *II*, *III* i *IV* na Rys. 64. Oś rzutów dzieli każdą z rzutni na dwie części. Mówić więc będziemy o rzutni poziomej przed i za osią x , o rzutni pionowej nad i pod osią x .



Rys. 64.

Przyjmijmy dowolny punkt A , leżący w pierwszej części przestrzeni i wyznaczmy rzut A' (czytaj A z kreską) tego punktu na płaszczyznę π_1 i rzut A''



Rys. 65.

(czytaj A z dwiema) na płaszczyznę π_2 (Rys. 65.). Rzuty A' i A'' wyznaczają w sposób jednoznaczny położenie punktu A w przestrzeni, na odwrót bowiem proste p_1 i p_2 , prostopadłe w punktach A' i A'' do płaszczyzn π_1 i π_2 , przecinają się w punkcie A . Punkt A' nazywamy rzutem poziomym, punkt A'' rzutem pionowym punktu A . Jeśli napiszemy: $A(A'A'')$ to symbol ten

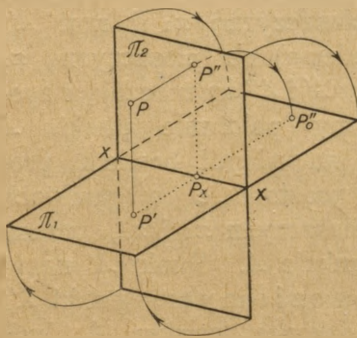
rozumieć należy w ten sposób, że punkt A wyznaczony jest swoim rzutem poziomym A' i pionowym A'' .

Odległość punktu A od płaszczyzny poziomej rzutów, równą odcinkowi AA' , nazwalimy *wysokością*, odległość

zaś od płaszczyzny pionowej, wyrażoną odcinkiem AA'' , nazwiemy **głębokością** punktu A .

Ażeby określić obszar przestrzeni, w której znajduje się punkt, zachodzi potrzeba względnego oznaczenia wysokości i głębokości punktu. Przyjmujemy więc, że wysokość wszystkich punktów, znajdujących się nad płaszczyzną poziomą rzutów, jest dodatnia, zaś punktów, znajdujących się pod rzutnią poziomą — więc w części *III* i *IV* — jest ujemna. Głębokość punktów leżących przed rzutnią pionową, a więc w *I* i *IV* części przestrzeni, uważamy na dodatnią, punkty za rzutnią pionową, t. j. w obszarach *II* i *III*, mają głębokość ujemną. Przez uwzględnienie znaków przy odległościach punktów od rzutni, wyznaczamy położenie tych punktów w odpowiednich częściach przestrzeni.

Płaszczyzna, poprowadzona przez proste PP' i PP'' , przetnie oś rzutów x w punkcie P_x , rzutnię poziomą π_1 w prostej $P'P_x$ prostopadłej do osi x , zaś rzutnię pionową π_2 w prostej $P''P_x$, prostopadłej do tejże osi x . Z Rys. 66. czytamy, że wysokość punktu P równa się odległości rzutu pionowego tego punktu od osi rzutów, zaś głębokość tegoż punktu P równa jest odległości jego rzutu poziomego P' od osi rzutów x . Ażeby rzuty punktu na dwie prostopadłe do siebie płaszczyzny wyrazić się dały rysunkiem na jednej płaszczyźnie rysunkowej, więc na tablicy lub papierze, postępujemy w ten sposób, że jedną z tych płaszczyzn rzutów obracamy około osi x tak,



Rys. 66.

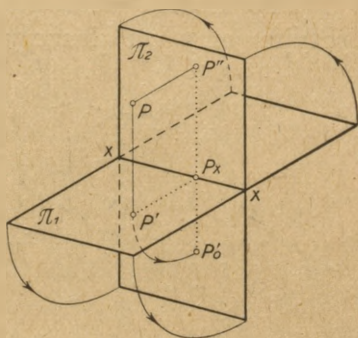
aż padnie, wraz ze znajdującym się na niej rzutem, na drugą rzutnię.

Jeżeli płaszczyzną rysunku jest płaszczyzna stołu, a więc płaszczyzna pozioma, to obracamy około osi rzutów x płaszczyznę pionową π_2 , jak to uzmysławia Rys. 66. Podczas obrotu tego, prosta $P''P_x$ prostopadła do osi x nie zmienia swego położenia na rzutni π_2 — gdy więc rzutnia π_2 padnie na rzutnię π_1 , prosta

P''_0P_x pozostanie prostopadłą do osi rzutów x . Ponieważ jednak prosta $P'P_x$ jest również prostopadłą do osi rzutów —

po dokonany m więc obrocie rzutni π_2 prosta $P_0'' P_x$ zejdzie się z prostą $P' P_x$, stanowiąc jej przedłużenie.

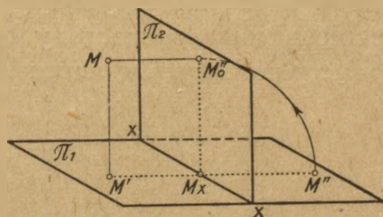
Jeżeli płaszczyzną rysunku jest płaszczyzna tablicy, a więc płaszczyzna pionowa, to płaszczyznę tę pozostawiamy nieruchomą, obracamy zaś około osi rzutów x rzutnię poziomą π_1 tak, aby jej część przednia padła na dolną część rzutni pionowej (Rys. 67.). Rzut poziomy P' punktu P zajmie położenie oznaczone literą P_0' , przy czem prosta $P_0' P_x$ stanowić będzie przedłużenie prostej $P'' P_x$, prostopadłej do osi rzutów x .



Rys. 67.

Tak więc po sprowadzeniu płaszczyzn rzutów do jednej płaszczyzny, będącej płaszczyzną rysunku, rzut poziomy i rzut pionowy punktu leżą na prostej prostopadłej do osi rzutów.

I odwrotnie: dwa punkty, umieszczone na prostopadłej do osi rzutów, są rzutami pewnego, oznaczonego punktu w przestrzeni. Jeżeli bowiem M' i M'' są rzutami punktu, umieszczonymi na prostopadłej do osi rzutów x — to prosta $M'' M_x$ (Rys. 68.), pozostając stale



Rys. 68.

na płaszczyźnie prostopadłej w punkcie M_x do osi rzutów, zajmie, po podniesieniu płaszczyzny pionowej w jej pierwotne położenie, miejsce $M_0'' M_x$. Prostopadłe, poprowadzone w punktach M' i M_0'' , przetną się w punkcie M , którego rzutami, sprowadzonymi na płaszczyznę rysunku, są punkty M' i M'' . Z powyższego wynika też wprost, że dwa punkty, nie leżące na jednej prostopadłej do osi rzutów, nie mogą być rzutami jednego punktu przestrzeni.

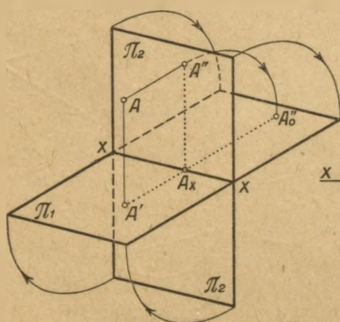
Każdą prostą prostopadłą do osi rzutów, łączącą dwa rzuty tego samego punktu, nazywać będziemy prostą odnoszącą albo wprost odnoszącą.

35. Różne położenia punktu w przestrzeni. Ponieważ dwie rzutnie dzielą przestrzeń na cztery części, więc mówić

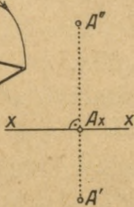
możemy o punkcie, znajdującym się w pierwszym, drugim, trzecim lub czwartym obszarze przestrzeni.

a) *Punkt leży w pierwszym obszarze* (Rys. 69 a.).

Po kładzie rzutni pionowej na płaszczyznę poziomą, którą przyjmujemy za płaszczyznę rysunku, rzuty punktu A leżą



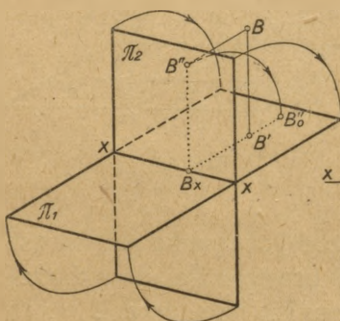
Rys. 69 a.



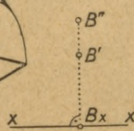
Rys. 69 b.

po obu stronach osi rzutów, w szczególności, rzut poziomy A' leży pod osią x , rzut pionowy A'' nad osią x (Rys. 69 b.). Dotąd oznaczaliśmy rzuty punktu mianem tego punktu, więc dużą literą alfabetu i kreską umieszczoną u góry tej litery, gdy chodziło o rzut poziomy, dwiema kreskami, gdy wyraża-

liśmy rzut pionowy. Rzut punktu sprowadzony na rzutnię, będącą płaszczyzną rysunku, otrzymywał u dołu znak małego zera. (Rys. 66, 67, 68, 69 a.). Z tego też powodu winien być oznaczony rzut pionowy (Rys. 69 b.) punktu A znakiem A_0'' . Jeśli jednak zauważymy, że przez kład rzutni poziomej na pionową znak zera przypadłby literze A' — że więc każdy z obu rzutów punktu oznaczony być może u dołu znaczkiem zera, więc pomijamy ów znaczek i oznaczamy rzuty punktu na



Rys. 70 a.



Rys. 70 b.

rysunku jedynie kreskami. Rzut poziomy otrzymuje jedną, rzut pionowy dwie kreski. Znak A' , czytany A z kreską, wyraża rzut poziomy, znak A'' , czytany A z dwiema, określa rzut pionowy punktu A .

Odcinek $A'' A_x$ (Rys. 69 a i b.) równy jest odległości punktu A od płaszczyzny poziomej, przed-

stawia więc wysokość tego punktu; odcinek $A' A_x$ równy jest odległości punktu A od rzutni pionowej, jest więc jego głębokością.

b) Punkt leży w drugim obszarze przestrzeni.

W tym wypadku rzut poziomy B' punktu B znajduje się na tylnej części rzutni poziomej; — po obróceniu rzutni pionowej oba rzuty B' i B'' (Rys. 70 a.) znajdą się po jednej stronie osi rzutów, a mianowicie nad osią rzutów. W Rys. 70 b. rzuty punktu B oznaczyliśmy przez B' i B'' . Jeśli wysokość punktu B , a więc jego odległość od rzutni poziomej, większa jest, aniżeli jego głębokość, czyli odległość od rzutni pionowej — to punkt B'' leżeć będzie nad punktem B' .

Wysokość punktu znajdującego się w drugiej części przestrzeni jest dodatnia, głębokość zaś ujemną.

c) Punkt znajduje się w trzeciej części przestrzeni.

Rzut poziomy C' punktu C leży na tylnej części rzutni poziomej, rzut pionowy C'' na dolnej części rzutni pionowej (Rys. 71 a.).

Po sprowadzeniu obu rzutni do jednej płaszczyzny, rzut poziomy leżeć będzie nad osią rzutów, rzut zaś pionowy pod osią rzutów x (Rys. 71 b.).

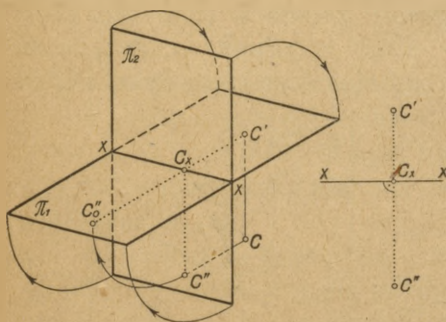
Zarówno wysokość

jak i głębokość punktu, znajdującego się w części trzeciej, są ujemne.

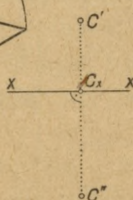
d) Punkt przynależy do czwartego obszaru.

Rzut poziomy D' punktu D leży na przedniej części rzutni poziomej; rzut pionowy, podobnie jak w przypadku poprzednim, na dolnej części rzutni pionowej (Rys. 72 a.). Po sprowadzeniu obu rzutni do jednej płaszczyzny, oba rzuty leżeć będą pod osią x (Rys. 72 b.).

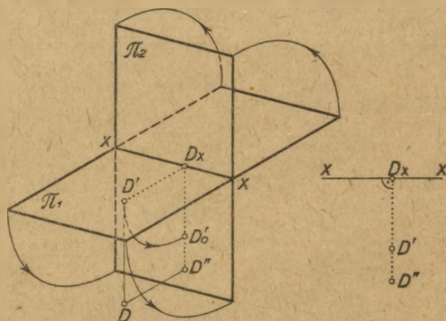
Wysokość punktu, znajdującego się w czwartej części przestrzeni, jest ujemna, jego głębokość natomiast dodatnia.



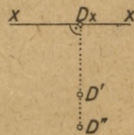
Rys. 71 a.



Rys. 71 b.



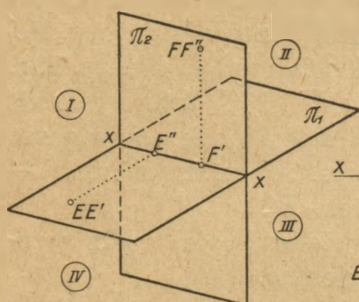
Rys. 72 a.



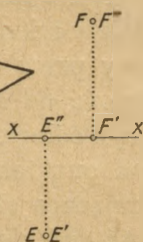
Rys. 72 b.

e) Punkty leżące na rzutniach.

Gdy punkt E leży na przedniej części rzutni poziomej, to z nim schodzi się równocześnie jego rzut poziomy E' , zaś rzut pionowy E'' leży na osi rzutów (Rys. 73 a i b.).



Rys. 73 a.

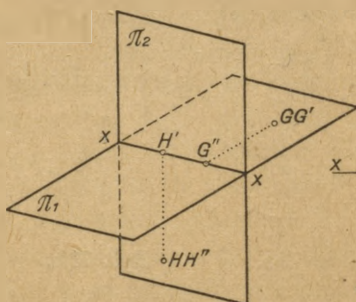


Rys. 73 b.

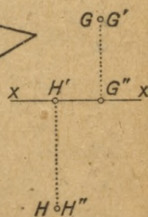
Rzut pionowy F'' punktu F , leżącego na górnej części rzutni pionowej, schodzi się z punktem F , rzut zaś poziomy F' leży na osi x . (Rys. 73 a i b.).

Punkt G , leżący na tylnej części rzutni poziomej, jest równocześnie swoim rzutem poziomym; jego rzut pionowy znajduje się na osi x (Rys. 74 a i b.).

Punkt H , leżący na dolnej części rzutni pionowej, jest równocześnie swoim rzutem pionowym; jego rzut poziomy leży na osi rzutów (Rys. 74 a i b.).



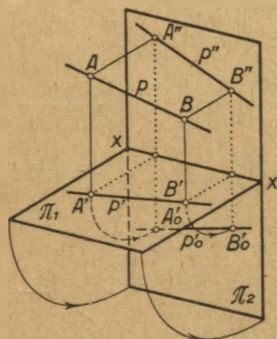
Rys. 74 a.



Rys. 74 b.

36. Rzuty i ślady prostej na dwie płaszczyzny.

Położenie prostej w przestrzeni, w odniesieniu do dwóch płaszczyzn rzutów, wyznaczone jest rzutami tej prostej na te płaszczyzny, a jak z ust. 11. wiadomo, rzut prostej na płaszczyznę jest linią prostą. Jeżeli punkty A i B wyznaczają prostą p — (Rys. 75 a.), a punkty A' i B' są rzutami poziomymi tych punktów — to prosta p' (czytaj p z kreską), wyznaczona punktami A' i B' i leżąca na rzutni poziomej, jest rzutem poziomym prostej p .



Rys. 75 a.



Rys. 75 b.

Prosta p'' (czytaj p z dwiema), łącząca rzuty pionowe A'' i B'' punktów A i B , jest rzutem pionowym prostej p . Mając rzuty p' i p'' prostej p , odtworzymy tę prostą w przestrzeni, jeśli przez prostą p' poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do rzutni poziomej t. zw. płaszczyznę poziomo-rzucającą (patrz ust. 11.), a przez prostą p'' płaszczyznę prostopadłą do rzutni pionowej, czyli t. zw. płaszczyznę pionowo-rzucającą. Prosta przecięcia się obu płaszczyzn jest prostą p . Nawzajem: rzut poziomy p' prostej p określić można jako przecięcie się płaszczyzny poziomo rzucającej, poprowadzonej przez tę prostą, z rzutnią poziomą, a rzut pionowy p'' jako prostą powstałą z przecięcia się płaszczyzny pionowo rzucającej, przechodzącej przez prostą p , z rzutnią pionową. — Po sprowadzeniu obu rzutni, zapomocą obrotu około osi rzutów x , do płaszczyzny rysunkowej, rzut poziomy p' prostej p łączyć będzie punkty A' i B' , leżące pod osią rzutów, a rzut pionowy p'' przejdzie przez punkty A'' i B'' , leżące nad osią rzutów x — Rys. 75 b.

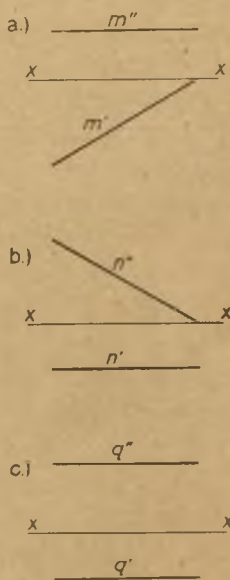
Rozważmy rozmaite położenia prostej względem rzutni.

a) *Położenie dowolne.* Mianem tem określać będziemy proste, nachylone do obu rzutni. Przy takim położeniu prostej oba jej rzuty przecinają oś x . (Rys. 75 a i b.).

b) *Prosta pozioma.* Tak nazywać będziemy prostą równoległą do rzutni poziomej, a nachyloną do pionowej. „Wysokość“ wszystkich punktów takiej prostej jest jednakowa, jej rzut pionowy m'' — Rys. 76 a. — jest równoległy do osi rzutów, a rzut poziomy m' oś tę przecina.

c) *Prosta czołowa.* Mianem tem oznaczać będziemy prostą, równoległą do rzutni pionowej a nachyloną do poziomej (Rys. 76 b.). Wszystkie punkty takiej prostej mają tę samą „głębokość“; rzut poziomy n' jest wobec tego równoległy do osi x , a rzut pionowy przecina tę oś.

d) *Prosta równoległa do osi rzutów.* Oba jej rzuty są równoległe do osi rzutów x (Rys. 76 c.).

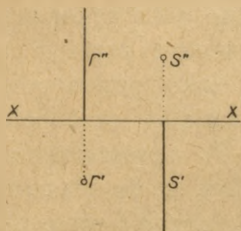


Ryc. 76 a—c.

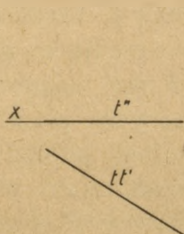
e) *Prosta pionowa*, czyli prostopadła do rzutni poziomej (Rys. 77 a.). Rzut poziomy takiej prostej jest punktem, rzut pionowy prostopadłą do osi rzutów.

f) *Prosta prostopadła do rzutni pionowej*. Rzut pionowy s'' tak położonej prostej jest punktem — Rys. 77 a. — rzut poziomy s' prostopadłą do osi rzutów.

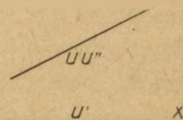
g) *Prosta leży na jednej z rzutni*. Rzut poziomy prostej t , leżącej na rzutni poziomej, schodzi się z tą prostą, rzut pio-



Rys. 77 a.



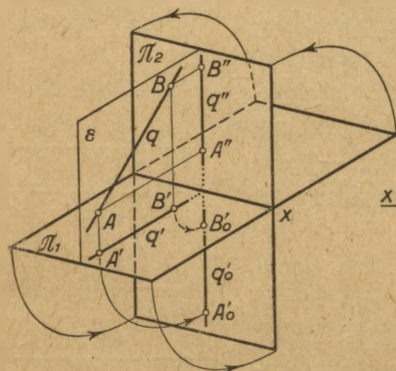
Rys. 77 b.



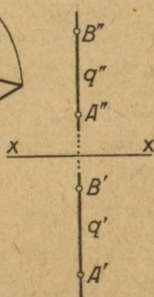
Rys. 77 c.

nowy leży na osi rzutów — Rys. 77 b. Gdy prosta u leży na rzutni pionowej, to schodzi się ze swoim rzutem pionowym, a jej rzut poziomy leży na osi x — Rys. 77 c.

h) *Prosta prostopadła do osi rzutów*, czyli leżąca na płaszczyźnie ε prostopadłej do osi rzutów — Rys. 78 a i b.



Rys. 78 a.



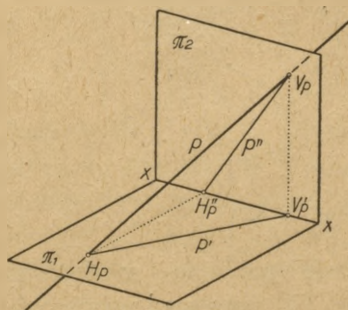
Rys. 78 b.

Rzuty q' i q'' takiej prostej są prostopadłe do osi rzutów i nie wyznaczają położenia prostej q w przestrzeni; wszystkie bowiem proste, leżące na płaszczyźnie ε , mają te same rzuty, a mianowicie q' i q'' . Do wyznaczenia położenia prostej prostopadłej do osi rzutów,

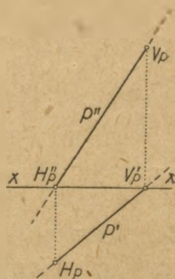
potrzebna jest znajomość rzutów dwóch punktów tej prostej. We wszystkich położeniach prostej dwa jej rzuty położenie to wyznaczają, z jedynym wyjątkiem prostej prostopadłej do osi rzutów, gdzie potrzebna jest znajomość rzutów

dwóch punktów prostej. Aby zaznaczyć, że wzięta pod uwagę prosta np. p wyznaczona jest, w odniesieniu do dwóch płaszczyzn rzutów, swoimi rzutami, używać będziemy symbolu: $p(p' p'')$, w odróżnieniu od przypadku, gdzie prostą wyznaczają dwa jej punkty, co wyrażamy znakiem tożsamości, pisząc np. $m \equiv (A, B)$.

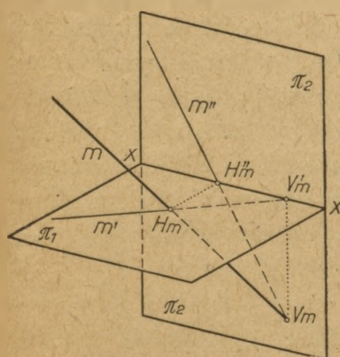
Ślady prostej. Wiadomo z ust. 14., że punkt leżący równocześnie na prostej i na rzutni, a więc punkt przecięcia się prostej z płaszczyzną rzutów, nazywa się **śladem prostej**. W odniesieniu do dwóch płaszczyzn rzutów, mówić będziemy o śladach poziomych i oznaczać je stałe literą H ze wskaźnikami u dołu, wyrażającymi proste, do których się odnoszą, więc np. $H_a, H_b \dots H_p$ i o śladach pionowych, t. j. punktach, w których proste przebijają rzutnię pionową. Te ostatnie oznaczamy literą V ze wskaźnikiem u dołu, wyrażającym miano prostej, do której się odnosi, więc np. $V_a, V_b \dots V_p$.



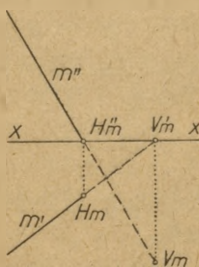
Rys. 79 a.



Rys. 79 b.



Rys. 80 a.



Rys. 80 b.

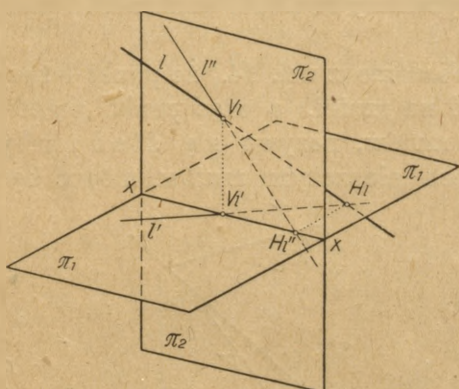
w punkcie V_p . Rzut pionowy H_p'' śladu poziomego H_p leży na osi rzutów, podobnie jak rzut poziomy V_p' śladu pionowego V_p .

Rys 80 a. uzmysławia takie położenie prostej, w którym prosta przebiega **rzutnię pionową**, leżącą poniżej osi rzutów x .

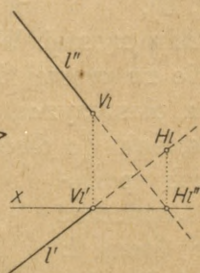


Ślad pionowy prostej m leży pod osią x , jego rzut poziomy na osi. Po sprowadzeniu obu rzutni do płaszczyzny rysunkowej otrzymamy Rys. 80 b.

Przy położeniu prostej l , podanem na Rys. 81 a., prosta

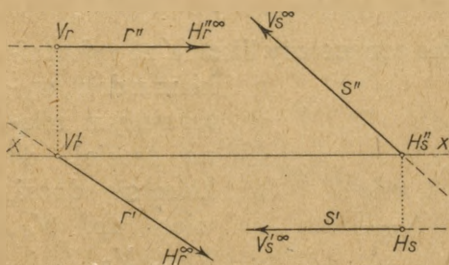


Rys. 81 a.

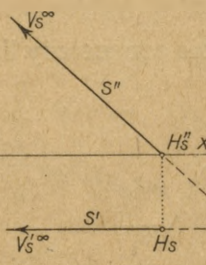


Rys. 81 b.

ta przebija rzutnię poziomą w obszarze, rozciągającym się za osią rzutów. Po sprowadzeniu obu rzutni do płaszczyzny rysunkowej, ślad poziomy H_l prostej l leży nad osią x (Rys. 81 b.).



Rys. 82 a.



Rys. 82 b.

Ślad poziomy prostej r (r' r'') równoległej do rzutni poziomej (Rys. 82 a.) jest punktem niewłaściwym zarówno prostej jak i płaszczyzny poziomej rzutów. Podobnie ślad pionowy prostej s (s' s'') równoległej do rzutni pionowej

(Rys. 82 b.) jest punktem niewłaściwym tej prostej.

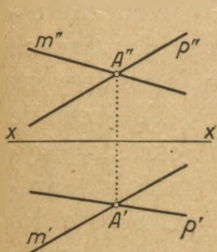
37. Dwie proste.

1. *Proste przecinające się.* Punktem wyjścia do wyznaczenia rzutów tych prostych jest pewnik, że proste te posiadają jeden punkt wspólny. Rysujemy rzuty m' i m'' prostej m , na niej przyjmujemy dowolny punkt A (A' , A''), przez który prowadzimy prostą p (p' p'') przecinającą prostą m (Rys. 83 a.).

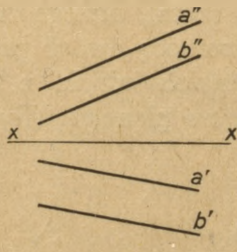
Jeżeli więc punkt przecięcia się rzutów poziomych dwóch prostych leży na wspólnej odnoszącej z punktem przecięcia się

rzutów pionowych tychże samych prostych — to proste rzutami wyznaczone przecinają się.

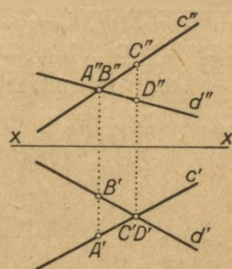
2. Proste równoległe. Ponieważ płaszczyzny, rzucające poziomo dwie proste równoległe, są równoległe, więc proste



Rys. 83 a.



Rys. 83 b.



Rys. 83 c.

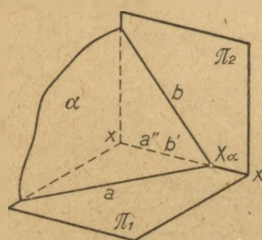
przecięcia się tych płaszczyzn z rzutnią poziomą, czyli rzuty poziome danych prostych są równoległe. Ponieważ dalej płaszczyzny, rzucające pionowo dwie proste równoległe, są również równoległe — więc i rzuty pionowe tych prostych są równoległe (Rys. 83 b.). Jeżeli tedy rzuty poziome i rzuty pionowe dwóch prostych są równoległe — to proste, rzutami tymi wyznaczone, są równoległe.

3. Proste skośne. Rzuty dwóch prostych skośnych podaje Rys. 83 c. W punkcie przecięcia się rzutów pionowych c'' i d'' prostych c i d schodzą się rzuty pionowe dwóch punktów: punktu A ($A' A'$), leżącego na prostej c (c', c'') i punktu B ($B' B''$), leżącego na prostej d (d', d''). Podobnie w punkcie przecięcia się rzutów poziomych c' i d' prostych c i d schodzą się rzuty poziome dwóch punktów, a mianowicie: punktu C ($C' C''$), leżącego na prostej c (c', c'') i punktu D ($D' D''$), leżącego na prostej d (d', d'').

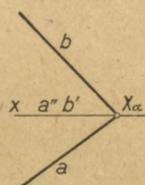
Jeżeli tedy prosta, łącząca punkt przecięcia się rzutów poziomych z punktem przecięcia się rzutów pionowych, nie jest prostopadłą do osi rzutów — to proste rzutami wyznaczone są skośne.

38. O płaszczyźnie i jej śladach. Wiadomo z ust. 22., że dwie proste przecinające się lub równoległe, prosta i punkt, względnie trzy punkty wyznaczają płaszczyznę. Znając więc rzuty tych elementów, przyjętych na płaszczyźnie, znamy położenie samej płaszczyzny, t. zn. potrafimy określić położenie

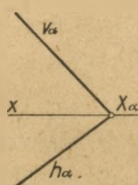
dowolnych dalszych punktów i prostych, leżących na tej płaszczyźnie. Ponieważ jednak rzuty trzech punktów, względnie dwóch dowolnie na płaszczyźnie przyjętych prostych, nie pozwalają na szybkie odtworzenie i uzmysłowienie położenia tej płaszczyzny względem rzutni, dlatego chętnie wyznaczać będziemy płaszczyzny zapomocą dwóch prostych przecinających się lub równoległych, takich jednak, z których jedna leży na rzutni poziomej a druga na pionowej (Rys. 84 a i b.). Proste te



Rys. 84 a.



Rys. 84 b.



Rys. 84 c.

określają wyraźniej, aniżeli dwie dowolne proste przecinające się lub równoległe, położenie płaszczyzny w przestrzeni i zwą

się jej śladami, gdyż uważać je można za proste przecięcia się (analogia ze „śladem“ prostej!) danej płaszczyzny z rzutniami.

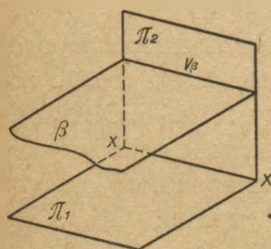
Prostą a (a') — Rys. 84 a i b. — leżącą na rzutni poziomej, nazywamy śladem poziomym, prostą zaś b (b'), leżącą na rzutni pionowej, śladem pionowym płaszczyzny α , wyznaczonej temi prostymi. Dla uproszczenia, a raczej celem lepszego oryentowania się w rysunku, oznaczać będziemy stale ślady poziome płaszczyzn — dla analogii ze śladami prostych — małą literą „ h “ z grecką literą alfabetu, określającą płaszczyznę, jako wskaźnikiem u dołu. Ślady pionowe płaszczyzn oznaczane będą małą literą „ v “ z odnośną literą alfabetu greckiego (Rys. 84 c.). Symbolem α ($h_\alpha v_\alpha$) zastępować będziemy zdanie: „płaszczyzna α , której ślad poziomy h_α i ślad pionowy v_α są dane“. Punkt przecięcia się obu śladów, leżący na osi rzutów, oznaczamy literą „ X “ ze wskaźnikiem, będącym mianem płaszczyzny, więc w przypadku przedstawionym na Rys. 84 c. X_α .

Omówimy z kolei rozmaite położenia płaszczyzn względem rzutni.

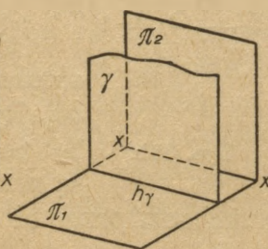
a) *Płaszczyzna dowolna.* Jeżeli płaszczyzna — jak to widzimy na Rys. 84 a, b, c., nachyloną jest do obu rzutni — to

takie położenie określamy mianem „dowolne”. W tym przypadku oba ślady przecinają się na osi rzutów w punkcie właściwym i oba nachylone są pod kątami $\geq 90^\circ$.

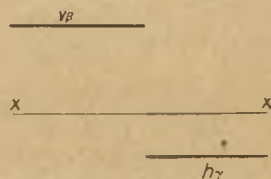
b) *Płaszczyzna równoległa do jednej z rzutni.* Ślad pionowy v_β , płaszczyzny β równoległej do rzutni poziomej, jest



Rys. 85 a.



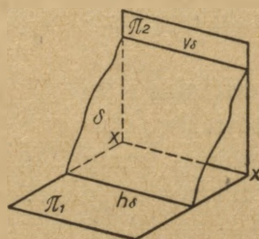
Rys. 85 b.



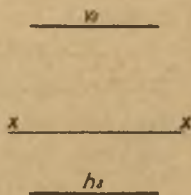
Rys. 85 c.

równoległy do osi x ; jej ślad poziomy jest prostą niewłaściwą (ust. 7.) rzutni poziomej (Rys. 85 a). Ślad poziomy h_γ , płaszczyzny γ , równoległej do rzutni pionowej, jest równoległy do osi x ; ślad pionowy leży w odległości nieograniczonej dalekiej.

c) *Płaszczyzna równoległa do osi rzutów przecina obie rzutnie wzdłuż prostych, śladów, równoległych do tej osi* (Rys. 86 a i b).



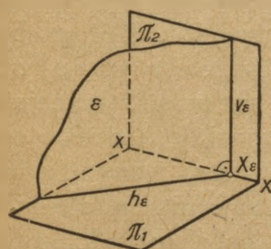
Rys. 86 a.



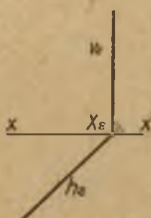
Rys. 86 b.

d) *Płaszczyzny rzucające.* Mianem tem określiliśmy

(ust. 36.) płaszczyzny prostopadłe do płaszczyzn rzutów. Ślad pionowy v_ϵ płaszczyzny ϵ , prostopadłej do rzutni poziomej, więc płaszczyzny poziomo rzucającej (Rys. 87 a i b.), jest prostopadły, a ślad poziomy h_ϵ nachylony do osi rzutów.



Rys. 87 a.



Rys. 87 b.

Rys. 88 a uzmysławia płaszczyznę pionowo rzucającą,

a Rys. 88 b podaje jej obraz w rzutach prostokątnych. Ślad poziomy jest prostopadły do osi x , ślad pionowy zawiera z nią kąt $\geq 90^\circ$.

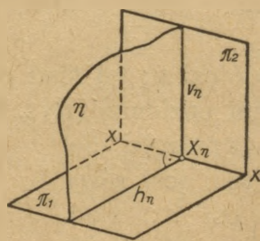
e) Płaszczyznę η prostopadłą do osi rzutów podaje Rys. 89 a i b. Oba ślady tak położonej płaszczyzny są prostopadłe do osi x .

Rys. 88 a.

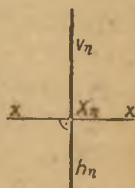
Rys. 88 b.

f) Płaszczyzna przechodzi przez oś rzutów. Oba ślady wszystkich płaszczyzn przechodzących przez oś x , schodzą się z tą osią. Do wyznaczenia położenia jednej z tych płaszczyzn, potrzebna jest znajomość jednego dowolnego punktu tej płaszczyzny.

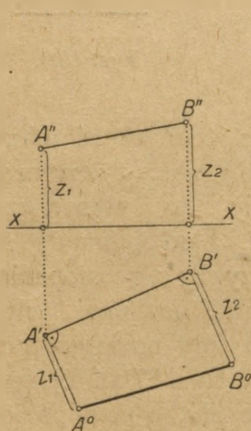
39. Kład odcinka i jego podział. Prawdziwą długość odcinka, którego rzuty na dwie płaszczyzny są dane, otrzymamy, wykonując kład



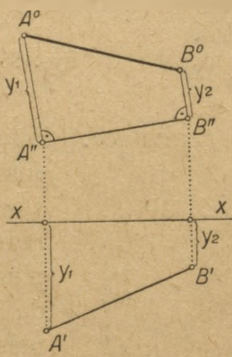
Rys. 89 a.



Rys. 89 b.



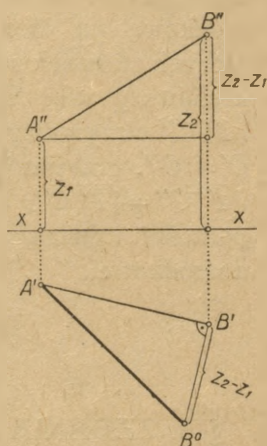
Rys. 90 a.



Rys. 90 b.

tego odcinka, podobnie, jak to uczyniliśmy w ust. 13., na jedną z rzutni. Zadanie sprowadza się więc do wykreślenia trapezu, którego bokami równoległymi są proste, rzucające punkty końcowe odcinka, jednym z boków nierównoległych jest dany odcinek, a drugim jego rzut.

W Rys. 90 a wykonaliśmy kład odcinka $\overline{AB}$ około jego rzutu $\overline{A'B'}$ na rzutnię poziomą, otrzymując odcinek $\overline{A^0B^0}$; Rys. 90 b podaje kład tego samego odcinka na rzutnię pionową. Wskaźniki „o”, umieszczone u dołu liter, oznaczają będą w ciągu całego wykładu punkty, względnie proste, po dokonanych kładzie. Zamiast na płaszczyznę rzutów, dokonać można kładu odcinka na płaszczyznę równoległą do rzutni, poprowadzoną przez jeden z punktów końcowych odcinka. W miejsce trapezu wchodzi wówczas trójkąt, jak o tem dostatecznie wyraźnie poucza Rys. 91.

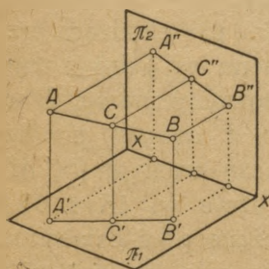


Rys. 91.

Wykazane w ust. 15. twierdzenie, odnoszące się do rzutu poziomego odcinka, a opiewające, że stosunek podziału odcinka w przestrzeni wskutek rzutu prostokątnego na płaszczyznę poziomą nie zmienia się, odnosi się oczywiście i do rzutu pionowego odcinka. W istocie bowiem czytamy bezpośrednio z Rys. 92.:

$$\overline{A'C'} : \overline{C'B'} = \overline{AC} : \overline{CB} = \overline{A''C''} : \overline{C''B''}$$

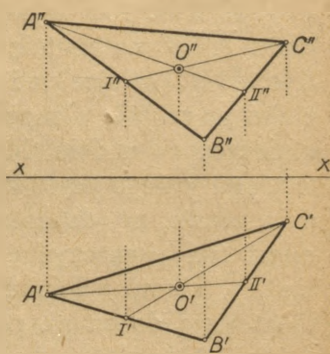
Podzieliwszy więc rzut poziomy danego odcinka w pewnym stosunku i odniósłszy punkty podziału na rzut pionowy, otrzymamy rzuty punktów, dzielących ten odcinek w przestrzeni w tym samym stosunku.



Rys. 92.

40. Zadanie. Dane są rzuty trójkąta ABC ; wyznaczyć rzuty jego środka ciężkości (Rys. 93.). Wiadomo, że proste, łączące środki boków trójkąta z jego wierzchołkami, czyli t. zw. dośrodkowe, przecinają się w jednym punkcie, zwanym środkiem ciężkości tego trójkąta. W myśl tego, cośmy powiedzieli w ustępie poprzednim, rzut poziomy O' środka ciężkości O jest punktem przecięcia się O' dośrodkowych $I'C'$ i $II'A'$ trójkąta $A'B'C'$, a rzut pionowy O'' punktem, w którym przecinają się dośrodkowe $I''C''$ i $II''A''$

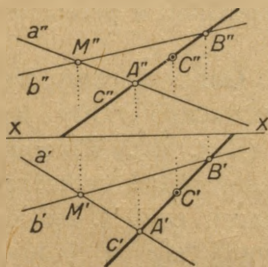
rzutu pionowego $A'' B'' C''$ trójkąta $A B C$. Wiadomo, że środek ciężkości trójkąta dzieli każdą dośrodkową na dwa takie odcinki, których stosunek wynosi 1:2. Wykreśliwszy więc dośrodkowe $I' C'$ i $I'' C''$ otrzymamy na nich punkty O' i O'' , przyjmując $I' O' = \frac{1}{3} I' C'$ i $I'' O'' = \frac{1}{3} I'' C''$, a wtedy odpada potrzeba kreślenia rzutów drugiej dośrodkowej.



Rys. 93.

§ 3. ZADANIA ODNOSZĄCE SIĘ DO WZAJEMNYCH POŁOŻEŃ PUNKTÓW, PROSTYCH I PŁASZCZYZN.

41. Proste i punkty na płaszczyźnie. Dwie przecinające się proste a ($a' a''$) i b ($b' b''$) wyznaczają płaszczyznę φ . Jeżeli punkt A ($A' A''$) (Rys. 94.), obrany na prostej a ($a' a''$), połączymy z punktem B ($B' B''$), przyjętym na prostej b ($b' b''$), to punktami A i B wyznaczona prosta c ($c' c''$) leży na płaszczyźnie φ . Jeden z pewników geometrycznych powiada bowiem, że gdy prosta ma z płaszczyzną dwa punkty wspólne, to ma z nią wszystkie punkty wspólne, czyli, jak mówimy, na tej płaszczyźnie leży.



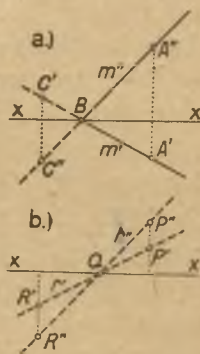
Rys. 94.

Płaszczyzna ψ_1 , przechodząca przez oś rzutów, wyznaczona jest jednym punktem (ust. 38. f). Dowolny punkt B osi rzutów, połączony z danym punktem A ($A' A''$), wyznacza prostą m ($m' m''$), leżącą na płaszczyźnie ψ_1 (Rys. 95 a).

Część prostej m' leżąca pod osią rzutów i część prostej m'' znajdująca się nad tą osią, są rzutami tej części prostej m , która leży na płaszczyźnie ψ_1 w pierwszej części przestrzeni; część prostej m' leżąca nad osią x i część prostej m'' , która leży pod osią rzutów, są rzutami tej części prostej m , która znajduje się na płaszczyźnie ψ_1 w trzeciej części przestrzeni.

Punkt C (C' C'') leży więc na płaszczyźnie ψ_1 , wyznaczonej punktem A (A' A'') i osią rzutów, w trzeciej części przestrzeni.

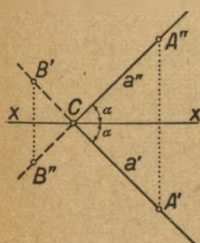
Miedzy płaszczyznami, przechodzącymi przez oś rzutów, znajdują się i takie, które rozciągają się w drugiej i czwartej części przestrzeni. Podobnie jak w przypadku poprzednim, płaszczyzna taka wyznaczona jest przez punkt leżący, jednak nie w pierwszej lub trzeciej, ale w drugiej i czwartej części przestrzeni. Prosta r (r' r'') (Rys. 95 b), łącząca dowolny punkt Q osi rzutów z przyjętym w drugiej części przestrzeni punktem P (P' P''), leży na płaszczyźnie ψ_2 , rozciągającej się w drugiej i czwartej części przestrzeni, a wyznaczonej osią rzutów i punktem P (P' P''). Części prostych r' i r'' , leżące nad osią x , są rzutami tej części prostej r , która znajduje się w drugim obszarze przestrzeni na płaszczyźnie ψ_2 . Części prostych r' i r'' , leżące pod osią rzutów, są rzutami części prostej r , znajdującej się w czwartym obszarze przestrzeni. Jeżeli na płaszczyźnie ψ_2 wyznaczyć mamy punkt, leżący w czwartej części przestrzeni, to najpierw obieramy na płaszczyźnie ψ_2 prostą r (r' r''), a na niej dopiero punkt R (R' R''), którego rzuty leżą pod osią x .



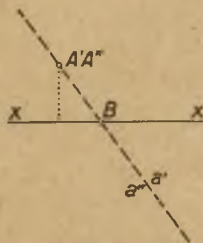
Rys. 95 a i b.

42. Płaszczyzny dwusieczne. Płaszczyzny δ_I i δ_{II} przechodzące przez oś rzutów, których punkty są równo oddalone od obu rzutów, nazywamy płaszczyznami dwusiecznymi.

Płaszczyzna δ_I , przechodząca przez Ia i $IIIa$ część przestrzeni, wyznaczona jest osią rzutów i punktem, którego „wysokość” równa jest „głębokości”, a który, jak np. punkt A (A' A'') (Rys. 96.), leży w pierwszej, albo jak punkt B (B' B'') w trze-



Rys. 96.



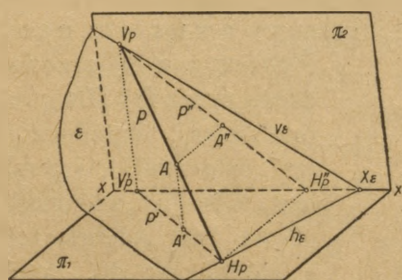
Rys. 97.

ciej części przestrzeni. Przez połączenie dowolnego punktu C (C' C'') osi rzutów z punktem A (A' A'') lub B (B' B''), otrzymamy prostą a (a' a''), leżącą na płaszczyźnie dwusiecznej δ_I . Oczywiście, że $\angle a' x = \angle a'' x$, więc: dwie proste,

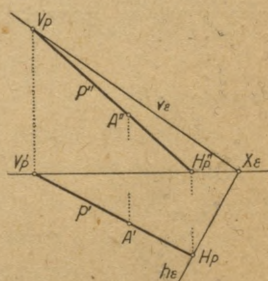
przecinające się na osi rzutów i zamykające z nią te same kąty, względnie dwie proste równoległe do osi rzutów i równo od niej oddalone, są rzutami prostej leżącej na płaszczyźnie dwusiecznej δ_I , rozciągającej się w pierwszym i trzecim obszarze przestrzeni.

Punkt równo oddalony od obu rzutni, znajdujący się w drugiej lub czwartej części przestrzeni i oś rzutów, wyznaczają płaszczyznę δ_{II} , rozciągającą się w drugim i czwartym obszarze przestrzeni. Rzut poziomy A' każdego punktu A (Rys. 97.) płaszczyzny δ_{II} nakrywa się z rzutem pionowym A'' tego punktu, gdyż jego „wysokość” równa jest „głębokości”. Każdy punkt, leżący nad lub pod osią rzutów, uważać można za skupienie rzutu poziomego i pionowego punktu, leżącego na płaszczyźnie δ_{II} . Rzuty a' i a'' prostej a , leżącej na płaszczyźnie δ_{II} , zejdą się na jednej prostej. Prosta, przecinająca oś rzutów albo do niej równoległa uważana być może zawsze za skupienie obu rzutów prostej, leżącej na płaszczyźnie dwusiecznej δ_{II} , rozciągającej się w drugim i czwartym obszarze przestrzeni.

43. Proste i punkty na płaszczyznach, wyznaczonych śladami. Niechaj daną będzie płaszczyzna ε , wyznaczona swoimi śladami h_ε i v_ε , czyli jak piszemy, płaszczyzna ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$) (Rys. 98.). Punkt H_p , przyjęty na śladzie poziomym h_ε , leży



Rys. 98.



Rys. 99.

na płaszczyźnie ε , podobnie jak punkt V_p obrany na śladzie pionowym v_ε . Prosta p , łącząca punkty H_p i V_p , leży więc na płaszczyźnie ε .

Po sprowadzeniu płaszczyzn rzutów do jednej płaszczyzny (Rys. 99), otrzymamy rzuty p' i p'' prostej p , leżącej na płasz-

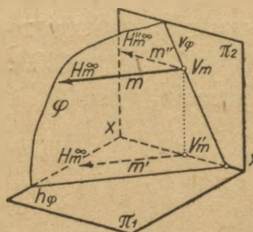
czyźnie ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$), łącząc odpowiednie rzuty punktów H_p i V_p . W szczególności rzut poziomy p' otrzymamy przez połączenie punktów H_p i V'_p , zaś rzut pionowy p'' przez połączenie punktów H'_p i V_p . Punkty H_p i V_p , leżące na rzutniach i równocześnie na prostej p , są śladami tej prostej.

Zatem: gdy prosta leży na płaszczyźnie, to ślady tej prostej leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny.

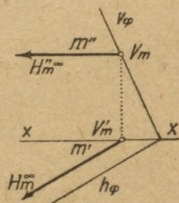
Punkt A ($A' A''$), obrany na prostej p ($p' p''$) (Rys. 99.), leży na płaszczyźnie ε ($h_\varepsilon, v_\varepsilon$).

Jeśli chodzi o przyjęcie dowolnego punktu na płaszczyźnie, wyznaczonej zapomocą śladów, to obieramy na tej płaszczyźnie prostą, a na niej dopiero punkt.

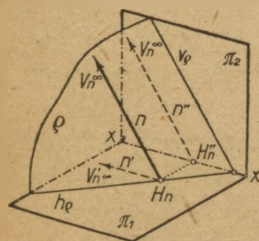
Proste tworzące. Prosta m ($m' m''$), leżąca na płaszczyźnie φ ($h_\varphi v_\varphi$) (Rys. 100 a i b), jest równoległą do rzutni poziomej, ślad tedy poziomy H_m tej prostej leży w odległości nieograniczonej na śladzie poziomym h_φ płaszczyzny φ , a co zatem idzie, rzut poziomy m' prostej m jest do śladu h_φ równoległy. Każda prosta, leżąca na płaszczyźnie, a równoległa do rzutni poziomej, jest równoległą do śladu poziomego danej płaszczyzny i nazywa się prostą poziomą tej płaszczyzny.



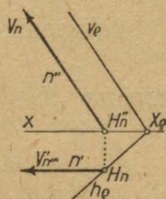
Rys. 100 a.



Rys. 100 b.



Rys. 101 a.



Rys. 101 b.

Prosta n ($n' n''$), leżąca na pł. ρ ($h_\rho v_\rho$), jest równoległą do rzutni pionowej (Rys. 101 a i b). Ślad pionowy V_n tej prostej leży w odległości nieograniczonej

dalekiej na rzutni pionowej i na śladzie pionowym v_ρ płaszczyzny ρ , rzut tedy pionowy n'' prostej n jest równoległy do śladu pionowego v_ρ .

Proste, leżące na płaszczyźnie i równoległe do rzutni pionowej, są równoległe do śladu pionowego danej płaszczyzny i zwą się prostami czołowymi tej płaszczyzny. Proste poziome i czołowe płaszczyzny określamy także mianem prostych tworzących tej płaszczyzny.

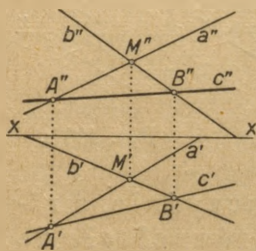
Przez ruch prostej m (Rys. 100 a), stale równoległej do rzutni poziomej i do swego pierwotnego położenia, utworzy się płaszczyzna φ , jeżeli ślad pionowy V_m tej prostej porusza się po śladzie pionowym v_φ płaszczyzny φ .

Prosta n , poruszając się równoległe do swego pierwotnego położenia (Rys. 101.), zakreśli płaszczyznę ρ , jeśli ślad poziomy H_n prostej n przebiega ślad poziomy h_ρ płaszczyzny ρ .

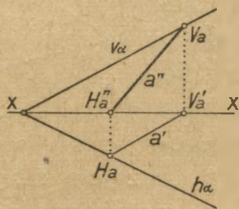
44. Zadania. 1. Dany jest jeden rzut prostej, leżącej na płaszczyźnie; wyznaczyć rzut drugi.

a) Płaszczyzna wyznaczona jest dwiema prostymi a (a' a'') i b (b' b'') (Rys. 102.).

Prosta c' przecina proste a' i b' w punktach A' i B' ,



Rys. 102.



Rys. 103.

które są rzutami poziomymi punktów, leżących równocześnie na prostej c i na pł. (a , b). Wyznamy rzuty pionowe A'' i B'' punktów A i B , to prosta c'' , łą-

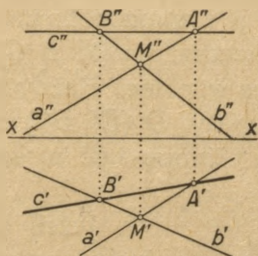
cząca punkty A'' i B'' , jest szukanym rzutem pionowym prostej c .

b) Płaszczyzna wyznaczona jest zapomocą śladów (Rys. 103.).

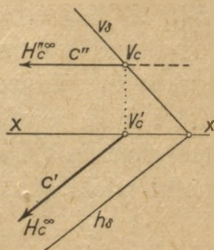
Przy założeniu, że dany rzut poziomy a' jest rzutem prostej a , leżącej na płaszczyźnie α , punkt przecięcia się H_a rzutu a' ze śladem h_α jest śladem poziomym prostej a — rzut pionowy H''_a tego śladu leży na osi rzutów. Punkt przecięcia się V'_a prostej a' z osią rzutów jest rzutem poziomym śladu pionowego tej prostej, który to ślad znajdziemy na śladzie v_α . Przez połączenie punktów H''_a i V_a otrzymujemy żądany rzut pionowy a'' prostej a .

c) Dany rzut prostej jest rzutem pionowym c'' i równoległym do osi x .

Gdy płaszczyznę wyznaczają dwie proste a (a' a'') i b (b' b'') (Rys. 104.), to prosta c' , łącząca punkty A' i B' , jest szukany rzutem. Prosta c (c' c'') jest poziomą płaszczyzny (a , b).



Rys. 104.

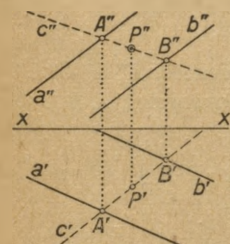


Rys. 105.

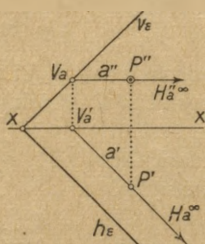
Gdy płaszczyzna δ wyznaczona jest zapomocą śladów, to rzut poziomy c' przejdzie przez punkt V'_c , równolegle do do śladu poziomego h_δ (Rys. 105.).

2. Znany jest rzut poziomy P' punktu P , leżącego na danej płaszczyźnie; wyznaczyć rzut pionowy P'' .

Przez dany rzut poziomy P' punktu P prowadzimy prostą, którą uważamy za rzut poziomy prostej, leżącej na danej płaszczyźnie; wykreślimy rzut pionowy tej prostej (ust. 41.), a linia odnosząca wyznaczy rzut pionowy P'' punktu P .



Rys. 106.



Rys. 107.

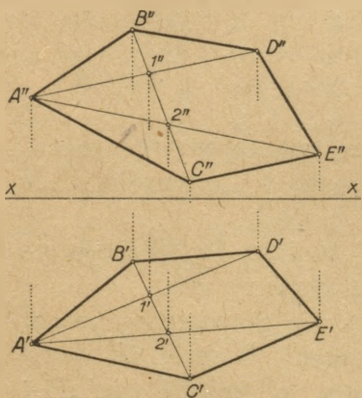
W Rys. 106. płaszczyzna wyznaczona jest zapomocą dwóch prostych równoległych a (a' a'') i b (b' b''), w Rys. 107. zapomocą śladów h_ϵ i v_ϵ . W tym drugim przypadku uży-

liśmy do wyznaczenia rzutu pionowego P'' punktu P prostej poziomej płaszczyzny ϵ .

3. Wyznaczyć rzuty pięciokąta płaskiego, leżącego dowolnie w przestrzeni.

Z pięciu wierzchołków żadanego wielokąta trzy np. A (A' A''), B (B' B'') i C (C' C'') przyjąć można dowolnie, trzy punkty bowiem wyznaczają płaszczyznę (ust. 22.). Dwa dalsze wierzchołki D i E obrać musimy na płaszczyźnie,

trzema pierwszymi wyznaczonej. W tym celu na jednym boku trójkąta np. BC (Rys. 108.) przyjmujemy dwa punkty 1 ($1'$ $1''$) i 2 ($2'$ $2''$) i połączymy je z wierzchołkiem A . Otrzymane proste $1A$ i $2A$ leżą na płaszczyźnie (ABC), gdyż mają po dwa punkty z tą płaszczyzną wspólne. Każdy zatem punkt prostych $1A$ i $2A$, a więc punkty D (D' D'') i E (E' E'') leżą na płaszczyźnie (ABC) i mogą być uważane za dalsze wierzchołki wielokąta.



Rys. 108.

Jeżeli dane są ślady h_φ i v_φ płaszczyzny wielokąta, to rzuty jego wyznaczymy, kreśląc rzuty punktów leżących na rzutach prostych, przyjętych na tej płaszczyźnie.

W Rys. 109. przyjęliśmy na płaszczyźnie φ (h_φ v_φ) dwie proste poziome a (a' a'') i b (b' b'') i jedną czołową c (c' c''), za pośrednictwem których wyznaczaliśmy rzuty wierzchołków pięciokąta.

45. Ćwiczenia.

1. Dana jest dowolna płaszczyzna α (h_α v_α) i rzut pionowy $A''B''C''D''$ czworokąta; wykreślić rzut poziomy $A'B'C'D'$ tak, aby czworokąt $ABCD$ leżał na płaszczyźnie α .

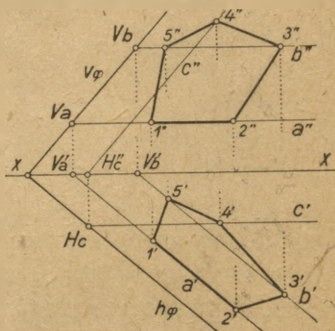
2. Rozwiązać zadanie powyższe dla położen płaszczyzn i rzutów czworokątów, określonych Rysunkami 110 a—l.

3. Dane są rzuty dwóch prostych l i m , przecinających się w punkcie A . Na płaszczyźnie $\alpha = (l, m)$ leży pięciokąt $MNST$; wykreślić rzut pionowy tego pięciokąta, jeżeli rzut poziomy $M'N'R'S'T'$ jest dany.

4. Rozwiązać zadanie poprzednie, jeżeli proste l i m mają położenie następujące:

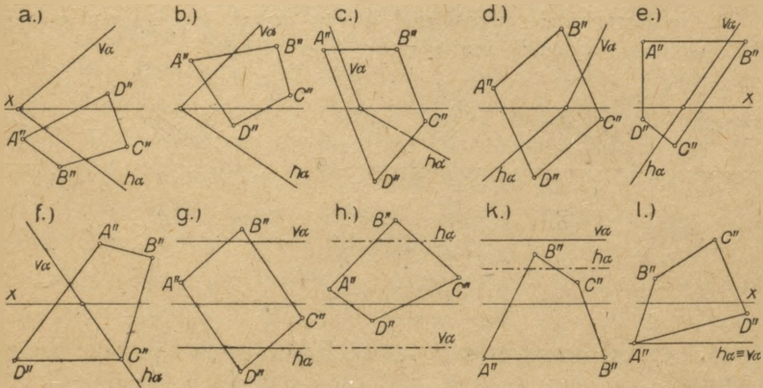
- $l \parallel \pi_1$, m dowolne;
- $l \parallel \pi_1$, $m \parallel \pi_2$;
- $l \parallel \pi_1$, $m \parallel x$;
- $l \parallel \pi_2$, m dowolne;
- $l \parallel \pi_1$, $m \perp \pi_2$.

5. Dane są rzuty prostych równoległych l i m , które wyznaczają



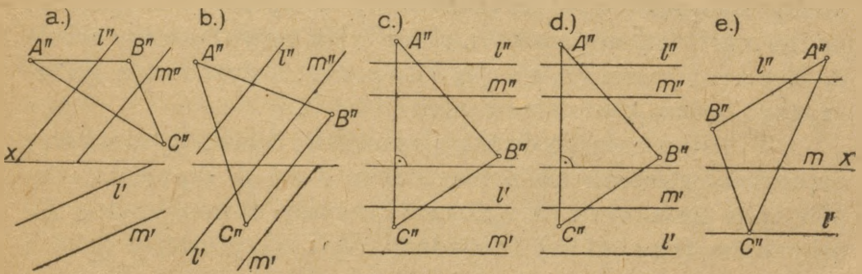
Rys. 109.

płaszczyznę α i rzut pionowy $A'' B'' C''$ trójkąta $A B C$, leżącego na tej płaszczyźnie; wyznaczyć rzut poziomy $A' B' C'$ tego trójkąta.



Rys. 110 a—l.

6. Rozwiązać zadanie powyższe, jeżeli położenie danych elementów określone jest Rysunkami 111 a—e.



Rys. 111 a—e.

7. Na płaszczyźnie $\alpha \equiv (l, A)$, wyznaczony prostą l (l' l'') i punktem A (A' A''), leży czworokąt $PQRS$. Wykreślić rzut pionowy tego czworokąta, skoro jego rzut poziomy $P'Q'R'S'$ jest dany.

8. Rozwiązać zadanie poprzednie, jeżeli prosta l zajmuje położenia:

a) $l \parallel \pi_1$;

b) $l \parallel \pi_2$;

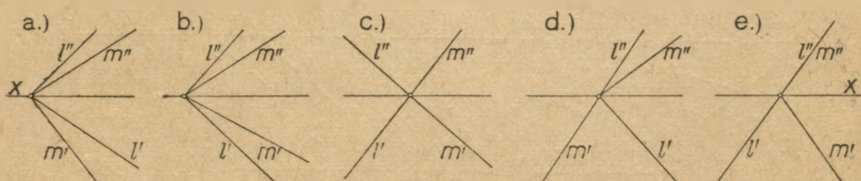
c) $l \parallel x$;

d) l leży na pł. dwusiecznej δ_I , względnie δ_{II} , a dla każdego z tych położení punkt A znajduje się w I., II., III. i IV. części przestrzeni.

9. Płaszczyzna α wyznaczona jest dwiema prostymi przecinającymi się l i m , których położenie określają Rysunki 112 a—e:

Wyznaczyć rzut pionowy trójkąta leżącego na płaszczyźnie α , gdy jego rzut poziomy jest dany.

10. Na płaszczyźnie dwusiecznej δ_l leży trójkąt, którego rzut poziomy $A'B'C'$ jest dany; wykreślić rzut pionowy tego trójkąta.



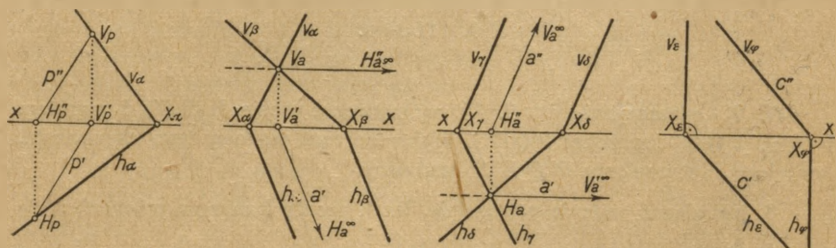
Rys. 112 a—e.

46. O płaszczyznach przechodzących przez proste i punkty.

a) *Płaszczyzny przechodzące przez jedną prostą.* Wiadomo (ust. 7.), że przez jedną prostą poprowadzić można dowolną, nieograniczoną ilość płaszczyzn, stanowiących t. zw. pęk płaszczyzn, dla którego owa prosta jest osią.

Jeżeli oś pęku płaszczyzn jest dana, to poszczególne elementy tego pęku wyznaczyć możemy w sposób następujący: na osi p przyjmiemy punkt A , przez który poprowadzimy proste $a, b, c, \dots$; proste $(p, a), (p, b), (p, c) \dots$ wyznaczają płaszczyzny, będące elementami pęku o osi p .

W odniesieniu do dwóch płaszczyzn rzutów, wyznaczamy najczęściej elementy pęku płaszczyzn o osi p zapomocą śladów tych płaszczyzn. W tym celu łączymy dowolny punkt X_α osi rzutów (Rys. 113 a) ze śladami H_p i V_p prostej p ($p' p''$)



Rys. 113 a—d.

i otrzymujemy ślady h_α i v_α płaszczyzny α . Proste bowiem h_α i v_α , jako dwie proste przecinające się w punkcie X_α , wy-

znaczącą płaszczyznę α ; prosta p leży na tej płaszczyźnie, ma bowiem z nią dwa punkty wspólne, a mianowicie punkt H_p ($H_p H''_p$) i V_p ($V_p V'_p$).

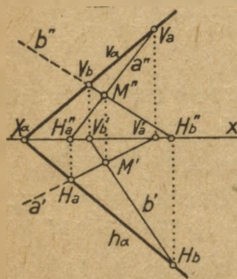
Zatem: ślady płaszczyzny przechodzącej przez prostą, przechodzą przez ślady tej prostej.

Jeżeli prosta a ($a' a''$) (Rys. 113 b) jest równoległą do rzutni poziomej, więc jej ślad poziomy H_a znajduje się w odległości nieograniczonej dalekiej, to ślady poziome $h_\alpha, h_\beta \dots$ płaszczyzn, przechodzących przez prostą a , są równoległe do rzutu poziomego a' tej prostej. Ślady pionowe $v_\alpha, v_\beta \dots$ przejdą przez punkt V_a jako ślad pionowy prostej a .

Ślady pionowe $v_\gamma, v_\delta \dots$ płaszczyzn $\gamma, \delta \dots$ przesuniętych przez prostą a ($a' a''$), równoległą do rzutni pionowej (Rys. 113 c), są równoległe do rzutu pionowego a'' tej prostej.

Z pomiędzy płaszczyzn, przechodzących przez prostą c , wyróżnić należy płaszczyzny rzucające tę prostą (ust. 36.): płaszczyznę poziomo rzucającą ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$) i pionowo rzucającą φ ($h_\varphi v_\varphi$) (Rys. 113 d).

b) *Wykreślenie śladów płaszczyzny wyznaczonej zapomocą dwóch prostych lub trzech punktów.* W ustępie 38. zauważyliśmy, że położenie płaszczyzny w przestrzeni chętniej wyznaczamy zapomocą jej śladów, aniżeli prostych dowolnych. Bardzo też często zachodzi potrzeba wykreślenia śladów płaszczyzny, wyznaczonej przez dwie proste przecinające się, równoległe, przez prostą i punkt lub przez trzy punkty.

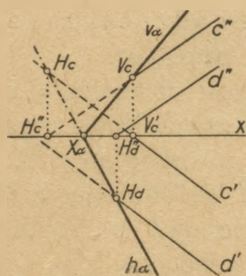


Rys. 114.

Konstrukcja śladów płaszczyzny α , poprowadzonej przez dwie proste a ($a' a''$) i b ($b' b''$) (Rys. 114.), opiera się na twierdzeniu, że ślady płaszczyzny przechodzącej przez prostą, przechodzą przez ślady tej prostej (ust. 46 a.). Prosta więc h_α , łącząca ślady poziome H_a i H_b prostych a i b , jest śladem poziomym, prosta v_α , łącząca ślady pionowe V_a i V_b danych prostych, jest śladem pionowym płaszczyzny α . Ślady h_α i v_α przetną się w punkcie X_α na osi rzutów. Gdy punkt X_α leży w obrębie płaszczyzny rysunkowej, to nie zachodzi potrzeba wyznaczenia wszystkich czterech śladów prostych — trzy ślady wystarczą, czwarty zastąpiony będzie punktem X_α .

Gdy punkt X_α leży w obrębie płaszczyzny rysunkowej, to nie zachodzi potrzeba wyznaczenia wszystkich czterech śladów prostych — trzy ślady wystarczą, czwarty zastąpiony będzie punktem X_α .

W Rys. 115. wyznaczyliśmy ślady płaszczyzny α , przechodzącej przez dwie proste równoległe c (c' c'') i d (d' d''). Ślad poziomy H_d połączyliśmy ze śladem H_c , leżącym w drugiej części przestrzeni, prostą h_α , będącą śladem poziomym płaszczyzny α . Otrzymany punkt X_α i ślad V_c wyznaczają jej ślad pionowy v_α .



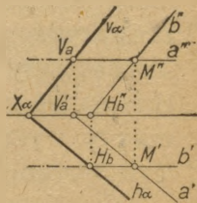
Rys. 115.

Jeżeli chodzi o wykreślenie śladów płaszczyzny, wyznaczonej zapomocą trzech punktów np. A , B , C , to łączymy punkty A z B i np. A z C , otrzymując tym sposobem dwie proste przecinające się, których ślady wyznaczają ślady płaszczyzny. Połączywszy punkt A z B , możemy przez punkt C poprowadzić prostą równoległą do poprzedniej i wykreślić ślady płaszczyzny, wyznaczonej przez dwie proste równoległe.

47. Zadania.

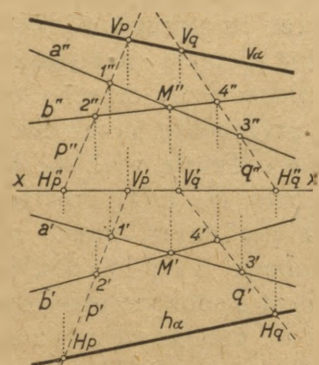
1. Wykreślić ślady płaszczyzny wyznaczonej przez dwie proste przecinające się: poziomą a (a' a'') i czołową b (b' b'') (Rys. 116.).

Ślad poziomy h_α płaszczyzny α jest równoległy do rzutu poziomego a' i przechodzi przez ślad H_b ; ślad pionowy v_α jest równoległy do rzutu pionowego b'' prostej b i przechodzi przez ślad V_a .



Rys. 116.

2. Wykreślić ślady płaszczyzny wyznaczonej przez dwie proste, których ślady nie leżą w obrębie płaszczyzny rysunkowej..

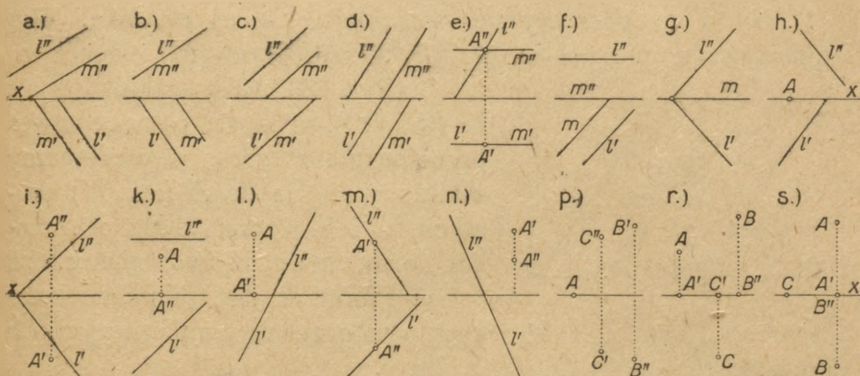


Rys. 117.

Na płaszczyźnie α , wyznaczonej prostymi a (a' a'') i b (b' b''), obieramy dwie proste p (p' p'') i q (q' q'') (Rys. 117.), których ślady leżą w obrębie rysunku. Ślady poziome H_p i H_q tych prostych wyznaczają ślad poziomy h_α , zaś ślady pionowe V_p i V_q określają położenie śladu pionowego v_α płaszczyzny α .

48. Ćwiczenie.

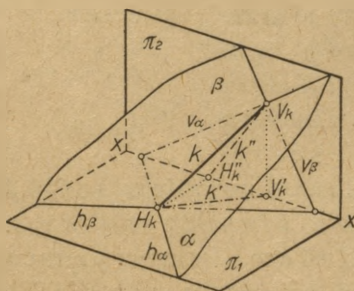
Wykreślić ślady płaszczyzny, wyznaczonej dwiema prostymi l, m , prostą l i punktem A , względnie trzema punktami A, B, C w przypadkach podanych na Rysunkach 118 a—s.



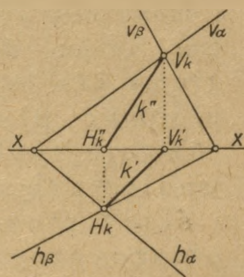
Rys. 118 a—s.

49. O płaszczyznach przecinających się i równoległych.

a) *Dwie płaszczyzny przecinające się.* Wiadomo, że gdy dwie płaszczyzny posiadają dwa punkty wspólne, to posiadają całą prostą wspólną, a mianowicie prostą, łączącą owe dwa punkty. Tę prostą wspólną obu płaszczyzn nazwaliśmy w ust. 27. ich krawędzią. Weźmy pod uwagę płaszczyzny α i β nachylone do obu rzutni (Rys. 119 a), to prosta k , łącząca punkt przecięcia się H_k śladów poziomych h_α i h_β obu pł. z punktem



Rys. 119 a.

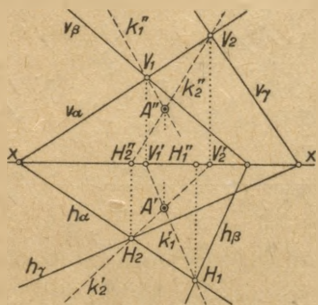


Rys. 119 b.

V_k , który powstał jako przecięcie się śladów pionowych v_α i v_β płaszczyzn α i β , jest krawędzią tych płaszczyzn. Ponieważ punkt H_k jest śladem poziomym, a punkt V_k śladem pionowym prostej k , więc wykreślenie rzutów krawędzi dwóch płaszczyzn sprowadza się do wyznaczenia rzutów prostej, której ślady są dane. Rzut pionowy H'_k śladu poziomego (Rys. 119 b) łączymy ze śladem

pionowym V_k , otrzymując rzut pionowy k'' krawędzi k ; prosta k' , łącząca ślad poziomy H_k z rzutem poziomym V'_k śladu pionowego, jest rzutem poziomym krawędzi płaszczyzn α ($h_\alpha v_\beta$) i β ($h_\beta v_\beta$).

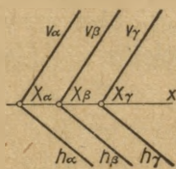
b) *Trzy płaszczyzny przecinają się w punkcie.* Wyznaczywszy prostą k_1 ($k'_1 k''_1$) jako krawędź płaszczyzn α i β (Rys. 120.), a następnie prostą k_2 ($k'_2 k''_2$), w której płaszczyzna α przecina płaszczyznę γ , otrzymamy punkt przecięcia się A ($A' A''$) prostych k_1 i k_2 , przez który przechodzi także krawędź k_3 płaszczyzn β i γ . Punkt A jest punktem leżącym równocześnie na płaszczyznach α , β i γ .



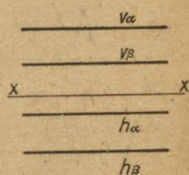
Rys. 120.

c) *Płaszczyzny równoległe.* Dwie płaszczyzny, nie mające żadnego wspólnego punktu właściwego, okre-

ślamy mianem płaszczyzn równoległych. Wiadomo, że dwie płaszczyzny równoległe przecięte trzecią, tworzą z nią krawędzie równoległe. Ponieważ ślady poziome $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ (Rys. 121.) płaszczyzn $\alpha \parallel \beta \parallel \gamma$ są prostymi przecięcia się tych płaszczyzn z rzutnią poziomą, ślady zaś pionowe $v_\alpha, v_\beta, v_\gamma \dots$ są prostymi, w których rzutnia pionowa płaszczyzny te przecina, więc: ślady poziome jak też i ślady pionowe płaszczyzn równoległych, są równoległe (Rys. 121.). I nawzajem, jeśli ślady poziome i ślady pionowe płaszczyzn są równoległe, to płaszczyzny śladami tymi wyznaczone są równoległe. Wyjątek od tej reguły stanowią płaszczyzny równoległe do osi rzutów x (Rys. 122.), których ślady są zawsze równoległe, ale płaszczyzny przenikają się w ogólności podług prostej właściwej.



Rys. 121.

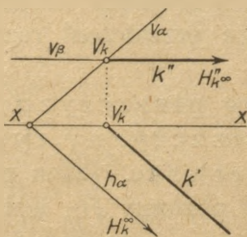


Rys. 122.

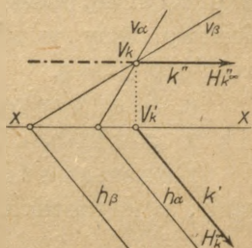
d) *Przykłady wyznaczania krawędzi dwóch płaszczyzn.*

1. Płaszczyzna α ($h_\alpha v_\alpha$) jest nachylona do obu rzutni, płaszczyzna β jest równoległą do

rzutni poziomej (Rys. 123.). Ślad poziomy płaszczyzny β jest prostą niewłaściwą na rzutni poziomej, ślad poziomy H_k szukanej krawędzi jest więc punktem niewłaściwym, leżącym na śladzie h_α płaszczyzny α . Szukana krawędź jest zatem równoległa do rzutni poziomej, gdyż posiada na tej rzutni jeden punkt niewłaściwy.



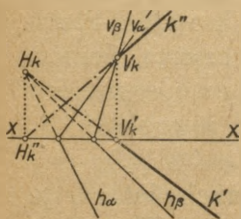
Rys. 123.



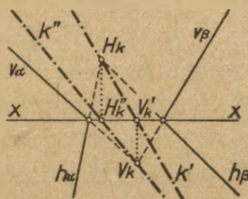
Rys. 124.

2. Dwa równoimienne ślady płaszczyzn są równoległe (Rys. 124.). I w tym przypadku ślad poziomy krawędzi jest jej punktem niewłaściwym, leżącym na rzutni poziomej, krawędź więc obu płaszczyzn jest równoległa do tej rzutni.

3. Położenie płaszczyzn α i β określone jest Rys. 125. Ślad poziomy H_k krawędzi k ($k' k''$) leży w tym



Rys. 125.



Rys. 126.



Rys. 127.

wypadku w obszarze przestrzeni, rozciągającym się poza rzutnię pionową.

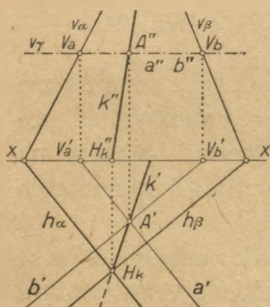
4. Ślady płaszczyzn nie przecinają się w pierwszej części przestrzeni (Rys. 126.). Ślady poziome h_α i h_β płaszczyzn α i β , przecinają się na rzutni poziomej, leżącej poza rzutnią pionową. Ślady pionowe v_α i v_β danych płaszczyzn przecinają się w punkcie V_k , który jest śladem pionowym szukanej krawędzi, a który leży pod płaszczyzną poziomą. Krawędź k ($k' k''$) leży poza obszarem pierwszej części przestrzeni, jest więc niewidoczną, czemu daliśmy

wyraz kreśląc rzuty tej krawędzi liniami złożonymi z punktów i kresek.

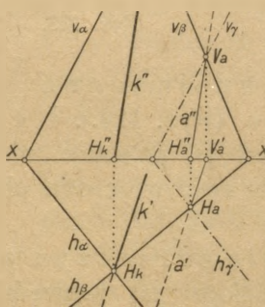
5. Dwie płaszczyzny poziomo rzucające. W przypadku podanym na Rys. 127. krawędź, będąca prostą pionową, leży w obszarze przestrzeni rozciągającym się za rzutnią pionową.

6. Ślady pionowe płaszczyzn nie przecinają się w granicach płaszczyzny rysunkowej.

Rozwiązanie pierwsze. Jeden punkt szukanej krawędzi, a mianowicie ślad poziomy H_k , jest znany (Rys. 128.).



Rys. 128.



Rys. 129.

Drugi punkt krawędzi otrzymamy przy pomocy trzeciej płaszczyzny γ , tnącej dwie dane wzdłuż prostych $a(a'a'')$ i $b(b'b'')$. Punkt przecięcia się A prostych a i b leży na szukanej krawędzi. Płaszczyzna pomoc-

nicza γ może być oczywiście dowolną, względ na uproszczenie konstrukcyi podyktował nam płaszczyznę γ równoległą do rzutni poziomej.

Rozwiązanie drugie. Do jednej z danych płaszczyzn, np. α , prowadzimy płaszczyznę równoległą γ ($h_\gamma v_\gamma$) (Rys. 129.), wyznaczmy krawędź $a(a'a'')$ tej płaszczyzny z drugą daną płaszczyzną, otrzymując tym sposobem kierunek szukanej krawędzi.

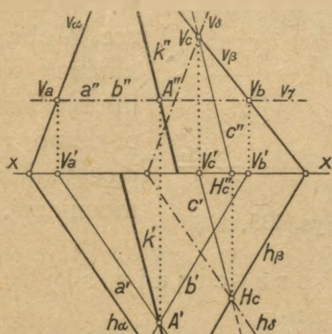
7. Zarówno ślady poziome jak i pionowe nie przecinają się w granicach rysunku.

Zadanie rozwiązać możemy w dwojaki sposób:

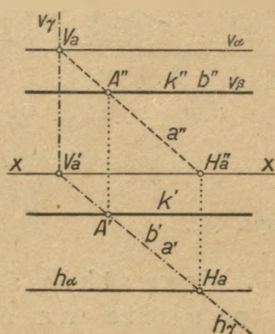
10. Dwie dane płaszczyzny α i β przecinamy dwiema płaszczyznami pomocniczymi γ i δ . Płaszczyzny α , β i γ , przecinają się w punkcie A , płaszczyzny α , β i δ w punkcie B . Prosta k , łącząca punkty A i B , jest krawędzią płaszczyzn α i β .

20. Dane płaszczyzny α i β przecinamy płaszczyzną pomocniczą γ (Rys. 130.) i wyznaczamy punkt przecięcia się

$A (A' A'')$ tych trzech płaszczyzn. W miejsce drugiego punktu krawędzi płaszczyzn α i β , znajdziemy kierunek tej krawędzi. W tym celu przeprowadzimy płaszczyznę δ ($h_\delta v_\delta$), równoległą do jednej z danych płaszczyzn, np. do α , wyznaczmy



Rys. 130.



Rys. 131.

krawędź c ($c' c''$) płaszczyzny δ z drugą daną płaszczyzną, a więc z β , a prosta k ($k' k''$), przechodząca przez punkt A ($A' A''$) równoległe do prostej c ($c' c''$), jest krawędzią płaszczyzn α i β .

8. Jedna płaszczyzna jest równoległa do osi rzutów, druga do rzutni poziomej.

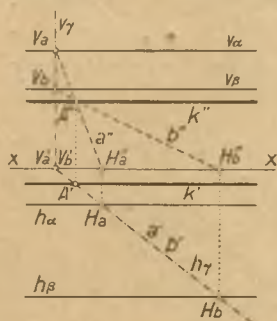
W tym wypadku chodzi o wyznaczenie jednego punktu krawędzi, której kierunek, równoległy do osi rzutów, jest znany.

Prowadzimy płaszczyznę pomocniczą γ , w naszym wypadku (Rys. 131.) poziomo rzucającą, która przecina płaszczyznę α ($h_\alpha v_\alpha$) w prostej a ($a' a''$), zaś płaszczyznę β wzdłuż prostej b ($b' b''$). Punkt A ($A' A''$) przecięcia się tych prostych leży także na krawędzi płaszczyzn α i β . Rzuty k' i k'' krawędzi k , przejdą przez rzuty A' i A'' punktu A , równoległe do osi rzutów, przyczem rzut pionowy k'' schodzi się ze śladem pionowym v_β płaszczyzny β .

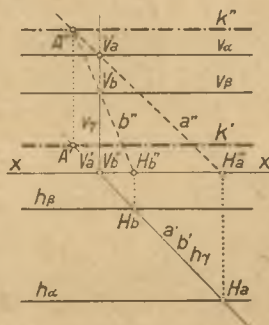
9. Obie płaszczyzny są równoległe do osi rzutów.

Krawędź będzie w tym wypadku także równoległą do osi rzutów — potrzebny do wyznaczenia krawędzi jeden punkt, znajdziemy, przecinając dane płaszczyzny trzecią płaszczyzną dowolną. Przykład, gdzie krawędź płaszczyzn α i β znajduje się

w pierwszym obszarze, podaje Rys. 132. Położenie rzutów k' i k''



Rys. 132.



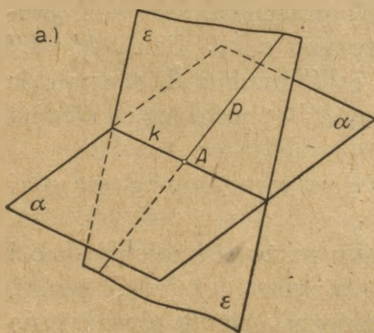
Rys. 133.

krawędzi płaszczyzn α i β w Rys. 133. dowodzi, że krawędź ta leży w drugim obszarze. W obu przykładach użyliśmy płaszczyzny poziomo rzucającej γ , jako pomocniczej.

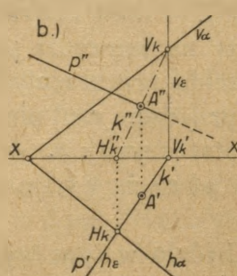
10. Wszystkie ślady przecinają się w jednym punkcie na osi rzutów (Rys. 134.). Punkt X_α jest jednym punktem szukanej krawędzi. Drugi punkt, a mianowicie punkt A ($A' A''$), znaleźliśmy jako przecięcie się danych płaszczyzn, z płaszczyzną pomocniczą γ ($h_\gamma v_\gamma$).

50. Wyznaczenie punktu przecięcia się prostej z płaszczyzną.

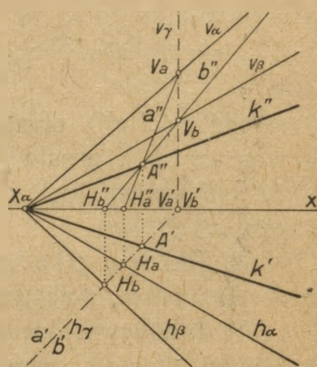
a) Prosta p (Rys. 135 a.), nachylona do płaszczyzny α , przebiega ją w punkcie A , który znajdziemy w ten sposób, że przez prostą p poprowadzimy dowolną płaszczyznę ε i wyznaczymy jej krawędź k z płaszczyzną α . Punkt przecięcia się



Rys. 135 a.



Rys. 135 b.



Rys. 134.

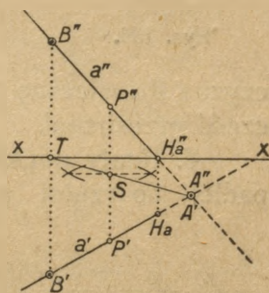
A prostych p i k jest żądanym punktem. Zazwyczaj przyjmujemy płaszczyznę ε jako poziomo lub pionowo rzucającą, uzyskując za

ich pośrednictwem najprostszą konstrukcją. Rozwiązanie zadania w rzutach prostokątnych podaje Rys. 135 b. Przez prostą p ($p' p''$) poprowadziliśmy płaszczyznę poziomo rzucającą ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$), która przecięła daną płaszczyznę α ($h_\alpha v_\alpha$) w prostej k ($k' k''$). Prosta k'' przecięła p'' w punkcie A'' , który jest rzutem pionowym szukanego punktu przebicia się prostej p z płaszczyzną α . Rzut poziomy A' otrzymamy na p' .

b) Przykłady.

1. Punkty przebicia się prostej a ($a' a''$) z płaszczyznami dwusiecznymi δ_I i δ_{II} (Rys. 136.). Punkt $A' \equiv A''$, w którym przecinają się rzuty prostej a , leży na płaszczyźnie dwusiecznej δ_{II} (ust. 42.) i jest jednym z szukanych punktów.

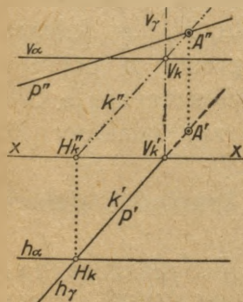
Rzuty punktów przebicia się prostej a z płaszczyzną dwusieczną δ_I znajdziemy w sposób następujący: Spółtłowny odcinek $P' P''$ (Rys. 136.) dowolnej prostej odnoszącej i jej środek S połączmy z $A' \equiv A''$. Przez punkt T , w którym prosta $S A'$ przecina oś rzutów, poprowadzona prostopadła do osi x wyznacza na a' i a'' punkty B' i B'' , które są rzutami punktu przebicia się B prostej a z płaszczyzną δ_I . Gdyby



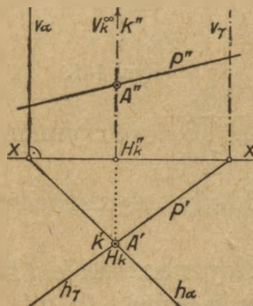
Rys. 136.

punkt T wypadł po prawej stronie punktu $A' \equiv A''$, to punkt B ($B' B''$) leżałby na płaszczyźnie dwusiecznej δ_I w trzeciej części przestrzeni.

2. Jeżeli płaszczyzna α ($h_\alpha v_\alpha$) jest równoległą do osi rzutów, a prosta p ($p' p''$) ma położenie jak na



Rys. 137.

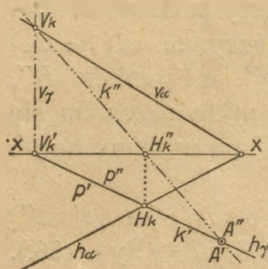


Rys. 138.

Rys. 137., to punkt przebicia się A ($A' A''$) prostej p ($p' p''$) z płaszczyzną poziomo-rzucającą α ($h_\alpha v_\alpha$) wyobraża Rys. 138.

3. Punkt przebicia się A ($A' A''$) prostej p ($p' p''$) z płaszczyzną poziomo-rzucającą α ($h_\alpha v_\alpha$) wyobraża Rys. 138.

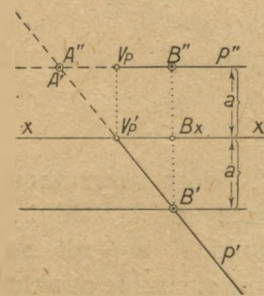
4. Przebiecie się prostej p ($p' \equiv p''$), leżącej na płaszczyźnie dwusiecznej δ_{II} , z płaszczyzną nachyloną do obu rzutni podaje Rys. 139. Punkt A ($A' \equiv A''$) leży w czwartym obszarze przestrzeni.



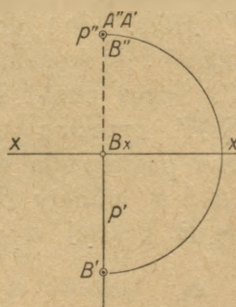
Rys. 139.

5. Rys. 140. przedstawia konstrukcję rzutów punktu przebiecia się prostej poziomej p ($p' p''$) z płaszczyznami dwusiecznymi. Punkt przecięcia się A ($A' \equiv A''$) obu rzutów prostej jest punktem przebiecia się prostej p z płaszczyzną dwusieczną δ_{II} . Punkty B' i B'' , tak obrane na prostych p' i p'' , że $B' Bx = B'' Bx = a$, są rzutami punktu przebiecia się B prostej p z płaszczyzną dwusieczną δ_I , przechodzącą przez pierwszą i trzecią część przestrzeni.

6. Rzuty punktów przebiecia się prostej p ($p' p''$) prostopadłej do rzutni pionowej z płaszczyznami dwusiecznymi



Rys. 140.



Rys. 141.

wyznaczyliśmy na Rys. 141. W punkcie p'' schodzą się oba rzuty A' i A'' punktu przebiecia się prostej p z płaszczyzną δ_{II} i rzut pionowy B'' punktu B , w którym prosta p przebija płaszczyznę δ_I . Od-

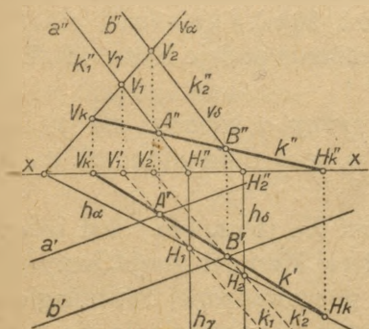
mierzywszy $B' Bx = B'' Bx$, otrzymamy rzut poziomy B' punktu B .

51. Dalsze przykłady wyznaczania krawędzi dwóch płaszczyzn.

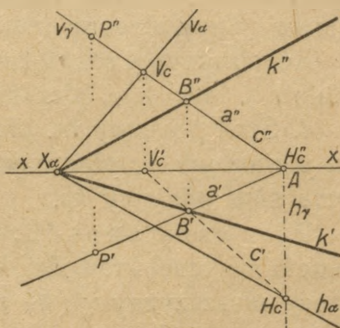
1. Płaszczyzna α wyznaczona jest śladami, płaszczyzna β dwiema prostymi równoległymi a ($a' a''$) i b ($b' b''$) (Rys. 142.). Ponieważ krawędź dwóch płaszczyzn określić można jako miejsce geometryczne punktów przebiecia się prostych jednej płaszczyzny z płaszczyzną drugą, więc prosta k ($k' k''$), łącząca punkty przebiecia się A ($A' A''$) i B ($B' B''$) prostych a i b z płaszczyzną α , jest szukaną krawędzią. Kontrolą dokładności

rysunku jest to, że ślady H_k i V_k leżą na śladach h_α i v_α płaszczyzny α .

2. Płaszczyzna α ($h_\alpha v_\alpha$) ma położenie dowolne, płaszczyzna β przechodzi przez oś rzutów i przez punkt P ($P' P''$) (Rys. 143.). Szukana krawędź przejdzie przez punkt X_α , a zadanie nasze ogranicza się do wyznaczenia jeszcze jednego jej



Rys. 142.

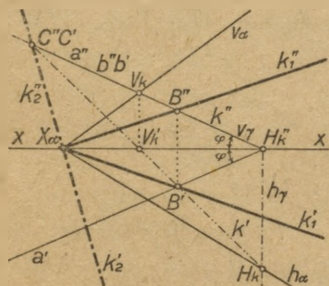


Rys. 143.

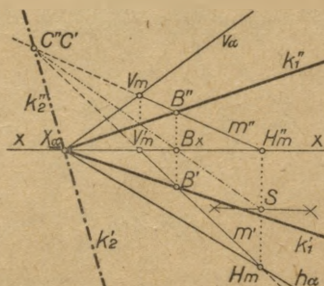
punktu. W tym celu połączmy dowolny punkt A osi x z punktem P , to prosta a ($a' a''$) leży na płaszczyźnie β . Punkt przecięcia się B ($B' B''$) prostej a z płaszczyzną α , jest szukanym punktem krawędzi k ($k' k''$).

3. Wyznaczyć rzuty krawędzi płaszczyzny dowolnej α ($h_\alpha v_\alpha$) z płaszczyznami dwusiecznymi δ_I i δ_{II} .

Pierwszy sposób: Na płaszczyźnie dwusiecznej δ_I przyjmujemy prostą a ($a' a''$) (Rys. 144.), a punkt przecięcia



Rys. 144.



Rys. 145.

się tej prostej z płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$) łączymy z punktem X_α , otrzymując jedną z szukanych krawędzi, a mianowicie k_1 ($k_1' k_1''$).

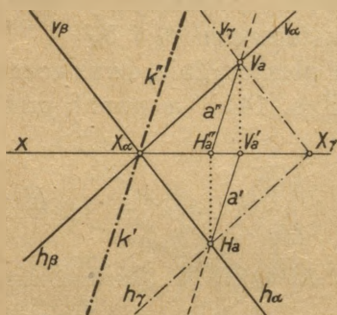
Uważajmy następnie prostą a'' za złączenie rzutów b' i b'' prostej b , przyjętej na płaszczyźnie dwusiecznej δ_{II} . Punkt $(C' \equiv C'')$ jest skupieniem dwóch rzutów punktu przebiecia się prostej b z płaszczyzną δ_{II} . Prosta $(C' \equiv C'', X_\alpha)$ wyraża rzuty drugiej szukanej krawędzi k_2 (k_2' k_2'').

Drugi sposób: Na płaszczyźnie α przyjmujemy prostą dowolną m (m' m'') i szukamy punktów przebiecia się jej z płaszczyznami dwusiecznymi (patrz ust. 50b.).

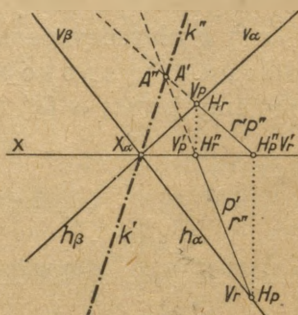
Konstrukcyjne rozwiązanie zadania podaje Rys. 145., który czytelnik z łatwością odczyta.

4. Ślad poziomy h_α płaszczyzny α schodzi się ze śladem pionowym v_β płaszczyzny β , zaś ślad pionowy v_α nakrywa ślad poziomy h_β .

Pierwszy sposób: Punkt X_α (Rys. 146.) jest jednym punktem szukanej krawędzi k , której kierunek znajdziemy przy pomocy płaszczyzny γ (h_γ v_γ), poprowadzonej równolegle do płaszczyzny β (h_β v_β). Płaszczyzny α i γ przecinają się w prostej a (a' a''), równoległej do krawędzi k . Ponieważ punkty X_α , V_α , X_γ i H_α tworzą równoległobok, więc proste a' i a'' są równoległe, a w następstwie tego rzuty k' i k'' krawędzi k zejdą się na jednej prostej. Płaszczyzny α i β przenikają się wobec tego w prostej, leżącej na płaszczyźnie dwusiecznej δ_{II}



Rys. 146.



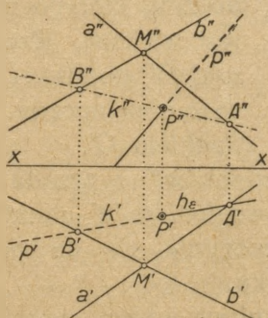
Rys. 147.

Drugi sposób: Obierzmy na płaszczyźnie α (h_α v_α) prostą p (p' p'') (Rys. 147). Rzut poziomy p' oznaczony literą r'' i rzut pionowy p'' oznaczony literą r' , wyznaczają prostą r , leżącą na płaszczyźnie β , ślady bowiem prostej r leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny β . Proste p i r przecinają się

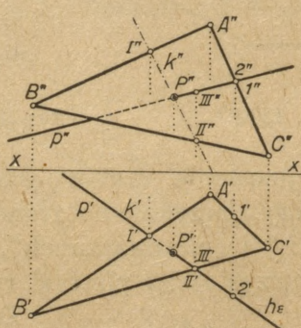
w punkcie A ($A' \equiv A''$), który leżąc równocześnie na obu prostych jest punktem szukanej krawędzi k .

52. Zadania.

1. Znaleźć rzuty punktu przebiecia się prostej p ($p' p''$) z płaszczyzną α , wyznaczoną dwiema prostymi przecinającymi się a ($a' a''$) i b ($b' b''$) (Rys. 148.). Przez prostą p prowadzimy płaszczyznę ε , jak w naszym przykładzie, poziomo rzucającą. Szukamy krawędzi k ($k' k''$) płaszczyzny $\alpha \equiv (a, b)$ z płaszczyzną ε , a punkt przecięcia się P ($P' P''$) prostych k i p rozwiązuje zadanie.



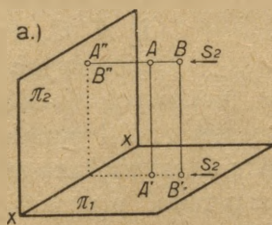
Rys. 148.



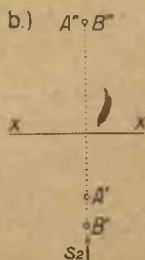
Rys. 149.

2. Znaleźć rzuty punktu przebiecia się prostej p ($p' p''$) z płaszczyzną trójkąta A ($A' A''$), B ($B' B''$), C ($C' C''$) (Rys. 149.). Szukamy punktu przebiecia się P ($P' P''$) prostej p z płaszczyzną wyznaczoną dwiema prostymi AB i BC , które przecinają się punkcie B ($B' B''$).

53. O punktach „widocznych“ i „niewidocznych“. Kierunek rzutów jest równocześnie kierunkiem, w którym patrzymy na odnośną rzutnię, z odległości nieograniczenie dalekiej. Na rzutnię pionową patrzymy więc z przodu, w kierunku strzałki s_2 (Rys. 150 a.), na rzutnię poziomą z góry, w kierunku strzałki s_1 (Rys. 150c.). Przyjmijmy dwa punkty A i B (Rys. 150a i b.)

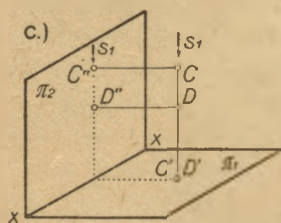


Rys. 150 a.

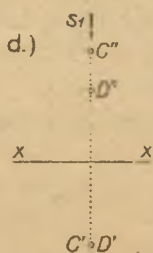


Rys. 150 b.

tak położone, aby ich rzuty pionowe A'' i B'' padły na siebie, to punkt B , którego głębokość jest większa od głębokości punktu A , uważać będziemy za widoczny, gdy patrzymy w kierunku rzutu pionowego. Rzut pionowy B'' punktu B nakrywa rzut A'' punktu A . Analogicznie: z dwóch punktów



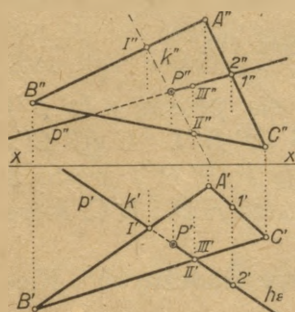
Rys. 150 c.



Rys. 150 d.

np. C i D (Rys. 150 c i d.), których rzuty poziome nakrywają się, ten uważać będziemy, w odniesieniu do rzutu poziomego za widoczny, którego wysokość jest większa. Rzut poziomy D' punktu D będzie więc niewidoczny, zakryty punktem C' .

Pojmowanie rzutów jako „widoków” z przodu względnie z góry, przy równoczesnem uwzględnieniu punktów „widocznych” i „niewidocznych”, przyczynia się do podniesienia przejrzystości i plastyki rysunku.



Rys. 151.

Zastosujmy uwagi powyższe do rozpatrywanego zadania (Rys. 151.).

Przyjmijmy, że trójkąt ABC wykonany jest z materiału nieprzezroczystego, to w następstwie tego założenia, rzuty tego trójkąta nakryją częściowo rzuty prostej p . W celu wyznaczenia rzutów niewidocznej, płaszczyznę trójkąta zakrytej części prostej p , weźmy pod uwagę dwie proste skośne p i AC . Punkt przecięcia się rzutów pionowych tych prostych jest skupieniem rzutów pionowych dwóch punktów: punktu 1 ($1' 1''$) leżącego na prostej AC i punktu 2 ($2' 2''$) prostej p ($p' p''$). Głębokość punktu 2 jest większa aniżeli punktu 1, zatem punkt 1 obserwowany z przodu, przysłonięty jest punktem 2, a więc niewidoczny. Skoro rzut pionowy $2'$ jest widoczny, więc widoczną jest także prosta p'' aż do punktu P'' , leżąca przed płaszczyzną trójkąta.

W podobny sposób zbadamy, która część rzutu poziomego p' jest widoczna. Punkt przecięcia się prostych p' i $C'B'$

jest złączeniem rzutów poziomych II' i III' dwóch punktów: punktu II leżącego na boku CB i punktu III przynależnego do prostej p . Ponieważ wysokość punktu III jest większa aniżeli punktu II , więc w widoku z góry punkt III jest widoczny, a zatem i prosta p , na której punkt III leży, jest w rzucie poziomym widoczna. W widoku z góry część prostej od punktu III do P leży nad trójkątem, więc odcinek $III'P'$ jest widoczny.

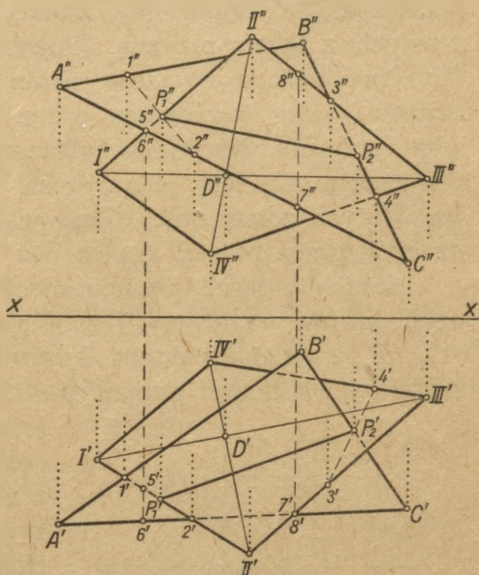
54. Zadania.

1. Wykreślić rzuty linii przenikania się płaszczyzny trójkąta $A (A' A'')$, $B (B' B'')$ i $C (C' C'')$ z płaszczyzną czworokąta $I II III IV$ (Rys. 152.). Znajdziemy punkt przebiecia się $P_1 (P_1' P_1'')$ boku $I II$ czworokąta z płaszczyzną trójkąta i punkt przebiecia się $P_2 (P_2' P_2'')$ boku $B C$ trójkąta z płaszczyzną czworokąta, a odcinek $P_1 P_2$ rozwiąże zadanie. Części niewidoczne wyznaczymy sposobem podanym w ustępie poprzednim, co czytelnik niechaj przeprowadzi na Rys. 152.

2. Wykreślić rzuty krawędzi dwóch płaszczyzn, z których jedną wyznaczają dwie proste równoległe, a drugą dwie proste przecinające się. Prosta, łącząca punkty przebiecia się jednej pary prostych z płaszczyzną wyznaczoną przez drugą parę, rozwiązuje zadanie.

3. Wyznaczyć rzuty prostej przechodzącej przez dany punkt $P (P' P'')$, a przecinającej dwie proste skośne $a (a' a'')$ i $b (b' b'')$.

Pierwszy sposób: Bierzemy pod uwagę płaszczyznę wyznaczoną przez dany punkt i jedną z prostych, szukamy punktu przebiecia się M drugiej prostej z tą płaszczyzną i łączymy go z danym punktem P . Prosta MP rozwiązuje zadanie.



Rys. 152.

Drugi sposób: Szukamy krawędzi płaszczyzn, wyznaczonych przez dany punkt i każdą z danych prostych.

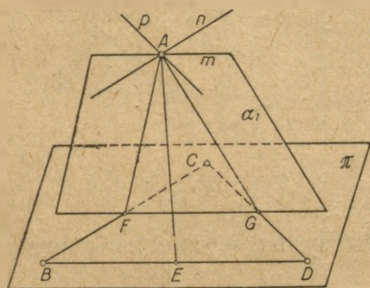
4. Wyznaczyć prostą przecinającą trzy proste skośne.

Pierwszy sposób: Na jednej z prostych obierzemy dowolny punkt i wyznaczmy prostą przechodzącą przez niego, a przecinającą pozostałe dwie proste (patrz zadanie poprzednie). Ponieważ przez każdy punkt, przyjęty na pierwszej prostej, przechodzi prosta przecinająca dwie pozostałe, więc istnieje tyle prostych przecinających trzy skośne, ile punktów posiada prosta, więc nieograniczenie wiele.

Drugi sposób: Przez jedną z prostych poprowadzimy płaszczyznę i znajdziemy punkty przebicia się pozostałych prostych z tą płaszczyzną. Prosta, wyznaczona owymi punktami przebicia, rozwiązuje zadanie, leżąc bowiem na płaszczyźnie, która przechodzi przez pierwszą prostą, prostą tę także przecina. Na każdej płaszczyźnie, przechodzącej przez pierwszą prostą, leży jedna prosta przecinająca trzy dane skośne, których zatem ilość równa jest ilości płaszczyzn przechodzących przez prostą, a więc jest nieograniczona.

Zadanie nasze posiada nieograniczoną ilość rozwiązań, czyli, jak się wyrażamy, jest nieoznaczone.

5. Przez dany punkt A poprowadzić płaszczyznę równo oddaloną od trzech danych punktów B, C, D . Poprowadźmy



Rys. 153.

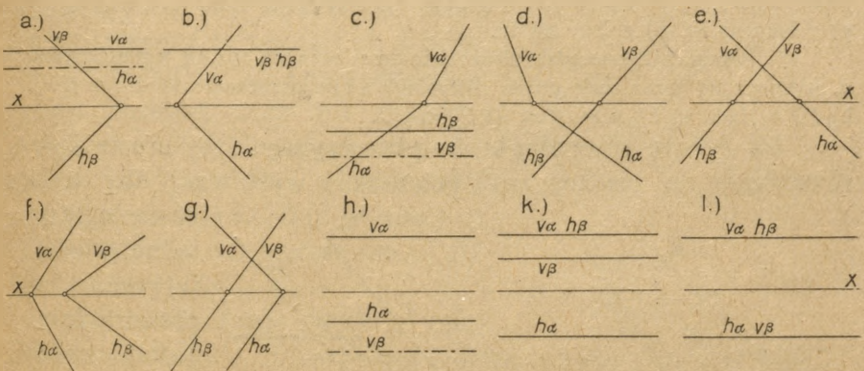
przez punkt A proste m, n, p , równoległe do boków trójkąta BCD , a nadto połączmy go ze środkami E, F, G tychże boków (Rys. 153.). Weźmy pod uwagę płaszczyznę $\alpha_1 \equiv (m, AF)$, to ponieważ prosta m jest równoległa do BD , więc płaszczyzna ta jest równo oddalona od punktów B i D . Ponieważ jednak płaszczyzna α_1 przechodzi przez

prostą AF , więc jest także równo oddalona od punktów B i C , a więc jest równo oddaloną od trzech danych punktów. Prosta FG , łącząca środek dwóch boków trójkąta, jest równoległa do boku BD , a więc i do prostej m , czyli, że płaszczyzna $\alpha_1 \equiv (m, AF)$ przechodzi też przez prostą AG . Jak to z rysunku z łatwością odczytamy, zadanie nasze posiada cztery

rozwiązania, a mianowicie: 1^o. płaszczyzna $\alpha_1 \equiv (m, AF, AG, FG)$; 2^o. płaszczyzna $\alpha_2 \equiv (n, AE, AG, EG)$; 3^o. płaszczyzna $\alpha_3 \equiv (p, AF, AE, FE)$ i 4^o. płaszczyzna $\alpha_4 \equiv (m, n, p)$.

55. Ćwiczenia.

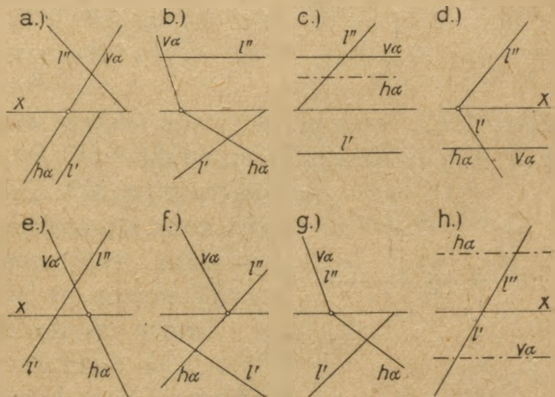
1. Wyznaczyć proste przecięcia się płaszczyzn α i β w następujących przypadkach (Rys. 154 a—l).



Rys. 154 a—l.

2. Wyznaczyć w następujących przykładach punkt przebiecia się prostej l (l' l'') z płaszczyzną α ($h\alpha$ $v\alpha$) (Rys. 155 a—h).

3. Wyznaczyć krawędź płaszczyzny α ($h\alpha$ $v\alpha$), równoległą do osi rzutów x z płaszczyzną β , która wyznaczona jest: a) osią x i dowolnym punktem A (A' A''), b) dwiema prostymi równoległymi, c) dwiema prostymi przecinającymi się na osi rzutów, d) trzema dowolnie przyjętymi punktami w przestrzeni, e) trzema punktami, z których jeden leży na rzutni poziomej, drugi na pionowej, a trzeci na płaszczyźnie dwusiecznej δI , względnie δII .



Rys. 155 a—h.

4. Wykreślić rzuty krawędzi płaszczyzn dwusiecznych δI i δII z płaszczyzną α ($h\alpha$ $v\alpha$), która ma następujące położenia: a) jest równoległą do osi rzutów, b) jest równoległą do rzutni poziomej, c) jest równoległą do rzutni pionowej.

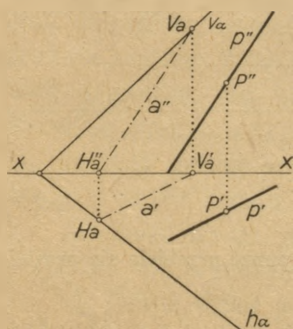
5. Wyznaczyć punkt przebiecia się prostej $p(p' p'')$ z płaszczyzną α , wyznaczoną przez dwie proste równoległe a i b , bez posługiwania się śladami płaszczyzny, w następujących przypadkach: a) $a \parallel b \parallel x$, p dowolnie; b) $a \parallel b \parallel x$, $p \parallel \pi_1$; c) $a \parallel b \parallel \pi_1$, $p \parallel \pi_2$; d) $a \parallel b \parallel \pi_2$, $p \parallel \pi_1$; e) $a \parallel b \parallel \pi_2$, $p \perp \pi_2$; f) $a \parallel b \parallel \pi_1$, p leży na δ_I , względnie δ_{II} .

6. Płaszczyzna α przechodzi przez trzy punkty $A(A' A'')$, $B(B' B'')$ i $C(C' C'')$; wyznaczyć punkt przebiecia się prostej $p(p' p'')$ z tą płaszczyzną, jeżeli a) $p \parallel \pi_1$, b) $p \parallel \pi_2$, c) $p \equiv x$, d) $p \parallel x$, e) $p \perp \pi_1$, f) $p \perp \pi_2$, g) p leży na δ_I , h) p leży na δ_{II} .

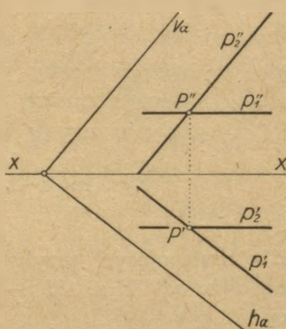
7. Wyznaczyć krawędzie płaszczyzn dwusiecznych δ_I i δ_{II} z płaszczyzną α , wyznaczoną przez dwie proste równoległe l i m , przyczem: a) $l \parallel m \parallel \pi_1$, b) $l \parallel m \parallel \pi_2$, c) $l \parallel x$, $m \equiv x$; d) $l \parallel m \parallel x$.

56. Proste równoległe do płaszczyzny. Aby prosta była równoległą do płaszczyzny, potrzeba i wystarcza, aby była

równoległą do jednej prostej, leżącej na tej płaszczyźnie. Jeżeli zadaniem naszym jest poprowadzenie przez dany punkt $P(P' P'')$ prostej równoległej do pł. $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ —

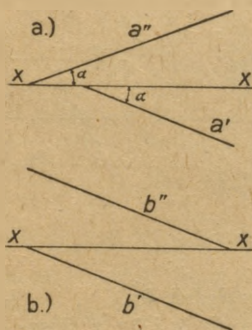


Rys. 156.



Rys. 157.

(Rys. 156.), to na płaszczyźnie tej przyjmiemy dowolnie prostą $a(a' a'')$, do której przez punkt $P(P' P'')$ poprowadzimy równoległą $p(p' p'')$. Zadanie nasze jest nieoznaczone, t. j. posiada nieograniczoną ilość rozwiązań, tyle mianowicie, ile prostych przyjąć można na płaszczyźnie α .



Rys. 158 a i b.

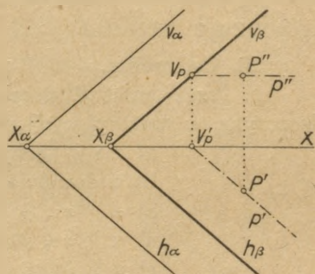
Proste $p_1(p_1' p_1'')$ i $p_2(p_2' p_2'')$ (Rys. 157.) są także równoległe do płaszczyzny $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$; pierwsza jednak jest równoległą do śladu poziomego, a druga do śladu pionowego tej płaszczyzny.

Rzuty prostych równoległych do płaszczyzn dwusiecznych δ_I i δ_{II} , muszą zawierać z osią rzutów te same kąty (ust. 42.).

W szczególności prosta $a(a' a'')$ (Rys. 158 a.) jest równoległą

do płaszczyzny δ_I , zaś prosta b (b' b'') (Rys. 158 b.) równoległą do płaszczyzny dwusiecznej δ_{II} .

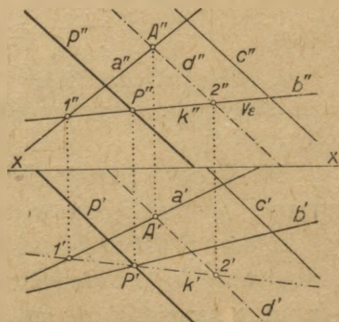
57. Zadania. 1. Wykreślić ślady płaszczyzny β , przechodzącej przez dany punkt P (P' P'') i równoległej do danej płaszczyzny α (h_α v_α) (Rys. 159). Równoimienne ślady obu płaszczyzn będą równoległe (ust. 49.), wystarczy zatem wyznaczyć jeden punkt któregoś ze szukanych śladów. Przez punkt P (P' P'') poprowadzimy prostą poziomą p (p' p'') szukanej płaszczyzny β a równoległą do płaszczyzny α . Przez ślad pionowy V_α prostej p , przechodzi ślad pionowy v_β równoległy do v_α , a przez punkt X_β ślad poziomy $h_\beta \parallel h_\alpha$.



Rys. 159.

2. Przez dany punkt A poprowadzić prostą, przecinającą daną prostą a i równoległą do danej płaszczyzny α . Przez punkt A poprowadzimy płaszczyznę ε równoległą do α , znajdziemy punkt przebiecia się prostej a z płaszczyzną ε i punkt ten połączymy z danym punktem A .

3. Wyznaczyć prostą, która przecina dwie dane skośne a (a' a''), b (b' b'') i jest równoległą do trzeciej danej prostej c (c' c''). Pierwszy sposób: Przez prostą a prowadzimy płaszczyznę α równoległą do prostej c (Rys. 160.), szukamy punktu przebiecia się P prostej b z tą płaszczyzną i przez ten punkt prowadzimy prostą p równoległą do c , rozwiązującą zadanie.



Rys. 160.

Dla wyznaczenia płaszczyzny α równoległej do prostej c , obraliśmy na prostej a (a' a'') punkt A (A' A'') i poprowadziliśmy prostą d (d' d'') $\parallel c$ (c' c''). Płaszczyzna $\alpha \equiv (a, d)$

jest równoległą do prostej c i przecina prostą b (b' b'') w punkcie P (P' P'').

Drugi sposób: Przez prostą a , a następnie b , popro-

wadzymy płaszczyznę równoległą do prostej c ; krawędź tych obu płaszczyzn spełnia żądany warunek.

4. Przez jedną z dwóch danych prostych skośnych poprowadzić płaszczyznę równoległą do drugiej prostej. Na jednej prostej, np. a , obierzemy punkt, przez który poprowadzimy prostą c równoległą do prostej b . Płaszczyzna $\varepsilon \equiv (a, c)$ rozwiązuje zadanie.

58. Ćwiczenia.

1. Przez punkt A poprowadzić prostą równoległą do dwóch danych płaszczyzn, w następujących przypadkach:

- α i β nachylone do obu rzutni,
- α dowolnie położona, $\beta \parallel \pi_1$,
- $\alpha \parallel \pi_1$, $\beta \parallel x$,
- $\alpha \perp \pi_1$, $\beta \parallel x$,
- $\alpha \equiv \delta I$, $\beta \parallel x$,
- $\alpha \equiv \delta II$, β dowolnie położona.

Uwaga: Szukana prosta jest równoległą do krawędzi obu płaszczyzn α i β .

2. Przez dany punkt A poprowadzić taką płaszczyznę α , równoległą do danej prostej p , aby:

- α była równoległą do osi rzutów x ,
- α była równoległą do π_1 ,
- α była prostopadłą do π_2 .

3. Dane są proste skośne l ($l' l''$) i m ($m' m''$); przez prostą m poprowadzić płaszczyznę równoległą do prostej l i wyznaczyć ślady tej płaszczyzny skoro:

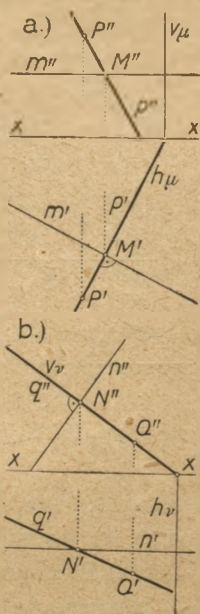
- $l \parallel \pi_1$, m nachylona do obu rzutni,
- $l \parallel \pi_2$, $m \parallel \pi_1$,
- $l \parallel \delta II$, m nachylona do obu rzutni,
- $l \parallel \delta I$, $m \parallel x$,
- $l \perp \pi_1$, $m \equiv x$,
- $l \perp \pi_2$, $m \perp \delta II$.

4. Dany jest punkt P ($P' P''$) i proste skośne l ($l' l''$) i m ($m' m''$); wykreślić ślady płaszczyzny, przechodzącej przez punkt P , a równoległej do prostych l i m .

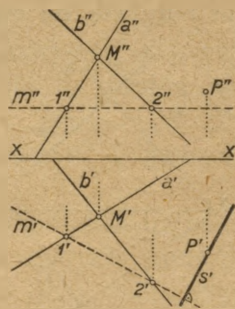
59. Proste prostopadłe. Prosta prostopadła do płaszczyzny. Wykazaliśmy w ustępie 24., że aby rzut kąta prostego był kątem prostym, jest koniecznem i wystarczającym, by jedno ramię kąta było równoległe do płaszczyzny rzutów. Stąd wynika bezpośrednio, że prosta jest prostopadłą do prostej poziomej (czołowej), skoro rzuty poziome (pionowe) obu prostych tworzą kąt prosty. Aby z punktu P ($P' P''$) (Rys. 161 a.) poprowadzić prostą prostopadłą i przecinającą daną prostą m ($m' m''$), wykreślimy $p' \perp m'$, odniesiemy punkt A' na prostą m'' , a punkt A'' połą-

czymy z punktem P'' , otrzymując rzut pionowy p'' szukanej prostej p ($p' p''$). Podobnie (Rys. 161 b.), prosta q ($q' q''$) przechodzi przez dany punkt Q ($Q' Q''$), jest prostopadłą do prostej czołowej n ($n' n''$) i przecina ją w punkcie N ($N' N''$). Ale prócz prostej p ($p' p''$), prostopadłej do prostej m ($m' m''$) i prostą tę przecinającą, poprowadzić można z punktu P dowolną, nieograniczoną ilość dalszych prostych również prostopadłych do prostej p , jednak prostej tej nieprzecinających, a więc prostych skośnych. Miejscem geometrycznym wszystkich tych prostych jest płaszczyzna prostopadła do prostej m , a przechodząca przez punkt P . Rzut poziomy wszystkich tych prostych w przypadku, gdy prosta m jest pozioma, musi być prostopadły do m' , a więc schodzić się z prostą p' . Płaszczyzna μ ($h_\mu v_\mu$), przechodząca przez punkt P i prostopadła do prostej poziomej m , jest więc płaszczyzną poziomo rzucającą, podobnie jak płaszczyzna v ($h_v v_v$), przechodząca przez punkt Q i prostopadła do prostej czołowej n , jest płaszczyzną pionowo rzucającą.

Niechaj daną będzie płaszczyzna α , wyznaczona prostymi a ($a' a''$) i b ($b' b''$); wykreślmy rzuty prostej, przechodzącej przez dany punkt P ($P' P''$) a prostopadłej do płaszczyzny α . Przyjmijmy na płaszczyźnie α prostą poziomą m ($m' m''$) i z punktu P' wykreślmy prostą $s' \perp m'$ (Rys. 162 a.). Prosta s' jest rzutem poziomym nie tylko pewnej określonej prostej s , lecz dowolnej, nieograniczonej ilości prostych, przechodzących przez punkt P , prostopadłych do prostej m , a leżących na płaszczyźnie poziomo rzucającej μ , prostopadłej do prostej m . W istocie bowiem rzut kątów prostych, jakie prosta pozioma m tworzy z prostymi leżącymi na



Rys. 161 a—b.



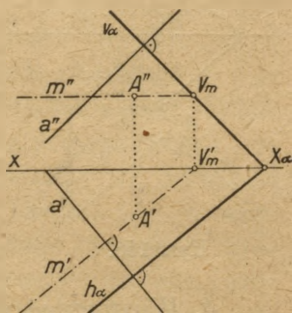
Rys. 162 a.

Zatem: rzuty prostej prostopadłej do płaszczyzny są prostopadłe do śladów tej płaszczyzny, a to rzut poziomy do śladu poziomego, a rzut pionowy do śladu pionowego (Rys. 163.). I wzajemnie: ślady płaszczyzny prostopadłej do prostej są prostopadłe do odpowiednich rzutów tej prostej.

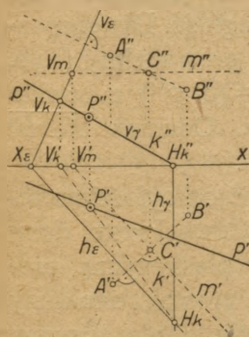
60. Płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny. W punkcie płaszczyzny poprowadzić można dowolną, nieograniczoną ilość płaszczyzn prostopadłych do tej płaszczyzny. Wszystkie te płaszczyzny tworzą pęk, którego osią jest prosta prostopadła, poprowadzona w danym punkcie do płaszczyzny. Aby więc w danym punkcie płaszczyzny poprowadzić płaszczyznę prostopadłą, wyprowadzimy w nim prostą prostopadłą a przez nią poprowadzimy płaszczyznę. Możemy też przez dany punkt poprowadzić prostą leżącą na płaszczyźnie, a w tym punkcie płaszczyznę prostopadłą do tej prostej.

61. Zadania.

1. Wykreślić ślady płaszczyzny prostopadłej do prostej a ($a' a''$), a przechodzącej przez punkt A ($A' A''$) (Rys. 164.). Przez punkt A ($A' A''$) prowadzimy prostą poziomą m ($m' m''$) prostopadłą do danej prostej a ($a' a''$). Przez ślad pionowy V_m prostej m kreślimy ślad pionowy v_α płaszczyzny α prostopadłe do a'' , a przez punkt X_α ślad poziomy h_α a' . Płaszczyzna α ($h_\alpha v_\alpha$)



Rys. 164.



Rys. 165.

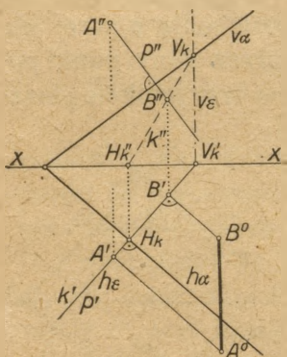
jest prostopadłą do prostej a ($a' a''$), gdyż ślady jej są prostopadłe do rzutów prostej, a przechodzi przez punkt A ($A' A''$), gdyż zawiera prostą m ($m' m''$), poprowadzoną przez ten punkt.

2. Na prostej p ($p' p''$) znaleźć punkt równo oddalony od danych punktów A ($A' A''$) i B ($B' B''$) (Rys. 165.). Przez środek C odcinka AB poprowadzona płaszczyzna prostopadła, przecina prostą p w punkcie P ($P' P''$), rozwiązującym zadanie. Znalazłszy środek C ($C' C''$), wykreśliliśmy prostą poziomą m ($m' m''$), przyczem $m' \perp A' B'$, wyznaczaliśmy

ślad V_m , a następnie ślady v_ε i h_ε płaszczyzny przechodzącej przez punkt C i prostopadłej do odcinka AB . Przy pomocy pionowo rzucającej płaszczyzny γ ($h_\gamma v_\gamma$), poprowadzonej przez prostą p , otrzymaliśmy punkt P ($P' P''$).

3. Wyznaczyć odległość punktu A ($A' A''$) od płaszczyzny α ($h_\alpha v_\alpha$). Z punktu A prowadzimy prostą p prostopadłą do płaszczyzny α , a odcinek zawarty między punktem A a punktem przebiecia się B , prostej p z płaszczyzną α , wyraża odległość punktu A od płaszczyzny α .

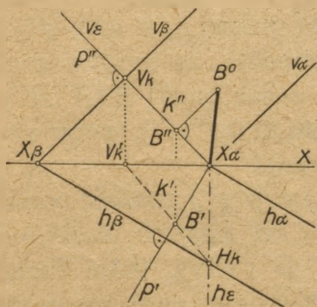
a) Płaszczyzna α ($h_\alpha v_\alpha$) nachylona jest do obu rzutni (Rys. 166.). Prostopadła p ($p' p''$) przechodząca przez punkt A ($A' A''$), przebija płaszczyznę α w punkcie B ($B' B''$). Odcinek $A^0 B^0$ jest kładem odcinka AB na płaszczyznę poziomą rzutów i wyraża prawdziwą odległość punktu A od płaszczyzny α .



Rys. 166.

b) Płaszczyzna α jest wyznaczona dwiema prostymi równoległymi. W sposób podany w ust. 59. wykreślimy z punktu A prostopadłą do płaszczyzny, znajdziemy jej punkt przebiecia i kład odcinka podobnie jak w zadaniu powyższem.

4. Wyznaczyć odległość dwóch płaszczyzn równoległych. Prowadzimy prostą prostopadłą do obu płaszczyzn, a odcinek zawarty między punktami przebiecia wyraża żadaną odległość. Dla uproszczenia konstrukcyi prowadzimy (Rys. 167.) prostopadłą p ($p' p''$) z punktu X_α płaszczyzny α . Odcinek $X_\alpha B^0$ rozwiązuje zadanie.



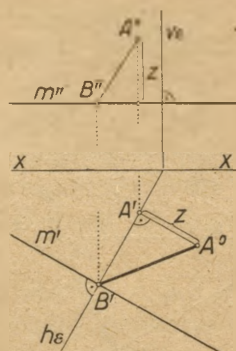
Rys. 167.

5. Wyznaczyć odległość punktu A od prostej m . Przez dany punkt prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do danej prostej, szukamy punktu przecięcia się tej płaszczyzny z tą prostą, a odcinek zawarty między otrzymanym a danym punktem rozwiązuje zadanie.

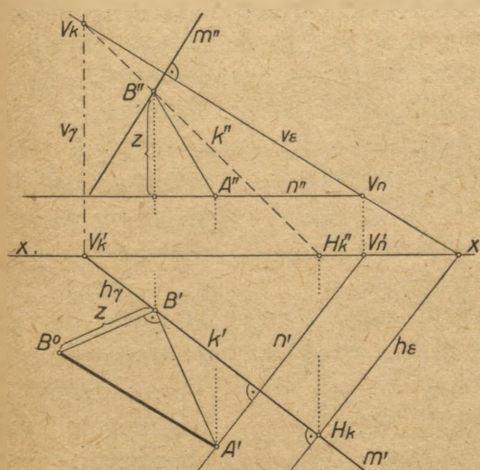
6. Wyznaczyć odległość dwóch prostych równoległych. Przez jedną z nich prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do drugiej, a odcinek zawarty między punktem przebiecia tej płaszczyzny z drugą prostą a danym punktem rozwiązuje zadanie.

W Rys. 168. prosta m (m' m'') jest poziomą. Płaszczyzna ε (h_ε v_ε), przechodząca przez punkt A (A' A'') prostopadła do prostej m , jest poziomo rzucającą i przecina prostą m w punkcie B (B' B''). Odcinek AB położony na płaszczyźnie poziomej przechodzącej przez prostą m daje odcinek $B'A^0$ rozwiązujący zadanie.

Odległość punktu A (A' A'') od prostej m (m' m''), mającej dowolne położenie w przestrzeni, wyznaczaliśmy na Rys. 169. Odcinek AB położyliśmy na płaszczyźnie poziomej, przechodzącej przez punkt A , otrzymując odcinek $A'B^0$, wyrażający prawdziwą odległość



Rys. 168.

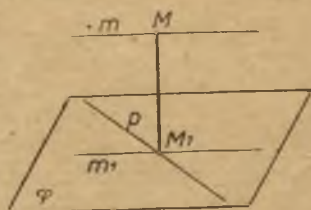


Rys. 169.

punktu A od prostej m .

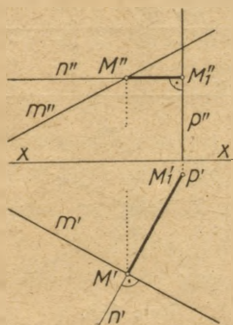
6. Wyznaczyć odległość dwóch prostych skośnych m i p . Przez odległość dwóch prostych skośnych rozumiemy ich odległość najkrótszą, a więc odcinek wspólnie prostopadły do obu prostych. Odcinek ten znajdziemy w ogólnym przypadku w następujący sposób: Przez prostą p (Rys. 170.), poprowadzimy płaszczyznę φ , równoległą do prostej m ,

a następnie rzucimy prostą m w kierunku prostopadłym na tę płaszczyznę. Rzut m_1 przetnie prostą p w punkcie M_1 , w którym wyprowadzona prostopadła n do do płaszczyzny φ , przetnie prostą m w punkcie M . Odcinek MM_1 jest wspólnie prostopadły do prostych m i p i wyraża ich najkrótszą odległość.



Rys. 170.

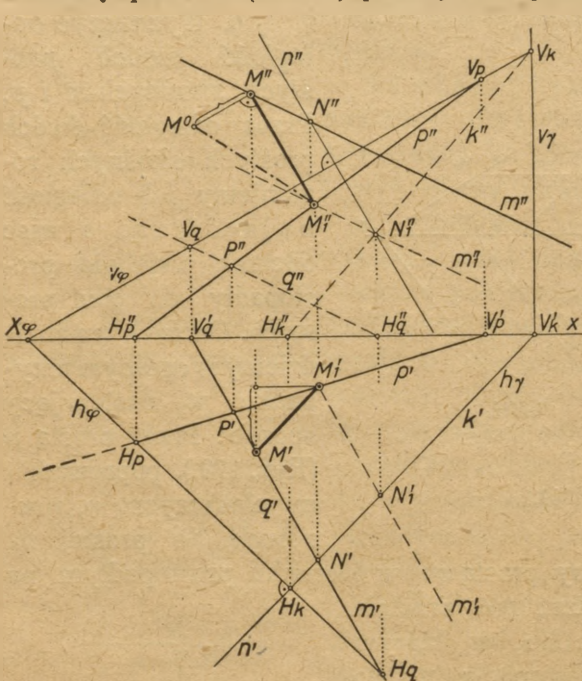
a) Prosta $p(p' p'')$ jest pionową (Rys. 171.). Wspólna prostopadła $n(n' n'')$ jest poziomą, jej rzut poziomy n' jest prostopadły do m' . Odcinek $M' M_1'$ wyraża wprost odległość prostych skośnych m i p .



Rys. 171.

b) Obie proste m i p mają dowolne położenie w przestrzeni (Rys. 172.). Na prostej $p(p' p'')$ przyjmie my dowolny punkt $P(P' P'')$, przez który prowadzimy prostą $q(q' q'')$, równoległą do prostej $m(m' m'')$. Proste q i p wyznaczają płaszczyznę $\varphi(h_\varphi v_\varphi)$, równoległą do prostej m .

Rzućmy prostopadłe na płaszczyznę φ dowolny punkt $N(N' N'')$ prostej m , a przez otrzymany punkt



Rys. 172.

$N_1(N_1' N_1'')$ poprowadźmy prostą $m_1(m_1' m_1'')$ równoległą do $m(m' m'')$. Prosta m_1 przecnie prostą $p(p' p'')$ w punkcie $M_1(M_1' M_1'')$, z którego wyprowadzimy prostopadłą do płaszczyzny φ . Prosta ta przecnie prostą m w punkcie $M(M' M'')$. Odcinek $M_1 M$ jest wspólnie prostopadły do obu prostych skośnych, jego kład

$M_1'' M^0$ wykonany na pł. pionową przechodzącą przez M_1 , wyraża prawdziwą odległość tych prostych.

Inny sposób wyznaczenia wspólnej prosto-

padłej do dwóch prostych skośnych m i p otrzymamy zważywszy, że owa wspólna prostopadła jest równoległą do każdej płaszczyzny prostopadłej zarówno do jednej, jak i do drugiej prostej. Prowadzimy więc płaszczyznę prostopadłą do prostej m i drugą prostopadłą do prostej p . Wyznamy krawędź k obu płaszczyzn, a następnie prostą, przecinającą dahe proste skośne i równoległą do krawędzi k (patrz ust. 57. zadanie 3.).

7. Dane są: punkt $A (A' A'')$ i dwie skośne $l (l' l'')$ i $m (m' m'')$; przez punkt A poprowadzić prostą przecinającą prostą l , a prostopadłą do prostej m . Przez punkt A poprowadzimy płaszczyznę α , prostopadłą do prostej m , a krawędź tej płaszczyzny z płaszczyzną $\beta \equiv (A, l)$ rozwiąże zadanie.

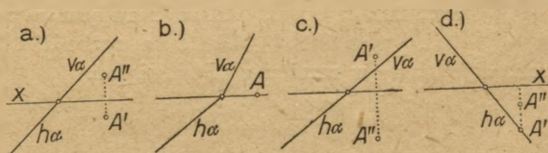
8. Dane są: punkt $A (A' A'')$, prosta $l (l' l'')$ i płaszczyzna $\alpha (h\alpha, v\alpha)$; przez punkt A poprowadzić prostą równoległą do płaszczyzny α , a prostopadłą do prostej l . Przez punkt A poprowadzimy płaszczyznę $\beta \parallel \alpha$, a następnie płaszczyznę $\gamma \perp l$. Krawędź płaszczyzn β i γ rozwiąże zadanie.

9. Przez daną prostą p poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do danej płaszczyzny φ . Z dowolnego punktu prostej p prowadzimy prostą q , prostopadłą do płaszczyzny φ ; płaszczyzna $\psi \equiv (p, q)$ rozwiązuje zadanie.

62. Ćwiczenia.

1. Wyznaczyć odległość punktu $A (A' A'')$ od płaszczyzny $\alpha (h\alpha, v\alpha)$, w następujących przypadkach (Rys. 173 a, b, c, d.).

2. Wyznaczyć rzut prostokątny odcinka AB na płaszczyznę $\alpha (h\alpha, v\alpha)$ w następujących przypadkach:

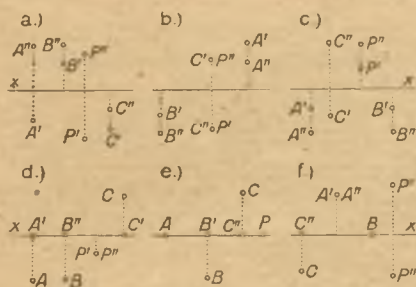


Rys. 173 a—d.

- α nachylona do obu rzutni,
- $\alpha \parallel x$,
- $\alpha \equiv \delta I$,
- $\alpha \equiv \delta II$.

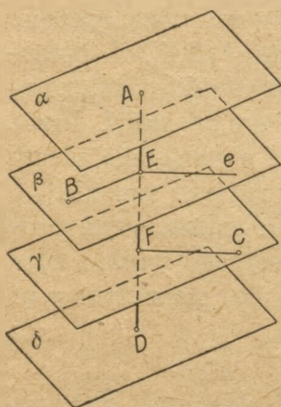
3. Przez daną prostą $l (l' l'')$ poprowadzić płaszczyznę, prostopadłą do danej płaszczyzny $\alpha (h\alpha, v\alpha)$ i wyznaczyć jej ślady w następujących przypadkach:

- $l \parallel \pi_1$, α dowolnie położona,
- $l \perp \pi_1$, α „ „
- l leży na δI , α dowolnie położona,
- l „ „ δII , α „ „
- $l \equiv x$, α „ „



Rys. 174 a—f.

go na trzy równe części.



Rys. 175.

zań, więc mamy w rezultacie 12 rozwiązań.

4. Wyznaczyć odległość punktu P (P' P'') od płaszczyzny, przechodzącej przez punkty A, B, C w przypadkach podanych na Rys. 174 a—f.

5. Przez każdy z czterech dowolnie w przestrzeni leżących punktów A, B, C i D , poprowadzić płaszczyznę tak, aby wszystkie były do siebie równoległe i równo od siebie oddalone.

Rozwiązanie: Weźmy pod uwagę odcinek AD (Rys. 175.) i wyznaczmy punkty E i F dzielące

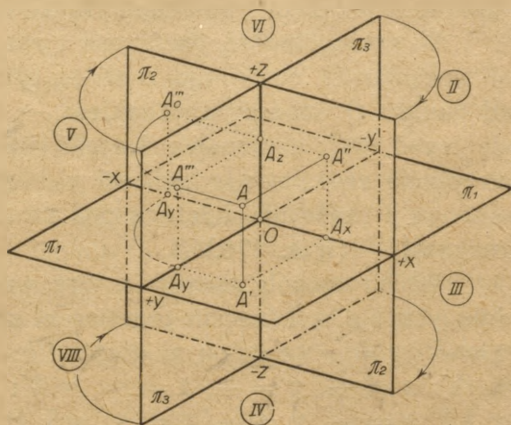
Połączmy punkt B z punktem E , a przez ten ostatni poprowadźmy prostą e , równoległą do FC . Płaszczyzna $\beta \equiv (e, EB)$ i płaszczyzny α, γ i δ , przechodzące przez punkty A, F i D równoległe do płaszczyzny β , rozwiązują zadanie. Dalsze rozwiązanie otrzymamy łącząc punkty A z B, A z C, B z C, B z D i C z D i powtarzając tę samą konstrukcję. Otrzymamy w ten sposób dalszych pięć rozwiązań. Ale zważmy jeszcze, odnośnie do pierwszego rozwiązania, że punkt B połączyć można z punktem F , a zaś punkt C z punktem E a prostą e poprowadzić równoległą do CE . Wówczas płaszczyzna β , wyznaczona przez proste e i BF i płaszczyzny przechodzące przez punkty A, C i D , równoległe do β , stanowią dalsze rozwiązanie zadania, a ponieważ możliwość ta zachodzi dla dalszych pięciu rozwią-

§ 4. WPROWADZENIE TRZECIEJ PŁASZCZYZNY RZUTÓW

63. Rzutnia boczna. Rzuty boczne punktów. Zauważyliśmy, że w pewnych przypadkach (prosta prostopadła do osi rzutów, płaszczyzna przechodząca przez oś) położenie prostej w przestrzeni nie da się określić jej rzutami, a położenie płaszczyzny jej śladami i że w tych przypadkach uciekać się musimy do pośrednictwa poszczególnych punktów przyjętych na prostej, względnie na płaszczyźnie. Względ na korzyści wynikające z wyznaczania położenia prostej jej rzutami, a płaszczyzny jej śladami, ale przede wszystkim względ na możli-

wość uproszczenia i skrócenia konstrukcyj, odnoszących się do zadań bardziej zawitych — o czym przekonamy się na długim szeregu przykładów — poleca wprowadzenie trzeciej płaszczyzny rzutów, t. zw. płaszczyzny bocznej rzutów, czyli krótko rzutni bocznej. Płaszczyźnie tej nadajemy położenie prostopadłe do osi rzutów x , a więc prostopadłe do rzutni poziomej i pionowej, albo prostopadłe tylko do jednej z tych rzutni.

a) *Płaszczyzna boczna π_3 prostopadła do osi rzutów x* przecina rzutnię poziomą π_1 w prostej, którą nazywamy osią rzutów y ; prosta przecięcia się płaszczyzn π_1 i π_3 stanowi oś rzutów z (Rys. 176.). Osi x , y i z są wzajemnie do siebie prostopadłe i przecinają się w punkcie O , który nazywamy początkiem lub środkiem tego układu osi. Płaszczyzny rzutów π_1 , π_2 i π_3 dzielą przestrzeń na ośm części; za pierwszą część przestrzeni uważamy tę, która leży przed rzutnią pionową, po prawej stronie bocznej a nad rzutnią poziomą. O położeniu dalszych ósemek przestrzeni informuje nas Rys. 176.



Rys. 176.

Płaszczyzny przechodzące przez dowolny punkt A , prostopadłe do osi rzutów, przecinają je w punktach A_x , A_y , A_z i wraz z płaszczyznami rzutów tworzą równoległościan prosty. Wierzchołki A' , A'' i A''' tego równoległościanu są rzutami punktu A na płaszczyznę poziomą, pionową i boczną. Odcinki OA_x , OA_y , OA_z osi rzutów, nazywamy współrzędnymi punktu A i oznaczamy mianem odpowiednich osi, więc literami x , y , z .

Z Rys. 176. czytamy, że wysokość AA'' punktu A , równa jest odległości rzutu pionowego A'' od osi x , równa odległości rzutu bocznego A''' od osi y i równa w końcu współrzędnej $OA_z = z$. Głębokość AA''' punktu A , równa jest odległości rzutu poziomego A' tego punktu od osi x , równa odległości rzutu bocznego A''' od osi z i równa wreszcie współrzędnej $y = OA_y$.

Odległość punktu od rzutni bocznej nazywać będziemy krótko „szerokością” punktu. Jeżeli punkt znajduje się po prawej stronie rzutni bocznej, więc w *I*, *II*, *III* lub *IV* części przestrzeni — to szerokość jego określamy jako dodatnią, szerokość punktów leżących po lewej stronie rzutni bocznej uważamy za ujemną.

Szerokość $A A'''$ punktu A , równa jest — jak czytamy z Rys. 176. — odległości rzutu poziomego A' od osi y , równa odległości rzutu pionowego A'' od osi z i równa spólrzędnej $x = OA_x$.

Ażeby spólrzędne punktu wyrazić mogły także i część przestrzeni, w której dany punkt się znajduje, nadajemy osiom rzutów, a przez to i spólrzędnym znaki $+$ lub $-$.

W szczególności, część osi x rozciągającą się na prawo od początku O , otrzymuje znak $+$, część osi x leżącą na lewo od punktu O oznaczmy znakiem $-$. Część osi y , znajdująca się przed rzutnią pionową i część osi z nad rzutnią poziomą otrzymują znaki $+$; część osi y rozciągającą się za rzutnią pionową i część osi z leżącą pod rzutnią poziomą oznaczamy znakami $-$ (Rys. 176.).

W ten sposób wszystkie trzy spólrzędne punktów znajdujących się w *I*. części przestrzeni są dodatnie, w części *II*: $x = +$, $y = -$, $z = +$; w części *III*: $x = +$, $y = -$, $z = -$; w *IV*: $x = +$, $y = +$, $z = -$; w *V*: $x = -$, $y = +$, $z = +$; w *VI*: $x = -$, $y = -$, $z = +$; w *VII*: $x = -$, $y = -$, $z = -$; w *VIII*: $x = -$, $y = +$, $z = -$.

Przystępując do sprowadzenia płaszczyzn rzutów na jedną płaszczyznę rysunkową, zauważmy, że rzutnię boczną położyć można na poziomą, albo też pionową, a następnie te dwie rzutnie — w poznany już sposób — (ust. 34.), sprowadzić do jednej płaszczyzny.

Obrotu płaszczyzny bocznej rzutów na rzutnię pionową dokonywamy około osi z , i to dla punktów leżących w częściach przestrzeni na prawo rzutni π_3 , zgodnie z ruchem wskazówki zegara, leżącego na płaszczyźnie poziomej, dla punktów leżących w częściach *V*, *VI*, *VII* i *VIII* w kierunku przeciwnym.

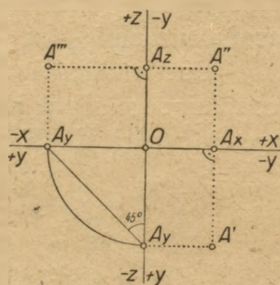
Obrót rzutni bocznej na poziomą wykonywamy około osi y , a mianowicie dla punktów znajdujących się w pierwszych czterech ósemkach, w kierunku przeciwnym ruchowi wska-

zówki zegara, przytwierdzonego na płaszczyźnie pionowej, dla punktów znajdujących się w innych ósemkach, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówki tego zegara.

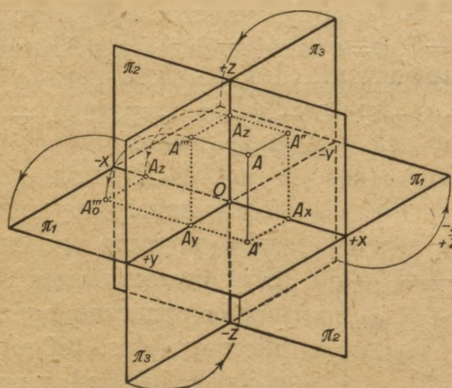
Przyjmijmy punkt A w pierwszej części przestrzeni, a po wyznaczeniu jego rzutów A' A'' A''' (Rys. 177.), obróćmy rzutnię boczną około osi z , aby padła na pionową, a następnie rzutnię pionową połączmy na poziomą.

Oś rzutów y leży równocześnie na rzutni poziomej i bocznej; po kładzie płaszczyzny bocznej na pionową, znakiem $+$ oznaczona część osi y padnie na ujemną część osi x , a równocześnie oś $-y$ zleje się z osią $+x$. Po sprowadzeniu płaszczyzny pionowej na rzutnię poziomą, oś $-z$ nakryje się osią $+y$, zaś oś $+z$ padnie na oś $-y$ (Rys. 177.).

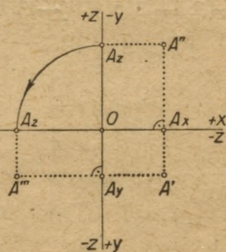
Punkt A_y po zakreszeniu ćwiartki obwodu koła na płaszczyźnie poziomej, padnie na oś oznaczoną literami $-x$, $+y$, po lewej stronie początku układu O . Rzut boczny A''' po sprowadzeniu płaszczyzny bocznej na pionową, oznaczyliśmy na Rys. 176. literą A_0''' , aby w ten sposób wskazać nowe położenie tego punktu. W Rys. 177. znak o przy A''' opuściliśmy jako zbędny.



Rys. 177.



Rys. 178 a.



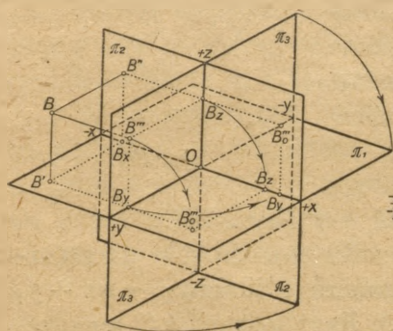
Rys. 178 b.

Z Rys. 178 a. odczytamy z łatwością przebieg kładu rzutni bocznej na poziomą, dokonanego dokoła osi y . Znakiem $+$

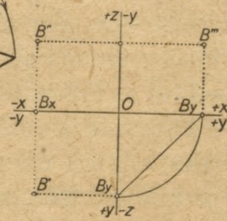
oznaczona część osi z padnie na oś $-x$, a zaś $-z$ zejdzie się z osią $+x$.

Ponieważ oś z leży na rzutni bocznej i na pionowej, więc po sprowadzeniu płaszczyzny pionowej na poziomą oś $+z$ zleje się z osią $-y$, a oś $-z$ z osią $+y$. Punkt A_z zakresli ćwiartkę obwodu koła na rzutni pionowej i padnie na oś, oznaczoną literami $-x$, $+z$ (Rys. 178 b.).

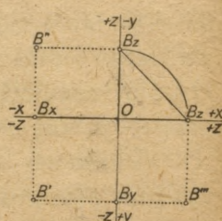
Bez trudności potrafimy wyznaczyć teraz rzuty punktu znajdującego się w przestrzeni na lewo od rzutni bocznej, więc np. w części V. (Rys. 179 a.). Jak w przypadku poprzednim,



Rys. 179 a.



Rys. 179 b.

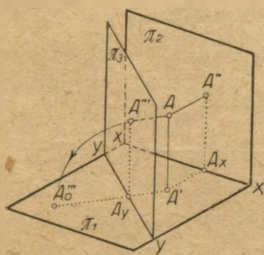


Rys. 179 c.

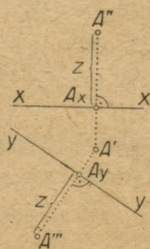
kład rzutni bocznej wykonać możemy na rzutnię pionową (Rys. 179 b.), albo poziomą (Rys. 179 c.).

U w a g a. Symbol: $A(a, b, c)$ oznaczać będzie punkt A o współrzędnych $x = a$, $y = b$, $z = c$ przyjętych jednostek długości.

Cwiczenie. Wykreślić rzuty następujących punktów: $A(4, 5, 4)$; $B(4, -3, -3)$; $C(-3, +4, +3)$; $D(-3, -3, -4)$; $E(1, -4, +3)$; $F(4, 6, -5)$.



Rys. 180 a.



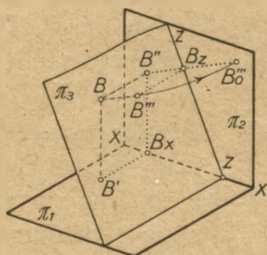
Rys. 180 b.

b) Rzutnia boczna jest płaszczyzną poziomo lub pionowo rzucającą. Ślad poziomy rzutni bocznej π_3 oznaczać będziemy literą y (Rys. 180 a.), pomijając jej ślad pionowy, który dla konstrukcyi przeważnie nie ma znaczenia. Punkt A''' jest rzutem bocz-

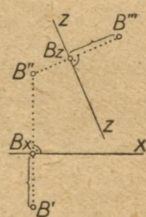
nym punktu A . Gdy płaszczyzna π_3 padnie na rzutnię poziomą,

punkt A''' zajmie położenie A_0''' , na prostopadłej wyprowadzonej z punktu A' do osi y . Po sprowadzeniu trzech rzutni do płaszczyzny rysunku, otrzymamy Rys. 180 b., w którym jednak rzut boczny oznaczyliśmy literą A''' , pomijając jako zbędny znak o u dołu. Gdy dana jest oś y i rzuty A' i A'' , znajdziemy rzut A''' , uwzględniając, że: $AA' = A''A_x = A'''A_y = z$.

Ślad pionowy płaszczyzny pionowo rzucającej, uważanej za rzutnię boczną, oznaczamy literą z . Z korzyścią będzie dla czytelnika, gdy sprawę rzutu punktu B na płaszczyznę pionowo rzucającą π_3 odtworzy bezpośrednio z Rys. 181 a i b., bez wszelkich z naszej strony wyjaśnień.



Rys. 181 a.



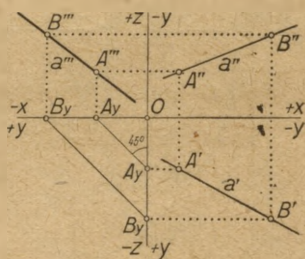
Rys. 181 b.

64. Rzuty i ślady boczne prostej. Z dwóch danych rzutów a' i a'' prostej a , znajdziemy rzut trzeci a''' (Rys. 182.), jeśli wyznaczmy trzecie rzuty dwóch dowolnych punktów A i B tej prostej.

Przy tej sposobności zauważyć należy, że łuki, którymi przenosimy punkty z jednej osi na drugą, zastępujemy chętnie prostymi, jak to uwidocznione jest na Rys. 182.

W ogólnym wypadku dwa rzuty prostej (poziomy i pionowy, poziomy i boczny, pionowy i boczny) wyznaczają położenie prostej w przestrzeni. Jeżeli jednak prosta leży na płaszczyźnie φ , która jest prostopadłą do którejkolwiek z osi rzutów, a więc prostopadłą do dwóch rzutni, to jednym z dwóch rzutów, wyznaczających położenie prostej w przestrzeni, musi być rzut na tę rzutnię, do której płaszczyzna φ nie jest prostopadłą.

Gdy rzutnia boczna jest prostopadłą do osi rzutów x , to prosta równoległa do tej płaszczyzny wyznaczona jest rzutem bocznym i jednym z dwóch dalszych rzutów; położenie prostej, równoległej do płaszczyzny poziomej



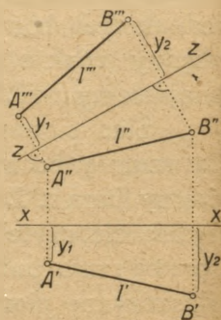
Rys. 182.

wyznaczone jest rzutem poziomym i rzutem pionowym lub bocznym; prosta równoległa do rzutni pionowej wyznaczona jest rzutem pionowym i jednym z dwóch dalszych rzutów.



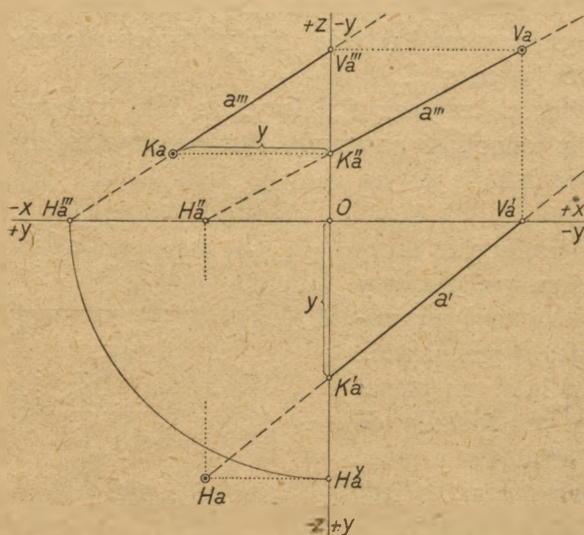
Rys. 183.

Rzut boczny l''' prostej l na płaszczyznę poziomą rzucającą (Rys. 183.) znajdziemy, łącząc rzuty boczne dwóch dowolnych punktów A i B tej prostej. Podobnie wyznaczaliśmy rzut boczny l''' prostej l (l' l'') na płaszczyznę pionowo rzucającą (Rys. 184.).



Rys. 184.

Rozważmy z kolei sprawę śladów prostej a (a' a'' a''') (Rys. 185.), odniesionej do układu trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn rzutów. Ślad pionowy V_a leży, jak widzimy,



Rys. 185.

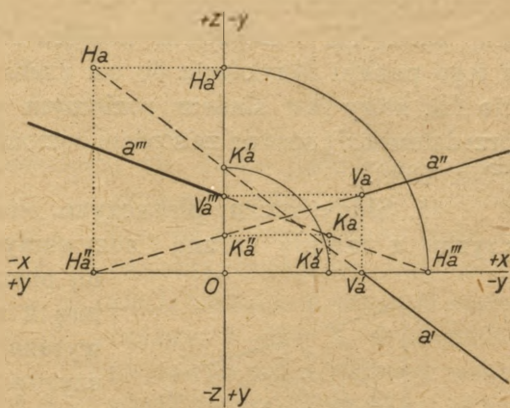
nad osią rzutów x , jego rzut poziomy V_a' leżeć będzie oczywiście na osi x , a w szczególności na tej jej części, którą oznaczyliśmy znakiem $+$. Rzut pionowy V_a''' śladu pionowego leży na osi $+z$. Ślad poziomy H_a prostej a leży na obszarze rzutni poziomej, rozciągającym się

przed rzutnią pionową, a po lewej stronie rzutni bocznej, czyli uważać go można za należący do V . lub $VIII$. części przestrzeni. Rzut pionowy H_a'' śladu poziomego leżeć będzie na osi $-x$ i oczywiście na a'' ; rzut boczny H_a''' leży na osi

+y i na rzucie a''' . Aby otrzymać punkt H_a''' , rzucimy punkt H_a na oś (+y - z) i otrzymany punkt H_a^y odniesiemy na oś +y, leżącą na rzutni bocznej. Ślad boczny K_a leży przed rzutnią pionową i nad poziomą, a wyznaczenie go tłómaczy wyraźnie Rys. 185.

Rys. 186. przedstawia rozwiązanie zadania następującego: daną jest prosta a (a' a''), wyznaczyć jej rzut

boczny za pośrednictwem jej śladów. Szukana prosta a''' przejdzie przez wyszukać się mające punkty H_a''' i V_a''' . Wyznaczenie śladu pionowego V_a i jego rzutu poziomego V_a' i boczne V_a''' nie wymaga wyjaśnień. Ślad poziomy H_a leży w obszarze przestrzeni rozciągającym się za rzutnią

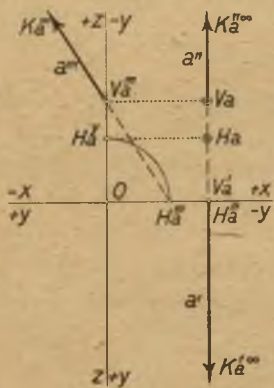


Ryc. 186.

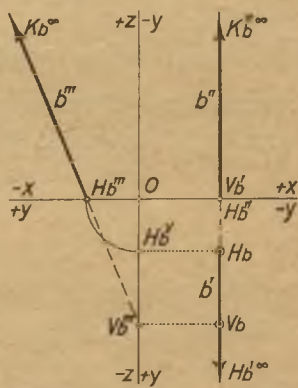
pionową i po lewej stronie bocznej. Ślad boczny K_a leży nad rzutnią poziomą

a za pionową; najpierw otrzymamy jego rzut pionowy K_a'' , a na przecięciu się równoległej do osi x z prostą a''' , ślad K_a .

Ponieważ rzut poziomy, śladu bocznego, leżeć musi na rzucie poziomym prostej a , więc będzie to punkt przecięcia się $K'a$ prostych a' i z . Podczas obrotu rzutni bocznej około osi z, punkt $K'a$ zakreśli na rzutni poziomej w III. obszarze przestrzeni łuk



Rys. 187.



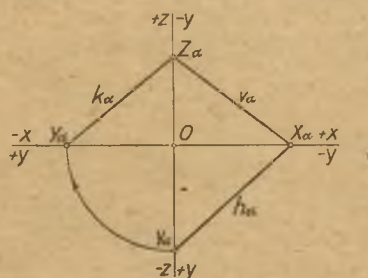
Rys. 188.

koła i znajdzie się w punkcie $K_a y$. Odcinek $K_a K_a'$ po obrocie zajmie położenie $K_a y$ $K_a \perp x$.

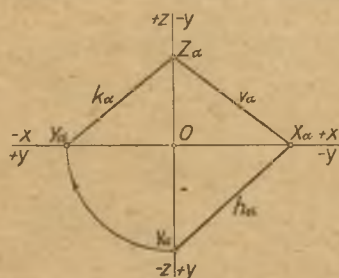
Wyznaczenie śladów prostych, równoległych do rzutni bocznej przeprowadziliśmy na Rys. 187. i 188. Ślady boczne a więc i ich rzuty są punktami niewłaściwymi. Ślady pionowe i ich rzuty wyznaczymy bez trudności. Rzut boczny H_a''' śladu poziomego, jest punktem przecięcia się prostych a''' i $+x$. Przed sprowadzeniem rzutni bocznej do płaszczyzny rysunkowej punkt H_a''' zajmował miejsce $H_a y$; prosta wykreślona z tego punktu równoległe do osi rzutu x , przecina a' w punkcie H_a , który jest śladem poziomym prostej a . Analogicznie przedstawia się sprawa ze śladem poziomym prostej b (b' , b'' , b''') (Rys. 188.).

65. Ślady boczne płaszczyzn. Prosta przecięcia się płaszczyzny z rzutnią boczną nazywamy śladem bocznym tej płaszczyzny i oznaczamy literą k ze wskaźnikiem u dołu, wyrażającym uważaną płaszczyznę. Ślad boczny k_α płaszczyzny α wyznaczony jest dwoma punktami, a mianowicie punktem przebicia się Y_α osi y z tą płaszczyzną i punktem Z_α , w którym oś z przebija płaszczyznę α (Rys. 189.)

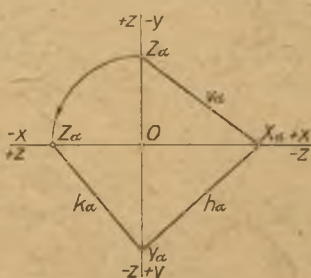
Podczas obrotu rzutni bocznej na pionową, punkt Y_α zakreśli ćwierć obwodu koła, punkt Y_α leżący na osi $-x$, $+y$ połączony z punktem Z_α ,



Rys. 189.



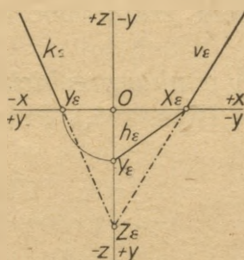
Rys. 190 a.



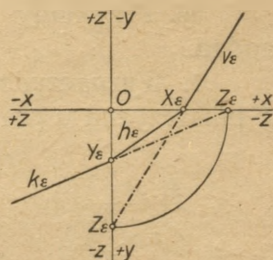
Rys. 190 b.

wyznacza ślad boczny k_α płaszczyzny α (Rys. 190 a.). — Gdy rzutnię boczną obrócimy na poziomą, to ślad boczny będzie prostą łączącą punkt Y_α z punktem Z_α , leżącym na osi $-x$, $+y$ (Rys. 190 b.).

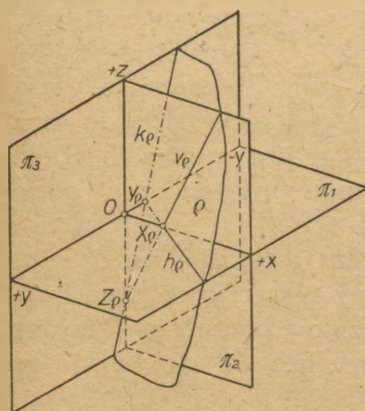
Aby znaleźć ślad boczny płaszczyzny przy założeniu, że rzutnia boczna pada na pionową, należy punkt przecięcia się śladu poziomego płaszczyzny z osią y przenieść w kierunku zgodnym z ruchem wskazówki zegarowej na oś x i punkt ten połączyć z punktem przecięcia się śladu pionowego płaszczyzny z osią z . Przy założeniu, że rzutnia boczna pada na poziomą, obracamy punkt przecięcia się śladu pionowego płaszczyzny z osią z w kierunku przeciwnym ruchowi wskazówki zegarowej na oś x i otrzymany punkt łączymy z punktem przecięcia się śladu poziomego płaszczyzny z osią y , otrzymując ślad boczny.



Rys. 191.



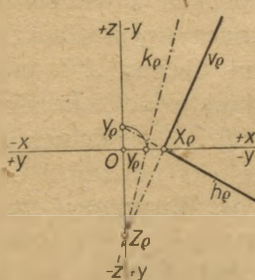
Rys. 192.



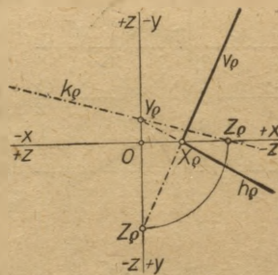
Rys. 193.

nię boczną położyliśmy na pionową. Rys. 192. podaje to samo zadanie, z tą różnicą, że rzutnię boczną obróciliśmy na poziomą.

Wyznaczenie śladu bocznego płaszczyzny ρ , która przebiega oś z pod rzutnią poziomą w punkcie Z_ρ , zaś oś y za rzutnią pionową w punkcie Y_ρ , podają Rysunki 193. i 194 a—b.



Rys. 194 a.

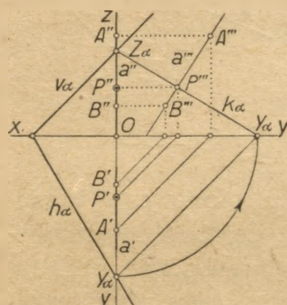


Rys. 194 b.

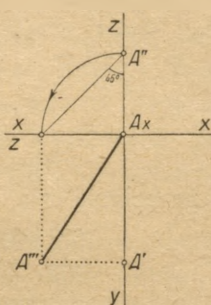
Obrót rzutni bocznej w Rys. 194 a. wykonaliśmy na pionową, w Rys. 194 b. na poziomą płaszczyznę rzutów.

66. Przykłady użycia rzutni bocznej do rozwiązywania zadań.

1. Wyznaczyć rzuty punktu przebiecia się prostej $a(a' a'')$ z płaszczyzną $\alpha(h_\alpha v_\alpha)$ (Rys. 195.). Przez prostą a , wyznaczoną dwoma punktami $A(A' A'')$ i $B(B' B'')$, poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do



Rys. 195.

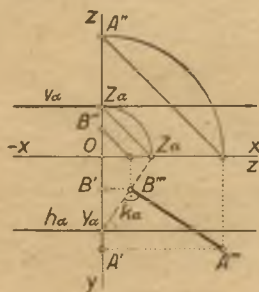


Rys. 196.

osi rzutów x i uważamy ją za rzutnię boczną. Wyznamy rzut boczny a''' prostej a i ślad boczny k_α płaszczyzny α , to punkt przecięcia się P''' prostych a''' i k_α jest rzutem bocznym szukanego punktu. Z łatwością wyznaczymy teraz rzut poziomy P' i pionowy P'' .

2. Wyznaczyć odległość punktu $A(A' A'')$ od osi rzutów x . Przez punkt A poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do osi rzutów x , a uważając ją za rzutnię boczną, połączmy np. na rzutnię poziomą (Rys. 196.), to odcinek $A''' A_x$ wyraża odległość punktu A do osi x .

3. Wyznaczyć odległość punktu $A(A' A'')$ od płaszczyzny $\alpha(h_\alpha v_\alpha)$, równoległej do osi rzutów x . Przez punkt A prowadzimy rzutnię boczną prostopadłą do osi rzutów x , wyznaczymy ślad boczny k_α płaszczyzny α i rzut boczny A''' punktu A (Rys 197.). Z punktu A''' kreślimy prostopadłą do prostej k_α , a odcinek $A''' B'''$ równy jest odległości punktu A od płaszczyzny α .



Rys. 197.

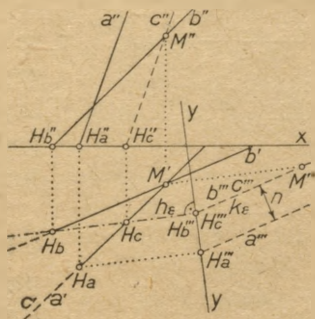
4. Wyznaczyć rzuty krawędzi płaszczyzn $\alpha(h_\alpha v_\alpha)$ i $\beta(h_\beta v_\beta)$, równoległych do osi rzutów x . Przyjawszy rzutnię boczną prostopadłą do osi x , wyznaczymy ślady boczne k_α i k_β danych płaszczyzn (Rys. 198.)

i otrzymamy rzut boczny a''' , a także i dwa dalsze rzuty a'' i a' szukanej krawędzi.

5. Wyznaczyć odległość dwóch prostych skośnych $a(a' a'')$ i $b(b' b'')$. Jeżeli przez prostą b poprowadzimy płaszczyznę ε równoległą do prostej a , to odległość prostej a od płaszczyzny ε wyraża odległość prostych skośnych a i b .

Niechaj punkt przecięcia się M' rzutów poziomych a' i b' danych prostych (Rys. 199.) będzie rzutem poziomym punktu M , leżącego na prostej b . Oznaczywszy rzut pionowy punktu M literą M'' , poprowadzimy przezeń prostą c'' , którą uważamy za rzut pionowy prostej c , przechodzącej przez punkt M równoległe do prostej a . Rzut poziomy c' prostej c schodzi się z prostą a' . Proste b i c wyznaczają płaszczyznę ε , równoległą do prostej a . Wyznamy ślad poziomy h_ε płaszczyzny ε , a następnie,

przyjawszy płaszczyznę rzutów prostopadłą do poziomej i do płaszczyzny ε , wyznaczmy ślad boczny k_ε tej ostatniej, a to łącząc rzut

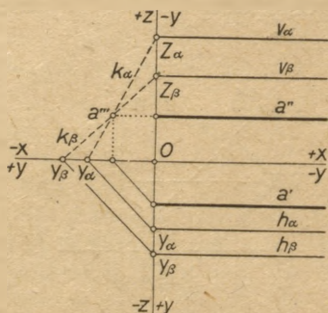


Rys. 199.

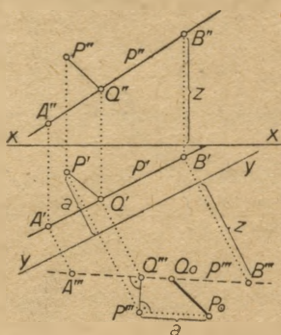
boczny M'''

punktu M z punktem przecięcia się osi y ze śladem h_ε . Ponieważ prosta a jest równoległą do płaszczyzny ε , więc jej rzut boczny a''' otrzymamy, kreśląc z punktu H_a''' prostą równoległą do k_ε . Odległość prostych równoległych k_ε i a''' równa jest odległości prostych skośnych a i b .

6. Wyznaczyć odległość punktu $P(P' P'')$ od prostej $p(p' p'')$ (Rys. 200.*). Wyznamy rzut boczny p''' prostej p i rzut boczny P''' punktu P na płaszczyznę poziomo rzuca-



Rys. 198.



Rys. 200.*

2. Dane są rzuty prostej l , przechodzącej przez punkty $A(0, 5, 3)$ i $B(7, -3, 1)$; wyznaczyć rzuty punktów, leżących na prostej l , a mających głębokość równą $4; 3; 0; -4$ i rzuty punktów o wysokości $4; 2; 0; -2; -3$.

3. Wyznaczyć rzuty i ślady poszczególnych boków trójkąta ABC , którego wierzchołkami są punkty:

- a) $A(4, 5, 4)$, $B(7, 2, 8)$, $C(10, 2, 1)$,
- b) $A(1, 7, 3)$, $B(6, 2, 3)$, $C(9, 3, 1)$,
- c) $A(1, -4, 7)$, $B(6, -5, 3)$, $C(9, -8, 3)$,
- d) $A(1, -5, -1)$, $B(4, -1, -8)$, $C(8, -9, -4)$,
- e) $A(7, -3, -6)$, $B(-3, -6, 7)$, $C(-6, 7, -3)$,
- f) $A(6, 3, -4)$, $B(3, -4, 6)$, $C(-4, 6, 3)$,
- g) $A(0, 4, 0)$, $B(5, 1, 0)$, $C(3, 0, 6)$.

4. Wykreślić rzuty równoległoboku $ABCD$, którego trzy wierzchołki są dane:

- a) $A(2, 5, 3)$, $B(7, 2, 8)$, $C(13, 5, 2)$,
- b) $A(1, 4, 3)$, $B(5, 8, 3)$, $C(11, 3, 7)$,
- c) $A(1, -2, 4)$, $B(6, 5, -10)$, $C(9, -5, 10)$,
- d) $A(4, -1, -8)$, $B(-1, -8, 4)$, $C(-8, 4, -1)$.

5. Dane są rzuty punktu $A(5, 4, 6)$. Wyznaczyć rzuty oraz ślady prostej, która przechodzi przez punkt A i jest:

- a) $\parallel$ do π_1 , b) $\parallel$ do π_2 , c) $\parallel$ do osi x , d) $\perp$ do π_1 , e) $\perp$ do π_2 ,

6. Rozwiązać powyższe zadania, skoro położenie punktu A jest następujące:

- a) $A(0, -5, 4)$, b) $A(0, -4, 4)$, c) $A(0, -4, -5)$,
- d) $A(0, 0, 5)$, e) $A(0, -5, 0)$, f) $A(0, -3, +3)$.

7. Dane są rzuty punktu $P(5, 1, 4)$ i prostej l , wyznaczonej śladami $H(3, 8, 0)$ i $V(10, 0, 8)$.

Wyznaczyć rzuty prostej m , która przechodzi przez punkt P , przecina prostą l i jest:

- a) równoległa do π_1 ,
- b) „ „ do π_2 .

8. Rozwiązać zadanie 7, jeżeli położenie punktu P i prostej $l \equiv (H, V)$ określają:

- a) $P(2, 7, 5)$, $H(8, 9, 0)$, $V(1, 0, 9)$,
- b) $P(6, -7, 4)$, $H(3, -4, 0)$, $V(13, 0, 6)$,
- c) $P(7, 1, -4)$, $H(2, 10, 0)$, $V(5, 0, -8)$.

9. Dane są rzuty dwóch prostych l i m , przecinających się w punkcie $A(3, 5, 4)$.

Skonstruować ślady płaszczyzny α , wyznaczonej prostymi l i m , przyczem:

- a) $l \parallel \pi_1$, m dowolna, g) $l \perp \pi_1$, $m \parallel \pi_2$,
- b) $l \parallel \pi_1$, $m \parallel \pi_2$, h) $l \perp \pi_1$, $m \parallel$ do osi x ,
- c) $l \parallel \pi_1$, $m \parallel$ do osi x , k) $l \parallel \pi_1$, $m \perp \pi_1$,
- d) $l \perp \pi_1$, m dowolna, l) $l \parallel \pi_2$, $m \perp \pi_2$,
- e) $l \perp \pi_1$, $m \parallel \pi_1$, m) $l \parallel$ do osi x , $m \perp \pi_2$,
- f) $l \parallel \pi_2$, $m \parallel$ do osi x , n) $l \perp \pi_1$, $m \perp \pi_2$.

10. Rozwiązać zadanie 9. w przypadkach a)... n), jeżeli położenie punktu A będzie następujące:

- | | |
|---------------------|--------------------|
| a) $A(3, -4, 6)$, | d) $A(3, 4, -6)$, |
| b) $A(3, -4, -5)$, | e) $A(3, 4, -4)$, |
| c) $A(3, -4, 4)$, | f) $A(3, 0, -4)$, |
| g) $A(3, 0, 5)$. | |

11. Dane są rzuty prostej l i punktu A , nie leżącego na tej prostej; wykreślić ślady płaszczyzny α ($h\alpha$ $v\alpha$), wyznaczonej elementami l i A , które zajmują następujące położenia w przestrzeni:

- | | |
|--|--|
| a) $l \parallel \pi_1, A(0, 3, -5)$, | f) $l \parallel$ do osi $x, A(3, 3, -3)$, |
| b) $l \parallel \pi_1, A(0, -4, -4)$, | g) $l \perp \pi_1, A(4, -5, 2)$, |
| c) $l \parallel \pi_1, A(6, -5, +2)$, | h) $l \perp \pi_2, A(2, -3, -5)$, |
| d) $l \parallel \pi_2, A(3, 2, -4)$, | j) $l \parallel \pi_1, A(3, 0, 3)$, |
| e) $l \parallel \pi_2, A(3, -3, -3)$, | k) $l \parallel \pi_2, A(3, -3, 0)$. |

12. Dane są rzuty dwóch trójkątów ABC i MNP ; nie posługując się śladami płaszczyzn tych trójkątów, wyznaczyć przenikanie się tych trójkątów, jeżeli:

- a) $A(2, 2, 4), B(12, 5, 5), C(8, 9, 9); M(3, 5, 9), N(10, 3, 1), P(12, 9, 7)$.
 b) $A(2, 4, 2), B(10, 2, 10), C(6, 10, -3); M(4, 6, 1), N(5, -3, 3), P(10, 5, 10)$.
 c) $A(0, 2, -4), B(8, 0, 0), C(3, -4, 4); M(0, -3, 0), N(2, 4, 2), P(6, -3, 6)$.

13. Dane są rzuty punktu P (P' P'') i ślady płaszczyzny α ($h\alpha$ $v\alpha$). Przez punkt P poprowadzić płaszczyznę $\beta \parallel$ do α , skoro:

- a) $\alpha \parallel \pi_1, P(0, 6, -6)$,
 b) $\alpha \parallel$ do osi $x, P(0, -4, 6)$,
 c) $\alpha \parallel \pi_2, P(5, -4, -4)$.

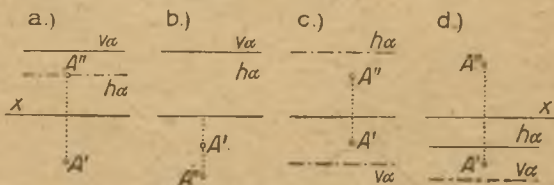
14. Wykreślić ślady płaszczyzny $\alpha \perp$ do prostej a (a' a''), a przechodzącej przez punkt A (A' A''), gdy:

- a) $a \parallel \pi_1, A(0, 5, 6)$,
 b) $a \parallel \pi_1, A(0, -5, -6)$,
 c) $a \parallel \pi_2, A(0, -5, 5)$,
 d) $a \parallel \pi_2, A(0, 4, -6)$.

15. Dane są rzuty $A'B'$ i $A''B''$ odcinka AB . Wyznaczyć rzeczywistą wielkość tego odcinka, jeżeli położenie punktów A i B jest następujące:

- a) $A(0, -3, 6), B(8, 3, 3)$,
 b) $A(2, -3, 3), B(10, -6, -2)$,
 c) $A(3, -3, 3), B(12, 6, -6)$,
 d) $A(0, 3, -7), B(7, 4, -2)$,
 e) $A(0, 3, -3), B(10, -5, 5)$.

16. Wyznaczyć odległość punktu A (A' A'') od płaszczyzny α ($h\alpha$ $v\alpha$) w przypadkach określonych Rysunkami 203 a—d.



Rys. 203 a—d.

17. Wyznaczyć rzeczywistą odległość punktu A (A' A'') od płaszczyzn dwusiecznych δ_I i δ_{II} , jeżeli położenie punktu A jest określone:

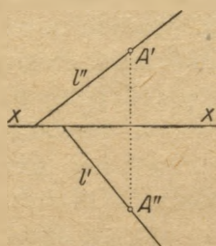
- a) A (0, 6, 0), c) A (4, -8, 2),
 b) A (5, 0, 8), d) A (3, -8, -2),
 e) A (0, 3, -10).

18. Wyznaczyć odległość punktu A (A' A'') od płaszczyzny α , wyznaczonej przez proste przecinające lub równoległe l i m :

- a) $l \parallel \pi_1, m \parallel \pi_2$,
 b) $l \parallel \pi_1, m \parallel$ osi x ,
 c) $l \parallel$ osi x, m dowolne,
 d) $l \parallel m \parallel$ do osi x .

19. Wyznaczyć odległość punktu A (A' A'') od prostej l (l' l''), jeżeli położenie tych elementów jest następujące:

- a) A (0, 5, -5), l dowolne,
 b) A (0, 4, -8), $l \parallel \pi_1$,
 c) A (3, -6, 2), $l \parallel \pi_2$,
 d) A (3, -3, -3), $l \parallel$ do osi rzutów x .
 e) A (3, 8, 2), l leży na δ_I ,
 f) A (4, 2, 6), l leży na δ_{II} ,
 g) A (4, 4, 4), l leży na π_1 ,
 h) A (3, 6, -6), l leży na π_2 ,
 i) A (2, -4, -6), $l \equiv x$,
 k)



Rys. 204.

20. Wykreślić ślady płaszczyzny przechodzącej przez daną prostą l (l' l'') prostopadle do danej płaszczyzny α ($h\alpha$ $v\alpha$), w następujących przypadkach:

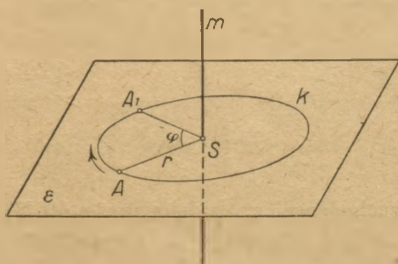
- a) l dowolna, $\alpha \parallel$ do x ,
 b) $l \parallel \pi_1$, α dowolna,
 c) $l \parallel \pi_2$, $\alpha \equiv (x, A)$,
 d) $l \perp \pi_1$, α dowolna,
 e) $l \perp \pi_2$, $\alpha \equiv \delta_I$,
 f) $l \perp \pi_3$, α dowolna,
 g) $l \parallel x$, $\alpha \equiv \delta_{II}$,
 h) l leży na δ_I , $\alpha \parallel x$,
 i) l leży na δ_{II} , α dowolna,
 k) $l \equiv x$, $\alpha \equiv (x, A)$.

§ 5. OBROTY, KŁADY I ICH ZASTOSOWANIA

68. O metodzie obrotu. W dotychczasowych rozważaniach naszych istnieje luka, uniemożliwiająca rozwiązanie zadań, zwłaszcza natury miarowej, t. j. takich, gdzie w rezultacie chodzi o poznanie wielkości odcinków i kątów. Przykład najlepiej rzecz wyjaśni. Niechaj zadaniem naszym będzie wyznaczenie prawdziwej wielkości kąta, którego rzuty ramion są dane. Wiadomościami, którymi dotąd rozporządzamy, zadania tego rozwiązać nie potrafimy, nie znane nam są bowiem sposoby, którymi nadaćby można ramionom kąta położenie równoległe do rzutni, lub też wprost ramiona te, bez zmiany zawartego między nimi kąta, na tę rzutnię położyć. Istota rozwiązania omawianego zadania polega na zmianie położenia ramion kąta w przestrzeni, przy zachowaniu danego odchylenia tych ramion. Owóż, zmiana położenia ramion kąta dokonuje się przy pomocy pewnej metody konstrukcyjnej, zwanej *metodą obrotów*.

Najpierw zajmiemy się poznaniem metody jako takiej, a następnie zastosowaniem jej do rozwiązywania zadań.

69. Obroty punktu. Mówiąc o obrocie punktu, mamy na myśli jego obrót około danej prostej, zwanej *osią obrotu* i o dany kąt, przyczem punkt pozostaje stale na płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu, zwanej *płaszczyzną obrotu*. Oś obrotu m przebija płaszczyznę obrotu ε (Rys. 205.) w punkcie S , który jest *środkiem obrotu*. Odcinek r , łączący punkt A z punktem S , nazywamy *promieniem obrotu*. Punkt A zakreśli podczas obrotu około osi m na płaszczyźnie ε łuk



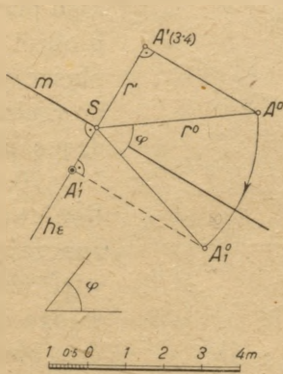
Rys. 205.

koła, równy danemu kątowi φ i zajmie położenie A_1 .

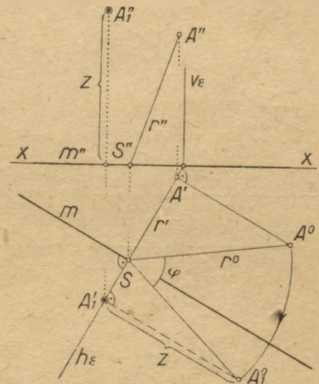
Przeprowadzimy zadanie powyższe w rzutach cechowanych, przyczem niechaj oś m leży na płaszczyźnie porównawczej, a punkt A , który obrócić mamy o φ , niechaj ma cechę 3-4 danych jednostek (Rys. 206.).

Płaszczyzna obrotu, przechodząca przez punkt $A \perp m$, przecina rzutnię wzdłuż śladu $h_\varepsilon \perp m$. Punkt S jest środkiem

obrotu, a odcinek $S\bar{A}' = r'$ rzutem promienia obrotu. Aby mógł dokonać obrotu punktu A około osi m , wykonajmy kład płaszczyzny ε około jej śladu h_ε na płaszczyznę rysunku, czyli w naszym przypadku na rzutnię. Kład ten ujawni się kładem promienia r na płaszczyznę poziomą i wyznaczy jego prawdziwą wielkość r^0 . Następnie zakreślmy ze środka S promieniem r^0 łuk koła w żądanym kierunku, obra-



Rys. 206.



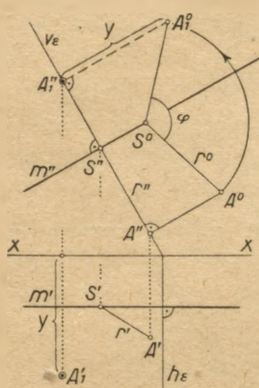
Rys. 207.

cając tym sposobem punkt w kładzie o dany kąt φ aż do położenia A_1^0 . Z kolei wrócić musimy z punktem A_1 na płaszczyznę obrotu w jej pierwotnem położeniu, t. j. niejako płaszczyznę tę wraz z punktem A_1 podnieść, albo raczej obrócić około śladu h_ε o 90° . W tym celu rzucimy punkt A_1^0 prostopadłe na prostą h_ε , a odcinek $A_1^0 A_1'$ wyraża w przyjętej jednostce długości wysokość punktu A_1 po obrocie, a więc jego cechę. — Konstrukcyjne rozwiązanie tego zadania w rzutach Monge'a podaje Rys. 207.

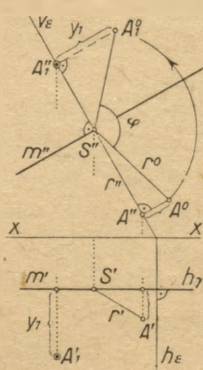
Poziomo rzucająca płaszczyzna obrotu wyznaczona jest śladem h_ε i v_ε ; środek obrotu S (S' S''), połączony z danym punktem A (A' A''), daje promień obrotu r (r' r''). Dokonamy obrotu, a rzut pionowy A_1'' punktu po obrocie znajdziemy, odmierając od osi x na prostej odnoszącej otrzymaną wysokość $z = A_1' A_1^0$.

Jeżeli oś obrotu jest równoległą do rzutni np. pionowej (Rys. 208.), to obrót dowolnego punktu o dany kąt wykonamy zupełnie analogicznie: kreślimy ślady h_ε i v_ε płaszczyzny obrotu prostopadłej do osi obrotu m (m' m''), wyznaczmy środek obrotu S (S' S''), promień obrotu r (r' r''), wykonamy kład płaszczyzny obrotu i otrzymanym promieniem r^0 obrócimy punkt A^0 o dany kąt φ . Po podniesieniu płaszczyzny

obrotu w jej pierwotne położenie, otrzymamy rzuty A_1'' i A_1' punktu A_1 , po dokonany obrotie. Zadanie uprości się w pewnej mierze, jeśli, jak to



Rys. 208.



Rys. 209.

widzimy na Rys. 209., kład płaszczyzny obrotu i obrót wykonamy na płaszczyznę równoległą do rzutni π_2 , a przechodzącą przez oś m .

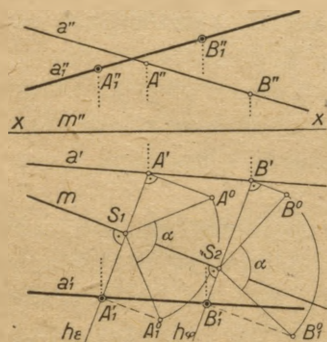
70. Obroty prostej.

Ponieważ prostą wyznaczają dwa punkty, więc obrót prostej sprowadza się w ogólności do obrotu dwóch jej punktów, o ten sam kąt

i w tym samym kierunku. Jeżeli oś obrotu i prosta przecinają się, a punkt przecięcia się M leży w granicach rysunku, to wówczas obrócimy jeden punkt prostej i łączymy go po obrocie z punktem M , który jako leżący na osi obrotu, położenia swego nie zmienia. Gdy prosta jest równoległa do osi obrotu, to i wówczas obrócimy tylko jeden jej punkt o dany kąt i w żądanym kierunku, po obrocie prosta pozostanie bowiem do osi obrotu równoległą.

Przykłady.

a) Obrócić prostą a ($a' a''$) około osi m , leżącej na rzutni poziomej, o dany kąt α (Rys. 210.). Obróciliśmy punkty A' ($A' A''$) i B ($B' B''$) prostej a około osi m o $\neq \alpha$, a otrzymane punkty A_1 ($A_1' A_1''$) i B_1 ($B_1' B_1''$) wyznaczają prostą a_1 ($a_1' a_1''$) po obrocie.

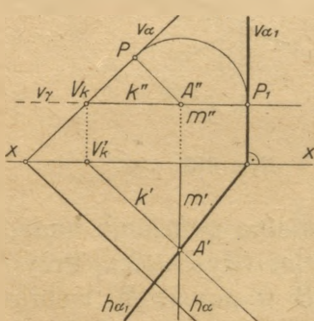


Rys. 210.

b) Około osi m , leżącej na rzutni poziomej, obrócić prostą a , przecinającą oś w punkcie M , o dany kąt φ (Rys. 211.). Zadanie wykonaliśmy w rzutach cechowanych. Punkt A ($A', (2)$), przyjęty na prostej a , obróciliśmy około m o $\neq \varphi$, a otrzymany punkt A_1' połączyli ze stałym punktem M . Wysokość

Ślad pionowy v_{α_1} płaszczyzny α po obrocie jest tym sposobem także wyznaczony.

Rys. 214. przedstawia również obrót płaszczyzny α (h_{α} v_{α}) około prostej pionowej m (m' m''), dokonany jednak w inny sposób. Obróciwszy ślad poziomy h_{α} do położenia h_{α_1} , jak w przykładzie pierwszym, znajdziemy punkt przebiecia się A (A' A'') osi obrotu m (m' m'') z płaszczyzną α . Ponieważ punkt ten udziału w obrocie nie bierze i przez niego przejdzie α po obrocie, więc wykreśliwszy tworzącą p (p' p'') i jej ślad V_p , otrzymamy ślad pionowy v_{α_1} płaszczyzny α po obrocie.



Rys. 215.

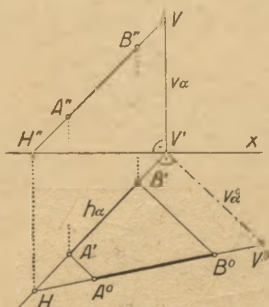
Przykład obrotu płaszczyzny α (h_{α} v_{α}), nachylonej do obu rzutni, do położenia pionowego widzimy na Rys. 215. Przyjmijmy oś obrotu m (m' m'') prostopadłą do rzutni pionowej i około niej obróćmy ślad pionowy v_{α} tak, aż zajmie położenie v_{α_1} , prostopadłe do x . Ślad poziomy h_{α_1} przejdzie przez rzut poziomy A' punktu przebiecia się A osi obrotu z płaszczyzną α .

72. Kład płaszczyzny rzucającej. Szczególny, a dla dalszych rozważań naszych bardzo ważny, przykład obrotów stanowi obrót płaszczyzn, względnie punktów i prostych, leżących na nich, około śladów względnie warstwicy, albo tworzących. Kątami obrotów są kąty, jakie płaszczyzny te zawierają z płaszczyznami rzutów. Po tak dokonanym obrocie, płaszczyzna wraz z utworami na niej leżącymi znajdzie się na płaszczyźnie rzutów, względnie na płaszczyźnie do rzutni równoległej; dokonaną operację nazywamy wykonaniem kładu płaszczyzny. Jako zadanie odwrotne występuje podnoszenie z kładu, t. j. obrót punktów, prostych, czy też linii leżących na płaszczyznach rzutów lub na płaszczyznach do rzutni równoległych, około odnośnych śladów, względnie warstwicy o taki kąt, że po obrocie utwory te znajdą się na danej płaszczyźnie.

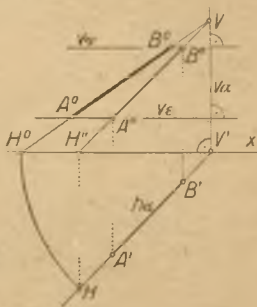
Z kładem płaszczyzn rzucających zapoznaliśmy się przy sposobności wyznaczenia prawdziwej wielkości odcinka (ust. 13. i 39.). W istocie bowiem wyznaczenie długości odcinka jest kładem płaszczyzny rzucającej ten odcinek na rzutnię poziomą względ-

nie pionową. Wyznamy ślady H i V prostej (A, B) (Rys. 216.), a także ślad pionowy płaszczyzny poziomo rzucającej, przechodzącej przez nią, to prosta v_{α^0} będzie kładem śladu pionowego na rzutnię poziomą, a punkt V^0 połączony z H wyznaczy kład prostej w granicach jej śladów. $\overline{A^0 B^0}$ jest kładem poziomym odcinka $\overline{AB}$.

Kład tejże samej płaszczyzny α na rzutnię pionową widzimy na Rys. 217.



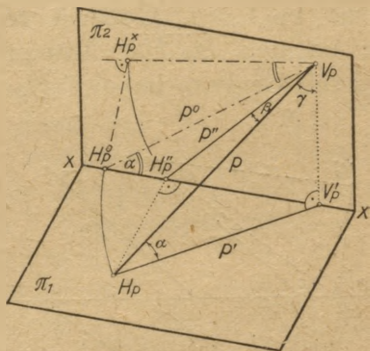
Rys. 216.



Rys. 217.

Ślad poziomy H zakreśli na rzutni poziomej łuk koła o środku V' , a punkty A i B obróćą się na płaszczyznach poziomych, jako płaszczyznach obrotu prostopadłych do osi obrotu v_{α} .

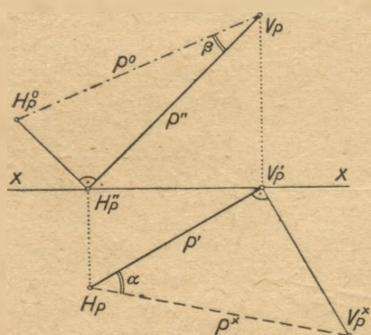
73. Kąty nachylenia prostej z płaszczyznami rzutów. Kątem nachylenia prostej z płaszczyzną nazywamy kąt, jaki prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę (ust. 14.). Jeżeli p' (Rys. 218.*) jest rzutem poziomym prostej p , a p'' rzutem pionowym tej prostej, to jak z rysunku widzimy: $\alpha + \gamma = 90^\circ$. Lecz kąt, jaki prosta tworzy ze swoim rzutem na płaszczyznę, jest najmniejszy, jaki zawierać może z prostymi, leżącymi na płaszczyźnie rzutów, a przechodzącymi przez jej ślad; zatem $\beta < \gamma$, a więc $\alpha + \beta < 90^\circ$, czyli: *suma kątów nachylenia prostej z obu rzutniami jest mniejsza od kąta prostego.*



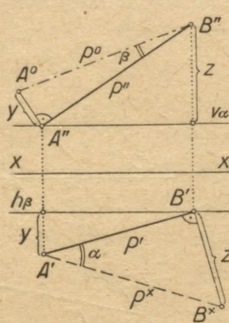
Rys. 218.*

Przez wykonanie kładu p^x prostej p (Rys. 219.) na rzutnię poziomą, otrzymamy kąt α , jaki prosta zawiera z rzutnią poziomą; kład p^0 prostej p na rzutnię pionową wyznacza kąt β tej prostej z rzutnią pionową. O ile ślady prostej nie leżą

w obrębie płaszczyzny rysunkowej, to kłady wykonamy na płaszczyźnie równoległej do rzutni, jak to widzimy na Rys. 220.



Rys. 219.

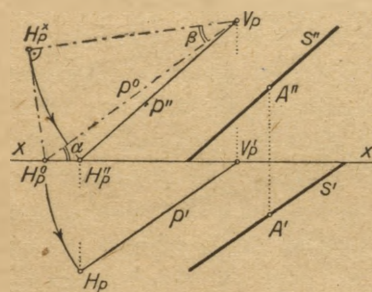


Rys. 220.

Niechaj zadaniem naszym będzie wykreślenie rzutów prostej, przechodzącej przez dany punkt $A(A'A'')$, a zawierającej z rzutniami dane kąty α i β .

Najpierw znajdziemy dowolną prostą, tworzącą z rzutniami żądane kąty, a następnie przez punkt A poprowadzimy do niej równoległą.

Przypuśćmy, że prosta p (Rys. 218.*) jest szukaną prostą i przeprowadźmy rozbiór konstrukcyi. Aby otrzymać α , jaką prosta p tworzy z rzutnią poziomą, obróćmy ją około osi (V_p, V_p') na rzutnię pionową. Otrzymamy prawdziwą wielkość odcinka prostej ograniczonej śladami H_p i V_p , równą odcinkowi $\overline{H_p^0 V_p}$ i α . Odcinek $\overline{H_p V_p}$, jego rzut pionowy $\overline{H_p' V_p}$ i odcinek $\overline{H_p H_p'}$ tworzą trójkąt prostokątny z kątem β przeciwległym bokowi $\overline{H_p H_p'}$ i z kątem prostym w wierzchołku H_p'' .



Rys. 221.

Znając α i odcinek $\overline{H_p^0 V_p}$, wykreślimy trójkąt prostokątny $H_p^0 H_p^x V_p$, przystający do trójkąta $H_p H_p' V_p$ a przy jego pomocy rzuty żądanej prostej w sposób następujący. Przez dowolnie na osi x przyjęty punkt H_p^0 (Rys. 221.) kreślimy prostą p^0 pod kątem α do osi x i dowolny punkt V_p uważamy za jej ślad pionowy.

Kreślimy trójkąt $H_p^0 H_p^x V_p$ o

kącie prostym przy H_p^x a kącie β przy V_p . Bok $\overline{H_p^x V_p}$ równy jest długości rzutu pionowego szukanej prostej p , a ponieważ punkt V_p jest jej śladem pionowym, więc zakreśliwszy pro-

mieniem $V_p H_p^x$, z punktu V_p jako środka, łuk koła aż do przecięcia się z osią x , otrzymamy rzut pionowy H_p'' śladu poziomego prostej p , a więc i jej rzut pionowy $H_p'' V_p \equiv p''$. Łuk koła o środku V_p a o promieniu $V_p H_p^o$ przetnie prostopadłą, wykreśloną w punkcie H_p'' do osi x , w punkcie H_p , który jest śladem poziomym prostej p . Prosta (H_p, V_p) jest rzutem poziomym p' prostej p , przyczem oczywiście $H_p H_p'' = H_p^o H_p^x$. Przez A ($A' A''$) poprowadzona równoległa s ($s' s''$) do prostej p ($p' p''$) rozwiązuje zadanie.

Rozważmy jeszcze warunek, który spełniony być musi, aby rozwiązanie zadania było możliwe. Przedewszystkiem łuk $H_p^x H_p''$ musi przeciąć oś x , czyli musi być: $V_p V_p' < H_p^x V_p$ albo (patrz Rys. 218.*) $H_p V_p \sin \alpha < H_p V_p \cos \beta$ czyli: $\sin \alpha < \sin (90 - \beta)$, albo ponieważ kąty α i β są ostre

$$\alpha < 90^\circ - \beta \text{ czyli}$$

$$\alpha + \beta < 90^\circ$$

wykazaliśmy już, że powyższy warunek jest konieczny, widzimy teraz, że jest on też wystarczający.

74. Kąty nachylenia płaszczyzny z rzutniami. W ust. 25. określiliśmy kąt dwóch płaszczyzn jako kąt zawarty między dwiema prostymi, leżącymi na tych płaszczyznach, a prostopadłymi w dowolnym punkcie ich krawędzi. Ponieważ owe proste są prostopadłe do krawędzi danych dwóch płaszczyzn, więc płaszczyzna nimi wyznaczona jest do tej krawędzi prostopadła. Stąd wynika następujący sposób postępowania przy wyznaczaniu kąta nachylenia dwóch płaszczyzn: W dowolnym punkcie krawędzi dwóch płaszczyzn prowadzimy do niej płaszczyznę prostopadłą, wyznaczamy proste przecięcia się z obiema płaszczyznami, a kąt zawarty między temi prostymi, mierzy kąt, jaki tworzą dwie uważane płaszczyzny.

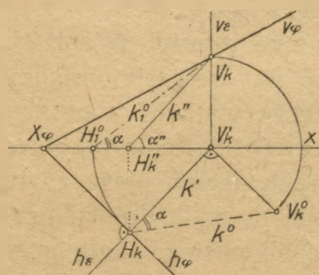
Suma kątów, jakie płaszczyzna zawiera z dwiema rzutniami, leży w granicach między jednym i dwoma kątami prostymi. Suma ta osiąga swą granicę dolną, kąt prosty, gdy płaszczyzna jest równoległa do osi x , kąty α i β są w tym wypadku uzupełniające. Suma kątów α i β osiąga granicę górną, dwa kąty proste, gdy płaszczyzna jest prostopadła do osi x . Dla wszystkich innych położeń płaszczyzny, suma kątów z płaszczyznami rzutów jest większą od kąta prostego, a mniejszą od dwóch kątów prostych. W istocie, dwie nieprostopadłe płaszczyzny tworzą jeden kąt ostry i jeden roz-

warty, spełniające się do dwóch kątów prostych; kąt ostry jest wedle umowy kątem, który mierzy nachylenie dwóch płaszczyzn, w następstwie czego musi być $\alpha + \beta < 180^\circ$. Zresztą mamy także: $\alpha + \beta + 90^\circ > 180^\circ$, ponieważ suma trzech kątów naroża trójsiennego jest większą od dwóch kątów prostych, więc istotnie:

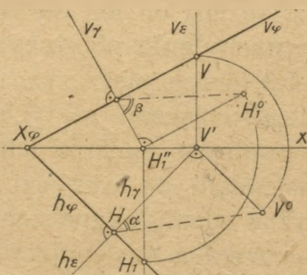
$$\alpha + \beta > 90^\circ.$$

Celem wyznaczenia kąta, jaki płaszczyzna φ ($h_\varphi v_\varphi$) (Rys. 222.) zawiera z rzutnią poziomą, poprowadzimy, zgodnie z podanym wyżej tokiem postępowania, płaszczyznę ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$) prostopadłą do krawędzi obu płaszczyzn, t. j. do śladu poziomego h_φ i znajdziemy krawędź k ($k' k''$) tej płaszczyzny z płaszczyzną φ . Kąt α , zawarty między tą krawędzią a śladem poziomym h_ε , rozwiązuje zadanie.

Ale z ust. 25. wiemy, że krawędź k jest linią największego spadu płaszczyzny φ w odniesieniu do rzutni poziomej, t. z. taką



Rys. 222.



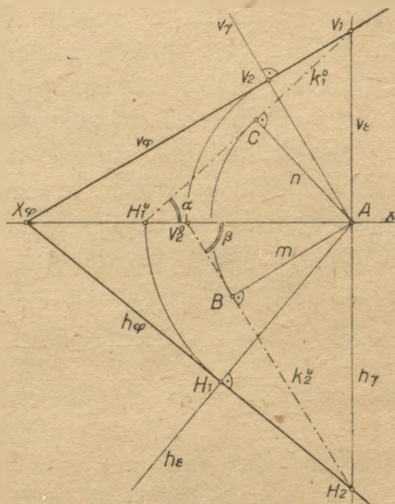
Rys. 223.

prostą płaszczyzny φ , która ze swoim rzutem tworzy najmniejszy kąt. Powiemy więc: **kąt nachylenia danej płaszczyzny z rzutnią poziomą lub pionową wyraża się kątem nachylenia linii największego spadu tej płaszczyzny w odniesieniu do rzutni poziomej lub pionowej.**

Rzut poziomy kąta α równy jest zeru, gdyż k' i h_ε nakrywają się; rzut pionowy kąta α oznaczyliśmy na Rys. 222. przez α'' . Wykonawszy kład k^0 krawędzi k na rzutnię poziomą lub na pionową (k_1^0), otrzymamy prawdziwą wielkość tego kąta. Na Rys. 223. podaliśmy ponadto konstrukcję kąta nachylenia β płaszczyzny φ z rzutnią pionową.

Przyjmijmy płaszczyznę φ ($h_\varphi v_\varphi$) nachyloną do obu rzutni (Rys. 224.). Poprowadźmy przez punkt A , obrany na osi x , płaszczyznę ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$) prostopadłą do h_φ i płaszczyznę γ ($h_\gamma v_\gamma$) $\perp v_\varphi$. Krawędź k , płaszczyzn φ i ε obróćmy

około v_e na rzutnię pionową, a krawędź k_2 płaszczyzn φ i γ około h_γ na rzutnię poziomą. Kąt α , jaki k_1^0 utworzy z osią x , jest kątem nachylecia płaszczyzny φ z rzutnią poziomą, a kąt $\beta = \angle V_2^0 H_2$ jest kątem nachylecia płaszczyzny φ z rzutnią pionową. Wykreślmy z punktu A prostopadłe m i n do k_2^0 i k_1^0 , to $AB = AC$, gdyż każdy z tych dwóch odcinków wyraża odległość punktu A od płaszczyzny φ . W istocie, prostopadła wyprowadzona z punktu A do płaszczyzny φ jest krawędzią płaszczyzn ε i γ , prostopadłą do linii największego spadku k_1 i k_2 tych płaszczyzn. Po wykonaniu kładów płaszczyzn ε i γ , a więc i prostych k_1 i k_2 , odcinki AB i AC są kładami tej samej prostopadłej.

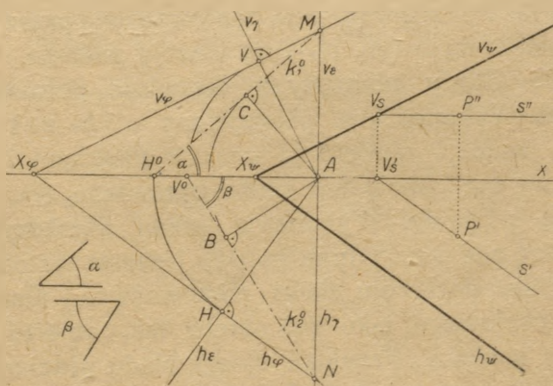


Rys. 224.

Przeprowadzone rozumowanie umożliwi rozwiązanie następującego zadania: *Przez dany punkt P poprowadzić płaszczyznę zawierającą z rzutniami dane kąty α i β .*

Wiemy, że musi być: $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$ a $\alpha + \beta > 90^\circ$.

Najpierw poprowadzimy płaszczyznę φ nieprzechodzącą przez punkt P , a następnie przez ten punkt płaszczyznę ψ równoległą do płaszczyzny φ . Na prostopadłej wykreślonej w punkcie A do osi x (Rys. 225.*) obierzmy dowolnie punkt M , z którego wyprowadzimy prostą k_1^0 zawierającą z osią x kąt α . Odcinek $AC = n$, prostopadły do k_1^0 , równy jest odległości



Rys. 225.*

w punkcie A do osi x (Rys. 225.*) obierzmy dowolnie punkt M , z którego wyprowadzimy prostą k_1^0 zawierającą z osią x kąt α . Odcinek $AC = n$, prostopadły do k_1^0 , równy jest odległości

punktu A od szukanej płaszczyzny. Zakreślmy z punktu A' jako środka, promieniem $\overline{AC}$ koło i drugie z niem współśrodkowe promieniem $\overline{AH^0}$. Do pierwszego koła wykreślmy styczną k_2^0 pod $\approx \beta$ do x . Z punktu N wykreślona styczna h_φ do drugiego koła jest śladem poziomym szukanej płaszczyzny φ , a prosta (X_φ, M) jej śladem pionowym.

Oczywiście, że koło zakreślone promieniem $\overline{AV^0}$ z punktu A jako środka jest styczne do śladu v_φ .

Aby móc wykreślić styczną h_φ , musi punkt N leżeć zewnątrz koła HH^0 , czyli musi być $\overline{AH^0} < \overline{AN}$, albo biorąc pod uwagę trójkąty prostokątne ACH^0 i ABN , wyrazimy powyższy warunek w ten sposób:

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \alpha} < \frac{\overline{AB}}{\sin (90^\circ - \beta)}$$

a ponieważ $\overline{AC} = \overline{AB}$, więc mamy:

$$\sin \alpha > \sin (90^\circ - \beta).$$

A ponieważ kąty α i β są z założenia ostre, więc

$$\alpha > (90^\circ - \beta) \text{ czyli } (\alpha + \beta) > 90^\circ.$$

Wykazaliśmy już poprzednio, że dwa warunki są konieczne, aby rozwiązanie zadania było wogóle możliwe:

$$1) (\alpha + \beta) < 180^\circ \text{ i } 2) (\alpha + \beta) > 90^\circ.$$

Z powyższego widzimy, że warunki te są zarazem wystarczające.

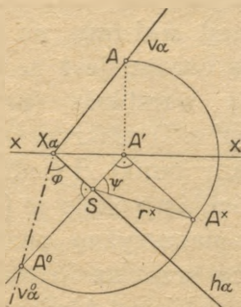
Płaszczyzna ψ ($h_\psi v_\psi$), poprowadzona przez punkt P ($P' P''$) równoległe do φ ($h_\varphi v_\varphi$), rozwiązuje zadanie.

75. Kłady płaszczyzn dowolnie położonych w przestrzeni. Wykonać kład płaszczyzny α ($h_\alpha v_\alpha$) na rzutnię poziomą znaczy, obrócić ją wraz z punktami i prostymi leżącymi na niej, około jej śladu poziomego tak, aż padnie na rzutnię poziomą. Wykonanie kładu płaszczyzny, o ile nie są brane pod uwagę inne punkty i proste na niej leżące, sprowadza się do obrotu śladu pionowego tej płaszczyzny około śladu poziomego jako osi obrotu tak, aż ślad ten padnie na rzutnię poziomą. Przykład takiego kładu widzimy na Rys. 226 a. Punkt A , obrany na śladzie v_α , obróciliśmy około h_α o kąt $180^\circ - \psi$, jaki płaszczyzna α zawiera z rzutnią poziomą. Prosta v_{α^0} , łącząca punkty A^0 i X_α , jest kładem śladu pionowego płaszczyzny α .

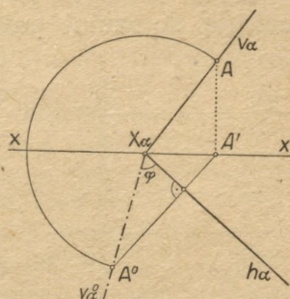
Odcinek $X_\alpha A^0$ równy jest odcinkowi $X_\alpha A$, wobec czego zakreśliwszy ze środka X_α (Rys. 226 b.) promieniem $X_\alpha A$ łuk,

aż do przecięcia się z prostopadłą wyprowadzoną z punktu A' do h_α , otrzymamy punkt A^0 i tą drogą uzyskamy również rozwiązanie zadania.

Jeżeli na płaszczyźnie α ($h_\alpha v_\alpha$) (Rys.



Rys. 226 a.

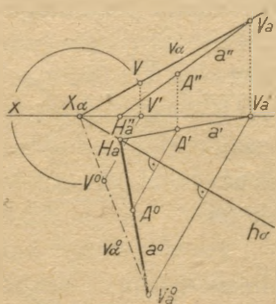


Rys. 226 b.

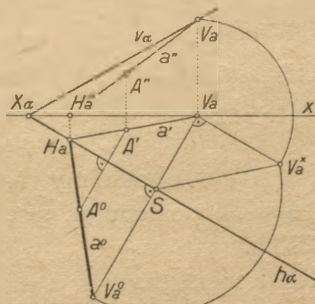
227 a.) leży prosta a ($a' a''$), to po wykonaniu kładu tej płaszczyzny prosta

ta znajdzie się również na rzutni poziomej. Wyznaczwszy v_{α^0} ,

znajdziemy kład V_{a^0} śladu pionowego prostej a i połączymy go ze śladem



Rys. 227 a.

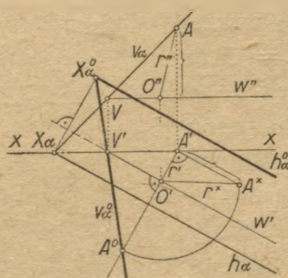


Rys. 227 b.

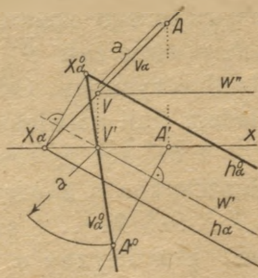
poziomym H_a . Prosta a^0 jest kładem prostej a ($a' a''$) na rzutnię poziomą. —

Kład A^0 punktu A ($A' A''$) prostej a otrzymamy, rzucając punkt A' prostopadło do h_α na a^0 .

Rys. 227 b. podaje kład płaszczyzny α na rzutnię poziomą, dokonany w ten sposób, że ślad pionowy V_a prostej a



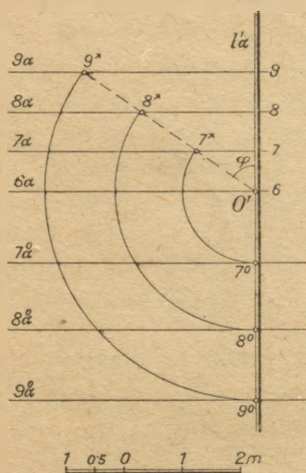
Rys. 228 a.



Rys. 228 b.

obróciliśmy około h_α na rzutnię poziomą i otrzymany punkt V_{a^0} połączyli z H_a prostą a^0 . Prosta (X_α, V_{a^0}) byłaby kładem śladu pionowego płaszczyzny α .

Przykłady kładów płaszczyzny na płaszczyznę warstwową (równoległą do rzutni poziomej) widzimy na Rys. 228 a i b.



Rys. 229.

stając z tego uprościmy konstrukcję zadania, postępując tak, jak na Rys. 228 b.

Kład płaszczyzny α na płaszczyznę warstwową π_6 , wykonany w rzutach cechowanych, przedstawia Rys. 229. — Płaszczyznę obrotu poprowadziliśmy przez linię największego spadku, na warstwicę 9α odmierzyliśmy $9-9^* = 3\text{ m}$ w podziałce rysunku. Odcinek $9^*-O'$ jest kładem linii największego spadku i tworzy z $l\alpha'$ kąt φ , równy kątowi, jaki płaszczyzna α zawiera z poziomem. $7\alpha^0, 8\alpha^0, 9\alpha^0 \dots$ są to kłady warstwic płaszczyzny α na płaszczyznę warstwową π_6 .

Ćwiczenie.

Wyznaczyć prawdziwą wielkość trójkąta, którego rzut cechowany, względnie rzuty Monge'a są dane.

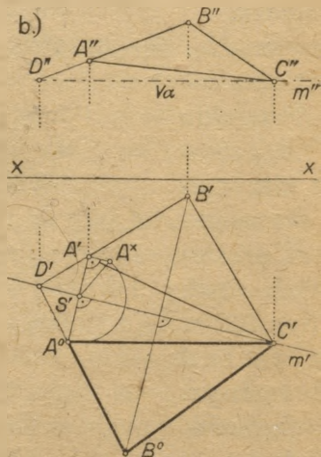
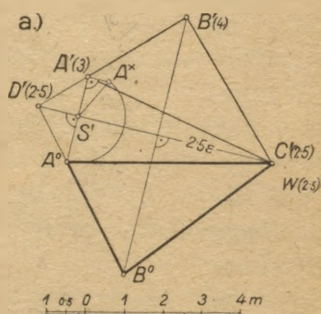
a) Rzut cechowany (Rys. 230 a.).

Wykonamy kład trójkąta na płaszczyznę warstwową, przechodzącą przez jeden

Oś obrotu jest w tym przypadku dana warstwicą (prosta tworząca) w (w' w'') płaszczyzny α . Dowolnie obrany punkt A śladu pionowego v_α obróciliśmy około w (w' w''), aż padł na płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez w . Prosta łącząca punkt A^0 z V' jest kładem śladu pionowego; prostopadła do w' wykreślona z X_α przecina v_α^0 w punkcie X_α^0 , przez który przechodzi, równoległe do w' , kład h_α^0 śladu poziomego płaszczyzny α . Ponieważ

$$AV = A^0V'$$

wieckorzy-



Rys. 230 a i b.

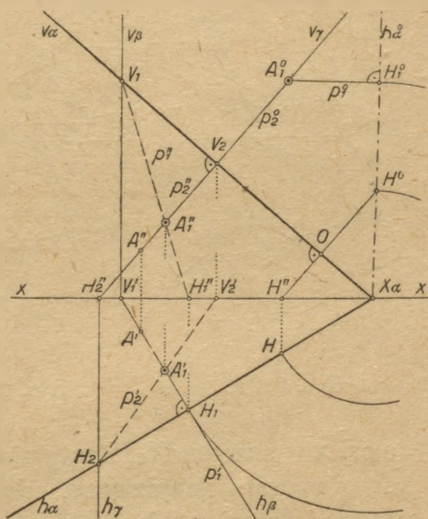
z jego wierzchołków, np. C (C' [2'5]). Wyznaczywszy na prostej $\overline{A'B'}$ punkt D' o cesze 2'5 i połączywszy go z punktem C' , otrzymamy warstwicę 2'5 płaszczyzny trójkąta. Punkt A obróciliśmy około tej warstwicy, aż padł na płaszczyznę warstwową $\pi_2's$ i punkt A^0 połączyli z D' i C' ; kład B^0 trzeciego wierzchołka leży na prostej (D', A^0).

b) Rzuty Monge'a (Rys. 230b.). Kład trójkąta wykonaliśmy na płaszczyznę poziomą α , przeprowadzoną przez punkt C ($C' C''$). Punkt A ($A' A''$) obróciliśmy więc około krawędzi m ($m' m''$) płaszczyzny trójkąta i płaszczyzny α , na tę ostatnią. Punkt A^0 łączymy z D' i C' i otrzymamy punkt B^0 , który leżeć będzie wraz z punktem B' na prostopadłej do m' .

76. Rzut na dowolną płaszczyznę. W § 4. rozpatrywaliśmy wprowadzenie trzeciej płaszczyzny rzutów i zastosowanie jej do rozwiązywania zadań. Owa trzecia rzutnia była z reguły prostopadłą do osi x , albo do jednej z dwóch rzutni. W pewnych przypadkach chodzić nam będzie (patrz ust. 89.) o wyznaczenie rzutu utworu geometrycznego na płaszczyznę dowolnie położoną; rozpatrzmy więc przedewszystkiem rzut prostokątny punktu na taką płaszczyznę.

Zasadniczo postąpićby można — wyszedłszy z pojęcia rzutu — w sposób następujący: z danego punktu A poprowadzić prostopadłą do danej płaszczyzny rzutów α , znaleźć jej punkt przebicia, a następnie wykonać kład płaszczyzny α na

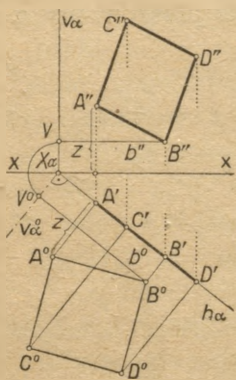
jedną z rzutni. Sprawa da się jednak znacznie uprościć. Wyobraźmy sobie, że przez dany punkt A poprowadziliśmy dwie płaszczyzny prostopadłe do α , przyczem jedną poziomo, a drugą pionowo rzucającą. Każda z nich przecina płaszczyznę α w linii największego spadku, a więc w prostych prostopadłych do śladów h_α i v_α . Przez wykonanie kładu płaszczyzny α wraz z owymi liniami największego spadku p_1 i p_2 na jedną z rzutni, otrzymamy jako punkt przecięcia się owych



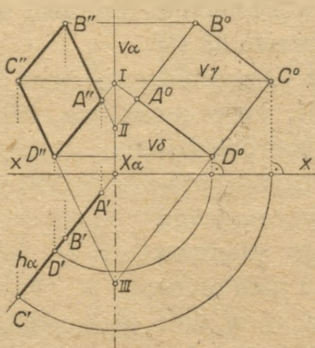
prostopadłe: pierwszą do śladu h_α , drugą do śladu v_α danej płaszczyzny α . Następnie wykonaliśmy kład h_α^0 śladu poziomego h_α na rzutnię pionową, a wraz z nim i kład H_1^0 punktu H_1 . Prostopadła p_1^0 , wykreślona do h_α^0 w H_1^0 , jest kładem linii największego spadu p_1 płaszczyzny α w odniesieniu do rzutni poziomej. Kład p_2^0 linii największego spadu p_2 (p_2' p_2'') płaszczyzny α , w odniesieniu do rzutni pionowej, schodzi się z p_2'' . Punkt A_1^0 , będący przecięciem się prostych p_1^0 i p_2^0 , rozwiązuje zadanie.

77. Podnoszenie płaszczyzn. Jako zadanie odwrotne kładu płaszczyzny występuje t. zw. podnoszenie płaszczyzny, przez które rozumiemy także obrót punktów i prostych, względnie wielokątów albo dowolnych linii, leżących na płaszczyznach rzutów około śladów danych płaszczyzn tak, aż padną na tę płaszczyznę. Kilka przykładów rzecz najlepiej wyjaśni.

a. Przypuśćmy, że dany jest kład poziomo rzucającej płaszczyzny α (h_α v_α) wraz z kwadratem, który na niej leży (Rys. 232 a.). Tak więc ślad poziomy h_α , prosta $v_\alpha^0 \perp h_\alpha$ jako kład śladu pionowego v_α płaszczyzny α , a wreszcie kwadrat $A^0 B^0 C^0 D^0$ są dane. Podnieść płaszczyznę α z kładu w jej



Rys. 232 a.



Rys. 232 b.

pierwotne położenie oznacza to samo, co wykreślić rzuty kwadratu, leżącego na tej płaszczyźnie. Rzut poziomy kwadratu leży na śladzie poziomym h_α płaszczyzny α . Ślad pionowy v_α płaszczyzny α jest prostopadły do osi x w punkcie X_α . Rzuty pionowe A'' , B'' , C'' , D'' wierzchołków kwadratu znajdziemy, odcierając na promieniach odnośnych od osi x ich wysokości. I tak np. wysokość punktu A równa jest odcinkowi $A^0 A'$, wysokość punktu B odcinkowi $B^0 B'$ i t. d.

Wysokości poszczególnych punktów przenieść można

ległe, więc rzut kwadratu będzie równoległobokiem. Dwa brakujące boki otrzymamy, kreśląc $C'D' \parallel B'A'$ i $A'D' \parallel B'C'$.

2. Wykreślić rzuty kwadratu, leżącego na danej płaszczyźnie α ($h_\alpha v_\alpha$) (Rys. 235.). Punkt V , obrany na śladzie pionowym v_α , obrócimy około h_α jako osi na rzutnię poziomą i otrzymany punkt V^0 połączymy z X_α prostą v_{α^0} , będącą

kładem śladu pionowego płaszczyzny α .

Boki a^0 i c^0 kwadratu $A^0 B^0 C^0 D^0$ przecinają prostą v_{α^0} w punktach V_{a^0} i V_{c^0} ,

które podniesione padną na ślad v_α jako punkty V_a i V_c .

Punkt H_a jest śladem poziomym prostej a ,

której rzut poziomy a' przechodzi przez ten punkt i przez rzut poziomy $V_{a'}$ śladu pionowego V_a .

Ślady poziome płaszczyzn obrotu, przechodzące przez punkty A^0 i B^0

prostopadłe do h_α , przecinają prostą a' w punktach A' i B' ,

które odniesione na prostą $(V_a, H_a'') = a''$

wyznaczają na niej rzuty pionowe A'' i B'' wierzchołków A i B kwadratu.

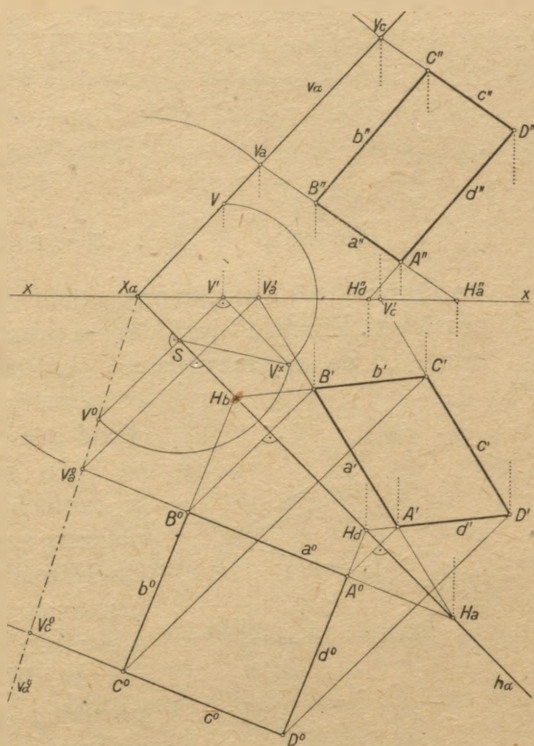
Punkt H_b , ślad poziomy prostej b , łączymy z B' , otrzymując rzut poziomy b' , a na nim punkt C' ;

podobnie za pośrednictwem punktu H_d otrzymamy bok d' i punkt D' .

W ten sposób rzut poziomy $A'B'C'D'$ kwadratu, który będzie równoległobokiem, jest wykreślony.

Punkt H_d'' łączymy z A'' , a na otrzymaną prostą odniesiemy punkt D' , otrzymując punkt D'' ;

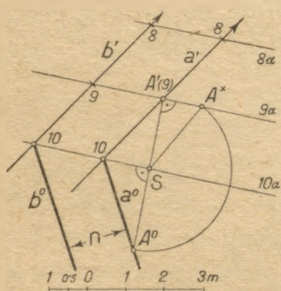
c'' będzie równoległe do a'' i przejdzie przez punkt V_c , oczywiście, że b'' będzie równoległe do d'' .



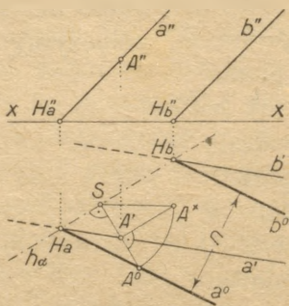
Rys. 235.

3. Wyznaczyć odległość dwóch prostych równoległych.

Rys. 236 a. podaje rozwiązanie zadania metodą rzutów cechowanych. Ponieważ proste a i b są równoległe, więc linie 8α , 9α , 10α ..., łączące punkty tych prostych o tych samych

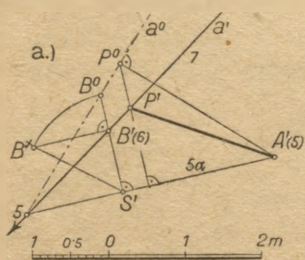


Rys. 236 a.



Rys. 236 b.

warstwową π_{10} i otrzymany punkt A^0 połączyli z punktem 10 prostej a' . Prosta a^0 jest kładem prostej a , prosta $b^0 \parallel a^0$ kładem prostej b na płaszczyznę π_{10} . Odcinek n , prostopadły do obu otrzymanych prostych, wyraża odległość prostych równoległych a i b .



Rys. 237 a i b.

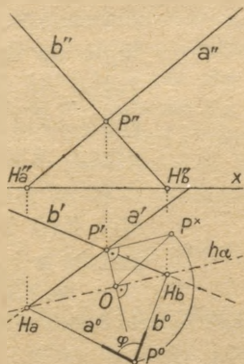
To samo zadanie, rozwiązane w rzutach prostokątnych na dwie płaszczyzny, widzimy na Rys. 236 b. Znaleźliśmy ślad poziomy h_α płaszczyzny α , wyznaczonej prostymi a i b , a następnie wykonali kład tej płaszczyzny. W tym celu przyjęliśmy na prostej a (a' a'') punkt A (A' A'') i obróciliśmy go około h_α na poziomą. Punkt A^0 , połączony ze śladem H_a prostej a , daje prostą a^0 ; prosta b^0 przejdzie przez ślad H_b równoległe do a^0 .

4. Z danego punktu A poprowadzić prostopadłą do danej prostej a .

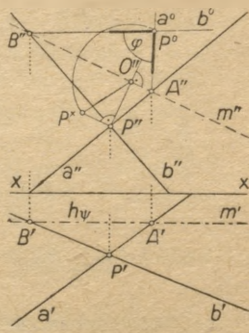
a. Rzut cechowany. Jeżeli punkt A' (Rys. 237 a.) ma cechę 5 , to prosta 5α , łącząca ten punkt z punktem 5 prostej a' , jest warstwicą płaszczyzny α , wyznaczonej prostą a i punktem A . Punkt B (B' , 6) obróciliśmy około 5α

tak, aż padł na płaszczyznę warstwową π_5 , a w ten sposób otrzymaliśmy kład a^0 prostej a . Z punktu A' wykreślimy prostopadłą do a^0 , którą następnie podniesiemy na płaszczyznę α . W tym celu rzucimy punkt P^0 w kierunku prostopadłym do 5_α na prostą a' i otrzymany punkt P' połączymy z A' . Odcinek $A'P'$ jest rzutem odcinka prostopadłego do prostej a . Odcinek $A'P^0$ wyraża odległość punktu A od prostej a .

b. Rzuty Monge'a (Rys. 237 b.). Przez dany punkt $A(A'A'')$ kreślimy prostą $c(c'c'')$ równoległą do danej prostej $a(a'a'')$. Szukamy śladu pionowego v_α płaszczyzny $\alpha \equiv (a, c)$ i wykonamy jej kład, otrzymując punkt A^0 i proste c^0 i a^0 . Z punktu A^0 kreślimy prostopadłą do a^0 , a odcinek A^0P^0 równy jest odległości punktu A od prostej a . Prostopadła wykreślona z P^0 do v_α przecina a'' w punkcie P'' , który odniesiemy na a' jako P' . Odcinek AP ($A'P'$, $A''P''$) rozwiązuje zadanie.



Rys. 238 a.

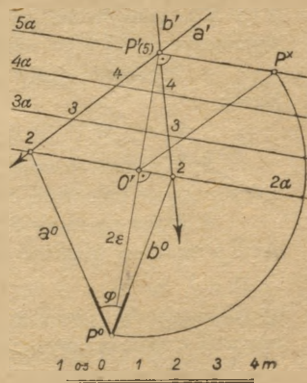


Rys. 238 b.

79. Kąt nachylenia dwóch prostych.

a) *Proste przecinające się.* Jeżeli dane są proste $a(a'a'')$ i $b(b'b'')$ (Rys. 238 a.), to po wykonaniu kładu płaszczyzny α , wyznaczonej temi prostymi, na jedną z rzutni, albo na płaszczyznę równoległą do rzutni, otrzymamy prawdziwą wielkość kątów, jakie proste te tworzą. Wyznaczywszy ślad poziomy h_α płaszczyzny α , obrócimy około niego punkt $P(P'P'')$ aż padnie na rzutnię poziomą. Proste a^0 i b^0 , łączące punkt P^0 ze śladami H_a i H_b , tworzą kąt φ rozwiązujący zadanie.

W Rys. 238 b. wykonaliśmy kład prostych a i b na płaszczyznę ψ .

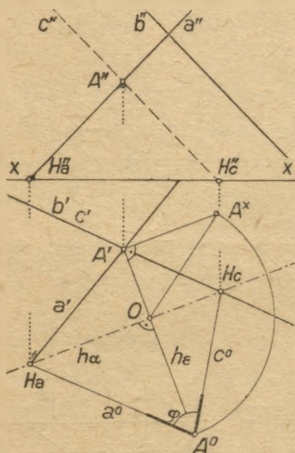


Rys. 239.

równoległą do rzutni pionowej. Osią obrotu jest w tym przypadku prosta m ($m' m''$), będąca krawędzią płaszczyzny ψ i płaszczyzny $\alpha \equiv (a, b)$.

Rozwiązanie zadania w rzutach cechowanych podaje Rys. 239., gdzie kład prostych a i b wykonaliśmy na płaszczyznę warstwową π_2 . Osią obrotu jest warstwica 2α , a odcinek $P' P^*$ równy jest trzem jednostkom długości.

b) Proste skośne. Przez kąt nachylenia dwóch prostych skośnych rozumiemy kąt, jakie tworzą dwie proste, przechodzące przez dowolnie obrany punkt w przestrzeni, równoległe do danych prostych skośnych. Jeżeli na jednej prostej np. a ($a' a''$) (Rys. 240.) obierzemy punkt A ($A' A''$), przez który poprowadzimy prostą c ($c' c''$) równoległą do drugiej prostej b ($b' b''$), to kąt φ , jaki tworzą proste a i c , rozwiązuje zadanie.



Rys. 240.

80. Ćwiczenia.

1. Wyznaczyć kąt nachylenia dwóch prostych skośnych a i b , które mają następujące położenia:

- a) a dowolne, $b \parallel \pi_1$; b) $a \parallel \pi_1$, $b \parallel \pi_2$;
c) $a \perp \pi_1$, $b \parallel \pi_2$; d) a dowolne, $b \equiv x$.

2. Na płaszczyźnie poziomo rzucającej α ($h\alpha v\alpha$) leży krzywa k , której rzut pionowy k'' jest kołem; wyznaczyć kład tej krzywej.

3. Na pionowo rzucającej płaszczyźnie α ($h\alpha v\alpha$) dany jest punkt S ($S' S''$), jako środek sześciokąta umiarkowanego, leżącego na tej płaszczyźnie; wyznaczyć rzuty tego wielokąta, jeśli długość boku jest dana.

4. Wykreślić rzuty trójkąta równobocznego, leżącego na płaszczyźnie α , jeżeli:

- a) $\alpha \perp \pi_1$, b) $\alpha \perp \pi_2$, c) $\alpha \parallel x$, d) $\alpha \equiv \delta_I$, e) $\alpha \equiv \delta_{II}$.

5. Wyznaczyć rzuty pięciokąta umiarkowanego, leżącego na płaszczyźnie α , która zajmuje położenia określone w zadaniu poprzednim.

6. Dane są rzuty trójkąta, leżącego na płaszczyźnie α ($h\alpha v\alpha$); wyznaczyć prawdziwą wielkość tego trójkąta, jeżeli

a) $\alpha \parallel x$, b) $\alpha \parallel \delta_I$, c) $\alpha \perp x$, d) $\alpha \parallel \delta_{II}$, e) $\alpha \equiv \delta_I$, f) $\alpha \equiv \delta_{II}$,
g) α przechodzi przez x i punkt P ($P' P''$), leżący w drugiej, trzeciej lub czwartej części przestrzeni.

7. Na płaszczyźnie α ($h\alpha v\alpha$) leży czworokąt $ABCD$, którego rzut pionowy jest dany (Rys. 110 a—l, str. 59). Wykreślić drugi rzut tego czworokąta, a następnie wyznaczyć jego prawdziwą wielkość.

8. Na płaszczyźnie α ($h\alpha v\alpha$), nachylonej do obu rzutni, leży trójkąt ABC , którego rzut poziomy jest dany. Wykreślić rzut pionowy i rzuty punktów osobliwych tego trójkąta.

Uwaga. Punkt przecięcia się wysokości, środek ciężkości i środek koła opisanego leżą na jednej prostej.

9. Wyznaczyć kąt nachylenia dwóch prostych przecinających się l i m i rzuty dwusiecznych tych kątów, jeżeli:

- $l \parallel \pi_1$, m dowolna;
- $l \parallel \pi_1$, $m \parallel \pi_2$;
- $l \parallel \pi_1$, $m \parallel x$;
- $l \parallel \pi_2$, $m \parallel x$.

10. Rozwiązać zadanie poprzednie, jeżeli punkt przecięcia się l i m leży w II, III i IV części przestrzeni, a także gdy leży na δI , δII i na osi x .

11. Dana jest płaszczyzna α ($h\alpha v\alpha$) i płaszczyzna $\beta \equiv (l, m)$; na krawędzi obu płaszczyzn wyznaczyć punkty równo oddalone od prostych l i m .

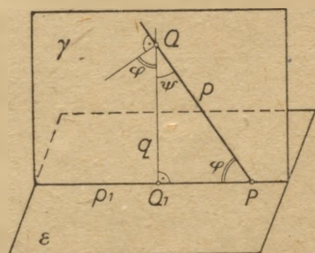
12. Dana jest płaszczyzna α ($h\alpha v\alpha$) oraz trzy punkty: A ($A' A''$), B ($B' B''$) i C ($C' C''$), nie leżące na tej płaszczyźnie. Wyznaczyć na płaszczyźnie α punkt równo oddalony od tych trzech punktów.

13. Dane dwie proste $l \parallel m$. Wyznaczyć rzuty takiej prostej p równoległej do danych, aby odległość prostych l i p wynosiła 5 cm, a prostych m i p 3 cm.

14. Na danej prostej l ($l' l''$) wyznaczyć punkty oddalone od danego punktu A ($A' A''$) o daną odległość.

81. Kąt nachylenia prostej z płaszczyzną. W określeniu kąta nachylenia prostej z płaszczyzną, podanym w ust. 14, mieszczą się dwa sposoby rozwiązania zadania.

1. Sposób. Wyznamy kąt φ , jaki prosta p zawiera ze swoim rzutem p_1 na daną płaszczyznę ε . W tym celu wyznaczymy punkt przebiecia się P (Rys. 241.) prostej p z ε , a następnie rzut prostokątny Q_1 dowolnego punktu Q na płaszczyznę ε . Prosta p_1 , łącząca punkty P i Q_1 , jest rzutem prostokątnym prostej p na płaszczyznę ε i tworzy z nią kąt φ , który nazywamy kątem nachylenia prostej p z płaszczyzną ε . Rozwiązanie zadania w rzutach prostokątnych na dwie płaszczyzny podaje Rys. 242. Prosta p ($p' p''$) przebiega płaszczyznę ε ($h\varepsilon v\varepsilon$) w punkcie P ($P' P''$), który znaleźliśmy przy pomocy płaszczyzny pionowo rzucającej α ($h\alpha v\alpha$). Z punktu Q ($Q' Q''$) prostej p wyprowadziliśmy prostopadłą q ($q' q''$) do

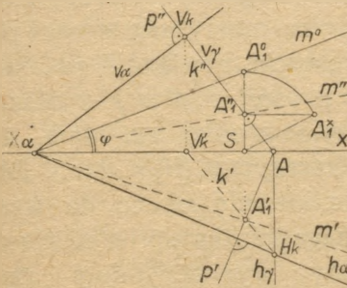


Rys. 241.

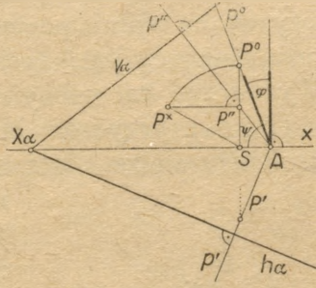
82. Zadania.

1. Wyznaczyć kąt, jaki pł. α ($h_\alpha v_\alpha$) zawiera z osią x .

1. S p o s ó b. Dowolny punkt A osi x (Rys. 244 a.) rzucmy prostopadle na płaszczyznę α , a otrzymany punkt A_1 ($A'_1 A''_1$)



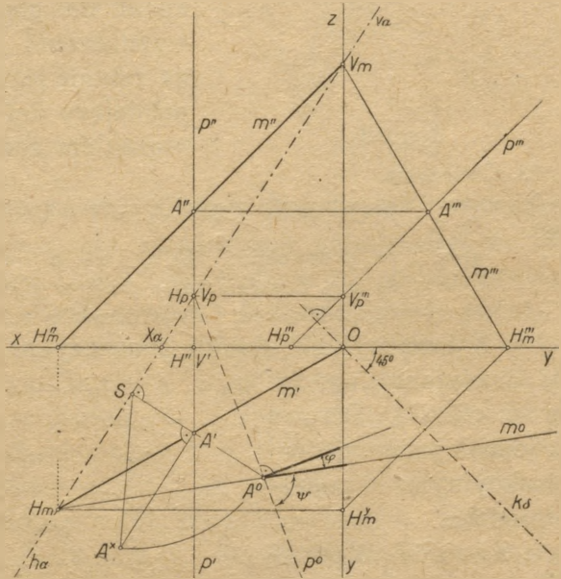
Rys. 244 a.



Rys. 244 b.

połączmy z punktem X_α prostą m ($m' m''$). Prosta ta jest rzutem osi x na płaszczyznę α , a kąt, jaki tworzy z tą osią, rozwiązuje zadanie. Celem wyznaczenia prawdziwej wielkości tego kąta, wykonaliśmy kład m^0 prostej m około x na rzutnię pionową, otrzymując $\angle \varphi = \angle m^0 x$.

2. S p o s ó b. Z dowolnego punktu A osi rzutów prowadzimy prostopadłą p ($p' p''$) do płaszczyzny α ($h_\alpha v_\alpha$) (Rys. 244 b.) i znajdziemy kąt, jaki ona zawiera z osią rzutów. W tym celu obrócimy dowolny punkt P prostej p około osi x na rzutnię pionową. Kąt φ , uzupełniający do 90° otrzymany kąt ψ , jest szukany kąt.

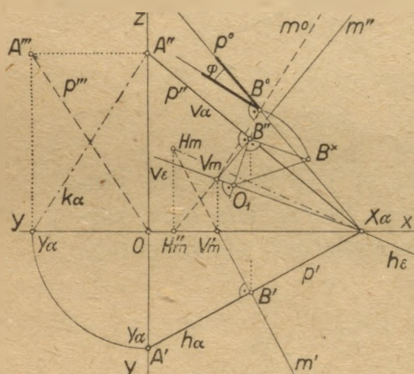


Rys. 245.

2. Wyznaczyć kąt, jaki dowolna prosta m ($m' m''$) zawiera z płaszczyzną dwusieczną δ_{II} . Wyznamy rzut boczny m''' danej prostej (Rys. 245.) a także ślad boczny k_δ płaszczyzny δ_{II} .

czyzny dwusiecznej. Z dowolnego punktu A (A' A'' A''') prostej m poprowadźmy prostopadłą p (p' p'' p''') do płaszczyzny δ_{II} i znajdziemy kąt, jaki prosta ta tworzy z prostą m . W tym celu wyznaczaliśmy ślady poziome H_m i H_p obu prostych, i ślady h_α , v_α płaszczyzny α , na której leżą. Wykonawszy kład tej płaszczyzny na rzutnię poziomą, otrzymamy proste m_0 i p_0 , a kąt φ , uzupełniający kąt ψ tych prostych, rozwiązuje zadanie.

3. Wyznaczyć kąt nachylenia prostej p (p' p'') z płaszczyzną α (h_α v_α), przyczem położenie prostej jest takie, że rzuty jej schodzą się ze śladami płaszczyzny (Rys. 246.). Dla



Rys. 246.

zorientowania się co do wzajemnego położenia prostej i płaszczyzny, wyznaczaliśmy rzut boczny p''' prostej p i ślad boczny k_α płaszczyzny α . Następnie z punktu B (B' B'') prostej p (p' p'') poprowadziliśmy prostopadłą m (m' m'') do α i wykonali kład płaszczyzny ε (h_ε v_ε), wyznaczonej prostymi p i m , na rzutnię pionową. Kąt φ , uzupełniający kąt $m^0 p^0$, jest rozwiązaniem zadania.

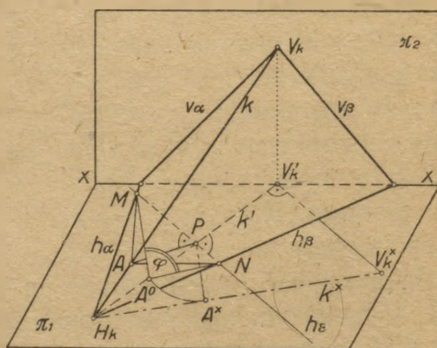
83. Ćwiczenia.

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej p z płaszczyzną α dla następujących położeń:

- a) $\alpha \perp \pi_1$, p dowolnie; b) $\alpha \perp \pi_2$, $p \parallel \pi_1$;
- c) $\alpha \parallel$ do x , p dowolnie; d) $\alpha \parallel \delta_I$, $p \parallel \pi_2$;
- e) $\alpha \equiv \delta_I$, p dowolnie; f) α dowolnie, $p \parallel x$.

84. Kąt nachylenia dwóch płaszczyzn. Ogólnie omówiliśmy rozwiązanie tego zadania w ust. 74. Sprawa da się jednak pod względem konstrukcyjnym znacznie uprościć.

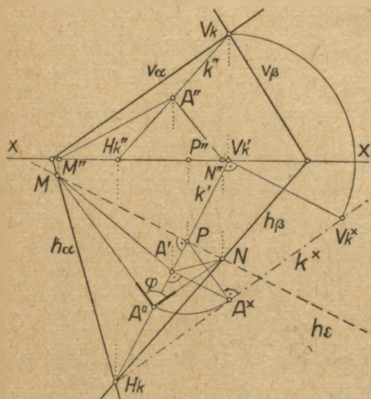
1. Sposób. W punkcie A , krawędzi k płaszczyzn α i β , (Rys. 247.), poprowadzona płaszczyzna prostopadła ε , przecina płaszczyznę α w prostej (A , M), zaś płaszczyznę β



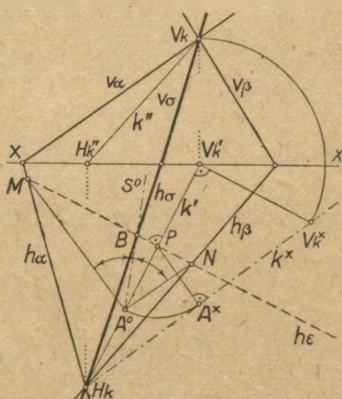
Rys. 247.

w prostej AN , przyczem ślad poziomy h_ε tej płaszczyzny jest prostopadły do rzutu k' krawędzi k i przecina go w punkcie P . Kąt MAN jest szukanim kątem. Prosta AP , leżąca na płaszczyźnie poziomo rzucającej $H_k AP$ i na płaszczyźnie ε , jest prostopadłą do krawędzi k i do śladu h_ε ; w istocie k , jako prostopadła do ε , jest prostopadłą do AP , a ślad h_ε prostopadły do k' jest prostopadły do płaszczyzny rzucającej $H_k AP$, a więc i do prostej AP .

Przystąpmy do rozwiązania zadania w rzutach prostokątnych (Rys. 248 a.). Wyznamy rzut poziomy k' krawędzi k



Rys. 248 a.



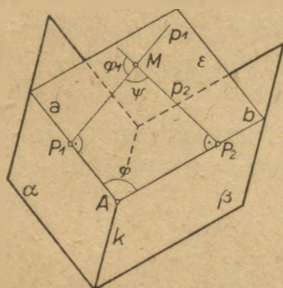
Rys. 248 b.

danych płaszczyzn α i β i w punkcie dowolnym P wykreślmy $h_\varepsilon \perp k'$, jako ślad poziomy płaszczyzny prostopadłej do krawędzi k . Wykonajmy kład $k^\times$ krawędzi k na rzutnię poziomą (porównaj Rys. 247. z Rys. 248 a.) i wykreślmy z punktu P prostą $(P, A^\times) \perp k^\times$, a otrzymany punkt $A^\times$ przenieśmy łukiem koła o środku P na k' . Punkt A^0 połączymy z punktami M i N , a kąt $MA^0N = \varphi$ rozwiązuje zadanie. Rzuty kąta φ otrzymamy, gdy znajdziemy rzuty A' i A'' jego wierzchołka A . Prostopadła wykreślona z $A^\times$ do k' przecina ją w punkcie A' , który jest wierzchołkiem rzutu poziomego kąta φ , którego ramiona przechodzą przez M i N . Punkt A' odniesiony na k'' i połączony z punktami M'' i N'' wyznacza kąt $M''A''N''$, będący rzutem pionowym kąta φ , jaki tworzą płaszczyzny α i β .

Wykreślmy dwusieczną s° kąta φ (Rys. 248 b.) i połączmy punkt przecięcia się $B \equiv (s^\circ, h_\varepsilon)$ z punktem H_k . Otrzymana

prosta h_α jest śladem poziomym płaszczyzny dwusiecznej σ , której ślad pionowy przejdzie przez punkt V_k .

2. Sposób. Z dowolnego punktu M prowadzimy prostopadłe p_1 i p_2 do danych płaszczyzn α i β (Rys. 249.). Proste te wyznaczają płaszczyznę ε prostopadłą do obu danych, a więc i prostopadłą do ich krawędzi k . Oznaczmy proste przecięcia się płaszczyzny ε z α i β przez a i b , to kąt φ , jaki tworzą te proste, przecinające się w punkcie A , jest kątem danych płaszczyzn.



Rys. 249.

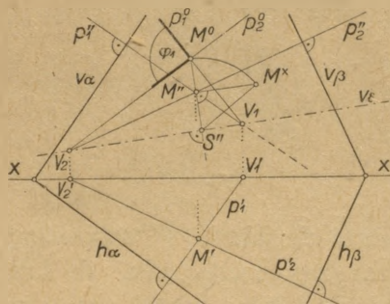
Z Rys. 249. czytamy:

$$\varphi + \psi = 180^\circ \text{ i } \varphi_1 + \psi = 180^\circ$$

a stąd $\varphi_1 = \varphi$, to znaczy, że

wielkość kąta dwóch płaszczyzn wyraża kąt, którego wierzchołkiem jest

dowolny punkt przestrzeni, a którego ramiona są prostopadłe do tych płaszczyzn.



Rys. 250.

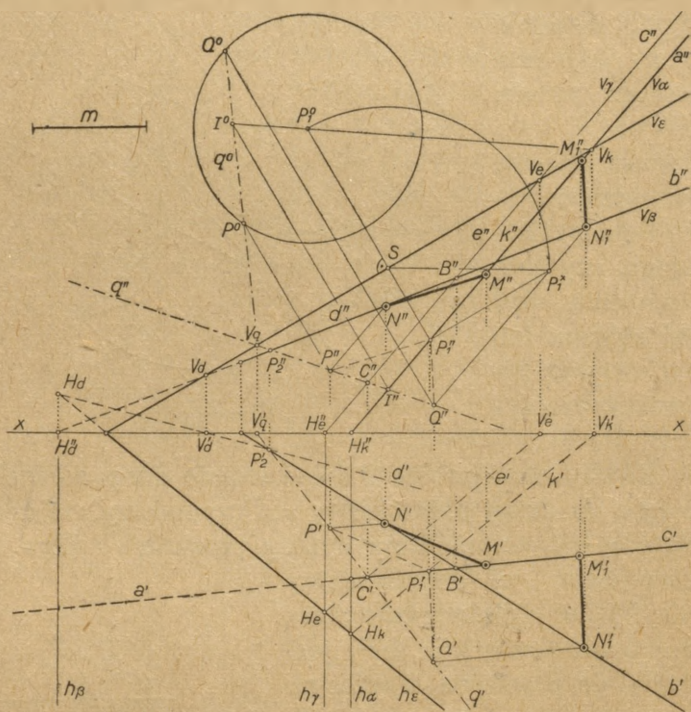
Rozwiązanie zadania w rzutach Monge'a podaje Rys. 250. Wykreśliwszy z dowolnie przyjętego punktu M (M' M'') prostopadłe p_1 (p_1' p_1'') i p_2 (p_2' p_2'') do płaszczyzn α (h_α v_α) i β (h_β v_β), wykonaliśmy kład płaszczyzny $\varepsilon \equiv (p_1, p_2)$ około jej śladu pionowego v_ε na rzutnię pionową, otrzymując szukany kąt $\varphi_1 = \varphi$.

85. Zadania.

1. Obrócić dany punkt A (A' A'') około osi m (m' m'') tak, aby padł na daną płaszczyznę α (h_α v_α). Poprowadźmy przez punkt A (Rys. 251.) płaszczyznę ε (h_ε v_ε) prostopadłą do prostej m i wyznaczmy punkt przebiecia się S (S' S'') tej prostej z ε , a także krawędź k (k' k'') płaszczyzn α i ε . Jeżeli promieniem SA ze środka obrotu S zakreślimy koło, to punkty przecięcia się A_1 i A_2 tego koła z krawędzią k rozwiązują zadanie. W celu otrzymania tych punktów wykonaliśmy kład płaszczyzny ε wraz z punktami A , S i prostą k na rzutnię poziomą, gdzie promieniem $S^n A^n$ zakreśliliśmy koło, które

przeczną prostą b w punktach N i N_1 . Prosta, wyprowadzona z punktu N równolegle do PP_1 , przecina a w punkcie M , przy czem odcinek $MN = m$ rozwiązuje zadanie. Podobnie prosta, wyprowadzona z N_1 równolegle do P_1Q , przecina prostą a w punkcie M_1 , przy czem odcinek $M_1N_1 = m$ stanowi drugie rozwiązanie zadania.

Przeprowadzenie konstrukcyi w rzutach prostokątnych podaje Rys. 253., którego studyum pozostawiamy czytelnikowi.



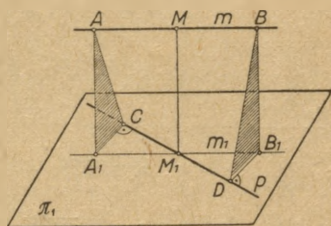
Rys. 253.

Zauważymy tylko, że dla wyznaczenia płaszczyzny, przechodzącej przez prostą b (b' b'') równolegle do a (a' a''), wzięliśmy pod uwagę prostą c (c' c'') $\parallel$ a (a' a'') a przecinającą b (b' b'') w punkcie B (B' B''), przy czem przyjęliśmy $c' \equiv a'$. Prosta c przebija płaszczyznę ε (h_ε v_ε) w punkcie C (C' C''), a prostą b w punkcie P_2 (P_2' P_2''). Punkty te wyznaczają prostą q (q' q'').

Jeżeli prosta q nie przecina koła zakreślonego z punktu P_1 promieniem m , to zadanie nie ma rozwiązań rzeczywistych,

odcinek m jest za krótki. Jeżeli prosta q jest styczną do koła, to wówczas otrzymamy tylko jedno rozwiązanie.

3. Przez punkt P płaszczyzny π wykreślić na niej prostą, równo oddaloną od dwóch danych punktów w przestrzeni, a mianowicie A i B . Przedewszystkiem rozważmy sprawę następującą: Przyjawszy proste skośne m i p (Rys. 254.), a na pierwszej punkty A i B , odpowiedzmy na pytanie, kiedy i pod jakimi warunkami punkty A i B będą równo oddalone od prostej p . W tym celu poprowadźmy przez prostą p płaszczyznę π_1 , równoległą do prostej m i znajdziemy rzut prostokątny m_1 prostej m na tę płaszczyznę, a to przez wyznaczenie rzutów A_1 i B_1 punktów A i B . Rzućmy jeszcze punkty A i B prostopadłe na prostą p i połączmy otrzymane punkty C i D , pierwszy z A_1 , drugi z B_1 . Niechaj MM_1 jest wspólną prostopadłą do prostych m i p i niechaj $AM = MB$, to wówczas $A_1M_1 = M_1B_1$, $A_1C = B_1D$ a także $AC = BD$, trójkąty bowiem AA_1C i BB_1D będą przystające. Ponieważ odcinki AC i BD są oddaleniami punktów A i B od prostej p , więc widzimy, że: *aby dwa punkty A i B , prostej m , były równo oddalone od innej prostej p , to potrzeba i wystarcza, aby punkty te były równo oddalone od wspólnej prostopadłej obu prostych*. I na wzajem, skoro dwa punkty prostej m są równo oddalone od prostej p , to wspólna prostopadła tych prostych przecina prostą m w środku M odcinka AB .



Rys. 254.

W ten sposób zadanie nasze wykreślenia na danej płaszczyźnie π , przez dany punkt P , prostej równo oddalonej od dwóch danych punktów A i B w przestrzeni, sprowadza się do wyznaczenia na płaszczyźnie π takiej prostej p przechodzącej przez punkt P , aby wspólna prostopadła do p i $m \equiv (A, B)$ przeszła przez środek odcinka AB .

W tym celu poprowadźmy przez środek M odcinka AB (Rys. 225.) płaszczyznę ε prostopadłą do niego i wyznaczmy krawędź k płaszczyzn ε i π . Rzućmy następnie punkt M prostopadłe na płaszczyznę π , a na średnicy M_1P zakresłmy koło. Proste p i p_1 , łączące punkt P z punktami przecięcia się N_1N_2 krawędzi k z tym kołem, spełniają żądany warunek

Rozwiązanie omawianego zadania w rzutach prostokątnych podaje Rys. 256., gdzie punkt B (B' B'') przyjęliśmy w czwartej części przestrzeni.

86. Ćwiczenia.

1. Obrócić punkt A około danej prostej m tak, aby po obrocie padł na daną płaszczyznę α . Prosta m i płaszczyzna α mają następujące położenia:

- | | |
|---|---|
| a) $m \perp \pi_1, \alpha \perp \pi_1$; | g) $m \perp \pi_1, \alpha // x$; |
| b) $m \perp \pi_1, \alpha \perp \pi_2$; | h) $m \text{ na } \pi_1, \alpha \equiv \delta_I$; |
| c) $m \perp \pi_1, \alpha // \pi_2$; | i) $m \text{ na } \delta_{II}, \alpha \equiv \delta_{II}$; |
| d) $m \perp \pi_2, \alpha // \pi_1$; | j) $m \text{ na } \delta_{II}, \alpha // \delta_I$; |
| e) $m \perp \pi_2, \alpha$ dowolnie położona; | k) $m // \delta_I, \alpha \equiv \delta_I$; |
| f) $m \perp \pi_1, \alpha$ „ „ „ | l) $m // \delta_I, \alpha \equiv \delta_{II}$. |

2. Wyznaczyć kąt nachylenia płaszczyzn α i β w następujących przypadkach:

- | | |
|--|---|
| a) $\alpha \perp \pi_1, \beta \perp \pi_2$; | f) $\alpha \perp \pi_1, \beta \equiv \delta_{II}$; |
| b) α dowolna, $\beta \perp \pi_1$; | g) $\alpha \perp \pi_2, \beta \equiv \delta_{II}$; |
| c) $\alpha // x, \beta$ dowolna; | h) $\alpha \perp \pi_2, \beta // \pi_3$; |
| d) $\alpha // x, \beta \perp \pi_1$; | i) $\alpha \equiv \delta_I, \beta$ dowolna; |
| e) $\alpha \perp \pi_1, \beta \equiv \delta_I$; | k) $\alpha \equiv \delta_{II}, \beta$ dowolna. |

3. Dane są dwie płaszczyzny α i β i prosta p ; wyznaczyć na tej prostej punkt równo oddalony od obu płaszczyzn.

4. Dane są dwie płaszczyzny α i β i trzy punkty A, B, C ; wyznaczyć punkt równo oddalony od obu płaszczyzn i od danych punktów. (W środku koła opisanego na trójkącie ABC poprowadzimy prostopadłą do płaszczyzny trójkąta i znajdziemy punkty przebicia się z płaszczyznami dwusiecznymi).

5. Dane są dwie proste równoległe a i b i trzecia prosta c skośna względem dwóch pierwszych; wyznaczyć prostą, która przecina wszystkie trzy dane, a jest równoległą do rzutni poziomej. (Przez punkt przebicia się P prostej c z płaszczyzną $\alpha \equiv (a, b)$ poprowadzimy płaszczyznę poziomą π ; krawędź płaszczyzn α i π rozwiązuje zadanie).

6. Znaleźć prostą równo oddaloną od trzech danych równoległych.

7. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, które są równo oddalone od obu śladów danej płaszczyzny α , od tej płaszczyzny i od rzutni poziomej. (Wyznamy dwusieczną d kąta, jaki tworzą ślady płaszczyzny α , a przez nią poprowadzimy płaszczyznę β prostopadłą do α . Płaszczyzna dwusieczna kąta, jaki dana płaszczyzna α tworzy z rzutnią poziomą, przecina płaszczyznę β w prostej, rozwiązującej zadanie).

8. Dana jest prosta a i trzy punkty A, B, C ; obrócić punkt A około prostej a tak, aż będzie równo oddalony od B i C . (Przez A poprowadzimy płaszczyznę α prostopadłą do a i wyznaczmy punkt przebicia się S . Promieniem SA zakreśliśmy na α koło i znajdziemy krawędź płaszczyzny α z płaszczyzną symetrii odcinka BC . Punkty przecięcia się tej krawędzi z kołem rozwiązują zadanie).

87. Rzuty wielościanów. Poznanie metody obrotów i kładów umożliwia nam zajęcie się pewną grupą utworów przestrzennych, jakimi są, znane nam z nauki stereometrii,

wielościany. Wiadomo, że przestrzeń ograniczoną ze wszystkich stron płaszczyznami, stanowi wielościan. Prostą przecięcia się dwóch płaszczyzn ograniczających wielościan, nazywamy krawędzią tego wielościanu. Krawędzie te tworzą wielokąt, ograniczające wielościan i tworzące jego ściany. Do najprostszych wielościanów należą ostrosłupy i graniastopy.

Wielościan ograniczony dowolnym wielokątem i trójkątami, mającymi jeden wierzchołek wspólny, nazywamy ostrosłupem. Ów wielokąt nazywa się podstawą, a boki tego wielokąta krawędziami podstawy. Wspomniane wyżej trójkąty stanowią ściany boczne ostrosłupa, a ich boki, z wyjątkiem tych, które stanowią krawędzie podstawy, nazywamy krawędziami bocznymi. Wszystkie krawędzie boczne schodzą się w punkcie, który nazywamy wierzchołkiem ostrosłupa. Odległość wierzchołka od podstawy nazywamy wysokością ostrosłupa. Ostrosłup, którego wszystkie krawędzie boczne są równej długości, określać będziemy mianem prosty, w odróżnieniu od ukośnego, który warunku tego nie spełnia. Ilość ścian bocznych ostrosłupa nadaje mu miano; mówimy tedy o ostrosłupie trójsściennym, czworościennym i t. d., zależnie od tego, czy trójkąt, czworokąt, czy też inny wielokąt stanowi jego podstawę. Podstawa i wierzchołek wyznaczają ostrosłup, stwarzają bowiem warunki, umożliwiające wyznaczenie brakujących krawędzi i ścian bocznych.

Wielościan ograniczony dwoma przystającymi wielokątami i równoległobokami, których ilość równa jest ilości boków wielokąta, nosi nazwę graniastopu. Owe dwa przystające wielokąty stanowią podstawy, a równoległoboki ściany boczne graniastopu. Boki wielokątów podstawowych nazywamy krawędziami podstawy, a boki równoległoboków, nie schodzące się z bokami podstaw, krawędziami bocznymi graniastopu. Odległość płaszczyzn podstawowych nazywamy wysokością graniastopu. Graniastop, którego krawędzie boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, określać będziemy jako prosty; inaczej graniastop jest ukośny. Ściany boczne graniastopu prostego są prostokątami, graniastopu ukośnego równoległobokami. Zależnie od ilości ścian bocznych, mówimy o graniastopie trójsściennym, czworościennym i t. d. Z określenia graniastopu wynika, że jedna podstawa i jedna krawędź boczna, wyznaczają go w zupełności. Graniastop,

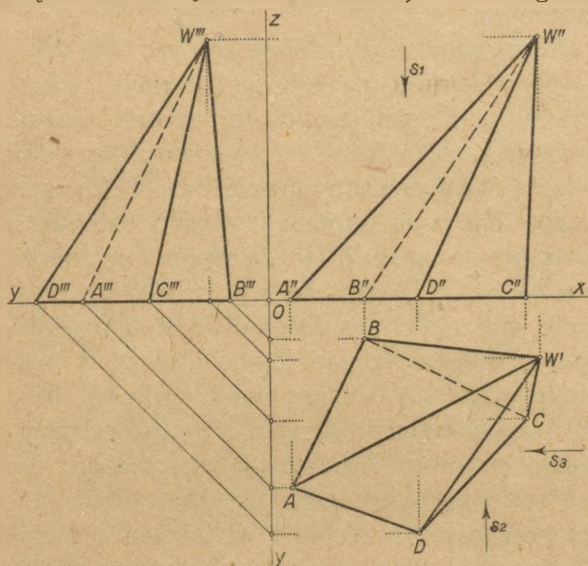
którego jedna tylko podstawa i ściany boczne są dane, nazywać będziemy nieograniczonym.

Weźmy pod uwagę dowolny wielościan, np. ostrosłup czworosścienny, którego podstawa znajduje się na rzutni poziomej i wiązkę promieni prostopadłych do tej rzutni. Pewne promienie wiązki przebiją ostrosłup i te będziemy nazywali siecznymi, inne leżeć będą zewnątrz ostrosłupa, a wreszcie będą i takie, które przecinać będą jedynie krawędzie ostrosłupa i te nazywać będziemy stycznymi. Każda styčna wyznacza z krawędzią, którą przecina, płaszczyznę styczną wielościanu. Wszystkie te płaszczyzny styczne utworzą graniastostup, którego ściany przechodzą przez pewne krawędzie wielościanu. Krawędzie te stanowią zawsze zamkniętą linię łamaną w przestrzeni, czyli wielokąt przestrzenny, który nazywamy zarysem albo konturem uważanego wielościanu. Na zarys wielościanu składają się więc takie jego krawędzie, których płaszczyzny rzucające nie przecinają wielościanu. W odniesieniu do rzutni pionowej otrzymamy drugi kontur wielościanu, podobnie jak w odniesieniu do rzutni bocznej. Wiadomo (ust. 53.), że rzut poziomy jest widokiem z góry z odległości nieograniczenie dalekiej, że rzut pionowy jest obrazem przedmiotu, na który patrzymy w kierunku prostopadłym do rzutni pionowej z odległości nieograniczenie dalekiej, czyli, jak mówimy z przodu. Wreszcie rzut boczny jest równoznaczny z widokiem z boku, w kierunku prostopadłym do rzutni bocznej, zawsze z odległości nieograniczenie dalekiej. Przy założeniu, że wielościan nie jest przeźroczysty, kontur jego oddziela, w odniesieniu do każdej rzutni, część widoczną od niewidocznej.

Rzut wielościanu na daną rzutnię otrzymamy, znajdując rzuty wszystkich jego krawędzi, a więc także i jego zarysu. Rzuty krawędzi widocznych, do których należą zawsze krawędzie konturowe, wykreślać będziemy liniami pełnymi, w odróżnieniu od rzutów krawędzi niewidocznych, rysowanych zawsze liniami kreskowanymi.

Zastosujmy te uwagi do przyjętego już wyżej ostrosłupa ukośnego, którego podstawa $ABCD$ spoczywa na rzutni poziomej (Rys. 257). Jeżeli W (W' W'' W''') jest wierzchołkiem ostrosłupa, to konturem jego w odniesieniu do rzutni poziomej będzie wielokąt przestrzenny $W B A D C W$, ograniczający

część widoczną od niewidocznej. W szczególności ściany WBA ,

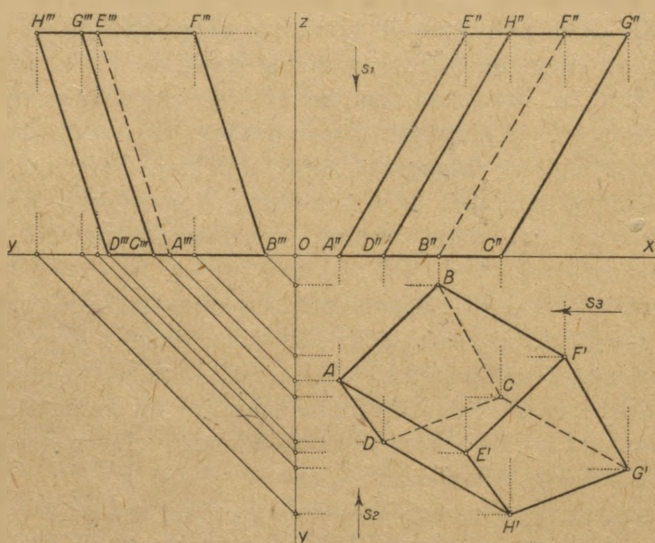


Rys. 257.

WAD i WDC są w rzucie poziomym widoczne, zaś ściana WBC i podstawa ostrosłupa są niewidoczne.

Krawędź BC , jako należąca do dwóch ścian niewidocznych, jest niewidoczną i dlatego wykreskowaną. Zarys dla rzutu pionowego jest linią łamaną $WADCW$.

Krawędź WB jest w tym rzucie niewidoczną. W rzucie bocznym, na który



Rys. 258.

patrzemy w kierunku S_3 , nie jest widoczną krawędź boczna WA .

Rys. 258. przedstawia rzuty czworościennego graniasto-

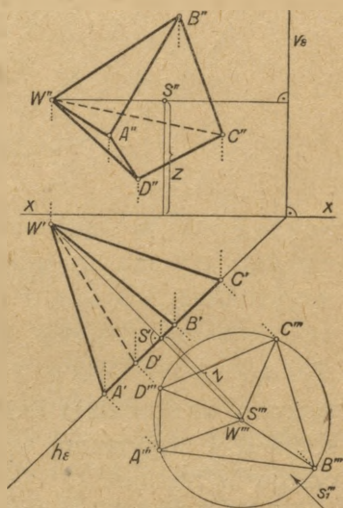
słupa ukośnego, którego podstawa $A B C D$ leży na rzutni poziomej.

88. Przykłady.

1. Wyznaczymy rzuty prostego ostrosłupa, którego podstawa, dowolny czworokąt, spoczywa na płaszczyźnie poziomo rzucającej, a którego wysokość jest dana.

Wiadomo, że krawędzie boczne ostrosłupa prostego są równej długości, a ponieważ wszystkie przechodzą przez jeden punkt, wierzchołek, więc rzuty tych krawędzi na płaszczyznę podstawy będą odcinkami równej długości. Aby warunek ten mógł być spełniony, wielokąt podstawy musi być wpisany w koło, a rzut wierzchołka ostrosłupa schodzić się ze środkiem tego koła.

Jeżeli $\varepsilon (h_\varepsilon v_\varepsilon)$ jest płaszczyzną podstawy (Rys. 259.), to czworokąt $A''' B''' C''' D'''$ wpisany w koło wraz z bokami $\overline{S''' A'''}$, $\overline{S''' B'''}$, $\overline{S''' C'''}$ i $\overline{S''' D'''}$ jest kładem rzutu ostrosłupa na płaszczyznę ε , dokonany na rzutnię poziomą. Kład ten uważać można za trzeci (boczny) rzut ostrosłupa. Podniesiemy podstawę wraz ze środkiem S koła na płaszczyznę ε ; w punkcie $S (S' S'')$ wyprowadzimy prostopadłą do ε i odmierzymy na niej odcinek $S W$ równy danej wysokości. Skonstruowany w ten sposób wierzchołek $W (W' W'')$ połączymy z wierzchołkami czworokąta podstawy, otrzymując rzuty ostrosłupa. Z łatwością zauważymy, że w rzucie poziomym krawędź $D W$, a w rzucie pionowym krawędź $C W$ są niewidoczne.

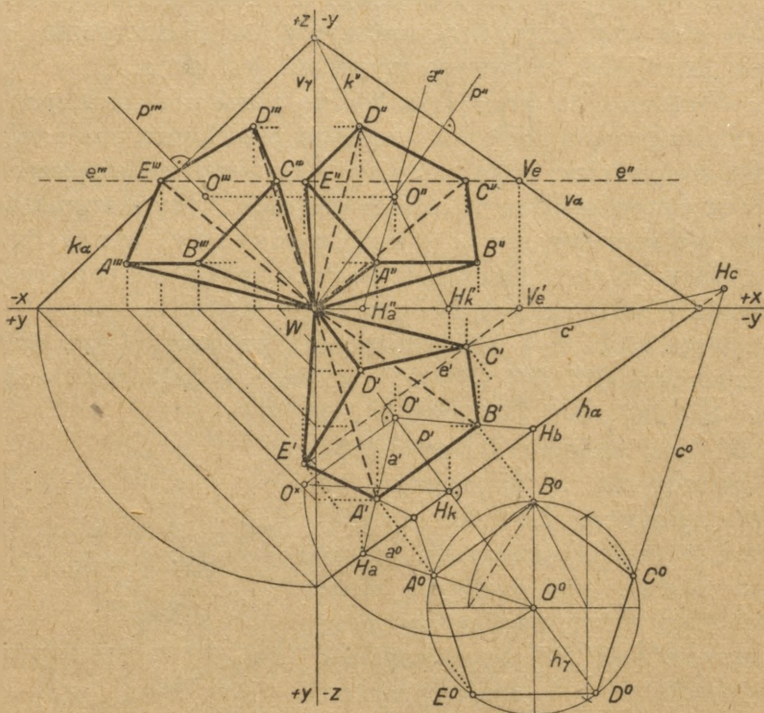


Rys. 259.

2. Wykreślić rzuty prostego ostrosłupa, którego wierzchołek znajduje się w środku układu, a podstawa, będąca umiarkowanym pięciokątem, leży na danej płaszczyźnie $\alpha (h_\alpha v_\alpha k_\alpha)$ (Rys. 260.).

Znajdziemy punkt przebiecia się $O (O' O'' O''')$ prostej $p (p' p'' p''')$, wyprowadzonej ze środka układu prostopadłe do płaszczyzny α . Po wykonaniu kładu płaszczyzny α wraz

z punktem O na rzutnię poziomą, wykreślimy pięciokąt $A^0....E^0$ i podniesiemy go na tę płaszczyznę, kreśląc jego rzut poziomy, pionowy i boczny. Rzuty wierzchołków pięciokąta podstawy



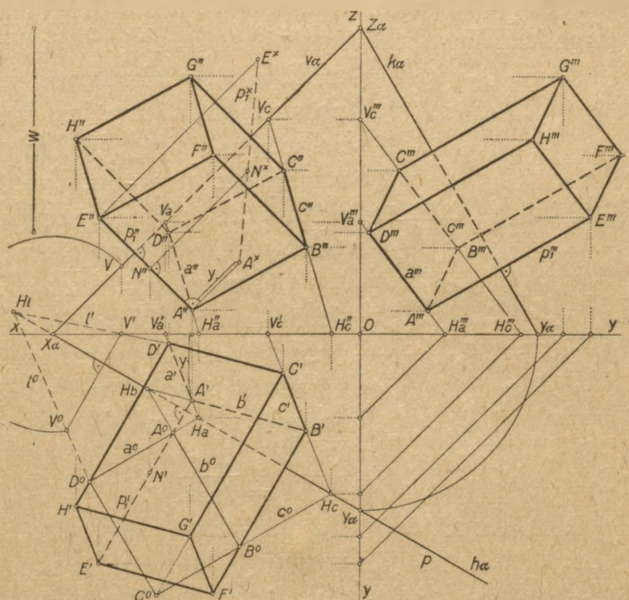
Rys. 260.

łączymy ze środkiem układu, w którym leży wierzchołek ostrosłupa W i otrzymamy rzuty krawędzi bocznych, a więc i rzuty całego ostrosłupa.

3. Wykreślić rzuty prostego graniastostupa o danej wysokości w , którego podstawa (prostokąt) leży na płaszczyźnie α ($h_\alpha v_\alpha$) (Rys. 261.).

Prostokąt $A^0 B^0 C^0 D^0$ przyjęty na rzutni poziomej podnieśliśmy około śladu h_α na płaszczyznę α , otrzymując najpierw rzut poziomy $A' B' C' D'$, a następnie rzut pionowy $A'' B'' C'' D''$. Na prostopadłych, wyprowadzonych w wierzchołkach podstawy do płaszczyzny α , należy odmierzyć długość krawędzi bocznych.

W tym celu obraliśmy na jednej z nich, a mianowicie na p_1 (p_1' p_1'') punkt N (N' N'') i wykonali jej kład p_1^x na rzutnię pionową. Odmierzwszy $\overline{A^x E^x} = w$, wróciliśmy z punktem E na prostą p_1 otrzymując jego rzuty E' i E'' . Ponieważ rzuty prostych równoległych są równoległe, więc rzuty krawędzi podstawy górnej będą równoległe do rzutów odpowiednich krawędzi podstawy dolnej.

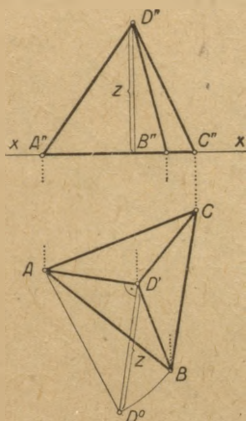


Rys. 261.

89. Rzuty wielościanów umiarowych. Wielokątem umiarywym nazywamy taki wielokąt płaski, w którym wszystkie boki i kąty są równe. Na wielokącie umiarywym opisać można koło, podobnie jak w wielokąt umiarywy da się zawsze wpisać koło. Oba koła są współśrodkowe, a ich wspólny środek nazywamy środkiem wielokąta.

Wielościan nazywamy *umiarywym*, gdy wszystkie jego ściany boczne są przystającymi umiarywymi wielokątami, którego kąty dwuściennie są równe, a naroża są wierzchołkami wielościenne, umiarywych i przystających kątów bryłowych. W każdy wielościan i na każdym z nich da się wpisać i opisać kula. Obie kule są współśrodkowe, który to środek nazywamy środkiem wielościanu. W zakres naszych rozważań wciągniemy wielościany umiarowe rodzaju pierwszego, czyli t. zw. ciała Platona, których jest pięć, a mianowicie: czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan.

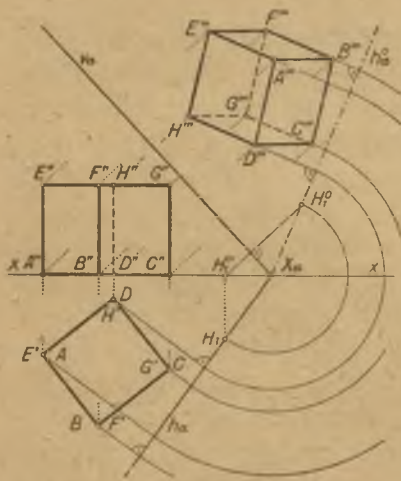
a) *Czworościan* ograniczony jest czterema przystającymi trójkątami równobocznymi i stanowi trójsięenny ostrosłup prosty, którego krawędzie podstawy i krawędzie boczne są równej długości. Wysokość tego ostrosłupa równa jest przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna równa jest krawędzi czworościanu, a którego druga przyprostokątna równa jest promieniowi koła, opisanego na trójkącie równobocznym, stanowiącym ścianę tego czworościanu.



Rys. 262.

Przyjmijmy ścianę $A B C$ czworościanu na rzutni poziomej (Rys. 262.), to rzut D' czwartego wierzchołka D leżeć będzie w środku trójkąta $A B C$, zaś wysokość z równa będzie przyprostokątnej $D' D^0$ trójkąta $A D' D^0$, przyczem $A D^0 = A B$.

b) *Sześcian* jest graniastostłupem prostym, którego wszystkie ściany są kwadratami. W Rys. 263. wykonaliśmy prócz rzutu poziomego i pionowego, rzut na płaszczyznę α ($h_\alpha v_\alpha$), w sposób omówiony w ust. 76.

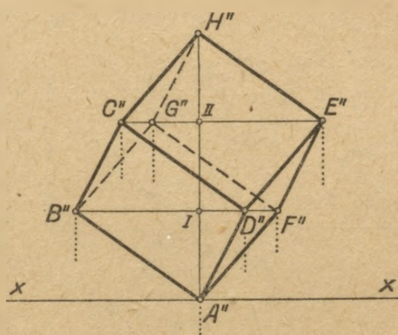


Rys. 263.

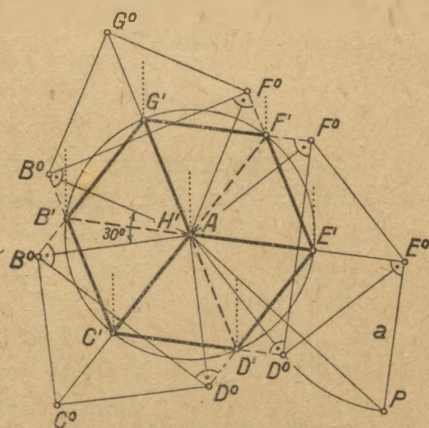
Wykreślmy rzuty sześciannu, którego długość krawędzi jest dana, a którego przekątna główna, t. j. odcinek łączący dwa przeciwległe wierzchołki sześciannu, ma położenie pionowe. Obrawszy punkt A na rzutni poziomej (Rys. 264.), wykreślmy trzy kwadraty: $A B^0 C^0 D^0$, $A D^0 E^0 F^0$ i $A F^0 G^0 B^0$, a to w ten sposób, aby kąty, jakie tworzą dwie sąsiednie krawędzie kwadratów, przechodzące przez punkt A , wynosiły 30° . Kwadraty owe uważajmy za rozwinięcie prostokątnego naroża trój-

ściennego o wierzchołku A na rzutnię poziomą. Wyobraźmy sobie, że kwadrat $A B^0 C^0 D^0$ obracamy około osi, przechodzącej

przez A równoległe do przekątnej $B^0 D^0$, a zaś kwadrat $A D^0 E^0 F^0$ około osi, przechodzącej również przez punkt A równoległe do przekątnej $D^0 F^0$. W pewnym momencie obrotu wierzchołki, oznaczone literą D^0 w obu kwadratach, zejdą się w punkcie D ($D' D''$), a odcinek $D' A$ będzie rzutem poziomym krawędzi sześcianu. Punkt D' będzie przecięciem się prostych, wykreślonych z obu punktów D^0 prostopadłe do kierunków osi obrotów, a więc do $B^0 D^0$ i $D^0 F^0$. W ten sam sposób otrzymamy punkty F' i B' , a więc zarys



$B' C' D' E' F' G'$ sześcianu na rzutni poziomej. $A B'$, $A D'$ i $A F'$ są rzutami niewidocznych krawędzi sześcianu, a $A C'$, $A E'$ i $A G'$ rzutami pozostałych trzech krawędzi widocznych. Długość przekątnej sześcianu wynosi $a \sqrt{3}$, które to wyrażenie, algebraicznie niewymierne, otrzymamy jako przeciwprostokątną AP

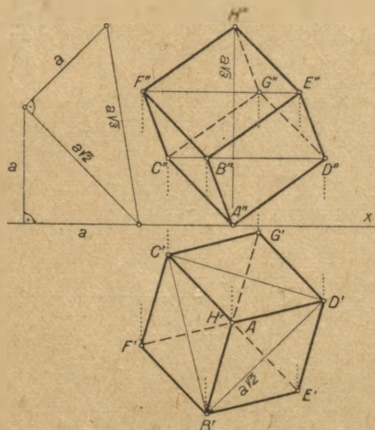


Rys. 264.

trójkąta prostokątnego o bokach $A E^0 = a \sqrt{2}$, i $E^0 P = a$. Punkty B , D i F leżą w tej samej wysokości, a więc na płaszczyźnie poziomej, podobnie jak punkty C , E , G , których wysokość jest również wspólna. Nachylenie krawędzi CH , CD i AD do przekątnej głównej AH jest jednakowe, gdyż krawędź CD jest równoległa do HE .

Wskutek tego, gdy punkt A leży na rzutni poziomej, odległość tej rzutni od płaszczyzny BDF i tej ostatniej od płaszczyzny poziomej CEG , a tej znowu od punktu H , są równe. Podzieliwszy więc przekątną $A'' H''$ na trzy równe części i poprowadziwszy przez punkty podziału I i II poziome, otrzymamy na nich szukane rzuty wierzchołków.

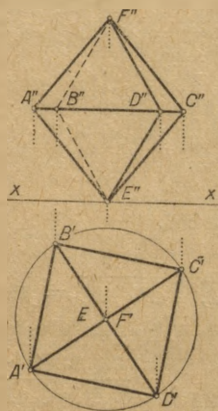
Pamiętając o tem, że rzut poziomy sześcianu w omawianem położeniu jest umiarem sześciokątem i że odcinek,



Rys. 265.

łączący dwa nieprzyległe wierzchołki tego sześciokąta, więc np. $B'D'$ (Rys. 264.) jest przekątną kwadratu, stanowiącego ścianę boczną, wyznaczymy z łatwością rzut poziomy i bez podnoszenia kwadratów, jak to widzimy na Rys. 265. Wykreśliwszy długość przekątnej głównej równą $a\sqrt{3} = A''H''$, podzielimy ją na trzy równe części, a na proste poziome, poprowadzone przez punkty podziału, odniesiemy odpowiednie punkty z rzutu poziomego.

c) *Ośmiościan* ograniczony jest ośmioma równobocznymi trójkątami. Rys. 266. przedstawia rzuty ośmiościanu, którego przekątna główna jest pionową. Rzut poziomy jest w tem położeniu kwadratem, a $E''F''$ jego przekątną.

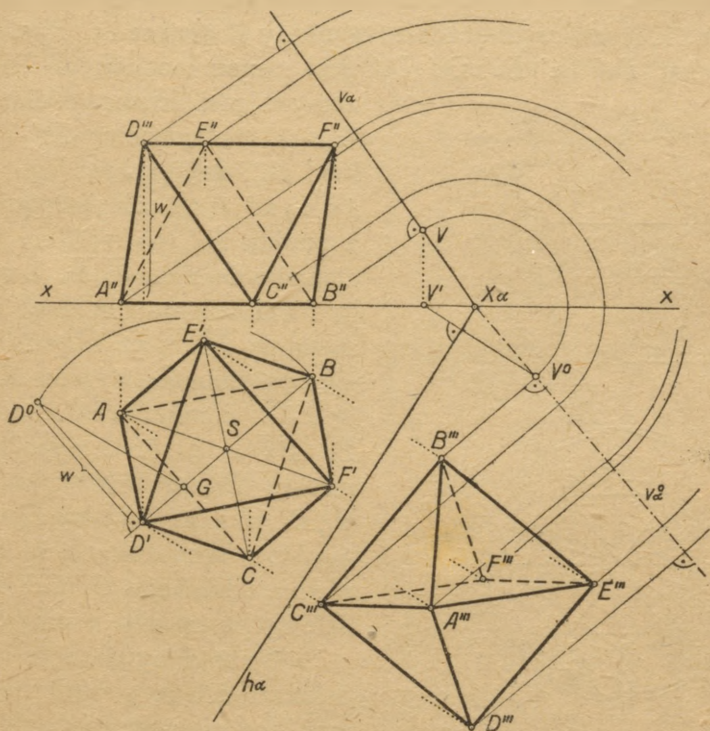


Rys. 266.

Rys. 267. podaje rzuty ośmiościanu, którego jedna ściana leży na rzutni poziomej. Przez boki trójkąta ABC przechodzą trzy dalsze trójkąty, których wierzchołki E, D, F w rzucie poziomym leżą na prostych, łączących środek S trójkąta ABC z jego wierzchołkami. Ponieważ płaszczyzny tych trzech trójkątów są jednakowo nachylone do poziomu, więc wierzchołki D, E, F są równo oddalone od S i od rzutni poziomej. Trójkąt $D'E'F'$ jest więc równoboczny, równoległy do poziomej i tworzy

jeden bok ośmiościanu. Przez połączenie wierzchołków obu trójkątów równobocznych otrzymamy rzut poziomy dalszych krawędzi, a zarys ośmiościanu na rzutni poziomej będzie umiarem sześciokątem. Odległość płaszczyzny trójkąta DEF od rzutni poziomej równa jest przyprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątną jest wysokość jednego z trójk-

kątów, stanowiących rzut ściany bocznej np. ACD' , a przeciwprostokątną prawdziwa jego wysokość, równa wysokości trój-



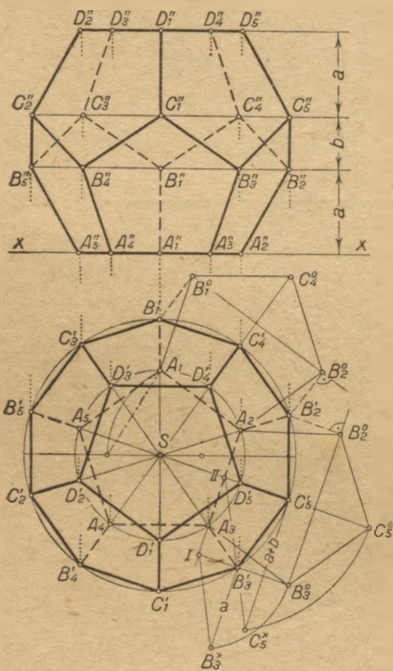
Rys. 267.

kąta ABC . Wykreśliwszy trójkąt $D'GD^0$, otrzymamy szukaną wysokość w , równą odcinkowi $D'D^0$. Na Rys. 267. wykonaliśmy także kład rzutu ośmiościanu na płaszczyznę α ($h_\alpha v_\alpha$).

d) Dwunastościan ograniczony jest umiłowymi pięciokątami, których w każdym narożu schodzi się trzy (Rys. 268.).

Pięciokąt $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, leżący na rzutni poziomej, niechaj stanowi podstawę dwunastościanu. Dwa dalsze pięciokąty $A_1 A_2 B_1^0 C_4^0 B_2^0$ i $A_2 A_3 B_3^0 C_5^0 B_2^0$ niechaj wyobrażają kład dwóch ścian naszego wielościanu, dokonany przez obrót około krawędzi $A_1 A_2$ i $A_2 A_3$. Podnieśmy równocześnie oba te pięciokąty w ich właściwe położenie, to boki ich $A_2 B_2^0$ zejdą się i utworzą krawędź dwunastościanu. Prostopadłe, wykreślone z punktów B_2^0 do boków $A_1 A_2$ i $A_2 A_3$, stanowiących osi obrotu, przezną się w punkcie B_2' , który połączony z A_2

daje rzut krawędzi bocznej dwunastościanu. Koło zakreślone ze środka S , przez punkt B_2' , jest miejscem geometrycznym rzutów poziomych dziesięciu wierzchołków naroży dwunastościanu, których wyznaczenie tłómaczy dostatecznie Rys. 268. Pięciokąt $D_1' D_2' D_3' D_4' D_5'$ jest rzutem poziomym ściany, zamykającej dwunastościan. —



Rys. 268.

Znając rzut poziomy B_3' i jego kład B_3^0 , znajdziemy jego wysokość w sposób następujący: z punktu B_3' wykreślimy prostopadłą do boku $A_2 A_3$. Z punktu I zakreślimy łuk koła promieniem IB_3^0 , aż do przecięcia się z prostopadłą, wyprowadzoną do IB_3^0 w punkcie B_3' . Odcinek $B_3' B_3^X = a$ jest wysokością punktu B_3 , a także punktów B_1, B_2, B_4 i B_5 . Wysokość $(a+b)$, punktów oznaczonych literą C , równą odcinkowi $C_5' C_5^X$ znajdziemy w sposób analogiczny.

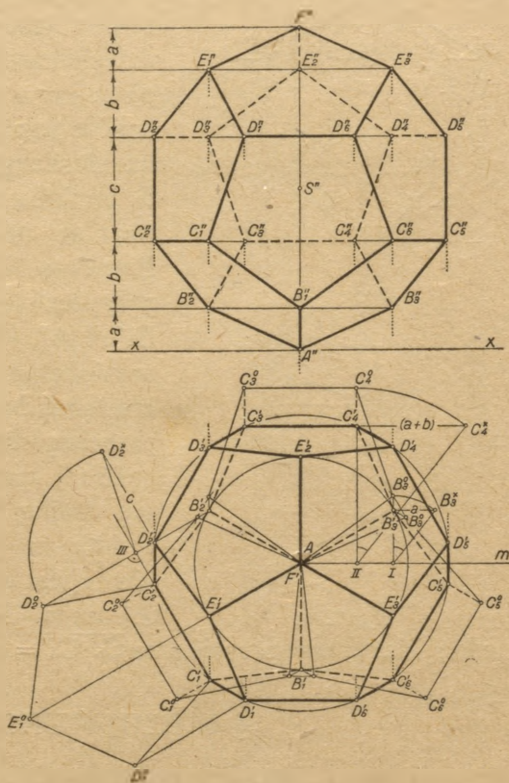
Wykreślimy jeszcze rzuty dwunastościanu umiarowego, gdy jego przekątna główna, a więc przechodząca przez środek i łącząca dwa przeciwległe wierzchołki, jest prostopadłą do

rzutni poziomej (Rys. 269). Płaszczyzny trzech pięciokątów, tworzących naroże o wierzchołku A , nachylone są do rzutni poziomej pod tym samym kątem. Wykreślimy kład tych trzech pięciokątów, przy zachowaniu wspólności wierzchołka A , a następnie podnieśmy je tak, ażeby pary sąsiednich krawędzi zeszły się. Osiami obrotów będą proste, przechodzące przez punkt A a równoległe do boków $C_1^0 C_2^0$, $C_3^0 C_4^0$ i $C_5^0 C_6^0$. Prosta wykreślona z punktu B_3^0 , prostopadłe do $m \parallel C_3^0 C_4^0$, a więc prosta $B_3^0 I$, przetnie prostą, wykreśloną z drugiego punktu B_3^0 prostopadłe do $C_5^0 C_6^0$, w punkcie B_3' , który jest rzutem wierzchołka B_3 . Na płaszczyźnie poziomej, przechodzącej przez B_3 , leżą jeszcze punkty B_1 i B_2 , których rzut poziomy leży na kole, zakreślonym z punktu A , jako środka,

promieniem $\overline{AB_3'}$. Wykreślmy ze środka obrotu I łuk koła, a z punktu B_3' poprowadźmy równoległą do m , to odcinek $B_3' B_3^X = a$ jest wysokością punktów B_1, B_2 i B_3 . Podnieśmy punkt C_4^0 około osi m o ten sam kąt, o jaki podniesiony jest punkt B_3^0 (więc $II C_1^X \parallel I B_3^X$), to koło zakreślone z punktu A promieniem $\overline{AC_4'}$ jest miejscem geometrycznym rzutów poziomych punktów, oznaczonych literą C , a mających tę samą wysokość, równą odcinkowi $\overline{C_4' C_4^X} = (a+b)$. W ten sposób otrzymamy punkty $C_1(C_1' C_1'')$, $C_2(C_2' C_2'')$, ...

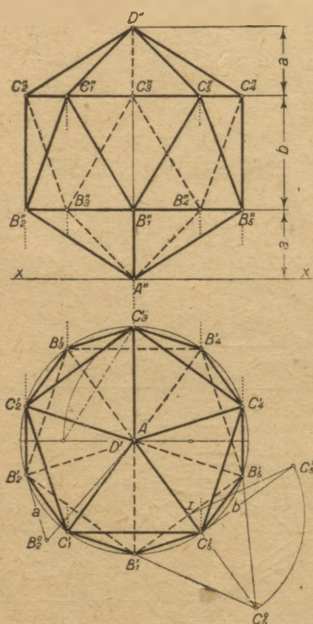
$C_6(C_6' C_6'')$. Naprzeciw wierzchołka A leży wierzchołek F naroża, przystającego do naroża o wierzchołku A . Rzut poziomy jego krawędzi jest linią łamaną $D_1' E_1' D_2' D_3' E_2' D_4' D_5' E_3' D_6' D_1'$ wraz z prostymi $F' E_1'$, $F' E_2'$ i $F' E_3'$. Na boku $C_1' C_2'$ wykreślony pięciokąt $C_1' C_2' D_1^0 E_1^0 D_2^0$ uważajmy

za kład ściany $C_1 C_2 D_1 E_1 D_2$ na płaszczyznę poziomą π , przechodzącą przez punkty $C_1, C_2 \dots C_6$, a więc leżącą w wysokości $(a+b)$ nad rzutnią poziomą. Uważając prostą (C_1', C_2') za rzut poziomy osi obrotu i znając rzut poziomy D_2' punktu D_2 po obrocie, otrzymamy odległość c punktu D_2 od płaszczyzny π , równą odcinkowi $\overline{D_2' D_2^X}$. Tym sposobem wyznaczone są wszystkie wielkości, potrzebne do wykreślenia obu rzutów dwunastościanu, którego długość krawędzi jest dana.



Rys. 269.

e) Dwudziestościan ograniczony jest równobocznymi trójkątami, z których pięć schodzi się w każdym narożu. Wykreślenie rzutu poziomego nie nastręcza żadnych trudności. Rys. 270. tłómaczy rzecz w sposób wystarczający. Długość boku pięciokąta $B_1' B_2' \dots B_5'$, czy też pięciokąta $C_1' C_2' \dots C_5'$, równa jest krawędzi bocznej dwudziestościanu. Dla otrzymania rzutu pionowego poznać musimy wysokość a punktów $B_1, B_2, \dots B_5$, leżących na płaszczyźnie poziomej i wysokość b punktów $C_1, C_2, \dots C_5$, leżących również na płaszczyźnie poziomej. Pierwszą z nich otrzymamy jako przyprostokątną $B_2' B_2^0$ trójkąta $B_2' A B_2^0$, którego drugą znaną przyprostokątną $B_2' A$ jest rzut poziomy krawędzi dwudziestościanu, a którego przeciwprostokątną $A B_2^0$ jest długość tej krawędzi. Z kolei wykreślimy trójkąt prostokątny $C_5' C_5^X I$, w którym przeciwprostokątną $C_5^X I$ równa jest wysokości trójkąta równobocznego $B_1' B_5' C_5^0$, stanowiącego jedną ścianę; przyprostokątną $C_5^X C_5' = b$ jest szukaną wysokością.



Rys. 270.

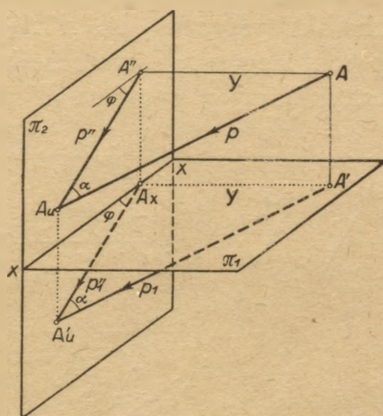
jedną ścianę; przyprostokątną $C_5^X C_5' = b$ jest szukaną wysokością.

§ 6. RZUTY UKOŚNE

90. Rzut ukośny punktu. Niechaj dowolny punkt A wyznaczony jest, w odniesieniu do przyjętych rzutni π_1 i π_2 , rzutem poziomym A' i rzutem pionowym A'' (Rys. 271.). Rzućmy punkty A i A' , w przyjętym kierunku p , na rzutnię pionową π_2 . Otrzymany punkt A_u jest rzutem ukośnym punktu A , a punkt A'_u rzutem ukośnym rzutu poziomego tego punktu. Punkt A'_u nazywać będziemy rzutem ukośnym poziomym. Położenie promienia p , rzucającego punkt A , jak i promienia $p_1 \parallel p$, a rzucającego punkt A' na płaszczyznę pionową π_2 , wyznaczone jest kątem α , jaki promienie te zawierają z płaszczyzną rzutów ukośnych π_2 i kątem φ , jaki rzut pionowy p'' , promienia p , zawiera z kierunkiem osi rzutów x .

Znając oba te kąty wyznaczymy z łatwością rzut ukośny i rzut ukośny poziomy dowolnego punktu, którego rzuty prostokątne na dwie płaszczyzny są dane.

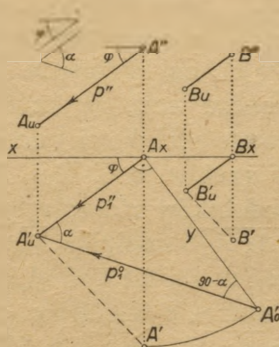
W istocie bowiem, wykreśliwszy przez punkt A_x (Rys. 272 a.) promień p_1'' , zawierający z osią rzutów x dany φ , a następnie odmierzywszy na prostopadłej poprowadzonej w punkcie A_x do p_1'' „głębokość” y punktu A ($A' A''$), otrzymamy punkt A_0' . Wykreślimy z punktu A_0' , jako wierzchołka, kąt $(90 - \alpha)$, to otrzymamy punkt $A_{u'}$ a następnie punkt A_u , leżący na promieniu $p'' \parallel p_1''$. Trójkąt $A_x A_{u'} A_0'$ jest kładem trójkąta



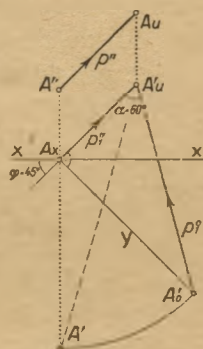
Rys. 271.

$A_x A_{u'} A'$ (patrz Rys. 271.) około prostej p_1'' na rzutnię pionową, przyczem kierunek $A_0' A_{u'}$ opatrzony strzałką jest kładem kierunku rzutu ukośnego, a kierunek $A_x A_{u'}$, podobnie jak $A'' A_u$, rzutem pionowym kierunku rzutu ukośnego.

W Rys. 272 b. wyznaczyliśmy rzut ukośny poziomy punktu A ($A' A''$) dla $\varphi = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, przyczem kierunek rzutów jest przeciwny do poprzednio przyjętego.



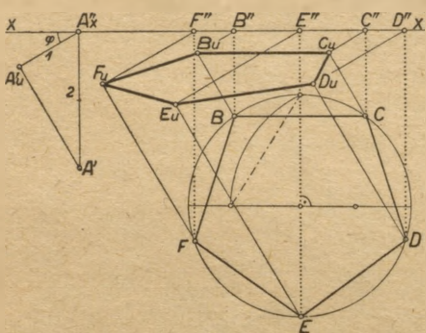
Rys. 272 a.



Rys. 272 b.

Połączmy w Rys. 272 a. lub 272 b. punkt A' z $A_{u'}$, to trójkąt $A' A_{u'} A_x$ jest charakterystyczny dla określonego przez się rzutu ukośnego. W istocie, znając ten trójkąt znajdziemy rzut ukośny i rzut ukośny poziomy dowolnego punktu B ($B' B''$) (Rys. 272 a.) jeśli przez punkt B_x poprowadzimy równoległą do $A_x A_{u'}$, przez punkt B' równoległą do $A' A_{u'}$, a otrzymany punkt $B_{u'}$ odniesiemy na prostą, wykreśloną przez punkt B'' równoległą do $B_x B_{u'}$.

91. O stosunkach skróceń. Niechaj zadaniem naszym będzie wykreślenie rzutu ukośnego pięciokąta umiadowego $B C D E F$, leżącego na rzutni poziomej, przyczem trójkąt charakterystyczny $A_x A' A_u'$ jest dany (Rys. 273.). Z każdym z poszczególnych wierzchołków pięciokąta postąpimy tak, jak uczyniliśmy z punktem B' w Rys. 272 a., szukając jego rzutu



Rys. 273.

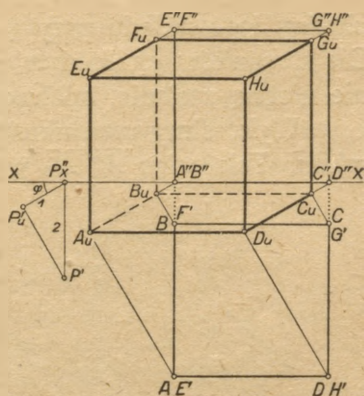
ukośnego poziomego. Z punktów więc B, C, D, E i F wykreślimy równoległe do boku $A' A_u'$ trójkąta charakterystycznego, a z punktów B'', C'', D'', E'' i F'' równoległe do boku $A_x A_u'$ tego trójkąta. Otrzymany pięciokąt $A_u B_u C_u D_u E_u F_u$ jest rzutem ukośnym danego pięciokąta, (leżącego na rzutni poziomej) na rzutnię pionową.

Z Rys. 271. widzimy wprost, że $A_u A_u' = A A'$ czyli, że rzut ukośny odcinka $A A'$, stanowiącego „wysokość“ punktu, równy jest co do długości temu odcinkowi i do niego równoległy, a więc prostopadły do osi rzutów x .

Rys. 273. poucza nas, że rzut ukośny $B_u C_u$ odcinka $B C$ równy jest temu odcinkowi i do niego równoległy, a więc równoległy do osi rzutów x . Z Rys. 272. i 273. widoczne jest, że rzuty ukośne odcinków równoległych do osi rzutów y , więc np. rzut ukośny $A_x A_u'$ odcinka $A_x A' = y$ w Rys. 272., zależne są od kąta α i mogą też być od danych odcinków większe, mniejsze lub im równe. I tak dla $\alpha < 45^\circ$ $A_x A_u' > A_x A'$, dla $\alpha = 45^\circ$ $A_x A_u' = A_x A'$, a dla $\alpha > 45^\circ$ $A_x A_u' < A_x A'$, A więc: rzuty ukośne odcinków, prostopadłych do rzutni poziomej i równoległych do osi x , są równe tym odcinkom i do nich równoległe; rzuty ukośne odcinków prostopadłych do rzutni pionowej doznają wydłużenia, skrócenia lub są tym odcinkom równe, zależnie od tego, czy kąt nachylenia α promieni rzutów do płaszczyzny rzutów jest mniejszy, większy lub równy 45° . Kierunki rzutów odcinków prostopadłych do rzutni pionowej są równoległe do przyjętego kierunku, tworzącego z osią rzutów x kąt φ . Oznaczmy stosunek $A_x A_u' : A_x A_o' = \lambda$ (Rys. 272 a.), to zazwyczaj przyjmujemy $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ albo

$\lambda = \frac{1}{3}$, a stosunek ten nosi nazwę stosunku skrócenia. Kąt φ obieramy 30° , 45° lub 60° .

92. Zadania. 1. Dane są rzuty prostokątne sześciangu, stojącego na rzutni poziomej; wykreślić jego rzut ukośny dla $\varphi = 30^\circ$ i $\lambda = 1:2$ (Rys. 274.). Wyznaczymy rzut ukośny $A_u B_u C_u D_u$ podstawy sześciangu, a na prostopadłych wykreślonych w wierzchołkach otrzymanego romboidu odmierzymy długość krawędzi bocznej sześciangu. Ściany równoległe do rzutni pionowej pozostaną

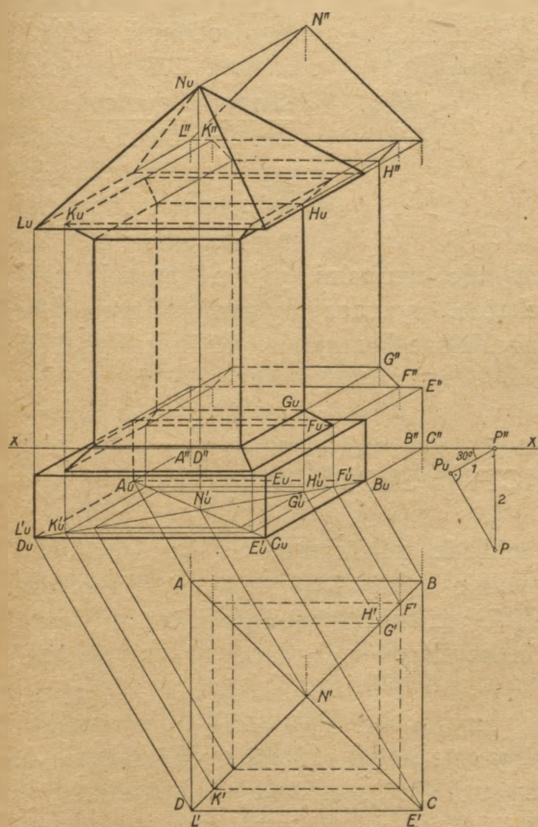


Rys. 274.

kwadratami nie zmienionymi co do długości boku, rzuty ukośne ścian równoległych do rzutni poziomej i bocznej będą romboidami.

2. Wykreślić rzut ukośny dla $\varphi = 30^\circ$, $\lambda = 1:2$ przedmiotu, przedstawionego w rzutach poziomym i pionowym. Rys. 275. wykonaliśmy zupełnie w ten sam sposób, jak poprzedni.

Z rzutów prostokątnych otrzymamy rzut ukośny także w inny sposób. Przyjmijmy mianowicie w punkcie A'' (Rys. 275.) początek układu trzech wzajemnie do siebie prostopadłych osi x , y i z . Rzut



Rys. 275.

ukośny tego układu przy $\varphi = 30^\circ$ będzie x_u, y_u, z_u , (Rys. 276.). Dla stosunków skróceń $x_u : y_u : z_u = 1 : \frac{1}{2} : 1$, spólrzędne x i z nie ulegną zmianie, spólrzędne y skrócą się do połowy.

Wykreślmy rzut ukośny rzutu poziomego naszego przedmiotu. Tak więc $A'' A_u$ w Rys. 276. równe jest połowie od-

cinka $A'' A$ z Rys.

275. Odcinek $A_u D_u$

(Rys. 276.) równy jest

połowie długości od-

cinka AD w Rys.

275. $A_u B_u$ (Rys. 276.)

równe jest AB w Rys.

275. Na prostej, wy-

kreślonej w punkcie

D_u równoległe do z_u

(Rys. 276.), odmierzy-

my odcinek $E'' C''$

z Rys. 275., wykre-

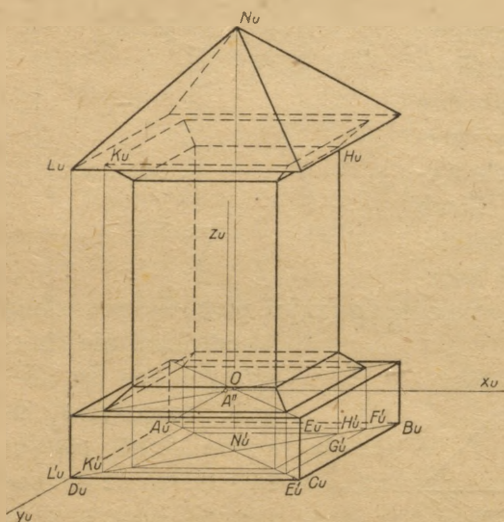
ślimy równoległe do

$D_u C_u$ i $D_u A_u$, aż do

przecięcia się z prostę-

mi, poprowadzonymi

przez punkty C_u i A_u



Rys. 276.

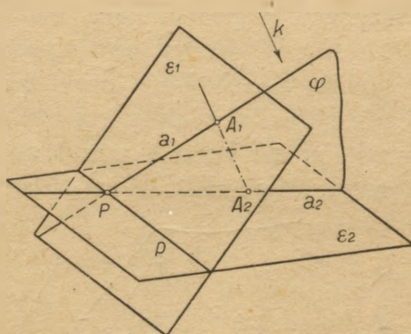
równoległe do z_u . Następnie uzupełnimy ten romboid, poprowadzimy w nim przekątne, wyznaczymy romboid wewnątrz niego, poczem wykreślimy dalsze krawędzie, jak to z Rys. 276. z łatwością odczytamy.

§ 7. POWINOWACTWO ŚRODKOWE. ELIPSA

93. Rzut ukośny układu płaskiego. Płaszczyznę, jako pojęcie nieograniczonego zbioru punktów i prostych, nazywamy układem płaskim (ust. 7.); mianem tem określać też będziemy często ograniczony zbiór, czyli grupę punktów, względnie prostych, na płaszczyźnie.

Przyjmijmy płaszczyzny ε_1 i ε_2 (Rys. 277.) przecinające się w prostej p i dowolny kierunek rzutów k . Punkтови A_1 na płaszczyźnie ε_1 odpowiada punkt A_2 w układzie ε_2 , jako rzut ukośny punktu A_1 na płaszczyznę ε_2 . Prostej a_1 ,

należącej do układu ε_1 , odpowie prosta w układzie ε_2 , którą otrzymamy jako przecięcie się płaszczyzny ε_2 z płaszczyzną φ , przechodzącą przez prostą a_1 równoległe do kierunku rzutów k . Płaszczyzny ε_1 , ε_2 i φ przecinają się w punkcie P prostej p , przez który przechodzi szukana prosta a_2 . Każdemu punktowi prostej a_1 odpowiada jeden punkt prostej a_2 i odwrotnie, każdemu punktowi prostej a_2 odpowiada jeden jedyny punkt prostej a_1 , przyczem para odpowiednich punktów leży zawsze na promieniu rzutów, równoległym do przyjętego kierunku k . Punktowi P , uważanemu za element prostej a_1 , odpowiada tenże sam punkt P , jako równoczesny element prostej a_2 . Prosta p jest więc miejscem geometrycznym punktów odpowiadających sobie równocześnie w obu układach płaskich ε_1 i ε_2 . Punktowi niewłaściwemu prostej a_1 odpowiada punkt niewłaściwy prostej a_2 . Przez przyjęcie kierunku rzutów związaliśmy punkty i proste obu płaszczyzn, czyli elementy obu układów płaskich, w ten sposób, że:

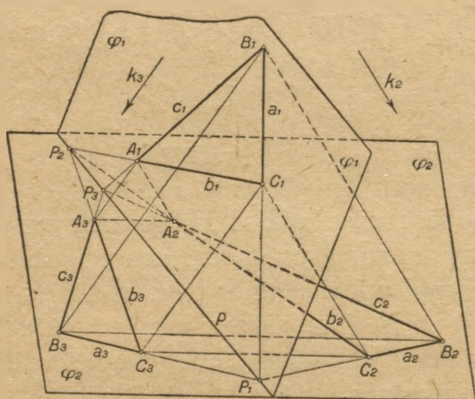


Rys. 277.

1. Każdemu elementowi jednego układu odpowiada jeden element tego samego rodzaju (więc punktowi punkt, prostej prosta) w układzie drugim. Prostej przecięcia się p obu płaszczyzn, uważanej za element płaszczyzny ε_1 , odpowiada też sama prosta p na płaszczyźnie ε_2 .

2. Pary odpowiadających sobie punktów leżą na promieniach, stanowiących wiązkę prostych równoległych, a pary odpowiadających sobie prostych, jak np. a_1 i a_2 , przecinają się w punktach, których miejscem geometrycznym jest krawędź p płaszczyzn ε_1 i ε_2 . Prostej równoległej do krawędzi p na płaszczyźnie ε_1 odpowiada prosta również do p równoległa, a leżąca na płaszczyźnie ε_2 . Tę zależność między elementami dwóch płaszczyzn nazywamy powinowactwem w położeniu środkowym, albo krótko: powinowactwem środkowym. Prosta p nosi miano osi powinowactwa, a promienie, na których leżą pary odpowiednich punktów, promieniami powinowactwa.

94. Powinowactwo dwóch układów płaskich złączonych na jednej płaszczyźnie. Przyjmijmy dwa układy płaskie φ_1 i φ_2 środkowo powinowate o kierunku k_2 (Rys. 278.). Prostopadłym a_1, b_1, c_1 jakoteż punktom A_1, B_1, C_1 na płaszczyźnie φ_1 , odpowiadają na płaszczyźnie φ_2 proste a_2, b_2, c_2 i punkty A_2, B_2, C_2 , przyczem odpowiadające sobie proste przecinają się w punktach P_1, P_2, P_3 osi powinowactwa p . Rzucmy proste a_1, b_1, c_1 i punkty A_1, B_1, C_1 , w przyjętym nowym kierunku k_3 , na płaszczyznę φ_2 i zbadajmy związki, zachodzące między otrzymanymi prostymi a_3, b_3, c_3 i punktami A_3, B_3, C_3 , a prostymi a_2, b_2, c_2 i punktami A_2, B_2, C_2 . Przedewszystkiem widzimy, że: 1) każdemu



Rys. 278.

punktowi $A_2, B_2 \dots$ odpowiada jednoznacznie punkt $A_3, B_3 \dots$; 2) każdej prostej jak np. $a_2 \dots$ odpowiada jedyna prosta $a_3 \dots$, przyczem obie posiadają punkt wspólny P_1 na prostej p . Z łatwością zauważymy, że płaszczyzny $A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3, C_1 C_2 C_3$ są do siebie równoległe, że zatem: 3) punkty odpowiednie, jak A_2 i A_3, B_2 i B_3, C_2 i C_3 , leżą na prostych do siebie

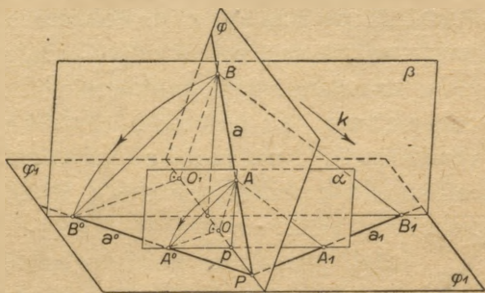
równoległych. Związki wymienione pod 1) 2) i 3) znamionują, jak wiemy z ustępu poprzedniego, powinowactwo środkowe, a zatem; między układem płaskim φ_2 a rzutem układu φ_1 w kierunku k_3 na płaszczyznę φ_2 , zachodzi powinowactwo środkowe. Oznaczmy rzut układu φ_1 w kierunku k_3 na płaszczyznę φ_2 symbolem φ_3 , to na podstawie powyższych wywodów stwierdzamy między układami φ_1, φ_2 i φ_3 istnienie następujących związków:

- a) układ φ_1 i układ φ_2 są powinowate,
- b) układ φ_1 i układ φ_3 są powinowate,
- c) układ φ_2 i układ φ_3 są powinowate.

Widzimy stąd, że: dwa układy płaskie, powinowate z trzecim, są między sobą powinowate. O układach takich jak φ_2 i φ_3 , leżących na jednej płaszczyźnie, mówimy, że są złączone na jednej płaszczyźnie, w odróżnieniu od

dwóch układów płaskich, leżących na dwóch różnych płaszczyznach.

Weźmy pod uwagę (Rys. 279.) płaszczyzny φ i φ_1 , które niech będą środkowo powinowate; kierunkiem powinowactwa niech będzie kierunek k , a osią krawędź p obu płaszczyzn. Prostej a na płaszczyźnie φ odpowie prosta a_1 na płaszczyźnie φ_1 . Niechaj płaszczyzna φ obróci się około krawędzi p tak, aż padnie na płaszczyznę φ_1 ; każdy punkt prostej a opisze koło, którego płaszczyzna jest prostopadłą do osi powinowactwa p i przecina ją w punktach $O, O_1 \dots$. Po dokonany kładzie płaszczyzny φ na płaszczyznę φ_1 , punkt A zajmie położenie A_0 , punkt B położenie B_0 , zaś prosta a położenie a_0 . Rozważmy pytanie, czy między układami φ i φ_1 , złączonymi zapomocą dokonanego obrotu na płaszczyźnie φ_1 , zachodzi związek powinowactwa środkowego. Punkty A, A_1, A_0 wyznaczają płaszczyznę, którą oznaczmy literą α , punkty



Rys. 279.

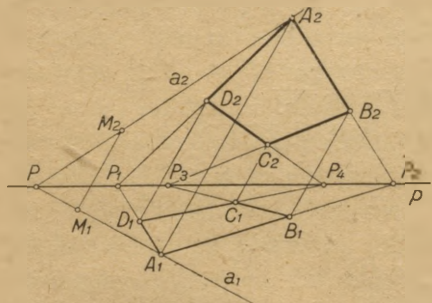
B, B_1, B_0 leżą na płaszczyźnie β . Proste AA_0 i BB_0 są równoległe, gdyż obie leżą na równoległych płaszczyznach AA_0O i BB_0O_1 , które są prostopadłe do osi p , a na których dokonuje się obrót punktów A i B ; te dwie płaszczyzny przecięte płaszczyzną poprowadzoną przez proste a i a_0 , dają właśnie owe dwie proste równoległe AA_0 i BB_0 . Płaszczyzny α i β , jako przechodzące przez $AA_1 \parallel BB_1$ i $AA_0 \parallel BB_0$, są do siebie równoległe i przecinają płaszczyznę φ_1 w prostych A_0A_1 i B_0B_1 , które są wzajemnie równoległe. Widoczne stąd, że między dwoma układami płaskimi, sprowadzonymi do jednej płaszczyzny zapomocą obrotu około ich krawędzi, zachodzą te same związki, które zauważyliśmy między elementami układów φ i φ_1 w położeniu przed dokonaniem obrotu. Istotnie bowiem punktom $A_1, B_1 \dots$ jednego układu odpowiadają jednoznacznie punkty $A_0, B_0 \dots$ w układzie drugim, przyczem punkty odpowiednie, więc np. A_1 i A_0, B_1 i $B_0 \dots$, leżą na promieniach do siebie równoległych; każdej prostej np. a_1 , będącej elementem jednego układu, odpowiada jedna prosta, więc a_0 w układzie

drugim, przyczem obie przecinają się w punkcie, leżącym na osi powinowactwa. Punktem niewłaściwym jednego układu odpowiadają punkty niewłaściwe w układzie drugim.

Z rozważań ustępu tego wynika, że skoro raz dane są dwa układy płaskie i kierunek rzutów (powinowactwa), to stworzona tym sposobem zależność między elementami obu układów pozostaje niezmienną dla każdego położenia płaszczyzn, obracających się około wspólnej prostej p , a także i wówczas, gdy oba te układy złączą się skutkiem rzutu lub obrotu na jednej płaszczyźnie. Gdy dana jest płaszczyzna φ_1 , to płaszczyznę φ wyznacza prosta p i jeden dowolny jej punkt np. A . Punkt A połączony z dowolnym punktem P prostej p daje prostą na płaszczyźnie φ ; odpowiadająca jej prosta na płaszczyźnie φ_1 wyznaczona jest punktami P i A_1 . Stąd także powinowactwo środkowe dwóch układów płaskich, złączonych na jednej płaszczyźnie, wyznaczone jest osią powinowactwa i jedną parą punktów odpowiednich.

Jeżeli promienie powinowactwa są prostopadłe do osi, to powinowactwo nazywamy prostokątnem, w odróżnieniu od ukośnego, gdzie promienie tworzą z osią kąt różny od prostego.

Niechaj dane będą dwa układy środkowo powinowate φ_1 i φ_2 , złączone na płaszczyźnie rysunku, a wyznaczone osią p



Rys. 280.

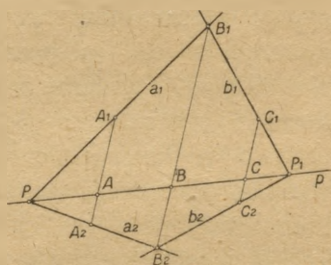
i parą punktów odpowiednich M_1 i M_2 (Rys. 280.). W układzie φ_1 dany jest czworokąt $A_1 B_1 C_1 D_1$; zadaniem naszym jest wyznaczyć czworokąt, odpowiadający w układzie φ_2 czworokątowi danemu. Prostej a_1 , łączącej punkty A_1 i M_1 , odpowiada w układzie φ_2 prosta a_2 , przechodząca przez punkty P i M_2 .

Rzućmy punkt A_1 w kierunku powinowactwa $M_1 M_2$ na prostą a_2 , to otrzymany punkt A_2 jest powinowaty z punktem A_1 . Prosta $A_1 D_1$ przecina oś powinowactwa w punkcie P_1 , przez który przejdzie prosta $A_2 D_2$, odpowiadająca pierwszej. W ten

sposób przy pomocy punktów P_2 i P_3 względnie P_4 otrzymamy dalsze wierzchołki szukanego czworokąta.

Dokonajmy teraz wzajemnego przesunięcia, połączonego z obrotem, tych dwóch czworokątów środkowo powinowatych. Punktowi M_1 odpowie wówczas, podobnie jak przed wzajemnym przesunięciem, punkt M_2 , punktom $A_1, B_1, C_1 \dots$ odpowiedzą punkty $A_2, B_2, C_2 \dots$ jednak odpowiednie punkty, jakimi są A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i $C_2 \dots$ nie będą leżały na promieniach do siebie równoległych a odpowiednie proste, więc a_1 i $a_2, A_1 D_1$ i $A_2 D_2, A_1 B_1$ i $A_2 B_2, B_1 C_1$ i $B_2 C_2 \dots$, nie będą przecinały się w punktach, leżących na jednej prostej. Zapomocą wzajemnego, dowolnego przesunięcia dwóch układów płaskich, złączonych na jednej płaszczyźnie, zniszczyliśmy położenie środkowe tych układów, pozostała jednak nadal odpowiedniość między elementami obu układów polegająca na tem, że każdemu elementowi w jednym układzie odpowiada jeden jedyny element tego samego rodzaju w układzie drugim. O takich dwóch układach płaskich mówimy, że są powinowate w położeniu ogólnem albo dowolnem.

Cecha powinowactwa środkowego. Niechaj dana będzie oś powinowactwa p (Rys. 281.) i para punktów odpowiednich A_1 i A_2 w dwóch układach powinowatych, złączonych na płaszczyźnie rysunku. Prostej a_1 , przecinającej oś p w punkcie P , odpowiada w drugim układzie prosta a_2 , przechodząca również przez punkt P . Punktowi B_1 , przyjętemu na prostej a_1 , odpowie punkt B_2 na prostej a_2 , który otrzymamy, kreśląc przez B_1 promień powinowactwa, równoległy do kierunku $A_1 A_2$. Podobnie prostej b_1 odpowie prosta b_2 , przechodząca przez punkty P_1 i B_2 , a punktowi C_1 punkt C_2 . Z Rys. 281. czytamy:

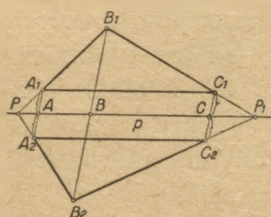


Rys. 281.

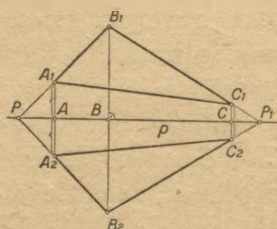
$$\frac{A A_1}{A A_2} = \frac{B B_1}{B B_2} = \frac{C C_1}{C C_2} = \text{constans} = \Delta$$

co oznaczają, że gdy dwa układy płaskie są środkowo powinowate, to *stosunek odcinków, ograniczonych punktami odpowiednimi i punktem leżącym na osi, dla każdej pary punktów, jest stały*. Wykładnik Δ tego stosunku charakteryzuje powinowactwo środkowe i zowie się jego *cechą*.

Jeżeli jedna para odcinków np. $\overline{A_1 A_1}$ i $\overline{A_2 A_2}$ (Rys. 282a.) jest równa, to wówczas wszystkie pary są równe, a powinowactwo nosi nazwę symetrii osiowej.



Rys. 282 a.



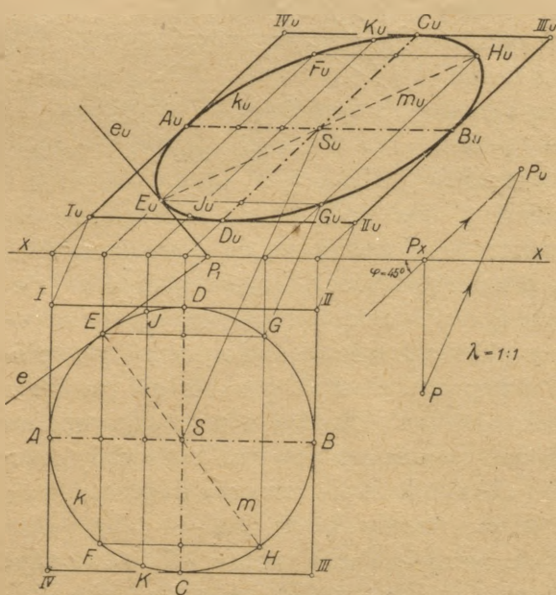
Rys. 282 b.

(Rys. 282 b.), to symetria osiowa nosi nazwę symetrii prostokątnej.

95. Rzuty prostokątne i ukośne a powinowactwo środkowe. Z dotychczasowych rozważań wynika bezpośrednio, że między dowolnym wielokątem płaskim a jego rzutem poziomym, tak samo, jak między tym wielokątem a jego rzutem pionowym, zachodzi powinowactwo środkowe, którego kierunek jest kierunkiem rzutów, a osią ślad poziomy, względnie pionowy płaszczyzny tego wielokąta. Przez wykonanie kładu płaszczyzny wielokąta na rzutnię poziomą, otrzymamy na niej dwa układy środkowo powinowate, którymi będą ów kład i rzut poziomy wielokąta. Ośią powinowactwa, a więc prostą, na której leżeć będą punkty przecięcia się odpowiednich boków, jest ślad poziomy płaszczyzny wielokąta; promienie powinowactwa są prostopadłe do osi powinowactwa, które tym sposobem jest prostokątne. Podobnie między kładem wielokąta na rzutnię pionową i jego rzutem pionowym zachodzi prostokątne powinowactwo środkowe (patrz Rys. 232 b.). Weźmy pod uwagę dowolny wielokąt płaski w przestrzeni, np. czworokąt $ABCD$ (Rys. 283.) i jego rzuty poziomy i pionowy. Każdemu punktowi, względnie każdej prostej wielokąta odpowiada jeden punkt, względnie jedna prosta na rzutni poziomej i jeden punkt, względnie prosta na rzutni pionowej. Czworokąt $ABCD$ jest więc powinowaty ze swoim rzutem poziomym $A'B'C'D'$ i rzutem pionowym $A''B''C''D''$. Ale wykazaliśmy w ustępie poprzednim, że dwa układy powinowate z trzecim są między sobą powinowate, wobec czego rzut poziomy wielokąta i jego rzut pionowy są powinowate. Sprowadźmy obie rzutnie zapomocą obrotu około

96. Rzut ukośny koła. Elipsa. Rzut ukośny koła, przyjętego na rzutni poziomej, na rzutnię pionową będzie linią nie posiadającą, podobnie jak koło, żadnych punktów niewłaściwych, czyli t. zw. linią zamkniętą, gdyż rzuty ukośne punktów właściwych są punktami właściwymi, a koło punktów niewłaściwych nie posiada.

Opiszmy na kole k (Rys. 284.) kwadrat $I II III IV$, styczny doń w punktach A, B, C, D i znajdziemy jego rzut ukośny $I_u II_u III_u IV_u$, to punkty A_u, B_u, C_u, D_u są punktami linii, będącej rzutem ukośnym koła. Wierzchołki rzutu ukośnego kwadratu $E F G H$ wpisanego w koło, są dalszymi punktami rzutu



Rys. 284.

koła. Rzuty ukośne dalszych punktów koła otrzymamy w ten sposób, że obierać będziemy proste przecinające koło i szukać rzutów otrzymanych punktów przecięcia się. (Patrz Rys. 284. proste m, m_u , i punkty I, K i I_u, K_u). Dostateczna ilość w ten sposób otrzymanych punktów, połączona linią ciągłą, daje rzut ukośny koła, leżącego na płaszczyźnie po-

ziomej rzutów, na rzutnię pionową. Z konstrukcyi wynika, że otrzymana linia posiada następujące własności wspólne z kołem: 1) nie posiada żadnych punktów niewłaściwych, 2) dowolna prosta przecina ją w dwóch punktach i 3) z dowolnego punktu poprowadzić do niej można dwie styczne. Ale z ustępu poprzedniego wynika, że między kołem k a linią k_u , będącą jego rzutem ukośnym, zachodzi powinowactwo środkowe, którego osią jest oś x , a kierunkiem kierunku $P P_u$. Linię k_u powinnał z kołem, a mającą z niem wymienione wyżej własności

wspólne, określamy mianem elipsy. Rzut ukośny koła jest więc elipsą.

Z Rys. 284. odczytamy wprost cały szereg dalszych własności elipsy. I tak: średnicom AB , CD , EH koła odpowiadają w elipsie cięciwy $A_u B_u$, $C_u D_u$, $E_u H_u$, które jak z konstrukcyi wynika — podobnie jak u koła — połowią się. Cięciwy te, przechodzące przez punkt S_u , który jest rzutem ukośnym środka koła, nazywamy średnicami elipsy.

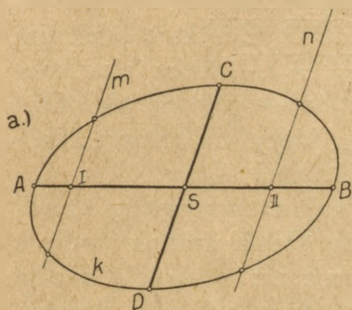
Punkt S_u , połowiący wszystkie średnice, nazywamy środkiem elipsy. Parę prostopadłych do siebie średnic w kole nazywamy średnicami sprzężonemi; posiadają one tę własność, że jedna połowi cięciwy równoległe do drugiej, czyli każda z dwóch średnic sprzężonych łączy środki cięciw, równoległych do średnicy drugiej. Parę średnic elipsy, np. $A_u B_u$ i $C_u D_u$, odpowiadającą parze średnic prostopadłych w kole, nazywamy średnicami sprzężonemi elipsy. Jak to z Rys. 284. widzimy, jedna średnica połowi cięciwy równoległe do drugiej; każda ze średnic jest więc osią symetrii ukośnej dla punktów, leżących na cięciwach równoległych do drugiej średnicy. Stycznej e do koła w punkcie E , odpowiada styczna e_u do elipsy w punkcie E_u , przyczem obie przecinają się w punkcie P_1 na osi powinowactwa x .

Stycznym do koła w punktach końcowych A i B średnicy, odpowiadają styczne do elipsy w punktach A_u , B_u , ograniczających średnicę $A_u B_u$; styczne te są $\parallel$ do średnicy $C_u D_u$, a więc do cięciw do tej średnicy, równoległych. Kwadratowi I II III IV , opisanemu na kole i stycznemu doń w punktach A , B , C , D , odpowiada równoległobok I_u II_u III_u IV_u , opisany na elipsie i styczny do niej w punktach A_u , B_u , C_u i D_u . Boki tego równoległoboku są równoległe do średnic sprzężonych $A_u B_u$ i $C_u D_u$ elipsy, a więc i do cięciw równoległych do tych średnic.

Na podstawie wykazanej własności średnic sprzężonych elipsy, a mianowicie tej, że jedna połowi cięciwy równoległe do drugiej, potrafimy rozwiązać następujące zadania:

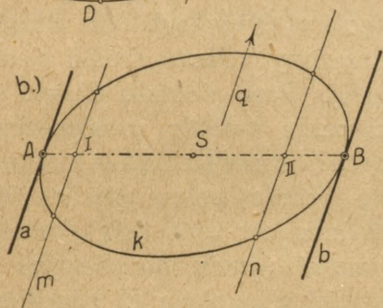
- a) Dana jest elipsa, wyznaczyć średnicę i środek.
- b) Dana jest elipsa, wyznaczyć parę średnic sprzężonych.
- c) Do danej elipsy wykreślić styczne, równoległe do danego kierunku.

Ad a) Kreślimy dwie sieczne $m \parallel n$ (Rys. 285 a.), prosta, łącząca środki I i II cięciw, jest średnicą, a środek S , odcinka AB , środkiem elipsy.



Ad b) Wyznamy średnicę AB , a przez środek S elipsy poprowadzona równoległa CD do siecznej m , jest średnicą, sprzężoną z AB (Rys. 285 a.).

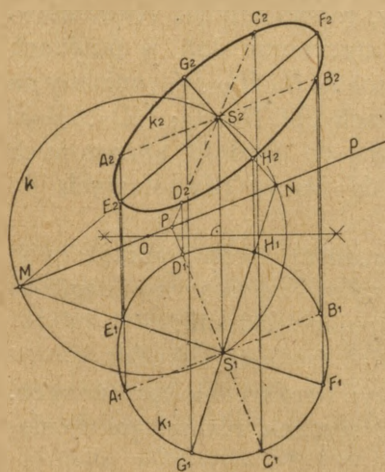
Ad c) Kreślimy sieczne m i n (Rys. 285 b.), równoległe do danego kierunku q , łączymy środki I i II cięciw i otrzymamy średnicę AB . Proste a i b , wykreślone przez punkty A i B równoległe do kierunku q , rozwiązują zadanie. O średnicy AB mówimy, że jest sprzężoną z kierunkiem q . Średnica sprzężona ze średnicą AB przejdzie przez środek S równoległa do q .



Rys. 285 a i b.

Ponieważ koło posiada dowolną, nieograniczoną ilość par średnic sprzężonych, więc to samo odnosi się do elipsy, jako linii powinowatej z kołem.

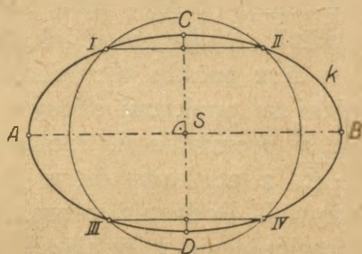
Przyjmijmy koło k_1 , oś powinowactwa p (Rys. 286.) i punkt S_2 , odpowiadający w układzie elipsy środkowi S_1 koła. Parze średnic sprzężonych $A_1 B_1$ i $C_1 D_1$ w kole, odpowiada para średnic sprzężonych $A_2 B_2$ i $C_2 D_2$ w elipsie k_2 . Przez punkty S_1 i S_2 poprowadzimy takie koło k , którego środek O leży na osi p , a punkty M i N , w których koło k przecina prostą p , połączmy z punktem S_1 . Średnicom sprzężonym $E_1 F_1$ i $G_1 H_1$ w kole odpowiedzą średnice



Rys. 286.

sprężone $E_2 F_2$ i $G_2 H_2$ w elipsie k_2 . Ponieważ jednak kąty $M S_1 N$ i $M S_2 N$ wspierają się na średnicy, więc otrzymane średnice sprężone elipsy są do siebie prostopadłe. Dowiedliśmy tym sposobem istnienia, między średnicami sprężonymi elipsy, jednej pary średnic sprężonych wzajemnie prostopadłych, którą określamy mianem osi elipsy. Punkty końcowe osi nazywamy wierzchołkami elipsy. Własności, które posiadają średnice sprężone, są oczywiście także własnościami osi, a zatem: każda oś połowi cięciwy prostopadłe do niej, a więc równoległe do drugiej osi. Wskutek tego osi elipsy są osiami symetrii prostokątnej tej krzywej (Rys. 287.).

Jeżeli elipsa jest narysowana i jej środek S dany, to osi elipsy znajdziemy zapomocą koła, zakreślonego ze środka S i przecinającego krzywą w czterech punktach. Prosta, łącząca środki cięciw $I III$, i $III IV$, jest jedną, a prosta poprowadzona przez środek S równoległe do tych cięciw, drugą osią elipsy.

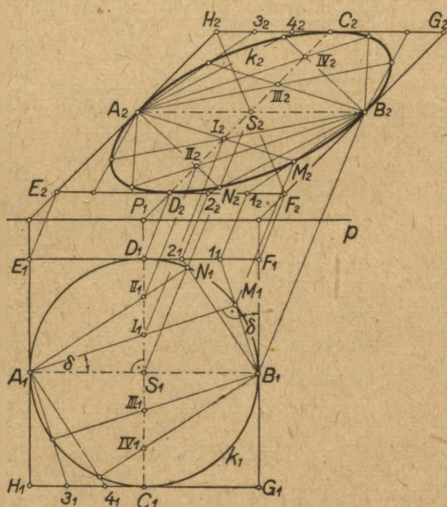


Rys. 287.

97. Konstrukcje elips z danych średnic sprężonych, względnie osi.

a) Niechaj dane jest koło k_1 , oś powinowactwa p i punkt S_2 , odpowiadający środkowi koła w układzie elipsy k_2 , czyli jej środek (Rys 288*).

Opiszmy na kole kwadrat $E_1 F_1 G_1 H_1$ styczny doń w punktach A_1, B_1, C_1 i D_1 i znajdziemy odpowiadający mu równoległobok $E_2 F_2 G_2 H_2$ w układzie elipsy. Odcinki $A_2 B_2$ i $C_2 D_2$



Rys. 288*.

stanowią parę średnic sprężonych elipsy k_2 . Podzielmy promień koła $D_1 S_1$

np. na trzy równe części i na tyleż części bok $D_1 F_1$. Połączmy

punkty I i I_1 , pierwszy z punktem A_1 , drugi z punktem B_1 , to:

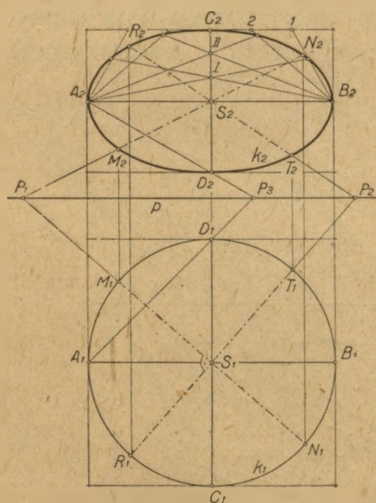
$$\triangle A_1 I S_1 \sim \triangle B_1 I_1 F_1, \text{ a więc}$$

$$\ast I_1 B_1 F_1 = \ast I A_1 S_1 = \delta,$$

a ponieważ ramię $B_1 F_1$ jest prostopadłe do $A_1 S_1$, więc i ramię $I A_1$ musi być prostopadłe do ramienia $I_1 B_1$, a w takim razie punkt M_1 musi być punktem koła, gdyż kąty, wspierające się na średnicy w kole, są proste. Ponieważ stosunki zachodzące między odcinkami prostych, po przeniesieniu ich w układ powinowaty, nie ulegają zmianie, więc poszczególne punkty elipsy znajdziemy w sposób następujący: Odcinki $S_2 D_2$, $D_2 E_2$ i $D_2 F_2$ podzielimy każdy na tę samą ilość równych części; punkty podziału I_2 i II_2 na odcinku $S_2 D_2$ rzućmy z punktu A_2 a punkty I_2 i 2_2 z punktu B_2 ; punkty przecięcia się M_2 i N_2 tych promieni są punktami elipsy k_2 . Promienie $B_2 I_2$, $B_2 II_2$ przecinają się z promieniami, łączącymi punkty podziału na odcinku $D_2 E_2$ z punktem A_2 , w dalszych dwóch punktach szukanej krzywej. Podobnie promienie $A_2 3_2$, $A_2 4_2$ i $B_2 III_2$, $B_2 IV_2$ przecinają się w punktach elipsy k_2 .

b) Jeżeli powinowactwo środkowe dwóch układów płaskich, złączonych na płaszczyźnie rysunku, jest prostokątne,

t. zn. jeśli promienie powinowactwa są prostopadłe do osi, to oczywiście koło k_1 w jednym układzie odpowie elipsa k_2 w układzie drugim (Rys. 289.). Każdej parze średnic sprzężonych w kole k_1 , np. $M_1 N_1$, $R_1 T_1$ odpowiada para średnic sprzężonych $M_2 N_2$, $R_2 T_2$ w elipsie k_2 ; parze średnic sprzężonych $A_1 B_1$ i $C_1 D_1$ w kole odpowiada para średnic sprzężonych $A_2 B_2$ i $C_2 D_2$ wzajemnie prostopadłych, a więc para osi. Poszczególne punkty elipsy, znając jej osi, znajdziemy przez zastosowanie poznanej pod a) konstrukcji, o czym

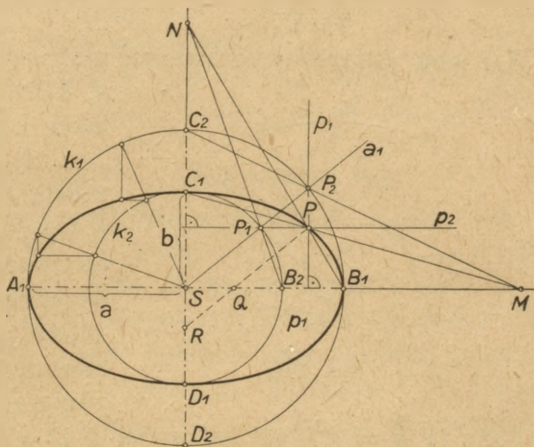


Rys. 289.

zresztą poucza nas dostatecznie wyraźnie rysunek.

c) Zakreślmy na danych osiach $A_1 B_1 = 2a$ i $C_1 D_1 = 2b$ elipsy (Rys. 290.), jako na średnicach, koła k_1 i k_2 . Każde z nich

uważać można za powinowate z elipsą k , wyznaczoną parą osi $A_1 B_1$ i $C_1 D_1$. Przy powinowactwie między kołem k_1 a elipsą k , osią powinowactwa jest $A_1 B_1$, a punkty C_1, C_2 i D_1, D_2 stanowią pary punktów odpowiednich; jeśli bierzemy pod uwagę powinowactwo, zachodzące między k_2 i k , to osią jego jest prosta wyznaczona punktami C_1 i D_1 , a kierunkiem, kierunek do tej osi prostopadły. Punkty B_1 i B_2 stanowią więc w tym wypadku parę punktów odpowiednich.



Rys. 290.

Wykreślmy przez środek S dowolną prostą a_1 , a przez otrzymane na kołach k_1 i k_2 punkty P_1 i P_2 proste $p_1 \parallel C_1 D_1$ i $p_2 \parallel A_1 B_1$. Uzupełniając Rys. 290. oznaczmy punkt przecięcia się prostej p_1 z osią $A_1 B_1$ literą Z , a prostej p_2 z osią $C_1 D_1$ literą T . Punkt przecięcia się P , prostych p_1 i p_2 , jest punktem elipsy k , co wynika z następującego rozważania.

Z Rys. 290. czytamy:

$$\overline{P_2 Z} : \overline{P Z} = \overline{P_2 S} : \overline{P_1 S} = \overline{C_2 S} : \overline{C_1 S} = a : b = \Delta$$

Ponieważ promień a_1 jest dowolny, więc związek ten odnosi się do wszystkich punktów, otrzymanych w ten sam sposób, jak punkt P . Stosunek $a : b = \Delta$ jest cechą powinowactwa, łączącego wszystkie punkty koła k_2 i otrzymane powyższym sposobem punkty krzywej k , która, jako powinowata z kołem, jest elipsą. Że i koło k_2 jest powinowate z elipsą k , wynika z następującej relacji:

$$\Delta P P_1 P_2 \sim \Delta T S P_1, \text{ a zatem:}$$

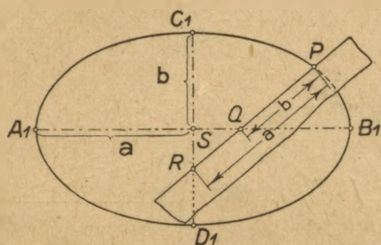
$$\frac{\overline{P P_1}}{\overline{P_1 T}} = \frac{\overline{P_2 P_1}}{\overline{P_1 S}}$$

a ponieważ, jak wiadomo, w każdej proporcji suma lub różnica wyrazów pierwszego stosunku ma się tak do wyrazu pierwszego

(lub drugiego), jak się ma suma lub różnica wyrazów drugiego stosunku do wyrazu trzeciego (lub czwartego) więc:

$$\frac{P P_1 + P_1 T}{P_1 T} = \frac{P_1 P_2 + P_1 S}{P_1 S} = \frac{B_1 S}{B_2 S} = \frac{a}{b} = \Delta$$

Ten sam związek wyprowadzić można dla każdego punktu elipsy k , która jest więc powinowatą także i z kołem k_2 .



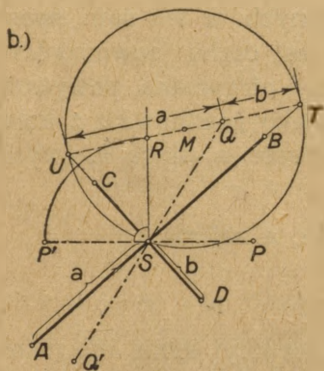
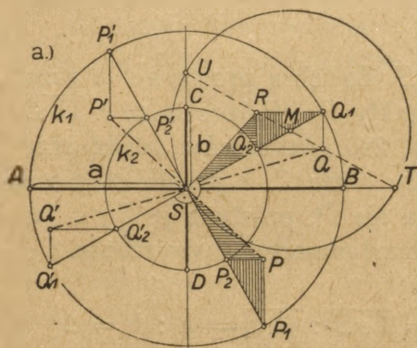
Rys. 291.

dużej $PR = a$ i pół osi małej $PQ = b$ (Rys. 291.); następnie

d) Wykreślmy (Rys. 290.) prostą $PR \parallel P_2 S$ to:

$PQ = P_1 S = b$, i $PR = P_2 S = a$, na czym oprzemy szczególnie dogodną konstrukcję punktów elipsy przy danych osiach. Na ostrym, nożem odciętym skrawku papieru, odmierzymy połowę osi

przy każdorazowym położeniu skrawka papieru punktem elipsy. e) Na danych osiach $2a$ i $2b$ (Rys. 292 a.), jako na średnicach, zakreślmy koła k_1 i k_2 , a następnie obracając parę prostokątnych średnic $P_1 P_1'$ i $Q_1 Q_1'$ w kole większym, znajdziemy odpowiadającą im w układzie elipsy parę średnic sprzężonych PP' i QQ' . Przez punkty Q_1 i Q_2 wykreślmy równoległe do osi elipsy i otrzymany punkt R połączmy z Q . Oznaczmy punkty przecięcia się prostej RQ z osiami elipsy, literami T i U , a środek prostokąta RQ_1Q_2 literą M i połączmy punkty R i S prostą.



Rys. 292 a i b.

Z Rysunku czytamy:

$\triangle R Q_1 Q_2 \simeq \triangle P P_1 P_2$ a dalej
 $S Q_2 = Q T = b$; $U R = S Q_2 = b$; $U Q = S Q_1 = a$,
 więc: $U T = Q T + U Q = a + b$ 1)
 przyczem punkt M jest środkiem odcinka $U T$.

Ponieważ ramiona kątów $R Q_1 S$ i $P P_1 S$ są zgodnie prostopadłe, więc kąty te są sobie równe, a że $R Q_1 = P P_1$ i $S Q_1 = S P_1$, więc:

$\triangle S R Q_1 \simeq \triangle S P P_1$, a stąd wynika, że
 $S R = S P$ i $\sphericalangle R S Q_1 = \sphericalangle P S P_1$

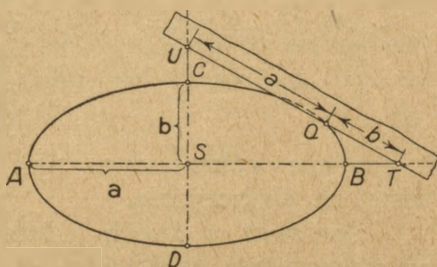
a dalej, że: $S R \perp S P$ 2)

Relacje 1) i 2) dają nam możność wyznaczenia osi elipsy z danej pary średnic sprzężonych. I tak niechaj $P P'$ i $Q Q'$ (Rys. 292 b.) są parą średnic sprzężonych elipsy. W środku S wykreśliśmy prostopadłą do średnicy $P P'$ i odmierzymy $S R = S P$; R łączymy z Q , a ze środka M odcinka $R Q$ zakreśliśmy koło, przechodzące przez środek S . Łączymy punkty T i U ze środkiem

S i odmierzamy

$U Q = a = A S = S B$
 i $Q T = b = C S = S D$.

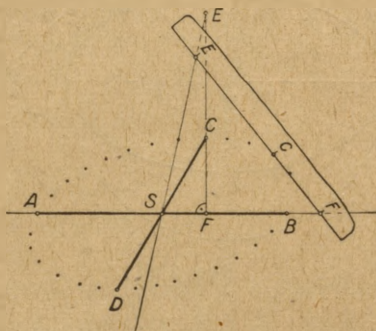
f) Ponieważ punkt Q (patrz Rys. 292 a.) jest dowolnym punktem elipsy, więc na podstawie równości 1) otrzymamy dowolną ilość punktów elipsy z danych osi w sposób następujący: Na skrawku papieru (Rys. 293.) od-



Rys. 293.

mierzymy odcinek $a + b$, a następnie poruszać będziemy tym skrawkiem papieru tak, aby punkty końcowe U i T pozostawały przy każdorazowym położeniu na osiach, względnie ich przedłużeniach; punkty Q będą punktami elipsy.

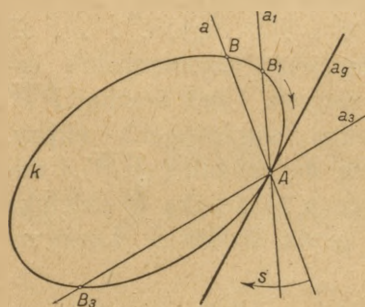
g) Zanotujemy tu jeszcze, jednak bez podania uzasadnienia, bardzo praktyczną konstrukcję punktów elipsy przy pomocy



Rys. 294.

skrawka papieru, z danej pary średnic sprzężonych AB i CD (Rys. 294.). Z punktu C kreślimy $CF \perp AB$, odmierzymy $CE = AS$ i łączymy E z S . Na skrawku papieru odmierzymy odcinek ECF , a następnie ustawiać będziemy skrawek papieru tak, aby punkt E leżał zawsze na prostej ES , a punkt F na AB . Punkty C będą punktami elipsy.

98. Styczne do elipsy. Weźmy pod uwagę elipsę k i sieczną a , przecinającą ją w dwóch punktach A i B (Rys. 295.).

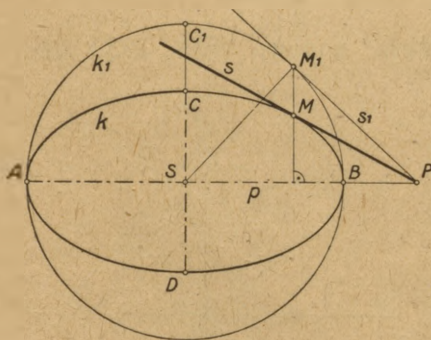


Rys. 295.

Przyjmijmy, że sieczna ta obraca się około punktu A , to wówczas punkt B porusza się po krzywej, zbliżając się do punktu stałego A . W pewnej chwili sieczna zajmie położenie graniczne a_g , po przekroczeniu którego, poruszający się punkt B znajdzie się po drugiej stronie punktu A . Owo graniczne położenie siecznej, określamy mianem stycznej krzywej w punkcie A . Określenie stycznej jest

tu zupełnie ogólne i odnosi się do każdej linii krzywej, narysowanej na płaszczyźnie.

Ponieważ w dwóch układach powinowatych złączonych na płaszczyźnie, każdemu punktowi odpowiada punkt, a prostej



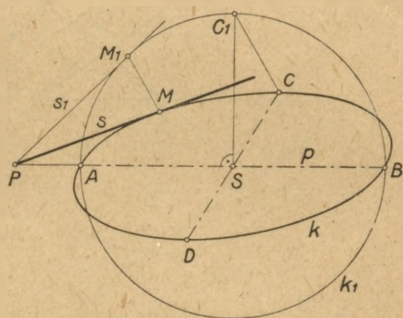
Rys. 296.

prosta, więc siecznej koła, które spowinowaczone jest z elipsą, odpowie sieczna tej elipsy, a stycznej do koła w pewnym punkcie, odpowiada styczna do elipsy, w punkcie odpowiadającym punktowi koła. Każda para odpowiadających sobie stycznych w dwóch układach powinowatych przetnie się oczywiście w punkcie na osi powinowactwa.

a) W danym punkcie M elipsy k wykreślić styczną. Jeżeli osi elipsy k są dane (Rys. 296.), to koło k_1 , zakreślone na osi AB ze środka S , jest

powinowate z elipsą. Kierunek tego powinowactwa jest prostopadły do $\overline{AB}$. Danemu punktowi M elipsy odpowiada na kole k_1 punkt M_1 ; styczna s_1 w punkcie M_1 do k_1 przecina oś powinowactwa p w punkcie P . Prosta $(P, M) \equiv s$ jest szukaną styczną w punkcie M do elipsy k .

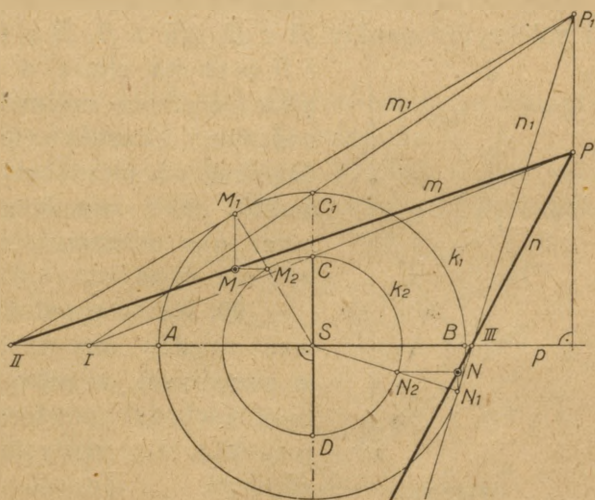
Jeżeli znane są średnice elipsy k (Rys. 297.), to koło k_1 , zakreślone na średnicy $\overline{AB}$, jest w powinowactwie ukośnem z tą elipsą. Prostopadła wykreślona w środku S do $\overline{AB}$ przecina k_1 w punkcie C_1 , który odpowiada punktowi C elipsy k . CC_1 jest kierunkiem powinowactwa. Przez dany punkt M elipsy k poprowadzimy równoległą do CC_1 , a w punkcie M_1 wykreślimy styczną s_1 . Prosta $PM \equiv s$ rozwiązuje zadanie.



Rys. 297.

b) Z danego punktu P wykreślić styczne do elipsy, której para osi jest dana (Rys. 298.). Na obu osiach, jako na średnicach, zakreślimy koła,

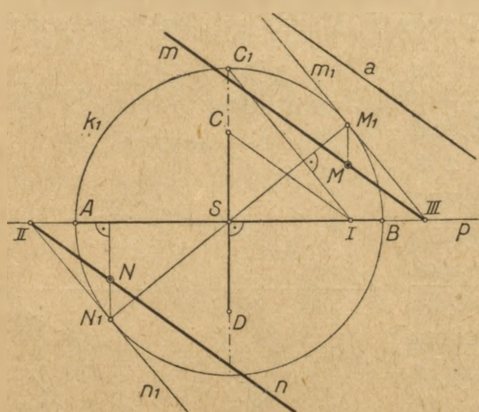
powinowate, jak wiadomo, z elipsą. Prostej PCI w układzie elipsy odpowiada prosta $I C_1 P_1$ w układzie koła, przyczem punkt P_1 leży na promieniu prostopadłym do osi powinowactwa p . Z punktu P_1 kreślimy styczne m_1 i n_1 do



Rys. 298.

koła k_1 , a punkty II i III , leżące na osi p , łączymy z punktem P . Proste m i n rozwiązują zadanie; punkty M i N są ich punktami styczności z elipsą.

c) Równoległe do danego kierunku „a” wykreślić styczne do elipsy, której para osi jest dana (Rys. 299.). Przez wierzchołek C elipsy kreślimy równoległą do prostej a i punkt I

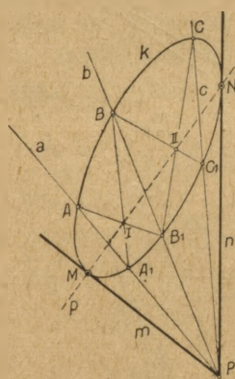


Rys. 299.

łączymy z punktem C₁. Styczne m₁ i n₁ do koła k₁, równoległe do prostej C₁I, przecinają oś powinowactwa p w punktach II i III. Proste m i n, równoległe do a, wykreślone przez punkty II i III rozwiązują zadanie, są bowiem prostymi powinowatymi z m₁ i n₁. Prostopadłe, poprowadzone z punktów styczności M₁ i N₁ do osi p,

wyznaczają na prostych m i n punkty M i N, w których proste te dotykają elipsy.

c) Z danego punktu P wykreślić styczną do danej elipsy (Rys. 300.). Z punktu P wykreślimy sieczne a, b, c i połączymy punkty A z B₁, A₁ z B, B z C₁, C z B₁. Prosta I II przecina elipsę w punktach M i N, które połączone z punktem P rozwiązują zadanie. Uzasadnienie tej niezwykle dogodnej konstrukcji wymaga wiadomości, które nie leżą w zakreślonym przez nas obszarze i dlatego podane tu być nie może.

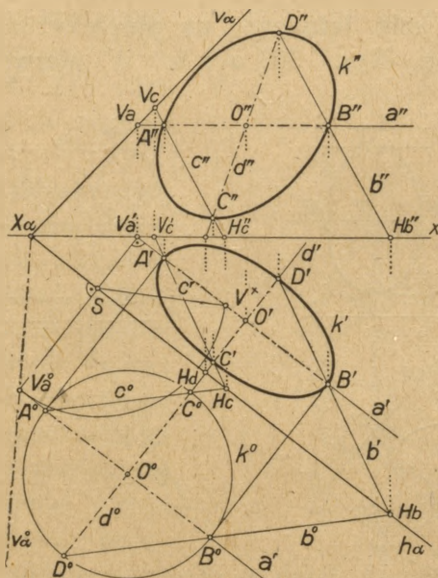


Rys. 300.

99. Rzuty prostokątne koła. Ponieważ między danym układem płaskim w przestrzeni, a jego rzutem prostokątnym zachodzi powinowactwo środkowe (ust. 95.), więc rzuty prostokątne koła są elipsami.

a) Gdy dana jest płaszczyzna α (h_α v_α) a na niej punkt O (O' O'') jako środek koła (Rys. 301.), to rzuty koła, o danym promieniu r, wyznaczymy w sposób następujący: Po wykonaniu kładu płaszczyzny α na rzutnię poziomą, zakreślimy z punktu O⁰, jako środka, koło o promie-

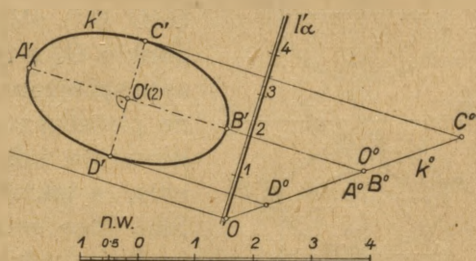
niu r . Parze średnic sprzężonych $\bar{A}^0 B^0$ i $\bar{C}^0 D^0$ w kole, odpowie para osi $\bar{A}' B'$ i $\bar{C}' D'$, względnie średnic sprzężonych $\bar{A}'' B''$ i $\bar{D}'' C''$ w elipsach, stanowiących rzuty koła. Podnie-



Rys. 301.

sienie z kładu punktów A^0, B^0, C^0, D^0 nie nastręcza żadnych trudności. Rys. 301. tłumaczy rzecz dostatecznie.

b) Niech dany będzie punkt O ($O', 2$) jako środek koła, leżącego na płaszczyźnie α (Rys. 302.), wyznaczonej zestopniowaną linią największego spadku l'_α ; wykreślmy rzut cechowany koła o danym promieniu r . Zadanie rozwiązaćby można podobnie jak poprzednie, przez wykonanie kładu płaszczyzny α na rzutnię poziomą, względnie na jedną z płaszczyzn warstwowych.

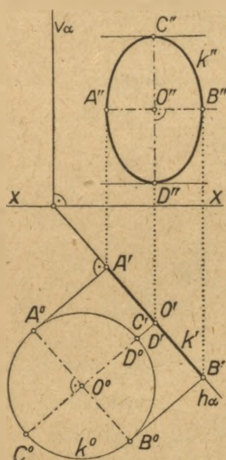


Rys. 302.

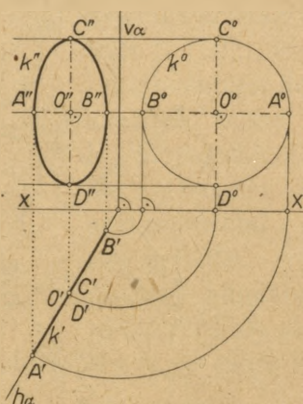
W Rys. 302. zastosowaliśmy jednak inną metodę, dającą się także użyć w przypadku rzutów na dwie płaszczyzny, a mianowicie użyliśmy płaszczyzny φ prostopadłej do warstwic.

Prosta k^0 jest kładem krawędzi płaszczyzny α i płaszczyzny φ na rzutnię poziomą, a odcinek $\overline{C^0 D^0}$ kładem rzutu koła na płaszczyznę φ . Oś $\overline{A' B'}$ równa jest średnicy koła, drugą osią jest odcinek $\overline{C' D'}$.

c) Rzuty koła, leżącego na płaszczyźnie poziomo rzucającej, podają Rys. 303 a i b. W pierwszym, podnieś-

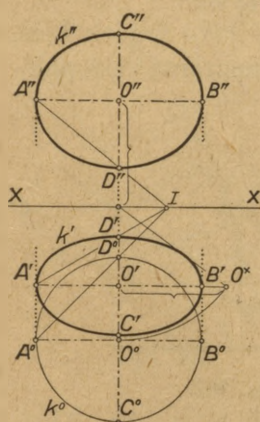


Rys. 303 a.



Rys. 303 b.

liśmy koło z rzutni poziomej, w drugim, z rzutni pionowej.

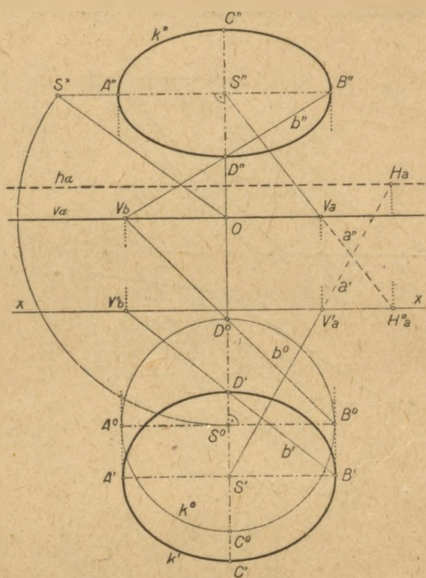


Rys. 304.

d) Rys. 304. podaje konstrukcję rzutów koła, leżącego na płaszczyźnie φ , przechodzącej przez oś rzutów x i punkt O ($O' O''$). Najpierw wykonano kład O^0 punktu O , a następnie podniesiono średnice sprzężone $\overline{A^0 B^0}$ i $\overline{C^0 D^0}$ około osi x na płaszczyznę φ . Oś x jest osią powinowactwa między kładem k^0 i rzutem k' koła, a także między rzutami k' i k'' . Stąd przez punkt I , w którym prosta $\overline{A^0 D^0}$ przecina oś x , przejdą proste $\overline{A' D'}$ i $\overline{A'' D''}$.

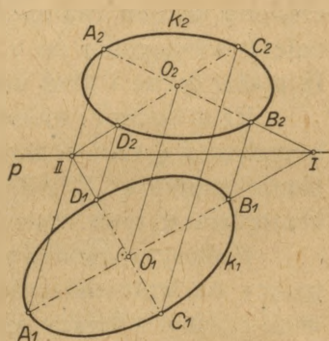
e) Rzuty prostokątne koła k , przyjętego na płaszczyźnie $\alpha \parallel x$ przedstawia Rys. 305. Na płaszczyźnie α ($h_\alpha v_\alpha$) przyjęliśmy prostą a ($a' a''$) a na niej punkt S ($S' S''$), jako środek

koła k . Wykonawszy kład S^0 punktu S na rzutnię pionową, zakreslimy koło k^0 , a następnie podniesiemy średnice $\overline{A^0 B^0}$ i $\overline{C^0 D^0}$ około śladu v_α , jako osi obrotu na płaszczyznę α , otrzymując osi $\overline{A' B'}$, $\overline{C' D'}$ i $\overline{A'' B''}$, $\overline{C'' D''}$ elips k' i k'' , będących rzutami koła k .



Rys. 305.

100. Elipsa jako krzywa powinowata z elipsą. Z faktu, że w dwóch układach środkowo powinowatych każdemu punktowi w jednym układzie odpowiada jeden punkt w układzie drugim, że każdej prostej przechodzącej przez ten punkt w pierwszym układzie, odpowiada prosta przechodząca przez odpowiedni punkt w układzie drugim, a dalej, że punktom właściwym w jednym układzie odpowiadają punkty właściwe w układzie drugim — wynika, że elipsie, przyjętej w jednym układzie, odpowie w układzie drugim także elipsa. Innymi słowy, elipsa może być spowinowacaną albo z kołem (ust. 95.) albo z elipsą.



Rys. 306.

Elipsie więc k_1 (Rys. 306.), przy danej osi powinowactwa p i pary punktów odpowiednich O_1 i O_2 , odpowie elipsa k_2 w układzie powinowatym. Parze osi $\overline{A_1 B_1}$ i $\overline{C_1 D_1}$ odpowie para średnic sprzężonych $\overline{A_2 B_2}$ i $\overline{C_2 D_2}$ elipsy k_2 . Środkowi O_1 , elipsy k_1 , odpowiada środek O_2 , w elipsie k_2 .

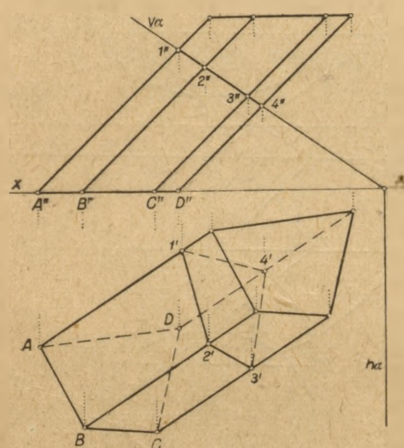
§ 8. PRZEKROJE I PRZENIKANIA WIEŁOŚCIANÓW

101. Płaskie przekroje wielościanów. Wyznaczenie przekroju wielościanu płaszczyzną, sprowadza się do wyznaczenia

punktów przebiecia się krawędzi wielościanu z płaszczyzną sieczną. Z określenia tego wynika, że położenie płaszczyzny

siecznej wpływa na przebieg konstrukcyi, która w przypadku, gdy płaszczyzna ta jest rzucającą, przedstawia się najprościej i sprowadza się — jak to widzimy na Rys. 307. — do odniesienia punktów, leżących na śladzie płaszczyzny, na odpowiednie krawędzie w drugim rzucie.

Przez wprowadzenie trzeciej płaszczyzny rzutów, prostopadłej do płaszczyzny siecznej i do jednej z dwóch rzutni, sprowadzić się da przypadek, w którym płaszczyzna sieczna



Rys. 307.

ma położenie dowolne, do powyższego. W Rys. 308. chodzi o wyznaczenie przekroju umiarkowanego ośmiościanu, leżącego jedną ścianą na rzutni poziomej, z płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$), nachyloną do obu rzutni. Przyjąwszy płaszczyznę poziomo rzucającą prostopadłą do α , wyznaczyliśmy rzut ośmiościanu na tę płaszczyznę i ślad boczny k_α płaszczyzny α .

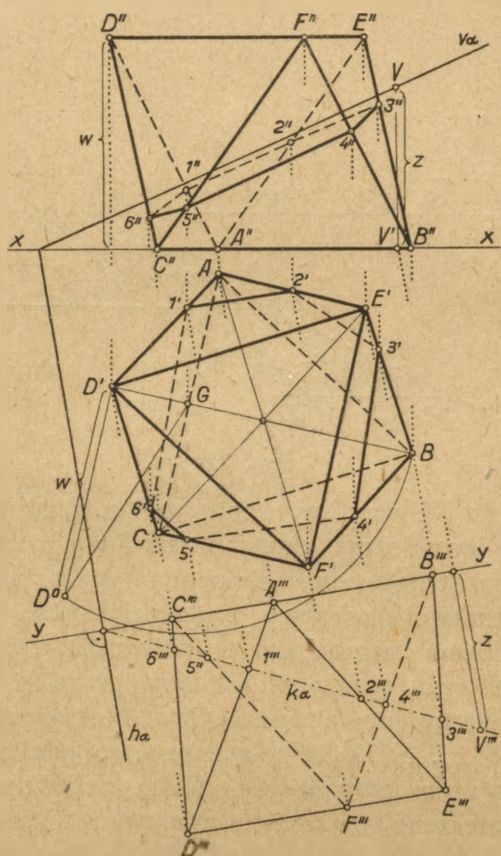
Rzut boczny wielokąta przekroju schodzi się ze śladem bocznym k_α , rzut poziomy i pionowy otrzymamy przez odniesienie punktów $1'''$, $2'''$, $3'''$, $4'''$, $5'''$ i $6'''$ na odpowiednie krawędzie w tych rzutach.

Podany sposób wyznaczenia przekroju wielościanu, polegający na wprowadzeniu trzeciej płaszczyzny rzutów, jakkolwiek ogólny i dający się zastosować do każdego wielościanu, bez względu na jego położenie, nie jest wystarczający. Zauważmy bowiem, że odniesienie punktu z rzutu bocznego na poziomy odbywa się z tem mniejszą dokładnością, im bardziej odnośny rzut krawędzi, na którą punkt przenieść mamy, zbliża się do położenia prostopadłego do osi y , a w przypadku, gdy krawędź ta jest prostopadłą do tej osi, możliwość przeniesienia punktu na nią nawet zupełnie upada. W Rys. 308. widzimy, że odnosząca punkt $6'''$ na prostą CD' przecina ją pod kątem zbyt ostrym, aby dokładność położenia punktu $6'$ nie mogła

być wątpliwą. Z tego powodu posiadać musimy drugi sposób wyznaczenia przekroju wielościanu płaszczyzną, aby zastosować go w przypadku, gdy pierwszy zawiedzie, względnie nie jest dość dokładny. Wprawdzie posiadamy zawsze możliwość wyznaczenia punktów przebiecia poszczególnych krawędzi z płaszczyzną sieczną, ale i ten sposób — jak to zauważyć można przy punkcie 6 ($6'$ $6''$) — nie da wyniku dokładnego, a następnie chodziłoby o metodę, która z góry wskaże krawędzie, przebijające płaszczyznę sieczną i zaoszczędzi szukania.

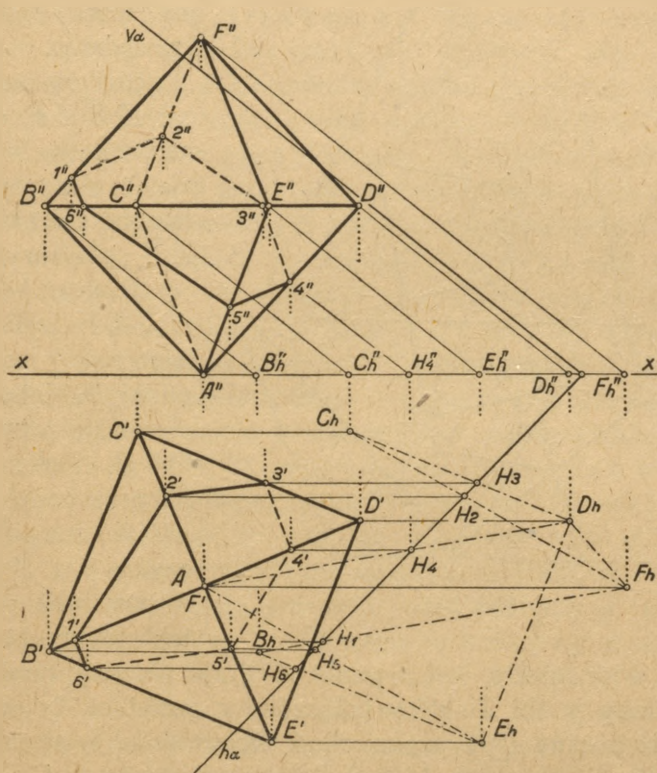
Niechaj daną będzie płaszczyzna α (h_α v_α) i prosta p (p' p'') (Rys. 309.). Obierzmy na prostej p dowolny punkt

B (B' B'') i poprowadźmy przezeń prostą, równoległą do dowolnie na płaszczyźnie α przyjętej prostej. Aby sprawę możliwie uprościć, niechaj prosta l (l' l''), przechodząca przez punkt B , będzie prostą czołową, a więc równoległą do v_α . Proste p i l wyznaczają płaszczyznę ε (h_ε v_ε), która przecina płaszczyznę α w prostej t (t' t''). Ponieważ płaszczyzna ε jest równoległą do śladu v_α , więc i prosta t (t' t'') jest do śladu tego równoległą. Punkt przecięcia się P (P' P'') prostych t (t' t'') i p (p' p'') jest punktem przebiecia się tej ostatniej z α . Otrzymaliśmy sposób szukania punktu przebiecia się prostej z płasz-



Rys. 308.

nich krawędziach punkty $1', 2', 3', 4', 5'$ i $6'$, których rzut pionowy otrzymamy zapomocą odnoszących, albo, o ile dokładność



Rys. 310.

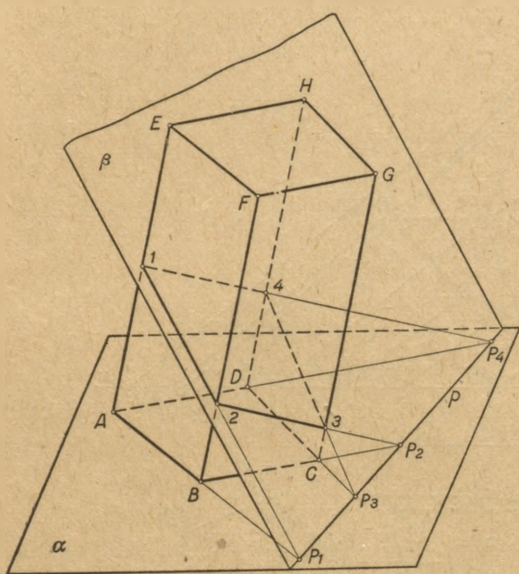
rysunku tego się domaga, zapomocą prostych równoległych do v_α , jak to uczyniliśmy dla punktu $4''$.

102. Przekroje płaskie graniastosłupów.

a) Prócz poznanych dwóch metod wyznaczania przekrojów, zastosować się da do graniastosłupów metoda odmienna, oparta o pewne związki, zachodzące między jego dwoma przekrojami, względnie między podstawą a przekrojem.

Przyjmijmy graniastosłup, którego podstawa $ABCD$ spoczywa na płaszczyźnie α (Rys. 311.), a nadto płaszczyznę β , przecinającą ten graniastosłup. Przypuśćmy, że znany nam jest punkt 1, w którym krawędź AE przebija płaszczyznę β ; znajdziemy punkty 2, 3 i 4, w których dalsze krawędzie boczne

przebijają płaszczyznę sieczną β . Wyznaczywszy krawędź p płaszczyzn α i β , znajdziemy punkt przecięcia się płaszczyzn



Rys. 311.

α , β i $ABEF$. Punkt ten leżeć będzie na krawędzi p , na krawędzi płaszczyzn α i $ABEF$, a także na krawędzi tej ostatniej z płaszczyzną β . Ale ponieważ krawędź AB płaszczyzny α i ściany bocznej $ABEF$ jest znana, więc znany jest także punkt P_1 , jako przecięcie się prostych p i AB . Przez punkt P_1 przechodzi oczywiście krawędź płaszczyzn β i $ABEF$, a ponieważ punkt 1 tej krawędzi jest także

znany, więc znany jest i punkt 2. Przy pomocy punktu P_2 otrzymamy punkt 3, który połączony z punktem P_3 przecina krawędź boczną DH w punkcie 4. Oczywiście, że punkt przecięcia się P_4 prostych 14 i AD leży na prostej p . Czworokąt podstawy $ABCD$ uważać można za przekrój graniastostupa płaszczyzną α , a zatem między dwoma przekrojami graniastostupa stwierdzamy, w skutku powyższego rozumowania, następujące związki:

1) Punkty A i 1, B i 2, C i 3, D i 4 leżą na prostych do siebie równoległych (krawędziach bocznych graniastostupa).

2) Proste AB i 12, BC i 23, CD i 34, AD i 14 przecinają się w punktach prostej p , która jest krawędzią obu płaszczyzn siecznych.

Jeżeli punkty A i 1, B i 2... i proste AB i 12, BC i 2, 3... określimy jako pary punktów, względnie prostych odpowiednich, to w takim razie między dwoma przekrojami graniastostupa stwierdzamy istnienie powinowactwa środkowego, którego osią jest prosta p , a kierunkiem, kierunek krawędzi bocznych

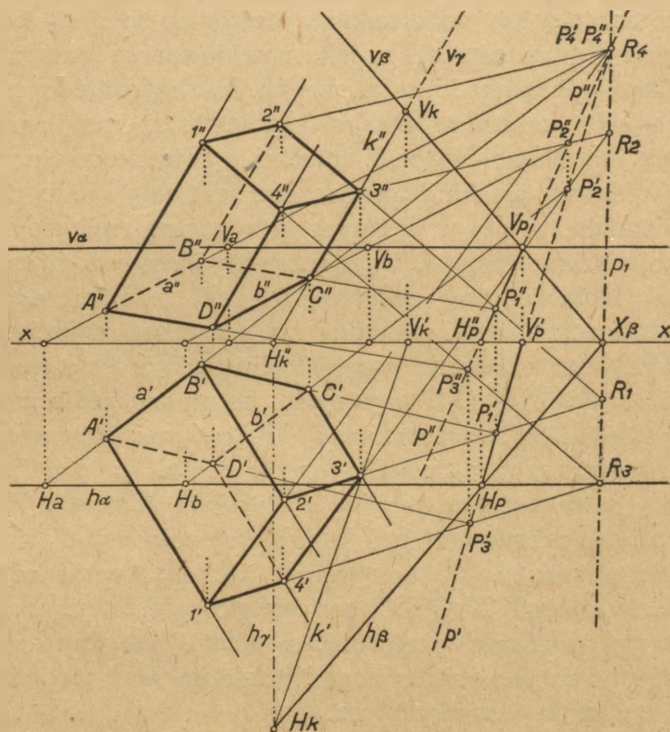
graniastosłupa. Wiemy z ust. 94., że rzuty dwóch układów powinowatych na dowolną płaszczyznę tworzą dwa układy powinowate, złączone na tej płaszczyźnie — a więc rzuty poziome dwóch przekrojów graniastosłupa są wielokątami powinowatymi. Kierunek tego powinowactwa schodzi się z kierunkiem rzutów poziomych krawędzi bocznych graniastosłupa, a osią powinowactwa jest rzut poziomy krawędzi płaszczyzn siecznych. Analogicznie przedstawia się sprawa z rzutami przekrojów graniastosłupa na płaszczyznę pionową lub jakąkolwiek bądź dowolną. Ponieważ powinowactwo dwóch układów płaskich wyznaczone jest osią i parą punktów odpowiednich, więc w ogólnym przypadku znajdziemy rzut przekroju graniastosłupa, wyznaczwszy krawędź płaszczyzny siecznej i płaszczyzny podstawy i punkt przebicia się jednej krawędzi bocznej graniastosłupa z płaszczyzną sieczną.

Przykład przekroju graniastosłupa czworościennego, którego podstawa $ABCD$ spoczywa na płaszczyźnie $\alpha (h_\alpha v_\alpha)$ równoległej do osi x , płaszczyznę $\beta (h_\beta v_\beta)$ przedstawia Rys. 312. Płaszczyzny α i β przecinają się w prostej $p (p' p'')$, która jest osią powinowactwa między wielokątem podstawy $ABCD$ i szukanym wielokątem przekroju; rzut poziomy p' prostej p jest osią powinowactwa środkowego, zachodzącego między rzutem poziomym $A' B' C' D'$ czworokąta podstawy, a rzutem poziomym wielokąta przekroju, podobnie jak prosta p'' jest osią powinowactwa środkowego, łączącego rzut pionowy podstawy z rzutem pionowym przekroju.

Wyznamy punkt przebicia się $3 (3' 3'')$ krawędzi bocznej, przechodzącej przez punkt $C (C' C'')$ z β , to dalsze punkty wielokąta przekroju znajdziemy na zasadzie związku, łączącego wielokąty podstawy i przekroju, a polegającego na tem, że odpowiednie ich boki przedłużone przecinają się na osi powinowactwa. Otrzymawszy więc punkt P_1' , jako przecięcie się boku $B' C'$ z osią p' , łączymy go z punktem $3'$ i otrzymujemy punkt $2'$, względnie bok $2' 3'$. Przy pomocy punktów P_2' i P_3' otrzymamy punkty $4'$ i $1'$, a więc rzut poziomy czworokąta przekroju.

W ten sam sposób przy pomocy punktów P_1'', P_2'', P_3'' i P_4'' wychodząc z punktu $3''$, otrzymamy punkty $2'', 4''$ i $1''$. Kontrolą dokładności konstrukcyi będzie stwierdzenie, że odpowiednie punkty w obu rzutach leżą na prostych odnoszących.

Między obu rzutami czworokąta przekroju zachodzi powinowactwo środkowe (ust. 95.), którego oś przechodzi przez punkt X_β i jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się R_1, R_2, R_3 i R_4 rzutów boków czworokąta przekroju. Znając



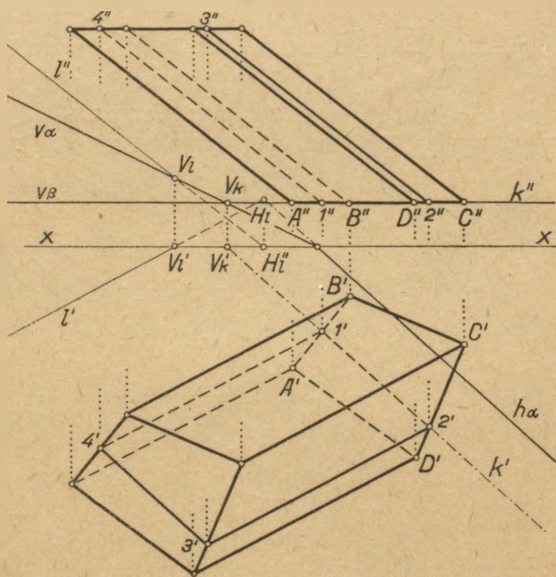
Rys. 312.

więc np. bok $\overline{34}$ ($\overline{3'4'}$, $\overline{3''4''}$) a przez to i punkt R_2 , a więc i oś powinowactwa p_1 , możemy i przyjej pomocy wyznaczyć dalsze dwa punkty czworokąta przekroju. Odpowiednie bowiem boki, jak $1'2'$ i $1''2''$, $2'3'$ i $2''3''$, $1'4'$ i $1''4''$, przecinają się w punktach R_4, R_1 i R_3 na prostej p_1 , wyznaczonej punktami X_β i R_2 . Na Rys. 312. punkty P_4' i P_4'' nakryły się, wobec czego i punkt R_4 zeszedł się z poprzednimi, gdyż w tym przypadku punkt $P_4 \equiv R_4$ jest punktem przecięcia się płaszczyzn $\alpha, \beta, \delta_{II}$ i ściany bocznej $AB12$ graniastopuła.

b) Płaszczyzna równoległa do krawędzi bocznych graniastopuła przecina go w równoległoboku, jeżeli krawędź

płaszczyzny siecznej z płaszczyzną podstawy przecina wielokąt podstawowy.

Przykład takiego przekroju podaje Rys. 313. Przez przyjętą, równoległą do krawędzi bocznych graniastostupa, prostą l ($l' l''$) poprowadziliśmy płaszczyznę α ($h_\alpha v_\alpha$), której krawędź k ($k' k''$) z płaszczyzną podstawy β przecina czworokąt podstawy w punktach 1 ($1' 1''$) i 2 ($2' 2''$). Przez punkty te poprowadzone proste, równoległe do krawędzi bocznych, są liniami przecięcia się odpowiednich ścian bocznych z płaszczyzną sieczną, a od-



Rys. 313.

ciniek $\overline{34}$
($3' 4', 3'' 4''$) sta-

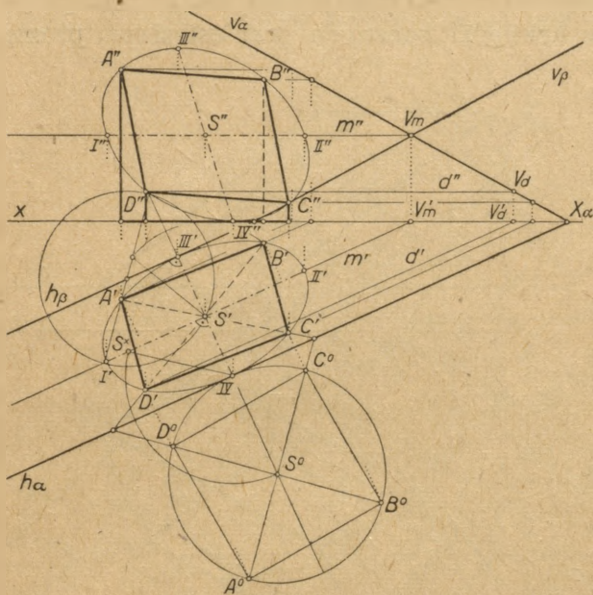
nowią czwarty bok szukanego równoległoboku.

103. Zadanie. Prosty graniastostup, którego podstawą jest równoległobok, przeciąć taką płaszczyzną, aby przekrój był kwadratem (Rys. 314.). Rzut poziomy $A' B' C' D'$ kwadratu schodzi się z podstawą graniastostupa, której przekątne są przekątnymi kwadratu. Elipsa, wyznaczona średnicami sprzężonymi $\overline{A' C'}$ i $\overline{B' D'}$, jest rzutem poziomym koła, opisanego na kwadracie.

Wyznamy w znany sposób (ust. 97 e.) osi tej elipsy, to oś wielka $I' II'$ jest poziomą, a więc równoległą do śladu poziomego szukaney płaszczyzny i równą średnicy koła. Oś mała $III' IV'$ wyznacza kierunek linii największego spadku (ust. 25.) płaszczyzny siecznej.

Ponieważ pęk płaszczyzn równoległych przecina graniastostup w wielobokach przystających, więc istnieje pęk płaszczyzn równoległych, przecinających dany graniastostup w kwa-

dracie. Weźmy pod uwagę jedną z tych płaszczyzn, a mianowicie tę, której ślad poziomy h_α przechodzi przez punkt IV ,



Rys. 314.

więc wykreślmy trójkąt prostokątny $S' S^x IV$, którego przeciwprostokątna niechaj równą jest połowie dużej osi elipsy, a otrzymamy przyprostokątną $S' S^x$, równą wysokości punktu S . W ten sposób otrzymamy punkt S'' , a także i rzut pionowy $S'' IV''$ linii spadu szukanej płaszczyzny α . Ślad pionowy v_α przejdzie przez ślad pionowy V_m prostej poziomo tworzącej m ($m' m''$), poprowadzonej przez punkt S . Przy pomocy prostych tworzących otrzymamy rzut pionowy $A'' B'' C'' D''$ kwadratu. Rzecz zrozumiała, że każda płaszczyzna równoległa do α spełnia również żądany warunek, t. j. przecina graniastosłup w kwadracie.

Weźmy teraz pod uwagę płaszczyznę β , przechodzącą przez S ($S'' S''$), ale tak położoną, że jej ślad poziomy h_β przechodzi przez punkt III' równoległe do h_α , a linia spadu ma kierunek przeciwny linii spadu płaszczyzny α . Płaszczyzna β ($h_\beta v_\beta$) i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe przecinają graniastosłup również w kwadracie. Tym sposobem istnieją dwa układy płaszczyzn, rozwiązujących zadanie.

oczywiście równoległe do osi $I' II'$. W celu wyznaczenia śladu pionowego płaszczyzny α , wyznaczmy rzut pionowy linii spadu, a raczej rzut pionowy S'' środka koła, którego rzut poziomy S' jest znany. Ponieważ odcinek $S' IV$ jest rzutem połowy średnicy koła, której długość równa jest od-

cinkowi $I' II'$,

104. Płaskie przekroje ostrosłupów.

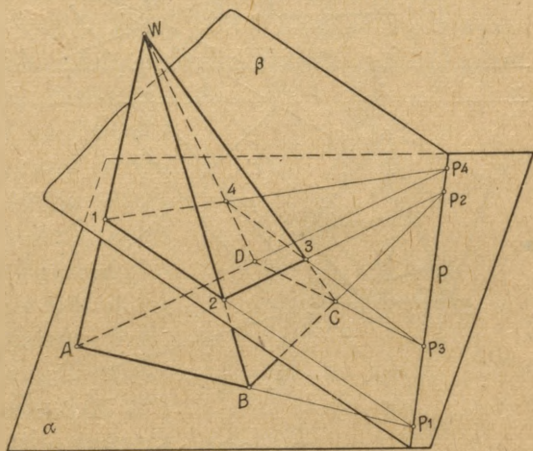
a) Podobnie jak do graniastosłupów, zastosować się da-
dzą, gdy chodzi o przekroje płaskie i do ostrosłupów, prócz
metod ogólnych, poznanych w ust. 101., pewne proste związki,
zachodzące między podstawą a przekrojem, względnie ogólnie
mówiąc, między dwoma przekrojami.

Rys. 315. wyobraża ostrosłup czworościenny, którego pod-
stawa znajduje się na płaszczyźnie α , a który przecięty jest
płaszczyzną β . Powtarzając rozumowanie przeprowadzone przy
sposobności omawiania Rys. 311., zauważymy, że między czworo-
kątem podstawy a czworokątem przekroju zachodzą nastę-
pujące związki:

1. Pary punktów A i 1, B i 2, C i 3, D i 4, które nazy-
wać będziemy odpowiednimi, leżą na krawędziach bocznych
ostrosłupa, a więc na prostych, przechodzących przez jeden
punkt i

2. Proste AB i 12, BC i 23, CD i 34, AD i 14 prze-
cinają się w punktach P_1, P_2, P_3 i P_4 , leżących na krawędzi p
płaszczyzn α i β .

Jeżeli między
dwoma układami płas-
skimi zachodzą po-
wyższe związki, to
mówimy, że układy
te są środkowo
kolineacyjne, a
związki owe określa-
my mianem kolinea-
cyi środkowej. Prosta
przecięcia się dwóch
płaszczyzn, a więc
w naszym przypadku
prostą p , nazywamy
osią kolineacyi, pro-



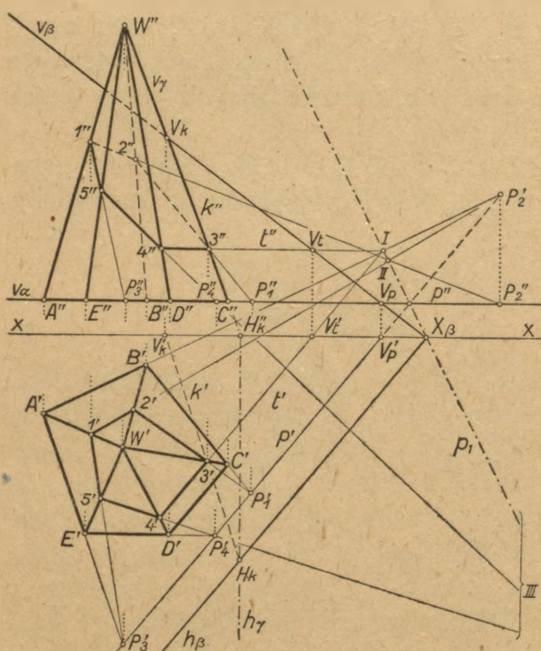
Rys. 315.

ste łączące odpowiednie punkty, więc krawędzie boczne ostro-
słupa, promieniami kolineacyi, a wreszcie punkt, przez który
przechodzą te promienie (punkt W w Rys. 315.) środkiem ko-
lineacyi. Szczegółowiej zajmiemy się kolineacją środkową
w § 9., tu zauważymy tylko, że podobnie jak rzuty układów
powinowatych są powinowate, tak i przez rzut dwóch utworów

środkowo kolineacyjnych związku, charakteryzujące kolineację środkową, zostają zachowane. Stąd powiedzieć możemy, że między rzutem poziomym podstawy a rzutem poziomym przekroju ostrosłupa zachodzi kolineacja środkowa, której środkiem jest rzut poziomy wierzchołka, a osią rzut poziomy krawędzi płaszczyzny podstawy i płaszczyzny siecznej. To samo odnosi się do rzutu pionowego podstawy graniastoslupa, do rzutu pionowego jego przekroju, wierzchołka i krawędzi płaszczyzny podstawy i płaszczyzny siecznej.

Przykłady. 1. Pięciościenny ostrosłup ukośny, którego podstawa leży na płaszczyźnie poziomej α , przecięty jest płaszczyzną β (Rys. 316.).

Celem wykreślenia rzutów przekroju wyznaczyliśmy rzuty punktu przebiecia się $3(3' 3'')$ krawędzi CW z płaszczyzną β , a to przy pomocy pionowo rzucającej płaszczyzny γ ($h_\gamma v_\gamma$). Wyznaczwszy krawędź $p(p' p'')$ płaszczyzn α i β , znajdziemy dalsze wierzchołki pięciokąta przekroju, korzystając ze związków kolineacji środkowej, zachodzącej między rzutami podstawy i rzutami przekroju. I tak np. bok BC przecina oś kolineacji w punkcie $P_1(P_1' P_1'')$, który połączony z punktem $3(3' 3'')$ wyznaczy na krawędzi bocznej BW punkt $2(2' 2'')$.

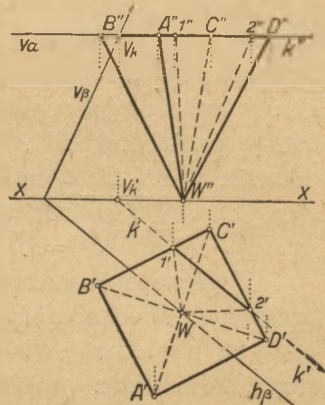


Rys. 316.

Z kolei wyznaczymy przy pomocy punktu $P_2(P_2' P_2'')$ na osi kolineacji p punkt $1(1' 1'')$, następnie punkt $P_3(P_3' P_3'')$, w którym krawędź AE przecina oś kolineacji, umożliwi wyznaczenie punktu $5(5' 5'')$, który połączony z punktem $P_4(P_4' P_4'')$ przecina krawędź boczną DW ostrosłupa w punkcie

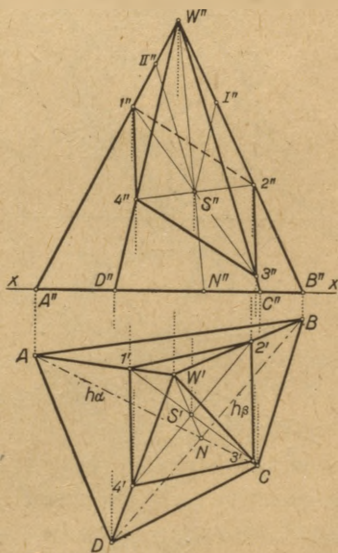
4 (4' 4''). Oś p_1 powinowactwa, jakie zachodzi między pięciokątami $1' 2' 3' 4' 5'$ i $1'' 2'' 3'' 4'' 5''$, przechodzi przez punkt X_β i jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się $I, II, III...$ odpowiednich boków obu pięciokątów.

2. Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek ostrosłupa przecina go w trójkącie, jeżeli krawędź płaszczyzny siecznej z płaszczyzną podstawy przecina podstawę. Jako przykład takiego przekroju niech posłuży Rys. 317., który przedstawia przekrój czworościennego, prostego ostrosłupa płaszczyzną β ($h_\beta v_\beta$), przechodzącą przez wierzchołek W ($W' W''$). Płaszczyzna podstawy α przecina β w prostej k ($k' k''$), a punkty 1 ($1' 1''$) i 2 ($2' 2''$) połączone z wierzchołkiem rozwiązują zadanie.



Rys. 317.

105. Zadanie. Dany ostrosłup czworościenny przecięć w równoległoboku. Proste AC i BD (Rys. 318.) uważać można za ślady poziome płaszczyzn α i β , przechodzących przez pary przeciwległych krawędzi bocznych ostrosłupa, a prostą NW za krawędź tych płaszczyzn. Płaszczyzna szukanego równoległoboku przetnie płaszczyzny α i β wzdłuż prostych, które będą przekątnymi tegoż równoległoboku. Punkt przecięcia się tych przekątnych leżeć będzie na prostej NW . Niechaj płaszczyzna sieczna przechodzi przez dowolny punkt S ($S' S''$) prostej NW , to rozwiązanie zadania sprowadza się do wykreślenia w jednym rzucie np. pionowym takich odcinków $1'' 3''$ i $2'' 4''$, dla których punkt S'' byłby środkiem; wiadomo bowiem, że rzut równoległoboku jest równoległobokiem.



Rys. 318.

Wykreślmy przez punkt S'' równoległą do $W'' D''$ i odmierzymy na prostej $W'' B''$ odcinek $1'' 2'' = 1'' W''$. Punkt $2''$ połączmy z S'' a otrzymamy prze-

kątną równoległoboku, którego środkiem jest punkt S'' . W istocie bowiem, gdy weźmiemy pod uwagę trójkąt $W'' 2'' 4''$ i prostą $I'' S'' \parallel W'' 4''$, to otrzymamy proporcję:

$$W'' I'' : I'' 2'' = 4'' S'' : S'' 2'', \text{ a ponieważ}$$

$$W'' I'' = I'' 2'', \text{ więc } 4'' S'' = S'' 2''.$$

Wykreśliwszy z punktu S'' równoległą do boku $\overline{W'' C''}$, odmierzymy $II'' I'' = II'' W''$ i połączmy otrzymany punkt I'' z punktem S'' , otrzymując na prostej $W'' C''$ punkt $3''$. Odcinek $I'' 3''$ jest drugą przekątną szukanego równoległoboku. Zwróćmy uwagę na trójkąt $W'' 3'' I''$ i równoległy do jego boku $W'' 3''$ odcinek $S'' II''$. Z rysunku czytamy:

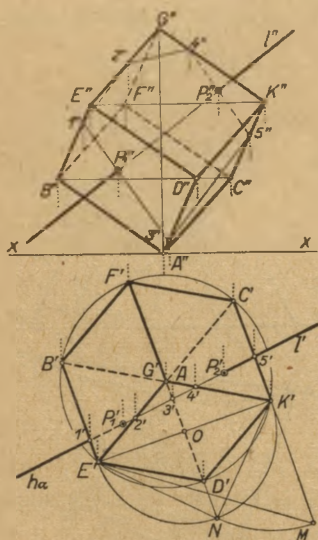
$$W'' II'' : II'' I'' = 3'' S'' : S'' I'', \text{ a że}$$

$$W'' II'' = II'' I'', \text{ więc też: } 3'' S'' = S'' I''.$$

Tym sposobem otrzymaliśmy rzut pionowy równoległoboku przekroju. Rzut poziomy znajdziemy przez odniesienie otrzymanych punktów na rzut poziomy: krawędzi bocznych ostrosłupa, albo przez powtórzenie przeprowadzonych konstrukcji dla rzutu poziomego.

106. Punkty przebiecia się prostej z wielościanem znajdziemy w ten sposób, że przez daną prostą poprowadzimy płaszczyznę, wyznaczmy jej przekrój z wielościanem, a punkty przecięcia się wielokąta przekroju z prostą rozwiązują zadanie. Co do wyboru płaszczyzny, poprowadzonej przez prostą, to baczmy zawsze, aby wyznaczenie przekroju jej z wielościanem skutecznie się dało możliwie najprościej, przy użyciu najmniejszej ilości linii. Stąd używamy najchętniej płaszczyzn rzucających, a odnośnie do graniastosłupów i ostrosłupów także takich, które przecinają pierwsze w równoległobokach a drugie w trójkątach.

Przykłady. 1 Punkty przebiecia się $P_1 (P_1' P_1'')$ i $P_2 (P_2' P_2'')$ prostej $l (l' l'')$ ze sześcianem, którego prze-



Rys. 319.

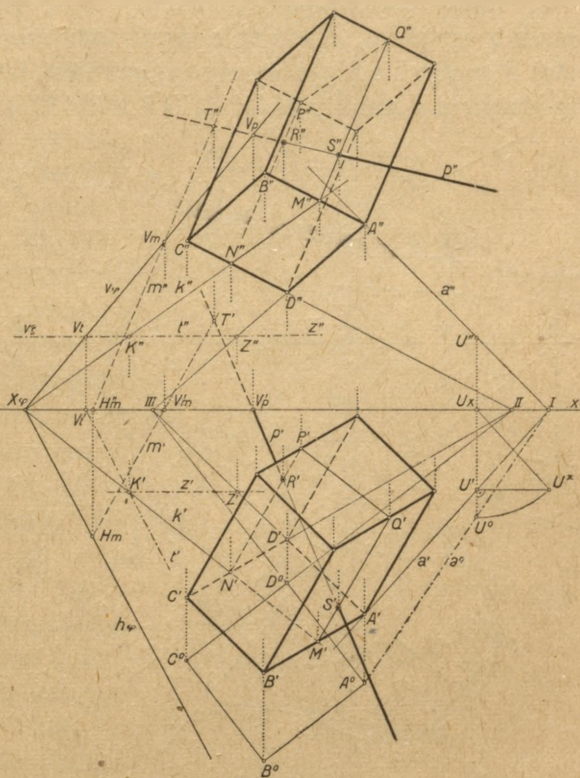
kątna główna jest pionowa (Rys. 319.), wyznaczyliśmy przy pomocy płaszczyzny poziomo rzucającej α , przechodzącej przez

prostą l , a przecinającej ten sześcián w pięciokącie 12345 . Rzut poziomy tego pięciokąta schodzi się ze śladem poziomym h_α płaszczyzny α , a rzut pionowy otrzymaliśmy, odnosząc poszczególne punkty na rzuty pionowe odpowiednich krawędzi.

2. Na płaszczyźnie, przechodzącej przez oś x i punkt U (U' U''), przyjęliśmy kwadrat $ABCD$, jako podstawę graniastostupa ukośnego, którego rzuty przedstawia Rys. 320. Zadaniem jest wyznaczyć punkty przebicia się prostej p (p' p'') z tym graniastostupem.

Przez punkt T (T' T''), obrany na prostej p (p' p''), poprowadziliśmy prostą m (m' m'') równoległą do krawędzi bocznych.

Płaszczyzna $\varphi \equiv (m, l)$, której ślady h_φ i v_φ wykreśliliśmy, jest równoległą do krawędzi bocznych graniastostupa i przecina płaszczyznę podstawy w prostej k (k' k''), która



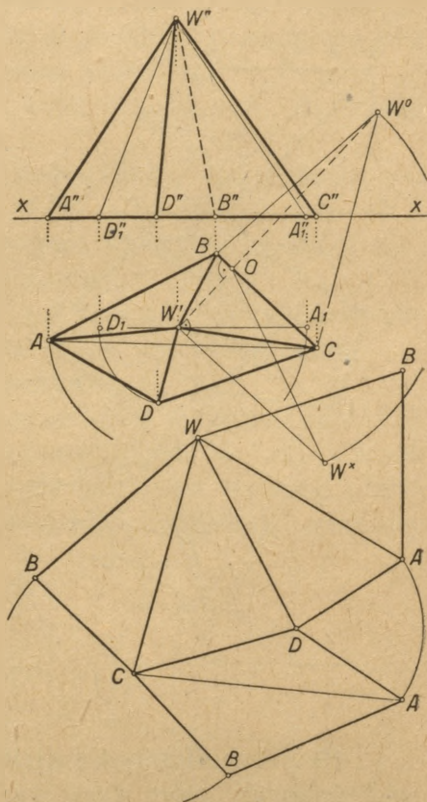
Rys. 320.

przejdzie przez punkt X_φ , a której jeszcze jeden punkt, a mianowicie K (K' K'') znaleźliśmy w sposób następujący: Na prostej AD przyjęliśmy punkt Z (Z' Z''), przez który poprowadziliśmy prostą z (z' z'') $\parallel x$; prosta ta przebija płaszczyznę φ w punkcie K (K' K''), który wraz z punktem X_φ wyznacza prostą k (k' k''). Ta ostatnia przecina podstawę graniastostupa w punktach M i N , a równoległobok $MNPQ$ jest tym, w którym płaszczyzna φ przecina graniastostup. Prosta p (p' p'') przecina ten równoległobok w punktach R (R' R'') i S (S' S''),

tych krawędzi zapomocą obrotu do położenia równoległego względem rzutni pionowej, jak to uczyniliśmy z krawędziami $\overline{AW}$ i $\overline{DW}$. Zestawienie trójkątów, stanowiących ściany boczne, z podstawą $ABCD$, wobec znajomości wszystkich elementów nie nastęrcza żadnych dalszych trudności.

2. *Siatka graniastostupa.* Rozwinięcie graniastostupa prostego, którego podstawa znajduje się na rzutni poziomej, sprowadza się do wykreślenia prostokątów o znanych bokach, stanowiących ściany boczne, i do wykreślenia podstaw.

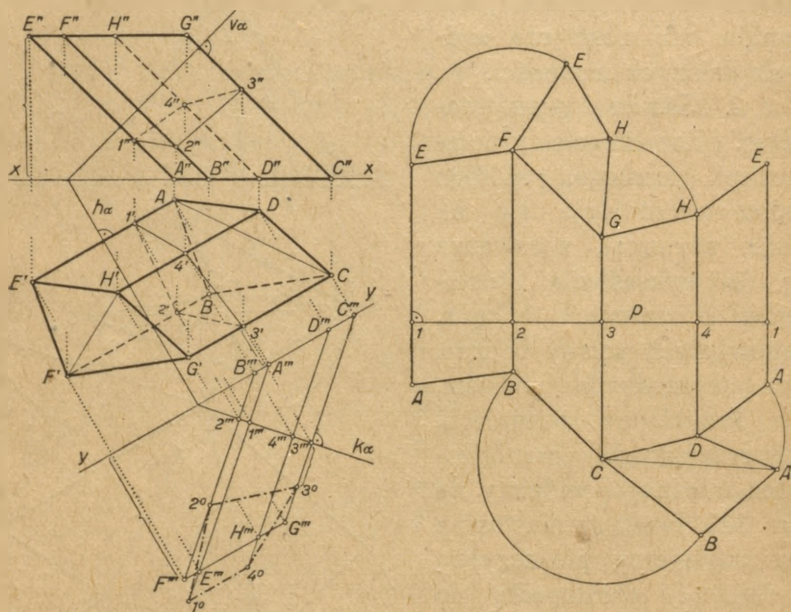
Przykład rozwinięcia czworosciennego graniastostupa ukośnego widzimy na Rys. 323. Jeżeli graniastostup ten przetniemy płaszczyzną α (h_α v_α) prostopadłą do krawędzi bocznych, to boki czworokąta przekroju będą prostopadłe do tych krawędzi, a po rozwinięciu ścian bocznych, przejdą w linię prostą, do której krawędzie boczne pozostaną prostopadłe. Zada-



Rys. 322.

nie sprowadza się tym sposobem niejako do rozwinięcia dwóch graniastostupów prostych o wspólnej podstawie, powstałej z przecięcia graniastostupa płaszczyzną α , a ograniczonych podstawami graniastostupa ukośnego. Wykreśliwszy rzut boczny graniastostupa na płaszczyznę prostopadłą do α i rzuty czworokąta przekroju 1234 , wykonajmy jego kład $1^0 2^0 3^0 4^0$ na rzutnię boczną i rozwiniemy go na prostą p . Otrzymamy: $12 = 1^0 2^0$, $23 = 2^0 3^0$, $34 = 3^0 4^0$ i $41 = 4^0 1^0$. Na prostopadłych, wykreślonych w punktach $1, 2, 3, 4$ i 1 , odmierzymy prawdziwe długości krawędzi obydwu graniastostupów prostych,

których wspólną podstawą jest czworokąt $1 (1' 1'') \dots 4 (4' 4'')$. Będzie więc $1A = 1'''A'''$, $2B = 2'''B'''$, $3C = 3'''C'''$ i $4D = 4'''D'''$, a wreszcie $AE = BF = \dots = DH = A'''E''' = B'''F''' \dots$



Rys. 323.

108. Przenikania się wielościanów w ogólności. O dwóch wielościanach, które częściowo zajmują tę samą przestrzeń, mówimy, że się przenikają, względnie wzajemnie przecinają. Przestrzeń, należąca równocześnie do obu wielościanów, ograniczona jest w ogólności wielokątem przestrzennym (skośnym). Jego wierzchołki są punktami przebiecia się krawędzi jednego wielościanu ze ścianami wielościanu drugiego, a jego boki są prostymi przecięcia się ścian przenikających się wielościanów. Jeżeli wszystkie krawędzie jednego wielościanu przebijają ściany wielościanu drugiego, to wielokąt przenikania składa się z dwóch części, a przenikanie nazywa się **zupelnym**. Jeżeli jedna lub więcej krawędzi zarówno jednego jak i drugiego wielościanu leży poza obrebbem przenikania, to wielokąt przenikania jest jednolity, a przenikanie nazywa się **niezupelnym** lub **częściowym**.

Sprawa wyznaczenia wielokąta przenikania dwóch wielościanów polega w zasadzie na zastosowaniu zadania wyznaczenia punktu przebiecia się prostej z płaszczyzną względnie z wielościanem. Co do wierzchołków i boków tego wielokąta, względnie ich rzutów, to pamiętać musimy o następujących punktach, które rozumieją się same przez się:

a) Punkt przebiecia się krawędzi widocznej ze ścianą widoczną, jest widoczny,

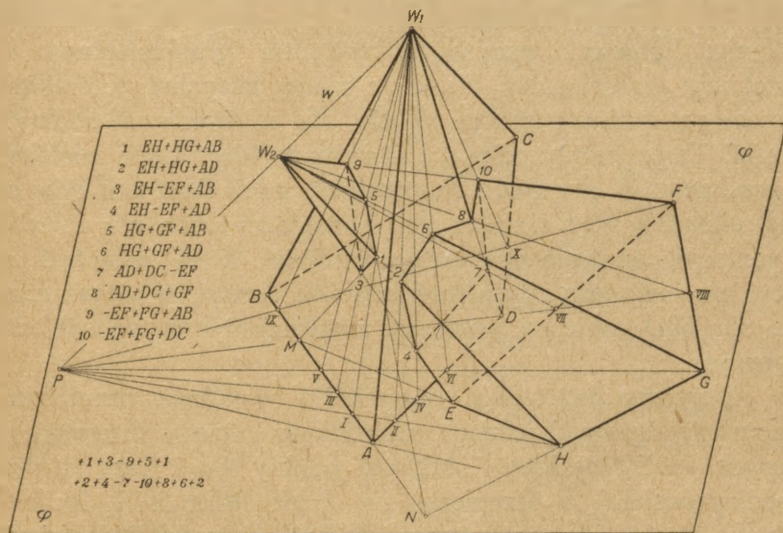
b) Prosta przecięcia się dwóch ścian widocznych jest widoczną,

c) Punkt przebiecia się krawędzi widocznej ze ścianą niewidoczną jest punktem niewidocznym i

d) Krawędź ściany widocznej ze ścianą niewidoczną, podobnie jak dwóch ścian niewidocznych, jest niewidoczną.

109. Przenikanie się ostrosłupów.

a) Niechaj dane będą, przedstawione w rzutach ukośnych (Rys. 324.*), dwa ostrosłupy o wierzchołkach W_1 i W_2 , których podstawy $ABCD$ i $EFGH$ spoczywają na wspólnej płaszczyźnie φ . Celem wyznaczenia wielokąta przenikania, połączmy



Rys. 324.*

oba wierzchołki prostą w , która przebiega φ w punkcie P . Aby wyznaczyć punkty przebiecia się krawędzi jednego ostrosłupa ze ścianami ostrosłupa drugiego, poprowadźmy przez prostą w

i tę krawędź płaszczyzny, która przecnie drugi graniastosłup w trójkącie. Punkty przecięcia się boków tego trójkąta z krawędzią są szukanymi punktami. Krawędź płaszczyzny, przechodzącej przez krawędź ostrosłupa, z płaszczyzną φ przejdzie przez punkt P i wierzchołek wielokąta podstawy, z którego wychodzi krawędź boczna. Ten sposób szukania wierzchołków wielokąta przenikania wskazuje od razu, które krawędzie biorą udział w przenikaniu, a które leżą po za niem. I tak, jeżeli prosta PA jest prostą przecięcia się płaszczyzny poprowadzonej przez krawędź $W_1 A$ z płaszczyzną φ , to ponieważ prosta ta nie przecina podstawy ostrosłupa W_2 , więc i krawędź $W_1 A$ nie przebija tego ostrosłupa. Inaczej jest z płaszczyzną przechodzącą przez krawędź $W_2 H$. Przecina ona bowiem ostrosłup W_1 w trójkącie $W_1 III$, co oznacza, że krawędź $W_2 H$ przebija ten ostrosłup w dwóch punktach, oznaczonych liczbami 1 i 2. Podobnie krawędź $W_2 E$ przebija ostrosłup W_1 w punktach 3 i 4, krawędź $W_2 G$ w punktach 5 i 6. Krawędź $W_1 D$ ostrosłupa W_1 przebija ostrosłup W_2 w punktach 7 i 8, a wreszcie krawędź $W_2 F$ ostrosłupa W_2 przebija ostrosłup W_1 w punktach 9 i 10. Krawędzie $W_2 B$ i $W_2 C$ nie biorą udziału w przenikaniu. Ponieważ wszystkie krawędzie graniastostłupa W_1 przebijają graniastostłup W_2 , więc mamy przykład przenikania zupełnego, gdzie wielokąt składa się z dwóch oddzielnych części. Teraz należy połączyć otrzymane wierzchołki wielokąta przenikania. W przypadkach prostych, gdzie ilość punktów nie jest wielka, a więc i siatka linii konstrukcyjnych nie utrudnia oryentacyi, ustalenie następstwa punktów, które połączyć należy, nie następuje zbytnich trudności; zazwyczaj jednak rzecz ma się odmiennie, a wówczas postępujemy w sposób następujący:

Bierzemy pod uwagę wierzchołki wielokąta przenikania i notujemy krawędź jednego wielościanu i ściany drugiego, na których punkty te leżą. I tak np. punkty 1 i 2 leżą na krawędzi powstałej z przecięcia się ścian $W_2 EH$ i $W_2 HG$, a nadto punkt 1 leży na ścianie $AB W_1$, a punkt 2 na ścianie $AD W_1$. Do oznaczenia ścian bocznych wystarczą krawędzie u podstawy, które te ściany dostatecznie określają. Jeżeli ściana jest widoczna, to jej krawędzi podstawowej damy znak dodatni (+), inaczej znak ujemny (—). Notatkę naszą, odnoszącą się do punktów 1 i 2, wyrazimy następującym symbolem:

1. $+ EH, + HG, + AB,$
2. $+ EH, + HG, + AD.$

Przełłomaczone na słowa, symbole te brzmią: Punkt 1 leży na krawędzi, powstałej z przecięcia się widocznych (+) ścian EH i HG ostrosłupa W_2 i na ścianie widocznej AB ostrosłupa W_1 ; punkt 2 leży na krawędzi ścian widocznych EH i HG ostrosłupa W_2 i na widocznej ścianie AD ostrosłupa W_1 .

Dla punktów 3 i 4 otrzymamy:

3. $+ EH, - EF, + AB,$
4. $+ EH, - EF, + AD,$

przyczem znak $-$ przy ścianie EF oznacza, że ściana ta jest niewidoczna. Jeżeli to samo przeprowadzimy dla wszystkich dziesięciu punktów, to otrzymamy następującą tablicę, którą zestawiliśmy także na Rys. 324.*

1	$+ EH$	$+ HG$	$+ AB$
2	$+ EH$	$+ HG$	$+ AB$
3	$+ EH$	$- EF$	$+ AB$
4	$+ EH$	$- EF$	$+ AD$
5	$+ HG$	$+ FG$	$+ AB$
6	$+ HG$	$+ FG$	$+ AD$
7	$+ AD$	$+ CD$	$- EF$
8	$+ AD$	$+ CD$	$+ FG$
9	$+ FG$	$- EF$	$+ AB$
10	$+ FG$	$- EF$	$+ CD$

Aby otrzymać porządek, w jakim otrzymane punkty należy połączyć, postępujemy w sposób następujący: Wyszedłszy z punktu 1, niechaj czytelnik przekreśli w pierwszym szeregu naszej tablicy wiersz ostatni i np. pierwszy, a więc oba dodatnie i niechaj szuka w następnych szeregach tych samych liter, a więc $+ AB$ i $+ EH$. Znalazłszy je w szeregu 3, niechaj zanotuje obok liczby $+ 1$ liczbę $+ 3$. Przekreśliwszy w tymże samym szeregu 3 ponownie wyraz ostatni, t. j. $+ AB$ i pozostały $- EF$, niechaj szuka tych wyrażen z tymi samymi znakami w dalszych szeregach. Znajdzie je w szeregu 9, co zanotuje obok poprzedniej $+ 3$, jednak ze znakiem ujemnym,

a to dlatego, że jeden z wyrazów ($- EF$) jest ujemny, z czego wynika, że punkt 9 jako leżący na ścianie $- EF$ może być niewidoczny. Przekreśliwszy wyrazy $+ AB$ i $+ FG$ znajdziemy je powtórnie w szeregu 5, a pozostałą tam parę wy-

razów $+AB$ i HG w szeregu pierwszym. Tym sposobem łańcuch, którego pierwszym ogniwem był punkt $+1$, a który przedstawia się w ten sposób:

$$+1, +3, -9, +5, +1,$$

zamknął się. Otrzymany szereg liczb wskazuje nam bezpośrednio porządek łączenia punktów, stanowiących jeden z dwóch wielokątów przenikania, a ponadto poucza, które krawędzie tego wielokąta są niewidoczne. I tak, jeżeli dwie następujące po sobie liczby są dodatnie, to krawędź przenikania tymi punktami określona jest widoczną (np. krawędź $1+3$). Jeżeli punkt dodatni połączyć mamy z ujemnym, to oznacza to, że odnośna krawędź przenikania jest niewidoczną (krawędź $3-9$). Punkt -9 połączony z 5 daje krawędź widoczną, a 5 połączony z 1 zamyka wielokąt przenikania również krawędzią widoczną.

Dla pozostałych szeregów naszej tabeli przeprowadzimy, wychodząc z punktu 2 , to samo i otrzymamy szereg:

$$+2, +4, -7, -10, +8, +6, +2,$$

a więc drugi wielokąt przenikania.

Otrzymanie z tablicy szeregu liczb wskazujących, z wykluczeniem pomyłek zarówno co do następstwa punktów, które należy połączyć, jak i co do „widoczności“ i „niewidoczności“ krawędzi wielokąta przenikania, polega na następującem rozumowaniu: Przekreślając w pierwszym szeregu tablicy wyrazy $+AB$ i $+EH$, zaznaczamy tem, że punkt 1 leży na ścianach ABW_1 i EHW_2 ; szukając wyrazów AB i EH w dalszych szeregach tabeli, szukamy punktu leżącego na tychże samych ścianach obu ostrosłupów, a więc punktu, który połączony z pierwszym, wyznacza krawędź obu tych ścian. Przekreślając poraz drugi w szeregu 3 wyraz ostatni AB i pozostały $-EF$ szukamy krawędzi ściany EFW_2 i ściany ABW_1 , która to krawędź wyjść musi z punktu 3 , gdyż płaszczyzny ABW_1 , EHW_2 i EFW_2 przecinają się właśnie w punkcie 3 . Ściana ostrosłupa, na której leży wierzchołek wielokąta przenikania, musi więc być dwukrotnie przekreślona w tablicy, gdyż uważany wierzchołek jest punktem wyjścia dla dwóch krawędzi wielokąta przenikania, leżących na jednej ścianie. Ściana więc np. AB , na której leżą punkty $1, 3, 9$ i 5 wystąpi w tabeli cztery razy, ale będzie ośm razy przekreślona; na ścianie FG leży tylko punkt 8 , więc w tabeli naszej wy-

punkty przebicia się 3 i 4 krawędzi CW_1 z ostrosłupem W_2 , punkty przebicia się 5 i 6 krawędzi EW_2 z ostrosłupem W_1 i punkty 7 i 8, w których krawędź FW_2 przebija ten sam ostrosłup W_1 . Tablicę, na podstawie której otrzymamy następ-

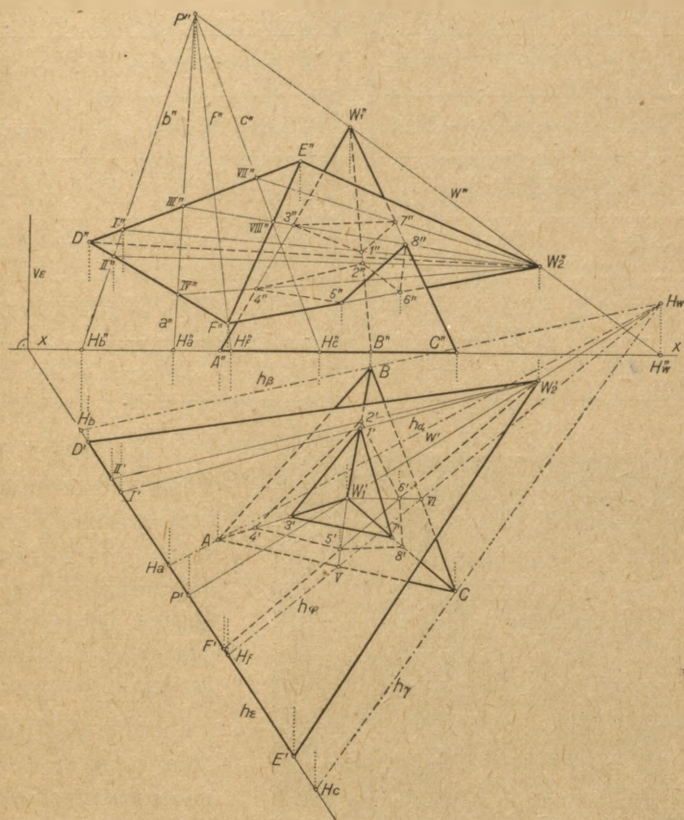
1	+ AB	+ AC	+ DE
2	+ AB	+ AC	+ DF
3	+ AC	- BC	+ DE
4	+ AC	- BC	+ DF
5	+ DE	- EF	+ AB
6	+ DE	- EF	- BC
7	+ DF	- EF	+ AB
8	+ DF	- EF	- BC

stwo wierzchołków wielokąta przenikania, zestawioną jak w przykładzie pierwszym, widzimy powyżej. Wielokąt przenikania niezupełnego jest:

$$+ 1, + 5, - 7, + 2, + 4, - 8, - 6, - 3, + 1.$$

c) Przykład przenikania dwóch trójsściennych ostrosłupów, przeprowadzony w rzutach Monge'a, podaje Rys. 326*. Ostrosłup W_1 stoi na rzutni poziomej, podstawa ostrosłupa W_2 znajduje się na płaszczyźnie poziomo rzucającej ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$). Prosta w ($w' w''$), łącząca wierzchołki obu ostrosłupów, przebija ε w punkcie P ($P' P''$), a rzutnię poziomą w punkcie H_w ($H_w H_w''$). Poprowadźmy przez prostą w i krawędź boczną BW_1 ostrosłupa W_1 płaszczyznę β , to jej ślad poziomy h_β przejdzie przez punkty H_w i B ; rzut pionowy krawędzi płaszczyzn ε i β łączy punkty P'' i H_b'' , i przecina trójkąt $D' E' F'$ w punktach I' i II' , które odrzucone na ślad h_ε dają punkty I i II .

Punkty $I (I' I'')$ i $II (II' II'')$ połączone z wierzchołkiem $W_2 (W_2' W_2'')$ dają proste, w których płaszczyzna β przecina ostrosłup W_2 . Punkty $1 (1' 1'')$ i $2 (2' 2'')$, w których krawędź $B W_1$ przecina proste $I W_2$ i $II W_2$, są punktami przebicia się



Rys. 326.*

tej krawędzi z ostrosłupem W_2 . W ten sam sposób znajdziemy punkty przebicia się $3 (3' 3'')$ i $4 (4' 4'')$ krawędzi $A W_1$ z ostrosłupem W_2 , a to przy pomocy płaszczyzny α , przechodzącej przez tę krawędź i przez prostą w . Z kolei wyznaczymy przy pomocy płaszczyzny φ punkty $5 (5' 5'')$ i $6 (6' 6'')$, w których krawędź $F W_2$ przebija ostrosłup W_1 , a w końcu punkty przebicia się $7 (7' 7'')$ i $8 (8' 8'')$ krawędzi $C W_1$ z ostrosłupem W_2 .

Zestawmy otrzymane punkty i ściany, na których punkty te leżą, osobno dla każdego rzutu, w tablice.

1'	+ AB	+ BC	+ D' E'
2'	+ AB	+ BC	- D' F'
3'	+ AB	+ AC	+ D' E'
4'	+ AB	+ AC	- D' F'
5'	- D' F'	- E' F'	+ AC
6'	- D' F'	- E' F'	+ BC
7'	+ AC	+ BC	+ D' E'
8'	+ AC	+ BC	- E' F'

1''	- A'' B''	- B'' C''	- D'' E''
2''	- A'' B''	- B'' C''	- D'' F''
3''	- A'' B''	+ A'' C''	- D'' E''
4''	- A'' B''	+ A'' C''	- D'' F''
5''	- D'' F''	+ E'' F''	+ A'' C''
6''	- D'' F''	+ E'' F''	- B'' C''
7''	+ A'' C''	- B'' C''	- D'' E''
8''	+ A'' C''	- B'' C''	+ E'' F''



Rys. 327. Cerkiew św. Trójcy w Żółkwi
(Zdjęcie fotograficzne prof. dr. Jana Sas Zubrzyckiego)

Z tablic tych, w sposób omówiony szczegółowo przy zadaniu pierwszym, otrzymamy wzory połączeń wierzchołków wielokąta, identyczne oczywiście dla obu rzutów, a różniące się tylko znakami, określającymi „widoczność” i „niewidoczność” poszczególnych krawędzi, a mianowicie:

Dla rzutu poziomego mamy:

+1', +3', +7', +1', i
-2', -4', -5',
-8', -6', -2';

Rzut pionowy wielokątów wyrazi się:

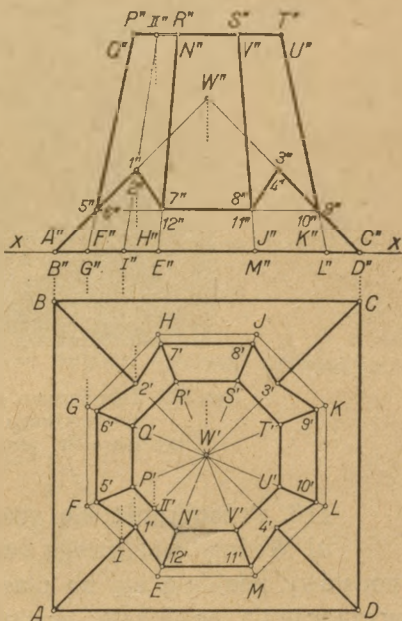
— $1''$, — $3''$, — $7''$, — $1''$ i
— $2'$, — $4'$, — $5''$, + $8''$, — $6''$, — $2'$.

Zazwyczaj zestawiamy tylko tabelę dla jednego rzutu i z niego po wykreśleniu orientujemy się, które krawędzie wielokąta przenikania w drugim rzucie są widoczne, a które zakryte.

d) Przenikania wielościanów spotykamy bardzo często w budownictwie; jedno z nich widzimy na Rys. 327. Dachy, będące czworościennymi ostrosłupami, przenikają się tam z ośmiościennymi ostrosłupami, stanowiącymi trzon wieży. Rozwiązanie tego zadania w rzutach prostokątnych przeprowadziliśmy na Rys. 328. Ze względu na to, że oba ostrosłupy mają wspólną oś pionową, wyznaczenie rzutów wielokąta przenikania jest bardzo proste. I tak, aby znaleźć punkt przebiecia się krawędzi AW ostrosłupa czworościennego ze ścianą boczną $EFPN$ ośmiościennego ostrosłupa ściętego, poprowadźmy przez tę krawędź płaszczyznę poziomo rzucającą. Płaszczyzna ta przetnie tę ścianę w prostej III , która wyznacza na krawędzi AW szukany punkt $1(1' 1'')$. Najpierw otrzymamy rzut pionowy $1''$, a potem, przez odniesienie go na prostą AW' , rzut poziomy $1'$. W podobny sposób otrzymamy punkty $2(2' 2'')$, $3(3' 3'')$ i $4(4' 4'')$.

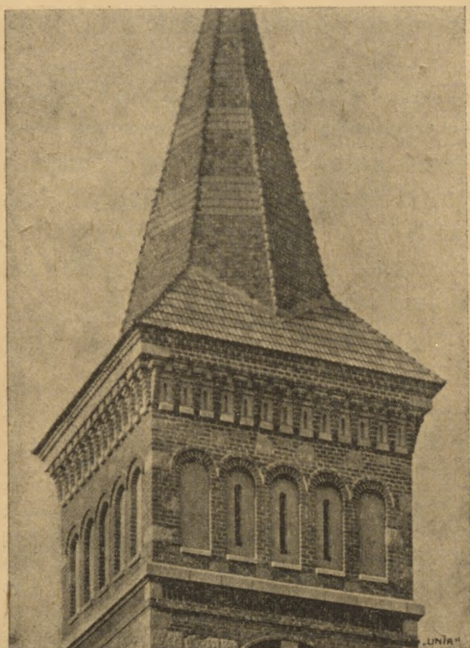
Ściana $FGPQ$ przecina ścianę ABW w krawędzi 56 , która jest prostopadłą do rzutni pionowej. Krawędzie ścian $HIRS$ i BCW , ścian $KLTU$ i CDW , a wreszcie $EMNV$ i ADW leżą na tej samej płaszczyźnie poziomej, wraz z krawędzią 56 . Łącząc punkty 5 i 12 z punktem 1 , punkty 6 i 7 z 2 , 8 i 9 z 3 , a 10 i 11 z 4 , otrzymamy szukany wielokąt przenikania.

e) Rys. 329. jest dalszym przykładem stosowanych w bu-



Rys. 328.

downictwie przenikań wielościanów. Mamy tu również przenikanie ostrosłupa czworosciennego z ośmiościennym, którego konstrukcyjne rozwiązanie przeprowadziliśmy na Rys. 330.

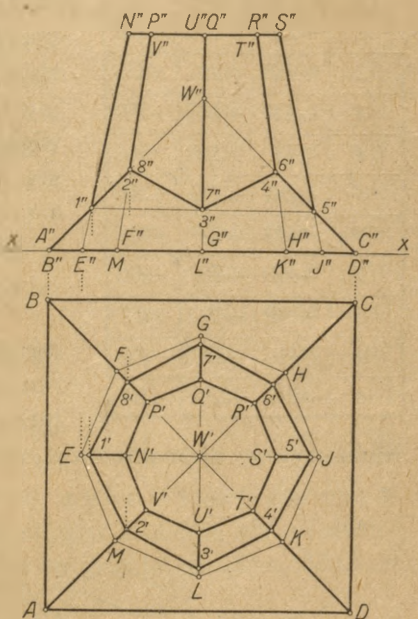


Rys. 329. Zakończenie wieży kościoła w Bruśniku,
zbudowanego według projektu
profesora dr. Jana Sas Zubrzyckiego

110. Przenikania się graniastosłupów.

a) Weźmy pod uwagę dwa graniastosłupy Γ_1 i Γ_2 , których podstawy znajdują się na płaszczyźnie φ (Rys. 331.). W celu wyznaczenia wielokąta przenikania, więc punktów przebicia się krawędzi jednego graniastosłupa z drugim, obierzmy dowolny punkt P w przestrzeni i poprowadźmy przezeń prostą p_1 równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa Γ_1 i prostą p_2 równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa Γ_2 . Prosta p , łącząca punkty przebicia się P_1 i P_2 prostych p_1 i p_2 z płaszczyzną φ , jest śladem płaszczyzny równoległej do krawędzi bocznych obu graniastosłupów, zwanej płaszczyzną kierowniczą. Płaszczyzny, przechodzące przez krawędzie boczne jednego graniastosłupa, równoległe do płaszczyzny kierowni-

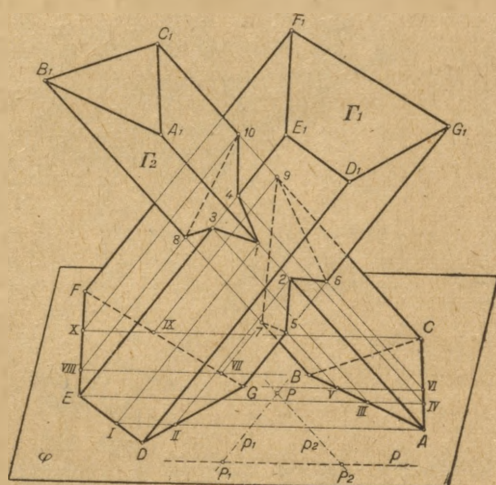
czej, przecinają drugi graniastostup w równoległoboku. W szczególności płaszczyzna przechodząca przez krawędź boczną AA_1 graniastostupa Γ_2 przecina płaszczyznę φ w prostej, przechodzącej przez punkt A równoległe do prostej p i przecinającej podstawę graniastostupa Γ_1 w punktach I i II . Równoległe, wykreślone do krawędzi bocznych graniastostupa Γ_1 przez punkty I i II , przecinają krawędź AA_1 w punktach 1 i 2 , które są punktami przebicia się tej krawędzi z Γ_1 . W analogiczny sposób znajdziemy punkty przebicia się 3 i 4 krawędzi EE_1 graniastostupa Γ_1 z Γ_2 , dalej punkty 5 i 6 , w których krawędź GG_1 przebija Γ_2 , punkty 7 i 8 a w końcu 9 i 10 . Układamy tablicę, jak to czyniliśmy przy przenikaniu się ostrosłupów, oznaczając w niej ściany boczne graniastostupów literami od-



Rys. 330.

nośnych krawędzi podstawowych. Tak np. punkty 1 i 2 leżą na krawędzi widocznych ścian bocznych $AB A_1 B_1$ i $AC A_1 C_1$, a ponadto punkt 1 leży na widocznej ścianie $EDE_1 D_1$ a punkt 2 na widocznej ścianie $DG D_1 G_1$. Wyrazimy to więc symbolicznie w następujący sposób:

1. $+AB, +AC, +DE,$
2. $+AB, +AC, +DG.$



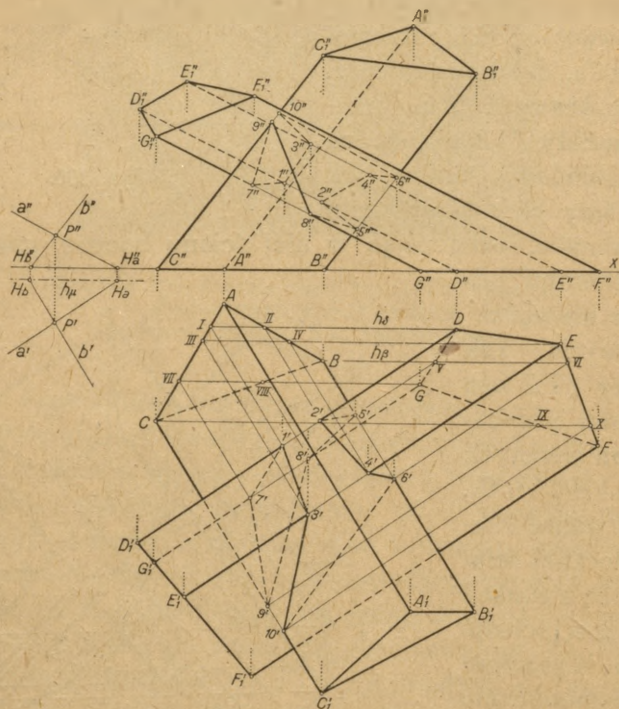
Rys. 331.

Zestawienie dla wszystkich punktów podaje tablica. Zupełnie w ten sam sposób, jak to czyniliśmy przy przenikaniu się ostrosłupów, wyznaczymy następstwo punktów stanowiących wierzchołki wielokąta przenikania, który składa się z dwóch pięciokątów skośnych, a mianowicie:

+1, +3, +8, -10, +4, +1 i
+2, +5, -7, -9, -6, +2.

b) Przenikanie się niezupełne dwóch graniastosłupów, stojących na rzutni poziomej, przedstawione w rzutach Monge'a, widzimy na Rys. 332.

Płaszczyzna kierownicza μ wyznaczona jest prostymi $a(a'a'')$



Rys. 332.

i $b(b'b'')$, poprowadzonymi przez dowolnie przyjęty punkt $P(P'P'')$ w przestrzeni równoległe do krawędzi bocznych

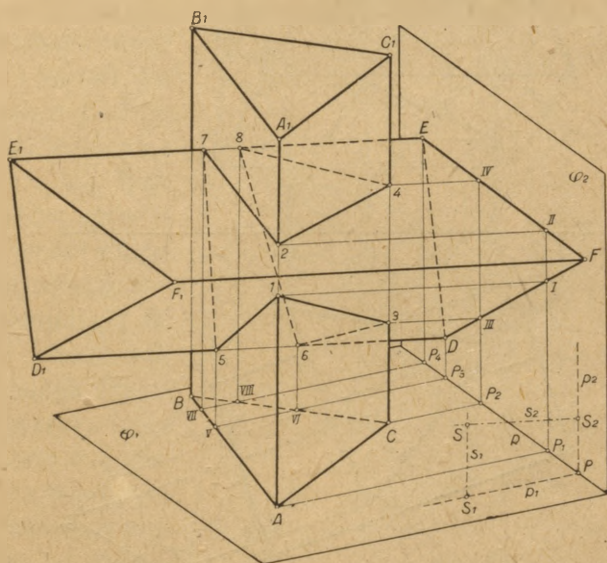
graniastosłupów. Płaszczyzna $\delta // \mu$ a przechodząca przez krawędź DD_1 przecina drugi graniastosłup w równoległoboku, a ten krawędź DD_1 w punktach $1(1' 1'')$ i $2(2' 2'')$, które są punktami przebicia się tej krawędzi z graniastosłupem. Tą drogą otrzymamy wszystkie dziesięć punktów przenikania, których rozmieszczenie dla rzutu poziomego ujmijemy w tabelę. Wielokąt przenikania otrzymany z tej tabeli jest:

$+1', +3', +10', -6', +4', +2',$
 $-5', -8', -9', -7', -1'.$

Bez trudności odróżnimy z rzutu poziomego krawędzie widoczne od niewidocznych w widoku z przodu, a więc w rzucie pionowym.

c) Jeżeli podstawy graniastosłupów znajdują się na dwóch płaszczyznach przecinających się w prostej p (Rys. 333.), to

1'	+DE	-DG	+AC
2'	+DE	-DG	+AB
3'	+DE	+EF	+AC
4'	+DE	+EF	+AB
5'	+AB	-BC	-DG
6'	+AB	-BC	+EF
7'	-DG	-FG	+AC
8'	-DG	-FG	-BC
9'	+AC	-BC	-FG
10'	+AC	-BC	+EF



Rys. 333.

i wówczas zadanie rozwiążemy w sposób wyżej wskazany. Płaszczyzna kierownicza wyznaczona jest prostymi s_1 i s_2 , poprowadzonymi przez dowolnie w przestrzeni obrany punkt S .

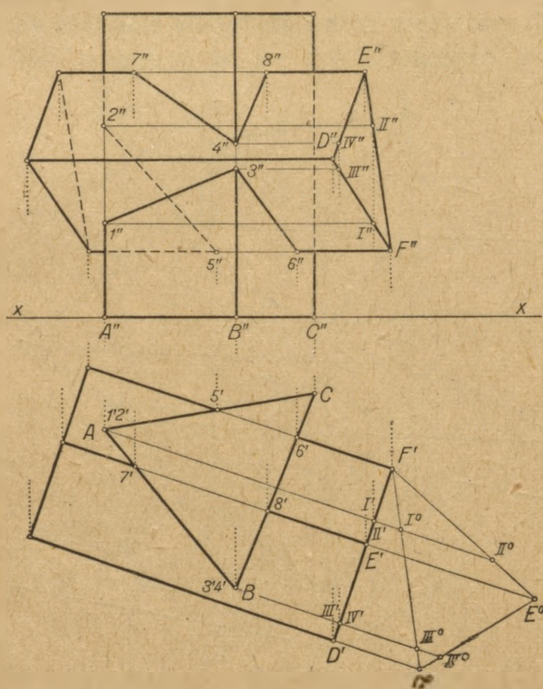
Przyjmijmy, że płaszczyzna kierownicza przecina płaszczyzny φ_1 i φ_2 w prostych p_1 i p_2 , to proste te wyznaczają kierunki

1	+AB	+AC	+DF
2	+AB	+AC	+EF
3	+AC	-BC	+DF
4	+AC	-BC	+EF
5	-ED	+DF	+AB
6	-ED	+DF	-BC
7	+EF	-ED	+AB
8	+EF	-ED	-BC

krawędzi płaszczyzn, poprowadzonych przez krawędzie boczne graniastosłupów, z płaszczyznami φ_1 i φ_2 . Krawędź AA_1 przebija drugi graniastosłup, w punktach 1 i 2, a krawędź CC_1 w punktach 3 i 4; krawędzie boczne DD_1 i EE_1 przebijają graniastosłup o podstawie ABC w punktach 5, 6 i 7, 8. Zestawimy tablicę, a z niej następstwo wierzchołków wielokąta przenikania:

+ 1, + 5, - 7, + 2, + 4, - 8, - 6, - 3 + 1.

d) Przykład przenikania dwóch graniastosłupów prostych, których krawędzie boczne są prostopadłe, widzimy na Rys. 334.



Rys. 334.

Rzut poziomy wielokąta przenikania schodzi się z rzutem poziomym graniastosłupa, którego krawędzie boczne są pionowe.

Celem dokładnego wyznaczenia rzutu pionowego punktów 1, 2, 3 i 4, w których te pionowe krawędzie przebijają drugi graniastosłup, wykonaliśmy kład podstawy DEF na płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez punkt F , aby móc wyznaczyć wysokości punktów I, II, III i IV, a względnie punktów 1, 2, 3 i 4.

Rzuty pionowe punktów przenikania zestawimy w tablicę, a z niej otrzymamy rzut pionowy wielokąta przenikania, a mianowicie:

+1, +3, +6, -8, +4, +7, -2, -5, -1.

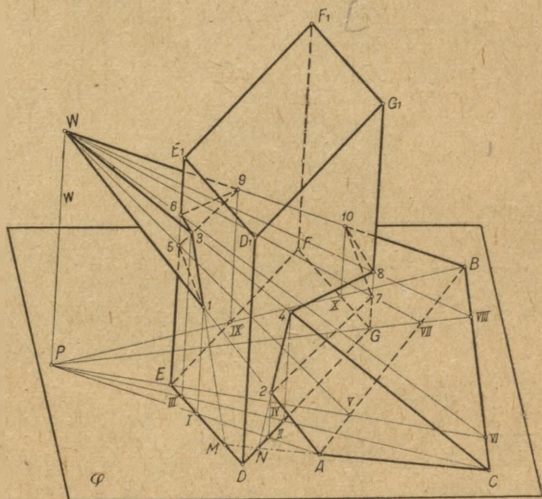
Czytelnik zechce uzupełnić rysunek wykreśleniem kreskowanych odcinków:

$1'' 5''$, $2'' 7''$ i $6'' 8''$.

111. Przenikanie się ostrosłupów z graniastosłupami.

a) Weźmy pod uwagę graniastosłup czworosieczny, stojący na płaszczyźnie φ (Rys. 335.) i trójsieczny ostrosłup W ,

k którego podstawą znajduje się również na płaszczyźnie φ . Aby wyznaczyć wzajemne przenikanie się tych wielościanów, poprowadźmy przez wierzchołek ostrosłupa prostą w , równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa. Płaszczyzny, przechodzące przez prostą w i krawędzie boczne ostrosłupa, przecinają graniastosłup w równoległobokach, a płaszczyzny, przechodzące przez prostą w i krawędzie boczne graniastosłupa, przecinają ostrosłup w trójkątach. Niechaj punkt P jest śladem prostej w na płaszczyźnie φ , to proste, łączące ten punkt z wierzchołkami wielokątów podstawy ostrosłupa i gra-



Rys. 335.

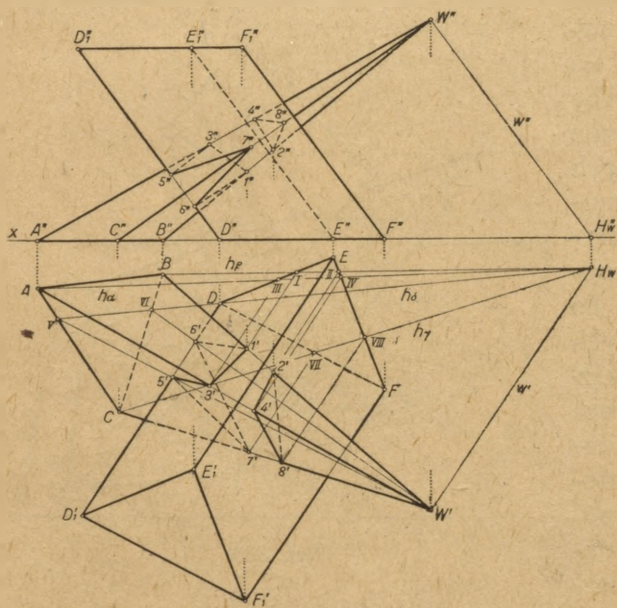
niastosłupa, przecinają ostrosłup w trójkątach. Niechaj punkt P jest śladem prostej w na płaszczyźnie φ , to proste, łączące ten punkt z wierzchołkami wielokątów podstawy ostrosłupa i gra-

niastostupa, są śladami płaszczyzn, przechodzących przez odpowiednie krawędzie boczne tych wielościanów, na płaszczyźnie φ . I tak płaszczyzna, poprowadzona przez prostą w i krawędź AW , przecina podstawę graniastostupa w punktach I i II , a ściany boczne graniastostupa w prostych równoległych do krawędzi bocznych, wychodzących z punktów I i II . Tym sposobem otrzymamy punkty przenikania 1 i 2 , a następnie dalsze aż do 9 i 10 , które zestawimy, jak w poprzednich przykładach w tablicę, a z niej zestawimy wielokąty przenikania zupełnego:

1	+AC	-AB	+DE
2	+AC	-AB	+DG
3	+AC	+BC	+DE
4	+AC	+BC	+DG
5	+DE	-EF	-AB
6	+DE	-EF	+BC
7	+DG	-FG	-AB
8	+DG	-FG	+BC
9	+BC	-AB	-EF
10	+BC	-AB	-FG

+1, +3, +6, -9, -5, -1 i
+2, +4, +8, -10, -7, -2.

b) Rys. 336. przedstawia, w rzutach prostokątnych na dwie płaszczyzny, przenikanie zupełne trójściennego ukośnego ostrostupa z takimże graniastostupem. Zadanie rozwiązane jest w sposób omówiony powyżej; czytelnikowi pozostawiono zestawienie tablicy, a z niej wielokątów przenikania dla obu rzutów.



Rys. 336.

rościennego ostrostupa, przenika się z trzonem wieży, będącym prostym ośmiościennym graniastostupem.

stupa z takimże graniastostupem. Zadanie rozwiązane jest w sposób omówiony powyżej; czytelnikowi pozostawiono zestawienie tablicy, a z niej wielokątów przenikania dla obu rzutów.

c) Przykład przenikania ostrostupa z graniastostupem, wzięty z budownictwa, podaje Rys. 337. Dach, kształcieczwo-

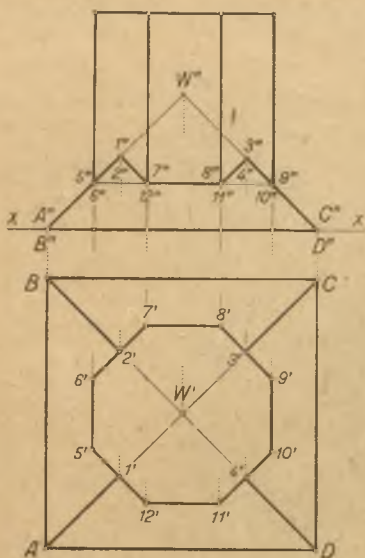
Rozwiązanie tego zadania w rzutach Monge'a przeprowadziliśmy na Rys. 338., który sam tłumaczy się dostatecznie jasno i nie wymaga słownych wyjaśnień.



Rys. 337. Dzwonnica przy cerkwi Uśpienia M. B.
w Czortkowie
(Zdjęcie fotograficzne prof. dr. Jana Sas Zubrzyckiego)

d) Jeżeli podstawy ostrosłupa i przenikającego się z nim graniastosłupa nie leżą na wspólnej płaszczyźnie, to metoda szukania poszczególnych wierzchołków przenikania nie ulega zmianie. Przykład takiego przenikania podaje Rys. 339. Podstawa ABC ostrosłupa leży na rzutni poziomej, podstawa DEF prostego graniastosłupa znajduje się na płaszczyźnie

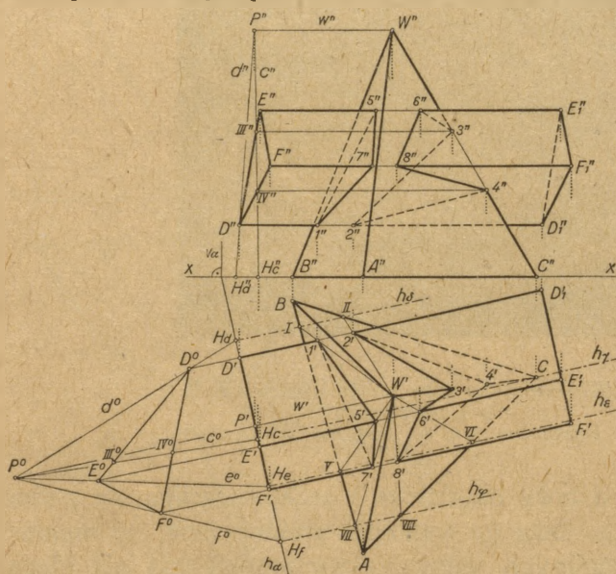
poziomo rzucającej α . Prosta w ($w' w''$), poprowadzona przez



Rys. 338.

wierzchołek równoległe do krawędzi bocznych graniastostupa, przebija płaszczyznę α w punkcie P ($P' P''$). Wykonajmy kład płaszczyzny α , wraz z podstawą graniastostupa i punktem P , na rzutnię poziomą. Płaszczyzna δ , poprowadzona przez w i krawędź DD_1 graniastostupa, przecina płaszczyznę α w prostej d . Kład d^0 prostej d , który uważany być może za jej rzut boczny, otrzymamy łącząc punkt P_0 z D_0 . Ślad poziomy h_δ płaszczyzny δ przecina podstawę ostrosłupa w punktach I i II ; proste $I W'$ i $II W'$ są rzutami poziomymi prostych, w których płaszczyz-

na δ , przechodząca przez krawędź DD_1 , przecina ostrosłup. Punk-



Rys. 339.

ty 1 ($1' 1''$) i 2 ($2' 2''$) są

punktami przebiecia się krawędzi DD_1 z ostrosłupem. Przy pomocy płaszczyzny γ , której ślad poziomy h_γ

przechodzi przez punkt C , a która poprowadzona jest przez krawędź boczną WC ostrosłupa, otrzymamy punkty

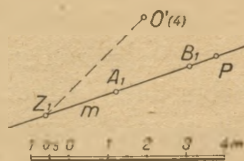
przebiecia się 3 ($3' 3''$) i 4 ($4' 4''$) tej krawędzi z graniastostupem.

tych promieni rzutów z płaszczyzną ε_1 . Punkt A_1 jest rzutem środkowym punktu A_2 na płaszczyznę ε_1 , punkt B_1 rzutem środkowym punktu B_2 . Prosta m_1 ($m_1' m_1''$), wyznaczoną punktami A_1 ($A_1' A_1''$) i B_1 ($B_1' B_1''$), będącą zarazem prostą przecięcia się płaszczyzny, przechodzącej przez prostą m_2 i punkt O , nazywamy rzutem środkowym prostej m_2 na płaszczyznę ε_1 .

Rzut środkowy Z_1 ($Z_1' Z_1''$) punktu niewłaściwego Z_2^∞ ($Z_2'^\infty Z_2''^\infty$) prostej m_2 ($m_2' m_2''$) otrzymamy jako punkt przebiecia się promienia z ($z' z''$), przechodzącego przez środek rzutów równolegle do prostej m_2 , z płaszczyzną obrazu ε_1 . Punkt Z_1 nazywać będziemy śladem zbiegu, albo punktem w z a j e m n y m prostej m_2 . Prosta w ($w' w''$), wyprowadzona przez środek rzutów równolegle do prostej m_1 ($m_1' m_1''$), przetnie prostą m_2 w punkcie W_2 ($W_2' W_2''$), który nazywamy punktem w z a j e m n y m prostej m_1 .

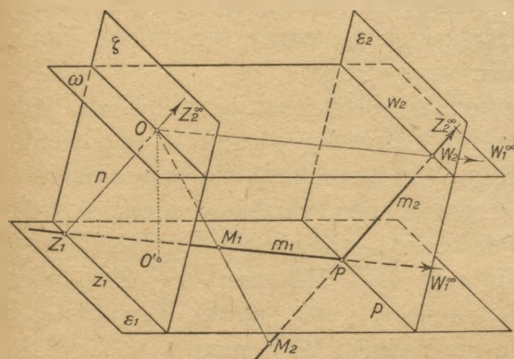
Rozpatrzmy z kolei pytanie zasadnicze, czy rzuty środkowe A_1 i B_1 punktów A_2 i B_2 prostej m_2 , wyznaczają położenie prostej tej w przestrzeni w sposób jednoznaczny, czyli innymi słowy, czy z rzutu środkowego m_1 prostej m_2 odtworzyć możemy położenie tej ostatniej w przestrzeni. Jest rzeczą natychmiast widoczną, że punkt A_1 ($A_1' A_1''$) jest rzutem nie tylko punktu A_2 , ale także wszystkich punktów promienia, przechodzącego przez ten punkt i środek rzutów O . Rzut środkowy A_1 punktu A_2 nie wyznacza więc położenia tego punktu w przestrzeni, a to samo odnosi się do punktu B_1 , jako rzutu środkowego punktu B_2 , a więc i do wszystkich punktów prostej m_1 , czyli do samej prostej m_1 . Widoczne stąd, że prosta m_1 , jako rzut środkowy prostej m_2 , nie wyznacza położenia tej prostej w przestrzeni w sposób jednoznaczny; prosta m_1 , jako krawędź płaszczyzny ε_1 z płaszczyzną φ , przechodzącą przez prostą m_2 i środek O , jest równocześnie rzutem wszystkich prostych, leżących na płaszczyźnie φ . Między punktami prostej m_1 znajdują się jednak dwa takie, które wyznaczają położenie prostej m_2 w przestrzeni w sposób jednoznaczny. Punktami tymi są: ślad P ($P' P''$) prostej m_2 na płaszczyźnie obrazu zwany śladem t ł o w y m i punkt w z a j e m n y Z_1 ($Z_1' Z_1''$). W istocie znając bowiem oba te punkty, znamy położenie prostej m_2 , która przejdzie przez punkt P równolegle do promienia OZ_1 .

Jeżeli płaszczyzna rysunku będzie tłem, punkt O (O' , 4) środkiem rzutów (Rys. 341.), punkt P śladem tłowym, a punkt Z_1 śladem zbiegu prostej m_2 , to położenie tej prostej w przestrzeni wyznaczone jest w sposób jednoznaczny. Wyprowadźmy bowiem w punkcie O' prostopadłą i odmierzymy na niej od płaszczyzny rysunku cztery jednostki długości, a otrzymany środek rzutów O połączmy z punktem Z_1 , to prosta, przechodząca przez punkt P równoległe do promienia OZ_1 , jest prostą m_2 .



Rys. 341.

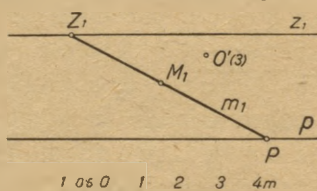
113. Wyznaczenie położenia płaszczyzny metodą rzutu środkowego. Przyjmijmy płaszczyznę ε_1 (Rys. 342.) jako płaszczyznę rzutów, tło, a punkt O jako środek rzutów. Do-



Rys. 342.

wolna płaszczyzna ε_2 przecina tło w prostej p , a płaszczyzna ξ , przechodząca przez O równoległe do ε_2 , w prostej z_1 . Prosta p , zwana śladem tłowym i prosta z_1 , zwana śladem zbiegu, wyznaczają położenie płaszczyzny ε_2 w sposób jednoznaczny.

Płaszczyzna ε_2 przechodzi bowiem przez ślad tłowy p , równoległe do płaszczyzny, wyznaczonej prostą z_1 i środkiem rzutów O . Jeżeli płaszczyzna tej kartki jest tłem, a położenie środka rzutów względem niej wyznaczone jest rzutem cechowanym O' (3) (Rys. 343.), to znając ślad tłowy p i ślad zbiegu z_1 płaszczyzny ε_2 , odtworzymy położenie jej w przestrzeni w sposób następujący: przez środek rzutów O i przez prostą z_1 wyobraźmy sobie przechodzącą płaszczyznę ξ ; płaszczyzna poprowadzona przez prostą p , równoległe do ξ , jest płaszczyzną ε_2 .



Rys. 343.

Jeżeli prosta m_2 (Rys. 342.) leży na płaszczyźnie ε_2 , to jej ślad tłowy P leży na śladzie tłowym p , a ślad zbiegu Z_1 na śladzie zbiegu z_1 tej płaszczyzny. Jeżeli punkt M_2 leży na prostej m_2 , to jego rzut środkowy M_1 leży na rzucie m_1 tej prostej. (Porównaj Rys. 342. z Rys. 343.).

Poprowadźmy przez środek rzutów O płaszczyznę $\omega \parallel \varepsilon_1$ (Rys. 342.) i oznaczmy prostą przecięcia się jej z płaszczyzną ε_2 literą w_2 , to prosta, łącząca punkt O z punktem przecięcia się W_2 prostej m_2 z w_2 , jest równoległą do m_1 .

114. Kolineacya środkowa. Rozważania powyższe naprowadzają nas na istnienie pewnych związków między punktami i prostymi płaszczyzn ε_1 i ε_2 , które to związki dadzą się ująć w następujące zdania:

a) Każdemu punktowi jednej płaszczyzny odpowiada jeden jedyny punkt na płaszczyźnie drugiej jako punkt przecięcia się promienia, przechodzącego przez ten punkt i przez środek rzutów O z płaszczyzną drugą.

b) Każdej prostej jednej płaszczyzny odpowiada jedna jedyna prosta na płaszczyźnie drugiej, przyczem odpowiednie proste (np. m_1 i m_2 w Rys. 342.) przecinają się w punktach, leżących na krawędzi obu płaszczyzn. Punktowi niewłaściwemu jednej prostej odpowiada punkt właściwy na prostej drugiej i odwrotnie. W odniesieniu do Rys. 342. punktowi Z_2^∞ prostej m_2 odpowiada punkt Z_1 na prostej m_1 ; punkt W_2 prostej m_2 odpowiada punktowi niewłaściwemu W_1^∞ prostej m_1 .

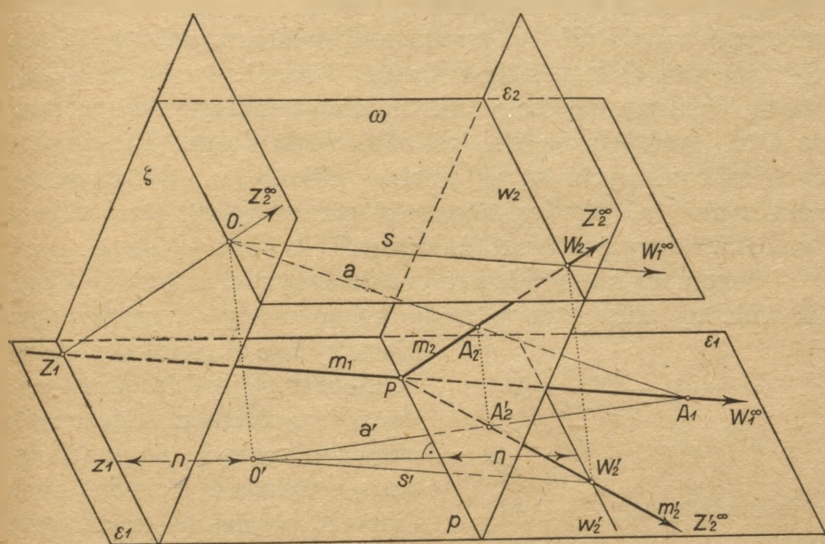
Jeżeli między układami punktów i prostych na dwóch płaszczyznach zachodzą wymienione pod a) i b) związki, to mówimy, że układy te są środkowo kolineacyjne, a związki same nazywamy kolineacyą środkową. Punkt O , w którym przecinają się proste, łączące odpowiadające sobie punkty obu układów (środek rzutów), nazywamy środkiem kolineacyi, a prostą p , na której leżą punkty przecięcia się odpowiednich prostych (krawędź płaszczyzn ε_1 i ε_2), zwiemy osią kolineacyi. Proste z_1 i w_2 , w których płaszczyzny ζ i ω , przechodzące przez środek kolineacyi O równoległe do ε_1 i ε_2 , te ostatnie przecinają, nazywać będziemy osiami wzajemnymi. Punkty, leżące na osiach wzajemnych, odpowiadają punktom niewłaściwym odnośnych płaszczyzn.

Z Rys. 342. czytamy: odległość środka kolineacyi od osi wzajemnej z_1 równa jest odległości osi wzajemnej w_2 od osi

kolineacyi p , a odległość środka kolineacyi od osi wzajemnej w_2 równa jest odległości osi wzajemnej z_1 od osi kolineacyi.

Podkreślić wkońcu należy, że słowem „kolineacja“ wyrażamy jedynie pewną grupę związków, właściwą metodzie rzutów środkowych, że w równej mierze możemy, zaniechając wprowadzenia nazwy „kolineacja“, posługiwać się mianem „rzutu środkowego“.

115. Rzuty układów środkowo kolineacyjnych. Przyjmijmy płaszczyzny ε_1 i ε_2 (Rys. 344.*), przecinające się w prostej p i punkt O , który uważajmy za środek kolineacyi (rzutów). Prostej m_2 na płaszczyźnie ε_2 odpowie na płaszczyźnie ε_1



Rys. 344.*

prosta m_1 , a punktowi A_2 prostej m_2 punkt A_1 prostej m_1 , przyczem oba punkty leżą na promieniu kolineacyi (rzutu), przechodzącym przez środek O . Płaszczyzna ζ , przechodząca przez środek O równoległa do ε_2 , przecina ε_1 w prostej z_1 , która jest jedną osią wzajemną kolineacyi (śladem zbiegu płaszczyzny ε_2); płaszczyzna ω , równoległa do ε_1 a przechodząca przez środek O , przecina płaszczyznę ε_2 w prostej w_2 , będącej drugą osią wzajemną kolineacyi (śladem zbiegu płaszczyzny ε_1). Prosta m_1 łączy swój ślad łłowy P ze śladem zbiegu Z_1 i jest równoległą do promienia OW_2 .

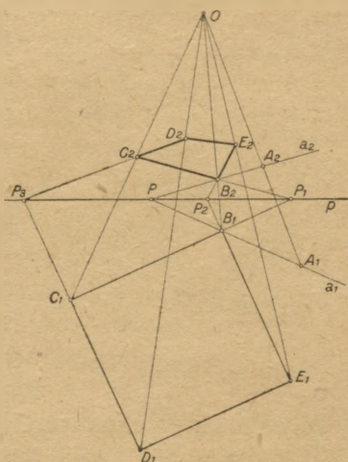
dwóch środkowo kolineacyjnych układów płaskich na dowolną płaszczyznę, daje dwa układy środkowo kolineacyjne, połączone na tej płaszczyźnie.

Środek, oś kolineacji i jedna oś wzajemna wyznaczają kolineację złączoną na jednej płaszczyźnie, w tem znaczeniu, że utworom płaskim w jednym układzie umożliwiają podporządkowanie odpowiednich utworów w układzie drugim. Na podstawie relacji, że odległość środka kolineacji od jednej osi wzajemnej równa jest odległości drugiej osi wzajemnej od osi kolineacji, wyznaczyć możemy, znając środek, oś kolineacji i jedną oś wzajemną, drugą oś wzajemną.

Gdy znamy środek, oś kolineacji i jedną parę punktów odpowiednich, to kolineacja jest również wyznaczona, a znalezienie obu osi wzajemnych z łatwością możliwe. Wróćmy do Rys. 345. i przypuśćmy, że punkt O' , oś p i punkty A_1 i A_2' są dane. W celu wyznaczenia osi wzajemnych w_2' i z_1 , wykreślimy przez A_1 dowolną prostą m_1 , to prosta m_2' , odpowiadająca jej w układzie ε_2 , przejdzie przez punkty P i A_2' . Punktowi niewłaściwemu W_1^∞ prostej m_1 , odpowie na prostej m_2' punkt W_2' , który otrzymamy, kreśląc przez O' promień równoległy do m_1 . Oś wzajemna w_2' przejdzie przez punkt W_2' równoległe do osi kolineacji p . Równoległa, wykreślona z punktu O' do m_2' , przetnie prostą m_1 w punkcie Z_1 , przez który przejdzie druga oś wzajemna z_1 . Oczywiście, że odległość O' od z_1 równa jest odległości osi w_2' od osi p .

116. Przykłady.

1. Dane są dwa układy środkowo kolineacyjne ε_1 i ε_2 , połączone na płaszczyźnie rysunku a wyznaczone środkiem O , osią kolineacji p i parą punktów odpowiednich A_1 i A_2 (Rys. 346.). W układzie ε_1 znajduje się kwadrat $B_1 C_1 D_1 E_1$; znaleźć odpowiadający mu kolineacyjnie czworokąt w układzie ε_2 .

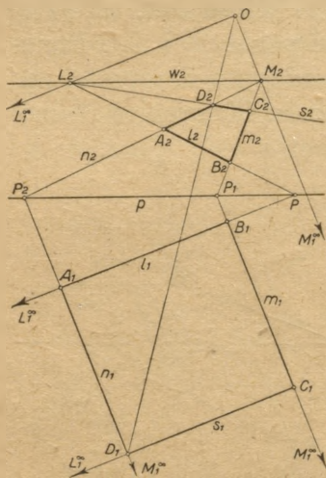


Rys. 346.

Prostej a_1 ; łączącej punkty A_1 i B_1 , odpowie w układzie ε_2 prosta a_2 , przechodząca przez punkty A_2 i P . Promień kolineacji $B_1 O$ przecina prostą a_2 w punkcie B_2 . Punkt P_1 , w którym prosta $B_1 C_1$ przecina oś kolineacji, połączymy z B_2 , a na przecięciu się otrzymanej prostej z promieniem kolineacji $O C_1$ leży punkt C_2 . Podobnie przy pomocy punktu P_2 otrzymamy punkt E_2 , a punkt P_3 umożliwi wyznaczenie punktu D_2 . Czworokąt $B_2 C_2 D_2 E_2$ odpowiada w układzie ε_2 kwadratowi $B_1 C_1 D_1 E_1$, przyjętemu w układzie ε_1 .

2. Dane są dwa układy środkowo kolineacyjne, złączone na płaszczyźnie rysunku, a wyznaczone środkiem, osią kolineacji i osią wzajemną w_2 . W układzie ε_1 leży kwadrat $A_1 B_1 C_1 D_1$; znaleźć odpowiadający mu kolineacyjnie czworokąt w układzie ε_2 (Rys. 347.)

Przez punkt przecięcia się P prostej l_1 z osią p przejdzie prosta l_2 . Punktowi niewłaściwemu L_1^∞ prostej l_1 odpowie punkt L_2 na osi w_2 , który otrzymamy, kreśląc przez środek O promień równoległy do l_1 . Wyznaczywszy w ten sam sposób punkt M_2 , odpowiadający kolineacyjnie punktowi M_1^∞ prostej m_1 , połączymy go z punktem P_1 , otrzymując prostą m_2 . Punkt L_2 odpowiada równocześnie punktowi niewłaściwemu prostej s_1 , która jest równoległą do l_1 , podobnie jak punkt M_2 odpowiada punktowi niewłaściwemu prostej n_1 . Sposób otrzymania wierzchołków A_2, B_2, C_2 i D_2 szukanego czworokąta tłómaczy zresztą Rys. 347.



Rys. 347.

3. Dane są rzuty czworościennego ostrosłupa ukośnego, którego podstawa leży na rzutni poziomej, a nadto dana jest płaszczyzna pionowo rzucająca α ($h_\alpha v_\alpha$), przecinająca ten ostrosłup (Rys. 348.).

Jest rzeczą natychmiast widoczną, że czworokąt przekroju ostrosłupa jest rzutem środkowym czworokąta podstawy na płaszczyznę sieczną α , czyli innymi słowy, że między podstawą a przekrojem ostrosłupa zachodzi kolineacja środkowa. Środkiem tej kolineacji jest wierzchołek W ostrosłupa, osią

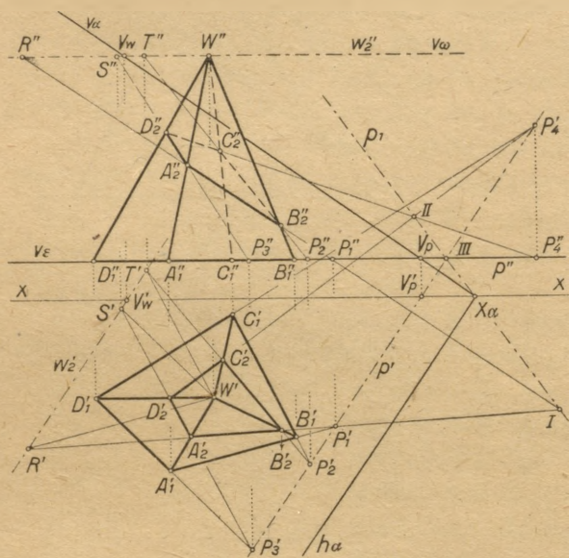
podstawa znajduje się na płaszczyźnie ε równoległej do rzutni poziomej, z płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$) (Rys. 349.).

Wyznamy krawędź p ($p' p''$) płaszczyzn α i ε , a także prostą przecięcia się w_2 ($w_2' w_2''$) płaszczyzny α i płaszczyzny

poziomej ω , przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa. Na rzutni poziomej otrzymamy złączoną kolineację dwóch układów płaskich, wyznaczoną:

środkiem W' , osią p' i osią wzajemną w_2' . W zupełnie analogiczny sposób jak w zadaniu poprzednim — jednak bez pośrednictwa osi wzajemnej z_1 —

wyznamy punkty A_2', B_2', C_2' i D_2' , odpowiadające kolineacyjnie punktom A_1', B_1', C_1' i D_1' . I tak np. równoległa do $A_1' B_1'$, wykreślona przez punkt W' , przecina oś wzajemną w_2' w punkcie R' , który połączony z punktem P_1 daje bok $A_2' B_2'$ rzutu poziomego czworokąta przekroju. Rzut pionowy $A_2'' B_2'' C_2'' D_2''$ czworokąta przekroju otrzymać możemy — uwzględniając, że czworokąt leży na płaszczyźnie α ($h_\alpha v_\alpha$) — zapomocą tworzących tej płaszczyzny. W Rys. 349. otrzymaliśmy żądane punkty, przy pomocy rzutów pionowych prostych $P_1 R, P_2 T$ i $P_3 S$.



Rys. 349.

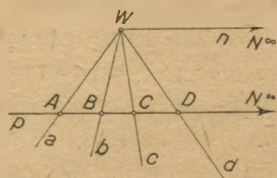
ROZDZIAŁ DRUGI

LINIE KRZYWE I POWIERZCHNIE

§ 10. KRZYWE STOŻKOWE

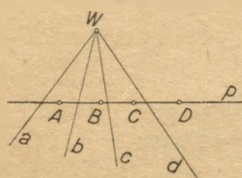
117. Pęki i szeregi jednokreślne. Punktem wyjścia dla naszych rozważań stanowiąc będą: pęk promieni, który oznaczamy symbolem $W(a, b, c...)$, gdzie W jest wierzchołkiem, zaś $a, b, c...$ promieniami, albo, jak się też wyrażamy, elementami tego pęku i szereg punktów, który oznaczamy symbolem $p(A, B, C...)$. Litera p oznacza tu prostą czyli t. zw. podstawę, a litery w nawiasie są punktami tej prostej, stanowiącymi elementy szeregu. Pęki promieni i szeregi punktów nazywamy utworami zasadniczymi.

Miedzy elementami pęku $W(a, b, c, d... n)$ i szeregu $p(A, B, C, D... N^\infty)$, powstałego z przecięcia pęku prostą p (Rys. 350.), zachodzi ten prosty związek, że każdemu elementowi w pęku, odpowiada jeden jedyny element w szeregu i odwrotnie. Punkty szeregu leżą na odpowiadających im promieniach pęku, a promienie pęku przechodzą przez odpowiadające im elementy szeregu. Promień n , odpowiadający punktowi niewłaściwemu N^∞ podstawy p , jest do niej równoległy. Mówimy, że pęk $W(a, b, c...)$ jest jednokreślny i perspektywiczny z szeregiem $p(A, B, C...)$ i wzajemnie, szereg $p(A, B, C...)$ jest jednokreślny i perspektywiczny z pękiem $W(a, b, c...)$. Słowo „jednokreślny“ wyraża jedno — jednoznaczność między



Rys. 350.

elementami pęku i szeregu, a słowo „perspektywiczny“ określa wzajemne ich położenie, to mianowicie, że elementy szeregu leżą na odpowiadających im elementach pęku, względnie, że promienie pęku przechodzą przez odpowiadające im punkty szeregu. Jeśli, zachowując rozmieszczenie punktów na podstawie p i wzajemne położenie elementów pęku $W(a, b, c...)$, utwory te rozdzielimy, np. przez przesunięcie na płaszczyźnie



Rys. 351.

(Rys. 351.), to i wówczas każdemu elementowi jednego utworu odpowie jeden jedyny element w utworze drugim, jednak nie leżący na nim, ani przezeń nie przechodzący. Zmieniliśmy wzajemne położenie obu utworów, nie znosząc jednak odpowiedniości jedno jednoznacznej, zachodzącej między ich elementami. Mówimy wówczas, że pęk $W(a, b, c...)$ jest „jednokreślny“ z szeregiem $p(A, B, C...)$, pomijając określenie „perspektywiczny“, jako w tym wypadku nie zachodzące.

Na oznaczenie związku jednokreślności wraz z perspektywicznością używamy znaku $\bar{\wedge}$, na określenie zaś jednokreślności znaku $\bar{\cap}$. Rys. 350. przedstawia więc:

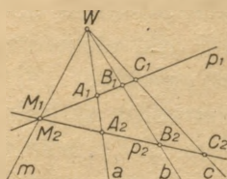
$$W(a, b, c...) \bar{\wedge} p(A, B, C...)$$

(czytaj: pęk o wierzchołku W i elementach $a, b, c...$ perspektywiczny z szeregiem o podstawie p a o elementach $A, B, C...$). Rys. 351. wyraża pęk promieni jednokreślny z szeregiem punktów, czyli symbolicznie: $W(a, b, c...) \bar{\cap} p(A, B, C...)$.

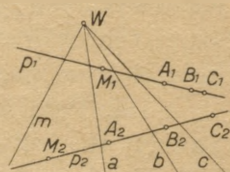
Pojęcie perspektywiczności mieści w sobie już pojęcie jednokreślności, czyli dwa utwory perspektywiczne są zawsze i jednokreślne, gdy przeciwnie, dwa utwory jednokreślne nie muszą być równocześnie perspektywiczne. „Jednokreślność“ charakteryzuje rodzaj odpowiedniości między elementami dwóch utworów, tem mianowicie, że elementowi w jednym utworze odpowiada jeden element w utworze drugim. Perspektywiczność charakteryzuje natomiast wzajemne położenie elementów w dwóch utworach jednokreślnych.

Związki perspektywiczności, względnie jednokreślności, założyć się dadzą także między utworami zasadniczymi tego samego rodzaju. I tak dwa szeregi, powstałe z przecięcia pęku promieni $W(a, b, c...)$ prostymi p_1 i p_2 (Rys. 352 a.), są szeregami jednokreślnymi z tytułu odpowiedniości swoich elemen-

tów. Z racyi swego wzajemnego położenia, gdzie odpowiadające sobie punkty leżą na promieniach pęku, szeregi owe są równocześnie perspektywiczne. Ponieważ każdej z tych dwóch szeregów jest perspektywiczny, a więc i jednokreślny z pękiem promieni $W(a, b, c...)$, więc otrzymamy następujący łańcuch utworów:



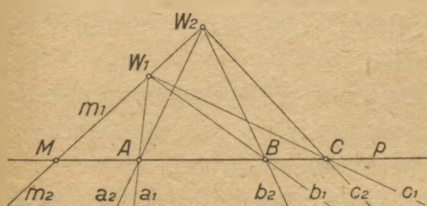
Rys. 352 a.



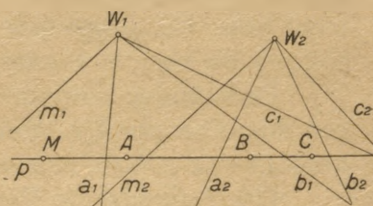
Rys. 352 b.

$W(a, b, c...) \bar{\wedge} p_1(A_1, B_1, C_1...) \bar{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2...)$. Punkt przecięcia się prostych p_1 i p_2 jest elementem wspólnym obu szeregów. Przez wzajemne przesunięcie podstaw p_1 i p_2 (Rys. 352 b.) zniszczymy położenie perspektywiczne; otrzymane szeregi będą jednokreślne, a ich punkt przecięcia się nie będzie wspólnym elementem obu szeregów. Jeżeli punkt przecięcia się podstaw dwóch jednokreślnych szeregów jest elementem wspólnym obu szeregów, to szeregi te są perspektywiczne, a wówczas proste łączące ich odpowiednie punkty są elementami jednego pęku promieni.

Dwa pęki $W_1(a_1, b_1, c_1...)$ i $W_2(a_2, b_2, c_2...)$ (Rys. 353 a.), powstałe z połączenia punktów W_1 i W_2 z elementami szeregu



Rys. 353 a.



Rys. 353 b.

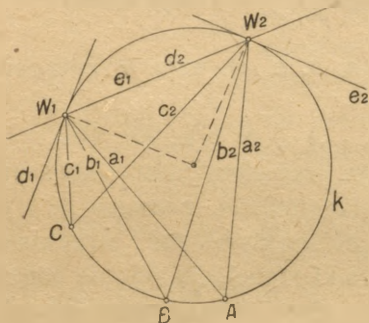
$p(A, B, C...)$, są pękami jednokreślnymi, a z tytułu swego wzajemnego położenia także i perspektywicznymi. Mamy łańcuch utworów perspektywicznych, a mianowicie:

$$p(A, B, C...) \bar{\wedge} W_1(a_1, b_1, c_1...) \bar{\wedge} W_2(a_2, b_2, c_2...).$$

Promień, łączący wierzchołki obu pęków, jest elementem wspólnym obu pęków, a przestanie nim być, gdy oba te pęki wzajemnie przesuniemy (Rys. 353 b.). W tym drugim wypadku oba

pęki będą tylko jednokreślne. I nawzajem, jeżeli w dwóch jednokreślnych pękach promieni stwierdzimy, że promień łączący ich wierzchołki jest elementem wspólnym obu pęków, to pęki te są perspektywiczne.

118. Pęki jednokreślne w kole. Uważajmy dwa dowolne punkty W_1 i W_2 (Rys. 354.) koła k za wierzchołki pęków, których elementy przechodzą przez punkty $A, B, C \dots$ tego koła. Pośrednictwo koła stwarza między elementami pęków $W_1 (a_1, b_1, c_1 \dots)$ i $W_2 (a_2, b_2, c_2 \dots)$ tego rodzaju zależność, że każdemu promieniowi w jednym pęku odpowiada jeden promień w pęku drugim. Ale taką zależność między elementami dwóch pęków określiliśmy mianem jednokreślności, powiemy więc, że pęki $W_1 (a_1, b_1, c_1 \dots)$ i



Rys. 354.

$W_2 (a_2, b_2, c_2 \dots)$ są jednokreślne.

Pęki te nie są jednakże perspektywiczne, gdyż promień łączący wierzchołki W_1 i W_2 nie jest elementem wspólnym obu pęków. Promieniowi temu, uważanemu za element e_1 pęku $W_1 (a_1, b_1 \dots)$, odpowie promień e_2 w pęku $W_2 (a_2, b_2 \dots)$ styczny w punkcie W_2 do koła k . Promieniowi $W_1 W_2 = d_2$, uważanemu za element pęku W_2 , odpowiada w pęku $W_1 (a_1, b_1 \dots)$ promień d_1 , styczny do koła k w punkcie W_1 .

Reasumując powiemy: *dwa pęki, których promienie łączą dowolne punkty koła z dwoma jego punktami przyjętymi za wierzchołki, są pękami jednokreślnymi.*

119. Twierdzenie Pascala. Sześć punktów $A B C D E F$, dowolnie przyjętych na kole, tworzy sześciokąt wpisany w tę krzywą. Bez względu na wzajemne rozmieszczenie tych punktów nazywać będziemy boki AB i DE , BC i EF , CD i AF bokami przeciwległymi sześciokąta.

Uważajmy punkty A i C w sześciokącie $A B C D E F$, wpisanym w koło k (Rys. 355.), za wierzchołki dwóch pęków, których promienie przechodzą przez dalsze cztery punkty. Na podstawie tego, cośmy powiedzieli w ustępie poprzednim, otrzymane pęki $A (b_1, d_1, e_1, f_1)$ i $C (b_2, d_2, e_2, f_2)$ są jednokreślne.

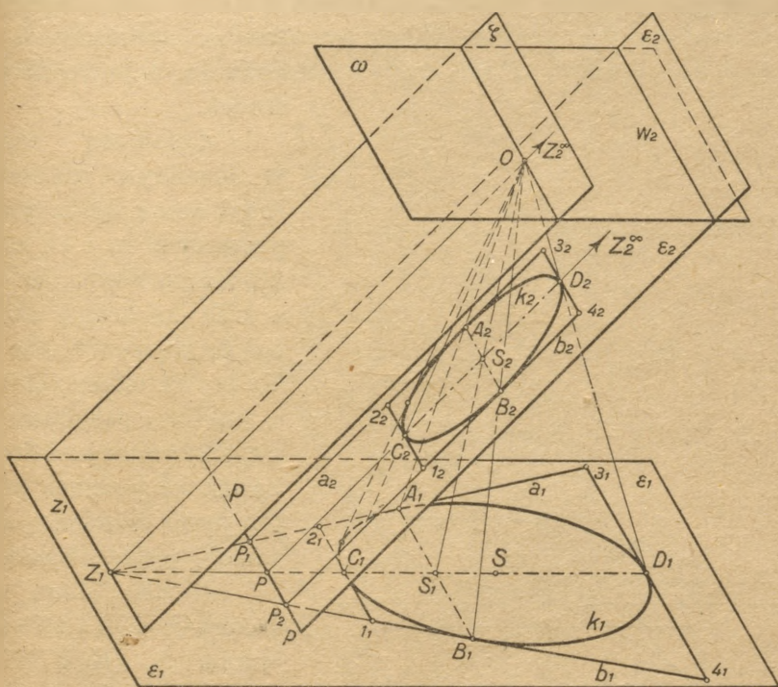
$\widehat{ABC}$	$\widehat{DEF}$	
AB	$DE... I$	} $p.$
BC	$EF... II$	
CD	$AF... III$	

120. Kolineacya środkowa koła. W ust. 115. rozważyliśmy kolineacyę środkową dwóch układów płaskich ε_1 i ε_2 w przestrzeni, względnie dwóch układów złączonych na jednej płaszczyźnie, a jako przykłady utworów środkowo kolineacyjnych braliśmy pod uwagę wielokąty (Rys. 346.). Przedmiotem naszych roztrząsań uczynimy z kolei kolineacyę środkową koła, a mogące zachodzić tu trzy przypadki rozpatrzmy każdy z osobna.

a) *Koło k_1 , leżące na płaszczyźnie ε_1 , nie przecina osi wzajemnej z_1* (Rys. 357.). Każdemu punktowi koła odpowie na płaszczyźnie ε_2 jeden punkt, jako punkt przebiecia się promienia, przechodzącego przez ten punkt koła i środek kolineacyi (promień kolineacyi) z płaszczyzną ε_2 . Ponieważ tylko punktom leżącym na osi wzajemnej z_1 odpowiadają na płaszczyźnie ε_2 punkty niewłaściwe, a koło k_1 , wedle założenia, nie posiada z osią z_1 żadnych punktów wspólnych, więc miejscem geometrycznem punktów, odpowiadających na płaszczyźnie ε_2 punktom koła k_1 , jest linia krzywa k_2 , nie posiadająca żadnych punktów niewłaściwych. Każdej prostej na płaszczyźnie ε_1 , przecinającej koło k_1 w dwóch punktach, odpowiada na płaszczyźnie ε_2 prosta, przecinająca leżącą tam linię k_2 również w dwóch punktach. Każdej parze stycznych, wykreślonych z dowolnych punktów do koła k_1 , odpowie w układzie ε_2 para stycznych, poprowadzonych do linii k_2 z punktów odpowiadających poprzednim. Krzywą nie posiadającą żadnych punktów niewłaściwych, którą prosta przecina w dwóch punktach, a do której z dowolnego punktu poprowadzić można dwie styczne, nazwaliśmy w ust. 96. elipsą. Stąd dochodzimy do twierdzenia, że kołu, należącemu do układu ε_1 i nie mającemu żadnego punktu wspólnego z osią wzajemną z_1 , odpowiada w układzie ε_2 elipsa,

czyli innemi słowy, że rzut środkowy koła, które nie przecina śladu zbiegu z_1 , jest elipsą.

Celem wyznaczenia pary średnic sprzężonych elipsy k_2 opiszemy na kole k_1 taki czworobok, którego rzut środkowy na płaszczyznę ε_2 będzie równoległobokiem, opisanym na elipsie k_2 . Punkty styczności opisanego na kole k_1 czworoboku, rzucone z punktu O , jako środka kolineacyi, na płaszczyznę ε_2



Rys. 357.*

dadzą punkty styczności opisanego na elipsie k_2 równoległoboku, które połączone stanowią parę średnic sprzężonych elipsy (ust. 96.). Czworobok (trapez) opisany na kole k_1 , którego rzut środkowy na płaszczyznę ε_2 jest równoległobokiem, znajdziemy w sposób następujący: Przez środek S koła k_1 poprowadzimy prostą do osi wzajemnej z_1 , a z punktu Z_1 styczne a_1 i b_1 do koła. W punktach C_1 i D_1 wykreślone styczne będą równoległe do $z_1 \parallel p$ i utworzą wraz ze stycznymi a_1 , b_1 trapez równoramienny $1_1 2_1 3_1 4_1$, opisany na kole i styczny do niego w punktach A_1 , B_1 , C_1 , D_1 . Rzuty środkowe a_2 i b_2

stycznych a_1 i b_1 przejdą przez punkty P_1 i P_2 równoległe do prostej OZ_1 , a rzuty $1_2 2_2$ i $3_2 4_2$ prostych $1_1 2_1$ i $3_1 4_1$ będą do siebie równoległe i równoległe do osi kolineacji p . Tym sposobem otrzymamy równoległobok $1_2 2_2 3_2 4_2$ opisany na elipsie, jako rzut środkowy trapezu $1_1 2_1 3_1 4_1$. Punktom styczności A_1, B_1, C_1, D_1 czworoboku opisanego na kole k_1 , odpowiedzą punkty styczności A_2, B_2, C_2, D_2 boków równoległoboku opisanego na elipsie k_2 . Odcinki $A_2 B_2$ i $C_2 D_2$ stanowią parę

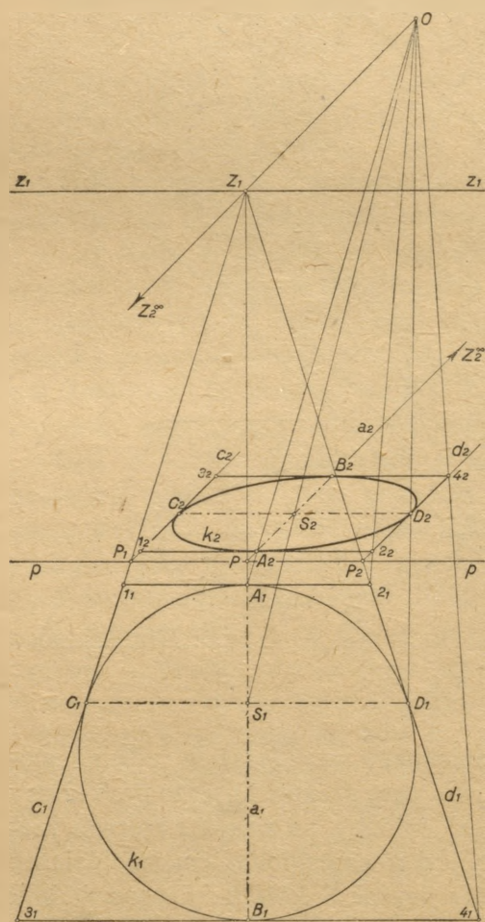
średnic sprzężonych elipsy k_2 , a punkt S_2 jej środek.

Zapomocą rzutu w dowolnym kierunku i nado dowolną płaszczyznę płaszczyzn ε_1 i ε_2 , albo zapomocą kładu jednej z nich na drugą około osi p , złączymy oba układy na jednej płaszczyźnie, przyczem związki kolineacji środkowej, zachodzące między tymi układami, pozostają nienaruszone.

Niechaj dane są: środek O , oś p i oś wzajemna z_1 (Rys. 358.) dwóch układów środkowo kolineacyjnych, złączonych na płaszczyźnie rysunku. Wyznamy parę średnic sprzężonych elipsy, odpowiadającej kolineacyjnie kołu k_1 , należącemu do układu ε_1 .

Idąc śladem przeprowadzonego wyżej rozumowania,

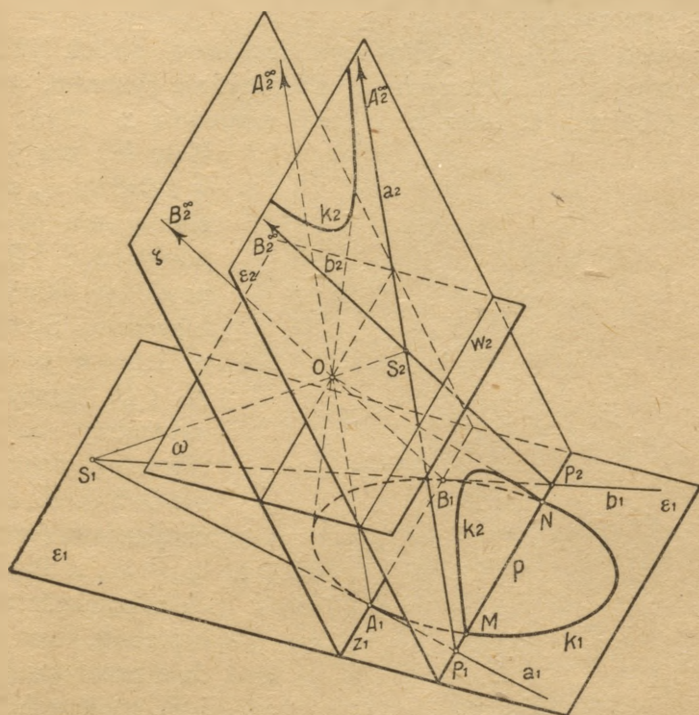
wykreślmy przez środek koła k_1 prostą $a_1 \perp z_1$ i wyznaczmy trapez równoramienny $1_1 2_1 3_1 4_1$, opisany na



Rys. 358.

kole i styczny do niego w punktach A_1, B_1, C_1, D_1 . Prostym a_1, d_1 i c_1 odpowiedzą w układzie elipsy (ε_2) proste a_2, d_2 i $\check{c}_2$ równoległe do promienia OZ_1 , a przechodzące przez punkty P, P_2 i P_1 . Punktom A_1, B_1 i S_1 prostej a_1 odpowiedzą punkty A_2, B_2 i S_2 prostej a_2 , leżące parami z poprzednimi na promieniach kolineacyi, które przechodzą przez środek O . Punkt S_2 jest środkiem elipsy k_2 , a odcinek $C_2 D_2 \parallel C_1 D_1$ średnicą, sprzężoną ze średnicą $A_2 B_2$.

b) Koło k_1 , leżące na płaszczyźnie ε_1 , przecina oś wzajemną z_1 w dwóch punktach (Rys. 359.*). Podobnie jak w przy-

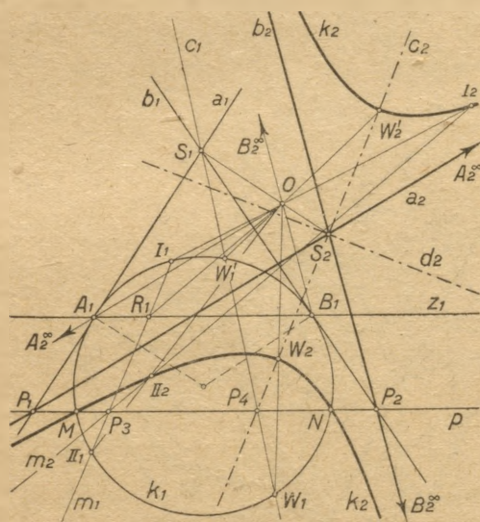


Rys. 359.*

padku poprzednim, rzut koła na płaszczyznę ε_2 jest miejscem geometrycznym punktów przebiecia się promieni rzutów, przechodzących przez środek O z płaszczyzną ε_2 . Promień OA_1 , leżący na płaszczyźnie $\zeta \parallel \varepsilon_2$, jest równoległy do tej ostatniej, podobnie jak promień OB_1 . Z wyjątkiem tych dwóch promieni, które przebijają płaszczyznę ε_2 w punktach niewłaściwych A_2^∞ i B_2^∞ , wszystkie inne przebijają płaszczyznę ε_2 w punk-

tach właściwych. Krzywa tedy k_2 , będąca rzutem koła, posiada w tym wypadku dwa punkty niewłaściwe, składa się z dwóch gałęzi i zwie się *hiperbolą*. Podobnie jak elipsę, przecina dowolna prosta hiperbolę w dwóch punktach, a z dowolnego punktu wykreślić do niej można dwie styczne. Każdej stycznej do koła k_1 odpowie styczna do hiperboli k_2 ; stycznymi a_1 i b_1 do koła w punktach A_1 i B_1 , odpowiedzą styczne a_2 i b_2 , w punktach niewłaściwych hiperboli, zwane jej asymptotami. Punkt przecięcia się S_2 asymptot, odpowiadający punktowi przecięcia się S_1 stycznych a_1 i b_1 , nazywamy *środkiem* hiperboli.

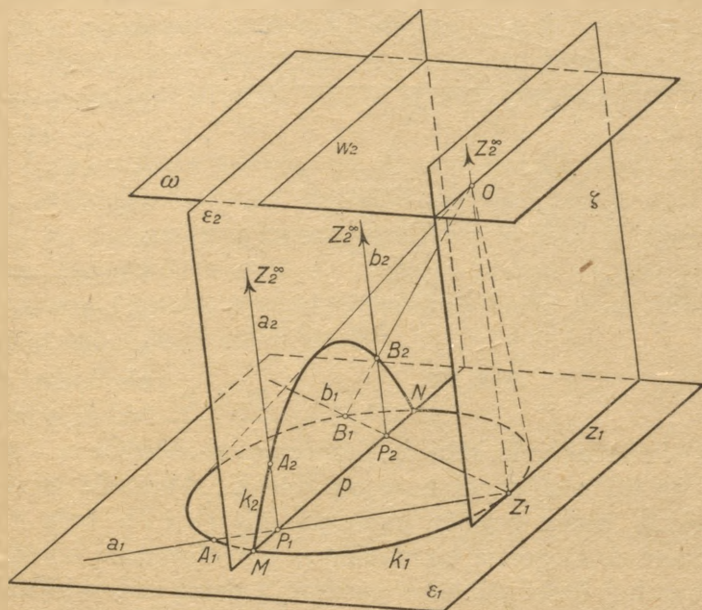
Niech daną jest kolineacja środkowa dwóch układów płaskich ε_1 i ε_2 , złączonych na płaszczyźnie rysunku, wyznaczona środkiem O , osią p i osią wzajemną z_1 (Rys. 360.).



Rys. 360.

Koło k_1 , przyjętemu w układzie ε_1 , a przecinającemu oś z_1 w punktach A_1 i B_1 , odpowie w układzie ε_2 hiperbola. Stycznymi a_1 i b_1 w punktach A_1 i B_1 odpowiedzą asymptoty a_2 i b_2 , równoległe do promienia OA_1 i OB_1 , a przechodzące przez punkty P_1 i P_2 . Punktowi S_1 odpowie środek S_2 hiperboli, która przejdzie przez punkty M i N , w których oś kolineacji p przecina koło. Poszczególne punkty hiperboli znaleźć możemy przy pomocy prostych, przecinających koło w dwóch punktach. I tak np. prostej m_1 odpowiada m_2 , równoległa do OR_1 i przechodząca przez punkt P_3 , a punktom I_1 i II_1 koła, punkty I_2 i II_2 hiperboli. Dvusieczne c_2 i d_2 kątów, jakie tworzą asymptoty, są osiami symetrii prostokątnej hiperboli i zwą się jej osiami. Punkty przecięcia się dwusiecznej c_2 z hiperbolą tworzą jej wierzchołki.

c) Koło k_1 , leżące na płaszczyźnie ε_1 , jest styczne do osi wzajemnej z_1 (Rys. 361.*). Ponieważ prostej z_1 odpowiada na płaszczyźnie ε_2 prosta niewłaściwa, więc krzywa, odpowiadająca kolineacyjnie kołu jest styczną do prostej niewłaściwej płaszczyzny ε_2 i zwie się *parabolą*. Punktowi styczności Z_1



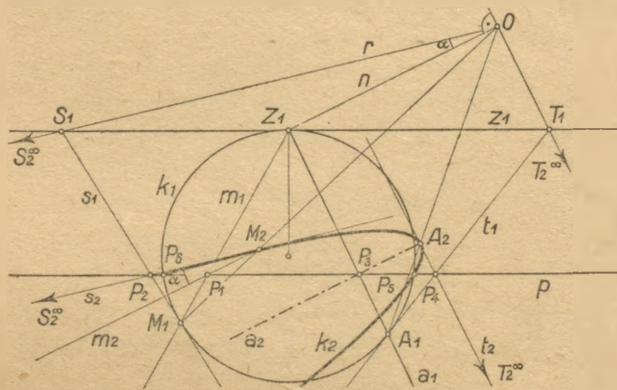
Rys. 361.*

koła k_1 z osią wzajemną z_1 , odpowiada punkt niewłaściwy Z_2^∞ paraboli, który jest jej punktem styczności z prostą niewłaściwą płaszczyzny ε_2 . Pętkowi promieni Z_1 ($a_1, b_1 \dots$) odpowiada na płaszczyźnie ε_2 pęk prostych równoległych $a_2, b_2 \dots$, a punktem $A_1, B_1 \dots$ koła k_1 , punkty $A_2, B_2 \dots$ paraboli k_2 .

Rozpatrzmy jeszcze kolineację koła z parabolą w przypadku, gdy oba układy połączone są na jednej płaszczyźnie (Rys. 362.). Prostej m_1 odpowiada prosta m_2 , równoległa do promienia OZ_1 , punktowi M_1 koła k_1 punkt M_2 paraboli, a stycznej s_1 do koła w punkcie M_1 styczna s_2 do paraboli w punkcie M_2 . Styczna s_2 będzie równoległa do promienia r , łączącego środek kolineacji O z punktem przecięcia się S_1 stycznej s_1 z osią wzajemną z_1 . Z Rys. 362 widzimy, że:

$$\star S_2 m_2 = \star r n = \alpha.$$

Wykreślmy w punkcie O prostą $OT_1 \perp n$, a z punktu T_1 styczną t_1 do koła. Prostej $Z_1 A_1 \equiv a_1$ odpowie średnica a_2 paraboli, a stycznej t_1 styczna t_2 do paraboli w punkcie A_2 , prostopadła do średnicy a_2 . Taką średnicę, przecinającą parabolę



Rys. 362.

w punkcie, w którym poprowadzona styczna jest do owej średnicy prostopadłą, nazywamy osią paraboli, a ów punkt wierzchołkiem. Prosta a_2 jest więc osią, a punkt A_2 wierzchołkiem paraboli k_2 , odpowia-

dającej kolineacyjnie kołu k_1 , leżącemu w układzie ε_1 i styczniemu do osi wzajemnej z_1 w punkcie Z_1 . Parabola przejdzie oczywiście przez punkty przecięcia się P_5 i P_6 koła z osią kolineacji p . Dogodną konstrukcję, umożliwiającą wyznaczenie dowolnej ilości punktów paraboli z danej osi, wierzchołka i jednego punktu, poznamy w ust. 121.f.

Z rozważań powyższych widoczne jest, że między kołem z jednej strony, a elipsą, hiperbolą i parabolą z drugiej, zachodzi ściśle pokrewieństwo, że krzywe te otrzymać się mianowicie dadzą za pośrednictwem kolineacji środkowej z koła. Wszystkie one wraz z kołem posiadają dwie własności wspólne: a) prosta przecina każdą z nich w dwóch punktach i b) z dowolnego punktu poprowadzić można do każdej z nich dwie styczne. Koło, elipsę, hiperbolę i parabolę określamy na zasadzie tych dwóch własności mianem krzywych stopnia drugiego, oznaczając je wspólnym symbolem c^2 . Krzywe te nazywamy też przekrojami stożkowymi lub krótko stożkowymi.

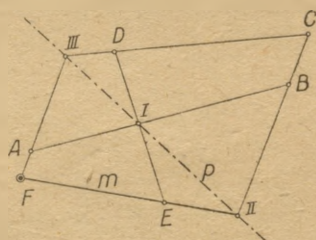
121. Twierdzenie Pascala w zastosowaniu do elipsy, hiperboli i paraboli. Z pojęcia kolineacji środkowej i z jej podstawowych własności wynika, że sześciokątowi wpisanemu

w koło, leżące na płaszczyźnie ε_1 , odpowie w układzie drugim sześciokąt, wpisany w tę krzywą stożkową c^2 , która odpowiada kolineacyjnie kołu. W ten sposób własności sześciokąta wpisanego w koło przechodzą na własności sześciokąta wpisanego w każdą krzywą stożkową, a twierdzenie Pascala przyjmuje formę ogólną i brzmi: *Sześć punktów krzywej stopnia drugiego wyznacza sześciokąt wpisany w tę krzywą, a boki przeciwległe tego sześciokąta przecinają się w trzech punktach, leżących na linii prostej*. Prostą tę nazywać będziemy prostą Pascala.

Z twierdzenia powyższego wynika bezpośrednio następujące: *krzywa stożkowa wyznaczona jest pięciu punktami*. W istocie bowiem przyjąwszy punkty A, B, C, D, E (Rys. 363.), znajdziemy punkt szósty F i każdy następny przy pomocy twierdzenia Pascala, przez zastosowanie wzoru połączeń, podanego w ust. 119., a mianowicie:

$A B C$	$D E F$	
$A B$	$D E \dots I$	} $p.$
$B C$	$E F \dots II$	
$C D$	$A F \dots III$	

Boki $A B$ i $D E$ sześciokąta, którego pięć punktów jest znanych, przecinają się w punkcie I . Z drugiej pary boków wyznaczony jest bok $B C$, co zaś do boku $E F$, to zauważmy, że jeżeli przez punkt E krzywej c^2 poprowadzimy dowolną prostą, to prosta ta przecina tę krzywą jeszcze w jednym punkcie. Punkt ten, na razie nie wyznaczony, niechaj będzie właśnie szukany punktem F . Bok $E F$ będzie więc dowolną prostą m , wykreśloną przez punkt E , a przecinającą bok $B C$ w punkcie II . Punkty I i II wyznaczają prostą Pascala p , którą bok $C D$ przecina w punkcie III , i przez który to punkt przejść musi, zgodnie z twierdzeniem Pascala, bok $A F$. Punkt przecięcia się więc prostej m z prostą $A III$ jest szukany punktem F . W ten sposób wykazaliśmy, że znając pięć punk-



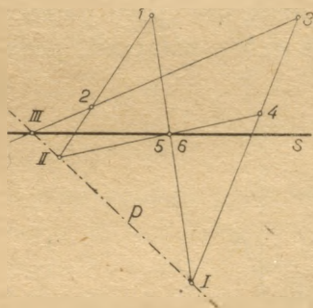
Rys. 363.

tów krzywej c^2 , znaleźć możemy każdą dowolną ilość dalszych jej punktów, czyli innymi słowy, że pięć punktów wyznacza krzywą stopnia drugiego.

Twierdzenie Pascala pozostaje w mocy, gdy jeden albo i dwa wierzchołki sześciokąta są punktami niewłaściwymi, stosuje się więc zarówno do paraboli jak i hiperboli. To samo odnosi się do przypadku, gdy dwa wierzchołki sześciokąta wpisanego w c^2 schodzą się, t. j. gdy jeden lub więcej boków przejdzie w położenie graniczne i stanie się stycznymi stożkowej.

Kilka zadań sprawę najlepiej wyjaśni.

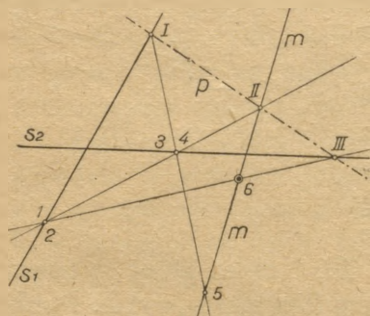
a) Danych jest pięć punktów krzywej c^2 ; wykreślić w punkcie 5 styczną (Rys. 364.). Styczna w punkcie 5 zawiera także i punkt 6, łączy bowiem dwa, bezpośrednio po sobie następujące, punkty krzywej. Wyznamy punkty I i II prostej Pascala p , a punkt przecięcia się III tej prostej z bokiem 2 3 połączymy z punktem 5. Prosta s rozwiązuje zadanie.



Rys. 364.

1, 2, 3	4, 5, 6	
1, 2	4, 5 ... II	} p.
2, 3	5, 6 ... III	
3, 4	6, 1 ... I	

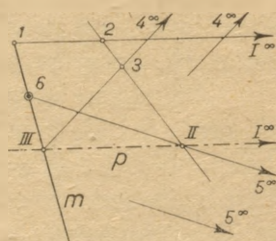
b) Stożkowa c^2 wyznaczona jest dwiema stycznymi s_1 i s_2 wraz z punktami styczności 1 i 3 i punktem 5; wyznaczyć dalszy punkt tej krzywej (Rys. 365.). Z punktem 1 schodzi się punkt 2, a z punktem 3 punkt 4. Styczna s_1 stanowi bok 1 2, styczna s_2 bok 3 4. Stosując wzór połączeń niżej przedstawiony, otrzymamy punkt 6 na prostej m , wykreślonej dowolnie przez punkt 5.



Rys. 365.

1, 2, 3	4, 5, 6	
1, 2	4, 5 ... I	} p.
2, 3	5, 6 ... II	
3, 4	6, 1 ... III	

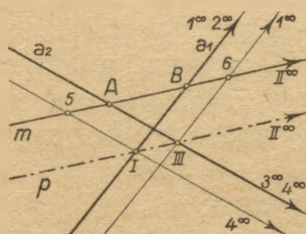
c) Stożkowa c^2 wyznaczona jest punktami właściwymi 1, 2, 3 i punktami niewłaściwymi 4^∞ i 5^∞ ; znaleźć dalszy punkt tej krzywej (Rys. 366.). Punkty 4^∞ i 5^∞ wyznaczone są kierunkami; bok $4^\infty 5^\infty$ jest prostą niewłaściwą płaszczyzny rysunkowej, punkt I prostej Pascala jest więc punktem niewłaściwym prostej 1, 2. Dowolna prosta, wykreślona równolegle do kierunku 5^∞ , uważana za prostą $5^\infty 6$ przecina bok 2 3 w punkcie II. Prosta Pascala p jest więc równoległą do prostej 1 2. Prosta $3 4^\infty$ przecina prostą p w punkcie III który połączony z punktem 1 daje prostą m . Ta ostatnia przetnie prostą, przechodzącą przez punkty II i 5^∞ , w szukanym punkcie 6 hiperboli.



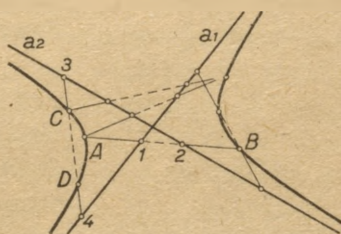
Rys. 366.

1, 2, 3	$4^\infty, 5^\infty, 6$	
1, 2	$4^\infty, 5^\infty \dots I^\infty$	} $p.$
2, 3	$5^\infty, 6 \dots II$	
3, 4^∞	$1, 6 \dots III$	

d) Dane są asymptoty a_1, a_2 i punkt 5 hiperboli; wy-



Rys. 367 a.



Rys. 367 b.

znaczyć dalsze jej punkty (Rys. 367 a.). Asymptotą nazywamy styczną do hiperboli w jej punkcie niewłaściwym. Każda z asymptot wyznacza więc dwa punkty hiperboli. Ułożmy znany nam wzór połączeń. Punkt I

$1^\infty, 2^\infty, 3^\infty$	$4^\infty, 5, 6$	
$1^\infty, 2^\infty$	$4^\infty, 5 \dots I$	} $p.$
$2^\infty, 3^\infty$	$5, 6 \dots II^\infty$	
$3^\infty, 4^\infty$	$1^\infty, 6 \dots III$	

prostej Pascala leży na a_1 , punkt II^∞ na prostej m , wykreślonej dowolnie przez punkt 5. Asymptota a_2 przecina prostą Pascala $p \parallel m$ w punkcie III . Równoległa, wykreślona do a_1 przez III , przecina prostą m w szukanym punkcie 6 hiperboli.

Oznaczmy punkty przecięcia się prostej m z asymptotami literami A i B , to ponieważ $m \parallel p$, $a_1 \parallel III 6$ i $a_2 \parallel I 5$, więc $I III = B 6$ i $I III = A 5$, a zatem $A 5 = B 6$. Wykazaliśmy tym sposobem, że odcinki prostej, zawarte między hiperbolą a jej asymptotami, są sobie równe.

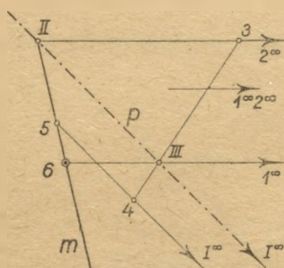
Twierdzenie to zastosujemy zawsze w tych wypadkach, gdzie chodzić będzie o wyznaczenie punktów hiperboli, której asymptoty a_1 , a_2 i jeden punkt, np. A , są dane (Rys. 367 b.). Z punktu A wykreślimy prostą i odmierzymy $A 1 = 2 B$, z punktu B prostą przecinającą asymptoty w dwóch punktach, otrzymamy dalszy punkt hiperboli i t. d.

e) Dany jest kierunek osi i trzy punkty paraboli; wyznaczyć dalszy jej punkt (Rys. 368.). Kierunkiem osi paraboli

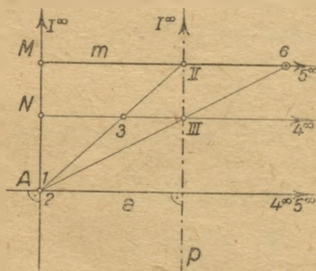
wyznaczone są dwa, bezpośrednio po sobie następujące, punkty 1^∞ i 2^∞ paraboli. Prócz nich dane są punkty 3, 4 i 5. Zastosowanie wzoru połączeń umożliwi wyznaczenie dalszego dowolnego punktu paraboli.

f) Dana jest oś a , wierzchołek A i punkt 3 paraboli; wyznaczyć dalsze punkty tej krzywej (Rys. 369.). Oś i wierzchołek paraboli wyznaczają cztery jej punkty, ponieważ

określają równocześnie styczną w wierzchołku i styczną niewłaściwą do paraboli w jej punkcie niewłaściwym. Oznaczmy dwa punkty paraboli, określone jej wierzchołkiem A i styczną w tym wierzchołku, prostopadłą do osi a , liczbami 1 i 2, a punkty niewłaściwe na osi liczbami 4^∞ i 5^∞ . Stosując wzór połączeń, otrzymamy punkt 6 na prostej m , równoległej do osi paraboli. Oznaczmy punkty przecięcia się stycznej w wierzchołku z prostymi m i III literami M i N , to z Rys. 369.



Rys. 368.



Rys. 369.

czytamy: $\frac{M 6}{N III} = \frac{M A}{N A}$; $\frac{II III}{M A} = \frac{II 6}{M 6}$, czyli

$$M 6 \cdot N A = M A \cdot N III; II III \cdot M 6 = II 6 \cdot M A,$$

a dzieląc ostatnie równanie przez poprzednie otrzymamy:

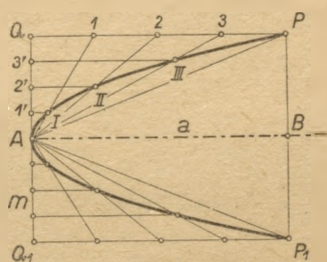
$$\frac{II III}{N A} = \frac{II 6}{N III}.$$

Uwzględniając, że $M N = II III$ i $M II = N III$, mamy

$$\frac{M N}{N A} = \frac{II 6}{M II}.$$

Na tym ostatnim związku opiera się następująca konstrukcja punktów paraboli, której oś a , wierzchołek A i jeden punkt P są dane (Rys. 370.). W wierzchołku

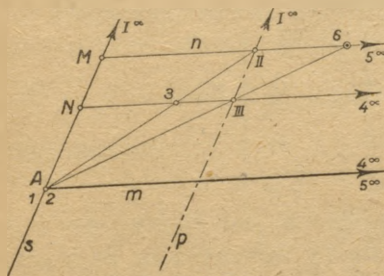
A paraboli kreślimy styczną m , a następnie prostokąt $P Q P_1 Q_1$. Boki $A Q$ i $P Q$ dzielimy na tę samą ilość równych części. Przez punkty $1', 2', 3' \dots$ kreślimy równoległe do osi a , a punkty podziału na boku $P Q$ łączymy z wierzchołkiem paraboli. Punkty przecięcia się $I, II, III \dots$ prostych, poprowadzonych przez równomienne punkty, są punktami paraboli.



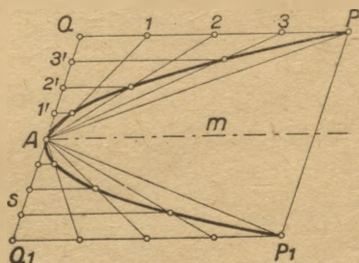
Rys. 370.

g) *Dana jest średnica m , styczna s w punkcie przecięcia się A tej średnicy z parabolą i punkt 3; wyznaczyć dalsze punkty paraboli.* Mamy pięć punktów paraboli (Rys. 371.), a stosując wzór połączeń Pascala, znajdziemy w ten sam sposób, co powyżej, dalszy punkt np. 6, a to na prostej $n \parallel m$. Otrzymamy proporcje jak w Rys. 369., a w rezultacie:

$$\frac{M N}{N A} = \frac{II 6}{M II}.$$

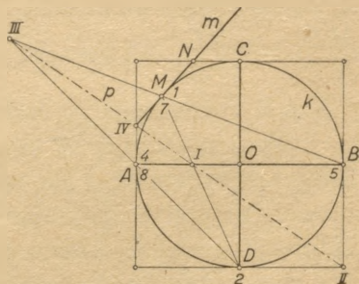


Rys. 371.

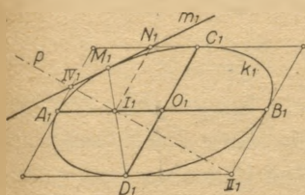


Rys. 372.

Jeżeli koło k , wraz z opisanym na nim kwadratem i styczną m , rzucimy w dowolnym kierunku na dowolną płaszczyznę, to otrzymamy rysunek powi nowaty z pierwszym. Kołu k odpowie elipsa k_1 , średnicom AB i CD średnice sprzężone A_1B_1 i C_1D_1 tej elipsy. Styczna m w punkcie M do koła będzie, po dokonany m rzucie, styczną m_1 w punkcie M_1 elipsy. Prosta M_1D_1 przetnie średnicę A_1B_1 w punkcie I_1 , który po łączony z punktem II_1 daje prostą p . Prosta ta przejdzie przez punkt IV_1 , w którym styczna m_1 przecina styczną do elipsy w punkcie A_1 .



Rys. 374.



Rys. 375.

Przeprowadzone rozumowanie stanowi podstawę do bardzo dogodnego wykreślenia stycznych do elipsy w jej punktach. Dany punkt M_1 łączymy z punktem D_1 ; otrzymana prosta przecina średnicę A_1B_1 w punkcie I_1 . Prosta I_1II_1 wyznacza punkt IV_1 , a ten wraz z danym punktem M_1 żadaną styczną m_1 .

Styczna m (Rys. 376.) przecina średnicę CD koła k w punkcie T , a bok kwadratu, styczny w punkcie C do koła, w punkcie N . Prostopadła wykreślona z punktu M do średnicy CD przecina ją w punkcie U .

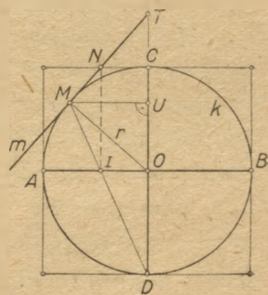
Ponieważ trójkąt $TO M$ jest prostokątny w wierzchołku M , więc:

$$\overline{MO}^2 = r^2 = \overline{OT} \cdot \overline{OU}, \text{ czyli } \overline{OT} = \frac{r^2}{\overline{OU}}$$

Dalej mamy:

$$\triangle MUT \sim \triangle NCT, \text{ a stąd:}$$

$$\frac{MU}{NC} = \frac{TU}{TC} = \frac{OT - OU}{OT - r} = \frac{\frac{r^2}{OU} - OU}{\frac{r^2}{OU} - r} = \frac{r^2 - \overline{OU}^2}{r(r - \overline{OU})} = \frac{r + \overline{OU}}{r} \quad 1).$$



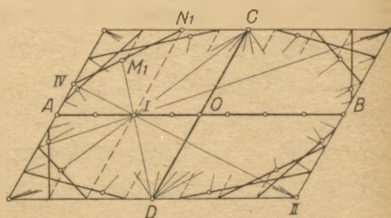
Rys. 376.

Z trójkątów podobnych MUD i IOD otrzymamy proporcję: $\frac{MU}{IO} = \frac{UD}{OD} = \frac{r + OU}{r} \dots \dots \dots 2).$

Z porównania równań 1) i 2) widzimy, że:

$\frac{MU}{NC} = \frac{MU}{IO}$, a stąd wynika, że $NC = IO$, czyli że prosta IN jest równoległą do średnicy CD .

W odniesieniu do elipsy znaczy to, że prosta $I_1 N_1$ (Rys. 375.) jest równoległą do średnicy CD , co w łączności z podanym poprzednio sposobem kreślenia stycznej w danym punkcie elipsy daje bardzo praktyczny sposób wyznaczenia dowolnej ilości stycznych i ich punktów styczności, gdy dana jest para średnic sprzężonych, względnie osi elipsy, jak to widzimy na Rys. 377.



Rys. 377.

123. O kolineacji i powinowactwie krzywych stożkowych. Przypuśćmy, że w miejsce koła (Rys. 357.) znajduje się na płaszczyźnie ε_1 elipsa, hiperbola lub parabola i starajmy się dać odpowiedź na pytanie, jakie krzywe odpowiadają tym liniom na płaszczyźnie ε_2 . Podobnie jak przy kole, zachodzić tu będą trzy przypadki:

a) Elipsa, hiperbola względnie parabola nie są przecięte osią wzajemną z_1 . W tym wypadku krzywe, będące rzutem elipsy, hiperboli czy paraboli na płaszczyznę ε_2 z punktu O , nie posiadają żadnych punktów niewłaściwych, są więc elipsami. Punktem niewłaściwym hiperboli odpowiadają dwa punkty na osi wzajemnej w_2 , która wobec tego przetnie otrzymaną elipsę w dwóch punktach. Punktom niewłaściwym paraboli, leżącej na płaszczyźnie ε_1 , odpowie punkt na osi w_2 ; elipsa jako krzywa, kolineacyjnie związana z parabolą, będzie styczną do osi wzajemnej w_2 .

b) Elipsa, hiperbola i parabola przecięte są osią wzajemną z_1 . Punktom, leżącym na osi z_1 , odpowiadają punkty niewłaściwe na płaszczyźnie ε_2 , a krzywymi, leżącymi na ε_1 , hiperbole.

c) Jeżeli elipsa, hiperbola lub parabola są styczne do osi z_1 , to krzywe, odpowiadające im kolineacyj-

nie na płaszczyźnie ε_2 , posiadać będą jeden punkt niewłaściwy, albo ściślej się wyrażając, będą styczne do prostej niewłaściwej płaszczyzny ε_2 , będą więc parabolemi. Parabola, odpowiadająca hiperboli, przetnie oś w_2 w dwóch punktach, parabola, odpowiadająca paraboli leżącej na ε_1 , będzie styczną do osi wzajemnej w_2 .

W dwóch układach powinowatych punktom właściwym odpowiadają punkty właściwe, a punktom niewłaściwym punkty niewłaściwe. Krzywej stożkowej, nie mającej punktów niewłaściwych (elipsie), odpowie także krzywa w układzie powinowatym; stożkowej, posiadającej dwa punkty niewłaściwe (hiperboli), odpowie hiperbola, a paraboli, parabola.

§ 11. O KRZYWYCH I POWIERZCHNIACH W OGÓLNOŚCI

124. Określenie i podział linii krzywych. Jeżeli punkt porusza się na płaszczyźnie, według określonego prawa, to miejscem geometrycznym położenia tego punktu jest w ogólnym przypadku linia krzywa płaska, czyli jak się krótko wyrażamy, krzywa płaska. Jeżeli prawo ruchu punktu jest nieokreślone, to krzywa nosi nazwę krzywej graficznej, w odróżnieniu od krzywej, powstałej według pewnego prawa, zwanej krzywą matematyczną. Prawo powstawania krzywych matematycznych, a więc i same krzywe, wyrazić się zawsze dadzą równaniami matematycznymi, krzywe graficzne wyrażają się wyłącznie rysunkiem. Krzywe stożkowe, więc koło, elipsa, hiperbola i parabola, są przykładami krzywych matematycznych, linia wyrażająca kształt, np. liścia kasztanu, jest linią graficzną.

Jeżeli punkt porusza się w przestrzeni według określonego prawa, to miejscem geometrycznym położenia tego punktu jest linia krzywa przestrzenna, zwana także krzywą skośną. Podobnie, jak krzywe płaskie, rozróżniamy krzywe skośne matematyczne od graficznych.

125. Określenie i podział powierzchni. Niechaj krzywa płaska lub skośna, nie zmieniając swego kształtu, albo zmieniając go w określony sposób, porusza się według pewnego prawa w przestrzeni, to miejsce geometryczne położenia tej

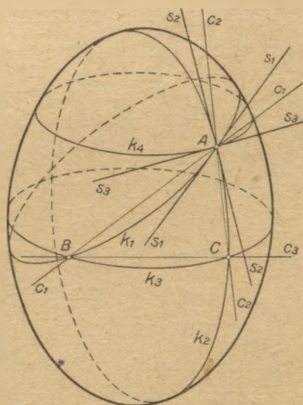
krzywej określamy mianem powierzchni. Poruszając się krzywą nazywamy tworzącą powierzchni. Jeżeli powierzchnia powstała w wyżej określony sposób, utworzyć się da także ruchem linii prostej, to nazywamy ją powierzchnią prostoliniową albo prostokreślną, w odróżnieniu od powierzchni krzywoliniowej, czyli krzywokreślnej, która nie da się utworzyć ruchem linii prostej. Przykładem pierwszego rodzaju powierzchni jest np. stożek, który powstaje gdy koło, zmieniając swój promień, porusza się równolegle do swego położenia, a jego środek opisuje linię prostą. Ale stożek powstać może i w ten sposób, że prosta obróci się około drugiej prostej, która ją przecina. W pierwszym przypadku, poruszające się i zmieniające swój promień koło, w drugim poruszająca się prosta, są tworzącymi stożka. Przykładem powierzchni krzywoliniowej jest np. kula.

W zakres naszych elementarnych rozważań włączymy tylko bardzo ograniczoną grupę powierzchni, a środki badania, któremi rozporządzamy, nie pozwalają nawet na bardziej szczegółową systematykę powierzchni.

Powierzchnie prostoliniowe, dające się rozwinąć na płaszczyźnie, a także i odwrotnie, mogące powstać ze zwinięcia płaszczyzny, bez jej rozdarcia, zagięcia lub załamania, określamy mianem powierzchni rozwijalnych. Powierzchnie, nie dające się rozwinąć na płaszczyźnie, nazywamy powierzchniami nierozwijalnymi, albo skośnymi.

126. O płaszczyznach stycznych do powierzchni. Styczną w punkcie krzywej, leżącej na powierzchni, określamy jako styczną do powierzchni w tym punkcie. Weźmy pod uwagę dowolną powierzchnię (Rys. 378.), a przez jeden z jej punktów np. A , nakreślmy na niej dwie linie krzywe k_1 i k_2 . Obierzmy następnie na powierzchni trzecią krzywą k_3 , przecinającą pierwsze w punktach B i C . Uważajmy krzywe k_1 i k_2 za kierownice, a krzywą k_3 za tworzącą, która, poruszając się po k_1 i k_2 i zmieniając odpowiednio swój kształt, opisuje naszą powierzchnię. Proste c_1 , c_2 i c_3 , łączące punkty A , B i C , są siecznymi krzywych k_1 , k_2 i k_3 , a więc i siecznymi powierzchni i leżą na jednej płaszczyźnie δ . Podczas ruchu krzywej k_3 , punkt B porusza się po krzywej k_1 , zbliżając się do punktu A , gdy równocześnie punkt C posuwa się po krzywej k_2 , zbliżając się również do punktu A , przyczem sieczne c_1 , c_2 i c_3 pozostają

stałe na jednej płaszczyźnie σ . W położeniu granicznym krzywa k_3 zajmie położenie k_4 , sieczna c_1 przejdzie w styczną s_1 , sieczna c_2 w styczną s_2 , a sieczna c_3 w styczną s_3 . Płaszczyzna σ zajmie również położenie graniczne σ_1 i zawierać będzie styczne s_1 , s_2 i s_3 . Płaszczyznę σ , w owym położeniu granicznym, nazywamy płaszczyzną styczną powierzchni w punkcie A . Obrawszy w miejsce krzywej k_3 inną krzywą jako tworzącą, wykażemy w ten sam sposób jak poprzednio, że styczna, poprowadzona do tej krzywej w punkcie A , nie identyczna zresztą ze styczną s_3 , leży również na płaszczyźnie stycznej σ_1 . Widoczne stąd, że styczne, poprowadzone do powierzchni w jednym jej punkcie, leżą na jednej płaszczyźnie, która jest płaszczyzną styczną do powierzchni w tym punkcie. I wzaajemnie: płaszczyzna styczna do powierzchni w jej punkcie jest miejscem geometrycznym stycznych, poprowadzonych w tym punkcie do krzywych, przechodzących przez ten punkt, a leżących na powierzchni.



Rys. 378.

Z określenia powyższego wynika bezpośrednio, że 1) dla wyznaczenia płaszczyzny stycznej do powierzchni w danym jej punkcie, wystarczy wyznaczyć styczne do dwóch linii krzywych, poprowadzonych przez ten punkt na tej powierzchni; 2) jeżeli powierzchnia jest prostoliniową, to płaszczyzna styczna w danym punkcie zawiera prostą tworzącą, przechodzącą przez ten punkt, gdyż styczna w tym punkcie do uważanej tworzącej jest właśnie nią samą.

Prosta prostopadła do płaszczyzny stycznej powierzchni w punkcie styczności, nazywa się prostą normalną powierzchni w danym punkcie. Płaszczyzny, przechodzące przez prostą normalną, zwiemy płaszczyznami normalnymi danego punktu powierzchni.

§ 12. POWIERZCHNIE STOŻKOWE i WÁLCOWE

127. Tworzenie i podział powierzchni stożkowych i walcowych. Jeżeli prosta, przechodząca przez punkt, po-

rusza się w ten sposób w przestrzeni, że przecina stale daną linię krzywą płaską lub skośną, to powstała w ten sposób powierzchnia nazywa się powierzchnią stożkową. Poruszając się prostą, w każdym jej położeniu, nazywamy tworzącą powierzchni stożkowej; punkt, przez który przechodzi tworząca, jest wierzchołkiem, a krzywa, którą przecina tworząca, kierownicą powierzchni stożkowej. Jako kierownicę przyjąć można na danej powierzchni stożkowej każdą dowolną linię krzywą, byleby tylko przecinała wszystkie tworzące tej powierzchni. W szczególności przyjąć można jako kierownicę stożka dowolny przekrój powierzchni stożkowej płaszczyzną, t. zw. przekrój płaski, a wtedy kierownica nosi nazwę podstawy. Przekroje stożka płaszczyznami rzutów, nazywamy jego śladami. Mówimy tedy o śladzie poziomym, pionowym lub bocznym powierzchni stożkowej. Ślady stożka są zatem jego podstawami, leżącymi na rzutniach.

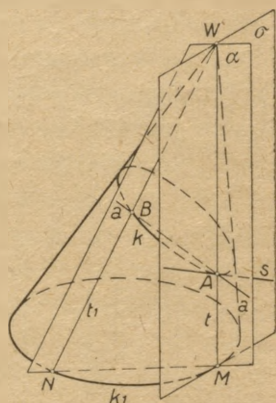
Powierzchnia stożkowa rozciąga się nieograniczenie po obu stronach wierzchołka; zazwyczaj ograniczamy się do rozważania części powierzchni, zawartej między wierzchołkiem a przekrojem płaskim (podstawą) i taką ograniczoną część powierzchni nazywamy stożkiem. Odległość wierzchołka od płaszczyzny podstawy, nazywamy wysokością stożka.

Jeżeli wierzchołek powierzchni stożkowej jest punktem niewłaściwym przestrzeni, czyli leży nieograniczenie daleko w danym kierunku, to powierzchnia nazywa się walcową. Tworzące powierzchni walcowej są do siebie równoległe i równoległe do danego kierunku. Część powierzchni walcowej, leżącej między dwoma równoległymi przekrojami płaskimi, nazywamy walcem, a krzywe przekroju jego podstawami. W tem samem znaczeniu, co przy stożkach, mówimy i tu o śladach walca, rozumiejąc przez nie przekroje powierzchni walcowej płaszczyznami rzutów. Odległość obu podstaw nazywamy wysokością walca.

Przedmiotem naszych rozważań uczynimy te powierzchnie stożkowe i walcowe, których kierownicami, a więc także podstawami, są krzywe stożkowe, więc: koło, elipsa, hiperbola i parabola. Powierzchnie te określamy wspólnem mianem powierzchni stożkowych i walcowych rzędu drugiego.

128. Płaszczyzny styczne do stożków i walców. Na tworzącej t powierzchni stożkowej obierzmy punkt A (Rys. 379.),

przez który poprowadźmy krzywą k , leżącą na tej powierzchni. W myśl określenia płaszczyzny stycznej, podanem w ust. 126., tworząca t i styczna s w punkcie A do krzywej k wyznaczają płaszczyznę styczną σ do stożka w punkcie A . Obierzmy na krzywej k punkt B i połączmy go z punktem A , to sieczna $a \equiv (A, B)$ wraz z tworzącą t wyznaczają płaszczyznę α , która przecina powierzchnię stożkową wzdłuż tworzących t i t_1 . Wyobraźmy sobie, że płaszczyzna φ obraca się około tworzącej t , to punkt B zbliża się do punktu A , a w położeniu granicznym, gdy punkt B zejdzie się z punktem A , sieczna a przejdzie w styczną s do krzywej k w punkcie A , a płaszczyzna α , w płaszczyznę styczną σ . W ten sposób określić można płaszczyznę styczną do powierzchni stożkowej, względnie walcowej, jako



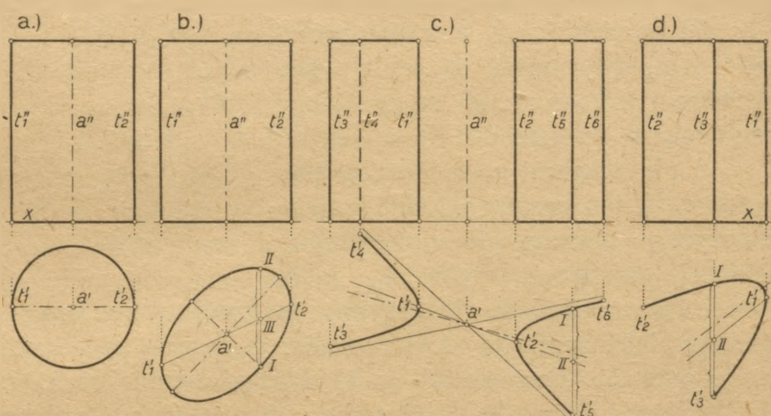
Rys. 379.

graniczne położenie płaszczyzny siecznej, przyczem, jak widzimy, płaszczyzna ta zawiera jedną tworzącą powierzchni i jest styczną do powierzchni w każdym punkcie tej tworzącej.

W danym punkcie powierzchni stożkowej lub walcowej wyznaczmy więc płaszczyznę styczną w sposób następujący: Powierzchnię przetniemy płaszczyzną, przechodzącą przez dany punkt i poprowadzimy w tym punkcie styczną do linii przekroju. Styczna ta, wraz z tworzącą stożka, przechodzącą przez dany punkt, wyznaczają płaszczyznę styczną do powierzchni w każdym punkcie tworzącej, a więc i w punkcie danym.

129. Podział i rzuty powierzchni walcowych rzędu drugiego. Biorąc pod uwagę takie położenia powierzchni walcowych rzędu drugiego, przy których tworzące ich są pionowe, otrzymamy jako ślady poziome tych powierzchni koło, elipsę, hiperbolę i parabolę. Rodzaj krzywej stożkowej, występującej jako ślad poziomy powierzchni walcowej, której tworzące są pionowe, charakteryzuje tę powierzchnię. W przypadku, gdy śladem tym jest koło, walec nazywać będziemy walcem obrotowym (Rys. 380 a), gdy śladem jest elipsa, hiperbola lub parabola, mówimy o walcu eliptycznym

(Rys. 380 b), hiperbolicznym (Rys. 380 c) i parabolicznym (Rys. 380 d). Walec paraboliczny — ponieważ parabola posiada jeden punkt niewłaściwy — ma jedną tworzącą niewłaściwą. W praktycznym przedstawianiu rysunkiem walca parabolicznego, bierzemy pod uwagę ograniczoną część paraboli jako śladu walca, który wskutek tego ograniczony jest dwiema tworzącymi. Walec hiperboliczny składa się z dwóch gałęzi i posiada dwie tworzące niewłaściwe. Podobnie, jak przy walcu parabolicznym, bierzemy pod uwagę tylko ograniczoną część każdej gałęzi walca hiperbolicznego, a to jego tworzącymi.



Rys. 380 a—d.

Prosta a (a' a''), poprowadzona przez środek podstawy (śladu) walca, nazywa się jego osią. Płaszczyzny poziomo rzucające, poprowadzone przez asymptoty hiperboli, jako podstawy walca, noszą nazwę płaszczyzn asymptotycznych.

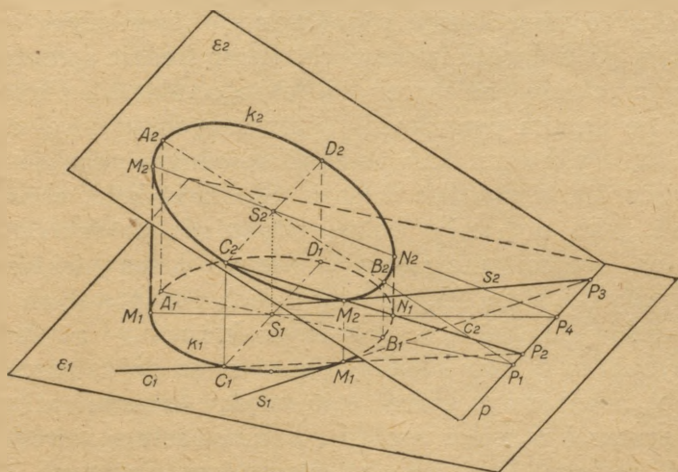
Płaszczyzny styczne do walca i prostopadłe do rzutni pionowej, dzielą każdą powierzchnię walcową na dwie części, których granicami są tworzące styczności walca z temi płaszczyznami. Tworzące te, oznaczone literami t_1 i t_2 na Rys. 380 a—d, stanowią zarys walca, a ich rzut pionowy, identyczny ze śladami pionowymi płaszczyzn stycznych, jest zarysem, czyli rzutem walca na rzutnię pionową.

Każda płaszczyzna, przechodząca przez oś walca obrotowego, jest jego płaszczyzną symetrii prostokątnej. Walec eliptyczny i hiperboliczny posiadają po dwie takie płaszczyzny symetrii, które są płaszczyznami, przechodzącymi przez oś walca

i osi elipsy, względnie hiperboli, stanowiących podstawy. Walec paraboliczny ma tylko jedną płaszczyznę symetrii. Ilość płaszczyzn symetrii znamionuje i wyróżnia walce rzędu drugiego między sobą. W szczególności ważną jest ta charakterystyka przy odróżnianiu walca obrotowego od eliptycznego.

Jeżeli tworzące walca są prostopadłe do jego płaszczyzny podstawy, to walec nazywamy prosty, inaczej ukośny.

130. O przekrojach walców rzędu drugiego w ogólności. Linia przekroju walca z płaszczyzną jest miejscem geometrycznym punktów przebicia się tworzących walca z płaszczyzną sieczną. Z określenia powierzchni walcowej wynika, że między jej śladem i przekrojem dowolną płaszczyzną, a więc także między dwoma przekrojami, zachodzi ten sam związek, który wykazaliśmy między dwoma przekrojami graniastostupa (ust. 102.), t. j. powinowactwo środkowe. W istocie bowiem każdemu punktowi $A_1, B_1, C_1 \dots$ linii przekroju k_1 , leżącej na płaszczyźnie ε_1 (Rys. 381.), odpowiada jeden jedyny punkt



Rys. 381.

$A_2, B_2, C_2 \dots$ drugiej linii przekroju k_2 , leżącej na płaszczyźnie ε_2 , przyczem odpowiadające sobie punkty leżą na tworzących walca, stanowiących promienie powinowactwa. Każdej prostej np. c_1 , leżącej na płaszczyźnie ε_1 i przecinającej krzywą k_1 w punktach C_1 i M_1 , odpowiada na płaszczyźnie ε_2 prosta c_2 , przecinająca krzywą k_2 w punktach C_2 i M_2 . Każdej stycznej, np. s_1

do k_1 w punkcie M_1 , odpowiada na płaszczyźnie ε_2 prosta s_2 , styczna do krzywej k_2 w punkcie M_2 , leżącym wraz z punktem M_1 na jednej tworzącej. Miejszem geometrycznym punktów przecięcia się, odpowiadających sobie prostych na obu płaszczyznach, jest krawędź p tych płaszczyzn, stanowiąca oś powinowactwa.

Jeżeli płaszczyzny ε_1 i ε_2 są równoległe, to oś powinowactwa leży nieograniczenie daleko, a między obu układami płaskimi zachodzi przystawanie. Płaszczyzny równoległe przecinają więc walec w krzywych przystających.

Wiadomo, że kołu, leżącemu na płaszczyźnie ε_1 , odpowiada w układzie powinowatym ε_2 elipsa, dalej, że elipsa spowinowacaną jest z elipsą, parabola z parabolą, a hiperbola z hiperbolą (ust. 123.). Stąd wynika wprost, że walec obrotowy przeciąć można zawsze wzdłuż elipsy, walec eliptyczny wzdłuż elipsy, a jak to później zauważymy, także i wzdłuż koła (ust. 131., Rys. 384.), że przekrój walca parabolicznego może być tylko parabolą, a walca hiperbolicznego hiperbolą. Rzecz oczywista, że płaszczyzny, równoległe do tworzących walca, przecinają go w dwóch tworzących. Parze średnic sprzężonych krzywej przekroju, należącej do jednego układu, odpowiada w układzie drugim para średnic sprzężonych krzywej spowinowacanej z pierwszą. Osi paraboli w jednym układzie odpowiada średnica w układzie drugim. Środkowi koła, elipsy lub hiperboli, jako podstawy walca, odpowiada środek krzywej stożkowej, będącej przekrojem odnośnego walca płaszczyzną.

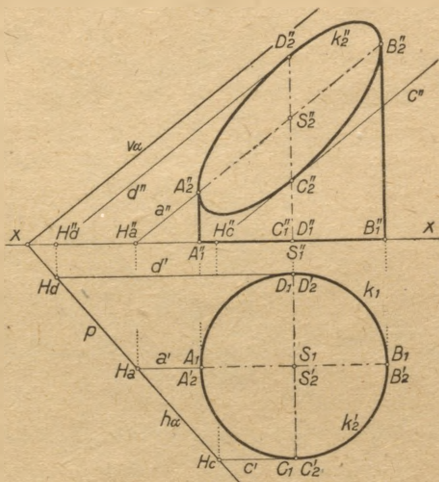
Wiemy z ustępu 94., że rzut dwóch powinowatych utworów (układów) płaskich w dowolnym kierunku i na dowolną płaszczyznę daje dwa układy złożone na tej płaszczyźnie i ze sobą powinowate. Wobec tego między rzutami poziomymi dwóch przekrojów walca zachodzi powinowactwo, którego osią jest rzut poziomy krawędzi obu płaszczyzn siecznych, a kierunkiem, kierunek rzutu poziomego tworzących walca. Podobnie między rzutami pionowymi dwóch przekrojów walca zachodzi powinowactwo o kierunku równoległym do rzutu pionowego tworzących tego walca, a osią, którą jest rzut pionowy krawędzi płaszczyzn siecznych. Gdy jednym z dwóch uważanych przekrojów walca jest jego ślad, to osią powinowactwa jest odpowiedni ślad pozostałej płaszczyzny siecznej.

Gdy oba przekroje walca są jego śladami, a więc leżą na rzutniach, to osią powinowactwa jest oś rzutów x .

Zadanie: „Wyznaczyć przekrój walca płaszczyzną α “, polegające będzie na wykreśleniu rzutów krzywej przekroju, względnie na wyznaczeniu średnic sprzężonych lub osi tej krzywej.

131. Przykłady przekrojów walców.

a) Wyznaczyć przekrój walca obrotowego płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$) (Rys. 382.). Krzywą przekroju jest elipsa k_2 , której rzut poziomy k_2' schodzi się z podstawą k_1 walca. Rzut pionowy k_2'' krzywej przekroju będzie elipsą, a ponieważ między rzutem poziomym i pionowym zachodzi powinowactwo (ust. 95.), więc parze średnic sprzężonych $\overline{A_2' B_2'}$, $\overline{C_2' D_2'}$ koła k_2' odpowiada para średnic sprzężonych $\overline{A_2'' B_2''}$ i $\overline{C_2'' D_2''}$ elipsy k_2'' .

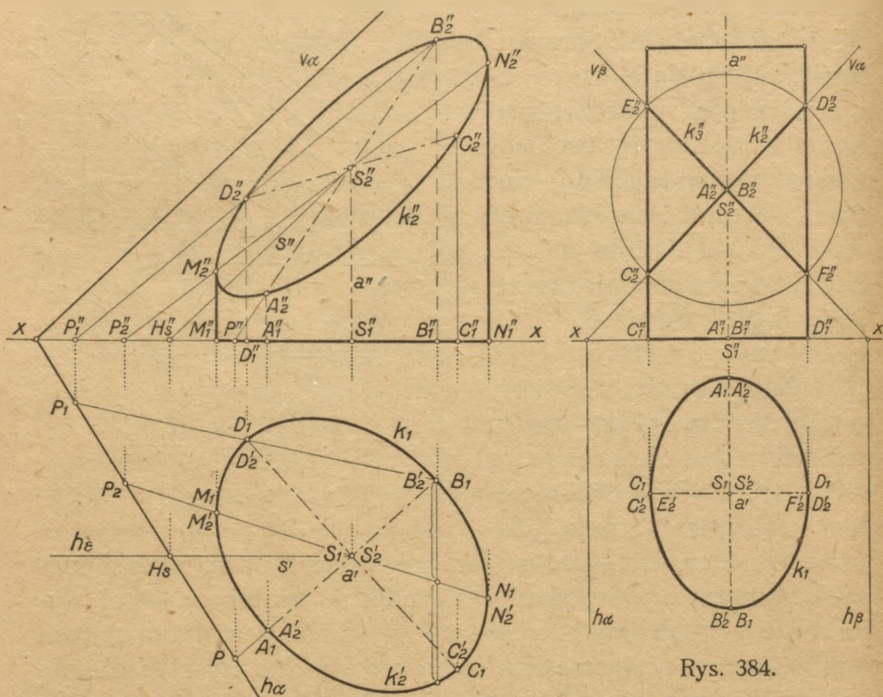


Rys. 382.

b) Wyznaczyć rzuty przekroju prostego walca eliptycznego płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$) (Rys. 383.). Celem wykreślenia rzutu pionowego walca, czyli rzutu pionowego tworzących, wzdłuż których płaszczyzny styczne prostopadłe do rzutni pionowej stykają się z walcem, a więc celem wyznaczenia tworzących konturowych — wykreślimy styczne do k_1 , prostopadłe do osi x . W tym celu społowimy cięciwę elipsy k_1 , prostopadłą do osi x i połączymy jej środek ze środkiem S_1 elipsy. Otrzymana średnica elipsy przecina ją w punktach M_1 i N_1 , które są rzutami poziomymi tworzących konturowych.

Krzywa przekroju jest elipsą, której rzut poziomy k_2' schodzi się z podstawą k_1 . Osi $\overline{A_2' B_2'}$ i $\overline{C_2' D_2'}$ elipsy k_1' schodzą się z osiami $\overline{A_1 B_1}$ i $\overline{C_1 D_1}$ podstawy k_1 . Przy pomocy prostej s ($s' s''$) znajdziemy punkt S_2'' , t. j. rzut pionowy środka elipsy k_2'' , a przy pomocy dalszych prostych przyjętych na płaszczyźnie α , średnice sprzężone $\overline{A_2'' B_2''}$ i $\overline{C_2'' D_2''}$ tejże elipsy.

c) Wyznaczyć kierunek płaszczyzn, tnących walec eliptryczny wzdłuż kół. Nadajmy walcowi takie położenie, aby oś jego a (a' , a'') była pionowa (Rys. 384.), a płaszczyzna przechodząca przez tę oś i przez małą oś elipsy była płaszczyzną czołową (równoległą do rzutni pionowej). Z dowolnego punktu S_2'' prostej a'' zakresłmy koło promieniem równym dużej półosi elipsy k_1 , a otrzymane punkty C_2'' , D_2'' i E_2'' , F_2'' połączmy ze sobą. Niechaj $(C_2'', D_2'') \equiv v_\alpha$ będzie śladem pio-



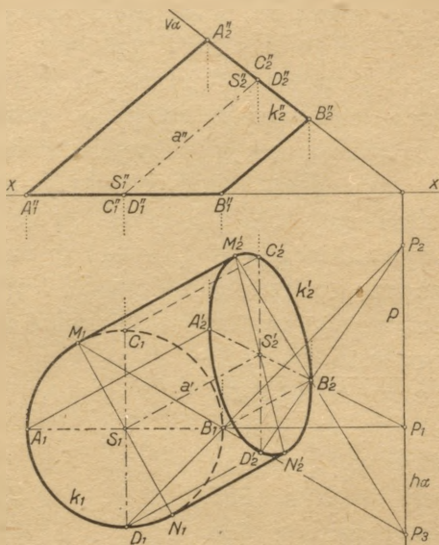
Rys. 383.

Rys. 384.

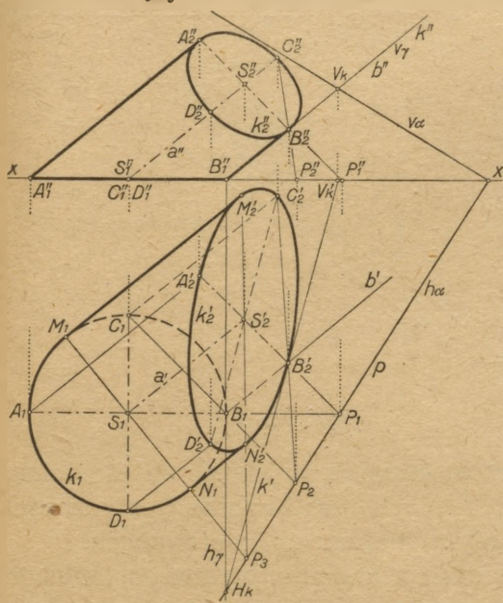
nowym pionowo rzucającej płaszczyzny siecznej α , to odcinek $\bar{A}_2 B_2$, przechodzący przez punkt S_2 i prostopadły do rzutni pionowej, jest jedną, a odcinek $\bar{C}_2 D_2$ prostopadły do $\bar{A}_2 B_2$, drugą osią linii przekroju, powinowatej z elipsą k_1 . Osi te są równej długości, a więc krzywa, niemi wyznaczona, jest kołem. Z tych samych względów płaszczyzna pionowo rzucająca β ($h_\beta v_\beta$) przecina walec eliptyczny również wzdłuż koła. Płaszczyzny równoległe do płaszczyzn α i β przecinają

nasz walec wzdłuż kół, a stąd wynika, że na powierzchni walcowej eliptycznej istnieją dwa układy kół.

d) Wyznaczyć przekrój walca eliptycznego, którego ślad poziomy jest kołem, pionowo rzucającą płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$). Przekrój walca będzie elipsą k_2 , której rzut pionowy schodzi się ze śladem v_α (Rys. 385.). Parze średnic sprzężonych $A_1 B_1$ i $C_1 D_1$ w kole k_1 odpowiada para średnic sprzężonych $A_2 B_2$ i $C_2 D_2$ w elipsie k_2 , powinowatej z kołem k_1 . Osią powinowactwa jest ślad h_α płaszczyzny siecznej, kierunkiem, kierunek tworzących walca. Punkty A_2', B_2', C_2' i D_2' otrzymamy, odnosząc punkty A_2'', B_2'', C_2'' i D_2'' na rzuty poziome odpowiednich tworzących. Proste $A_1 B_1$ i $A_2' B_2'$ przecinają się w punkcie P_1 osi powinowactwa h_α , podobnie jak i inne proste łączące pary odpowiadających sobie punktów koła k_1 i spowinowaczonej z nim elipsy k_2 . Punktem M_1 i N_1 odpowiadają punkty styczności M_2' i N_2' elipsy k_2' z rzutami tworzących konturowych walca.



Rys. 385.



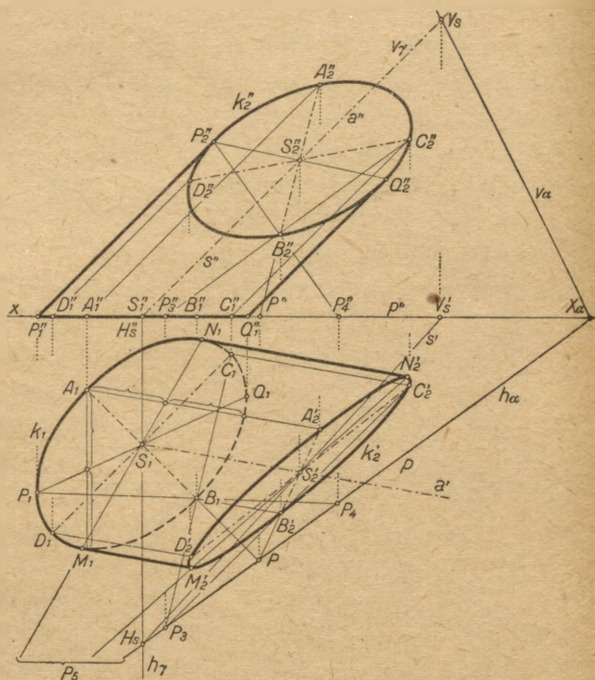
Rys. 386.

e) Wyznaczyć przekrój walca eliptycznego, którego ślad poziomy jest kołem, płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$) — (Rys. 386.). Wyzna-

czyimy punkt przebiecia się B_2 (B_2' B_2'') tworzącej konturowej b (b' b'') z płaszczyzną α . Punkt ten wraz z osią h_α wyznaczają powinowactwo, jakie zachodzi między kołem k_1 a szukaną elipsą k_2 . Znajdziemy parę średnic sprzężonych A_2' B_2' i C_2' D_2' elipsy k_2' , podobnie jak w zadaniu poprzednim. Rzut pionowy k_2'' elipsy k_2 jest elipsą, której średnice sprzężone otrzymamy, znajdując punkty A_2'' , B_2'' , C_2'' i D_2'' na rzutach pionowych odpowiednich tworzących walca.

f) Wyznaczyć przekrój walca eliptycznego dowolną płaszczyzną. Oś a (a' a'') walca (Rys. 387.) przebiega płaszczyznę sieczną α (h_α v_α) w punkcie S_2 (S_2' S_2''), który wyznacza, wraz z punktem S_1 i osią h_α , powinowactwo zachodzące między śladem k_1 walca a jego przekrojem k_2 (k_2' k_2'').

Średnice sprzężone A_2' B_2' i C_2' D_2' elipsy k_2' znajdziemy, podobnie jak w Rys. 385. względnie w 386. Średnicy P_1 Q_1 , sprzężonej z kierunkiem prostopadłym do osi x , odpowiada na płaszczyźnie α średnica P_2 Q_2 , przyczem punkty P_2'' i Q_2'' są punktami styczności elipsy k_2'' z rzutem pionowym tworzących konturowych. Średnicy M_1 N_1 , sprzężonej z kierunkiem równoległym do rzutu

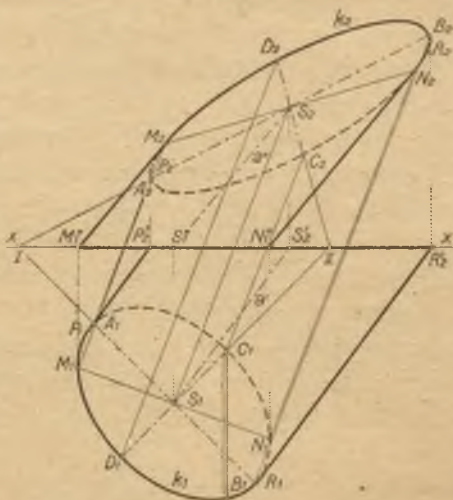


Rys. 387.

poziomego tworzących walca, odpowie w elipsie k_2' średnica, której punkty końcowe M_2' , N_2' są punktami styczności elipsy k_2' z rzutem poziomym tworzących konturowych.

g) Wykreślić ślad pionowy walca eliptycznego, którego ślad poziomy k_1 i rzuty tworzących konturowych są dane

(Rys. 388.). Między obu śladami walca zachodzi powinowactwo, którego osią jest oś rzutów x , jako krawędź płaszczyzn siecznych. Prosta, łącząca ślad pionowy S_2 osi a ($a' a''$) walca ze środkiem S_1 elipsy k_1 , jest kierunkiem powinowactwa. Punkty I i II , w których osi elipsy k_1 przecinają oś powinowactwa x , łączymy z punktem S_2 , a na otrzymane proste rzucimy w kierunku powinowactwa wierzchołki A_1, B_1, C_1 i D_1 . Tym sposobem otrzymamy parę średnic sprzężonych $A_2 B_2$ i $C_2 D_2$ szukanego śladu pionowego k_2 walca.



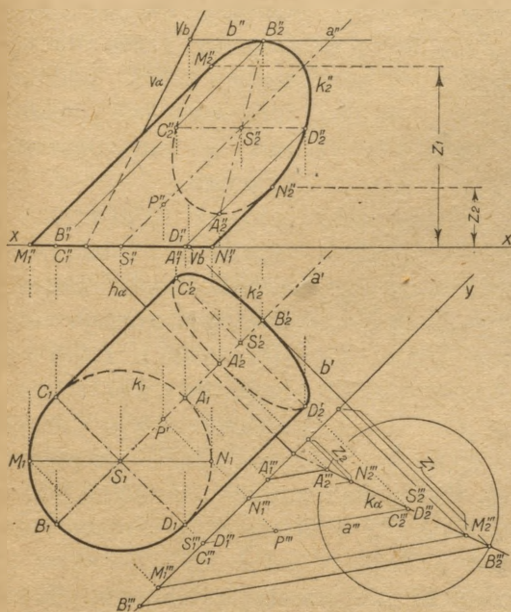
Rys. 388.

Punktom M_1 i N_1 , w których średnica elipsy k_1 , sprzężona z kierunkiem

prostopadłym do osi x , elipsę tę przecina, odpowiedzą na rzutni

pionowej punkty styczności M_2 i N_2 elipsy k_2 z rzutem pionowym tworzących konturowych.

h) Dane są rzuty walca eliptycznego, którego ślad poziomy jest kołem k_1 (Rys. 389.). Wyznaczyć rzuty przekroju tego walca wzdłuż koła, należącego do drugiego układu kół. Przyjmijmy trzecią płaszczyznę rzutów, prostopadłą do rzutni poziomej i równoległą do tworzących walca. Ślad poziomy tej nowej rzutni oznaczyliśmy literą y .



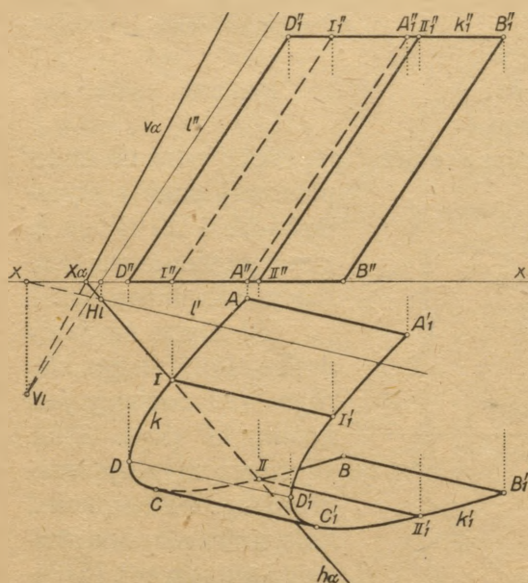
Rys. 389.

Przyjawszy na osi walca punkt S_2 (S_2' S_2''), wyznaczmy jego rzut boczny S_2''' . Prosta $S_1''' S_2'''$ jest rzutem bocznym osi walca; rzuty boczne tworzących konturowych przejdą przez punkty A_1''' i B_1''' równoległe do a''' . Zakreślmy z punktu S_2''' koło o promieniu równym promieniowi koła k_1 i oznaczmy punkty przecięcia się tego koła z zarysem walca na rzutni bocznej literami A_2''' i B_2''' . Uważajmy prostą $k_\alpha = (A_2''', B_2''')$ za ślad boczny płaszczyzny siecznej α , prostopadłej do rzutni bocznej, to przekrój walca tą płaszczyzną będzie żądanym przekrojem wzdłuż koła k_2 , (porównaj zadanie c w tym ustępie). Każda płaszczyzna równoległa do płaszczyzny α przecina walec wzdłuż koła.

Wyznaczenie osi $A_2' B_2'$ i $C_2' D_2'$ elipsy k_2' , jako rzutu poziomego koła k_2 , podobnie jak i średnic sprzężonych $A_2'' B_2''$ i $C_2'' D_2''$ elipsy k_2'' , nie nastęrcza żadnych trudności i sprowadza się do odnie-

sienia odpowiednich punktów z rzutu bocz-
nego na poziomy i pionowy. Punkty stycz-
ności M_2''' i N_2''' znaj-
dziemy również przy
pomocy rzutu bocz-
nego, który podaje
ich wysokości, jak
nas o tem poucza
rysunek.

i) Wyznaczyć
przekrój walca pa-
rabolicznego wzdłuż
dwóch tworzących —
(Rys. 390.). Równo-
legle do tworzących
walca, prowadzimy
prostą l (l' l''), a przez



Rys. 390.

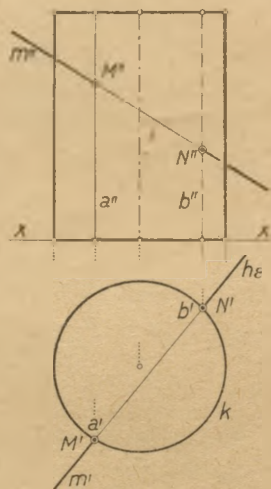
nią płaszczyznę α ($h_\alpha v_\alpha$), której ślad poziomy przecina pod-
stawę walca w punktach I (I' I'') i II (II' II''). Proste Ih
i IIh rozwiązują zadanie.

132. O punktach przebicia się prostej z walcem. Aby
wyznaczyć punkty, w których prosta przebija powierzchnię

walcową, poprowadzimy przez tę prostą płaszczyznę, wyznaczmy przekrój walca tą płaszczyzną, a punkty przecięcia się prostej z otrzymaną linią przekroju rozwiązują zadanie. Rysunkowo przedstawi się rozwiązanie zadania najprościej wówczas, gdy płaszczyzna, poprowadzona przez prostą, będzie równoległą do tworzących walca, a więc, gdy przetnie go wzdłuż dwóch tworzących. Tak też z reguły postępujemy. Na danej prostej m , której punktów przebicia się z walcem szukamy, obierzemy punkt, przez który prowadzimy prostą p równoległą do tworzących walca. Płaszczyzna $\varphi \equiv (m, p)$, jako równoległa do tworzących walca, przetnie go wzdłuż dwóch tworzących, względnie w równoległoboku, jeśli bierzemy pod uwagę także krawędzie płaszczyzn ograniczających walec z płaszczyzną φ . Punkty przecięcia się otrzymanego przekroju walca z prostą m stanowią rozwiązanie zadania.

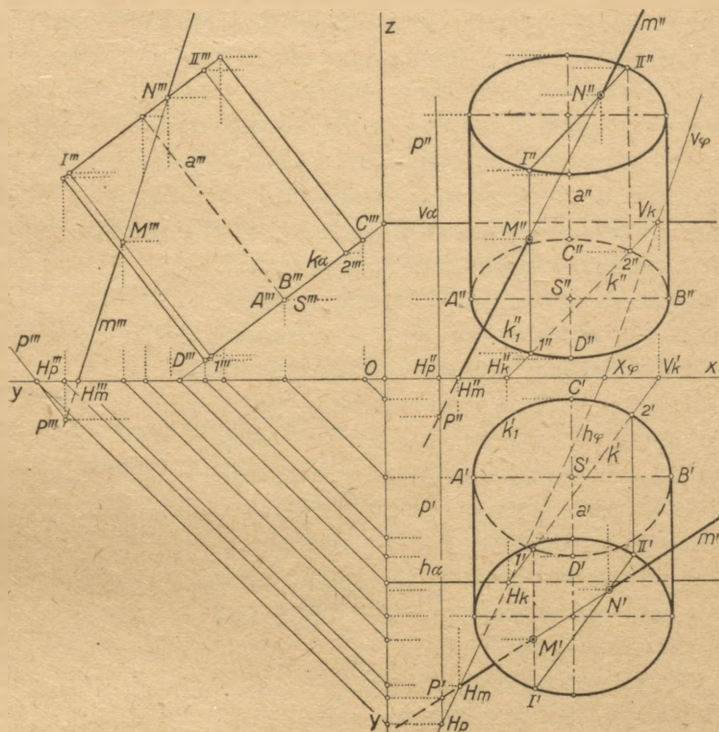
Przykłady.

a) Rys. 391. przedstawia walec obrotowy, o osi pionowej, przebity prostą m (m' m'') w punktach M (M' M'') i N (N' N''). Ze względu na położenie walca, rzuty poziome punktów przebicia są znane; zadanie ograniczyło się do wyznaczenia rzutów pionowych tych punktów.



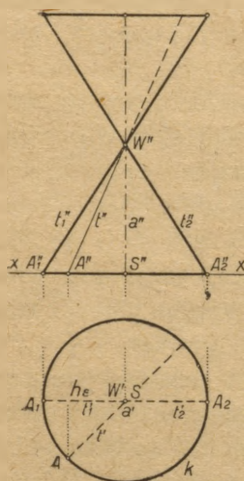
Rys. 391.

b) Wyznaczyć punkty przebicia się prostej m (m' m'') z walcem obrotowym, którego oś jest równoległa do rzutni bocznej (Rys. 392.). Wykreślenie rzutów walca, przy użyciu płaszczyzny bocznej, nie wymaga bliższych wyjaśnień. Prosta p (p' p''), poprowadzona przez punkt P (P' P'') prostej m (m' m'') równolegle do tworzących walca, wyznacza wraz z prostą m płaszczyznę φ (h_φ v_φ), która przecina płaszczyznę podstawy α w prostej k (k' k''). Przez punkty 1 ($1'$ $1''$) i 2 ($2'$ $2''$), w których prosta k przecina podstawę walca, kreślimy tworzące, które przecinają drugą podstawę walca w punktach I (I' I'') i II (II' II''). Prosta m (m' m'') przecina prostokąt 1 2 II I w punktach M (M' M'') i N (N' N''), które są szukanymi punktami przebicia się jej z walcem.



Rys. 392.

133. Rzuty i podział powierzchni stożkowych rzędu drugiego.

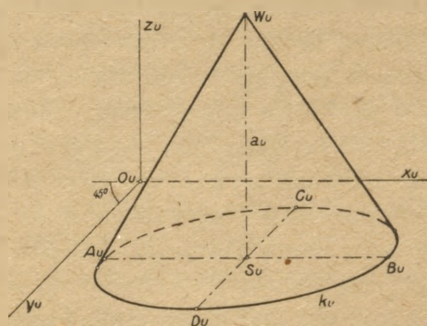


Rys. 393.

a) W środku S koła k (Rys. 393.), przyjętego na rzutni poziomej i uważanego za ślad powierzchni stożkowej, poprowadźmy prostą pionową a (a' a'') i obierzmy na niej dowolny punkt W (W' W''). Prosta t (t' t''), przechodząca przez punkt W i poruszająca się w ten sposób, że stale przecina koło k , opisze powierzchnię stożkową, zwaną powierzchnią stożkową obrotową. Prosta a jest osią, prosta t w każdym ze swych położeń tworzącą, a punkt W wierzchołkiem tej powierzchni. Każdy punkt tworzącej opisuje podczas jej obrotu koło na płaszczyźnie prostopadłej do osi, a każda płaszczyzna,

przechodząca przez oś, jest płaszczyzną symetrii tej powierzchni stożkowej. W dwóch położeniach, a mianowicie t_1 ($t'_1 t''_1$) i t_2 ($t'_2 t''_2$) poruszająca się tworząca jest równoległą do rzutni pionowej, a płaszczyzna $\varepsilon = (t_1, t_2)$ dzieli powierzchnię stożkową na dwie części. Część powierzchni, leżąca przed płaszczyzną ε , jest widoczna, część pozostała, niewidoczna; proste t_1 i t_2 stanowią więc zarys stożka dla widza, patrzącego z punktu niewłaściwego na rzutnię pionową. Proste t''_1 i t''_2 są zarysem stożka na rzutni pionowej, czyli jego rzutem pionowym.

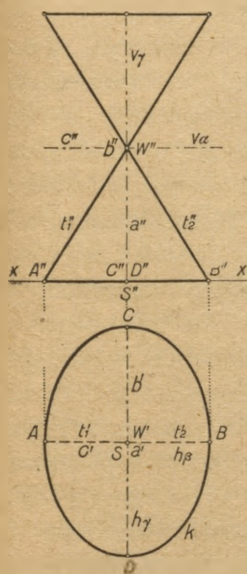
Rzut ukośny stożka obrotowego dla $\varphi = 45^\circ$, a stosunków skróceń $1 : \frac{1}{2} : 1$, przedstawia Rys. 394. Przyjawszy punkt S_u jako rzut ukośny środka koła, poprowadzimy przezeń prostą równoległą do x_u i drugą równoległą do y_u . Odmierzmy następnie $A_u S_u = B_u S_u = r$, jeśli r równe jest promieniowi



Rys. 394.

jako podstawy stożka. Odmierzwszy $C_u S_u = D_u S_u = \frac{r}{2}$, otrzymamy średnicę elipsy, sprzężoną ze średnicą $A_u B_u$. Z punktu S_u wykreślimy równoległą do osi z_u i odmierzymy $S_u W_u$ równe wysokości stożka. Styczne, wykreślone z punktu W_u do elipsy k_u , stanowią rzut ukośny tworzących konturowych stożka.

b) W środku S elipsy k (Rys. 395.), uważanej za kierownicę powierzchni stożkowej, poprowadzimy prostą pionową a ($a' a''$) i obierzemy na niej dowolny punkt W ($W' W''$). Proste, łączące punkt W z wszystkimi punktami elipsy, utworzą powierzchnię stożkową, która posiada trzy płaszczyzny symetrii prostokątnej, a mianowicie: płaszczyznę przechodzącą



Rys. 395.

przez prostą a i małą oś elipsy, płaszczyznę przechodzącą przez prostą a i dużą oś elipsy, i wreszcie płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez wierzchołek W . Prosta a jest jedną z trzech osi stożka, dwie dalsze przechodzą przez W równoległe do osi $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ elipsy k . Tworzące t_1 i t_2 , leżące na płaszczyźnie czołowej, są tworzącymi konturowymi powierzchni stożkowej, proste t_1'' i t_2'' stanowią zarys powierzchni na rzutni pionowej.

c) Tak więc rozróżniać będziemy dwie powierzchnie stożkowe rzędu drugiego: 1) powierzchnię stożkową obrotową, zwaną krótko stożkiem obrotowym i 2) powierzchnię stożkową rzędu drugiego nieobrotową, którą nazywać będziemy zawsze w skróceniu stożkiem. Słowo „stożek” odnosić się więc będzie zawsze do powierzchni rzędu drugiego, posiadającej trzy płaszczyzny symetrii prostokątnej (Rys. 395.); „stożek obrotowy” wywoła zawsze wyobrażenie powierzchni stożkowej rzędu drugiego, posiadającej nieograniczoną ilość płaszczyzn symetrii prostokątnej, a powstałej przez obrót prostej około osi, którą przecina. Podobnie, jak dla powierzchni walcowych rzędu drugiego, jest ta różnica w ilości płaszczyzn symetrii charakterystyczną także i dla powierzchni stożkowych rzędu drugiego.

134. Przekroje stożków płaszczyznami. Między śladem poziomym (podstawą) stożka, czy też stożka obrotowego, a jego przekrojem dowolną płaszczyznę zachodzi kolineacja, której środkiem jest wierzchołek stożka, osią ślad poziomy płaszczyzny siecznej, a promieniami kolineacji tworzące stożka. Każdemu punktowi śladu poziomego stożka odpowiada jeden punkt krzywej przekroju, leżący z nim na jednej tworzącej. Ponieważ liniami, odpowiadającymi kolineacyjnie kołu lub elipsie są: elipsa, hiperbola lub parabola, więc zarówno stożek obrotowy jak i stożek przeciąć można wzdłuż elipsy, hiperboli lub paraboli. W szczególności gdy płaszczyzna sieczna przecina wszystkie tworzące stożka w punktach właściwych, czyli, gdy nie jest równoległą do żadnej z nich, to otrzymana linia przekroju jest elipsą (Rys. 357.*); gdy płaszczyzna sieczna jest równoległą do dwóch tworzących stożka, to krzywa przekroju posiada dwa punkty niewłaściwe, a więc jest hiperbolą (Rys. 359.*); gdy wreszcie płaszczyzna sieczna jest równoległą do jednej tworzącej stożka, to linia przekroju posiada jeden punkt niewłaściwy i jest parabolą (Rys. 361.*).

Z powyższego wynika też wprost, że zależnie od położenia stożka obrotowego, czy też stożka, względem płaszczyzn rzutów, ślady ich mogą być elipsami, hiperbolami lub parabolami, że zatem krzywa, będąca śladem, podstawą, względnie kierownicą stożka, powierzchni tej bynajmniej nie określa i nie charakteryzuje. Elipsa może być śladem poziomym zarówno stożka jak i stożka obrotowego, podobnie jak koło, elipsa i parabola. O tem, czy mamy przed sobą stożek obrotowy, czy też stożek, stanowi nie rodzaj krzywej, będącej podstawą stożka, ale jedynie i wyłącznie ilość występujących tam płaszczyzn symetrii prostokątnej. Jeżeli ilość ta jest nieograniczona, to stożek jest obrotowy, a płaszczyzny prostopadłe do osi przecinają go wzdłuż kół. Jeżeli badana powierzchnia stożkowa posiada tych płaszczyzn symetrii tylko trzy, to jest stożkiem w znaczeniu odrębnem od stożka obrotowego. Sposób umożliwiający rozpoznanie stożka obrotowego, którego rzuty są dane, poznamy przy sposobności omawiania powierzchni obrotowych (ust. 148.).

Jeżeli prosta, łącząca środek elipsy lub hiperboli, które stanowią podstawę stożka, z wierzchołkiem tego stożka, jest prostopadłą do płaszczyzny podstawy, to stożek nosi nazwę prostego, w odróżnieniu od ukośnego.

Z tego, cośmy dotąd powiedzieli o powierzchni stożkowej rzędu drugiego wynika, że stożek ten może być prosty, mając za podstawę zarówno elipsę jak i hiperbolę. Stożek prosty, którego podstawą jest koło, jest stożkiem obrotowym.

Płaszczyzny, przechodzące przez wierzchołek stożka, podzielić się dadzą na trzy grupy. Do jednej należą te, które prócz wierzchołka nie posiadają ze stożkiem żadnych punktów ani linii wspólnych; drugą grupę stanowią płaszczyzny przecinające stożek wzdłuż dwóch tworzących, względnie — o ile bierzemy pod uwagę część powierzchni stożkowej, zawartej między wierzchołkiem a podstawą — w trójkącie. Trzecią grupę stanowią płaszczyzny, leżące na granicy obu wymienionych grup i posiadające po jednej tworzącej wspólnej ze stożkiem, czyli płaszczyzny styczne (ust. 128.).

Ponieważ rzut dwóch utworów (układów) płaskich środkowo kolineacyjnych, na dowolną płaszczyznę i w dowolnym kierunku, daje dwa układy środkowo kolineacyjne, złączone na tej płaszczyźnie rzutów (ust. 115.), więc między rzutami

poziomymi dwóch przekrojów stożka zachodzi kolineacja, której środkiem jest rzut poziomy wierzchołka stożka, a osią rzut poziomy krawędzi obu płaszczyzn siecznych. To samo odnosi się do rzutu pionowego tych dwóch przekrojów stożka; osią kolineacji jest rzut pionowy krawędzi obu płaszczyzn siecznych, a środkiem rzut pionowy wierzchołka stożka. Między śladem poziomym i pionowym stożka zachodzi kolineacja, której osią jest oś rzutów x , a środkiem wierzchołek stożka.

Podobnie jak przy walcu, polega wyznaczenie przekroju stożka daną płaszczyzną na wykreśleniu rzutów krzywej przekroju i na wyznaczeniu punktów styczności otrzymanych krzywych z zarysami stożka na obu rzutniach.

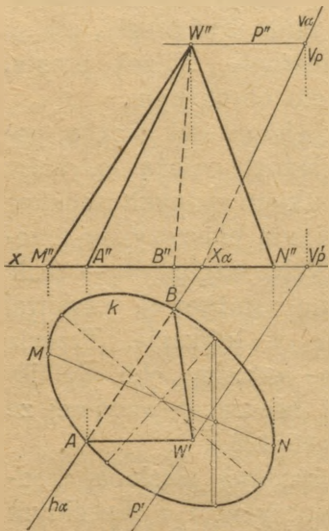
135. Przekroje powierzchni stożkowych wzdłuż dwóch tworzących. Wiadomo z poprzedniego ustępu, że pewna grupa płaszczyzn, przechodzących przez wierzchołek stożka, przecina go wzdłuż dwóch tworzących. Każda z tych płaszczyzn przetnie ślad, względnie podstawę stożka, w dwóch punktach, które połączone z wierzchołkiem dają owe dwie tworzące przekroju.

Tok rozwiązania zadania jest więc następujący: przez wierzchołek stożka prowadzimy prostą, a przez nią płaszczyznę, taką jednak, której krawędź z płaszczyzną podstawy przecina podstawę (ślad) w dwóch punktach. Proste, łączące te punkty z wierzchołkiem stożka, rozwiązują zadanie.

Przykłady.

a) Stożek, którego ślad poziomy jest elipsą (Rys. 396.), przecięliśmy płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$), przechodzącą przez prostą p ($p' p''$), którą to prostą poprowadziliśmy przez wierzchołek W ($W' W''$). Proste AW i BW są tworzącymi, wzdłuż których płaszczyzna α przecina stożek.

b) Weźmy pod uwagę stożek obrotowy, którego wierzchołek leży na rzutni poziomej (Rys. 397.). Płaszczyzna α ($h_\alpha v_\alpha$), przechodząca przez wierzchołek, przecina płaszczyznę



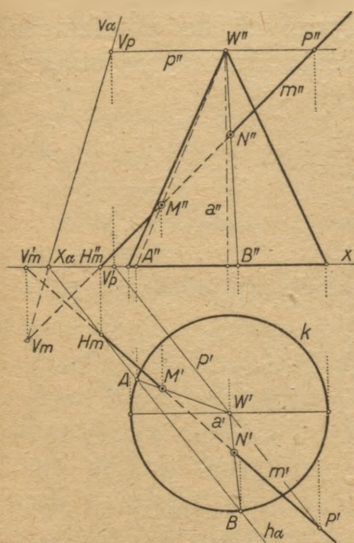
Rys. 396.

podstawy stożka w prostej m (m' m''), a koło k (k' k'') w punktach A (A' A'') i B (B' B''). Proste $A W$ i $B W$ rozwiązują zadanie.

136. Punkty przebicia się prostej z powierzchnią stożkową znajdziemy, podobnie jak punkty przebicia się prostej z walcem (ust. 132.), więc za pośrednictwem płaszczyzny, przechodzącej przez prostą i przecinającej powierzchnię stożkową — o ile możliwości — wzdłuż tworzących. Postąpimy więc w sposób następujący: Przez daną prostą i wierzchołek powierzchni poprowadzimy płaszczyznę, wyznaczmy tworzące, wzdłuż których płaszczyzna ta przecina powierzchnię stożkową, a punkty przecięcia się tych tworzących z prostą są szukanymi punktami.

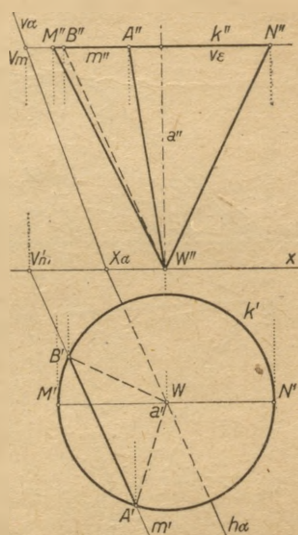
Przykłady.

a) Wyznaczyć punkty przebicia się prostej m (m' m'') ze stożkiem obrotowym (Rys. 398.). Pozioma prosta p (p' p''), przechodząca przez wierzchołek stożka i przecinająca daną prostą m (m' m'') w punkcie P (P' P''), wyznacza z tą ostatnią płaszczyznę α (h_α v_α), która przecina stożek wzdłuż tworzących $A W$ i $B W$. Punkty M (M' M'') i N (N' N'') rozwiązują zadanie.



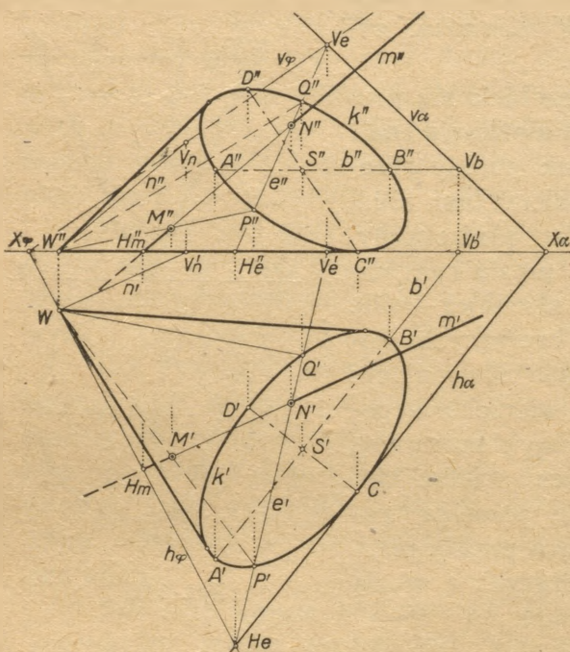
Rys. 398.

b) Wyznaczyć punkty przebicia się prostej m (m' m'') ze stożkiem, który styka się wzdłuż jednej tworzącej z rzutnią poziomą (Rys. 399.). Podstawa stożka, elipsa k (k' k''), przyjęta jest na płaszczyźnie α (h_α v_α) i styka się ze śladem h_α w punkcie C . Przez



Rys. 397.

wierzchołek stożka poprowadziliśmy prostą n (n' n''), równoległą do prostej m (m' m'') i wy-



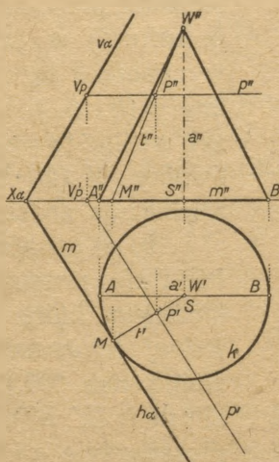
Rys. 399.

znaczaliśmy ślady płaszczyzny $\varphi \equiv (m, n)$. Krawędź e (e' e'') płaszczyzny α i φ przecina elipsę k (k' k'') w punktach P (P' P'') i Q (Q' Q''), które wraz z wierzchołkiem W wyznaczają przekrój stożka płaszczyzną φ . Boki PW i PQ , trójkąta PQW , przecinają się z prostą m w punktach M (M' M'') i N (N' N''), stanowiących rozwiązanie zadania.

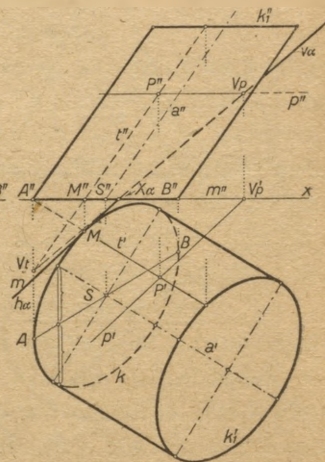
137. Przykłady płaszczyzn stycznych do powierzchni stożkowych i walcowych. Z określenia płaszczyzny stycznej

do stożka, podanego w ust. 128., wynika, że

płaszczyzna styczna w punkcie P (P' P'') do stożka obrotowego (Rys. 400.) jest styczną w każdym punkcie tworzącej t (t' t''), na której leży punkt P . Styczna m (m' m'')



Rys. 400.

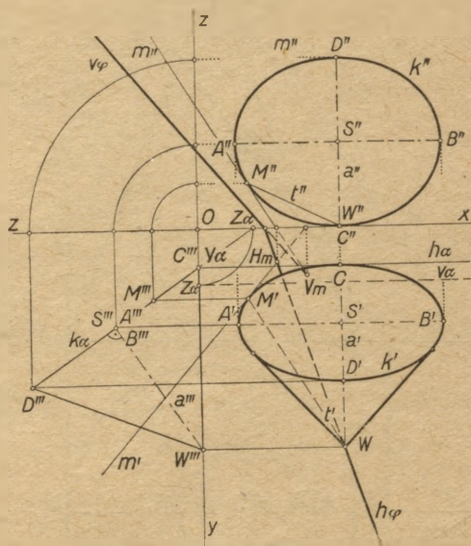


401.

w punkcie M śladu poziomego k stożka obrotowego, wyznacza wraz z tworzącą t żadaną płaszczyznę styczną α . Ślad poziomy tej płaszczyzny schodzi się z prostą m ; w celu wyznaczenia śladu pionowego, użyliśmy pośrednictwa prostej poziomej p (p' p''), przechodzącej przez punkt P (P' P'') równoległe do prostej m .

Rys. 401. przedstawia rzuty walca eliptycznego i zupełnie z poprzednią analogiczną konstrukcją śladów płaszczyzny stycznej do walca w punkcie P (P' P''), przyjętym na tworzącej t (t' t'').

Przy pomocy rzutni bocznej, obróconej około osi y na rzutnię poziomą (Rys. 402.), wykreśliśmy rzuty stożka obrotowego, stykającego się z rzutnią poziomą wzdłuż tworzącej prostopadłej do osi x . Na stożku tym obraliśmy tworzącą t (t' t'') i przez nią poprowadziliśmy płaszczyznę styczną φ (h_φ v_φ) do stożka. Płaszczyzna φ wyznaczona jest tworzącą t i styczną m (m' m'') do podstawy stożka k (k' k'') w punkcie M (M' M'').

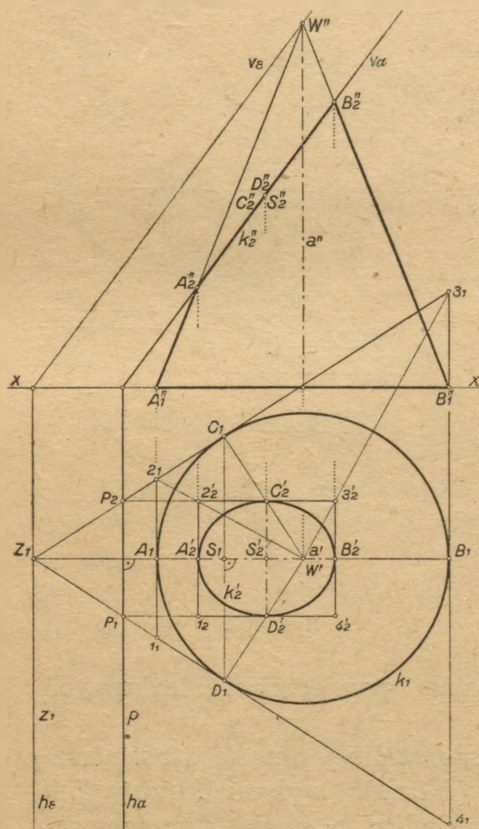


Rys. 402.

138. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdłuż elips.

a) *Stożek obrotowy, o osi pionowej, przecięty jest płaszczyzną pionowo rzucającą α (h_α v_α); wykreślić rzuty linii przekroju* (Rys. 403.). Między śladem k_1 stożka a rzutem poziomym elipsy przekroju k_2 zachodzi — jak wiemy — kolineacja, której środkiem jest rzut poziomy wierzchołka stożka, a osią ślad poziomy h_α płaszczyzny siecznej α . Ślad poziomy h_ϵ płaszczyzny ϵ , poprowadzonej przez wierzchołek równoległe do płaszczyzny siecznej, jest osią wzajemną z_1 . Osi $A_2' B_2'$ i $C_2' D_2'$ elipsy k_2' znajdziemy w sposób, omówiony szczegółowo w ust. 120. pt. a). Rys. 357*. Więc:

z punktu W' kreślimy prostopadłą do z_1 , a z punktu Z_1 styczne do k_1 . Trapezowi równoramiennemu $1_1 2_1 3_1 4_1$, opisanemu na kole k_1 , odpowiada w układzie elipsy k_2 prostokąt $1_2' 2_2' 3_2' 4_2'$, który otrzymamy, prowadząc przez punkty P_1 i P_2 proste równoległe do $Z_1 B_1$ i rzucając na nie z punktu W' wierzchołki trapezu. Punktem A_1, B_1, C_1 i D_1 odpowiedzą wierzchołki A_2', B_2', C_2' i D_2' elipsy k_2' . Rzut pionowy k_2'' elipsy przekroju leży na śladzie pionowym płaszczyzny siecznej.



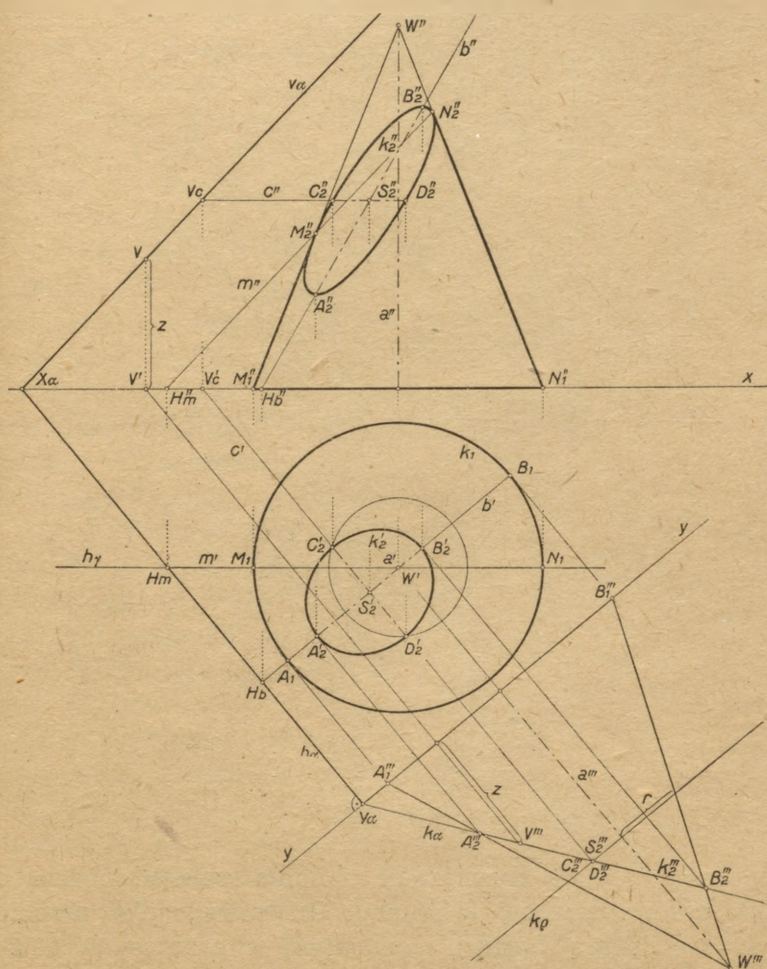
Rys. 403.



Rys. 404.

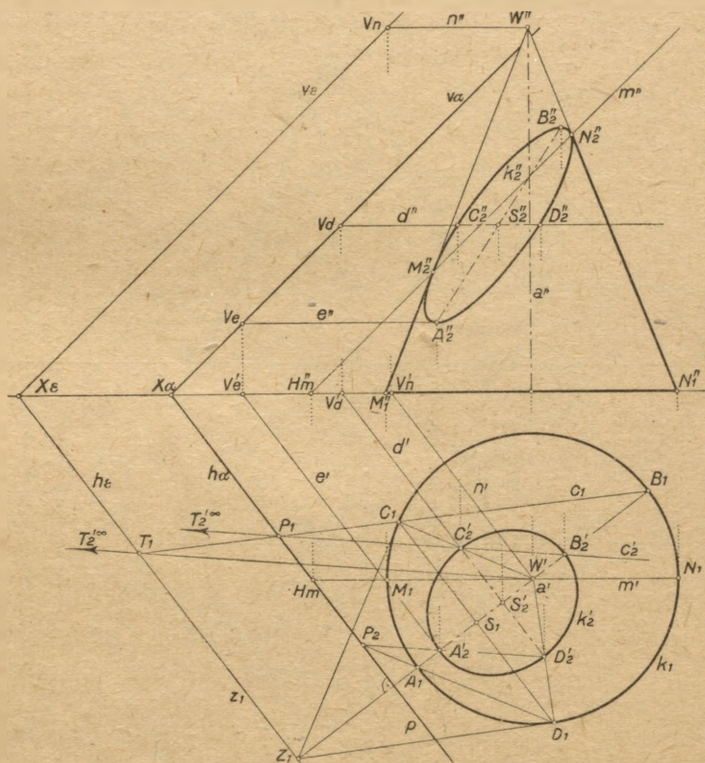
Inne rozwiązanie tego samego zadania podaje Rys. 404. Dużą oś $A_2' B_2'$ elipsy k_2' otrzymamy wprost z rzutu pionowego. Aby wyznaczyć oś małą tej elipsy, poprowadźmy przez środek S_2 (S_2' S_2'') odcinka $A_2 B_2$, a więc przez środek S_2 elipsy k_2 , prostopadłą p (p' p'') do rzutni pionowej i wyznaczmy

punkty przebiecia się jej ze stożkiem. Punkty te, stanowiące dwa dalsze wierzchołki elipsy, znajdziemy w sposób następujący: Przez prostą p i wierzchołek W stożka poprowadzimy płaszczyznę γ ($h_\gamma v_\gamma$), która przetnie stożek wzdłuż dwóch tworzących, a mianowicie $C_1 W$ i $D_1 W$. Tworzące te przetną prostą p w szukanych punktach C_2 ($C_2' C_2''$) i D_2 ($D_2' D_2''$). Do tego samego wyniku dojdziemy, prowadząc przez prostą p płaszczyznę poziomą ρ , która przetnie stożek wzdłuż koła o promieniu r . Punkty przecięcia się tego koła z prostą p są punktami C_2 ($C_2' C_2''$) i D_2 ($D_2' D_2''$).



Rys. 405.

b) Stożek obrotowy o osi pionowej przeciąć dowolną płaszczyzną α . Przez przyjęcie trzeciej płaszczyzny rzutów, prostopadłej do płaszczyzny siecznej (Rys. 405.) i wyznaczenie trzeciego rzutu stożka, sprowadzimy zadanie do poprzedniego. Rzut pionowy elipsy przekroju k_2 jest elipsą k_2'' , której para średnic sprzężonych $\overline{A_2'' B_2''}$ i $\overline{C_2'' D_2''}$ odpowiada osiom $\overline{A_2' B_2'}$ i $\overline{C_2' D_2'}$ elipsy k_2' . Przechodząca przez oś stożka czołowa płaszczyzna γ przecina płaszczyznę α w prostej $\hat{m}$ ($m' m''$). Punkty przecięcia się M_2'' i N_2'' , prostej m'' z rzutem pionowym stożka, są punktami styczności elipsy k_2'' z tworzącymi konturowymi na rzutni pionowej.



Rys. 406.

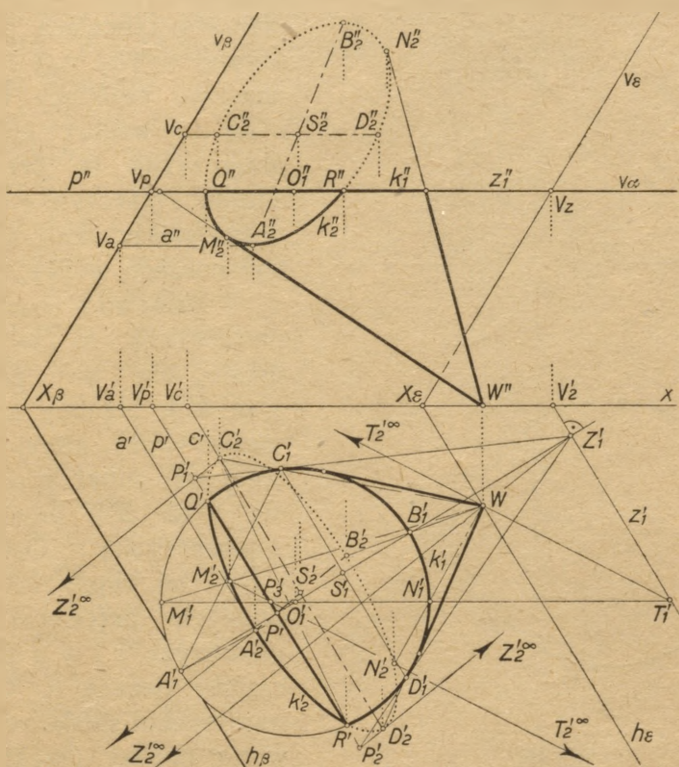
Drugi sposób rozwiązania zadania polegać będzie na zastosowaniu związków kolineacji środkowej, jaka zachodzi między podstawą (śladem poziomym) a przekrojem stożka (Rys. 406.). Ślad poziomy h_α płaszczyzny siecznej jest osią

kolineacji, a ślad poziomy h_ϵ płaszczyzny, poprowadzonej przez wierzchołek W równolegle do płaszczyzny siecznej, osią wzajemną z_1 , kolineacji środkowej dwóch układów płaskich, złączonych zapomocą rzutu prostokątnego na płaszczyźnie poziomej rzutów. Punkt W' jest środkiem tej kolineacji. Rozwiązanie zadania nie nastręczy zresztą żadnych nowych trudności. Z punktu W' wykreślimy prostopadłą do z_1 , a z punktu Z_1 styczne do koła k_1 . Cięciwie styczności $\overline{C_1 D_1}$ w kole odpowie oś $\overline{C_2' D_2'}$ elipsy k_2' , a średnicy $\overline{A_1 B_1}$ oś $\overline{A_2' B_2'}$ tej elipsy. Prostej c_1 , łączącej punkty B_1 i C_1 koła k_1 , odpowiada w układzie elipsy k_2' prosta c_2' , przechodząca przez punkt P_1 równolegle do prostej $W' T_1$. Punkty B_1 i C_1 , rzucane na c_2' z punktu W' , wyznaczają wierzchołki B_2' i C_2' elipsy k_2' . Ponieważ cięciwa $\overline{C_1 D_1}$ jest równoległą do osi kolineacji $h_\alpha \equiv p$, więc oś $\overline{C_2' D_2'}$ elipsy k_2' będzie równoległą do cięciwy $\overline{C_1 D_1}$. Znając środek S_2' elipsy, odpowiadający punktowi S_1 i wierzchołki B_2' i C_2' , otrzymamy dwa dalsze wierzchołki elipsy k_2' , a mianowicie A_2' i D_2' , odmierzając $\overline{A_2' S_2'} = \overline{B_2' S_2'}$ i $\overline{D_2' S_2'} = \overline{C_2' S_2'}$. Rzut pionowy punktów A_2, B_2, C_2, D_2 i S_2 znajdziemy za pośrednictwem prostych tworzących płaszczyzny siecznej, otrzymując parę średnic sprzężonych, wyznaczających elipsę k_2'' . Krawędź m ($m' m''$), płaszczyzny siecznej α i płaszczyzny czołowej, przechodzącej przez wierzchołek stożka, przecina tworzące konturowe w punktach M_2 i N_2 , których rzuty pionowe M_2'' i N_2'' są punktami styczności elipsy k_2'' z zarysem stożka na rzutni pionowej.

c) Wyznaczyć rzuty elipsy, wzdłuż której płaszczyzna α ($h_\alpha v_\alpha$) przecina stożek (Rys. 407.). Koło, jako ślad poziomy stożka i rzuty wierzchołka są dane. Podobnie jak w zadaniu poprzednim, posłużymy się i tu związkiem kolineacji środkowej, łączącej ślad i przekrój stożka. Ślad poziomy h_ϵ płaszczyzny ϵ , poprowadzonej przez wierzchołek stożka równolegle do płaszczyzny siecznej α , jest osią wzajemną z_1 . Ze środka O_1 koła k_1 wykreślimy prostopadłą do osi z_1 , a z punktu Z_1 styczne do k_1 . Równoramiennemu trapezowi $1_1 2_1 3_1 4_1$, opisanemu na kole k_1 i stykającemu się z nim w punktach A_1, B_1, C_1 i D_1 , odpowie w układzie elipsy przekroju k_2' równoległobok, opisany na tej elipsie i styczny do niej w punktach A_2', B_2', C_2' i D_2' . Odcinki $\overline{A_2' B_2'}$ i $\overline{C_2' D_2'}$,

odnoszące wyznaczą na rzucie pionowym stożka żądane punkty M_2'' i N_2'' .

d) Wykreślić rzuty elipsy, wzdłuż której płaszczyzna β ($h_\beta v_\beta$) przecina stożek, którego podstawa (koło) leży na płaszczyźnie poziomej α (Rys. 408.), a wierzchołek na rzutni poziomej. Krawędź p ($p' p''$) płaszczyzn α i β jest osią, a krawędź z_1 ($z_1' z_1''$) płaszczyzny α i płaszczyzny ε , przechodzącej



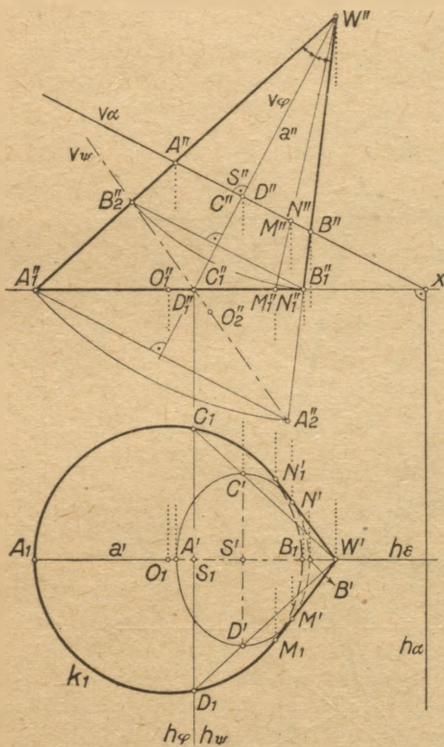
Rys. 408.

przez wierzchołek W równoległe do płaszczyzny β , osią wzajemną kolineacji, jaka zachodzi między kołem k_1 ($k_1' k_1''$) jako podstawą, a elipsą k_2 ($k_2' k_2''$) jako przekrojem stożka. Średnice sprzężone $A_2' B_2'$ i $C_2' D_2'$ elipsy k_2' i średnice sprzężone $A_2'' B_2''$ i $C_2'' D_2''$ elipsy k_2'' , a także i punkt M_2'' znajdziemy w ten sam sposób, jak w Rys. 407.

139. Kołowe przekroje stożka. Koło k_1 o środku O_1 (Rys. 409.) uważamy za ślad poziomy, a punkt W ($W' W''$) za wierzchołek stożka, przyczem niechaj prosta $O_1 W$ jest równoległą do rzutni pionowej. Czołowa płaszczyzna ε , przechodząca przez prostą $O_1 W$, dzieli stożek na dwie części, symetryczne względem tej płaszczyzny i przecina go wzdłuż tworzących konturowych $W A_1$ i $W B_1$. Wykreślmy dwusieczną

a ($a' a''$) tych tworzących i poprowadźmy przez nią pionowo-rzucającą płaszczyznę φ ($h_\varphi v_\varphi$) i wyznaczmy tworzące $C_1 W$ i $D_1 W$, wzdłuż których płaszczyzna ta przecina stożek. Płaszczyzna φ jest drugą płaszczyzną symetrii naszego stożka.

Pionowo - rzucająca płaszczyzna α ($h_\alpha v_\alpha$), prostopadła do prostej a ($a' a''$), przetnie stożek wzdłuż elipsy, której środkiem jest punkt przecięcia się S ($S' S''$) prostej a z płaszczyzną α . Osi AB i CD tej elipsy leżą na prostych przecięcia się płaszczyzn ε i φ z płaszczyzną sieczną α . Część powierzchni stożkowej, zawarta między przekrojem płaszczyzną α a wierz-



Rys. 409.

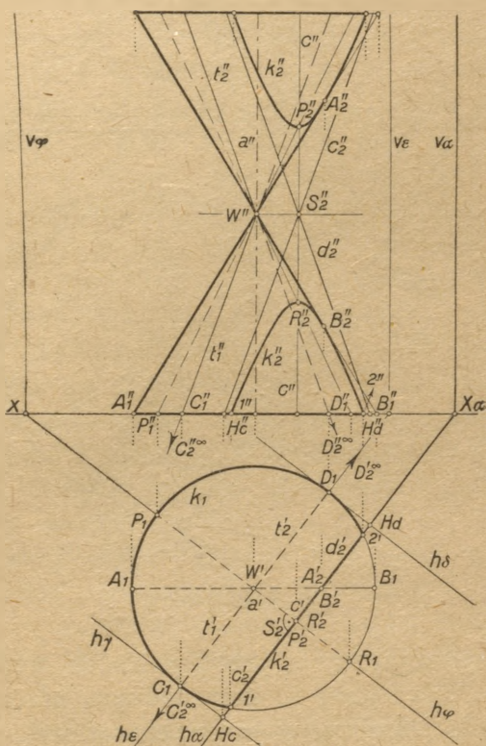
chołkiem, jest stożkiem prostym (ust. 134.). Wykreślmy z punktów A_1'' i B_1'' prostopadłe do prostej a'' i oznaczmy punkty przecięcia się ich z prostymi $W'' B_1''$, względnie $W'' A_1''$ literami A_2'' i B_2'' . Połączmy punkty A_2'' i B_2'' prostą, a przez nią poprowadźmy pionowo-rzucającą płaszczyznę ψ ($h_\psi v_\psi$). Przekrój stożka tą płaszczyzną będzie linią przystającą do śladu poziomego stożka, gdyż między obu tymi przekrojami zachodzi symetria prostokątna ze względu na płaszczyznę φ ,

jako płaszczyznę symetrii. Przekrój więc stożka płaszczyzną ψ jest kołem. Każda płaszczyzna równoległa do ψ przecina stożek wzdłuż koła, podobnie jak płaszczyzny poziome. W ten sposób wykazaliśmy, że powierzchnię stożkową przeciąć można dwoma układami płaszczyzn równoległych wzdłuż kół.

Fakt istnienia dwóch układów kół na powierzchni stożkowej rzędu drugiego, wyróżnia ją od stożka obrotowego, na którym znajduje się tylko jeden układ kół, a to mianowicie na płaszczyznach prostopadłych do osi tego stożka.

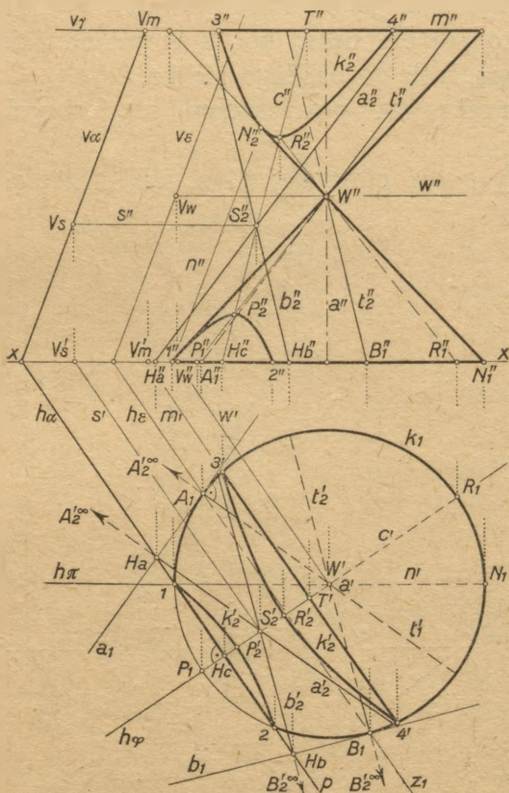
140. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdłuż hiperbol.

a) Stożek obrotowy o osi pionowej (Rys. 410.) przeciąć płaszczyzną poziomorzucającą α ($h_\alpha v_\alpha$). Płaszczyzna ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$), przechodząca przez oś stożka równoległe do płaszczyzny siecznej, przecina go wzdłuż tworzących t_1 ($t'_1 t''_1$) i t_2 ($t'_2 t''_2$). Stąd więc, płaszczyzna sieczna α , jako równoległa do tych dwóch tworzących stożka, przecina go wzdłuż krzywej rzędu drugiego, posiadającej dwa punkty niewłaściwe, a więc wzdłuż hiperboli. Płaszczyzna $\varphi \perp \alpha$ przecina tę ostatnią w prostej c ($c' c''$), a stożek wzdłuż tworzących $P_1 W$ i $R_1 W$. Punkty przecięcia się P_2 ($P'_2 P''_2$) i R_2 ($R'_2 R''_2$) tych tworzących z prostą c są punktami przecięcia się tej prostej ze stożkiem, a zarazem wierzchołkami hiperboli k_2 ($k'_2 k''_2$). Środek S_2 odcinka $P_2 R_2$ jest środkiem



Rys. 410.

hiperboli k_2 , środek S_2'' odcinka $\overline{P_2'' R_2''}$ jest więc wierzchołkiem hiperboli k_2'' . Płaszczyzny γ i δ , styczne do stożka wzdłuż tworzących t_1 i t_2 , przecinają płaszczyznę α w prostych c_2 ($c_2' c_2''$) i d_2 ($d_2' d_2''$), które są równoległe do tworzących t_1 i t_2 , przechodzą przez punkt S_2 i są asymptotami hiperboli k_2 . Punkty przecięcia się 1 i 2 śladu h_α z kołem k_1 są punktami hiperboli k_2 , których dalsze punkty znajdziemy



Rys. 411.

w sposób poznany w ust. 121. pkt. d. Płaszczyzna α przecina pł. czołową, przechodzącą przez oś stożka, w prostej pionowej, która wyznacza na tworzących konturowych punkty A_2 ($A_2' A_2''$) i B_2 ($B_2' B_2''$). W punktach tych styka się hiperbola z tworzącymi konturowymi stożka.

b) Stożek obrotowy o osi pionowej przeciąć wzdłuż hiperboli płaszczyzną, nachyloną do obu rzutni (Rys. 411.) Przez wierzchołek stożka poprowadzona płaszczyzna ε ($h_\varepsilon v_6$) przecina go wzdłuż tworzących t_1 ($t_1' t_1''$) i t_2 ($t_2' t_2''$); płaszczyzna α , równoległa do

płaszczyzny ε , przetnie stożek wzdłuż hiperboli k_2 ($k_2' k_2''$). Płaszczyzna φ , przechodząca przez oś stożka i prostopadła do płaszczyzny α , przecina stożek wzdłuż tworzących $P_1 W$ i $R_1 W$, a płaszczyznę α w prostej c ($c' c''$), która jest, podobnie jak w Rys. 410., osią symetrii krzywej przekroju. W szczególności rzut poziomy c' jest osią symetrii prostokątnej, a więc osią hiperboli k_2' , prosta zaś c'' osią symetrii

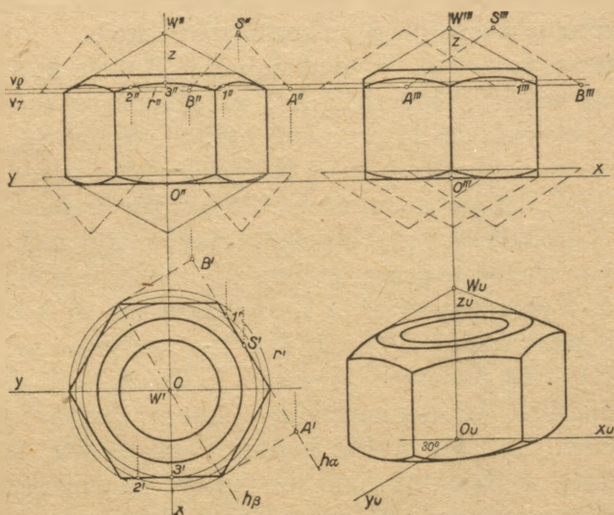
ukośnej hiperboli k_2'' . Kierunek tej symetrii ukośnej jest równoległy do osi rzutów x . Punkty przecięcia się P_2 (P_2' P_2'') i R_2 (R_2' R_2'') prostej c (c' c'') z tworzącymi WP_1 i WR_1 , są punktami hiperboli k_2 , przyczem punkty P_2' i R_2' są wierzchołkami hiperboli k_2' . Asymptoty hiperboli k_2 (k_2' k_2'') znajdziemy przy pomocy związków kolineacji, zachodzących między śladem poziomym k_1 stożka, a jego przekrojem płaszczyzną α . Ślad h_α jest osią kolineacji, ślad h_e osią wzajemną z_1 (porównaj Rys. 359.*), a punkt W' środkiem kolineacji dwóch układów płaskich (pł. α i rzutni poziomej), złączonych zapomocą rzutu prostokątnego na rzutni poziomej).

Stycznym a_1 i b_1 w punktach A_1 i B_1 koła k_1 odpowiedzą asymptoty a_2' i b_2' hiperboli k_2' , przechodzące przez punkty H_a i H_b równoległe do promieni t_1' i t_2' . Punkt S_2' , w którym przecinają się asymptoty a_2' i b_2' , jest środkiem hiperboli k_2' , a punkt S_2'' , leżący na prostej c'' i będący środkiem odcinka $P_2''R_2''$, środkiem hiperboli k_2'' . Asymptoty a_2'' i b_2'' tej ostatej przechodzą przez punkty H_a'' i H_b'' , równoległe do t_1'' i t_2'' . Wykreślmy jeszcze krawędź m (m' m'') płaszczyzn α i γ , to punkty 3 ($3'$ $3''$) i 4 ($4'$ $4''$) — podobnie jak 1 ($1'$ $1''$) i 2 ($2'$ $2''$) — są punktami hiperboli k_2 (k_2' k_2''). Wykreśliwszy rzuty hiperboli k_2 , wyznaczymy jeszcze punkty styczności hiperboli k_2'' z tworzącymi konturowemi stożka tak, jak to uczyniliśmy w Rys. 406. Szukane punkty są punktami przecięcia się rzutu pionowego n'' , krawędzi n płaszczyzn α i π , z tworzącymi konturowemi stożka na rzutni pionowej. W naszym przykładzie płaszczyzna π przechodzi przez punkt 1, przez który to punkt przejdzie też i krawędź n . Wobec tego punkt $1''$ jest jednym, a punkt N_2'' drugim punktem styczności hiperboli k_2'' z zarysem stożka na rzutni pionowej.

Inne rozwiązanie powyższego zadania polegałoby na wprowadzeniu trzeciej rzutni, prostopadłej do płaszczyzny siecznej. Tym sposobem — podobnie jak w przypadku przekroju stożka wzdłuż elipsy (Rys. 405.) — sprowadzilibyśmy zadanie do poprzedniego.

c) *Naśrubek*. Jako przykład przekrojów stożka wzdłuż hiperbol posłużyć może znany powszechnie element maszynowy, naśrubek (Rys. 412.), który spotykamy wykonany z żelaza, mosiądzu lub niklu. Geometrycznie wyobrazić sobie możemy powstanie naśrubka w ten sposób, że dwa stożki

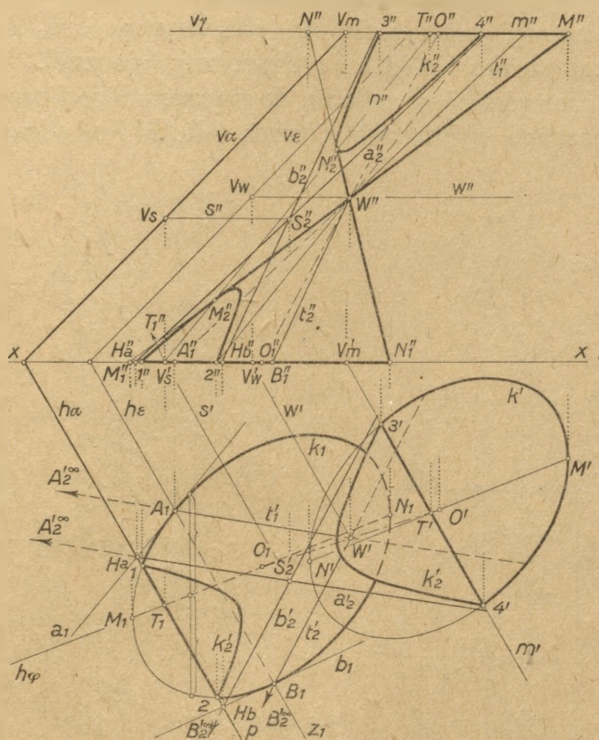
obrotowe o wspólnej kierownicy i o kątach wierzchołkowych, równych 120° , przecięte są sześcioma płaszczyznami równoległymi do osi stożka, a tworzącymi umiarowy graniastosłup sześciościenny. Następnie stożki te ograniczono dwiema płaszczyznami prostopadłymi do osi. Na Rys. 412, którego odczytanie i odtworzenie przebiegu konstrukcyi pozostawiamy czytelnikowi, narysowaliśmy też rzut ukośny naśrubka, a to dla $\varphi = 30^\circ$, a dla stosunków skróceń $x:y:z = 1:1/2:1$.



Rys. 412.

d) Stożek, którego ślad poziomy k_1 jest elipsą, a który ograniczony jest ponadto przekrojem poziomą płaszczyzną γ , przeciętą wzdłuż hiperboli (Rys. 413.). Zadanie rozwiązaliśmy przy pomocy związków kolineacyi środkowej tak, jak Rys. 411. Stycznym a_1 i b_1 do elipsy k_1 w punktach A_1 i B_1 , w której oś wzajemna $z_1 \equiv h_e$ elipsę tę przecięła, odpowiadają asymptoty a_2 (a_2' a_2'') i b_2 (b_2' b_2'') hiperboli przekroju k_2 (k_2' k_2''). Wyznamy średnicę $M_1 N_1$ elipsy k_1 , sprzężoną z kierunkiem prostopadłym do osi x i średnicę $M' N'$ elipsy k_1 , sprzężoną z tym samym kierunkiem, to prosta $TT_1 \equiv n$ jest krawędzią płaszczyzny siecznej α i płaszczyzny, przechodzącej przez średnice $M N$ i $M_1 N_1$. Punkty M_2'' i N_2'' , w których prosta n''

przecina proste $M_1'' M''$ i $N_1'' N''$, są punktami styczności hiperboli k_2'' z zarysem stożka na rzutni pionowej.

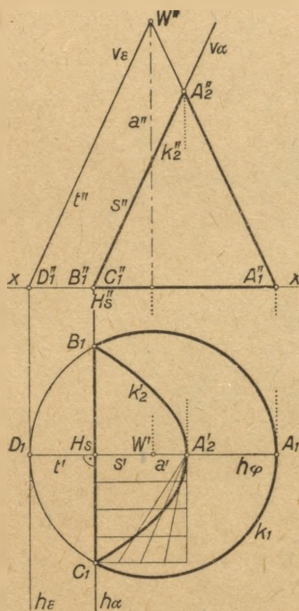


Rys. 413.

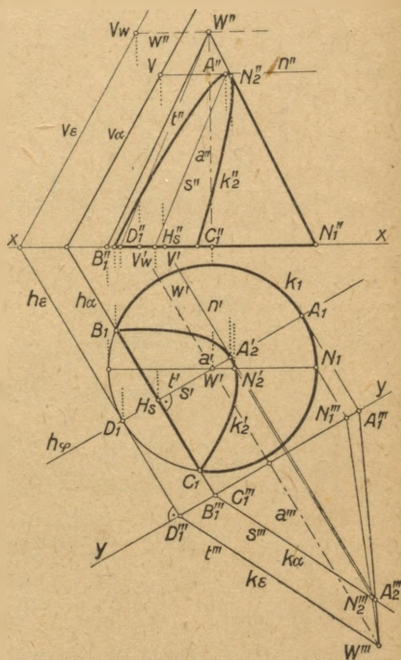
141. Przykłady przekrojów powierzchni stożkowych wzdluż parabol.

a) Stożek obrotowy przecięć wzdluż paraboli płaszczyzną rzucającą. Płaszczyzna sieczna musi być równoległą do jednej tworzącej stożka, a mianowicie do jednej z dwóch tworzących konturowych. W przypadku, przedstawionym na Rys. 414., poprowadziliśmy płaszczyznę sieczną α ($h_\alpha v_\alpha$) równolegle do tworzącej t ($t' t''$). Punkt A_2 ($A_2' A_2''$) jest wierzchołkiem, a punkty B_1 ($B_1' B_1''$) i C_1 ($C_1' C_1''$) punktami paraboli k_2 ($k_2' k_2''$). Oś s' paraboli k_2' schodzi się z prostą t' , a dalsze punkty znajdziemy przy pomocy konstrukcyi, poznanej w ust. 121. pkt. f.

b) Dany stożek obrotowy przeciąć wzdluż paraboli (Rys. 415.). Na stożku obierzemy tworzącą l (l' l'') i wzdluż niej poprowadzimy płaszczyznę styczną ε (h_ε v_ε). Płaszczyzna $\alpha \parallel \varepsilon$ przetnie stożek wzdluż paraboli. Przyjmijmy trzecią rzutnię, prostopadłą do płaszczyzny ε i wykreślmy trzeci rzut stożka i ślad k_α płaszczyzny siecznej. Tym sposobem sprowadziliśmy zadanie do poprzedniego i przy pomocy rzutu bocznego wyznaczili wierzchołek A_2' i oś s' paraboli k_2' .



Rys. 414.

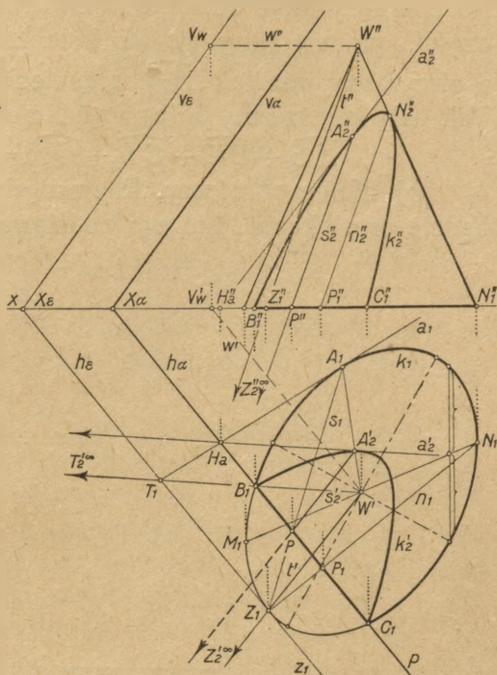


Rys. 415.

Przy pomocy prostej n (n' n''), obranej na płaszczyźnie α , otrzymamy punkt A_2'' (Rys. 415. należy uzupełnić, dopisując u dołu litery A'' liczbę 2), który połączony z H_s'' daje prostą s'' , będącą średnicą paraboli. Punkty C_1'' i D_1'' paraboli są znane, dalsze jej punkty otrzymamy przez zastosowanie konstrukcji, poznanej w ust. 121. Rys. 372. — uwzględniając, że prosta n'' jest styczną do paraboli w punkcie A_2'' .

c) Wyznaczyć przekrój stożka, którego ślad poziomy jest elipsą, wzdluż paraboli (Rys. 416.). Zadanie rozwiązaliśmy przez zastosowanie kolineacji środkowej, jaka łączy ślad stożka

z jego przekrojem. Najpierw przez przyjętą tworzącą $l(l' l'')$ stożka poprowadziliśmy do niego płaszczyznę styczną $\varepsilon (h_\varepsilon v_\varepsilon)$, a do niej płaszczyznę równoległą $\alpha (h_\alpha v_\alpha)$. Ślad h_α jest osią kolineacji, ślad h_ε osią wzajemną, a punkt W' środkiem kolineacji. Stycznej a_1 do elipsy k_1 w punkcie A_1 odpowiada styczna a_2' do paraboli k_2' w punkcie A_2' . Dowolnej ilości punktów elipsy k_1 podporządkujemy punkty paraboli k_2' , a te, przeniesione na rzutnię pionową, są punktami paraboli k_2'' .



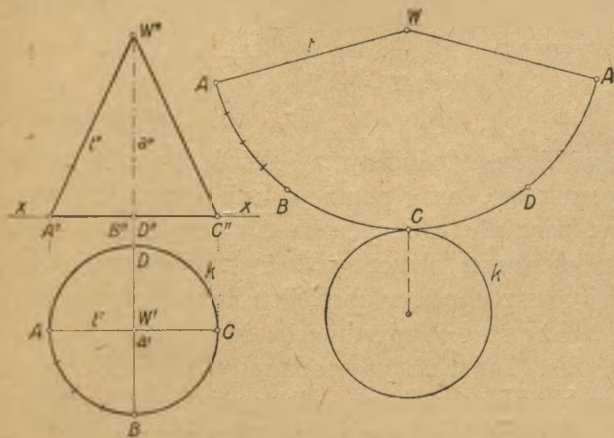
Rys. 416.

142. O rozwijaniu powierzchni stożkowych i walcowych na płaszczyźnie. Wspomnieliśmy w ust. 125.,

że powierzchnie stożkowe i walcowe należą do grupy powierzchni rozwijalnych na płaszczyźnie. W tym miejscu zajmiemy się konstrukcyjnym rozwiązaniem tego zadania, przyczem odnośnie

do powierzchni stożkowych, ograniczymy się jedynie do stożka obrotowego.

a) Stożek obrotowy. Rozwinięcie stożka obrotowego (Rys. 417.) jest wycinkiem koła, zakreślonego promieniem

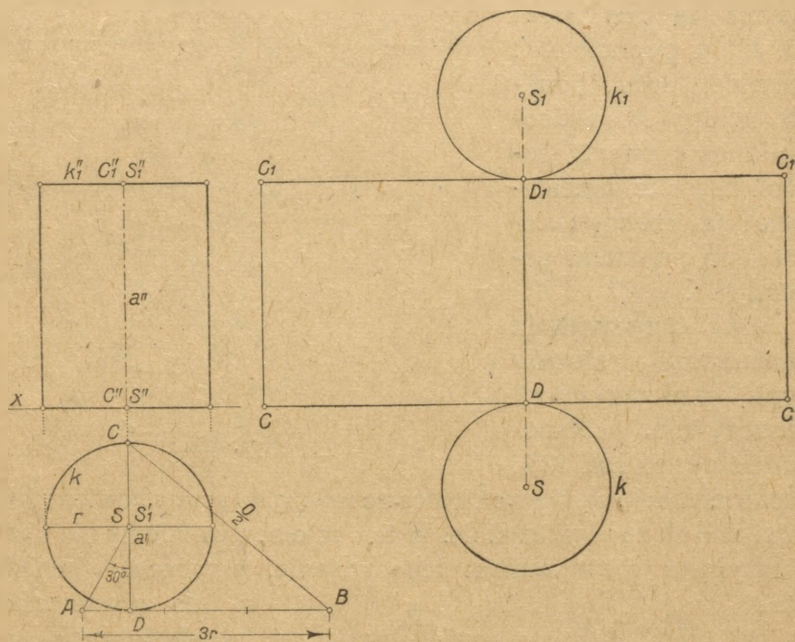


Rys. 417.

równym długości tworzącej stożka. Długość łuku koła równa jest długości obwodu koła k , które stanowi podstawę stożka. Podzieliwszy więc ćwiartkę AB koła k np. na cztery równe części, przeniesiemy je na koło zakreślone promieniem t , a otrzymany tam łuk $\widehat{AB}$ przeniesiemy jeszcze trzykrotnie. Tak tedy otrzymamy w przybliżeniu

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CD} + \widehat{DA} = \widehat{AA} = 2t\pi.$$

b) *Walec obrotowy*. Rozwinięcie tego walca (Rys. 418.) będzie prostokątem, którego podstawa $\overline{CC}$ równa jest obwo-



Rys. 418.

dowi koła. Ponieważ jednak ludolfiny π , jako liczby przestępnie niewymiernej, rysunkowo, przy pomocy linii i cyrkla, otrzymać nie możemy, więc długość odcinka $\overline{CC}$ może być tylko w przybliżeniu równą obwodowi koła k . Jednym z najbardziej znanych i powszechnie, w obcej literaturze, cytowanych sposobów przybliżonego rozwinięcia koła (t. zw. kwadratury koła), jest konstrukcja podana w r. 1685. przez polskiego jezuitę Kochłańskiego. W punkcie D kreślimy styczną do koła, a ze środka S prostą SA , zawierającą z pro-

mieniem SD kąt 30° . Od punktu A odmierzymy odcinek $AB = 3r$, to odcinek BC równy jest w przybliżeniu połowie obwodu koła. W istocie bowiem:

$$CB^2 = CD^2 + (3r - r \operatorname{tg} 30^\circ)^2, \text{ a ponieważ}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ a } \overline{CD} = 2r, \text{ więc:}$$

$$\overline{CB^2} = 4r^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{r^2 (40 - 6\sqrt{3})}{3}$$

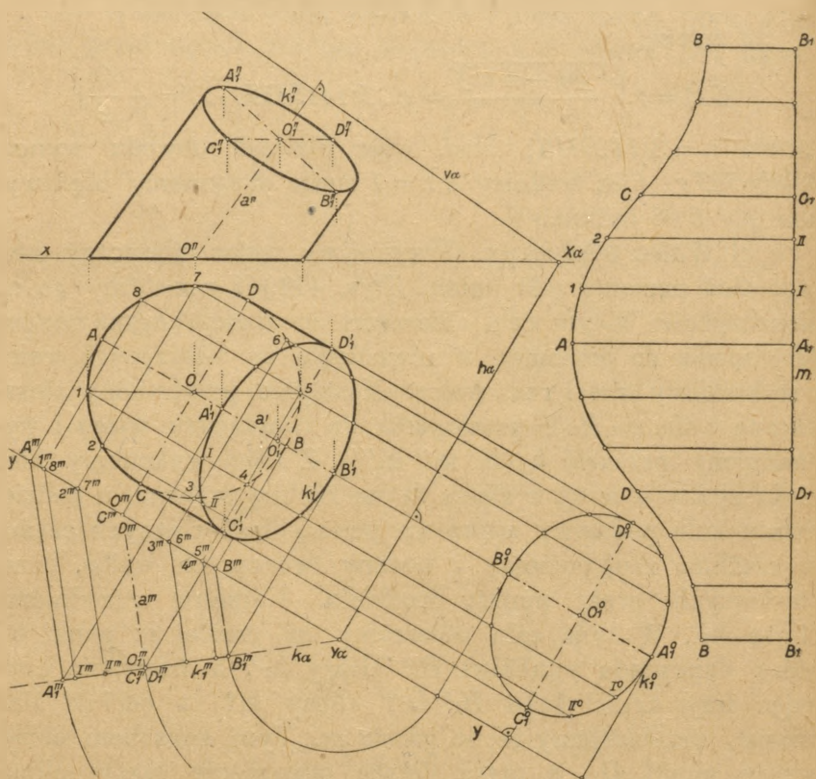
a zatem:

$$\overline{CB} = r \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} = r \cdot 3.1415333... = \sim \frac{0}{2}$$

Liczba $\pi = 3.1415916$; błąd więc dla pół obwodu wynosi $0.0000583r$; (dla średnicy $2r = 1$ meter otrzymamy błąd wynoszący 0.06 milimetra).

c) *Walec eliptyczny.* Przyjmijmy walec eliptyczny, którego ślad poziomy jest kołem (Rys. 419.) i rozwinmy go na płaszczyźnie. W tym celu obierzemy nową płaszczyznę rzutów, prostopadłą do poziomej, a równoległą do tworzących walca i wykreślimy trzeci rzut walca. Następnie przyjmiemy płaszczyznę α (h_α v_α k_α), prostopadłą do tworzących walca i wyznaczmy przekrój k_1 (k_1' k_1'' k_1'''). Z kolei wykonamy kład płaszczyzny α wraz z elipsą k_1 na rzutnię poziomą, a podzieliwszy koło podstawy walca na pewną ilość równych części, wykreślimy rzut poziomy i boczny tworzących walca, przechodzących przez punkty podziału. Najpierw rozwinie elipsę k_1^0 . W tym celu obierzemy na prostej m punkt B_1 , który odpowiada punktowi B_1^0 elipsy k_1^0 , a następnie uważając trzy części łuku $B_1^0 D_1^0$ elipsy k_1^0 za odcinki linii prostej, przeniesiemy je na prostą m . Tym sposobem otrzymamy punkt D_1 , a przez dalsze odnoszenie łuków elipsy punkty A_1 , C_1 i B_1 , odpowiadające wierzchołkom elipsy k_1^0 . Odcinek $B_1 B_1$ prostej m równy jest w przybliżeniu obwodowi elipsy k_1^0 . Na prostopadłych, wykreślonych w punktach podziału odcinka $B_1 B_1$, odmierzymy długości tworzących walca, zawartych między rzutnią poziomą a płaszczyzną α . Prawdziwe długości tych tworzących występują w rzucie bocznym i w tym jedynie celu rzut ten wykreśliliśmy. Odmierzmy więc $\overline{B''' B_1'''} = \overline{B B_1}$, $\overline{D''' D_1'''} = \overline{D D_1}$, $\overline{A''' A_1'''} = \overline{A A_1}$, $\overline{I''' I'''} = \overline{1 I}$, $\overline{2''' II'''} = \overline{2 II}$, $\overline{C''' C_1'''} = \overline{C C_1}$, $\dots$ i $\overline{B''' B_1'''} = \overline{B B_1}$. Otrzymane tym sposobem punkty połączymy linią

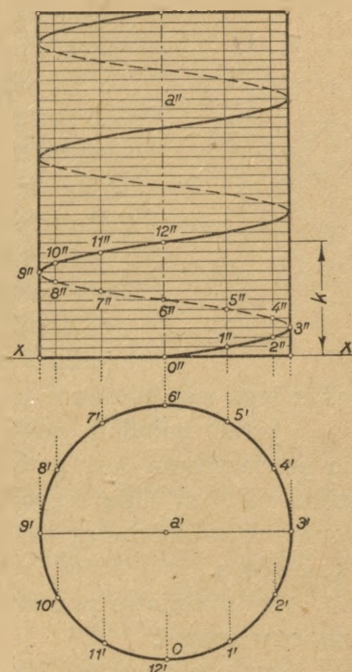
ciągłą, która jest przekształconą koła, stanowiącego podstawę walca, a której długość równa jest w przybliżeniu obwodowi tego koła. Część płaszczyzny, ograniczonej odcinkami BB_1 , B_1B_1 , BB_1 i linią krzywą $BDA CB$, stanowi rozwinięcie walca, ograniczonego przekrojem normalnym płaszczyzną α i jego śladem na rzutni poziomej.



Rys. 419.

143. O linii śrubowej. Przyjmijmy walec obrotowy o osi pionowej (Rys. 420.), a na nim dowolną tworzącą. Wyobraźmy sobie, że tworząca ta obraca się około osi walca ruchem jednostajnym, a równocześnie przyjęty na tej tworzącej punkt porusza się po niej również ruchem jednostajnym. Aby wykreślić drogę wypadkową poruszającego się punktu, podzielmy podstawę walca na dwanaście równych części. Punkty podziału oznaczać będą rzuty poziome poszczególnych położań poru-

szającej się tworzącej, która w jednostce czasu obróciła się o $\frac{1}{12}$ część kąta pełnego. Równocześnie poruszający się na tworzącej punkt odbył w jednostce czasu drogę i zajął położenie 1 ($1' 1''$). W następnych jednostkach czasu punkt poruszający się ruchem jednostajnym na tworzącej, obracającej się około osi a , zajmie położenie 2 ($2' 2''$), 3 ($3' 3''$) 12 ($12' 12''$). Tworząca wróciła w położenie, z którego wyszła, punkt wzniósł się o odległość k od rzutni poziomej i zakreślił na walcu linię, którą nazywamy linią śrubową. Wysokość k nazywamy krokiem linii śrubowej.



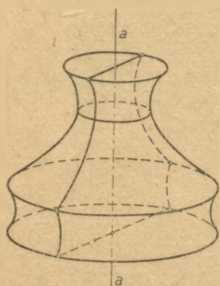
Rys. 420.

Kąt, jaki zawiera styczna w pewnym punkcie linii śrubowej z płaszczyzną poziomą, nazywamy nachyleniem tej linii. Z określenia linii śrubowej wynika, że nachylenie jej jest stałe, t. zn., że styczne we wszystkich jej punktach zawierają z płaszczyzną poziomą ten sam kąt. Jest rzeczą zrozumiałą, że im większy jest krok linii śrubowej, przy stałej średnicy walca, tem większe jest jej nachylenie.

§ 13. POWIERZCHNIE OBROTOWE

144. Tworzenie i podział powierzchni obrotowych. Jeżeli linia płaska lub skośna obraca się około stałej prostej a , to powstała w ten sposób powierzchnia nazywa się powierzchnią obrotową. Linia, przez obrót której powstała powierzchnia, jest tworzącą tej powierzchni, zaś prosta a jej osią (Rys. 421.). Każdy punkt tworzącej opisuje podczas obrotu koło, którego środek leży na osi a , a którego płaszczyzna jest do tej osi prostopadła. Koło takie nazywamy

równoleżnikiem powierzchni obrotowej. Największy równoleżnik nazywa się równikiem, najmniejszy kołem szczytnym. Jeżeli w miejsce danej tworzącej powierzchni obrotowej, przyjmiemy inną krzywą, przecinającą wszystkie równoleżniki powierzchni, to



Rys. 421.

przez obrót tej nowej tworzącej powstanie ta sama powierzchnia obrotowa. W szczególności przyjąć można, jako tworzącą, krzywą, wzdłuż której płaszczyzna przechodząca przez oś, przecina powierzchnię. Taką tworzącą nazywamy południkiem powierzchni, a płaszczyznę, na której leży południk, pł. południkową. Wszystkie południki są liniami przystającymi, dla których

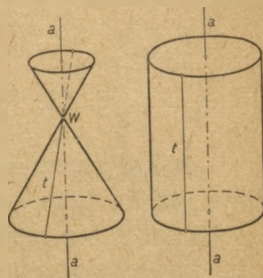
oś a jest osią symetrii prostokątnej.

Jeżeli południk powierzchni obrotowej jest linią prostą, to powierzchnia jest prostoliniową (prostokreślną); gdy południk jest linią krzywą, to otrzymana powierzchnia jest krzywoliniową, albo, jak ją też nazywamy, krzywokreślną.

Prostoliniowe powierzchnie obrotowe dadzą się podzielić na trzy grupy:

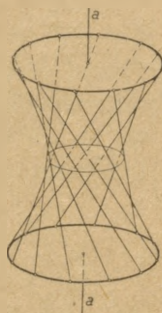
a) Jeżeli prosta t , jako tworząca powierzchnię, przecina oś, to otrzymujemy poznany już w ust. 125. stożek obrotowy. (Rys. 422 a). Punkt W , w którym tworząca przecina oś a , nazywamy wierzchołkiem stożka. Każda płaszczyzna, przechodząca przez oś stożka (pł. południkowa), przecina go wzdłuż dwóch prostych, stanowiących południk stożka. Kąt, jaki tworzą ze sobą te dwie proste, nazywamy kątem wierzchołkowym stożka.

b) Jeżeli linia prosta t , będąca tworzącą powierzchni obrotowej, jest równoległą do osi a (Rys. 422 b), to otrzymujemy walec obrotowy. Podobnie jak przy stożku obrotowym, każdy punkt tworzącej walca obrotowego opisuje koło na płaszczyźnie prostopadłej do osi, a walec rozciąga się — tak jak stożek — nieograniczenie daleko.



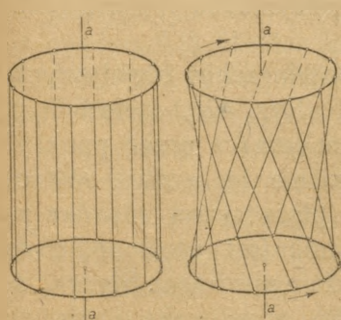
Rys. 422 a—b.

c) Jeżeli prosta tworząca i oś powierzchni obrotowej mają położenie skośne, to otrzymana powierzchnia nosi nazwę skośnej hiperboloidy obrotowej (Rys. 423.). Każdy punkt poruszającej się tworzącej opisuje koło na płaszczyźnie prostopadłej do osi. Koło, opisane przez punkt tworzącej, którego odległość od osi jest najmniejszą, czyli koło zakreślone promieniem równym odległości osi i prostej tworzącej, nazywa się kołem szyjnym hiperboloidy. Hiperboloida obrotowa jest powierzchnią symetryczną względem każdej płaszczyzny, przechodzącej przez jej oś, a nadto względem płaszczyzny koła szyjnego, którego promień jest najmniejszy ze wszystkich promieni kół, leżących na tej powierzchni.



Rys. 423.

Powstanie hiperboloidy obrotowej przedstawić sobie można zapomocą modelu, który czytelnik z łatwością wykona. Weźmy pod uwagę dwa pierścienie jednakowej wielkości, a wywierciwszy w każdym z nich jednakową ilość otworów, połączmy je nitkami tak, abyśmy otrzymali pęk tworzących walca obrotowego (Rys. 424 a.).

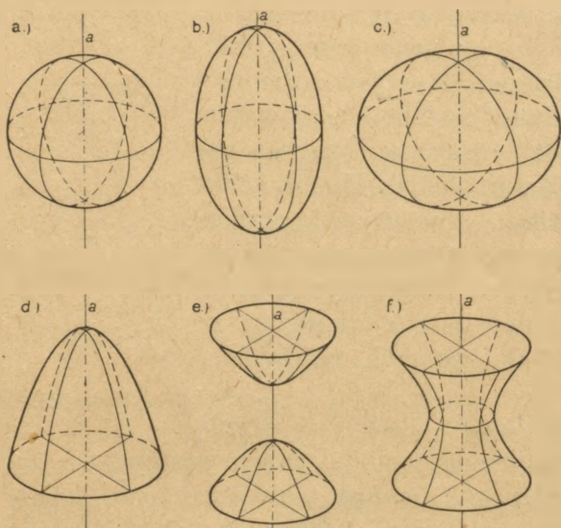


Rys. 424 a—b.

Wziąwszy tak wykonany model w ręce, skręćmy oba pierścienie w odwrotnych kierunkach, zachowując równoległość ich położenia (Rys. 424 b.). Tworzące walca przejdą w tworzące hiperboloidy, a im bardziej skręcać będziemy pierścienie, tem mniejszem będzie koło szyjne, aż w przypadku granicznym, gdy odległość tworzących od osi a stanie się równą zero, koło szyjne zredukuje się do punktu, a hiperboloida przejdzie w stożek obrotowy.

Powierzchnie obrotowe, które nie dadzą się utworzyć przez obrót linii prostej około osi, należą do grupy powierzchni krzywoliniowych (krzywokreślnych). Przykłady takich powierzchni widzimy na Rys. 425. W szczególności przez obrót koła około średnicy, jako osi, powstaje kula (Rys. 425 a.); elipsa, obracająca się około osi większej, zakreśla elipsoidę

wydłużoną (Rys. 425 b.), obrót elipsy około osi małej daje elipsoidę obrotową spłaszczoną, zwaną też sferoidą (Rys. 425 c.).



Rys. 425 a—f.

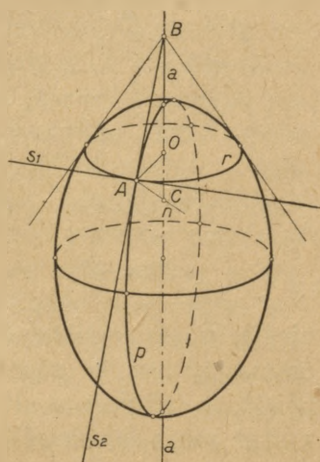
Parabola, obracająca się około osi, zakreśla paraboloidę obrotową (Rys. 425 d.); hiperbola, obracająca się około osi, która ją przecina (t. zw. osi „rzuzywistej”), stwarza hiperboloidę dwupowłokową (Rys. 425 e.). Jeżeli hiperbola obraca się około swej drugiej osi, t. zw. osi „urojonej”, to otrzymujemy

hiperboloidę obrotową jednopowłokową (Rys. 425 f.), identyczną z tą, którą otrzymaliśmy przez obrót prostej skośnej względem osi.

145. Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowych. Obierzmy na powierzchni obrotowej (Rys. 426.) południk p , a na nim punkt A . Płaszczyzna, przechodząca przez punkt A prostopadle do osi powierzchni, przetnie ją wzdłuż równoleżnika r . Płaszczyzna południka i płaszczyzna równika są do siebie prostopadłe, gdyż ta ostatnia jest prostopadłą do osi a powierzchni, leżącej na płaszczyźnie pierwszej. Styczna s_1 w punkcie A do równoleżnika r , jako prostopadła do dwóch prostych, leżących na płaszczyźnie południka, a mianowicie do prostej OA i a , jest prostopadłą do płaszczyzny tego południka. W następstwie tego każda płaszczyzna, przechodząca przez prostą s_1 , jest prostopadłą do płaszczyzny południka p . Poprowadźmy w punkcie A styczną s_2 do południka p , to płaszczyznę wyznaczoną prostymi s_1 i s_2 określamy mianem płaszczyzny stycznej do powierzchni obrotowej w punkcie A , (porównaj ust. 126.). Ponieważ każda płaszczyzna, przechodząca

przez prostą s_1 , jest prostopadłą do płaszczyzny południka, więc także i płaszczyzna styczna $\sigma = (s_1, s_2)$ jest prostopadłą do tego południka.

Poprowadźmy w punkcie A normalną do powierzchni (ust. 126.), to ponieważ, według określenia, normalna w pewnym punkcie powierzchni jest prostopadłą do płaszczyzny stycznej w jej punkcie styczności, a płaszczyzna styczna jest prostopadłą do płaszczyzny południka, więc normalna do powierzchni obrotowej leży na płaszczyźnie południka i przecina oś powierzchni. Oczywiście, że styczna s_2 , leżąca na płaszczyźnie południka, przecina oś powierzchni w punkcie, a punkt ten oznaczyliśmy literą B . Gdy punkt A opisuje koło równoleżnikowe, to styczna s_2 tworzy stożek obrotowy, o wierzchołku B , czyli: styczne, poprowadzone do południków w punktach tego samego równoleżnika, przecinają oś w jednym punkcie. Stąd wynika bezpośrednio, że płaszczyzny styczne, poprowadzone w punktach, które leżą na jednym równoleżniku, przecinają oś powierzchni obrotowej w jednym punkcie. Jeśli równoleżnik jest równikiem albo kołem szczytnym, to styczne, a więc także i płaszczyzny styczne, poprowadzone w ich punktach do południków, są równoległe do osi.

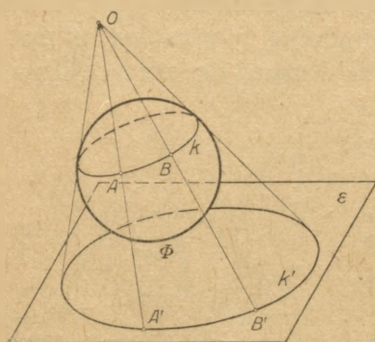


Rys. 426.

Każda z płaszczyzn stycznych do powierzchni, w punktach tego samego południka, zawiera styczną do równoleżnika, przechodzącą przez każdy z tych punktów, podobnie jak płaszczyzna styczna w punkcie A (Rys. 426.) zawiera styczną s_1 . Każda z tych stycznych jest prostopadłą do płaszczyzny południka, podobnie jak płaszczyzny styczne do powierzchni, przechodzące przez owe styczne. Wszystkie te proste styczne (prosta s_1 w Rys. 426.) są tworzącymi walca opisanego na powierzchni obrotowej wzdłuż południka. A zatem: płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej w punktach tego samego południka, powłóczą walec opisany na tej powierzchni. Tworzące tego

walca są prostopadłe do płaszczyzny południka. I odwrotnie: walec, którego tworzące są prostopadłe w punktach południka do płaszczyzny tego południka, styka się z powierzchnią obrotową wzdłuż tego południka.

146. O zarysach powierzchni obrotowych. Przyjmijmy dowolną powierzchnię obrotową Φ i zewnątrz niej punkt O (Rys. 427.), który uważajmy za środek rzutów (ust. 8.).

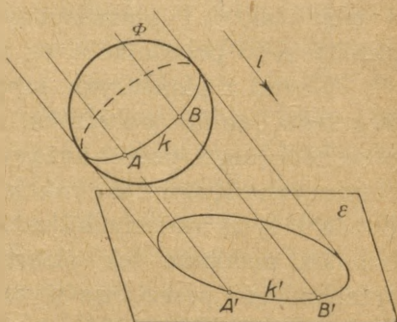


Rys. 427.

Miejscem geometrycznym punktów styczności płaszczyzn, względnie prostych stycznych, poprowadzonych do danej powierzchni przez punkt O , jest linia k , stanowiąca granicę części widocznej i niewidocznej naszej powierzchni, jeśli w środku rzutów wyobrazimy sobie umieszczone oko obserwatora. Linia k stanowi t. zw. zarys albo kontur istotny powierzchni obrotowej, w od-

niesieniu do punktu O . Wszystkie płaszczyzny, względnie proste styczne do powierzchni, przechodzące przez punkt O , powłóczą, względnie utworzą, stożek opisany na powierzchni, a stąd zarys jej określić można jako linię styczności k stożka opisanego na powierzchni z danego punktu, który jest środkiem rzutu, a zarazem wierzchołkiem stożka.

Zarys powierzchni zmienia się ze stanowiskiem obserwatora. Jeżeli oko jego znajduje się nieograniczenie daleko, to promienie widzenia są do siebie równoległe, a stożek opisany na powierzchni przejdzie w walec (Rys. 428.), którego tworzące są równoległe do danego kierunku l .



Rys. 428.

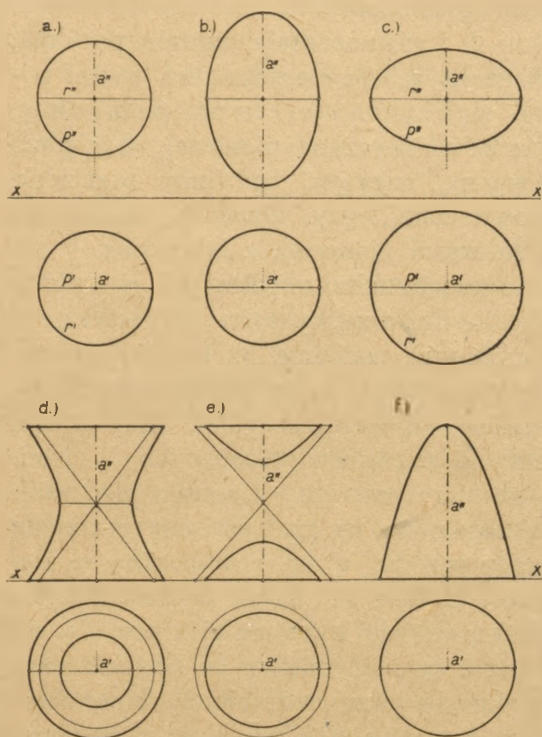
Przekrój stożka, względnie walca, opisanego na powierzchni i stykającego się z nią wzdłuż zarysu istotnego — dowolną płaszczyzną, nazywamy zarysem tej powierzchni na owej

płaszczyźnie. Tak więc krzywa k' w Rys. 427. i 428. jest zarysem powierzchni Φ na płaszczyźnie ε . Jeżeliby płaszczyzna ε była prostopadłą do tworzących walca, opisanego na powierzchni Φ i równocześnie rzutnią poziomą, to linia k' stanowiłaby zarys tej powierzchni na rzutni poziomej, czyli wyrażając się krótko, jej rzut poziomy. Podobnie zarysem powierzchni na rzutni pionowej, względnie jej rzutem pionowym, nazywać będziemy przecięcie walca opisanego na powierzchni, gdy kierunek tworzących walca jest prostopadły do rzutni pionowej, z tą rzutnią.

147. Przedstawienie powierzchni obrotowych w rzutach prostokątnych. Dla uzyskania przejrzystości i plastyki rysunku, nadajemy powierzchniom, podobnie jak i wielościanom, podkład materyalny i przyjmujemy, że kształt badanych powierzchni nadaliśmy materji nieprzeźroczystej. Przy takim założeniu mówić możemy o częściach widocznych i niewidocznych powierzchni, na które patrzymy z punktu nieograniczenie dalekiego. W szczególności na rzut poziomy patrzymy z góry, na rzut pionowy z przodu, a na rzut boczny w kierunku równoległym do osi rzutów x . Część powierzchni widzianej z przodu nie pokrywa się bynajmniej z częścią widzianą z góry lub z boku, a granica między częścią widoczną a niewidoczną powierzchni — przy rozmaitych kierunkach patrzenia — nosi nazwę zarysu istotnego powierzchni. Linia zarysu powierzchni zależna jest od kierunku rzutów (kierunku patrzenia, względnie stanowiska obserwatora), względnie od położenia powierzchni.

Rzut cechowany, względnie rzuty prostokątne na dwie płaszczyzny, osi i tworzącej powierzchni obrotowej, wyznaczają w sposób jednoznaczny położenie tej powierzchni i ją samą. Z reguły wyznaczamy jednak powierzchnie obrotowe zapomocą jej zarysów na każdej z płaszczyzn rzutów, a taki sposób przedstawiania powierzchni pozwala określić na pierwszy rzut oka jej rodzaj i ułatwia działania konstrukcyjne. Zarys powierzchni obrotowej o osi pionowej na rzutni pionowej jest rzutem pionowym jej południka, którego płaszczyzna jest równoległą do rzutni pionowej. Południk ten nazywamy **południkiem głównym**. Zarys powierzchni obrotowej o osi pionowej na rzutni poziomej jest kołem, względnie pękiem kół współśrodkowych. Największe z tych kół jest rzutem po-

ziomym równika, najmniejsze, rzutem poziomym koła szyjnego, a pozostałe rzutami charakterystycznych równoleżników.

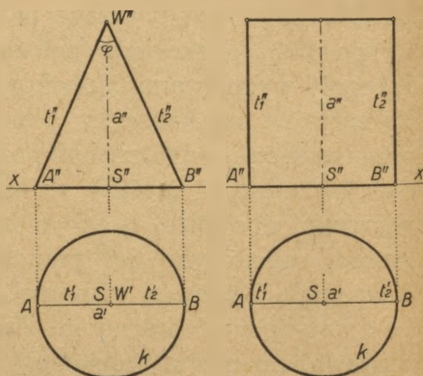


Rys. 429 a–f.

pionowej a (a' a'') i wierzchołku W (W' W'') — Rys. 431. — i poprowadźmy w dowolnie przyjętym punkcie A (A' A'') tworzącej t_1 (t_1' t_1''), prostą prostopadłą do niej, a przecinającą oś stożka w punkcie W_1 (W_1' W_1''). Obierzmy na prostej a'' dowolny punkt W_1'' i zakresłmy koło k'' styczne do prostych t_1'' i t_2'' . Wyobraźmy sobie, że prosta p (p' p'') i koło k (k' k'') obróćą się około osi stożka. Prosta p zakresli stożek obrotowy o wierzchołku W_1 (W_1' W_1''),

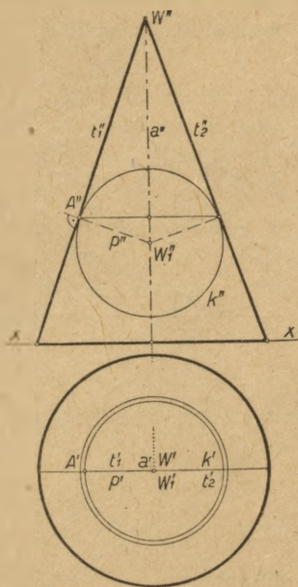
Rys. 429 a–f. podaje rzuty prostokątne a) kuli, b) elipsoidy wydłużonej, c) spłaszczonej, d) hiperboloidy jednopowłokowej (skośnej), e) hiperboloidy dwupowłokowej i f) paraboloidy obrotowej. Dla całości powtarzamy w tym miejscu rzuty stożka i walca obrotowego o osiach pionowych (Rys. 430 a–b). Tworzące t_1 (t_1' t_1'') i t_2 (t_2' t_2'') stanowią południk główny tych powierzchni.

148. O kulach wpisanych w stożek i walec obrotowy. Weźmy pod uwagę stożek obrotowy, o osi



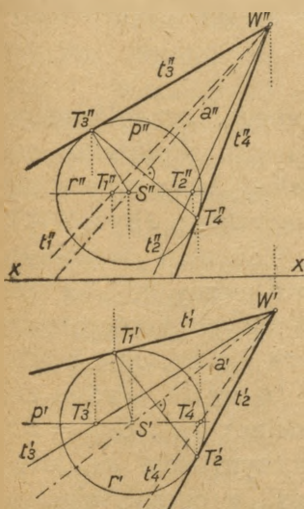
Rys. 430 a–b.

a koło k kulę o środku W_1 ($W_1' W_1''$). Punkt A ($A' A''$) opisze podczas tego obrotu koło, będące równoleżnikiem obu stożków i kuli. Stożek o wierzchołku W_1 , którego każda tworząca jest prostopadłą do odpowiedniej tworzącej stożka o wierzchołku W , nazywać będziemy stożkiem normalnym. W ten sposób każdy stożek obrotowy ma dowolną ilość stożków normalnych i dowolną ilość kul wpisanych w siebie. Wynika stąd dalej, że z dowolnego punktu opisać można na danej kuli jeden stożek obrotowy, który posiada z kulą jedno koło wspólne. Środek kuli, połączony z wierzchołkiem stożka, jest osią tego stożka. Z punktu niewłaściwego przestrzeni, a więc równolegle do danego kierunku, opisać można na danej kuli walec, mający z kulą jedno koło wspólne. Walec ten jest walcem obrotowym, o osi przechodzącej przez środek kuli.



Rys. 431.

Rozumowanie powyższe umożliwi wykreślenie rzutów stożka obrotowego i walca obrotowego, których osi mają dowolne położenie w przestrzeni. Jeżeli oś a ($a' a''$) stożka i jego wierzchołek W ($W' W''$) są dane (Rys. 432.), to na osi przyjmujemy dowolny punkt S ($S' S''$), który uważać będziemy za środek kuli. Wykreśliwszy rzuty tej kuli, poprowadzimy styczne t_1', t_2' do koła r' i styczne t_3'', t_4'' do koła p'' . Styczne te stanowią rzuty stożka obrotowego, opisanego na przyjętej kuli z punktu W . Styczne do rzutów kuli, równoległe do danego kierunku (Rys. 433.), wyznaczają zarysy walca obrotowego na płaszczyznach rzutów.



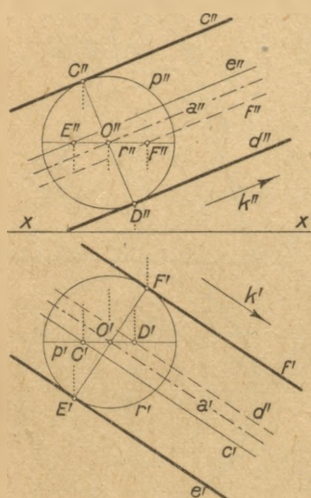
Rys. 432.

Jak każda powierzchnia obrotowa, posiada i stożek obrotowy dowolną, nieograniczoną ilość płaszczyzn sy-

metryi prostokątnej, przechodzących przez oś tej powierzchni, w odróżnieniu od powierzchni stożkowej rzędu drugiego, która posiada tych płaszczyzn symetrii tylko trzy (ust. 133.). Możliwość wpisania w stożek² obrotowy dowolnej ilości kul, których środki

leżą na osi tego stożka, stanowi dalszą właściwość stożka obrotowego, wyróżniającą go od ogólnej powierzchni stożkowej rzędu drugiego. Możemy więc przyjąć następujące określenie: powierzchnia stożkowa rzędu drugiego, w którą wpisać można kulę, jest stożkiem obrotowym.

Walec obrotowy posiada również nieograniczoną ilość płaszczyzn symetrii prostokątnej, przechodzących przez jego oś, a to właśnie wyróżnia go od walca eliptycznego, hiperbolicznego i parabolicznego. Walce bowiem eliptyczne i hiperboliczne posiadają po dwie płaszczyzny symetrii prostokątnej, a walec paraboliczny tylko jedną. Zresztą podobnie jak dla stożka obrotowego — powierzchnia walcowa rzędu drugiego, w którą wpisać można kulę, jest walcem obrotowym.



Rys. 433.

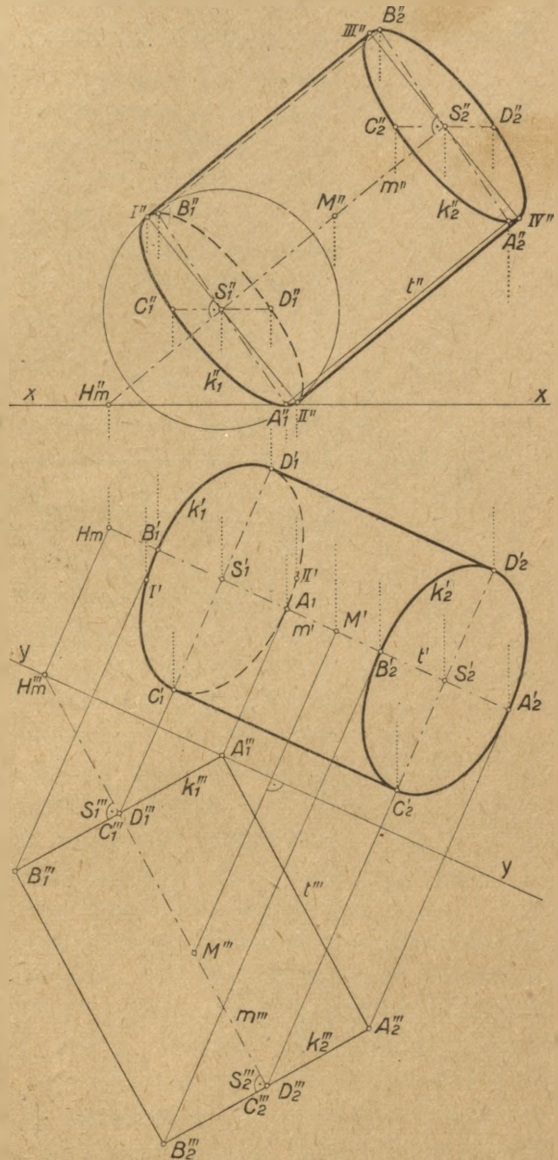
149. Zadania.

a) Wykreślić rzuty walca obrotowego, ograniczonego dwoma przekrojami prostopadłymi do osi. Położenie osi m (m' m''), promień r i wysokość walca, który opiera się jednym punktem o rzutnię poziomą, są dane. (Rys. 434.). Przyjąwszy trzecią płaszczyznę rzutów, pionową i równoległą do danej osi m (m' m''), wyznaczmy rzut boczny m''' tej osi. Rzuty poziome, pionowe i boczne tworzących konturowych walca tworzą pary prostych równoległych do m' , m'' i m''' i oddalonych od nich o dany promień r walca. Prosta t''' przecina oś $y - y$ w punkcie A_1''' . Odcinek $\overline{A_1''' B_1'''} = 2r$ i prostopadły do m''' jest rzutem bocznym koła k_1 , leżącego na płaszczyźnie prostopadłej do osi, a ograniczającego walec.

Wyznaczenie rzutu poziomego k_1' i pionowego k_1'' koła k_1 nie wymaga żadnych szczególnych wyjaśnień, podobnie jak wyznaczenie rzutów drugiego koła przekroju k_2 (k_2' k_2'' k_2'''), znajdującego się w danej odległości od przekroju k_1 .

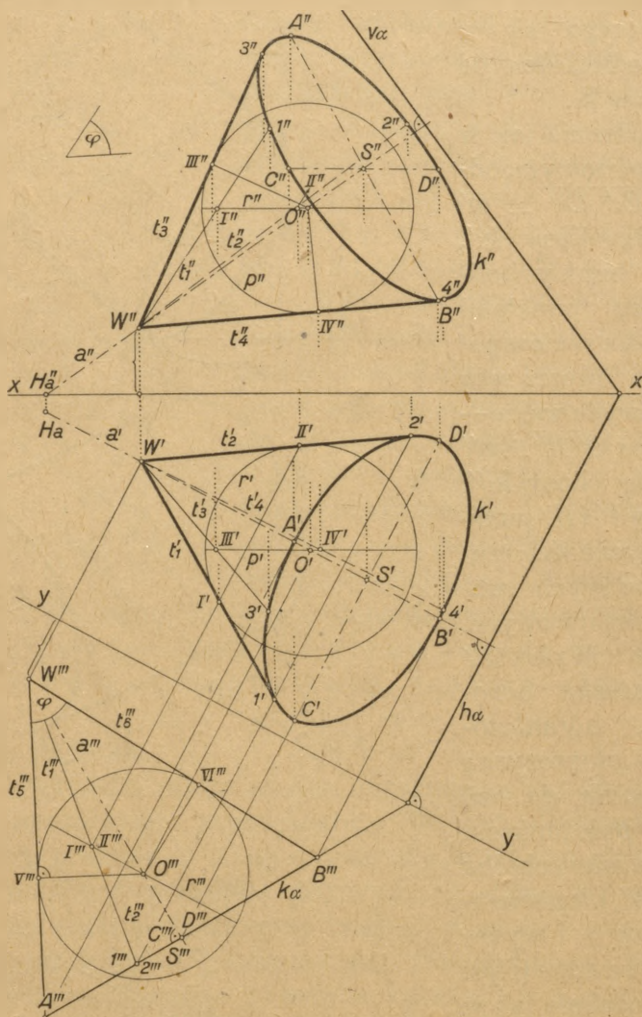
Podobnie jak w rzucie poziomym, odcinek $C_1' D_1' \perp m'$ jest osią elipsy k_1' , a jego punkty końcowe są punktami styczności rzutów poziomych tworzących konturowych walca — tak odcinek $I'' II'' \perp m''$ jest osią elipsy k_1'' , a punkty I'' i II'' punktami styczności rzutów pionowych tworzących konturowych.

b) Wykreślić rzuty stożka obrotowego, ograniczonego płaszczyzną prostopadłą do osi, którego położenie osi $a(a' a'')$, wierzchołka $W(W' W'')$, kąt wierzchołkowy φ i wysokość w są dane (Rys. 435.). Podobnie jak w zadaniu poprzednim, przyjmijmy trzecią rzutnię, równoległą do osi stożka, a wyznaczwszy rzut a''' tej osi, wykreślimy rzut boczny $W''' A''' B'''$ stożka, przyczem $\sphericalangle A''' W''' B''' = \sphericalangle \varphi$, a $\overline{W''' S'''} = w$



Rys. 434.

Koło, którego środek O''' przyjęliśmy dowolnie na a''' , styczne w punktach V''' i VI''' do prostych t_5''' i t_6''' , jest rzutem bocznym kuli wpisanej w stożek obrotowy o wierzchołku W . Wykreśliwszy rzut poziomy i pionowy tej kuli, a następnie



Rys. 435.

z punktów W' i W'' styczne t_1' i t_2' , t_3'' i t_4'' do tych rzutów, otrzymamy rzuty tworzących konturowych naszego stożka. Z kolei wykreślimy rzuty k' i k'' , a wreszcie wyznaczymy punkty styczności $1'$, $2'$ i $3''$, $4''$ prostych t_1' , t_2' i t_3'' , t_4''

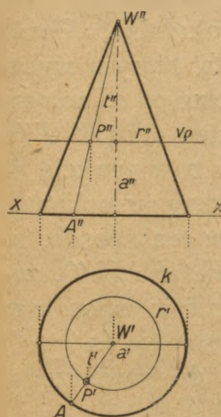
z otrzymanymi elipsami. Punkty te otrzymamy w sposób podany w ust. 98., albo — jak na rys. 435. — w sposób następujący: Wykreśliśmy rzut boczny r''' równika kuli i rzuty boczne $I''' \equiv II'''$ punktów styczności I i II . Prosta $W''' I''' \equiv W''' II'''$ jest rzutem bocznym tworzących t_1 i t_2 stożka, a punkt $I''' \equiv II'''$ przecięcia się jej z prostą $A''' B'''$ jest rzutem bocznym punktów I i II , których rzuty poziome I' i II' szukamy. W analogiczny sposób znajdziemy punkty $3''$ i $4''$. Na rzucie poziomym p' , południka p kuli, znajdziemy punkty III' i IV' , łączymy je z W' , a punkty $3'$ i $4'$, w których otrzymane proste t_3' i t_4' przecinają elipsę k' , odniesiemy na elipsę k'' , jako punkty $3''$ i $4''$.

150. Punkt na powierzchni obrotowej.

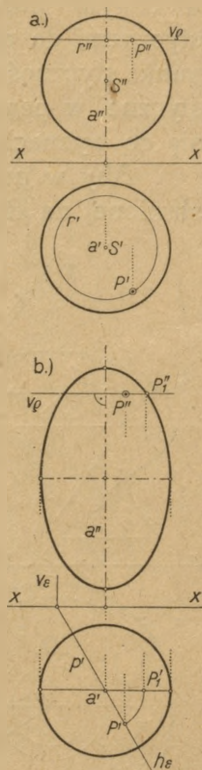
Aby obrać punkt na powierzchni obrotowej, obieramy na niej jakąś linię, a punkt na tej ostatniej przyjęty leży na powierzchni. Kilka przykładów sprawę wyjaśni.

a) Punkt P ($P' P''$) na kuli (Rys. 436 a.) obraliśmy, przyjąwszy poprzednio równoleżnik r ($r' r''$), leżący na płaszczyźnie poziomej ρ .

b) Na elipsoidzie obrotowej (Rys. 436 b.) obraliśmy P za pośrednictwem południka p . Wykreśliwszy rzut poziomy p' tego południka, przyjęliśmy na nim punkt P' , jako rzut poziomy szukanego punktu. Aby uniknąć kreślenia rzutu pionowego południka, obrócmy



Rys. 437.



Rys. 436 a—b.

go wraz z punktem P około osi powierzchni, aż zejdzie się z południkiem głównym. Punkt P zajmie po tym obrocie położenie P_1 ($P_1' P_1''$). Wróćmy następnie z południkiem na płaszczyznę ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$), to punkt P_1 obróci się około osi a elipsoidy na płaszczyźnie równoleżnikowej ρ . Punkt P'' , w którym prosta odnosząca punkt P' przetnie ślad v_ρ , jest rzutem pionowym punktu P .

c) Punkt na stożku obrotowym (Rys. 437.) obrać można bądź to za pośrednictwem

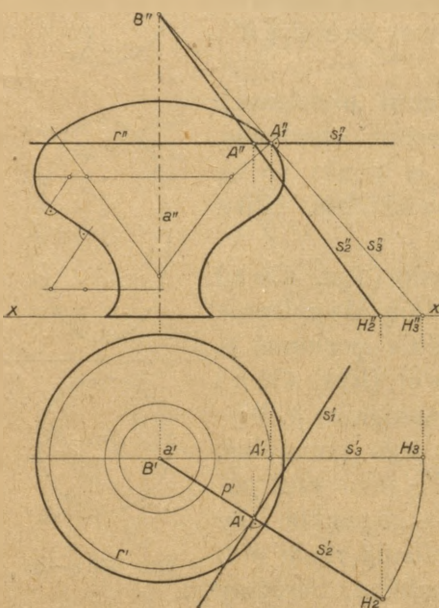
przyjętej na nim tworzącej t (t' t''), bądź też zapomocą obranego na nim równoleżnika r (r' r'').

151. Płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej w danym punkcie. Wiemy z ust. 145., że płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni obrotowej jest wyznaczoną stycznymi do południka i równoleżnika, które przechodzą przez punkt styczności. Sprawa zatem przeprowadzenia płaszczyzny stycznej w pewnym punkcie powierzchni obrotowej sprowadza się do wyznaczenia owych dwóch stycznych.

Aby w punkcie A (A' A'') powierzchni obrotowej, przedstawionej na Rys. 438., poprowadzić płaszczyznę styczną, wy-

kreślimy w tym punkcie styczną s_1 (s_1' s_1'') do równoleżnika r (r' r''), a następnie styczną s_2 (s_2' s_2'') do południka p , przechodzącego przez ten punkt.

Rzut poziomy s_2' stycznej s_2 schodzi się z rzutem poziomym tego południka; rzut pionowy s_2'' znajdziemy w sposób następujący: Punkt A obrócimy około osi a (a' a'') na południk główny i w otrzymanym tam punkcie A_1 (A_1' A_1'') poprowadzimy styczną s_3 (s_3' s_3'') do tego południka. Punkt B (B' B''), w którym styczna s_3 przecina oś a , połączmy z punktem A (A' A''),



Rys. 438.

to prosta s_2 (s_2' s_2'') jest styczną do południka p w punkcie A . Gdyby punkt B'' nie leżał w obrębie płaszczyzny rysunkowej, to obrotu wstępnego prostej s_3 dokonamy w ten sposób, że jej ślad poziomy H_3 obrócimy w położenie H_2 (H_2 H_2''), zakreślając łuk promieniem $a' H_3$ i otrzymany tym sposobem punkt H_2'' połączmy z punktem A'' . Proste s_1 (s_1' s_1'') i s_2 (s_2' s_2'') wyznaczają płaszczyznę styczną do powierzchni obrotowej w punkcie A (A' A'').

punkcie, który jest równo oddalony od czterech wierzchołków tego czworościanu, a więc jest środkiem kuli opisanej na nim. Celem wyznaczenia tego środka wystarczy poprowadzić płaszczyzny prostopadłe do trzech krawędzi, schodzących się w jednym wierzchołku i wyznaczyć ich punkt przecięcia się. Promień kuli równy jest odcinkowi, łączącemu otrzymany środek z wierzchołkiem czworościanu.

Przy rozwiązaniu zadania odstąpiliśmy od bezpośredniego wyznaczenia owych płaszczyzn prostopadłych do krawędzi naroża, a zastosowaliśmy metodę obrotów, względnie wprowadzenia nowej rzutni.

Obróćmy mianowicie dany czworościan około śladu poziomego h_φ płaszczyzny $\varphi = (A, B, C)$ tak, aby trójkąt ABC padł na rzutnię poziomą. Następnie dokonajmy obrotu wierzchołka D około h_φ o kąt α , jaki płaszczyzna φ zawiera z rzutnią poziomą. Otrzymane w ten sposób punkty A''' , B''' , C''' i D''' uważajmy za nowy rzut poziomy czworościanu, a przyjmąwszy nową rzutnię pionową, równoległą do krawędzi np. BD , wyznaczmy rzut A^{IV} B^{IV} C^{IV} D^{IV} tego czworościanu. Z kolei wyznaczmy środek M''' , koła opisanego na trójkącie $A''' B''' C'''$, a w środku P^{IV} odcinka $B^{IV} D^{IV}$ wykreślmy prostopadłą. Punkt S^{IV} , w którym prosta ta przetnie prostopadłą do rzutni poziomej, wykreśloną w punkcie M''' , jest rzutem pionowym (na wprowadzonej rzutni) szukanego środka kuli. Rzut poziomy S''' schodzi się z punktem M''' . Obróćmy odcinek SA (posługując się ciągle jedynie rzutami, które oznaczamy wskaźnikami $'''$ i IV) do położenia równoległego względem rzutni pionowej, to odcinek $S^{IV} A^{IV}$ równy jest promieniowi kuli, opisanej na czworościanie. Obróćmy wreszcie punkt S ($S''' S^{IV}$) około h_φ o kąt α , a otrzymamy punkty S' i S'' , które są szukanymi rzutami środka kuli, opisanej na czworościanie. Koła, zakreślone z punktów S' i S'' , jako środków, promieniem $S^{IV} A^{IV}$, są rzutami szukaney kuli.

b) W dany czworościan $ABCD$ wpisać kulę (Rys. 440*.).

Środek kuli, wpisanej w czworościan, jest punktem przecięcia się sześciu dwusiecznych płaszczyzn, poprowadzonych przez krawędzie czworościanu. Aby zadanie możliwie uprościć pod względem konstrukcyjnym, postąpimy podobnie jak w zadaniu poprzednim, t. zn. obrócimy czworościan około śladu poziomego h_φ płaszczyzny φ , przechodzącej przez jedną ze

w czwartym rzucie w naturalnej wielkości i równy jest kątowi $A^{IV} B^{IV} D^{IV}$. Płaszczyzna dwusieczna ścian ABC i BCD jest pionowo rzucającą, a jej ślad pionowy jest dwusieczną kąta $A^{IV} B^{IV} D^{IV}$. Celem wyznaczenia dwusiecznych kątów, jakie proste e i g zawierają ze ścianą ABC czworościanu, obróćmy te proste do położenia równoległego względem czwartej rzutni. Punkt E''' zajmie położenie E_1''' ; trzeci rzut krawędzi e zejdzie się ze śladem h_β , a rzut czwarty oznaczyliśmy przez e_1^{IV} . Podobnie otrzymamy rzut pionowy g_1^{IV} krawędzi g po obrocie. Wykreśliwszy dwusieczne kątów $B^{IV} G_1^{IV} D^{IV}$ i $A^{IV} E_1^{IV} D^{IV}$, przyjmijmy płaszczyznę μ , równoległą do rzutni poziomej, której ślad z czwartą płaszczyzną rzutów oznaczmy literą y_1 i wykreślmy rzut poziomy (trzeci) ostrosłupa, którego ścianami bocznymi są płaszczyzny dwusieczne kątów, jakie ściany boczne czworościanu zawierają ze ścianą ABC . Wierzchołek tego ostrosłupa jest środkiem szukanej kuli. Ślad pionowy (czwarty) jednej z tych trzech płaszczyzn dwusiecznych schodzi się z dwusieczną kąta $A^{IV} B^{IV} D^{IV}$, a ślad poziomy (trzeci) przechodzi przez punkt J^{IV} prostopadłe do y_1 ; płaszczyzna ta jest zatem pionowo rzucającą.

Oznaczmy ślady dwusiecznych kątów $D^{IV} E_1^{IV} A^{IV}$ i $D^{IV} G_1^{IV} C^{IV}$ na płaszczyźnie μ przez H_1 ($H_1''' H_1^{IV}$) i K_1 ($K_1''' K_1^{IV}$) i wróćmy z pierwszym na płaszczyznę α , a z drugim na płaszczyznę γ . Przez otrzymane, na śladach h_α i h_γ , punkty H''' i K''' wykreślone prostopadłe do śladów tych, są dwoma dalszymi śladami płaszczyzn dwusiecznych, przechodzących przez krawędzie $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ z płaszczyzną μ . Otrzymany tym sposobem trójkąt $L''' M''' N'''$ stanowi rzut podstawy wspomnianego wyżej ostrosłupa, którego krawędzie boczne przejdą przez punkty A, B, C i przetną się w wierzchołku S . Przez połączenie punktów A''' i L''' , B''' i M''' , C''' i N''' otrzymaliśmy punkt S''' , a przecięcie się prostej $A^{IV} L^{IV}$ z prostą $B^{IV} J^{IV}$ jest punktem S^{IV} . Obróciwszy punkt S ($S''' S^{IV}$) około śladu h_ϕ w przestrzeń o kąt, jaki płaszczyzna ϕ zawiera z poziomem, otrzymamy rzuty S' i S'' środka kuli wpisanej w dany czworościan, a koła zakreślone z punktów S^{IV} , S''' , S'' i S' , promieniem równym odcinkowi $S^{IV} P^{IV} \perp C^{IV} D^{IV}$, są rzutami tej kuli.

W ogólności istnieje osiem kul stycznych do czterech danych płaszczyzn. I tak: jedna kula t. zw. wpisana, jest

styczną do ścian czworościanu, utworzonego przez owe cztery płaszczyzny; cztery kule są t. zw. z a w p i s a n e, t. j. styczne do jednej ściany czworościanu i do przedłużeń trzech ścian pozostałych, a wreszcie trzy kule styczne, znajdujące się w s z c z y t a c h. Szczytem nazywamy przestrzeń ograniczoną przedłużeniami czterech ścian nad jedną krawędzią, którą zwiemy grzbietem szczytu. Szczytów takich jest sześć, t. j. tyle, ile krawędzi posiada czworościan; jednak istnieje tylko jedna kula styczna do szczytów dwóch przeciwległych krawędzi (grzbietów).

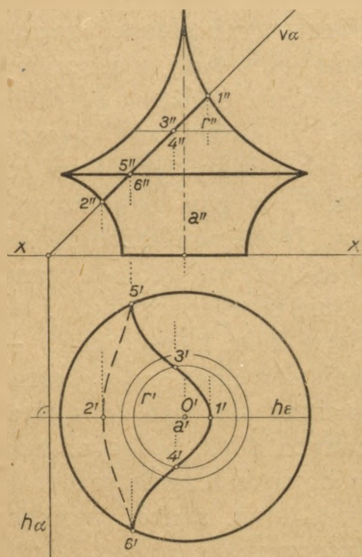
153. Przekroje powierzchni obrotowych płaszczyznami.

1. Linie przekroju powierzchni obrotowej płaszczyzną określić można jako miejsce geometryczne punktów przebiecia się linii, przyjętych na powierzchni, z płaszczyzną sieczną. Z reguły bierzemy pod uwagę linie charakterystyczne na powierzchni, więc równoleżniki, południki, a gdy powierzchnia jest prostokreślną jej proste tworzące. Jeżeli powierzchnia jest geometryczną, to linia przekroju jest krzywą geometryczną, a wówczas wyszukujemy elementy, linię tę wyznaczające. I tak np. każda płaszczyzna przecina kulę w kole, którego rzuty — o ile płaszczyzna sieczna ma położenie dowolne — są elipsami; wyznaczenie przekroju kuli sprowadza się więc do wyszukania osi, względnie średnic sprzężonych elips, będących rzutami koła przekroju. Oczywiście, że do wyznaczenia przekroju kuli zastosować można metodę ogólną, t. zn. szukać punktów przebiecia np. równoleżników z płaszczyzną sieczną; jednak użycie tej metody byłoby w tym przypadku pod względem rysunkowym nieekonomiczne, a z punktu widzenia geometrycznego niewłaściwe i nie dość ściśle.

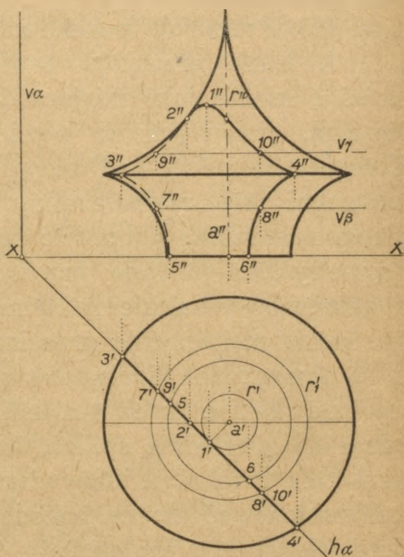
2. Rysunkowo najprościej przedstawia się wyznaczenie przekroju powierzchni obrotowej płaszczyzną rzucającą. Niechaj zadaniem naszym jest wyznaczenie przekroju powierzchni obrotowej (Rys. 441.) płaszczyzną pionowo rzucającą α (h_α v_α). Rzut pionowy linii przekroju schodzi się ze śladem pionowym v_α płaszczyzny siecznej. Południk główny przebiega płaszczyznę α w punktach 1 ($1' 1''$) i 2 ($2' 2''$). Krawędź płaszczyzny α z płaszczyzną równoleżnika r ($r' r''$) przecina ten ostatni w punktach 3 ($3' 3''$) i 4 ($4' 4''$), które są punktami szukanej linii przekroju. W podobny sposób, przez przyjęcie dalszych równoleżników, wyznaczymy żadaną ilość

punktów linii przekroju. Na Rys. 441. oznaczyliśmy jeszcze punkty 5 ($5' 5''$) i 6 ($6' 6''$), w których równik przebija płaszczyznę α .

Punkty linii przekroju są symetrycznie położone względem płaszczyzny ε , przechodzącej przez oś prostopadle do płaszczyzny siecznej, czyli w naszym przypadku do płaszczyzny południka głównego. Ślad poziomy h_ε tej płaszczyzny jest osią symetrii prostokątnej rzutu poziomego krzywej przekroju.



Rys. 441.

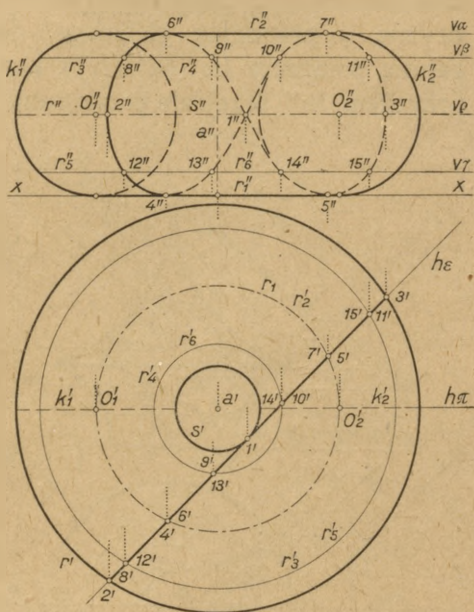


Rys. 442.

3. Rys. 442. przedstawia przekrój tej samej powierzchni obrotowej płaszczyzną poziomo rzucającą. Wyznaczenie linii przekroju rozpoczęliśmy od wynalezienia jej punktu „najwyższego” 1 ($1' 1''$), który leży na równoleżniku r ($r' r''$), stycznym do płaszczyzny siecznej α ($h_\alpha v_\alpha$). Z kolei wyznaczyliśmy punkt 2 ($2' 2''$), leżący na południku głównym, którego rzut poziomy $2'$ jest znany. Następną parę punktów linii przekroju znaleźliśmy na równiku, a dalsze na równoleżnikach.

4. Powierzchnia obrotowa, której rzuty Monge'a podane są na Rys. 443., nosi nazwę powierzchni pierścieniowej. Powstanie ona w ten sposób, że koło, którego płaszczyzna

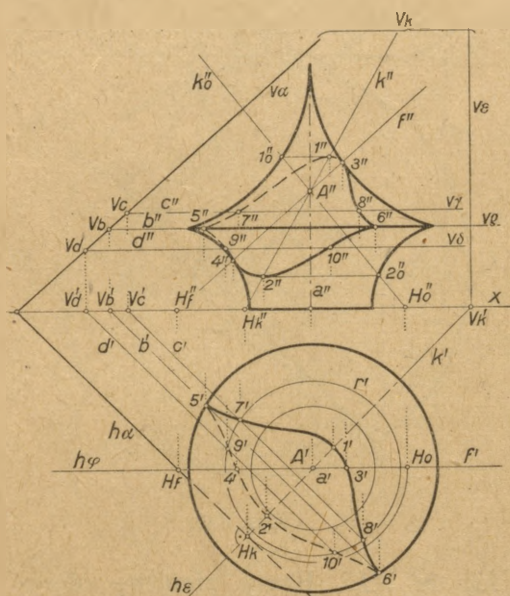
przechodzi przez pionową prostą a ($a' a''$), obróci się około tej prostej. Południk główny powierzchni pierścieniowej składa się z kół k_1 ($k_1' k_1''$) i k_2 ($k_2' k_2''$), a równik z kół współśrodkowych r ($r' r''$) i s ($s' s''$). Poziomo rzucającą płaszczyznę sieczną ε przyjęliśmy tak, że w punkcie 1 ($1' 1''$) jest ona styczną do powierzchni. Wyznaczenie poszczególnych punktów linii przekroju widoczne jest bezpośrednio z rysunku. Punkty 2 ($2' 2''$) i 3 ($3' 3''$) leżą na równiku; punkty 4 ($4' 4''$), 5 ($5' 5''$), 6 ($6' 6''$) i 7 ($7' 7''$) na równoleżniku r_1 ($r_1' r_1''$) względnie r_2 ($r_2' r_2''$). Płaszczyzna pozioma β przecina powierzchnię wzdłuż kół równoleżnikowych r_3 ($r_3' r_3''$) i r_4 ($r_4' r_4''$), na których leżą punkty $8, 9, 10$ i 11 linii przenikania. Na równoleżnikach r_5 i r_6 wyznaczaliśmy punkty $12, 13, 14$ i 15 . Rzuty pionowe otrzymanych punktów, połączone linią ciągłą, dają rzut pionowy krzywej, wzdłuż której płaszczyzna ε , styczna w punkcie 1 do powierzchni pierścieniowej, powierzchnię tę przecina.



Rys. 443.

5. Przykład przekroju powierzchni obrotowej, płaszczyzną dowolnie nachyloną do obu rzutni, podaje Rys. 444. Przede wszystkim znaleźliśmy punkt „najwyższy“ 1 ($1' 1''$) i „najniższy“ 2 ($2' 2''$) linii przekroju. Miano punktu najwyższego nadajemy temu punktowi krzywej przekroju, którego wysokość jest największa; punktem najniższym nazywamy punkt linii przekroju, którego wysokość jest najmniejsza. Oba te punkty leżą na krawędzi k ($k' k''$) płaszczyzny siecznej α ($h_\alpha v_\alpha$) i płaszczyzny ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$), przechodzącej przez oś a powierzchni prostopadle do pierwszej. Krawędź ta jest osią symetrii prostokątnej dla linii przekroju. Jej rzut poziomy $k' \equiv h_\varepsilon$ jest

osią symetrii prostokątnej rzutu poziomego linii przekroju, a rzut pionowy k'' osią symetrii ukośnej, o kierunku równoległym do osi x , rzutu pionowego krzywej przekroju. Celem wyznaczenia punktów 1 i 2, obróćmy krawędź k ($k' k''$), przecinającą oś a w punkcie A ($A' A''$), około tej osi na płaszczyznę φ południka głównego. Ślad poziomy H_k prostej k zajmie położenie H_0 ($H_0' H_0''$), a prosta położenie k_0 ($h_\varphi k_0''$), przyczem k_0'' przejdzie przez punkt A'' . Prosta k_0 przecina południk główny w punktach 1_0 i 2_0 , które obrotem wstecznym przeniesiemy na krawędź k , otrzymując punkty 1 ($1' 1''$) i 2 ($2' 2''$). Ponieważ osią tego obrotu jest oś a powierzchni, więc punkty $1_0''$ i $1''$, a także $2_0''$ i $2''$ leżeć muszą na prostopadłej do tej osi.



Rys. 444.

Z kolei wyznaczaliśmy punkty 3 ($3' 3''$) i 4 ($4' 4''$) linii przekroju, leżące na południku głównym, a więc także na krawędzi f ($f' f''$) płaszczyzn α i φ . Punkty $3''$ i $4''$ są punktami styczności rzutu pionowego

linii przekroju z zarysem powierzchni na rzutni pionowej i stanowią zarazem granicę części widocznej i niewidocznej tego zarysu. Dalsze punkty linii przekroju znajdziemy jak w dwóch pierwszych przykładach, jako punkty przecięcia się przyjętych na powierzchni równoleżników z płaszczyzną sieczną. Płaszczyzna ρ równika przecina płaszczyznę α w prostej b ($b' b''$), która wyznacza na równiku powierzchni punkty 5 ($5' 5''$) i 6 ($6' 6''$) krzywej przekroju. Punkty te leżą na granicy części widocznej i niewidocznej rzutu poziomego krzywej przekroju.

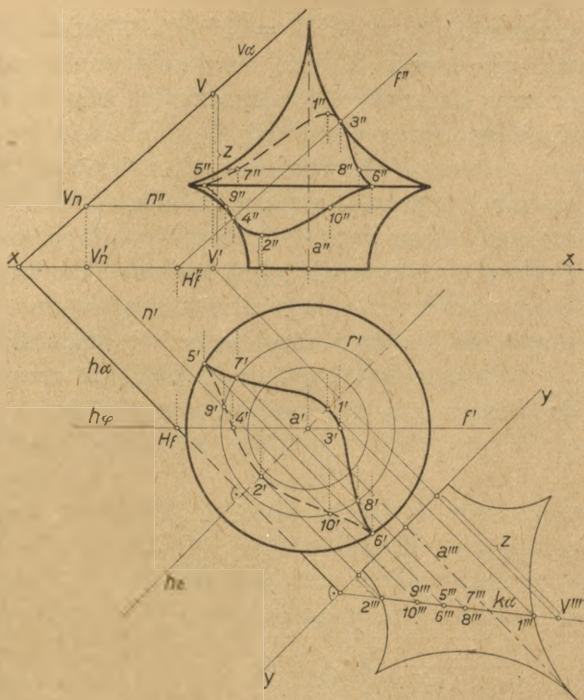
Przy wyznaczaniu przekrojów wielościanów płaszczyznami dowolnie położonemi zauważyliśmy, że przez przyjęcie trzeciej

rzutni dało się zadanie sprowadzić zawsze do przypadku, gdzie płaszczyzna sieczna jest rzucającą, a więc znacznie uprościć. Tę samą metodę zastosować można i do powierzchni obrotowych, a przykładem tego jest Rys. 445.

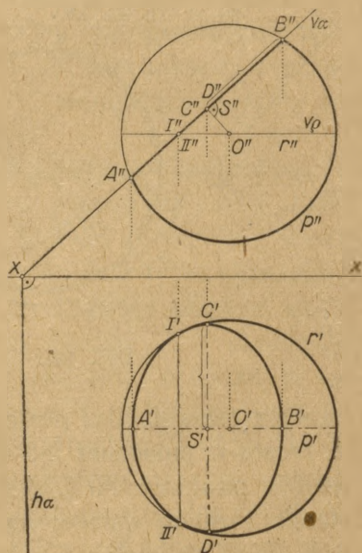
Przyjąwszy trzecią pł. rzutów, poziomo rzucającą i prostopadłą do pł. siecznej α , wykreśliśmy trzeci rzut powierzchni i ślad k_α pł. siecznej.

Przeniesienia punktów krzywej przekroju na rzut pionowy dokonać można zapomocą równoleżników, tworzących płaszczyzn α , albo też wprost uwzględniając wysokości poszczególnych punktów, znane w trzecim rzucie.

154. Przekroje kuli. a) Każdy przekrój kuli jest kołem. Jeżeli, jak w rys. 446., płaszczyzna sieczna jest pionowo rzucającą, to rzut pionowy koła przekroju leży na śladzie pionowym płaszczyzny siecznej, a rzut poziomy jest elipsą. Ośiami tej elipsy są odcinki $A'B'$ i $C'D'$, przyczem ta ostatnia, jako prostopadła do rzutni pionowej, równa jest średnicy koła



Rys. 445.



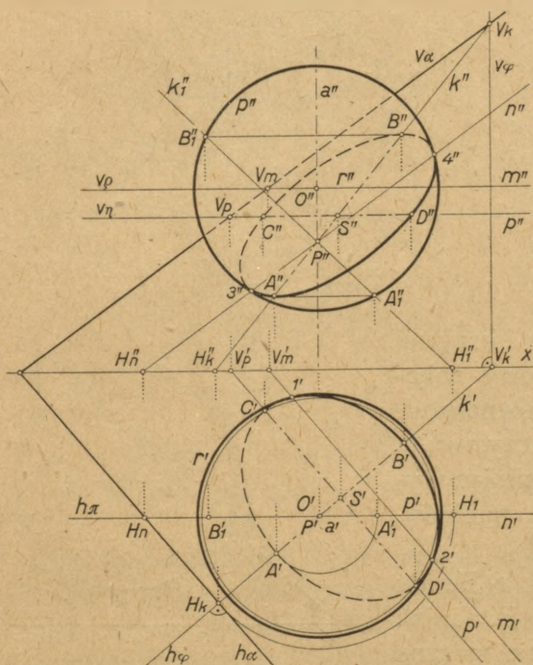
Rys. 446.

przekroju, czyli $C'D' = A''B''$. Punkty styczności I' i II' elipsy z kołem r' leżą na rzucie poziomym krawędzi płaszczyzny siecznej α i płaszczyzny równika ρ i odgraniczają część widoczną elipsy od niewidocznej.

b) Rys. 447. przedstawia konstrukcję przekroju kuli płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$), mającą położenie dowolne. Przez przyjęcie trzeciej płaszczyzny rzutów, prostopadłej do płaszczyzny siecznej, sprowadzilibyśmy zadanie do poprzedniego. W naszym przykładzie wyznaczyliśmy jednak bezpośrednio osi, względnie średnice elips, będących rzutami koła przekroju.

Płaszczyzna φ ($h_\varphi v_\varphi$), poziomo rzucająca i prostopadła do płaszczyzny siecznej α , przecina ją w prostej k ($k' k''$),

której rzut poziomy k' jest osią symetrii prostokątnej elipsy, a więc jej osią. Rzut pionowy k'' jest średnicą elipsy, będącej rzutem pionowym koła przekroju. Punkty $A(A'A'')$ i $B(B'B'')$, ograniczające oś w rzucie poziomym (wierzchołki), a średnicę elipsy w rzucie pionowym, znajdziemy jako punkty przecięcia się prostej k ($k' k''$) z kulą, a to w sposób następujący: Obróćmy prostą k około osi a kuli do położenia równoległego względem



Rys. 447.

rzutni pionowej. Ślad poziomy H_k zajmie położenie H_1 ($H_1 H_1''$), a prosta k położenie k_1 . Prosta k_1 przecina południk główny kuli w punktach A_1 ($A_1' A_1''$) i B_1 ($B_1' B_1''$), które, sprowadzone obrotem wstecznym na prostą k , dają punkty A ($A' A''$) i B ($B' B''$). Środek S odcinka $\overline{AB}$ jest środkiem koła przekroju, a jego rzuty S' i S'' środkami elips. Płaszczyzna η ,

przechodząca przez punkt S , przecina kulę w równoleżniku, a płaszczyznę α w prostej p ($p' p''$). Punkty C i D , w których prosta ta przecina ów równoleżnik, są punktami przebicia się prostej p z kulą. Odcinek $C' D'$ stanowi wielką oś elipsy na rzutni poziomej, a odcinek $C'' D''$ średnicę sprzężoną ze średnicą $A'' B''$. W ten sposób obie elipsy są wyznaczone. Punkty styczności $1'$ i $2'$ rzutu poziomego koła przekroju z rzutem równika leżą na rzucie poziomym krawędzi m ($m' m''$) płaszczyzny siecznej α i płaszczyzny równika ρ . Punkty styczności $3''$ i $4''$ rzutu pionowego koła przekroju z zarysem kuli na rzutni pionowej, leżą na rzucie pionowym krawędzi n ($n' n''$) płaszczyzny α i płaszczyzny południka π .

155. Przykłady przekrojów walców i stożków obrotowych płaszczyznami.

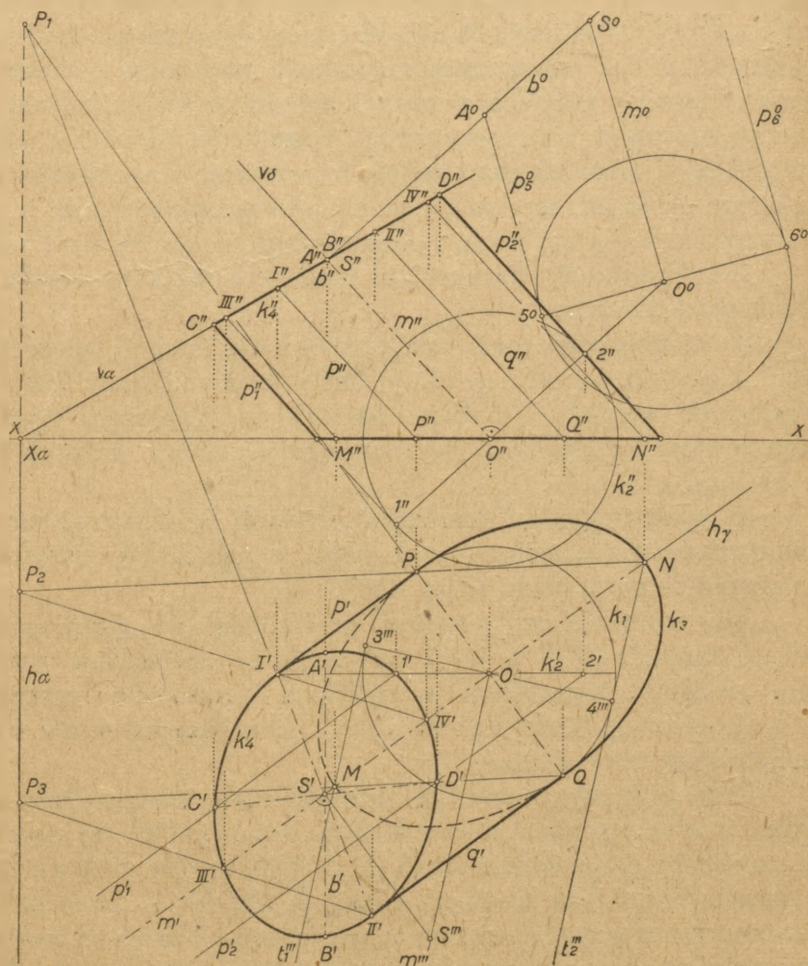
W uzupełnieniu rozważań, przeprowadzonych w ustępach 131., 138., 140. i 141., podamy kilka dalszych przykładów przekrojów walców i stożków obrotowych, przyczem rzuty tych powierzchni rysować będziemy przy pomocy wpisanych w nie kul.

a) *Wykreślić ślad poziomy i przekrój płaszczyznę pionowo rzucającą α walca obrotowego, zajmującego dowolne położenie w przestrzeni (Rys. 448.).*

Aby wykreślić rzuty walca, przyjęliśmy na rzutni poziomej punkt O ($O O''$), który uważamy za środek kuli wpisanej w walec. Wykreślone w żądanych kierunkach, styczne p' i q' , p_1'' i p_2'' do kół k_1 i k_2'' , stanowiących rzuty tej kuli, tworzą rzuty walca.

Rzut pionowy elipsy k_1 , wzdłuż której płaszczyzna α przecina walec, schodzi się ze śladem pionowym v_α tej płaszczyzny, a punkt przebicia się S ($S' S''$) osi m ($m' m''$) walca z płaszczyzną α jest środkiem elipsy k_1 ($k_1' k_1''$). Uważajmy poziomo rzucającą płaszczyznę γ , przechodzącą przez oś walca za nową rzutnię i wyznaczmy rzut boczny S''' punktu S . Prosta m''' , łącząca punkt O z S''' , jest rzutem bocznym osi walca na płaszczyznę γ , a styczne t_1''' i t_2''' do koła k_1 i równoległe do m''' stanowią trzeci rzut walca. Punkty M i N , w których proste t_1''' i t_2''' przecinają prostą $m' = h_\gamma$, ograniczają oś elipsy k_3 , będącej śladem poziomym walca. Punkt O jest środkiem tej elipsy, a odcinek $PQ \parallel MN$ jej drugą osią. Ponieważ między dwoma przekrojami walca zachodzi powinno-

wactwo środkowe, którego osią jest krawędź obu płaszczyzn siecznych, więc łącząc punkt P_1 , w którym przedłużenie osi PQ przecina oś powinowactwa h_α , z punktem S' — otrzymamy średnicę $I'II'$ elipsy k_4' . Prostej $NP P_2$ odpowiada

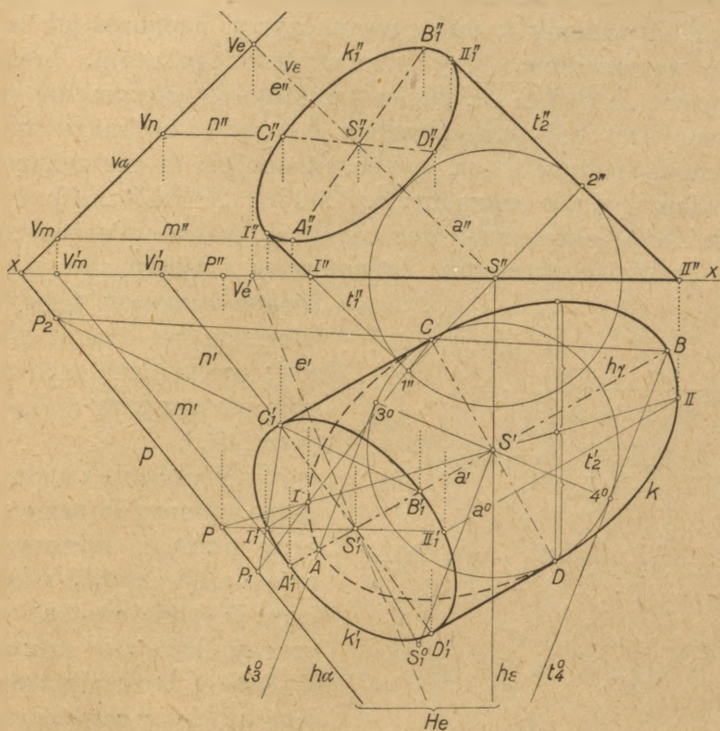


Rys. 448.

w układzie elipsy k_4' prosta $P_2 I' IV'$, prostej zaś $Q M P_3$, prosta $P_3 II' III'$. Odcinek $III' IV'$ stanowi średnicę elipsy k_4' sprzężoną ze średnicą $I' II'$. W ten sposób zadanie jest rozwiązane. Jeżeli oś powinowactwa h_α nie leży w obrębie rysunku, to wówczas nie opierając się na związkach powinow-

wactwa, otrzymamy punkty I' , II' , III' i IV' wprost z rzutu pionowego, przenosząc je na rzut poziomy odpowiednich tworzących.

Aby wyznaczyć rzut poziomy k_4' przekroju walca płaszczyzną $\alpha \perp \pi_2$, nie posługując się jego śladem poziomym k_3 , postąpimy w sposób następujący: Prosta b (b' b''), przechodząca przez punkt S (S' S'') prostopadłe do rzutni pionowej,



Rys. 449.

przebiega walec w dwóch punktach, które ograniczają średnicę elipsy k_4 . W celu wyznaczenia tych punktów, poprowadźmy przez oś walca płaszczyznę pionowo rzucającą δ i wykonajmy około śladu v_δ kład, przekroju walca wzdłuż dwóch tworzących, na rzutnię pionową. Prosta $b_0 \perp v_\delta$ jest kładem krawędzi płaszczyzn α i δ , a odcinek $\bar{A}^0 B^0$ długością średnicy elipsy k_4 . Odmierzmy $\bar{S}' A' = \bar{S}' B' = \bar{S}^0 A^0 = \bar{S}^0 B^0$ i przystąpmy do wyznaczenia średnicy sprzężonej z otrzymaną. Jej rzut pionowy $C' D'$ jest znany. Znalazłszy rzuty poziome $1'$ i $2'$ punktów

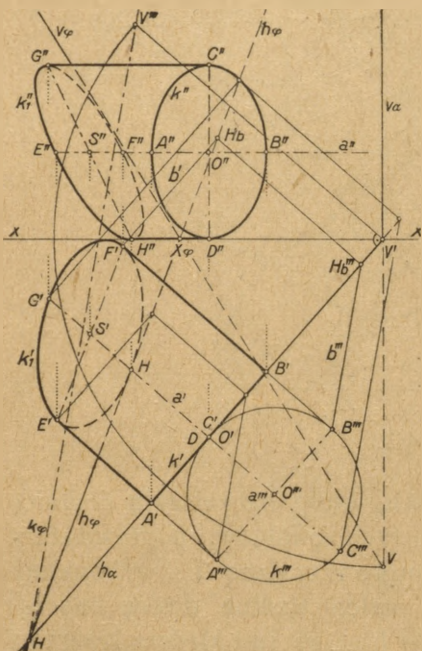
1 i 2, których rzutami pionowymi są punkty $1''$ i $2''$, wykreślimy proste p_1' i p_2' , równoległe do m' , na których leżą szukane punkty C' i D' . Punkty styczności I' i II' prostych p' i q' z elipsą k_4' znajdziemy, wykreśliwszy poprzednio proste p'' i q'' i odniósłszy otrzymane na nich punkty I'' i II'' na rzutnię poziomą.

b) Wykreślić ślad poziomy i rzuty przekroju walca obrotowego płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$), (Rys. 449.).

Ślad poziomy k walca wyznaczymy, podobnie jak w zadaniu poprzednim, przy pomocy trzeciego rzutu. Średnice sprzężone $\overline{A_1 B_1}$ i $\overline{C_1 D_1}$, elipsy przekroju k_1 , otrzymamy przez pośrednictwo osi powinowactwa h_α , jakie zachodzi między śladem poziomym walca, a jego przekrojem k_1 płaszczyzną α . Przedtem jednak wyznaczymy środek S_1 (S_1' S_1'') elipsy k_1 (k_1' k_1''), jako punkt przecięcia się osi walca z płaszczyzną α .

c) Walec obrotowy, ograniczony z jednej strony przekrojem kołowym, leży jedną tworzącą na rzutni poziomej; wyznaczyć jego przekrój płaszczyzną φ ($h_\varphi v_\varphi$), (Rys. 450.).

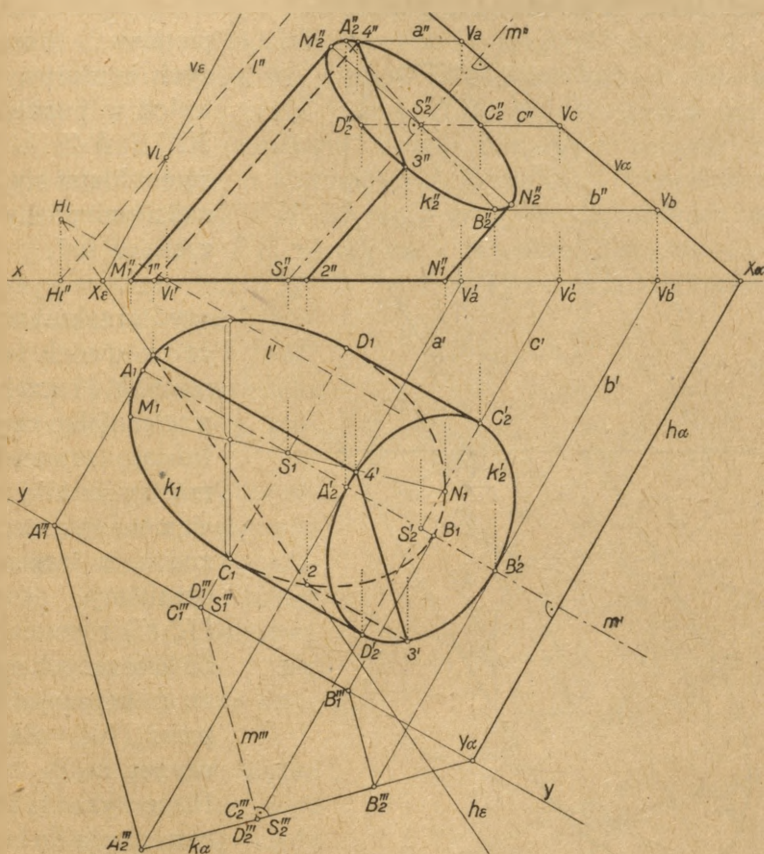
Wykreślenie rzutów walca nie wymaga objaśnień. Żądany przekrój wyznaczymy natomiast w sposób następujący: Wykonajmy kład płaszczyzny poziomo rzucającej α ($h_\alpha v_\alpha$) wraz z krawędzią, jaką tworzy z płaszczyzną φ , i kołem k na rzutnię poziomą. Uważając ślad h_α za nową oś rzutów, sprowadziliśmy zadanie do rozpatrzonego w ust. 131. a). Kład k_φ krawędzi płaszczyzn α i φ jest nowym (trzecim) śladem płaszczyzny siecznej. Trzeci rzut krzywej przekroju k_1



Rys. 450.

schodzi się z kołem k'' , a średnice sprzężone $\overline{A''' B'''}$ i $\overline{C''' D'''}$ są równocześnie trzecim rzutem pary średnic sprzężonych

elipsy k_1 . Przy pomocy prostych równoległych do płaszczyzny α , których rzuty boczne przechodzą przez punkty A''' , B''' i C''' równoległe do k_φ , otrzymamy punkty E' , F' i G' . Punkt H , t. j. czwarty szukany punkt, leżący na rzutni poziomej, jest punktem przecięcia się śladu h_φ z a' . Wyznaczenie średnic sprężonych $E'F'$ i $G'H'$ polega na odniesieniu punktów E' , F' , G' i H na rzuty pionowe odpowiednich tworzących.



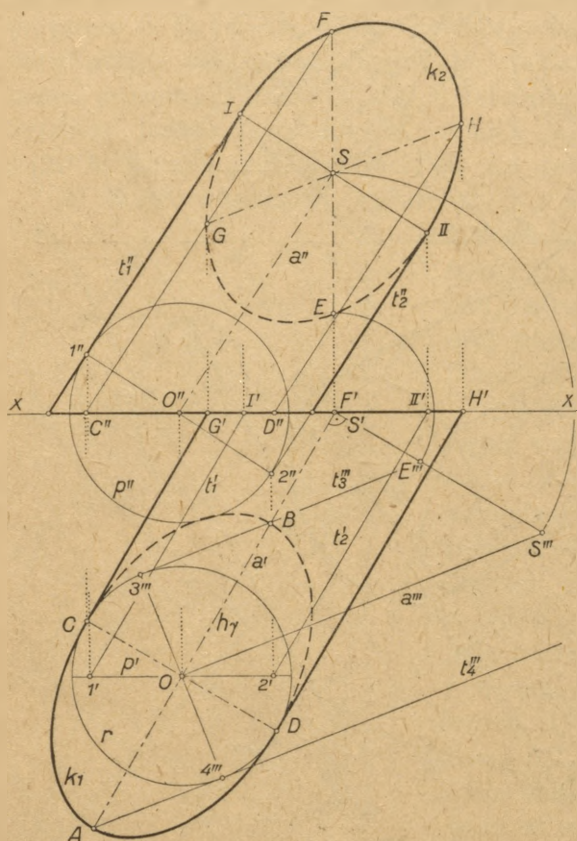
Rys. 451.

d) Wykreślić rzuty walca obrotowego, którego oś m (m' m'') jest daną, wyznaczyć jego przekrój wzdłuż koła, ślad poziomy i przekrój wzdłuż dwóch tworzących, (Rys. 451.).

Przyjawszy nową płaszczyznę rzutów równoległą do osi m , wykreślimy trzeci rzut walca, a także ślady k_α , h_α , v_α płaszczyzny α , prostopadłej do osi i tnącej walec wzdłuż koła k_2 . Przy pomocy trzeciego rzutu wyznaczmy osi $A_1 B_1$ i $C_1 D_1$ elipsy k_1 , jako śladu poziomego walca, a także osi $A_2' B_2'$ i $C_2' D_2'$ elipsy k_2' , będącej rzutem poziomym koła k_2 . Średnice sprzężone $A_2'' B_2''$ i $C_2'' D_2''$ elipsy k_2'' otrzymamy przy pomocy prostych poziomo tworzących płaszczyzny siecznej α . Prostopadła, wykreślona z punktu S_2'' do m'' , przecina rzuty

piłowne tworzących konturowych walca w punktach M_2'' i N_2'' , które są punktami styczności tych prostych z elipsą k_2'' .

Aby wyznaczyć przekrój walca w dwóch tworzących, a raczej uwzględniając część walca, zawartego między rzutnią poziomą a płaszczyzną α , w trapezie, obraliśmy prostą l (l' l'') równoległą do tworzących walca i poprowadzili przez nią płaszczyznę ε (h_ε v_ε). Płaszczyzna ta jest równoległą do tworzących walca i przecina jego ślad poziomy w punktach 1 i 2, a walec w tworzących, przechodzących przez te punkty. Odcinek, łączący punkty 3 ($3'$ $3''$) i 4 ($4'$ $4''$), tworzy czwarty bok szukanego trapezu.



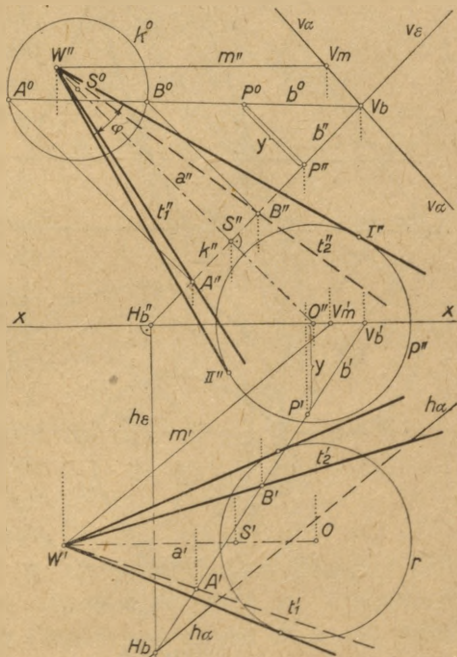
Rys. 452.

e) Wyznaczyć ślad poziomy i pionowy walca obrotowego, którego oś a (a' a'') jest dowolnie nachylona do obu rzutni (Rys. 452.).

Rzuty walca wyznaczyliśmy przy pomocy kuli o środku O , przyjętym na rzutni poziomej. Wyznaczywszy ślad pionowy S osi walca, przyjęliśmy poziomo rzucającą płaszczyznę γ , przechodzącą przez tę oś za nową (trzecią) rzutnię i wyznaczyli trzeci rzut walca. W tym celu wykonaliśmy kład a''' osi a i równoległe do niego wykreślili styczne t_3''' i t_4''' do koła r . Punkty A i B , w których styczne te przecięły prostą a' , są wierzchołkami elipsy k_1 . Drugą parę wierzchołków stanowią punkty C i D , przyczem $CD \perp AB$. Między śladem poziomym k_1 walca, a szukanym śladem pionowym zachodzi powinowactwo o osi x , a kierunku SO . Średnicę GH znajdziemy, odnosząc punkty G' i H' na rzuty pionowe odpowiednich tworzących. Średnica EF , sprzężona z pierwszą, jest prostopadłą do x , przyczem $ES = E''' S''' = FS$. Prostopadła, wykreślona przez punkt S do a'' , wyznacza na prostych t_1'' i t_2'' punkty I i II , które są punktami styczności tych prostych z elipsą k_2 .

f) Wyznaczyć przekrój stożka obrotowego wzdłuż dwóch tworzących. Oś stożka, równoległa do rzutni pionowej, jego wierzchołek i kąt wierzchołkowy φ są dane (Rys. 453.*).

Ponieważ oś stożka jest prostą czołową, więc kąt, jaki utworzą rzuty pionowe tworzących konturowych, równy jest danemu kątowi wierzchołkowemu φ . Uważamy ślad poziomy O osi a stożka za środek kuli wpisanej w stożek, to koło r , zakreślone ze środka O promieniem $O'' I'$,



Rys. 453.*

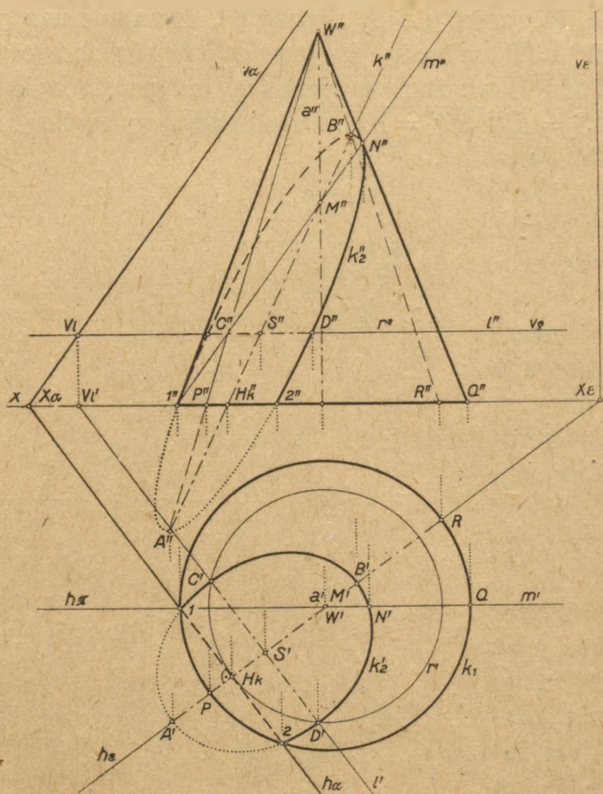
jest rzutem poziomym tej kuli, a styczne, wykreślone z punktu W' do r , stanowią zarys stożka na rzutni poziomej.

Następnie przez wierzchołek stożka poprowadziliśmy prostą poziomą m ($m' m''$), a przez nią płaszczyznę α ($h_\alpha v_\alpha$). Z kolei przecięliśmy stożek płaszczyzną ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$), prostopadłą do jego osi i wykonali kład tej płaszczyzny na rzutnię pionową wraz z uzyskanym przekrojem kołowym i krawędzią b ($b' b''$) płaszczyzn α i ε . Prosta b_0 przecięła koło k^0 w punktach A^0 i B^0 , które rzucone prostopadłe na prostą b'' , dają punkty A'' i B'' . Odnieśmy te punkty na prostą b' , a otrzymane tam punkty A' i B' połączmy z W' , to proste t_1' i t_2' są rzutami poziomymi tworzącymi, wzdłuż których płaszczy-

zna α przecina stożek. Proste $W'' A'' \equiv t_1''$ i $W'' B'' \equiv t_2''$ są rzutami pionowymi tworzącymi przekroju.

Gdyby oś stożka miała położenie dowolne w przestrzeni, to przez wprowadzenie trzeciej rzutni, równoległej do osi stożka, sprowadzimy zadanie do poprzedniego.

g) Wyznaczyć przekrój stożka obrotowego, o osi pionowej, dowolną płaszczyzną α ($h_\alpha v_\alpha$) (Rys. 454.).



Rys. 454.

Przy pomocy związków kolineacji środkowej, zachodzących między podstawą a przekrojem stożka, rozwiązaliśmy

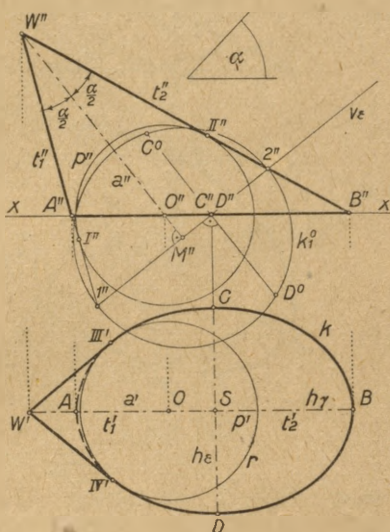
powyższe zadanie w ust. 138. W tem miejscu rozwiążemy powyższe zadanie, stosując ogólną metodę wyznaczania przekroju powierzchni obrotowej, poznaną w ust. 153.

Przy pomocy płaszczyzny ε , przechodzącej przez oś stożka i prostopadłej do płaszczyzny siecznej α , znajdziemy oś $A'B'$ elipsy k_2' i średnicę $A''B''$ elipsy k_2'' . Ślad poziomy H_k , krawędzi płaszczyzn α i ε , jest znany; wynajdźmy, przy pomocy czołowej płaszczyzny π , przechodzącej przez oś stożka, punkt przebiecia się M ($M' M''$) tej osi z płaszczyzną α , to prosta $H_k'' M''$ jest rzutem pionowym krawędzi k . Wykreśliwszy rzuty pionowe tworzących, wzdłuż których płaszczyzna ε przecina stożek, otrzymamy jako przecięcie się ich z prostą k'' punkty A'' i B'' , ograniczające średnicę. Oś $C'D'$, względnie średnicę $C''D''$ znajdziemy przy pomocy przekroju stożka płaszczyzną poziomą ρ , przechodzącą przez środek S ($S' S''$).

Ślad poziomy h_α płaszczyzny siecznej przecina podstawę stożka w punktach 1 i 2; elipsa k_2' leży częściowo pod rzutnią poziomą, a taki przekrój stożka nazywamy niezupełnym.

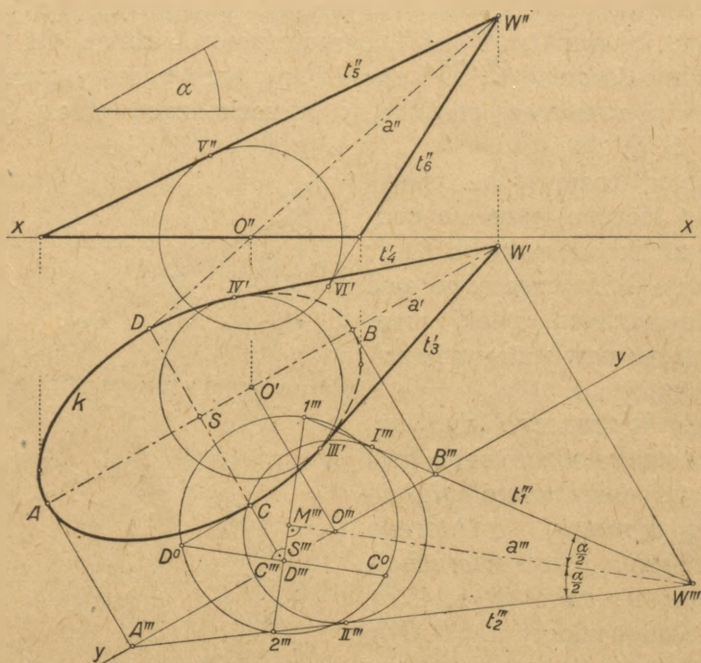
h) Wyznaczyć ślad poziomy stożka obrotowego, którego oś jest równoległą do rzutni pionowej, a którego wierzchołek i kąt wierzchołkowy α są dane (Rys. 455.).

Ślad poziomy O ($O O'$), osi a ($a' a''$) stożka, uważajmy za środek kuli wpisanej w stożek, to wyznaczyszy promień tej kuli $O'' I'' = O'' II''$ i wykreśliwszy jej rzuty p'' i r , otrzymamy rzut poziomy tworzących konturowych, jako styczne do koła r , wykreślone z punktu W' . Ślad poziomy stożka jest elipsą k o osi dużej AB i o środku S . Płaszczyzna ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$), przechodząca przez środek elipsy prostopadłe do osi stożka, przecina stożek wzdłuż koła o promieniu $M'' I'' = M'' II''$, a punkty przecięcia się śladu



Rys. 455.

poziomego h_ε z tym kołem ograniczają małą oś elipsy. Celem otrzymania długości tej osi, wykonajmy kład płaszczyzny ε na płaszczyznę czołową γ , przechodzącą przez oś stożka. Koło k_1^0 , zakreślone z punktu M'' jako środka promieniem $M''I''$, jest kładem przekroju stożka płaszczyzną ε . Cięciwa C^0D^0 koła k_1^0 , równoległa do a'' , jest kładem małej osi elipsy k . Odmierzwszy $CS = DS = C^0C'''$, otrzymamy drugą oś elipsy, będącej śladem poziomym stożka. Punkty styczności III' i IV' rzutu poziomego tworzących konturowych z kołem r , są punktami styczności śladu poziomego stożka (elipsy k) z temi prostymi.



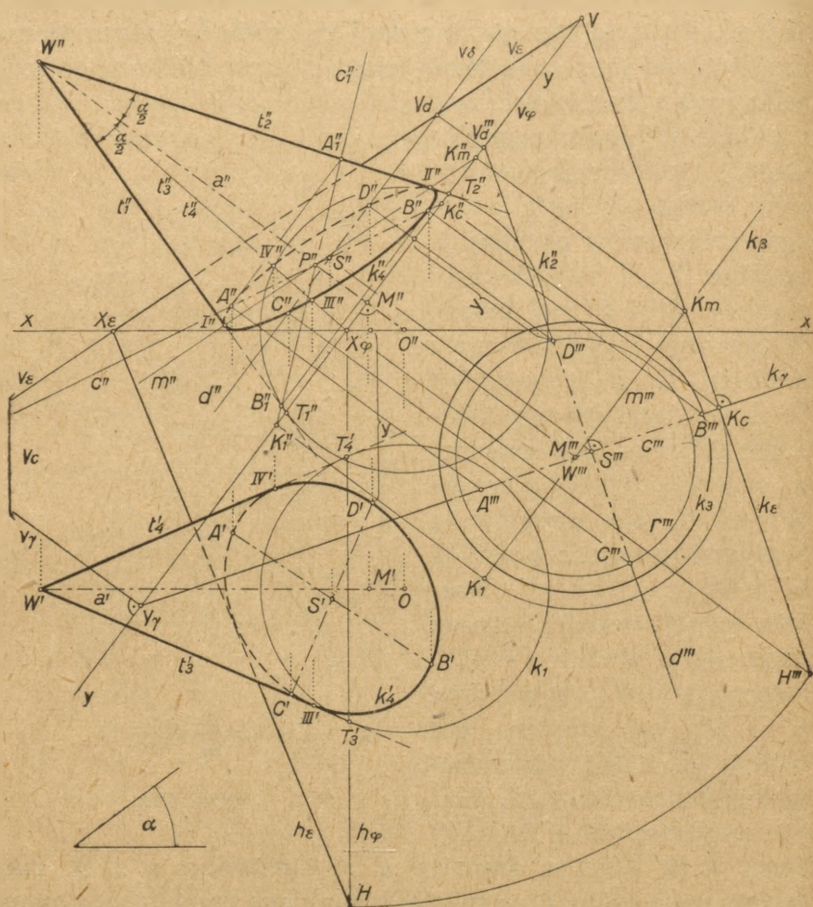
Rys. 456.

i) Wyznaczyć ślad poziomy stożka obrotowego, którego dana oś a (a' a'') jest nachylona do obu rzutni, a którego wierzchołek W (W' W'') i kąt wierzchołkowy α są również dane (Rys. 456.).

Przez przyjęcie trzeciej rzutni, równoległej do osi stożka, a prostopadłej do rzutni poziomej i wyznaczenie trzeciego rzutu stożka, sprowadzimy zadanie do poprzedniego.

i prostych t_1, t_2 , otrzymamy na śladzie v_α punkty I'' i II'' , które odniesione na rzut poziomy są punktami styczności prostych t_1' i t_2' z elipsą k' .

k) Wykreślić rzuty stożka obrotowego, którego oś a ($a' a''$), równoległa do rzutni pionowej, wierzchołek i kąt



Rys. 458.

wierzchołkowy α są dane, a następnie wyznaczyć przekrój tego stożka płaszczyzną ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$), (Rys. 458.).

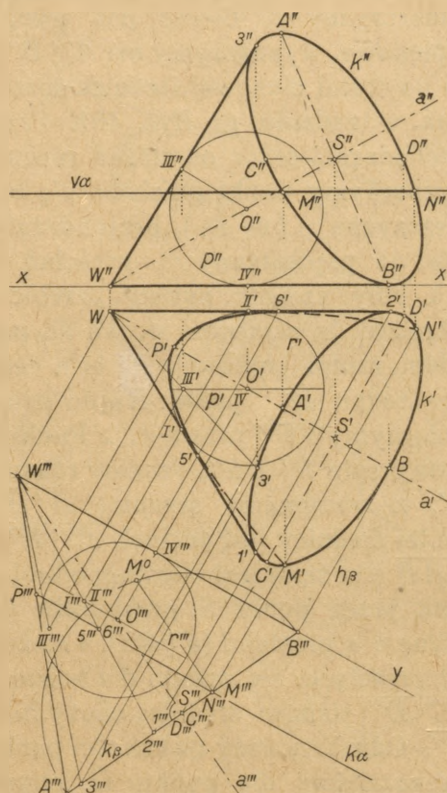
Wykreśliwszy rzuty stożka, przy pomocy kuli o środku O , (jak w przykładzie h , Rys. 455.) poprowadźmy przez punkty styczności T_1 i T_2 płaszczyznę φ ($h_\varphi v_\varphi$) prostopadłą do osi stożka, a uważając ją za nową rzutnię, wykonajmy jej kład

około śladu v_φ , jako nowej osi rzutów y na rzutnię pionową. Jeżeli oś stożka przebija płaszczyznę φ w punkcie M ($M' M''$), to znalazłszy kład M''' tego punktu i zakreśliwszy z niego, jako środka, koło k_3 o promieniu $\overline{T_1'' M''}$ — otrzymamy trzeci rzut stożka. Kład krawędzi płaszczyzn ε i φ na rzutnię pionową jest śladem bocznym k_ε płaszczyzny ε . Biorąc pod uwagę nowy rzut stożka i jego rzut pionowy, wyznaczmy osi $\overline{A''' B'''}$, $\overline{C''' D'''}$ i odpowiadające im na rzutni pionowej średnice sprzężone elipsy k_4'' , podobnie jak w zadaniu g) Rys. 454. Przy pomocy płaszczyzny β , przechodzącej przez oś stożka równolegle do rzutni pionowej, wyznaczmy punkt przebiecia się osi stożka z płaszczyzną ε . Płaszczyzna γ ($v_\gamma k_\gamma$), przechodząca przez oś stożka i prostopadła do płaszczyzny ε , przecina tę ostatnią w prostej c ($c'' c'''$). Aby znaleźć punkty przebiecia się prostej c ze stożkiem, obróćmy ją około osi stożka do położenia równoległego względem rzutni pionowej. W tym celu przeniesiemy łukiem koła o środku M''' punkt K_c do położenia K_1 ($K_1 K_1''$) i K_1'' połączmy z P'' prostą c_1'' . Punkty, w których prosta c_1'' przecina proste h'' i h_2'' , rzućmy równolegle do osi y na prostą c'' , to otrzymamy średnicę $\overline{A'' B''}$ elipsy k_4'' . Rzutem bocznym tej średnicy jest odcinek $\overline{A''' B'''}$. Środek S ($S'' S'''$) odcinka $\overline{AB}$ jest środkiem elipsy przekroju. Płaszczyzna δ , poprowadzona przez punkt S prostopadłe do osi stożka, przecina płaszczyznę ε w prostej d ($d'' d'''$), a stożek w kole r . Oznaczmy punkty przecięcia się prostej d z kołem r literami C i D , to odcinek $\overline{C'' D''}$ stanowi średnicę elipsy k_4'' , sprzężoną ze średnicą $\overline{A'' B''}$. Odmierzwszy głębokości punktów A , B , C i D , jak to wskazaliśmy dla punktu D , otrzymamy ich rzuty poziome, a więc parę średnic sprzężonych $\overline{A' B'}$ i $\overline{C' D'}$ elipsy k_4' .

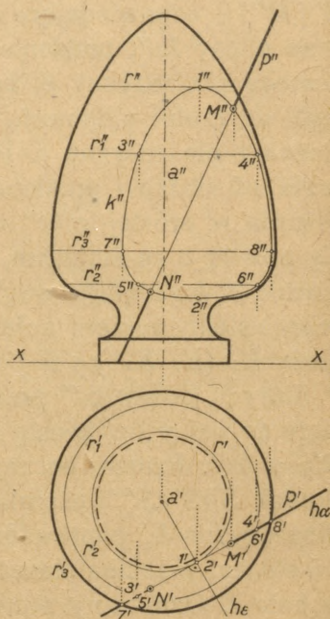
l) Dane są oś i wysokość stożka obrotowego, który styka się wzdłuż tworzącej z rzutnią poziomą; wyznaczyć przekrój tego stożka poziomą płaszczyzną α , (Rys. 459.).¹

Przyjmijmy trzecią rzutnię, równoległą do osi stożka a przecinającą rzutnię poziomą w prostej y i wykreślmy najpierw rzut boczny żadanego stożka. Następnie przy pomocy kuli o środku O ($O' O'' O'''$), wpisanej w stożek, wykreślmy rzuty tworzących konturowych i ich punkty styczności $1'$, $2'$ i $3'$ z elipsami k' i k'' . Linia przekroju stożka płaszczyzną α jest parabolą, gdyż płaszczyzna sieczna jest równoległą do jednej

tworzącej stożka. Rzut boczny P''' wierzchołka stożka, jak również i punkty M''' i N''' , odniesiemy na rzut poziomy, otrzymując wierzchołek P' i dwa punkty paraboli, będącej rzutem poziomym krzywej przekroju. Ośią tej paraboli jest prosta a' .



Rys. 459.



Rys. 460.

156. O punktach przebicia się prostych z powierzchniami obrotowymi.

Punkt przebicia się prostej z powierzchnią obrotową znajdziemy za pośrednictwem przekroju tej powierzchni płaszczyzną, poprowadzoną przez tę prostą, z reguły prostopadle do jednej z rzutni. Punkty przecięcia się danej prostej z linią przekroju rozwiązują zadanie.

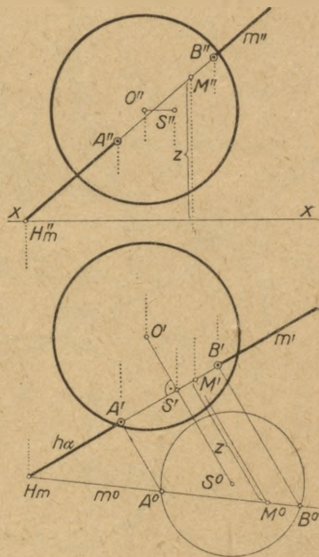
Przykłady.

a) Wyznaczyć punkty przebicia się prostej p (p' p'') z powierzchnią obrotową (Rys. 460.). Przez prostą p popro-

wadziliśmy poziomo rzucającą płaszczyznę α i wyznaczyliśmy jej przekrój z daną powierzchnią. Punkty M (M' M'') i N (N' N'') przecięcia się krzywej przekroju z prostą p rozwiązują zadanie.

b) Wyznaczyć punkty przebiecia się prostej m (m' m'') z kulą (Rys. 461.). Poziomo rzucająca płaszczyzna α przecina kulę wzdłuż koła o środku S (S' S'').

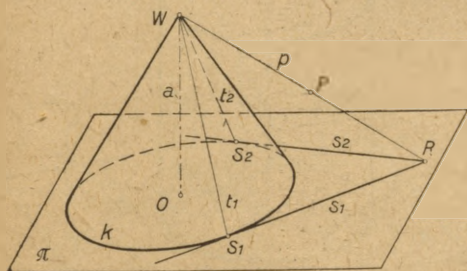
Wykonajmy kład płaszczyzny α wraz z kołem przekroju i prostą m , około śladu h_α na rzutnię poziomą, to punkty A^0 i B^0 , rzucone prostopadłe na m' , a stąd na m'' , rozwiązują zadanie.



Rys. 461.

157. Płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, przechodzące przez dany punkt. Płaszczyzna styczna do stożka, przechodząca przez dany punkt P , przechodzi przez wierzchołek W , a więc zawiera prostą, łączącą punkt P z wierzchołkiem stożka.

Aby więc przez dany punkt P poprowadzić płaszczyznę styczną do stożka (Rys. 462.), połączymy ten punkt z wierzchołkiem, wyznaczymy ślad R prostej p na płaszczyźnie kierownicy (podstawy, śladu) i z otrzymanego punktu wykreślimy styczne s_1 i s_2 do kierownicy k stożka. Styczne te wraz z prostą p wyznaczają



Rys. 462.

żądane płaszczyzny σ_1 i σ_2 . Tworzące t_1 i t_2 , przechodzące przez punkty styczności S_1 i S_2 prostych s_1 i s_2 , są temi, wzdłuż których płaszczyzny σ_1 i σ_2 stykają się ze stożkiem. Jeżeli z punktu R poprowadzić można dwie styczne do podstawy k stożka, to istnieją dwie płaszczyzny,

rozwiązujące zadanie. Jeżeli punkt R jest punktem krzywej k , to punkt P leży na stożku, a wówczas istnieje jedna płasz-

czyzna, rozwiązująca zadanie, styczna do stożka wzdłuż tworzącej $W P R$. Jeżeli wreszcie z punktu R nie można wykreślić żadnej stycznej do kierownicy k , to zadanie nie posiada żadnego rzeczywistego rozwiązania.

Zadanie.

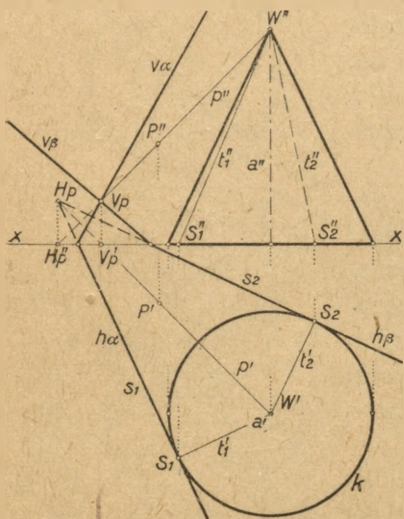
Przez punkt $P (P' P'')$ poprowadzić płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, o osi pionowej (Rys. 463.). Łączymy W z P , szukamy śladów H_p i V_p

prostej $p (p' p'')$, a przez punkt H_p kreślimy styczne s_1 i s_2 do koła k . Styczne te są śladami poziomymi szukanych płaszczyzn α i β , których ślady pionowe przejdą przez punkt V_p . Wykreślenie tworzących styczności $t_1 (t'_1 t''_1)$ i $t_2 (t'_2 t''_2)$, dopełnia rozwiązania zadania.

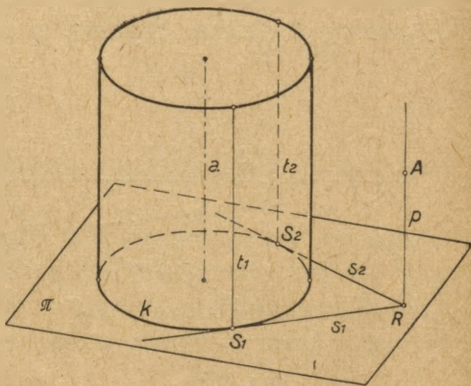
158. Płaszczyzny styczne do walca obrotowego, przechodzące przez dany punkt.

Uważając walec obrotowy za stożek obrotowy, którego wierzchołek leży nieograniczenie

daleko w kierunku tworzących walca, otrzymamy rozwiązanie zadania takie same, jak dla stożka. Przez dany punkt A (Rys. 464.) prowadzimy prostą p równoległą do tworzących walca. Z punktu R , w którym prosta p przebija płaszczyznę podstawy walca, kreślimy styczne s_1 i s_2 do podstawy, a płaszczyzny $\alpha \equiv (p, s_1)$ i $\beta \equiv (p, s_2)$ rozwiązują zadanie. Tworzące t_1 i t_2 walca, przechodzące przez punkty S_1 i S_2 , są temi, wzdłuż których płaszczyzny styczne α i β stykają się z walcem.



Rys. 463.



Rys. 464.

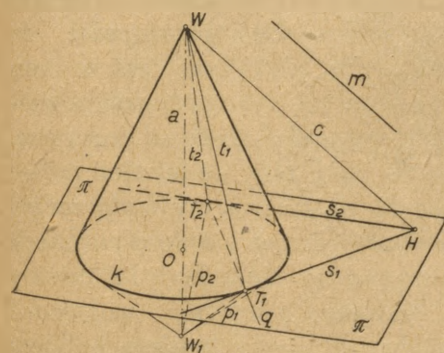
Jeżeli podstawa walca leży na rzutni poziomej (Rys. 465.), to płaszczyzny styczne, przechodzące przez punkt A ($A' A''$), są poziomo rzucające. Ilość rozwiązań, podobnie jak przy stożku, zależy od położenia punktu A i może wynosić dwa, jeden lub zero.

159. Płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, równoległe do danej prostej.

Przez wierzchołek stożka poprowadzimy prostą c , (Rys. 466.) równoległą do danej prostej m , a przez nią płaszczyzny styczne do stożka. Zadanie sprowadza się tym sposobem do rozważanego w ust. 157.

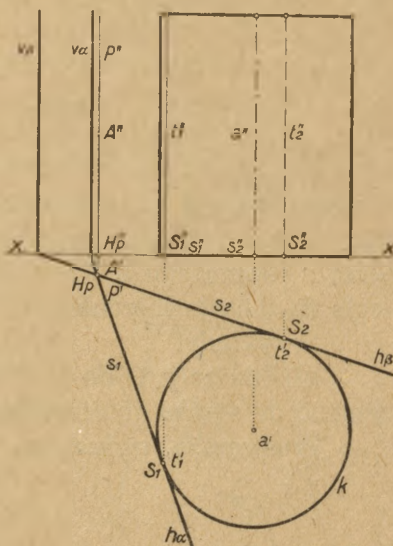
Uważajmy podstawę k stożka za kierownicę stożka normalnego (ust. 148.) i wyznaczmy jego wierzchołek W_1 .

Jeżeli t_1 i t_2 są tworzącymi, wzdłuż których płaszczyzny styczne, przechodzące przez prostą $c \parallel m$, dotykają stożka, a proste s_1 i s_2 są śladami tych płaszczyzn na płaszczyźnie π ,



Rys. 466.

płaszczyzny stycznej $\sigma_1 = (t_1, s_1)$. Analogicznie prosta p_2 jest prostopadłą do płaszczyzny stycznej $\sigma_2 = (t_2, s_2)$. Stąd wynika dalej, że płaszczyzna $\psi = (p_1, p_2)$, jako prostopadła do płasz-



Rys. 465.

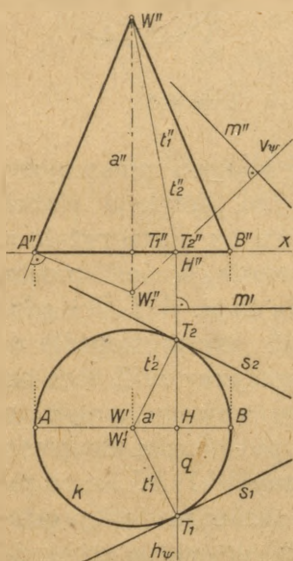
to prosta s_1 jest prostopadła do pł. $W T_1 W_1$, gdyż $W W_1$ jest prostopadła do płaszczyzny π . Z tego samego powodu prosta s_2 jest prostopadła do płaszczyzny $W T_2 W_1$, a co zatem idzie, p_1 jest prostopadła do s_1 , a $p_2 \perp s_2$. Ale prosta p_1 , jako tworząca stożka normalnego, jest prostopadła do t_1 , a więc jest prostopadła do

czyzn stycznych σ_1 i σ_2 , jest prostopadłą do ich krawędzi c . Znając więc wierzchołek stożka normalnego, wyznaczymy tworzące, wzdłuż których płaszczyzny styczne, równoległe do danego kierunku, stykają się ze stożkiem, jeśli przez wierzchołek stożka normalnego poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do danego kierunku i wyznaczymy prostą q , wzdłuż której płaszczyzna ta przecina płaszczyznę podstawy stożka. Prosta q przecina koło k w punktach T_1 i T_2 , które połączone z wierzchołkiem W stożka, są szukanymi tworzącymi. Styczne s_1 i s_2 , wykreślone do koła k w punktach T_1 i T_2 , wyznaczają wraz z tworzącymi t_1 i t_2 płaszczyzny styczne σ_1 i σ_2 , równoległe do danego kierunku.

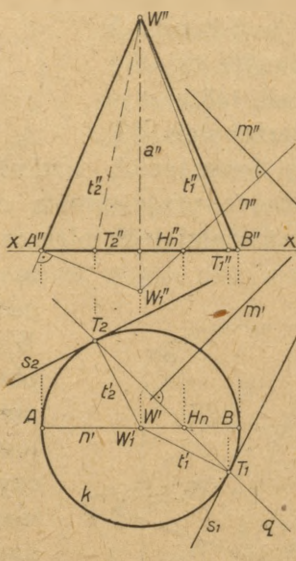
Przykłady.

a) Równoległe do prostej czołowej m (m' m'') poprowadzić do stożka obrotowego (Rys. 467.) płaszczyzny styczne.

Prostopadła, wykreślona w punkcie A'' do prostej $A''W''$,



Rys. 467.



Rys. 468.

stożka, dają tworzące t_1 i t_2 , wzdłuż których płaszczyzny styczne $\sigma_1 \equiv (t_1, s_1)$ i $\sigma_2 \equiv (t_2, s_2)$, równoległe do kierunku m , dotykają stożka.

b) Wyznaczyć płaszczyzny styczne do stożka obrotowego, równoległe do prostej m (m' m''), (Rys. 468.).

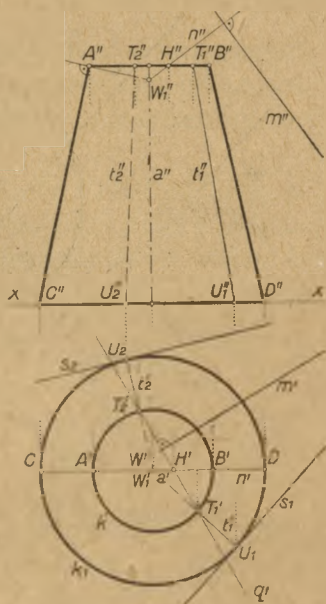
Przez wierzchołek W_1 stożka normalnego poprowadziliśmy n (n' n'') prostopadłą do m , a przez jej ślad poziomy H_n wykreśliliśmy prostą $q \perp m'$. Prosta q jest śladem poziomym płaszczyzny ψ , przechodzącej przez wierzchołek W_1 , prostopadłe do kierunku m . Proste $t_1 \equiv T_1 W$ i $t_2 \equiv T_2 W$ wyznaczają wraz ze stycznymi s_1 i s_2 płaszczyzny styczne do stożka, równoległe do prostej m .

c) Jeżeli wierzchołek stożka nie leży w obrębie płaszczyzny rysunkowej (Rys. 469.), to przyjmąwszy dowolny równoleżnik stożka (w naszym przykładzie ograniczający stożek), uważamy jego płaszczyznę za rzutnię poziomą i przeprowadzimy konstrukcję jak w Rys. 467., znajdując punkty T_1 (T_1' T_1'') i T_2 (T_2' T_2''). Proste $t_1' \equiv (W', T_1')$ i $t_2' \equiv (W', T_2')$ przecinają podstawę k_1 stożka w punktach U_1 i U_2 , a proste $t_1'' \equiv (T_1'', U_1'')$ i $t_2'' \equiv (T_2'', U_2'')$ są rzutami pionowymi tworzących, wzdłuż których płaszczyzny $\sigma_1 \equiv (t_1, s_1)$ i $\sigma_2 \equiv (t_2, s_2)$ stykają się ze stożkiem.

160. Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej, a równoległe do danej płaszczyzny α .

Jako przykład powierzchni obrotowej przyjmijmy kulę (Rys. 470.). Gdyby płaszczyzna α była pionowo rzucającą, to ślady pionowe płaszczyzn stycznych do kuli byłyby

styczne do koła jako rzutu pionowego kuli, a żądane płaszczyzny dałyby się bezpośrednio wyznaczyć. Jeżeli jednak, jak w naszym przypadku, płaszczyzna α (h_α v_α) ma położenie dowolne, to najpierw sprowadzić ją musimy, zapomocą obrotu około osi a (a' a'') kuli, do położenia prostopadłego względem rzutni pionowej. Następnie poprowadzimy płaszczyzny styczne do kuli, a równoległe do płaszczyzny α w jej nowym położeniu, a tak otrzymane płaszczyzny obrócimy, aby były równoległe do płaszczyzny α w jej położeniu pierwotnym.



Rys. 469.

Równoległe do v_α , wykreślone z punktów X_ε i X_φ , stanowią ślady pionowe tych płaszczyzn. Podobnie zapomocą obrotów wstecznych punktów E_0 i F_0 otrzymamy punkty styczności E (E' E'') i F (F' F'') płaszczyzn ε i φ z kulą.

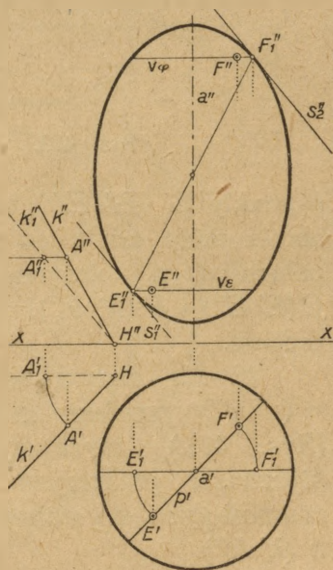
Płaszczyzny ε^0 i φ^0 przecinają oś a kuli, pierwsza w punkcie M (M' M''), druga w N (N' N''). Przez punkty te przejść muszą płaszczyzny ε i φ , co służyć może do sprawdzenia dokładności rysunku. Ślad pionowy v_ε przejdzie przez ślad V_m poziomo tworzącej prostej m (m' m''), a ślad pionowy V_n prostej $n // m$ leżeć będzie na śladzie pionowym v_φ płaszczyzny φ .

161. Wyznaczenie linii styczności walca, o tworzących równoległych do danego kierunku, z powierzchnią obrotową.

Rozwiązanie tego zadania poprzedzimy rozważaniem następujących tematów:

a) Dana jest powierzchnia obrotowa i rzut poziomy p' jej południka; wyznaczyć na tym południku punkty styczności płaszczyzn stycznych, równoległych do danej prostej k .

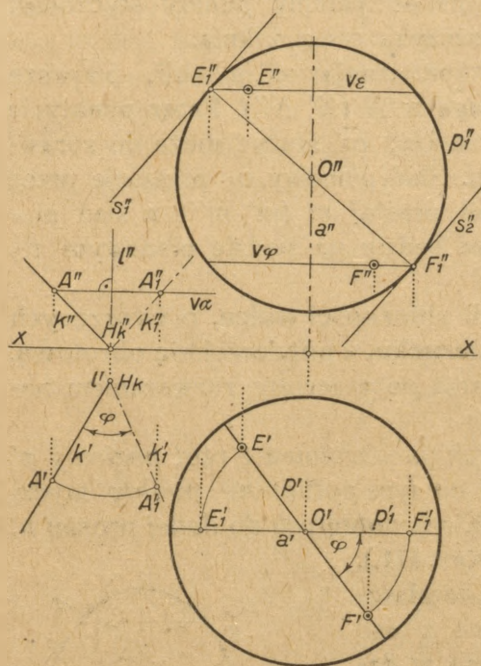
Przyjmijmy najpierw (Rys. 471.), że prosta k jest równoległą do płaszczyzny południka. Wiadomo z ust. 145., że płaszczyzna styczna w danym punkcie powierzchni obrotowej jest prostopadłą do płaszczyzny południka, który przechodzi przez ten punkt i że krawędź płaszczyzny tego południka z płaszczyzną styczną jest styczną do południka w uważanym punkcie i przecina oś powierzchni. Aby uniknąć kreślenia rzutu pionowego południka p , obróćmy go około osi powierzchni tak, aby zeszedł się z południkiem głównym. Równocześnie obróćmy prostą k (k' k'') tak, aby zajęła położenie k_1 równoległe do rzutni pionowej. Styczne s_1'' i s_2'' do zarysu powierzchni



Rys. 471.

obrotowej na rzutni pionowej, równoległe do k_1'' , stykają się z tym zarysem w punktach E_1 (E_1' E_1'') i F_1 (F_1' F_1''). Wróćmy z tymi punktami na południk p — a zadanie będzie rozwiązane.

Łuki kół, zakreślone z punktu a' promieniami $a'E_1'$ i $a'F_1'$, przecinają prostą p' w punktach E' i F' , których rzuty pionowe leżeć będą na śladach pionowych v_ϵ i v_ϕ płaszczyzn obrotów, przechodzących przez punkty E_1 i F_1 prostopadle do osi a powierzchni.



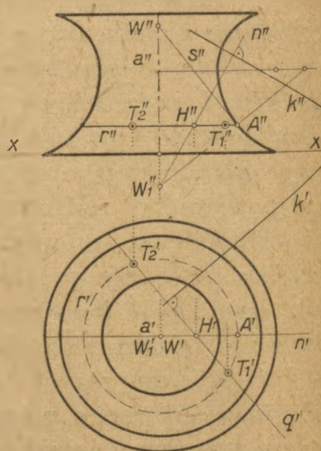
Rys. 472.

a punkty E_1 (E_1' E_1'') i F_1 (F_1' F_1'') obrotu około osi a na płaszczyznę południka p , otrzymując punkty E (E' E'') i F (F' F''), rozwiązujące zadanie.

b) Na danym równoleżniku r (r' r'') powierzchni obrotowej (Rys. 473.) wyznaczyć punkty styczności płaszczyzn stycznych, równoległych do danego kierunku k (k' k'').

Szukane płaszczyzny są styczne do stożka opisanego na powierzchni wzdłuż danego równoleżnika, a wyznaczenie owych płaszczyzn stycznych do stożka, równoległych do

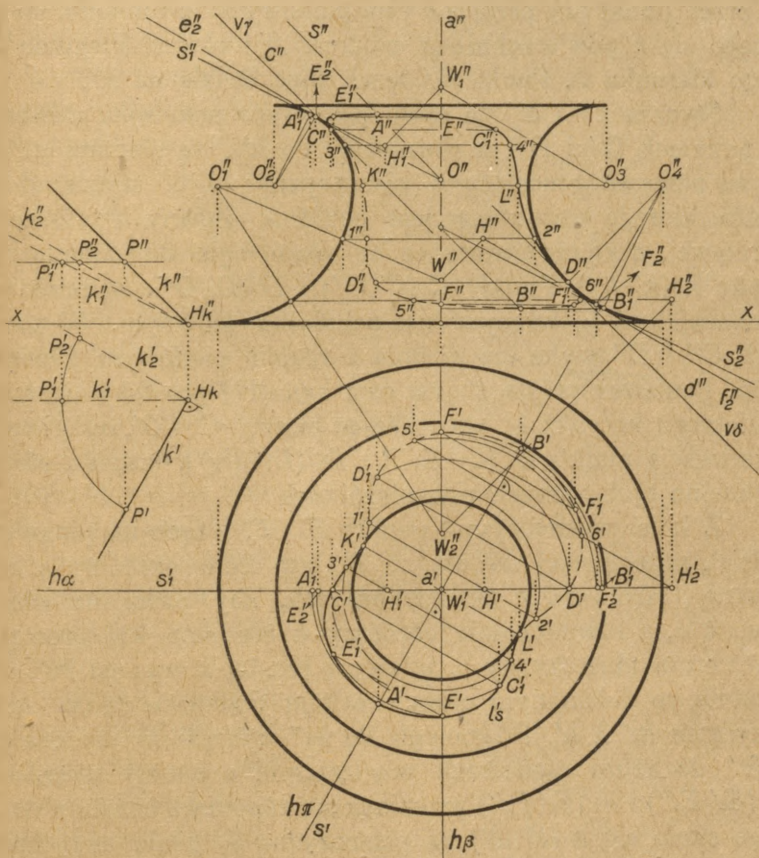
Jeżeli prosta k (k' k'') nie jest równoległą do płaszczyzny południka (Rys. 472.), to południk dany obrócimy około osi a (a' a'') powierzchni aż padnie na południk główny, a prostą k (k' k'') obrócimy około prostej $l//a$ o kąt ϕ , równy kątowi, jaki płaszczyzna południka p zawiera z płaszczyzną południka głównego. Wykreślimy styczne s_1'' i s_2'' równoległe do k_1'' , sprowadzimy zapomocą



Rys. 473.

danego kierunku, uskutecznimy przy pomocy stożka normalnego (ust. 159.).

W punkcie A'' wykreślimy styczną s'' do krzywej, będącej rzutem pionowym powierzchni obrotowej, a następnie normalną $A''W_1''$. Prostopadła n'' , wykreślona z W_1'' do k'' , przecina r'' w punkcie H'' , który rzucimy na prostą n' , otrzymując punkt H' . Przez ten punkt wykreślona prosta $q' \perp k'$ przecina koło r' w punktach T_1' i T_2' , które są rzutami poziomymi szukanych punktów T_1 ($T_1' T_1''$) i T_2 ($T_2' T_2''$).



Rys. 474.*

Teraz przystąpić możemy do wyznaczenia linii styczności l_s walca opisanego na powierzchni obrotowej (Rys. 474.*), a zadanie nasze polegać będzie na złączeniu obu wyżej prze-

prowadzonych. Więc wzięwszy pod uwagę południk, leżący na płaszczyźnie π , równoległej do danego kierunku k (k' k''), wyznaczmy na nim punkty styczności A (A' A'') i B (B' B'') tworzących walca, równoległych do kierunku k . W tym celu obrócimy prostą k do położenia k_1 (k_1' k_1''), równoległego do rzutni pionowej i wykreślimy styczne s_1'' i s_2'' do zarysu powierzchni na rzutni pionowej. Otrzymane punkty styczności A_1 (A_1' A_1'') i B_1 (B_1' B_1'') obrócimy około osi powierzchni na płaszczyznę π , otrzymując szukane punkty A i B . Jeżeli punkt przecięcia się prostej s_1'' z prostą a'' oznaczmy literą O'' , to przez punkt ten przejdzie rzut pionowy s'' promienia, stykającego się z powierzchnią w punkcie A i równoległego do danego kierunku k . Punkt A'' leżeć więc będzie na s'' .

Styczne c'' i d'' do rzutu pionowego południka głównego w punktach C'' i D'' , a równoległe do k'' , są śladami pionowymi pionowo rzucających płaszczyzn γ i δ , stycznych do walca, którego kierownicą jest południk główny powierzchni obrotowej, a którego tworzące są równoległe do danego kierunku k (k' k''). Punkty C (C' C'') i D (D' D'') są punktami szukanej linii l_s , leżącymi na południku głównym. W punktach C'' i D'' styka się ta linia z rzutem pionowym powierzchni. Ponieważ prosta s' jest osią symetrii prostokątnej rzutu poziomego krzywej l_s , więc znając punkty C' i D' , otrzymamy z łatwością punkty C_1 (C_1' C_1'') i D_1 (D_1' D_1''), leżące z pierwszymi na tych samych równoleżnikach.

Z kolei wyznaczmy punkty E i F , leżące na płaszczyźnie β , prostopadłej do osi x . W tym celu obrócmy płaszczyznę β około osi a powierzchni tak, aby padła na płaszczyznę α , a równocześnie obrócmy o ten sam kąt prostą k . Kąt obrotu płaszczyzny β , a więc i prostej k wynosi 90° . Ta ostatnia po dokonanym obrocie zajmie położenie k_2 (k_2' k_2''), przyczem $k_2' \perp k'$. Równoległe do k_2'' wykreślimy styczne e_2'' i f_2'' do rzutu pionowego powierzchni, a punkty styczności E_2 (E_2' E_2'') i F_2 (F_2' F_2'') przeniesiemy zapomocą obrotu wstecznego około osi a (a' a'') na płaszczyznę β , gdzie otrzymamy punkty E (E' E'') i F (F' F'') krzywej l_s . Symetrycznie do nich rozmieszczone są punkty E_1 (E_1' E_1'') i F_1 (F_1' F_1'').

Następnie obierać będziemy na powierzchni równoleżniki, na których, przy pomocy stożków normalnych, znajdziemy po dwa punkty, podobnie jak w Rys. 473.

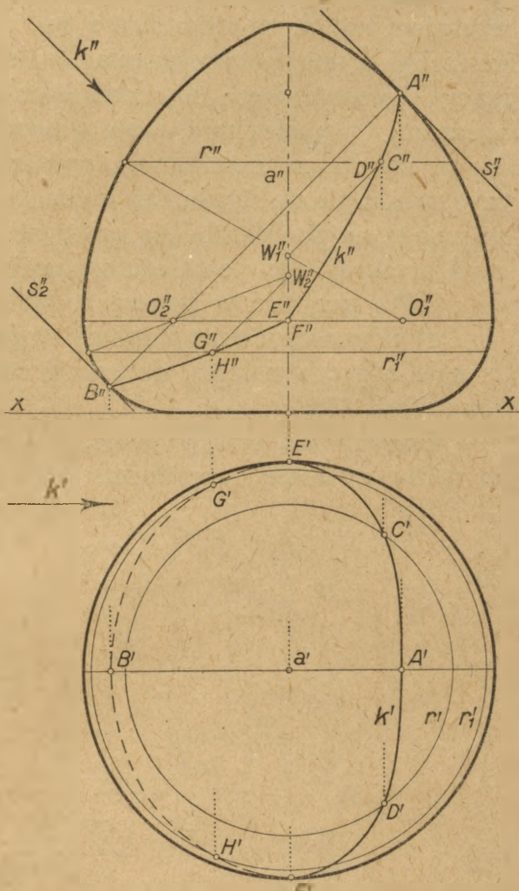
Punkty K ($K' K''$) i L ($L' L''$) na kole sztywnym znajdziemy, kreśląc średnicę $K' L' \perp s'$ i odnosząc punkty K' i L' na rzut pionowy tego koła.

162. Zadanie.

Wyznaczyć linię styczności walca opisanego na powierzchni obrotowej, gdy kierunek tworzących walca jest równoległy do rzutni pionowej (Rys. 475.). Zadanie to stanowi szczególny przykład, omówionego w ustępie poprzednim. Punkty A ($A' A''$) i B ($B' B''$) na południku głównym otrzymamy jako punkty styczności prostych s_1 i s_2 , równoległych do kierunku k ($k' k''$). Na równoleżnikach otrzymamy punkty szukanej linii przy pomocy stozków normalnych (np. punkty C ($C' C''$) i D ($D' D''$)). Rzuty pionowe punktów, leżących na równiku, względnie koła sztywnego, leżą na rzucie pionowym a'' osi powierzchni (punkty E i F).

163. O rzutach powierzchni obrotowych, których osi nie są prostopadłe do płaszczyzn rzutów.

Zarys powierzchni obrotowej na rzutni pionowej jest rzutem prostokątnym zarysu istotnego powierzchni, albo innymi słowy, jest przekrojem walca opisanego na powierzchni, którego tworzące są prostopadłe do rzutni pionowej, z tą rzutnią. Podobnie rzut



Rys. 475.

poziomy powierzchni jest przekrojem walca o tworzących pionowych, opisanego na tej powierzchni, z rzutnią poziomą.

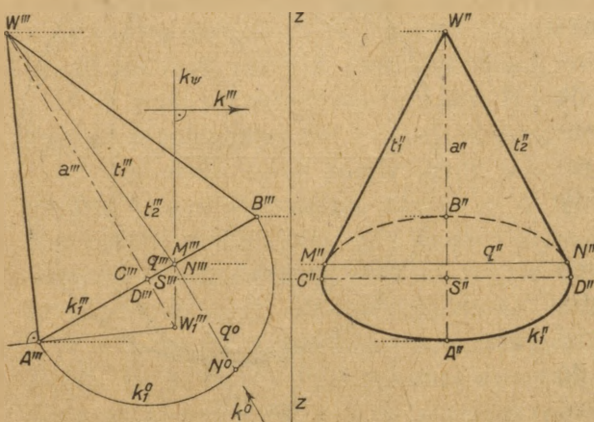
Gdy oś powierzchni jest pionowa, to linia styczna do walca opisanego na powierzchni, prostopadła do rzutni pionowej, jest południkiem głównym. Rzut pionowy tego południka, albo innymi słowy przekrój walca opisanego na powierzchni, jest linią przystającą do południka głównego.

Jeżeli oś powierzchni obrotowej ma położenie dowolne względem rzutni, to wykreślenie np. rzutu pionowego tej powierzchni wymaga wyznaczenia linii stycznej do walca, o tworzących prostopadłych do rzutni pionowej, opisanego na powierzchni i wynalezienia rzutu pionowego tej linii. To samo odnosi się do rzutu poziomego powierzchni. Najpierw wyznaczyć musimy linię styczną do walca, o tworzących pionowych, opisanego na powierzchni, a następnie rzut poziomy tej linii, czyli przekrój tego walca rzutnią poziomą.

Kilka przykładów sprawę najlepiej wyjaśni.

a) Wyznaczyć rzut pionowy stożka obrotowego, którego oś a (a' a'') równoległa do rzutni bocznej i rzut boczny są dane (Rys. 476.).

Opisany na stożku walec, o tworzących prostopadłych do rzutni pionowej, sprowadza się do dwóch pionowo rzucających płaszczyzn, stycznych do stożka



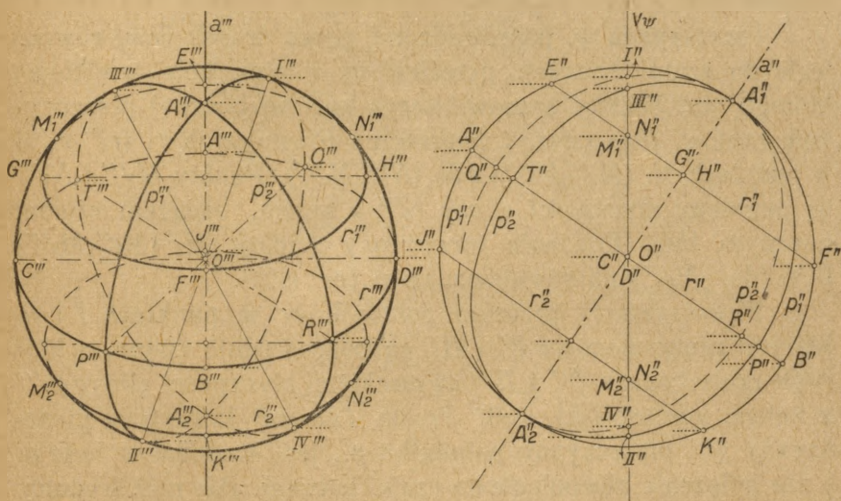
Rys. 476.

wzdłuż tworzących t_1 i t_2 . Tworzące te znajdziemy przy pomocy stożka normalnego, kreśląc z jego wierzchołka W_1 płaszczyznę ψ , prostopadłą do kierunku rzutów, a więc równoległą do rzutni pionowej. Płaszczyzna ψ przetnie płaszczyznę postawy stożka w prostej q (q'' q'''), a koło k_1 (k_1'' k_1''') w punktach M (M'' M''') i N (N'' N'''). Wykonajmy kład k_1^0 koła k_1

około jego średnicy $\overline{AB}$ na płaszczyznę, przechodzącą przez oś stożka, a równoległą do rzutni bocznej, to podwójna długość odcinka $\overline{N^0 N''}$ równa jest cięciwie $\overline{M'' N''}$ elipsy k_1'' . Punkty M'' i N'' są punktami styczności prostych t_1'' i t_2'' z elipsą k_1'' .

b) Wykreślić rzut pionowy i boczny kuli wraz z jej równikiem, dwoma równoleżnikami i dwoma południkami. Rzuty osi $a(a'' a''')$ i środka $O(O'' O''')$ kuli, a także i jej promień są dane.

Walec, o tworzących prostopadłych do dowolnej płaszczyzny, opisany na kuli, jest walcem obrotowym. Rzut prostokątny kuli, będący przekrojem tego walca płaszczyzną rzutów, prostopadłą do jego tworzących, jest więc zawsze kołem, o promieniu, równym promieniowi kuli. Koła, zakreślone z punktów O'' i O''' (Rys. 477.*) danym promieniem kuli, są rzutami tej kuli na płaszczyznę pionową i boczną.



Rys. 477.*

Punkty $A_1(A_1'' A_1''')$ i $A_2(A_2'' A_2''')$ są punktami, w których oś $a(a'' a''')$ przebija kulę. Średnica $\overline{A'' B''} \perp \overline{A_1'' A_2''}$ jest rzutem pionowym równika r , a równoległe do niej cięciwy $\overline{E'' F''}$ i $\overline{J'' K''}$ są rzutami pionowymi równoleżników r_1 i r_2 . Wyznaczenie rzutu bocznego r''' równika i rzutów bocznych r_1''' i r_2''' równoleżników nie nastręcza żadnych trudności. Mała oś elipsy r''' jest rzutem prostokątnym średnicy $\overline{A'' B''}$

na prostą a''' , oś duża równa jest średnicy $\overline{C''' D'''}$ koła. Mała oś elipsy r_1''' , będącej rzutem bocznym równoleżnika r_1 , jest rzutem prostokątnym $\overline{E''' F'''}$ cięciwy $\overline{E'' F''}$ na a''' ; długość osi wielkiej $\overline{G''' H'''}$ tej elipsy jest równą długości cięciwy $\overline{E'' F''}$.

Każda płaszczyzna, przechodząca przez oś kuli, przecina ją wzdłuż koła wielkiego (południka), a płaszczyznę równika wzdłuż prostej, która przechodzi przez środek kuli. Każda średnica koła równikowego i oś $\overline{A_1 B_1}$ kuli stanowią parę wzajemnie prostopadłych średnic jednego południka. Rzut tej pary średnic koła południkowego na płaszczyznę boczną stanowi parę średnic sprzężonych elipsy, będącej rzutem bocznym południka. Elipsa p_1''' , wyznaczona parą średnic sprzężonych $\overline{A_1''' A_2'''}$ i $\overline{P''' Q'''}$, przyczem ta ostatnia jest dowolnie przyjętą średnicą elipsy r''' , jest rzutem bocznym południka p_1 . Rzut pionowy tego południka jest elipsą p_1'' , wyznaczoną osiami $\overline{A_1'' A_2''}$ i $\overline{P'' Q''}$.

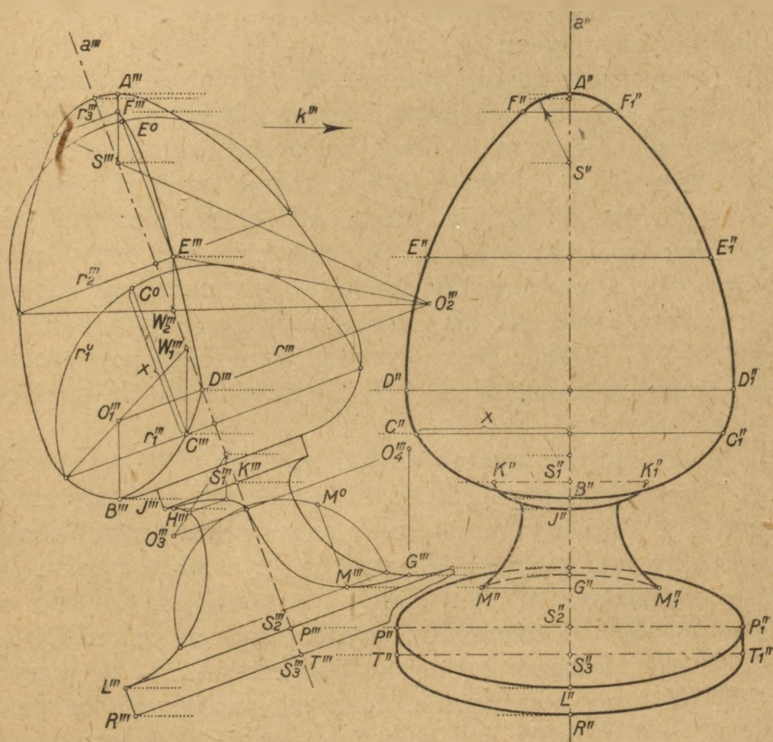
Płaszczyzna ψ , poprowadzona przez środek kuli, równolegle do rzutni bocznej, przecina ją wzdłuż koła wielkiego, którego rzut boczny stanowi zarys kuli na bocznej płaszczyźnie rzutów. Płaszczyzna ψ przecina równoleżnik r_1 (r_1'' r_1''') w punktach M_1 (M_1'' M_1''') i N_1 (N_1'' N_1'''). Punkty M_1''' i N_1''' są punktami styczności elipsy r_1''' z kołem, będącem rzutem bocznym kuli. Podobnie otrzymamy punkty M_2 (M_2'' M_2''') i N_2 (N_2'' N_2''') na równoleżniku r_2 (r_2'' r_2''').

Płaszczyzna ψ przecina południk p_1 w punktach I i II , których rzuty pionowe I'' i II'' są bezpośrednio znane, a których rzuty boczne I''' i II''' są punktami styczności elipsy p_1''' z kołem konturowem kuli. Prosta III jest krawędzią płaszczyzny ψ i płaszczyzny południka p_1 , jest średnicą w kole p_1 i ma położenie równoległe do rzutni bocznej. Ale rzut średnicy koła, równoległej do płaszczyzny rzutów, jest osią elipsy, będącej rzutem tego koła (patrz przykłady w ust. 99.). Średnica $\overline{I''' II'''}$ jest więc osią elipsy p_1''' , którą też otrzymać można, bez pośrednictwa rzutu pionowego, ze średnic sprzężonych $\overline{A_1''' A_2'''}$ i $\overline{P''' Q'''}$, przez zastosowanie poznanej w ust. 97. Rys. 292 b. konstrukcji.

c) Wykreślić rzut pionowy powierzchni obrotowej, której oś — równoległa do rzutni bocznej — i rzut boczny są dane (Rys. 478.*).

Rzut pionowy naszej powierzchni jest śladem pionowym walca, o tworzących prostopadłych do rzutni pionowej, opisanego na tej powierzchni, albo innymi słowy, jest to rzut pionowy linii stycznych walca, którego tworzące, styczne do powierzchni, są prostopadłe do rzutni pionowej.

Biorąc pod uwagę rzut boczny i poziomy, wyznaczmy — podobnie jak w Rys. 475. — linię stycznych walca, opisanego na powierzchni obrotowej, uwzględniając kierunek



Rys. 478.*

jego tworzących, równoległe do osi y . Więc styczne, równoległe do k''' , dotykają zarysu powierzchni w rzucie bocznym w punktach A''' i B''' szukanej linii. Z kolei szukać będziemy punktów tej linii na równoleżnikach powierzchni, aby zaś uniknąć kreślenia rzutu poziomego, wykonywać będziemy kłady tych równoleżników na płaszczyznę, przechodzącą przez oś powierzchni równoległe do rzutni bocznej. I tak np. rzut boczny równoleżnika r_1 jest odcinkiem r_1''' , a kład jego na

wspomnianą wyżej płaszczyznę kołem r_1^0 . Z punktu W_1''' , który jest rzutem bocznym wierzchołka stożka normalnego, wykreślimy prostopadłą do kierunku k''' , otrzymując na r_1''' punkt C''' . Z punktu tego wykreślimy prostopadłą do rzutu pionowego a'' osi powierzchni i odmierzymy po obu stronach prostej a'' odcinek $x = C''' C^0$. Otrzymamy punkty C'' i C_1'' szukanego zarysu powierzchni na rzutni pionowej. W podobny sposób znajdziemy dowolną ilość dalszych punktów tego zarysu; konstrukcję dla punktów D'' i D_1'' , E'' i E_1'' , F'' i F_1'' podaliśmy na rysunku.

Druga część naszej powierzchni obrotowej złączona jest z pierwszą walcem obrotowym i takimże walcem zakończona. Z rzutu pionowego pierwszego widoczna jest część elipsy o osi dużej $K'' K_1''$ i małej półosi, równej rzutowi prostokątnemu odcinka $J''' K'''$ na prostą a'' . Rzut boczny, a także i pionowy linii styczności walca, opisanego na owej drugiej (dolnej) części powierzchni obrotowej, wyznaczmy zupełnie w ten sam sposób, jak dla części pierwszej. Styczne równoległe do k''' stykają się z krzywą, stanowiącą rzut boczny powierzchni w punktach G''' i H''' . Rzut pionowy G'' punktu G leży na prostej a'' .

Poprowadźmy styczną do linii $G''' M''' H'''$, równoległą do k''' , względnie prostopadłą do a'' i oznaczmy punkt styczności literą M''' . W znany sposób, przy pomocy układu równoleżnika, znajdziemy rzut pionowy M'' punktu M , a także punktu M_1 , przyczem odcinek $M'' M_1''$ równy jest podwójnej długości odcinka $M''' M^0$. Z konstrukcyi wynika wprost, że punkty M'' i M_1'' są punktami zwrotu linii zarysu i że krzywa $M'' G'' M_1''$ jest niewidoczną. Idąc od punktu M ku punktowi H , rzut pionowy linii styczności, walca opisanego na powierzchni, jest widoczny.

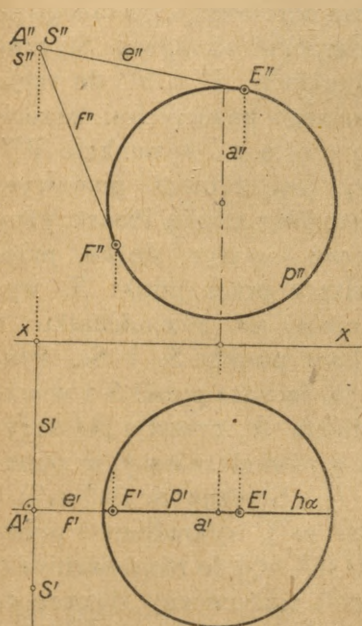
164. O stożkach opisanych na powierzchniach obrotowych.

1. Niechaj zadaniem naszym będzie wyznaczenie na południku głównym danej powierzchni obrotowej, np. kuli, punktów styczności płaszczyzn stycznych do tej powierzchni, a przechodzących przez dany punkt S (S' S'').

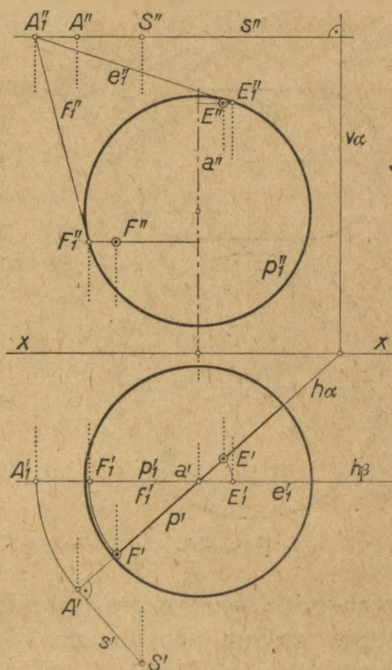
Poprowadźmy w tym celu z punktu S prostopadłą s (Rys. 479.) do płaszczyzny południka głównego α i oznaczmy punkt przebicia się tej prostej z płaszczyzną α literą A .

Poprowadźmy następnie z punktu A (A' A'') styczne e (e' e'') i f (f' f'') do południka głównego p (p' p''), to płaszczyzny $\varepsilon \equiv (s, e)$ i $\varphi \equiv (s, f)$ stykają się z powierzchnią obrotową w szukanych punktach E (E' E'') i F (F' F''), leżących na południku p (p' p'').

Gdybyśmy w miejsce południka głównego przyjęli południk dowolny, leżący na płaszczyźnie α (Rys. 480.), to zadanie powyższe rozwiążemy w sposób następujący: Z danego



Rys. 479.

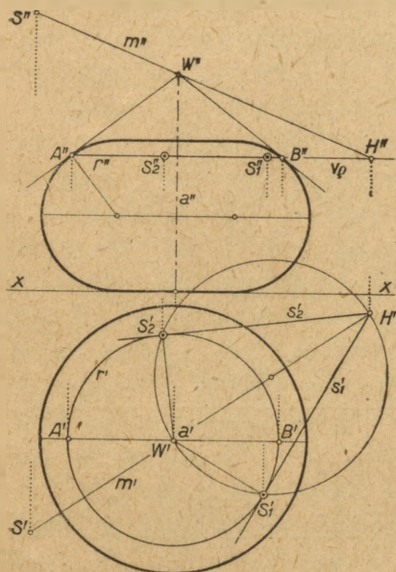


Rys. 480.

punktu S (S' S'') poprowadzimy prostą s (s' s'') do płaszczyzny α ($h_\alpha v_\alpha$), a następnie obrócimy tę płaszczyznę wraz z punktem A (A' A''), około osi powierzchni, do położenia płaszczyzny południka głównego β . Styczne e_1 (e_1' e_1'') i f_1 (f_1' f_1''), wykreślone z punktu A_1 (A_1' A_1'') do południka głównego, stykają się z nim w punktach E_1 (E_1' E_1'') i F_1 (F_1' F_1''). Zapomocą obrotu wstecznego około osi a (a' a''), wrócimy z tymi punktami na płaszczyznę α , otrzymując na danym południku p (p' p'') punkty E (E' E'') i F (F' F''), w których

płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej, przechodzące przez punkt S , dotykają tej powierzchni.

2. Przyjmijmy powierzchnię obrotową (Rys. 481.), a na niej równoleżnik r (r' r''), zaś zewnątrz powierzchni dowolny punkt S (S' S''). Wyznaczmy na tym równoleżniku punkty styczności płaszczyzn stycznych do powierzchni, a przechodzących przez punkt S .



Rys. 481.

W tym celu uważajmy równoleżnik r za równoleżnik stożka obrotowego, opisanego na powierzchni obrotowej. Styczne w punktach A'' i B'' do rzutu pionowego powierzchni przecinają prostą a'' w punkcie W'' , który jest rzutem pionowym wierzchołka stożka. Płaszczyzny styczne do tego stożka, przechodzące przez punkt S , wyznaczają na równoleżniku r szukane punkty S_1 i S_2 . Prosta m , łącząca punkt S z wierzchołkiem W , przebija płaszczyznę ρ równoleżnika r w punkcie H . Styczne s_1 (s_1' s_1'') i s_2 (s_2' s_2''), wykreślone z punktu H (H' H'') do równoleżnika r ,

wyznaczają wraz z prostą m (m' m'') płaszczyzny styczne do stożka wzdłuż tworzących WS_1 i WS_2 , a do powierzchni obrotowej w punktach S_1 (S_1' S_1'') i S_2 (S_2' S_2'').

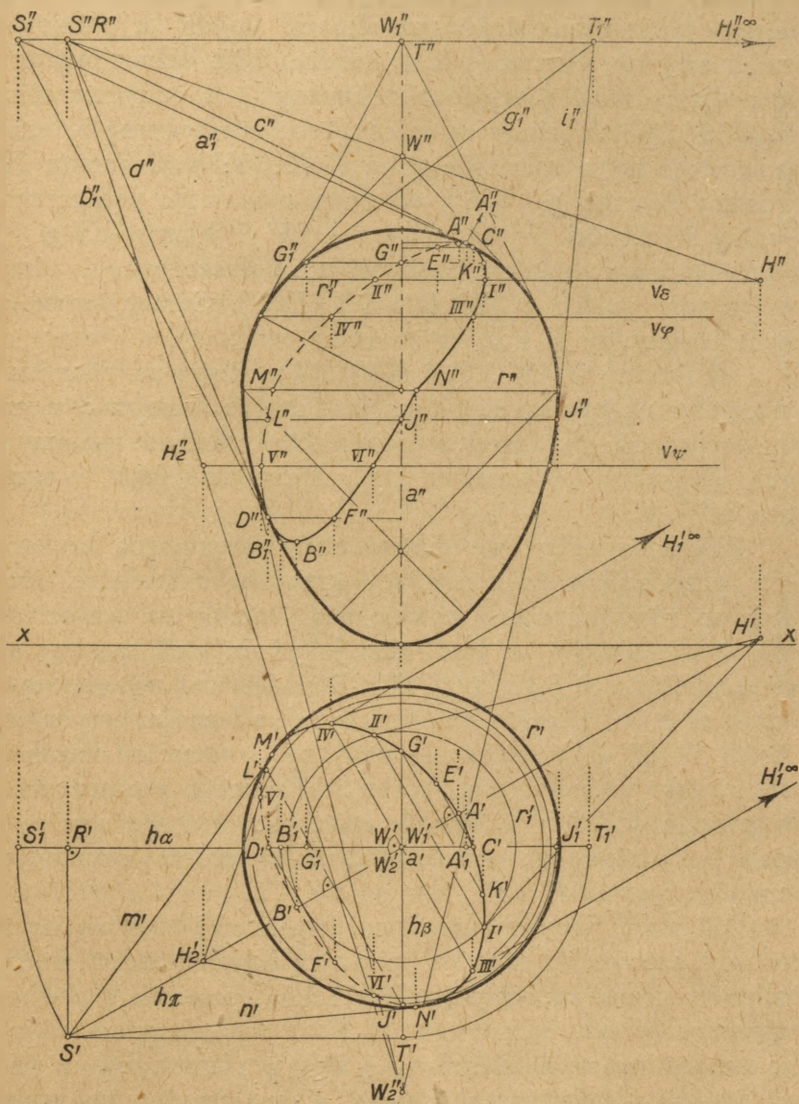
3. Przystąpmy wreszcie do wyznaczenia linii styczności stożka opisanego na danej powierzchni obrotowej z dowolnego punktu S (Rys. 482.*).

Przedewszystkiem wyznaczmy punkty charakterystyczne szukanej linii, którymi są:

a) Punkty A (A' A'') i B (B' B''), leżące na południku, którego płaszczyzna π przechodzi przez punkt S , a które znajdziemy jak w Rys. 480. Punkt A (A' A'') jest punktem najwyższym, a punkt B (B' B'') najniższym szukanej linii.

b) Punkty C (C' C'') i D (D' D''), leżące na południku głównym, a będące punktami styczności płaszczyzn pionowo

rzucających z powierzchnią i przechodzących przez punkt S . Rzuty pionowe tych punktów są punktami styczności styc-



Rys. 482.*

nych c'' i d'' , wykreślonych z punktu $S'' = R''$ do rzutu pionowego powierzchni. Na południku, zawierającym z płaszczyzną π ten sam kąt, jaki ta ostatnia tworzy z południkiem głównym,

leżą punkty $E (E' E'')$ i $F (F' F'')$, przyczem ich rzuty poziome są symetrycznie położone względem prostej h_π .

c) Punkty $G (G' G'')$ i $J (J' J'')$ leżące na południku, którego płaszczyzna β jest prostopadła do osi x . Punkty te znajdziemy tak, jak punkty E i F w Rys. 480. Więc z punktu S prowadzimy prostopadłą do płaszczyzny β , a punkt przebicia się $T (T' T'')$ obrócimy około osi a na płaszczyznę α , oznaczając jego nowe położenie przez $T_1 (T'_1 T''_1)$. Z punktu T_1'' kreślimy styczne g_1'' i i_1'' do rzutu pionowego powierzchni. Punkty styczności $G_1 (G'_1 G''_1)$ i $J_1 (J'_1 J''_1)$ prostych g_1 i i_1 z powierzchnią obrócimy około osi a na płaszczyznę β , otrzymując tam punkty $G (G' G'')$ i $J (J' J'')$. Symetrycznie do nich leżą punkty K i L .

d) Punkty $M (M' M'')$ i $N (N' N'')$, leżące na równiku r (względnie na kole szynem), są określone poziomo rzucającami płaszczyznami, stycznymi do powierzchni. Śladami poziomymi tych płaszczyzn są proste m' i n' , styczne do koła r' w punktach M' i N' .

Wyznaczywszy owe punkty charakterystyczne szukanej linii, przystąpimy do konstrukcyi punktów pośrednich, leżących na równoleżnikach powierzchni. Punkty te znajdziemy sposobem podanym w Rys. 481. Jako przykład niechaj posłużą punkty $I (I' I'')$ i $II (II' II'')$. Bierzemy pod uwagę równoleżnik $r_1 (r'_1 r''_1)$, leżący na płaszczyźnie ϵ i znajdziemy wierzchołek $W (W' W'')$ stożka opisanego na powierzchni obrotowej wzdłuż tego równoleżnika. Prosta SW przebija płaszczyznę ϵ w punkcie $H (H' H'')$. Punkty styczności I' i II' , stycznych do r'_1 z punktu H' , wyznaczają rzuty poziome szukanych punktów. Punkty I'' i II'' leżą na $r''_1 \equiv v_\epsilon$.

W miarę, jak przyjmowane równoleżniki zbliżają się do równika, wierzchołki stożków, opisanych na powierzchni wzdłuż tych równoleżników, oddalają się od rzutni poziomej. W pewnem położeniu prosta, łącząca punkt S z wierzchołkiem takiego stożka, jest prostą poziomą, a jej ślad z płaszczyzną równoleżnika leży nieograniczenie daleko. Wyznamy punkty szukanej linii styczności, leżące na takim równoleżniku. Z punktu S'' poprowadzimy prostą równoległą do osi rzutów x , a punkt przecięcia się W_1'' tej prostej z prostą a'' jest właśnie rzutem pionowym wierzchołka stożka, o który chodzi. Z punktu W_1'' wykreślimy styczne do rzutu pionowego powierzchni, a cięciwa

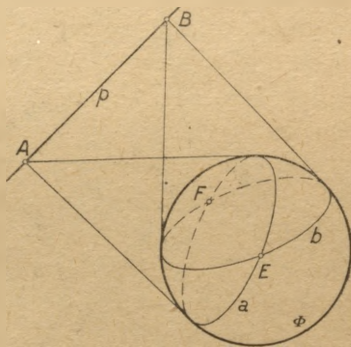
styczności jest śladem pionowym v_φ płaszczyzny równoleżnika, wzdłuż którego stożek styka się z powierzchnią. Wykreśliwszy rzut poziomy tego równoleżnika, poprowadzimy przez punkt W_1' prostą prostopadłą do prostej h_π i otrzymamy, jako przecięcie się jej z rzutem poziomym równoleżnika, punkty III' i IV' .

Uwaga. Gdy powierzchnią obrotową będzie kula, to linią styczności stożka opisanego na niej jest koło, którego rzuty, przez wprowadzenie trzeciej rzutni, dadzą się z łatwością wyznaczyć.

165. Zadania.

1. Przez daną prostą p poprowadzić płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej.

Każda płaszczyzna styczna do stożka albo do walca, opisanego na danej powierzchni obrotowej, jest styczną do tej powierzchni w jednym punkcie krzywej styczności. Obrawszy więc dwa dowolne punkty A i B prostej p (Rys. 483.) za wierzchołki stożków, opisanych na powierzchni Φ , wyznaczmy ich linie styczności a i b , które przecinają się w punktach E i F . Płaszczyzny $\varepsilon \equiv (p, E)$ i $\varphi \equiv (p, F)$ rozwiązują zadanie.



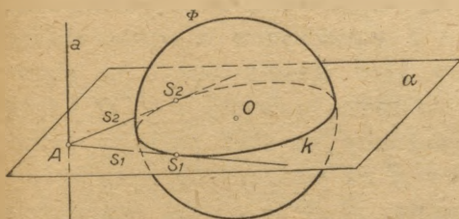
Rys. 483.

Jeślibyśmy punkt B przyjęli jako punkt niewłaściwy prostej p , to otrzymamy walec opisany na powierzchni obrotowej Φ , a rozwiązanie zadania nie dozna zresztą zmiany.

2. Przez daną prostą a (a' a'') poprowadzić płaszczyzny styczne do kuli.

Pierwszy sposób. Na kuli opiszemy walec, którego

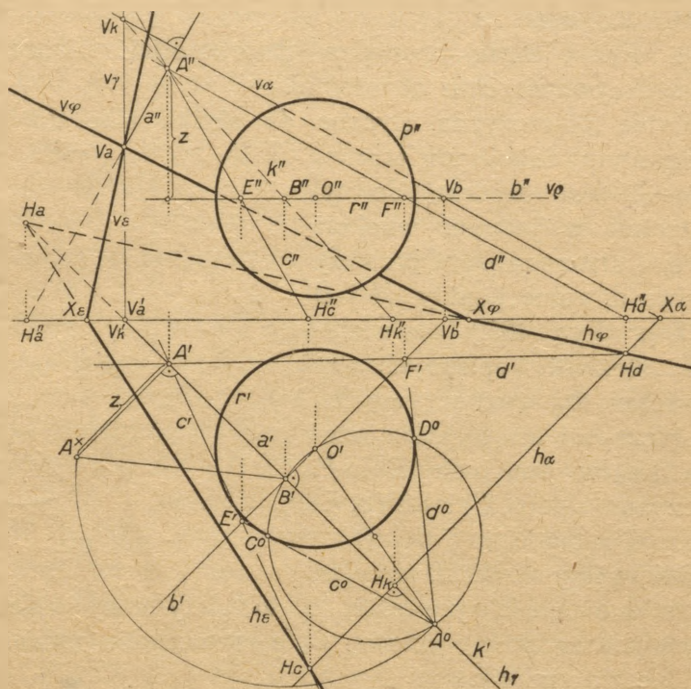
tworzące są równoległe do prostej a ; płaszczyzny styczne do walca, a przechodzące przez prostą a , rozwiązują zadanie. Aby mógł poprowadzić płaszczyzny styczne do walca, bez poprzedniego wyznaczenia



Rys. 484.

jego śladu, poprowadzimy przez środek kuli płaszczyznę α prostopadłą do prostej a (Rys. 484.), a przez punkt przebicia się A tej prostej z płaszczyzną α styczne s_1 i s_2 do koła k . Płaszczyzny przechodzące przez prostą a i styczne s_1 i s_2 rozwiązują zadanie, które, jak widzimy, posiada dwa rozwiązania.

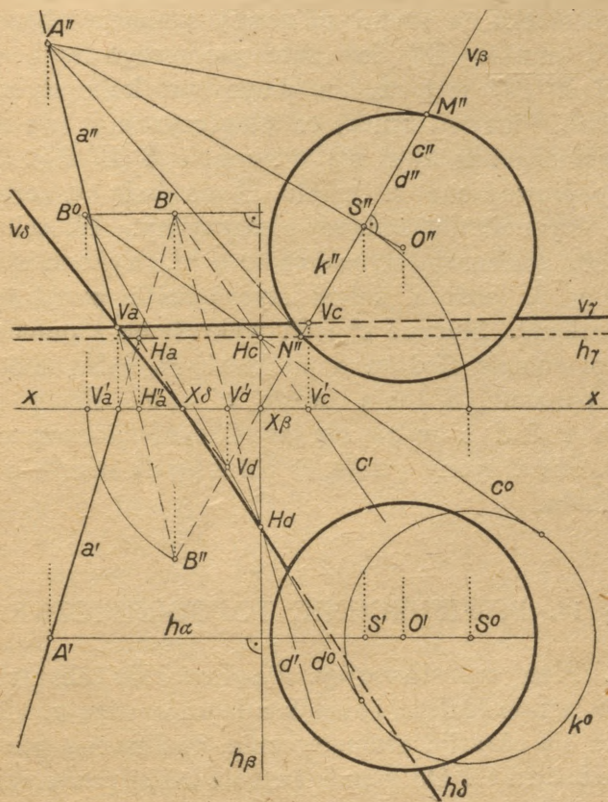
Niechaj punkt O (O' O'') jest środkiem kuli, a prosta a (a' a'') daną prostą (Rys. 485.). Przez środek kuli poprowadziliśmy prostą poziomą b (b' b'') prostopadłą do a (a' a''),



Rys. 485.

a przez nią płaszczyznę α ($h_\alpha v_\alpha$) również do a prostopadłą. Punkt przebicia się prostej a z płaszczyzną α oznaczyliśmy literą A (A' A''). Wykonajmy kład płaszczyzny α na płaszczyznę ρ równika r kuli, a to około krawędzi b (b' b'') tych obu płaszczyzn. Prosta a' uważajmy za ślad poziomy płaszczyzny obrotu, to kład punktu A na płaszczyznę równika będzie w punkcie A^x , przyczem $A'A^x = z$ jest odległością punktu A'' od prostej b'' , równą odległości punktu A od

płaszczyzny ρ . Po dokonany obrotie punkt A zajmie położenie A^0 . Styczne c^0 i d^0 , wykreślone z punktu A^0 do koła r' , przecinają prostą b ($b' b''$) w punktach E ($E' E''$) i F ($F' F''$), które połączone z punktem A ($A' A''$) dają proste c ($c' c''$) i d ($d' d''$). Płaszczyzna ε ($h_\varepsilon v_\varepsilon$), wyznaczona prostymi a ($a' a''$) i c ($c' c''$) i płaszczyzna φ ($h_\varphi v_\varphi$), przechodząca przez proste a ($a' a''$) i d ($d' d''$), rozwiązują zadanie.



Rys. 486.

Drugi sposób. Z dowolnego punktu prostej a , jako z wierzchołka, opiszemy na kuli stożek. Płaszczyzny styczne do tego stożka, a poprowadzone przez prostą a , są styczne do kuli i rozwiązują zadanie.

Najdogodniej jest obrócić punkt na prostej a tak, aby os stożka była równoległą do jednej z rzutni, gdyż wówczas rzut

koła styczności stożka z kulą na płaszczyznę równoległą do osi jest linią prostą.

Niechaj punkt O ($O' O''$) jest środkiem kuli, a prosta a ($a' a''$) tą prostą, przez którą poprowadzić mamy płaszczyznę styczną do kuli (Rys. 486.). Poprowadźmy przez środek kuli czołową płaszczyznę α i wyznaczmy punkt A ($A' A''$), w którym α przecina prostą a ($a' a''$). Uważajmy punkt A za wierzchołek, a prostą czołową AO za oś stożka opisanego na kuli. Zarys tego stożka na rzutni pionowej stanowią styczne, wykreślone z punktu A'' do rzutu pionowego kuli. Cięciwa styczności $\overline{M'' N''}$ jest rzutem pionowym koła styczności k stożka i kuli. Pionowo rzucająca płaszczyzna β ($h_\beta v_\beta$) tego koła, przecina prostą a ($a' a''$) w punkcie B ($B' B''$). Styczne c i d , poprowadzone z punktu B do koła k , oraz dana prosta a wyznaczają żądane płaszczyzny. W celu otrzymania rzutu poziomego stycznych c i d , wykonaliśmy kład płaszczyzny β , wraz z kołem styczności i punktem B , na rzutnię poziomą. Styczne c^0 i d^0 , wykreślone z punktu B^0 do koła k^0 , przecinają ślad h_β w punktach H_c i H_d , które połączone z punktem B' dają proste c' i d' . Rzuty pionowe stycznych c i d schodzą się ze śladem pionowym płaszczyzny β . Płaszczyzny $\gamma \equiv (a, c)$ i $\delta \equiv (a, d)$ stanowią rozwiązanie zadania.

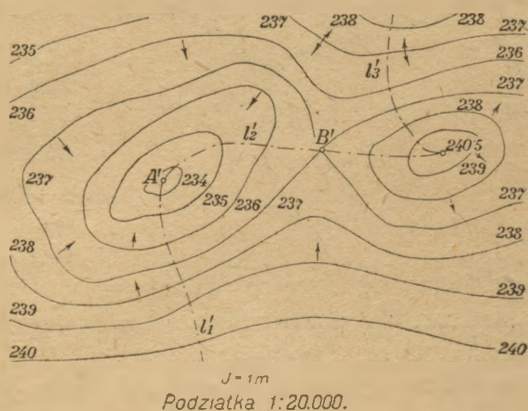
§ 14. POWIERZCHNIE TOPOGRAFICZNE

166. Plan warstwicowy. Powierzchnia obszaru ziemi wraz z jej wzniesieniami i zagłębieniami, a więc powierzchnia nie dająca się określić geometrycznie, nosi nazwę powierzchni topograficznej. Do przedstawienia takiej powierzchni używamy z reguły metody rzutów cechowanych; zarówno metoda Monge'a, jak i rzut ukośny nie byłyby tu celowe i stąd nie wchodzi w rachubę.

Celem otrzymania geometrycznego obszaru powierzchni topograficznej, weźmy pod uwagę obszar ziemi, znajdujący się nad morzem. Przybrzeżną część spokojnego zwierciadła morza uważajmy za płaszczyznę, którą przyjmijmy za płaszczyznę porównawczą (rzutów). Płaszczyzny warstwowe, przyjęte w pewnych równych odstępach od płaszczyzny porównawczej,

przełną uważany obszar ziemi wzdłuż linii ciągłych, które nazywamy warstwicami powierzchni topograficznej. Oznaczmy każdą z warstw liczbą, wyrażającą odległość płaszczyzny, na której leży, od płaszczyzny porównawczej w metrach i rzućmy je wszystkie prostopadle na płaszczyznę porównawczą, to otrzymane tam linie krzywe, zaopatrzone w cechy, tworzą t. zw. plan warstwicowy, charakteryzujący dany obszar powierzchni topograficznej. Każda z warstw, któremu to mianem określamy nie tylko przekrój powierzchni topograficznej płaszczyzną poziomą, ale także i rzut tego przekroju na płaszczyznę porównawczą, jest miejscem geometrycznym punktów o jednakowej wysokości. Oczywiście, że im mniejszą jest różnica wysokości poszczególnych warstw, tem charakterystyka terenu, wyrażona planem warstwicowym, jest bardziej szczegółowa i dokładna.

Rys. 487. przedstawia plan warstwicowy obszaru powierzchni topograficznej w podziałce 1:20.000. Rzut oka na cechy i przebieg warstw pozwala natychmiast na zorientowanie się w terenie. I tak widzimy, że w okolicy punktu *A* teren jest najniższy i tworzy t. zw. kotlinę, następnie wznosi się, o czym pouczają nas warstwy o cechach 234, 235, 236, 237... W kierunku wschodnim teren wznosi się dalej i tworzy szczyt o wysokości 240,5 m; podobnie podnosi się teren ku południowi, a zaś ku północy spada.



Rys. 487.

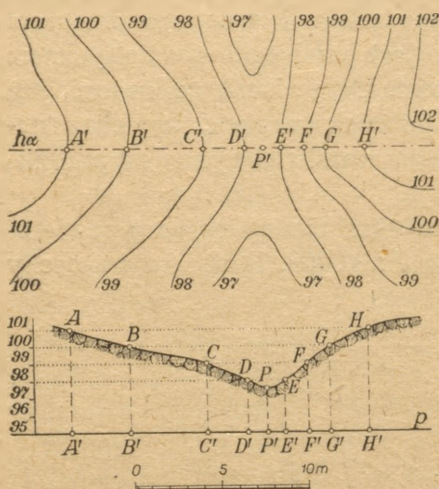
Wysokość warstw, t. j. odległość dwóch uważanych płaszczyzn warstwowych, przyjmujemy zależnie od podziałki rysunku i celu, jakiemu rysunek ma służyć.

Kształt obszaru powierzchni topograficznej, zawarty między dwiema warstwicami nie jest bliżej określony. Przyjmujemy

jednak, że w tym obszarze powierzchni nie zawiera żadnych szczególności i że stanowi taką powierzchnię prostoliniową, której tworzące są w przybliżeniu prostopadłe równocześnie do obu warstw.

167. Przekrój powierzchni topograficznej płaszczyzną rzucającą. Weźmy pod uwagę powierzchnię topograficzną (Rys. 488.) i przetnijmy ją poziomo rzucającą płaszczyzną α . Ponieważ rzut poziomy linii przekroju schodzi się ze śladem

poziomym h_α płaszczyzny siecznej, więc wykonać musimy kład tej płaszczyzny, wraz z linią przekroju, na jedną z płaszczyzn warstwowych i (aby przejrzystości rysunku nie zaciemniać), przenosimy ten kład w inne miejsce na płaszczyźnie rysunkowej. Przyjętą prostą p uważajmy za krawędź płaszczyzny siecznej z płaszczyzną warstwową o wysokości 95 m i przenieśmy na nią szereg punktów $A', B', C', \dots$ z prostej h_α . Na prostopadłych, wykreślonych w punktach $A', B', C', \dots$ prostej p ,



Rys. 488.

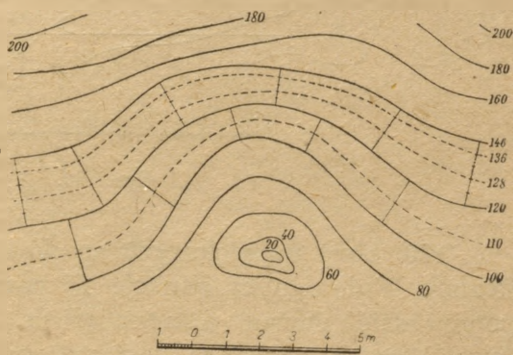
odmierzymy różnice wysokości poszczególnych punktów od płaszczyzny porównawczej i płaszczyzny warstwowej o wysokości 95 m. Otrzymane punkty $A, B, C, \dots$ łączymy o ile możliwości prostymi, otrzymując w rezultacie linię ciągłą, stanowiącą w przybliżeniu żądany przekrój, czyli, jak go w odniesieniu do powierzchni topograficznej nazywamy, profil poprzeczny.

Jest rzeczą oczywistą, że im gęściej występują warstwy i im mniejsza jest ich różnica wysokości, tem dokładniejszą i bardziej do prawdy zbliżoną będzie otrzymana linia przekroju (profilu). Między punktami D i E kształt powierzchni nie jest znany, to jednak pewne, że między obu tymi punktami znajduje się punkt najniższy linii przekroju, od którego począwszy linia ta, a więc i teren, poczyną się wznosić ku

punktowi E . Punkt P' przyjmujemy w środku odcinka $C'D'$, a wysokość punktu P , a więc i jego cechę, znajdziemy również tylko w przybliżeniu z profilu poprzecznego, przy założeniu, że od punktu C ku punktowi P teren spada w tym samym stosunku, w jakim następnie podnosi się ku punktowi D .

168. Uzupełnienie planu warstwicowego. Wrysowanie warstwic pośrednich w dany plan warstwicowy nazywamy uzupełnieniem tego planu. Zadanie polega na wyznaczeniu rzutów punktów o równych, żądanych cechach, leżących na powierzchni topograficznej, między dwiema płaszczyznami warstwowymi.

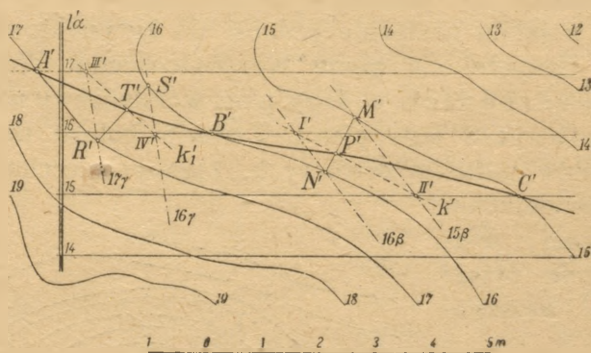
Uwzględniając końcową uwagę w ust. 166., nakreślimy w pewnych odstępach rzuty tworzących powierzchni topograficznej, ograniczonej dwiema warstwicami, podzielimy je w żądanym stosunku, a otrzymane punkty o równych cechach połączymy linią ciągłą. W ten sposób włączyliśmy warstwice 110 między 100 i 120 i warstwice 128 i 136 w plan warstwicowy, podany na Rys. 489.



Rys. 489.

169. Przekrój powierzchni topograficznej dowolną płaszczyzną. Linia przekroju powierzchni topograficznej płaszczyzną jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia się warstwic tej powierzchni z warstwicami płaszczyzny siecznej o tych samych cechach. Tym sposobem otrzymaliśmy punkty A', B', C' w Rys. 490. Chcąc otrzymać punkty pośrednie, określające dokładniej przebieg linii przekroju powierzchni płaszczyzną α , obieramy na powierzchni proste, prostopadłe w przybliżeniu do dwóch sąsiednich warstwic i szukamy punktów, w których proste te przebijają płaszczyznę sieczną. Tak np. prosta MN przebija płaszczyznę α w punkcie P , prosta RS w punkcie T .

Punkt przecięcia się prostej z powierzchnią topograficzną znajdziemy przy pomocy przekroju powierzchni dowolną płaszczyzną, przechodzącą przez daną prostą.



Rys. 490.

170. Linie największych spadów powierzchni topograficznej. W dowolnym punkcie P powierzchni topograficznej poprowadzić można nieograniczoną ilość prostych stycznych, których miejscem geometrycznym jest płaszczyzna π , styczna w punkcie P do powierzchni (patrz ust. 126.). Nachyleniem płaszczyzny π , a więc nachyleniem jej linii największego spadku l_π , określamy nachylenie powierzchni topograficznej w punkcie P . Linia l_π posiada największe nachylenie ze wszystkich stycznych, poprowadzonych do powierzchni w punkcie P .

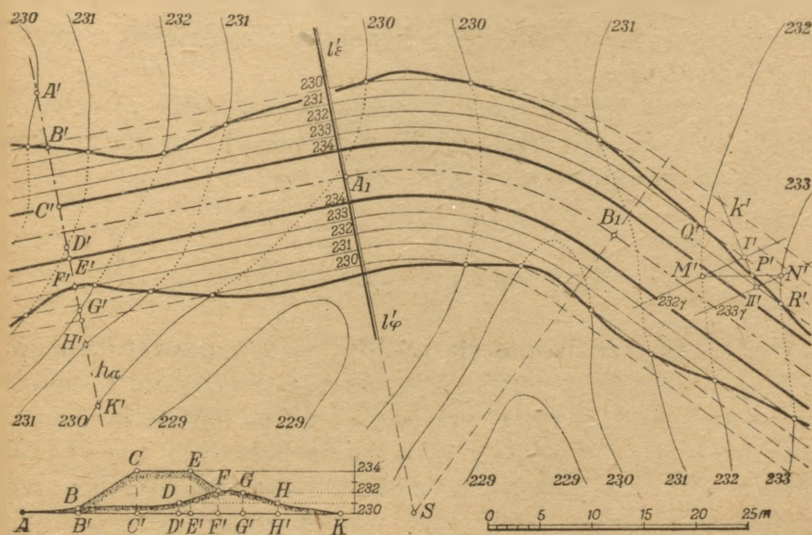
Linie skośne, leżące na powierzchni topograficznej, których nachylenie w każdym punkcie jest większe, aniżeli nachylenie każdej innej linii, przechodzącej przez ten punkt, nazywamy linią największego spadku, lub krócej linią spadku tej powierzchni. Dodajmy, że nachyleniem linii krzywej w pewnym punkcie nazywamy nachylenie stycznej, poprowadzonej w tym punkcie do tej krzywej. Idąc więc od pewnego punktu powierzchni topograficznej w kierunku najbardziej stromej stycznej do punktu sąsiedniego, z tego punktu znowu w kierunku najbardziej stromej stycznej do punktu sąsiedniego i t. d., przebiegniemy linię największego spadku powierzchni. Linia ta jest prostopadłą do warstwicy, przechodzących przez jej punkty. Na Rys. 487. podaliśmy rzuty trzech linii naj-

większego spadku, a mianowicie l'_1 , l'_2 i l'_3 , które określają także kierunek ścieku wody po terenie.

171. Zadanie.

Dany jest plan warstwiczny terenu, przez który przebiegać ma poziomo droga w wysokości 234 m. Oś drogi i jej szerokość są dane; wyznaczyć przecięcie się skarp bocznych drogi z terenem i jeden profil poprzeczny.

Z Rys. 491. widzimy, że oś drogi do punktu A_1 jest linią prostą, następnie łukiem koła o środku S aż do punktu B_1 ,



Rys. 491.

a dalej znowu prostą. Uwzględniając szerokość drogi równą 5 m, wykreślimy proste ograniczające jej koronę i przystąpimy do wyznaczenia płaszczyzn skarp bocznych. Ponieważ korona drogi leżeć ma w wysokości 234 m, a więc wyżej, aniżeli punkty terenu, więc droga wraz ze skarpami zbudowana być musi z ziemi nawiezionej, czyli jak technik się wyrazi: „droga leżeć będzie w nasypie“. Skarpy, którym damy nachylenie $v = 2 : 3$, są dla części drogi biegnących prosto płaszczyznami, zaś dla części drogi leżącej w łuku stożkami obrotowymi, których tworzące mają nachylenie $2 : 3$, a których rzuty wierzchołków leżą w punkcie S .

Przyjawszy linie spadów l_ε i l_φ płaszczyzn skarp, zestopniujemy je modulem $\frac{3}{2}$ i wykreślimy warstwie, a także warstwie stożków skarpowych i łączących się z nimi dalszych warstw płaszczyzn skarpowych. Warstwie stożków utworzą pęk łuków kół o wspólnym środku S . Warstwie terenu przecinają się z równowartościowymi warstwicami płaszczyzn, względnie stożków skarpowych w punktach, których miejscem geometrycznym są szukane linie przekroju skarp z terenem. Potrzebne punkty pośrednie tych linii przekroju znajdziemy, podobnie jak w Rys. 490., przyjmując na powierzchni topograficznej proste i znajdując ich punkty przebiecia się z płaszczyznami skarp.

Przekrój terenu wraz z drogą płaszczyzną pionową α , prostopadłą do osi drogi (profil poprzeczny), wyznaczaliśmy w sposób omówiony przy Rys. 488.

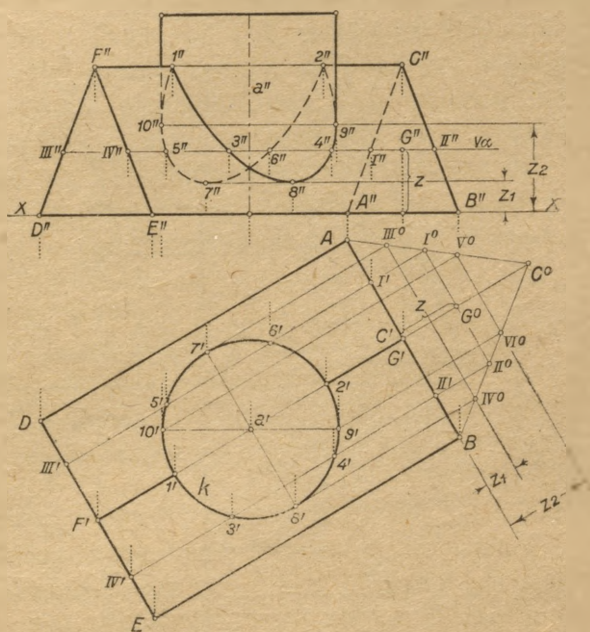
§ 15. PRZENIKANIE SIĘ POWIERZCHNI

172. O przenikaniu się wielościanów z powierzchniami. Ściany danego wielościanu przecinają powierzchnię w liniach krzywych, a krawędzie przebijają ją w punktach. Linia przenikania składa się więc z tylu krzywych płaskich, przecinających się na krawędziach wielościanu, ile ścian przecina powierzchnię. Jeżeli więc powierzchnia jest rzędu drugiego, to na przenikanie się jej z jakimkolwiek bądź wielościanem składa się szereg krzywych rzędu drugiego. Będą to zazwyczaj tylko łuki, części tych krzywych.

Przykład przenikania się walca obrotowego z prostym trójsściennym graniastostupem podaje Rys. 492. Rzut poziomy linii przenikania schodzi się ze śladem poziomym walca. Ściana boczna $BCE F$, podobnie jak ściana $ACDF$, przecina walec w części elipsy. W celu wyznaczenia rzutu pionowego tych części elipsy, znajdziemy przedewszystkiem punkty $1''$ i $2''$, odnosząc punkty $1'$ i $2'$ na prostą $\overline{C''F''}$. Następnie weźmy pod uwagę poziomą płaszczyznę α , która przetnie graniastostup w prostokącie $I II III IV$. Punkty $3'$, $4'$, $5'$ i $6'$ odniesiemy na v_α , otrzymując rzuty pionowe $3''$, $4''$, $5''$ i $6''$ czterech punktów linii przenikania. Jeżeli kąt, jaki prosta AB zawiera z osią rzutów, zbliża się do kąta prostego, to dokładne otrzy-

manie punktów I' i II' , nie jest możliwe. W tym wypadku wykonamy kład ABC^0 ściany ABC na rzutnię poziomą, odmierzymy wysokość z płaszczyzny α i przez punkt G_0 poprowadzimy prostą $I^0 II^0$ równoległą do AB . Prostopadłe, wykreślone przez punkty I^0 i II^0 do AB , przecinają ją w punktach I' i II' . Najniżej położonymi punktami linii przenikania są punkty 7 i 8, których rzuty poziome są punktami styczności stycznych do koła k , a równoległych do $C'F'$. Styczne te przecinają boki AC^0 i BC^0 w punktach III^0 i IV^0 , przyczem $III^0 IV^0$ jest równoległe do AB . W odległości z_1 od osi x wykreśliśmy równoległą i odniesiemy na nią punkty 7' i 8', otrzymując rzuty pionowe punktów 7 i 8.

Dalszą parę punktów charakterystycznych szukanych linii stanowią ich styczności z tworzącymi konturowymi walca. Jeżeli przez a' poprowadzimy równoległą do osi x , to punkty 9' i 10', w których prosta ta przecina koło k , są rzutami poziomymi szukanych punktów. Ich wysokość z_2 , a więc i rzuty pionowe, znajdziemy przy pomocy rzutu bocznego, względnie kładu



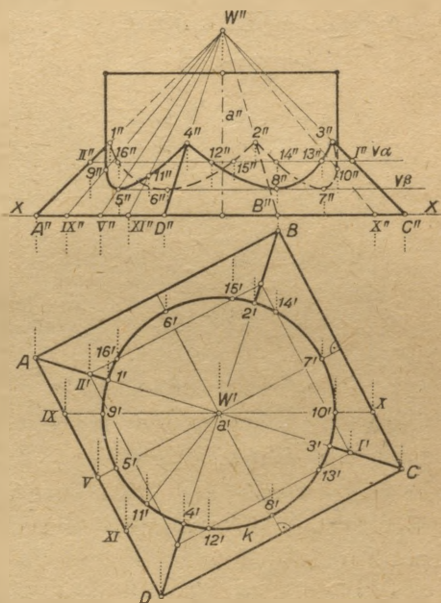
Rys. 492.

ściany ABC^0 . Przenikanie się prostego, czworościennego graniastostupa ze stożkiem obrotowym przedstawia Rys. 493. Krawędzie boczne graniastostupa są równoległe do osi x , a jego ściany, których płaszczyzny oznaczyliśmy literami α , β , γ i δ są tak dobrane, że pierwsza (α) jest równoległa do osi x

Przenikanie się prostego, czworościennego graniastostupa ze stożkiem obrotowym przedstawia Rys. 493. Krawędzie boczne graniastostupa są równoległe do osi x , a jego ściany, których płaszczyzny oznaczyliśmy literami α , β , γ i δ są tak dobrane, że pierwsza (α) jest równoległa do osi x

poziomym, otrzymamy punkty C' i D' , ograniczające drugą oś w rzucie poziomym. Punkty C'' i D'' są wierzchołkami elipsy w rzucie pionowym. Płaszczyzna β , jako równoległa do dwóch tworzących stożka, przecina go wzdłuż hiperboli o wierzchołku E ($E' E'' E'''$). Rzut pionowy tej hiperboli przedstawi ją w prawdziwym kształcie i wielkości, a rzut pionowy tworzących konturowych stanowi jej asymptoty. Płaszczyzna γ , równoległa do tworzącej t stożka, przecina go wzdłuż paraboli o wierzchołku H ($H' H'' H'''$), a wreszcie płaszczyzna δ przetnie stożek w kole o promieniu r . Punkty F i G , w których koło to przecina krawędź boczną graniastostupa, są punktami hiperboli; punkty I i K należą do paraboli. Punkty, w których elipsa, leżąca na płaszczyźnie α , przecina pozostałe dwie krawędzie boczne graniastostupa, są punktami hiperboli (punkty M i N), względnie paraboli (punkty P i Q). Płaszczyzna czołowa, przechodząca przez oś stożka, przecina płaszczyznę γ w prostej p , a parabolę w punktach III ($III'' III'''$) i IV ($IV'' IV'''$). Punkty III'' i IV'' są punktami styczności rzutu pionowego paraboli z rzutem pionowym tworzących konturowych stożka.

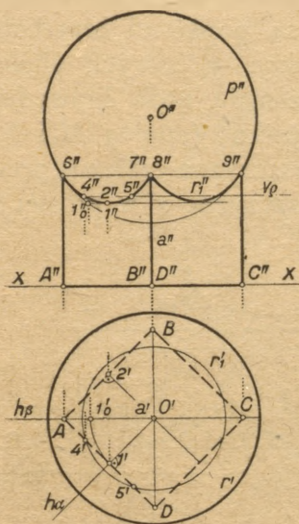
Przenikanie się czworoiścienne, prostego ostrostupa z walcem obrotowym, o osi pionowej (Rys. 494.), składać się będzie z czterech łuków elips, przecinających się w punktach 1 ($1' 1''$), 2 ($2' 2''$), 3 ($3' 3''$) i 4 ($4' 4''$), leżących na krawędziach bocznych ostrostupa. Nie wyznaczaliśmy osi, ani też średnic sprzężonych tych elips, lecz poszczególne ich punkty. W tym celu obieraliśmy na ścianach ostrostupa proste, przechodzące przez wierzchołek W ($W' W''$) i szukali ich punktów przebicia się z walcem. Ponieważ walec jest obrotowy i rzuca w swój



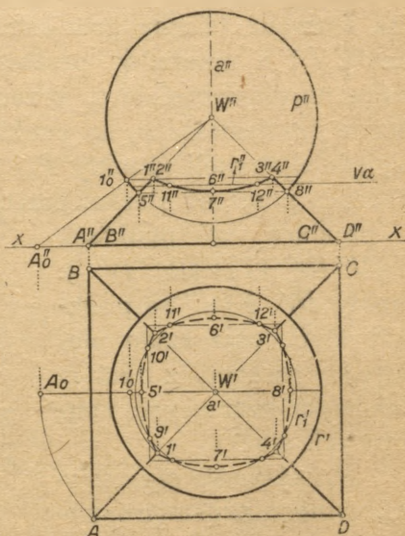
Rys. 494.

ślad poziomy wszystkie znajdujące się na nim punkty, więc zadanie przedstawia się rysunkowo bardzo prosto.

Przenikanie się czworościennego, prostego graniastostupa z kulą widzimy na Rys. 495. Linia przenikania składa się z czterech przystających części kół, leżących na płaszczyznach poziomo rzucających i przecinających się na krawędziach bocznych graniastostupa. Sposób wyznaczenia rzutu pionowego poszczególnych punktów tych kół tłómaczy dostatecznie wyraźnie rysunek.



Rys. 495.

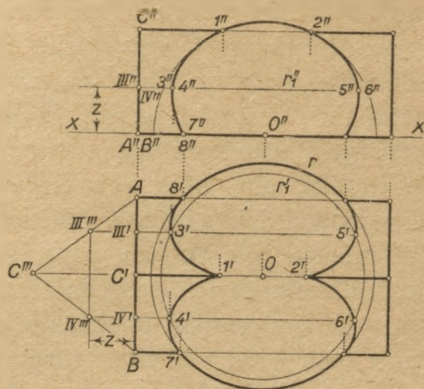


Rys. 496.

Prosty czworościenny ostrosłup przenika się z kulą (Rys. 496.), przyczem wierzchołek ostrosłupa leży w środku kuli. Jest rzeczą zrozumiałą, że linia przenikania składać się będzie z łuków kół, które przecinają się w punktach, leżących na krawędziach bocznych ostrosłupa. Najpierw wyznaczmy punkty 1, 2, 3 i 4, w których krawędzie boczne ostrosłupa przebijają kulę. W tym celu obrócimy krawędź $\overline{AW}$ około osi pionowej, przechodzącej przez wierzchołek ostrosłupa, do położenia równoległego względem rzutni pionowej. Prosta $\overline{A_0W}$ przebija kulę w punkcie 1_0 ($1_0' 1_0''$), z którym wrócimy na krawędź $\overline{AW}$, otrzymując szukany punkt 1 ($1' 1''$). Punkty 2, 3 i 4 mają tę samą wysokość, co punkt 1. Z kolei otrzy-

mamy punkty 5, 6, 7 i 8. Punkty pośrednie linii przenikania otrzymamy przy pomocy przekrojów kuli i ostrosłupa płasko-czynami poziomymi.

Rys. 497. podaje przenikanie się prostego graniastoslupa trójsiennego z półkulą, leżącą wzdłuż równika na rzutni poziomej. Linia przenikania składa się z łuków dwóch kół przecinających się w punktach 1 ($1'$ $1''$) i 2 ($2'$ $2''$). Do wyznaczenia punktów linii przenikania użyto rzutu bocznego.



Rys. 497.

173. O przenikaniu się powierzchni. Linia przenikania się dwóch powierzchni, t. j. miejsce geometryczne punktów, leżących równocześnie na obu powierzchniach, jest w ogólności krzywą skośną. Celem wyznaczenia poszczególnych punktów

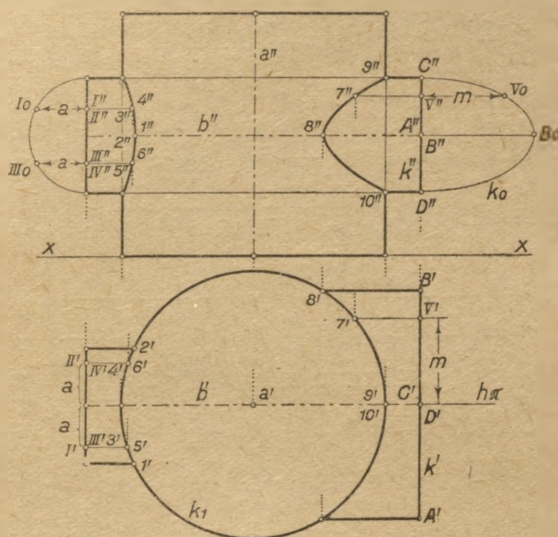


Rys. 498. Refektarz w klasztorze Benedyktynów w Sandomierzu
(Ze zbiorów prof. dr. Jana Sas Zubrzyckiego)

symetrycznie względem poprzednich położone punkty 9 ($9' 9''$) i 10 ($10' 10''$), znaleźliśmy jeszcze punkty 11 ($11' 11''$) i 12 ($12' 12''$), a także punkty 13 ($13' 13''$) i 14 ($14' 14''$). Połączywszy rzuty pionowe wyznaczonych punktów, otrzymamy rzut pionowy linii przenikania, złożonej z dwóch części.

b) *Dalszy przykład przenikania się walców* podaje

Rys. 500., gdzie walec obrotowy o osi pionowej przenika się z jednej strony z walcem obrotowym, a z drugiej z walcem eliptycznym. Linie przenikania wyznaczono przy pomocy przekrojów walców płaszczyznami poziomymi, o czym dostatecznie jasno poucza nas rysunek. Przykłady przenikań walców w budownictwie stanowią sklepienia. Zdjęcia fotograficzne dwóch z nich podają rysunki 498. i 505.

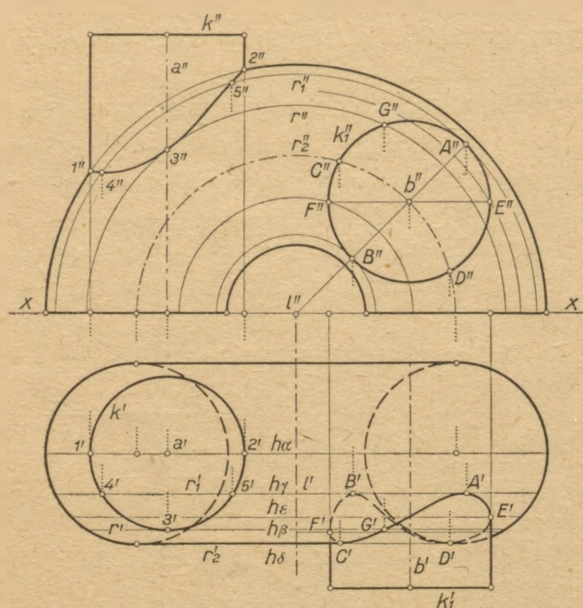


Rys. 500.

c) *Przenikanie się powierzchni pierścieniowej z walcami obrotowymi* widzimy na Rys. 501. Oś powierzchni pierścieniowej leży na rzutni poziomej i jest prostopadłą do rzutni pionowej. Płaszczyzna równikowa α jest płaszczyzną czołową i zawiera oś a ($a' a''$) jednego z walców. Poszczególne punkty linii przenikania wyznaczaliśmy przy pomocy przekrojów przenikających się powierzchni płaszczyznami czołowymi α , β , γ , δ i ϵ .

W szczególności płaszczyzna równikowa α przecina walec wzdłuż tworzących konturowych, a te przecinają równik w punktach 1 ($1' 1''$) i 2 ($2' 2''$) szukanej linii przenikania. Płaszczyzna czołowa β , styczna do walca, przecina pierścień wzdłuż koła r ($r' r''$). Punkt 3 ($3' 3''$) jest dalszym punktem linii prze-

nikania. Płaszczyzna γ , przecinająca pierścień wzdłuż koła r_1 (r_1' r_1''), umożliwia wyznaczenie punktów 4 ($4'$ $4''$) i 5 ($5'$ $5''$).



Rys. 501.

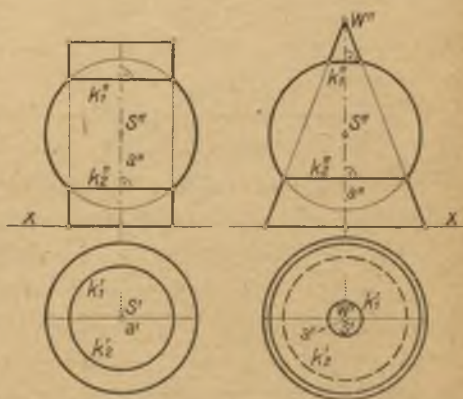
walca, którego oś jest prostopadłą do rzutni pionowej, z pierścieniem jest kołem k_1'' . Poszczególne punkty A' , B' , C' ... rzutu poziomego krzywej przenikania znaleźliśmy za pośrednictwem równoleżników pierścienia, leżących na płaszczyznach γ , ϵ , β , δ ...

d) *Przenikania się kuli z walcem i ze stożkiem* przedstawiliśmy na Rys. 502 a i b. Oś a walca obrotowego przechodzi przez środek kuli, linia przenikania składa się z kół k_1 (k_1' k_1'') i k_2 (k_2' k_2'').

Podobnie ma się sprawa z przenikaniem się stożka obrotowego z kulą, przyczem oś stożka przechodzi przez środek

Linia przenikania jest krzywą symetrycznie położoną względem płaszczyzny czołowej α ; punkty 1, 2, 3, 4 i 5 odnoszą się do części, znajdującej się przed tą płaszczyzną. Rzut pionowy części krzywej przenikania, leżącej z a płaszczyzną α , schodzi się z linią, wyznaczoną punktami $1''$, $2''$, $3''$, $4''$ i $5''$.

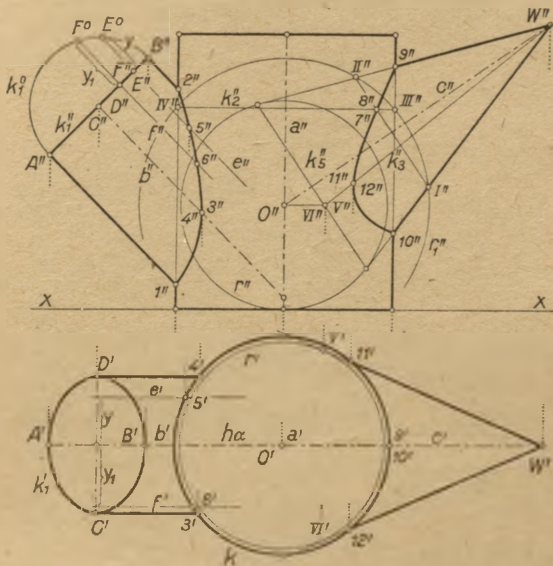
Rzut pionowy linii przenikania



Rys. 502 a i b.

kuli. Na linię przenikania składają się dwa koła, a mianowicie koła k_1 i k_2 .

e) *Przykład przenikania się walca obrotowego ze stożkiem obrotowym*, przyczem osi obu powierzchni przecinają się w punkcie O ($O' O''$), widzimy na Rys. 503. Do wyznaczenia poszczególnych punktów linii przenikania użyto pośrednictwa kul. Punkt O uważamy za środek kul, a rzut pionowy jednej z nich oznaczmy przez r_1'' . Kula ta przeniknie się z walcem w kole k_2 , a ze stożkiem w kole k_3 . Rzuty pionowe obu tych kół są odcinkami $k_2'' \equiv III'' IV''$ i $k_3'' \equiv I'' II''$. Koła k_2 i k_3 przetną się w punktach 7 i 8, które są dwoma punktami linii przenikania. Rzuty pionowe $7''$ i $8''$ tych punktów schodzą się w punkcie przecięcia się odcinków k_2'' i k_3'' . Tym sposobem, przy użyciu dal-



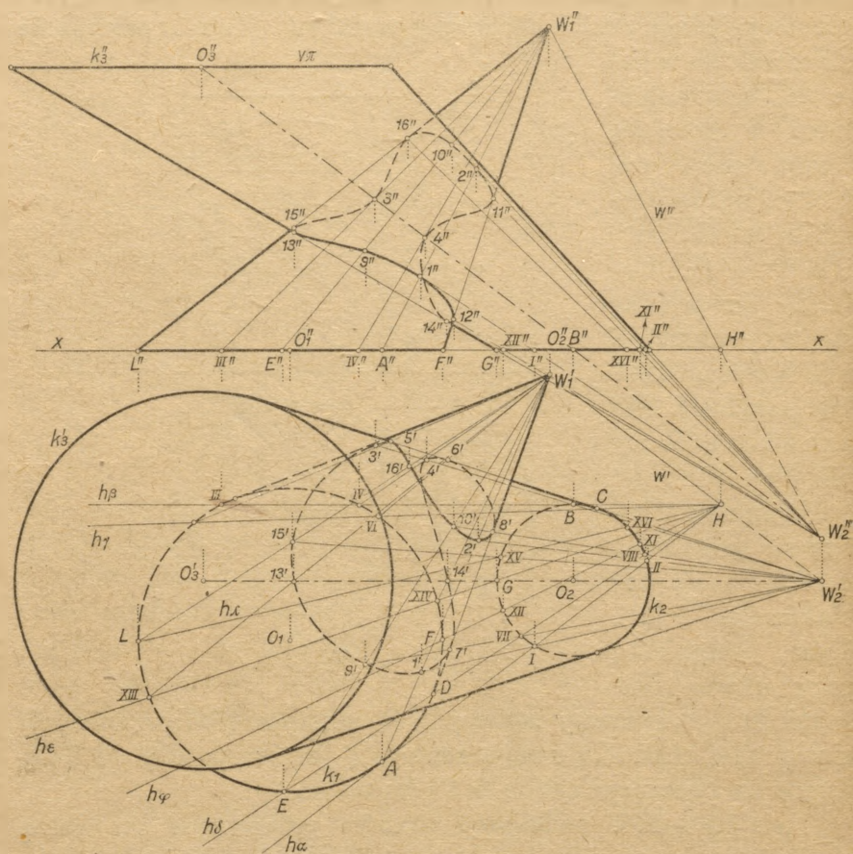
Rys. 503.

szych kul, otrzymamy żadaną ilość punktów linii przenikania obu powierzchni. Na uwagę zasługują jeszcze punkty 11 i 12, leżące na tworzących VW i VIW stożka.

Na Rys. 503. podaliśmy ponadto przenikanie się walca obrotowego, o osi pionowej a , z walcem obrotowym o osi b , przecinającej pierwszą, a równoległą do rzutni pionowej. Linię przenikania wyznaczaliśmy, jak nas o tem poucza rysunek, przy pomocy płaszczyzn pionowo rzucających, a równoległych do osi b .

f) *Wyznaczenie linii przenikania dwóch powierzchni stożkowych rzędu drugiego* przeprowadziliśmy na Rys. 504. Ślad poziomy stożka o wierzchołku W_1 jest kołem k_1 ; ślad poziomy stożka o wierzchołku W_2 , znajdującym się w czwartej

części przestrzeni, jest kołem k_2 . — Aby wyznaczyć poszczególne punkty linii przenikania obu stożków, łączymy ich wierzchołki prostą w (w' w'') i przez nią prowadzimy płaszczyzny, takie jednak, które przecinają obie powierzchnie. Przekroje te będą tworzącymi powierzchni, a punkty przecięcia się tych tworzących punktami szukanej linii przenikania.



Rys. 504.

Płaszczyzna α , której ślad poziomy h_α , przechodząc przez ślad poziomy H prostej w , jest styczny do koła k_1 , styka się ze stożkiem W_1 wzdłuż tworzącej AW_1 , a stożek W_2 przecina wzdłuż prostych IW_2 i IIW_2 . Punkty 1 ($1'$ $1''$) i 2 ($2'$ $2''$), w których tworząca AW_1 przecina tworzące IW_2 i IIW_2 , stanowią parę punktów linii przenikania. Płaszczyzna β prze-

cina stożek W_1 wzdłuż tworzących $III W_1$, $IV W_1$ i styka się ze stożkiem W_2 wzdłuż tworzącej $B W_2$. Tworzące te przecinają się w punktach 3 ($3' 3''$) i 4 ($4' 4''$) szukanej linii przenikania. Z kolei weźmy pod uwagę płaszczyznę γ , której ślad poziomy h_γ przechodzi przez punkt C , w którym wspólna styczna do kół k_2 i k_3 styka się z kołem k_2 . Na tworzącej $C W_2$ otrzymamy punkty 5 i 6 linii przenikania. Płaszczyzna δ przecina każdą powierzchnię stożkową wzdłuż dwóch tworzących, a te przecinają się w punktach 7, 8, 9 i 10, które należą do linii przenikania. W ten sposób, postępując dalej, otrzymamy żadaną ilość punktów, które połączone na obu rzutniach, dają rzuty linii przenikania.

g) **Przenikanie się powierzchni stożkowej**

rzędu drugiego z walcem eliptycznym, którego ślad poziomy jest kołem k_1 , przedstawia Rys. 506. Przez wierzchołek W ($W' W''$) stożka prowadzimy prostą w ($w' w''$), równoległą do tworzących walca, a przez nią płaszczyzny tnące równocześnie obie powierzchnie. Liniami przekroju będą tworzące powierzchni, a punkty przecięcia się tworzących, które leżą



Rys. 505. Krużganek w klasztorze Benedyktynek w Sandomierzu

(Ze zbiorów prof. dr. Jana Sas Zubrzyckiego)

z kołem k w punkcie A , jest styczną do walca o osi b , a przecina drugi walec wzdłuż dwóch tworzących, których śladami poziomymi są punkty I i II . Tworząca styczności przecina owe dwie tworzące w punktach 1 ($1' 1''$) i 2 ($2' 2''$) linii przenikania. Płaszczyzna β , styczna do walca o osi b , przecina drugi walec wzdłuż dwóch tworzących, które przecinają tworzącą styczności w punktach 3 ($3' 3''$) i 4 ($4' 4''$). Każda z płaszczyzn γ , λ , ε i φ , równoległych do płaszczyzny π , przecina walce w dwóch tworzących, a te wyznaczają po cztery punkty linii przenikania. Tym sposobem otrzymaliśmy potrzebną ilość punktów linii przenikania, które, jak widzimy, jest przenikaniem zupełnem.

(Rzut pionowy linii przekroju walca o podstawie k_1 płaszczyzną ρ jest widoczny, winien więc być wykreślony linią pełną, a nie kreskowaną, jak to przez pomyłkę zrobiono na Rys. 507.).

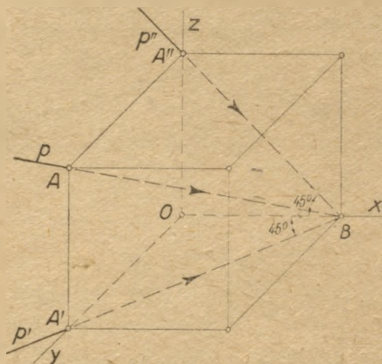
ROZDZIAŁ TRZECI

O WYZNACZANIU CIENI

§ 16. CIENIE PUNKTÓW, PROSTYCH, WIELOKĄTÓW I KOŁA

175. Uwagi wstępne. Nauka o geometrycznem wyznaczaniu cieni rozróżnia zasadniczo dwa przypadki: 1) źródło światła pojęte jest jako punkt geometryczny, leżący w odległości skończonej (oświetlenie środkowe) i 2) źródło światła leży w odległości tak dalekiej, że promienie, które wysyła, uważać można za równoległe (oświetlenie równoległe).

Przedmiotem naszych rozważań będą wyłącznie konstrukcje cieni przy oświetleniu równoległym, przyczem kierunek promieni przyjmujemy zazwyczaj w ten sposób, że promienie światła są równoległe do przekątnej p sześcianu (Rys. 508.), którego krawędzie są równoległe do osi układu prostokątnego. W dalszej konsekwencji tego założenia rzut poziomy promieni zawierać będzie z osią x — jako równoległy do rzutu poziomego p' przekątnej p sześcianu — kąt 45° ;



Rys. 508.

to samo odnosi się do rzutu pionowego promieni światła.

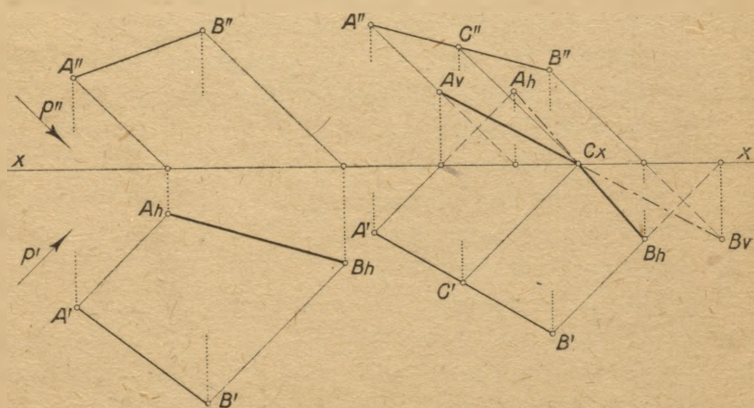
176. Cień punktu określamy jako ślad promienia, przechodzącego przez ten punkt, z rzutnią albo z płaszczyzną, na

którą cień punktu pada. Dla danego kierunku p (p' p'') promieni (Rys. 509.), punkt A (A' A'') rzuca cień na płaszczyznę poziomą, a jest nim mianowicie punkt A_h . Cień punktu B (B' B'') znajduje się na płaszczyźnie pionowej, jako punkt B_v . Punkt A_v , będący śladem pionowym promienia a (a' a''), nazywać będziemy cieniem nieistotnym punktu A , podobnie jak punkt B_h , który jest śladem poziomym promienia b (b' b''), przechodzącego przez punkt B (B' B'').

Rys. 509.

dem poziomym promienia b (b' b''), przechodzącego przez punkt B (B' B'').

177. Cień odcinka. Promienie, przechodzące przez punkty danego odcinka, leżą na jednej płaszczyźnie, zwanej płaszczyzną światła, której przecięcie się z rzutniami stanowi cień odcinka.



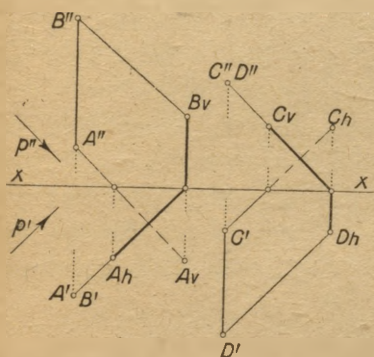
Rys. 510 a i b.

W przypadku, podanym na Rys. 510 a, odcinek rzuca cień tylko na rzutnię poziomą, ślady bowiem obu promieni, przechodzących przez punkty A i B , ograniczające odcinek, są śladami poziomymi. Rys. 510 b. przedstawia cień odcinka $\overline{AB}$, który pada częściowo na obie rzutnie. Punkt A rzuca cień na rzutnię pionową, punkt B na poziomą. Wyznaczywszy cień nieistotny A_h punktu A i połączyszy go ze śladem B_h , otrzy-

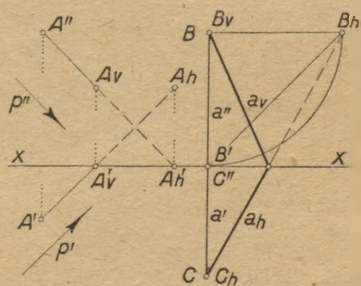
mamy cień odcinka $\overline{AB}$ na rzutnię poziomą. Część tego cienia, a mianowicie $\overline{Ah C_x}$, leży na rzutni poziomej, rozciągającej się za rzutnię pionową, stanowi więc cień nieistotny. Druga jego część $\overline{C_x B_h}$ jest częścią istotną cienia, jaki odcinek rzuca na rzutnię poziomą. Odcinek $\overline{A_v C_x}$ jest cieniem istotnym odcinka, leżącym na rzutni pionowej, a odcinek $\overline{C_x B_v}$, częścią nieistotną tego cienia.

Punkt C_x jest punktem przecięcia się trzech płaszczyzn, a mianowicie: dwóch rzutni i płaszczyzny światła, przechodzącej przez odcinek $\overline{AB}$. Rzuty C' i C'' punktu C , którego cień C_x leży na osi rzutów, otrzymamy jako punkty przecięcia się rzutów odcinka z rzutami promienia, przechodzącego przez punkt C_x .

Rys. 511 a. przedstawia cień odcinka $\overline{AB}$ prostopadłego do rzutni poziomej, Rys. 511 b. podaje cień odcinka $\overline{CD}$, który jest prostopadły do rzutni pionowej.



Rys. 511 a i b.

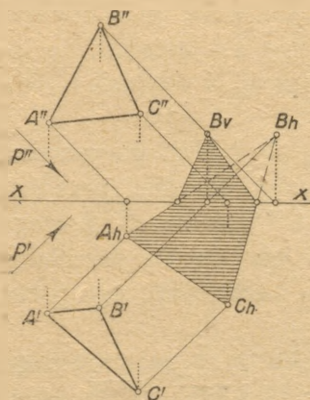


Rys. 512 a i b.

Z przyjęcia kierunku promieni światła, którego rzuty są nachylone do osi x pod 45° , wynikają korzyści konstrukcyjne, skoro się zważy, że dla każdego punktu np. A (A' A'') Rys. 512 a., punkty A_v , A_v' , A_h i A_h' tworzą kwadrat. Punkt A_h otrzymamy więc, kreśląc przez A_v równoległą do osi x i odmierając na niej $\overline{A_v A_h} = \overline{A_v A_v'}$.

Przykład zastosowania tej konstrukcyi podaje Rys. 512 b., gdzie wyznaczono cień odcinka $\overline{BC}$, prostopadłego do osi x , przyczem punkt B leży na rzutni pionowej, a punkt C na poziomej.

Cień wielokąta sprowadza się do wyznaczenia cieni jego boków, jak to bezpośrednio widzimy na Rys. 513. Bok AC trójkąta ABC rzuca cień na płaszczyznę poziomą, dwa pozostałe także częściowo i na rzutnię pionową.



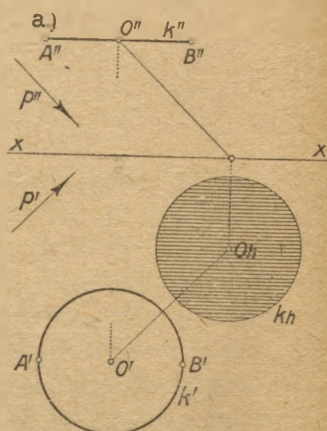
Rys. 513.

178. Cień koła.

a) *Oświetlenie środkowe.* Promienie, łączące dany punkt świetlny S z punktami koła, tworzą powierzchnię stożkową rzędu drugiego, która w przypadku, gdy promień, łączący punkt S ze środkiem koła, jest prostopadły do płaszczyzny koła, jest stożkiem obrotowym. Miejsce geometryczne punktów przebiecia się tworzących tego stożka promieni z rzutniami, czyli ślady tego stożka, stanowią cień linii koła na płaszczyznach rzutów.

Ponieważ stożek rzędu drugiego przeciąć można wzdłuż koła, elipsy, hiperboli lub paraboli (ust. 134.), więc takimi liniami mogą być cienie koła przy oświetleniu środkowym. Zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia przekrojów stożka płaszczyznami rzutów.

b) *Oświetlenie równoległe.* Promienie, przechodzące przez poszczególne punkty koła, równoległe do danego kierunku światła, tworzą walec eliptyczny, względnie obrotowy, jeśli promień, przechodzący przez środek koła, jest prostopadły do jego płaszczyzny. Ślad otrzymanego walca promieni stanowi cień koła. Tak tedy wyznaczenie cienia koła sprowadza się do wykreślenia śladu, względnie śladów walca, którego kierownicą jest to koło, a kierunkiem tworzących, kierunek promieni światła. Między kierownicą tego walca (kołem) a jego śladem (cieniem) zachodzi powinowactwo środkowe lub przystawanie; cień więc koła na płaszczyznach rzutów może być elipsą lub kołem.

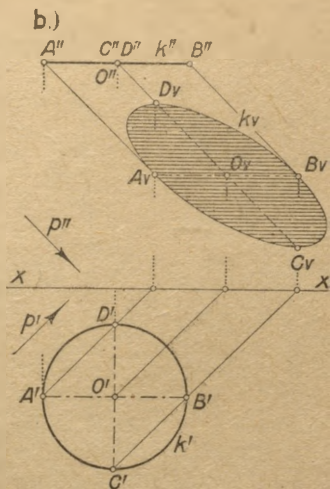


Rys. 514 a.

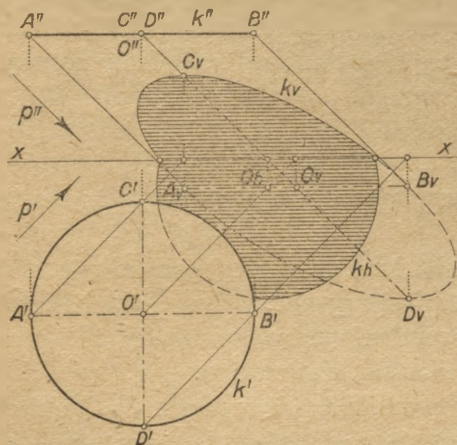
Kilka przykładów sprawę dostatecznie wyjaśni.

Koło k (k' k'') (Rys. 514 a.) rzuca cień tylko na rzutnię poziomą. Cień ten jest kołem k_h o środku O_h , który to punkt jest śladem poziomym promienia, przechodzącego przez środek O (O' O'') koła k . Promień koła k_h równy jest promieniowi koła k . W istocie bowiem, ponieważ płaszczyzna koła jest równoległą do rzutni poziomej, więc przekrój walca o kierownicy k , a o tworzących równoległych do danego kierunku p (p' p''), płaszczyzną poziomą rzutów jest linią przystającą do tej kierownicy.

Koło k (k' k'') (Rys. 514 b.) rzuca cień tylko na rzutnię pionową i to w kształcie elipsy, której parą średnic sprzężonych $A_v B_v$ i $C_v D_v$ jest cień średnic sprzężonych AB i CD koła k . Wiadomo bowiem z ust. 96., że parze średnic sprzężonych w kole odpowiada para średnic sprzężonych w elipsie, spowinowacanej z tym kołem.



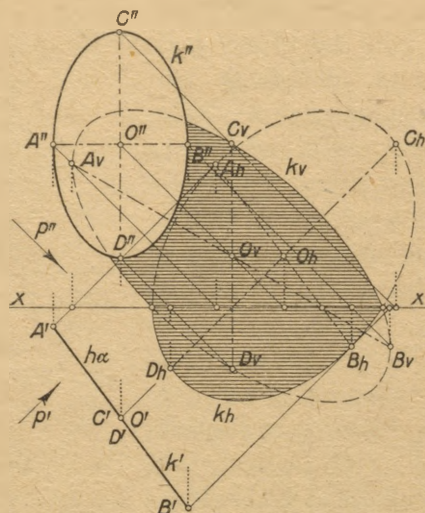
Rys. 514 b.



Rys. 515.

Koło k (k' k'') (Rys. 515.) rzuca cień w części na rzutnię poziomą, a w części na pionową. Cień na rzutnię poziomą

jest kołem o środku O_h , jak w Rys. 514 a., a cień na rzutnię pionową jest elipsą o środku O_v . Średnice sprzężone tej elipsy znajdziemy, jak w Rys. 514 b.



Rys. 516.

Cień koła k (k' k''), leżącego na płaszczyźnie poziomo rzucającej α (Rys. 516.), na każdą z rzutni jest elipsą. Średnice sprzężone tych elips są cieniami średnic sprzężonych AB i CD koła k na obie rzutnie.

§ 17. CIEŃ WIEŁOŚCIANÓW I POWIERZCHNI

179. Uwagi ogólne. Weźmy pod uwagę dowolny czworościan $ABCD$, płaszczyznę π (Rys. 517.) i rozważmy sprawę oświetlenia i oświetlenia tego czworościanu, przy oświetleniu równoległym, o danym kierunku p .

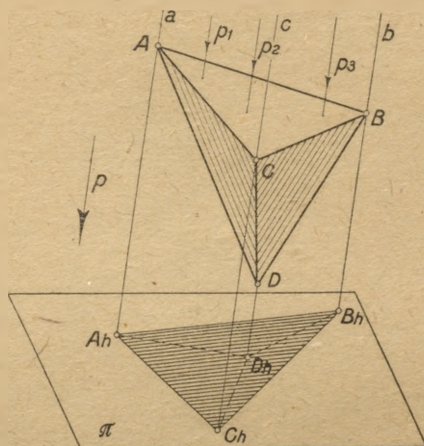
Wszystkie promienie, równoległe do kierunku p , tworzą t. zw. wiązkę promieni równoległych, wśród których wyróżnić możemy trzy grupy:

- promienie przebijające jedynie płaszczyznę π ,
- promienie odbijające się od ścian czworościanu i nie dochodzące do płaszczyzny π , i

c) promienie przechodzące przez krawędzie wielościanu i tworzące t. zw. płaszczyzny świetlne, które przecinają płaszczyznę π .

Wyłączmy z wiązki promieni równoległych grupę a) i weźmy pod uwagę dwie pozostałe. Promienie $p_1, p_2, \dots$, należące do grupy b), oświetlają ścianę ABC , a promienie grupy c) odgraniczają część wielościanu, znajdującą się w świetle, od tej, do której promienie nie dochodzą i która jest w cieniu własnym. Z Rys. 517. widzimy, że płaszczyzny światła, przechodzące przez boki trójkąta ABC , tworzą graniastostup trójścienny i odgraniczają ściany ACD , ABD i BCD , znajdujące się w cieniu własnym.

Jeżeli punkty przebiecia się promieni a, b i c , przechodzących przez punkty A, B, C , oznaczmy literami A_h, B_h i C_h , to trójkąt $A_h B_h C_h$ jest przekrojem graniasto-



Rys. 517.

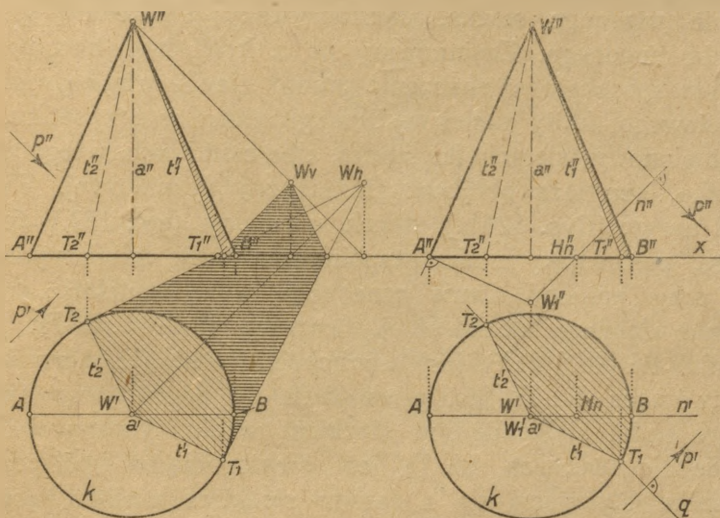
słupa, którego ściany przechodzą przez boki trójkąta ABC , równoległe do danego kierunku p , z płaszczyzną π . Obszar płaszczyzny π , ograniczony trójkątem $A_h B_h C_h$, jest obszarem nieoświetlonym przez grupę b) promieni i nosi nazwę cienia rzuconego czworościanu. W granicach cienia rzuconego mieszczą się cienie wszystkich punktów i prostych, dających się pomyśleć na wielościanie.

Krawędzie AB, BC i CA wielościanu, odgraniczające jego część oświetloną od leżącej w cieniu, stanowią granicę cienia własnego tego wielościanu. Widocznem jest, że cień $A_h B_h C_h$, granicy cienia własnego wielościanu, jest granicą jego cienia rzuconego. I na odwrót, z granic cienia rzuconego wielościanu odtworzyć możemy wprost granice cienia własnego.

Z rozważań powyższych widocznem też jest bezpośrednio, że cień rzucony wielościanu uważać można za rzut ukośny tego wielościanu na daną płaszczyznę i w danym kierunku.

leży w drugim obszarze przestrzeni i jest cieniem nieistotnym. Wierzchołek ostrosłupa rzuca cień istotny W_v na rzutnię pionową; odcinki, łączące punkt W_v z punktami przecięcia się odcinków $W_h B$ i $W_h D$ z osią rzutów, ograniczają obszar cienia rzuconego ostrosłupa na płaszczyznę pionową rzutów i są śladami pionowymi płaszczyzn świetlnych.

Rys. 519. jest przeprowadzeniem poprzedniego zadania w rzutach ukośnych. Poprowadziwszy płaszczyznę boczną przez punkt A , przyjmiemy układ osi x_u, y_u i z_u , a następnie



Rys. 520 a.

Rys. 520 b.

spółrzędne poszczególnych punktów, przyczem stosunki skróceń $x : y : z = 1 : 1 : 1$.

Wyznaczenie cienia własnego i rzuconego powierzchni stożkowej sprowadzić się da do wyszukania płaszczyzn stycznych do tej powierzchni, a równoległych do danego kierunku światła (porównaj ust. 159.). Przez wierzchołek stożka (Rys. 520 a.) poprowadzimy promień, równoległy do danego kierunku p (p' p'') i wyznaczmy jego ślady W_h i W_v . Styczne, wykreślone z punktu W_h do podstawy k stożka, są śladami poziomymi płaszczyzn stycznych do stożka i równoległych do kierunku p , a więc płaszczyzn świetlnych. Proste t_1 (t_1' t_1'') i t_2 (t_2' t_2''), łączące wierzchołek stożka z punktami T_1 i T_2 , są tworzącymi, wzdłuż których płaszczyzny świetlne dotykają

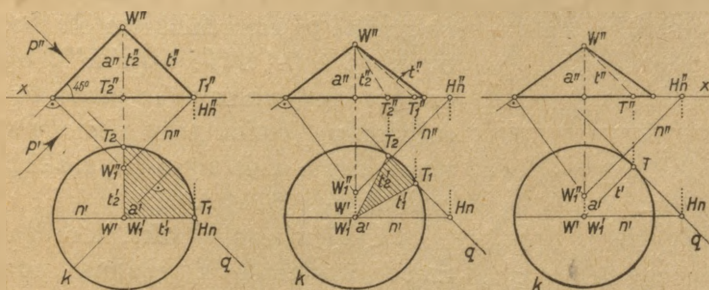
stożka. Tworzące te stanowią więc granicę cienia własnego. Ponieważ, jak to z rozważań ustępu poprzedniego widoczne jest, cień rzucony granicy cienia własnego stanowi granicę cienia rzuconego, więc cień rzucony tworzących t_1 i t_2 zakreśli granicę cienia rzuconego stożka. W naszym przypadku, ponieważ punkt W_h jest cieniem nieistotnym wierzchołka stożka na rzutni poziomej, więc stożek rzuci częściowo cień na rzutnię pionową.

Przy podanym toku konstrukcyi dochodzimy do granicy cienia własnego stożka, wyznaczywszy poprzednio granicę cienia rzuconego. Zastanówmy się z kolei nad bezpośrednim sposobem wyznaczenia granic cienia własnego stożka obrotowego, który zastosować moglibyśmy w przypadku, gdy rzut pionowy wierzchołka stożka, albo cień rzucony tego wierzchołka, leżą poza obrębem płaszczyzny rysunkowej. Weźmy pod uwagę (Rys. 520 b.) stożek normalny (ust. 159.) do danego, posiadający z nim wspólną podstawę k . Przypuśćmy, że przy pomocy cienia rzuconego wyznaczyliśmy granicę cienia własnego stożka, t. j. tworzące $W T_1$ i $W T_2$. Jeżeli punkt W_1 ($W_1' W_1''$) jest wierzchołkiem stożka normalnego, to tworząca $W_1 T_1$ jest prostopadłą do płaszczyzny światła, która styka się z danym stożkiem wzdłuż tworzącej $W T_1$. Podobnie tworząca $W_1 T_2$ jest prostopadłą do płaszczyzny światła, stykającej się z danym stożkiem wzdłuż tworzącej $W T_2$. Płaszczyzna $T_1 W_1 T_2$, której ślad poziomy oznaczyliśmy literą q , jako prostopadłą równocześnie do obu płaszczyzn światła, stykających się z danym stożkiem, jest prostopadłą do krawędzi tych płaszczyzn, a więc do danego kierunku światła p ($p' p''$).

Na podstawie tego rozumowania wyznaczymy granicę cienia własnego stożka obrotowego w sposób następujący: Znalazłszy wierzchołek stożka normalnego, poprowadzimy przezeń płaszczyznę prostopadłą do danego kierunku światła, wyznaczymy jej ślad na płaszczyźnie podstawy stożka, a punkty przecięcia się tego śladu z podstawą, połączone z jego wierzchołkiem, stanowią szukaną granicę cienia własnego. Aby zaś przez punkt W_1 poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do prostej p (ust. 59. i 60.), poprowadziliśmy przez ten punkt prostą czołową n ($n' n''$) prostopadłą do kierunku światła p ($p' p''$) i znaleźli jej ślad poziomy Hn . Prosta $q \perp p'$ jest śladem po-

ziomym szukanej płaszczyzny, a punkty T_1 i T_2 , w których ślad ten przecina podstawę k stożka, połączone z wierzchołkiem W , dają tworzące t_1 ($t'_1 t''_1$) i t_2 ($t'_2 t''_2$), ograniczające cień własny.

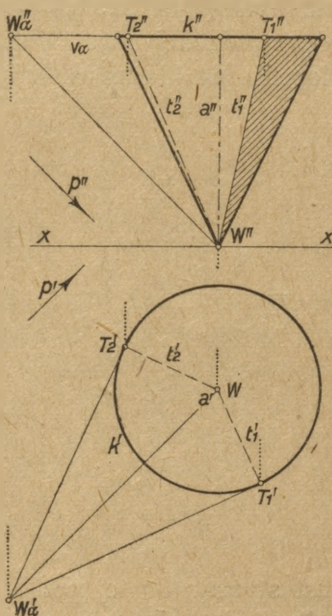
Cień własny stożka obrotowego, którego tworzące nachylone są do rzutni poziomej pod 45° , wyznaczyliśmy przy po-



Rys. 521 a—c.

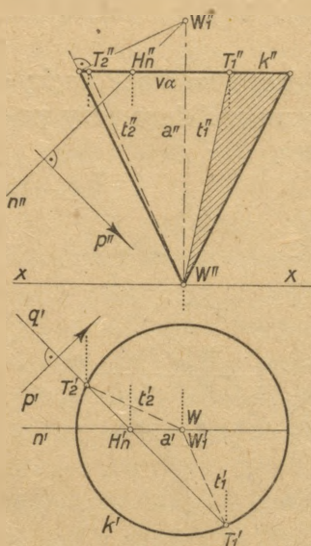
mocy stożka normalnego na Rys. 521 a. Rzut poziomy tego cienia — przy założeniu, że rzuty promieni światła nachylone są do osi x pod 45° — obejmuje wycinek koła k , równy czwartej części jego powierzchni. Jeżeli kąt, jaki zawierają tworzące stożka z rzutnią poziomą, maleje, to maleje też część stożka, znajdująca się w cieniu własnym (Rys. 521 b.). W przypadku, gdy prosta $q \perp p'$ jest styczną do koła k (Rys. 521 c.), istnieje tylko jedna płaszczyzna światła, styczna do stożka wzdłuż tworzącej t ($t' t''$). Od tego stożka począwszy, następne, których tworzące zawierają z rzutnią poziomą kąt mniejszy, znajdują się całe w świetle i nie rzucają cieni na płaszczyzny rzutów.

Konstrukcję cienia stożka obrotowego o osi pionowej, którego wierzchołek leży na rzutni



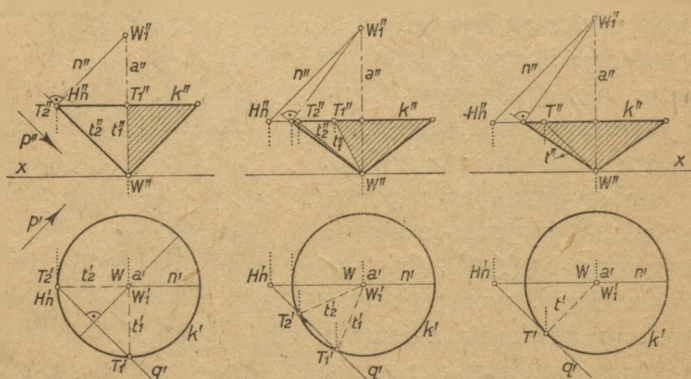
Rys. 522 a.

poziomej, podają Rys. 522 a. i b. Podobnie, jak w Rys. 520 a., poprowadzimy przez wierzchołek promień, równoległy do danego kierunku $p(p' p'')$ i znajdziemy jego ślad $W_\alpha(W'_\alpha W''_\alpha)$ z płaszczyzną podstawy α . Styczne wykreślone z punktu W_α do koła $k(k' k'')$ stykają się z nim w punktach $T_1(T'_1 T''_1)$ i $T_2(T'_2 T''_2)$, które połączone z wierzchołkiem stożka, dają tworzące $t_1(t'_1 t''_1)$ i $t_2(t'_2 t''_2)$, ograniczające cień własny. To samo zadanie, rozwiązane jednak przy pomocy stożka normalnego, widzimy na Rys. 522 b. (porównaj Rys. 520 b.).



Rys. 522 b.

Cień własny stożka, którego tworzące zawierają z rzutnią poziomą kąt 45° , wyznaczyliśmy przy pomocy stożka normalnego na Rys. 523 a. Im bardziej maleje kąt, jaki tworzące stożka zawierają z rzutnią poziomą, tem większa część stożka znajduje się w cieniu własnym (Rys. 523 b.). Jeżeli krawędź $q(q' q'')$ płaszczyzny, poprowadzonej przez wierzchołek W_1 stożka normalnego, prostopadle do kierunku światła, z płaszczyzną podstawy stożka

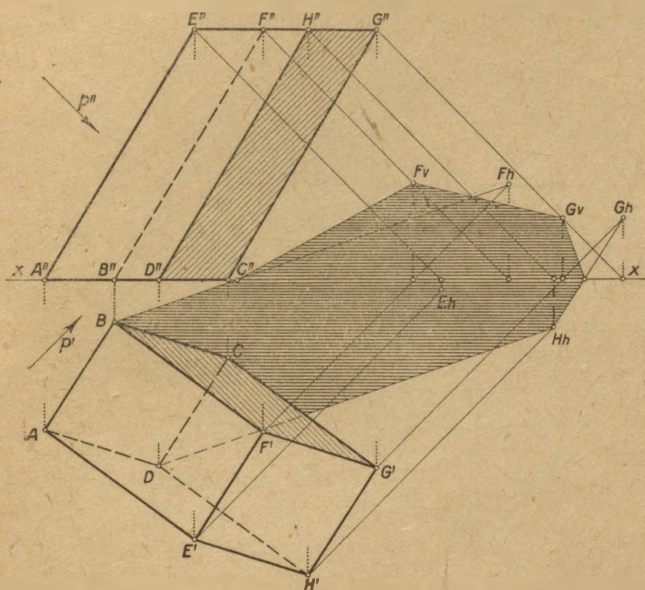


Rys. 523 a-c.

jest styczną do tej podstawy (Rys. 523 c.), to wówczas istnieje tylko jedna płaszczyzna światła, styczna do stożka wzdłuż tworzącej $t(t' t'')$. Stożek taki i stożki, których tworzące zawierają

z rzutnią poziomą kąty mniejsze, znajdują się (z wyjątkiem podstawy) w cieniu własnym.

181. Cienie graniastosłupów i walców. Krawędzie graniastosłupa, przez które przechodzą płaszczyzny światła, odgraniczają część oświetloną od części znajdującej się w cieniu własnym, czyli stanowią granicę tego cienia (Rys. 524.). Przez które krawędzie boczne i które krawędzie podstawy przejdą płaszczyzny światła, przekonamy się, wyznaczwszy poprzednio cień rzucony graniastosłupa na rzutnię poziomą.



Rys. 524.

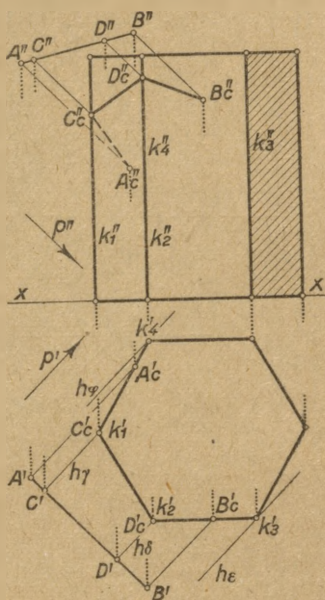
Najpierw wyszukamy cień $E_h F_h G_h H_h$ podstawy górnej na rzutnię poziomą, a następnie połączymy ze sobą punkty B i F_h , D i H_h . Proste $\overline{BF_h}$ i $\overline{DH_h}$ są śladami poziomymi płaszczyzn światła, przechodzących przez krawędzie $\overline{BF}$, względnie $\overline{DH}$. Dalsze płaszczyzny światła przechodzą przez krawędzie $\overline{FG}$ i $\overline{GH}$. Ściany więc $BCFG$ i $CDGH$ graniastosłupa są w cieniu własnym. Cień istotny krawędzi $\overline{FG}$ leży na rzutni pionowej, krawędź $\overline{GH}$ rzuca częściowo cień na obie rzutnie, podobnie jak krawędź $\overline{BF}$.

Cienie walca obrotowego, o osi pionowej, podaje Rys. 525. Poziomo rzucające płaszczyzny światła stykają się z walcem

wiełościanem. Tworzące tego walca są równoległe do danego kierunku światła i przechodzą przez punkty linii rzucającej cień. O ile chodzi o oświetlenie środkowe, to w miejsce walca światła występuje stożek, którego wierzchołkiem jest punkt świetlny, a którego tworzące przechodzą przez daną linię.

Kilka niżej podanych przykładów sprawę dostatecznie wyjaśni.

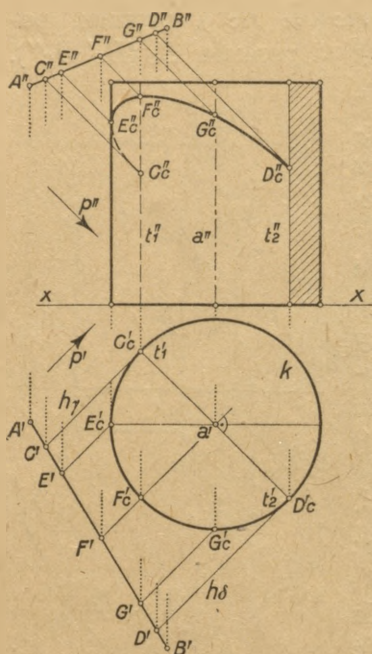
a) Wyznaczyć cień odcinka AB na graniastostup (Rys. 526.). Promień światła, przechodzący przez punkt A ($A' A''$), przebija graniastostup w punkcie A_c ($A_c' A_c''$), promień poprowadzony przez punkt B ($B' B''$) w punkcie B_c ($B_c' B_c''$). Punkty A_c i B_c są cieniami punktów A i B na graniastostup. Płaszczyzna światła, przechodząca przez odcinek AB , przecina krawędzie boczne k_1 ($k_1' k_1''$) i k_2 ($k_2' k_2''$) w punktach C_c i D_c , których rzuty poziome C_c' i D_c' są znane. Aby znaleźć rzuty pionowe tych punktów, poprowadźmy przez krawędzie k_1 i k_2 płaszczyzny γ i δ równoległe do kierunku światła i wyznaczmy punkty C ($C' C''$) i D ($D' D''$), w których płaszczyzny te przecinają prostą AB . Płaszczyzny γ i δ , są poziomo rzucające; ich ślady poziome, równoległe do p' , oznaczyliśmy literami h_γ i h_δ . Na płaszczyznach tych leżą promienie światła, które, przechodząc przez punkty C i D , przecinają krawędzie k_1 i k_2 w szukanych punktach C_c i D_c . Proste, wykreślone z punktów C'' i D'' równoległe do p'' , przecinają proste k_1'' i k_2'' w punktach C_c'' , względnie D_c'' . Linia łamana $A_c'' C_c'' D_c'' B_c''$ jest rzutem pionowym cienia odcinka AB na graniastostup. Część tego cienia, a mianowicie $A_c C_c$, jest w rzucie pionowym niewidoczna.



Rys. 526.

Poziomo rzucające płaszczyzny światła ε i φ , przechodzące przez krawędzie k_3 i k_4 , odgraniczają część oświetloną graniastostupa od części, znajdującej się w cieniu własnym.

b) Wyznaczyć cień rzucony odcinka $\overline{AB}$ na walec obrotowy (Rys. 527.). Tworzące t_1 ($t_1' t_1''$) i t_2 ($t_2' t_2''$), wzdłuż których płaszczyzny γ i δ , równoległe do kierunku światła p ($p' p''$), stykają się z walcem, stanowią granice jego cienia własnego. Punkty C ($C' C''$) i D ($D' D''$), w których prosta $\overline{AB}$ przebija płaszczyzny γ i δ , ograniczają odcinek, którego cień pada na walec. Cienie C_c ($C_c' C_c''$) i D_c ($D_c' D_c''$) punktów C i D leżą na tworzących t_1 ($t_1' t_1''$) i t_2 ($t_2' t_2''$), a znajdziemy



Rys. 527.

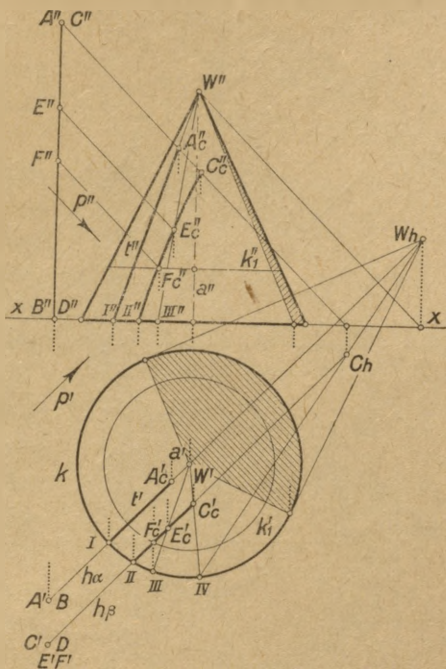
je w ten sam sposób, jak cienie punktów C i D w Rys. 526. Płaszczyzna światła, przechodząca przez odcinek $\overline{AB}$, przecina walec wzdłuż elipsy, której część, zawarta między punktami C_c i D_c , jest cieniem odcinka $\overline{CD}$ na walec. Cień dowolnego punktu F ($F' F''$) odcinka $\overline{CD}$ na walec znajdziemy jako punkt przecięcia się promienia światła, przechodzącego przez ten punkt, z walcem. Aby wyznaczyć punkt odcinka $\overline{CD}$, który rzuca cień na tworzącą konturową, zauważmy, że rzut poziomy tego cienia, a mianowicie punkt E_c' , jest znany. Punkt ten rzucimy w kierunku p' na $\overline{A'B'}$, a otrzymany tam punkt E' odniesiemy na $\overline{A''B''}$. Tym sposobem otrzymaliśmy rzuty punktu E ($E' E''$),

którego rzut poziomy cienia jest punktem E_c' . Promień, wykreślony przez punkt E'' równoległe do p'' , przecina rzut pionowy tworzącej konturowej w punkcie E_c'' .

c) Wyznaczyć cień odcinków $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ na stożek obrotowy (Rys. 528.). Pionowy odcinek $\overline{AB}$ obraliśmy tak, że przechodząca przez niego płaszczyzna światła α przechodzi przez oś stożka, a więc przecina go wzdłuż tworzących. Promień, poprowadzony przez punkt A ($A' A''$), przebija stożek w punkcie A_c ($A_c' A_c''$), który jest cieniem punktu A na stożek. Część tworzącej t ($t' t''$) stożka, ograniczonej punk-

tami A_c i I , jest cieniem części odcinka AB na stożek. Odcinek IB jest cieniem pozostałej części odcinka AB na rzutnię poziomą.

Płaszczyzna światła β , przechodząca przez odcinek CD , przecina stożek wzdłuż hiperboli, taką więc krzywą jest cień rzucony odcinka AB na stożek. Wyznamy cień W_h wierzchołka stożka na rzutnię poziomą i cień Ch punktu C . Prosta $W_h Ch$, która jest śladem poziomym płaszczyzny φ , przechodzącej przez punkty W i C równoległe do kierunku światła, przecina koło k w punkcie IV . Prosta WIV jest tworzącą, wzdłuż której płaszczyzna φ przecina stożek, a punkt C_c (C_c' C_c'') punktem przebiecia się promienia światła, przechodzącego przez punkt C (C' C''), ze stożkiem, a więc cieniem tego ostatniego na stożek. Ponieważ rzut poziomy cienia odcinka CD na stożek jest odcinkiem, więc wyznaczenie rzutu pionowego tego cienia (hiperboli) sprowadza się do wyznaczenia rzutu pionowego punktów, leżących na stożku, których rzut poziomy jest znany. Punkt E_c'' wyznaczaliśmy przy pomocy tworzącej $WIII$ stożka, a punkt F_c'' przy pomocy koła (równoleżnika) k_1 , którego rzut poziomy k_1' przechodzi przez punkt F_c' .

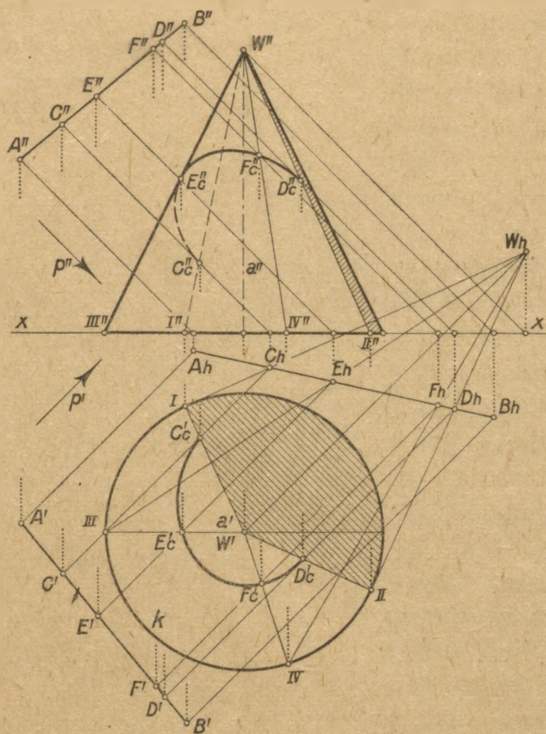


Rys. 528.

d) Wyznaczyć cień odcinka AB na stożek (Rys. 529.). Płaszczyzna światła, przechodząca przez odcinek AB , przecina stożek wzdłuż elipsy; szukany cień będzie więc częścią tej krzywej. Wykreśliwszy cień rzucony stożka na rzutnię poziomą, otrzymamy granice jego cienia własnego, którymi są tworzące WI i WII . Ślady poziome $W_h I$ i $W_h II$ płaszczyzn światła γ i δ , stycznych do stożka wzdłuż tworzących WI

i WII , przecinają cień $A_h B_h$, odcinka AB na rzutnię poziomą, w punktach C_h i D_h . Punkt C_h jest cieniem punktu C ($C' C''$), a punkt D_h cieniem punktu D ($D' D''$) na rzutnię poziomą. Ponieważ tworząca WI , promień CC_h i prosta WhI leżą na płaszczyźnie światła γ , więc punkt C ($C' C''$) jest punktem przebicia się odcinka AB z tą płaszczyzną, a punkt C_c ($C_c' C_c''$) punktem styczności promienia CC_h ze stożkiem,

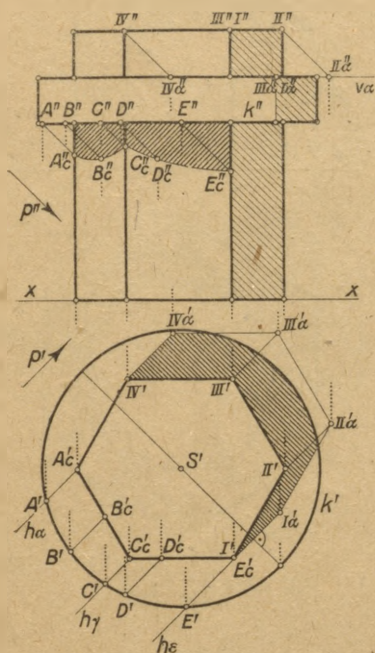
a więc cieniem punktu C ($C' C''$) na stożek. Z tych samych powodów punkt D_c ($D_c' D_c''$) jest cieniem punktu D ($D' D''$) na stożek. Punkty odcinków AC i BD nie rzuca cienia na stożek, gdyż promienie, przez nie przechodzące, nie przebija go. Jako punkty graniczne, przez które przechodzące promienie nie przebijają ale stykają się ze stożkiem, występują punkty C i D . Dalsze punkty cienia odcinka CD na stożek znajdziemy podobnie jak



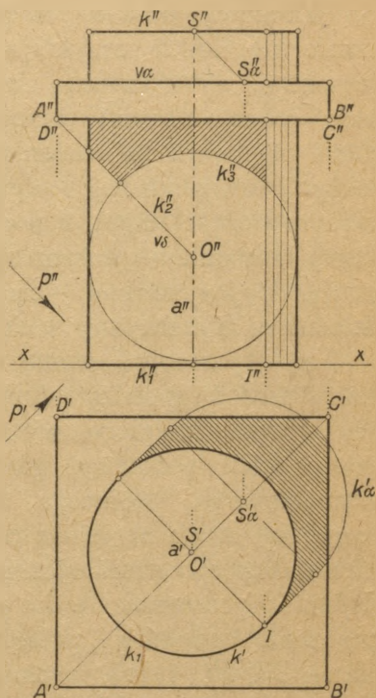
Rys. 529.

punktów C i D . I tak obrawszy punkt E_h na odcinku $A_h B_h$ znajdziemy jego rzuty E' i E'' , poczem łączymy punkt Wh z E_h prostą aż do przecięcia się z kołem k w punkcie III . Odcinek $W' III$ przecina promień $E' E_h$ w szukanym punkcie E_c' . Punkt E_c'' leży na rzucie pionowym tworzącej $WIII$, która w tym przypadku jest tworzącą konturową. Punkt E_c ($E_c' E_c''$) jest punktem przebicia się promienia światła, przechodzącego przez punkt E ($E' E''$), ze stożkiem. Prosta $Wh III$ jest śladem

cego przez koło k ($k' k''$), z bocznymi ścianami graniastostupa. Część tej linii, widocznej w rzucie pionowym, składa się z dwóch łuków elips, leżących na płaszczyznach poziomo rzucających. Rzut poziomy cienia koła k na graniastostup jest więc linią łamaną $A_c' C_c' E_c'$. Poziomo rzucająca płaszczyzna α , przechodząca przez konturową krawędź boczną graniastostupa, przecina koło k ($k' k''$) w punkcie A ($A' A''$); promień wykreślony przez punkt A'' , równoległy do kierunku p'' , przecina rzut pionowy krawędzi konturowej w szukanym punkcie A_c'' . W analogiczny sposób wyznaczaliśmy punkty C_c'' i E_c'' , a także punkty pośrednie B_c ($B_c' B_c''$), D_c ($D_c' D_c''$)... szukanых elips.



Rys. 531.



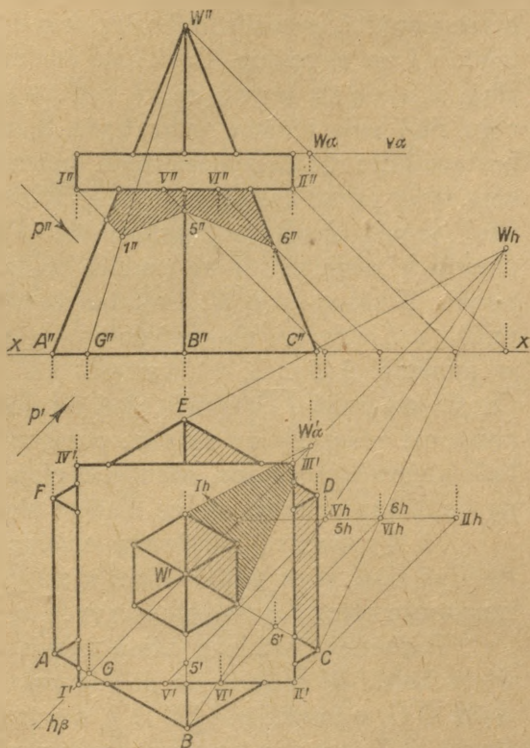
Rys. 532.

c) Wyznaczyć wzajemne cienie rzucone walca obrotowego, złączonego z kwadratową płytą (Rys. 532.). Cień koła k ($k' k''$) na płytę jest kołem k_α , którego środek S_α jest cieniem środka S , a którego promień równy jest promieniowi koła k . Cień punktu A ($A' A''$) na walec jest punktem prze-

bicia się promienia światła, przechodzącego przez punkt A , z walcem. Płaszczyzna δ , przechodząca przez krawędź AD , jest pionowo rzucającą; jej przekrój z walcem jest elipsą k_2 , której rzut pionowy k_2'' schodzi się ze śladem vs . Płaszczyzna światła, przechodząca przez krawędź AB , jest równoległą do osi rzutów x i przecina walec wzdłuż elipsy k_3 , której środkiem jest punkt O ($O' O''$). Ponieważ rzuty promieni światła nachylone są do osi x pod 45° , więc pł. δ , a temsamem i pł. światła, przechodząca przez krawędź AB , zawiera z rzutniami kąt 45° , a co zatem idzie, rzut pionowy elipsy k_3 jest kołem k_3'' , zakreślonym z punktu O'' stycznie do rzutu pionowego tworzących konturowych walca.

d) Wyznaczyć wzajemne ocienienie zespołu, przedstawione Rys. 533.

Ostrosłup rzuca cień na płaszczyznę α podstawy górnej graniastostupa, a krawędź III tego ostatniego na ostrosłup. Aby wykreślić cień tej krawędzi, znajdziemy cień rzucony ostrosłupa na rzutnię poziomą i cień rzu-



Rys. 533.

cany $I_h II_h$ odcinka III na rzutnię poziomą. Punkt VI_h jest cieniem punktu VI odcinka III na rzutnię poziomą. Prosta, wykreślona przez punkt VI_h równolegle do p' , przecina odcinek $I' II'$ w punkcie VI' , który odniesiemy na prostą $I'' II''$ jako punkt VI'' .

Promień, poprowadzony przez rzut punktu VI_h na oś x , równolegle do p'' , przecina odcinek $I'' II''$ w punkcie VI'' .

Promień światła, przechodzący przez punkt VI (VI' VI''), leży wraz z krawędzią WC ostrosłupa na jednej płaszczyźnie, której śladem poziomym jest prosta $W_h C$. Punkt 6 ($6'$ $6''$) jest punktem przecięcia się promienia światła VI VI_h z krawędzią WC , a więc cieniem punktu VI na ostrosłup. Płaszczyzna światła, przechodząca przez punkty I (I' I'') i W (W' W''), jest w naszym przypadku poziomo rzucającą i przecina ścianę ABW ostrosłupa wzdłuż prostej GW . Punkt I'' jest rzutem pionowym punktu, w którym promień światła, przechodzący przez punkt I , przebija ostrosłup, czyli jest cieniem rzuconym punktu I na ostrosłup. Cień, jaki odcinek $I VI$ rzuca na ostrosłup, załamie się na krawędzi BW , a punkt odcinka $I VI$, którego cień pada właśnie na krawędź BW , znajdziemy w sposób następujący: Śladem poziomym płaszczyzny światła ε , przechodzącej przez krawędź BW , jest prosta BW_h , która przecina prostą $I_h I_h$ w punkcie V_h . Punkt ten jest cieniem punktu V odcinka III na rzutnię poziomą i takimże cieniem punktu 5 krawędzi BW . Promień światła, poprowadzony przez punkt V_h , leży na płaszczyźnie ε i przecina krawędź BW w punkcie 5 ($5'$ $5''$), a krawędź III w punkcie V (V' V''). Część krawędzi III rzuci cień na ścianę ABW ostrosłupa; ponieważ płaszczyzna światła, przechodząca przez tę krawędź, jest pionowo rzucająca, więc rzut pionowy cienia tej krawędzi na ostrosłup schodzi się ze śladem pionowym tej płaszczyzny.

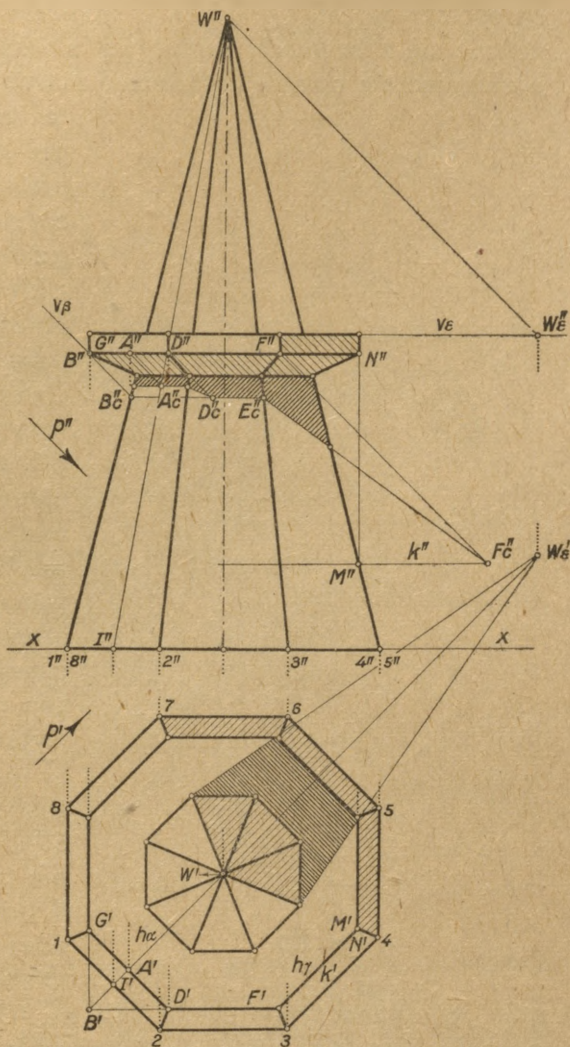
e) Wyznaczyć wzajemne ocienienie zespołu, podanego na Rys. 534. Wykreślenie cieni własnych, podobnie jak i cienia rzuconego ostrosłupa na płaszczyznę ε , nie wymaga wyjaśnień.

Poziomo rzucająca płaszczyzna α , przechodząca przez wierzchołek W równolegle do kierunku światła, przecina krawędź DG w punkcie A (A' A''), a ostrosłup wzdłuż prostej IW . Punkt Ac'' jest rzutem pionowym cienia punktu A na ostrosłup. Równoległa do $D''G''$, wykreślona przez Ac'' , jest rzutem pionowym cienia, jaki część odcinka DG rzuca na ścianę $1W2$. Ślad pionowy v_β , pionowo rzucającej płaszczyzny β , przechodzącej przez punkt B (B' B''), przecina bok $I''W''$ w punkcie Bc'' . Prosta, wykreślona z tego punktu, równolegle do v_ε , jest rzutem pionowym krawędzi, jaką tworzy płaszczyzna światła δ , przechodząca przez bok DF z płaszczyzną ściany $2W3$. Wyznaczywszy punkt Dc'' , otrzymamy załamanie się cienia, jaki krawędź DG rzuca na ostrosłup. Płaszczyzna

światła δ przecina ścianę $3W4$ ostrosłupa wzdłuż prostej, którą musimy wykreślić, a która dopełni granicę cienia rzucanego przez płytę na ostrosłup. Płaszczyzna światła γ , która przechodzi przez krawędź FN , jest poziomo rzucająca i przecina płaszczyznę ściany bocznej $3W4$ w prostej k ($k'k''$). Promień światła przechodzący przez punkt F ($F'F''$), leżący na płaszczyźnie γ , przecina krawędź k w punkcie F_c , którego tylko rzut pionowy F_c'' oznaczyliśmy na rysunku. Prosta $E_c''F_c''$ jest rzutem pionowym krawędzi, jaką płaszczyzna światła δ tworzy ze ścianą $3W4$ ostrosłupa. F_c jest bowiem punktem przecięcia się płaszczyzn γ , δ i płaszczyzny $3W4$.

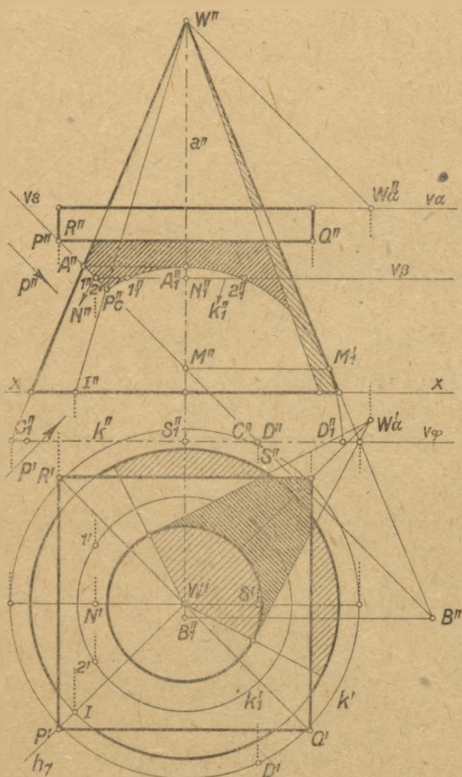
f) Wykreślić cienie zespołu, przedstawionego na Rys. 535. Promień światła, poprowadzony przez pkt. P ($P'P''$),

przebiega stożek w punkcie P_c , którego rzut pionowy P_c'' naznaczyliśmy na rysunku. Pionowo rzucająca płaszczyzna światła ε , przechodząca przez krawędź PR , przecina stożek



Rys. 534.

wzdłuż elipsy, której rzut pionowy jest odcinkiem $A''B''$, a której środkiem jest punkt S ($S'S''$). Płaszczyzna światła, przechodząca przez krawędź PQ , przecina stożek wzdłuż elipsy, przystającej do poprzedniej. Ośiami rzutu pionowego tej elipsy są odcinki $A_1''B_1''$ i $C_1''D_1''$, środkiem punkt S_1'' . Elipsa ta zetknie się z tworzącą konturową stożka w punkcie M_1 . Nie posługując się osiami, wyznaczyć można poszczególne punkty



Rys. 535.

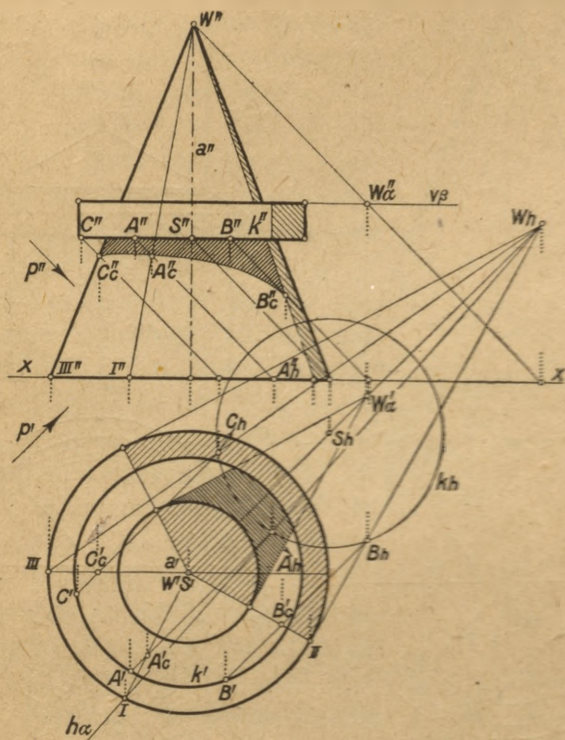
tej elipsy przy pomocy przekrojów płaszczyznami poziomymi. I tak płaszczyzna β przecina stożek wzdłuż koła k_1 ($k_1'k_1''$), a krawędź płaszczyzn β i ε przecina to koło w punktach 1 ($1'1''$) i 2 ($2'2''$). Uważając punkty te za rzut boczny punktów 1_1 i 2_1 szukanej elipsy, otrzymamy ich rzut pionowy, odmierzając $1'N' = 2'N' = 1_1''N_1'' = 2_1''N_1''$. Wyznaczenie cienia własnego stożka i jego cienia rzuconego na płaszczyznę górną płyty nie wymagają wyjaśnień.

g) Wykreślić cienie zespołu, podanego na Rys. 536. Koło k ($k'k''$) pierścienia rzuca cień na stożek. Wykreśliwszy cień rzucony stożka na rzutnię poziomą i takież cień kh

koła k , wyznaczmy cienie A_c , B_c , C_c ,... poszczególnych punktów koła k na stożek, podobnie jak cienie punktów prostej AB na stożek w Rys. 529.

h) Wykreślić cienie zespołu, przedstawionego Rys. 537. Cień rzucony koła k ($k'k''$) na walec, znajdziemy jako miejsce geometryczne punktów przecięcia się promieni światła, poprowadzonych przez poszczególne punkty B ($B'B''$), C ($C'C''$)...

tego koła, z walcem. Płaszczyzna światła δ , styczna do tego walca wzdłuż tworzącej t_1 ($t'_1 t''_1$), przecina koło k w punkcie D ($D' D''$), którego cień D_c ($D'_c D''_c$) pada na tę tworzącą. Stożek obrotowy o wierzchołku W_2 rzuci cień na walec, stanowiący trzon naszego zespołu. Cień ten wyjdzie z punktu A_2 . Promień światła, poprowadzony przez punkt 1 ($1' 1''$) odcinka $\overline{A_1 A_2}$, przebija walec w punkcie 1_c ($1'_c 1''_c$). Płaszczyzna

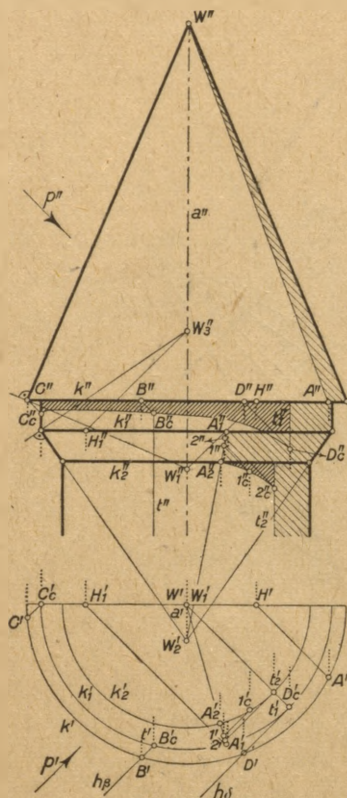


Rys. 536.

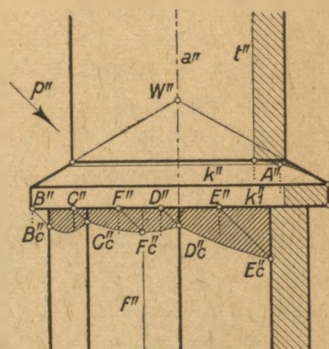
światła, styczna do walca, przecina odcinek $\overline{A_1 A_2}$ w punkcie 2 ($2' 2''$), którego cień 2_c pada na tworzącą t_2 ($t'_2 t''_2$).

i) Wykreślić cienie zespołu podanego na Rys. 538. Zespół składa się z ośmiościennego, prostego graniastopuła, na którym wspiera się płyta, złożona z walca i stożka o wierzchołku W ($W' W''$). Na płycie spoczywa trzon walcowy. Wykreśliwszy cienie własne, przystąpimy do wyznaczenia wzajemnych cieni rzuconych.

Walec świetlny, przechodzący przez koło k_1 (k_1' k_1''), przenika się ze ścianami bocznymi graniastostupa, a linie przenikania się (elipsy) stanowią granicę cienia rzuconego przez to koło na graniastostup. Poszczególne punkty tych elipsy znajdziemy przy pomocy płaszczyzn świetlnych $\beta, \gamma, \dots$, które poprowadzimy przez krawędzie graniastostupa, względnie do tych krawędzi równoległe (np. płaszczyzna ϕ).



Rys. 537.



Rys. 538.

Tworząca t (t' t''), stanowiąca granicę cienia własnego górnego walca, rzuci cień na stożek. Cień ten będzie łukiem hiperboli, gdyż płaszczyzna światła, przechodząca przez tworzącą t , jest poziomo rzucająca, a więc równoległa do dwóch tworzących stożka. Punkt A (A' A'') tej hiperboli wyznaczyliśmy przy pomocy koła równoleżnikowego k (k' k'') stożka.

184. Ćwiczenia.

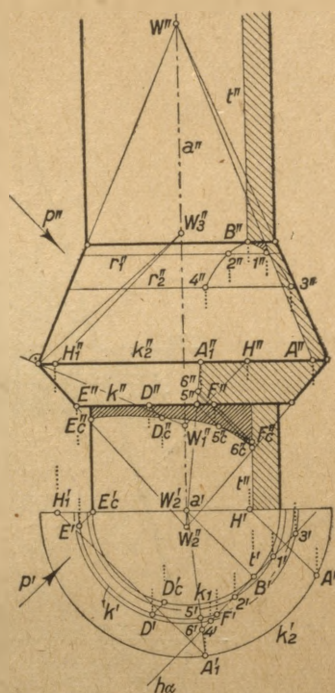
Wykreślić cienie zespołów, przedstawionych na Rysunkach 539. i 540.

185. Cienie kuli. Walec świetlny, opisany na kuli, styka się z nią wzdłuż koła wielkiego, które stanowi granicę cienia własnego kuli. Przekroje tego walca z rzutniami stanowią cień rzucony kuli.

Na Rys. 541. rozwiązaliśmy zadanie przy pomocy rzutu bocznego na płaszczyznę poziomo rzucającą, równoległą do kierunku światła. Wykreśliwszy rzut boczny kuli i rzut boczny Sh^0 śladu poziomego promienia, przechodzącego przez środek kuli, otrzymamy przez połączenie punktów S^0 i Sh^0 rzut boczny p^0 kierunku światła. Rzut boczny granicy cienia własnego kuli jest średnicą $A^0 B^0 \perp p^0$, rzut poziomy elipsą o osiach $A' B'$ i $C' D'$, a wreszcie rzut pionowy elipsą, wyznaczoną średnicami sprzężonymi $A'' B''$ i $C'' D''$. Wierzchołkami E'' i F'' tej ostatniej elipsy są punkty końcowe średnicy koła, prostopadłej do p'' ; druga para wierzchołków, ograniczająca małą oś elipsy, leży na p'' , przy czym $S'' G'' = a = S'' H'' = S' A' = S' B'$. Ponieważ promienie światła nachylone są do obu rzutni pod tym samym kątem (ust. 175.), więc oba rzuty koła, jako granice cienia własnego, są przystającymi elipsami.

Ponieważ osi elipsy są jej osiami symetrii prostokątnej, więc punktowi F' odpowie symetrycznie punkt J' , a punktowi E' punkt K' . Podobnie punktom C'' i D'' odpowiedzą punkty symetryczne J'' i K'' . Ponieważ proste, łączące punkty J z F i E z K są poziome, więc proste $J'' F''$ i $E'' K''$ są równoległe do osi rzutów x .

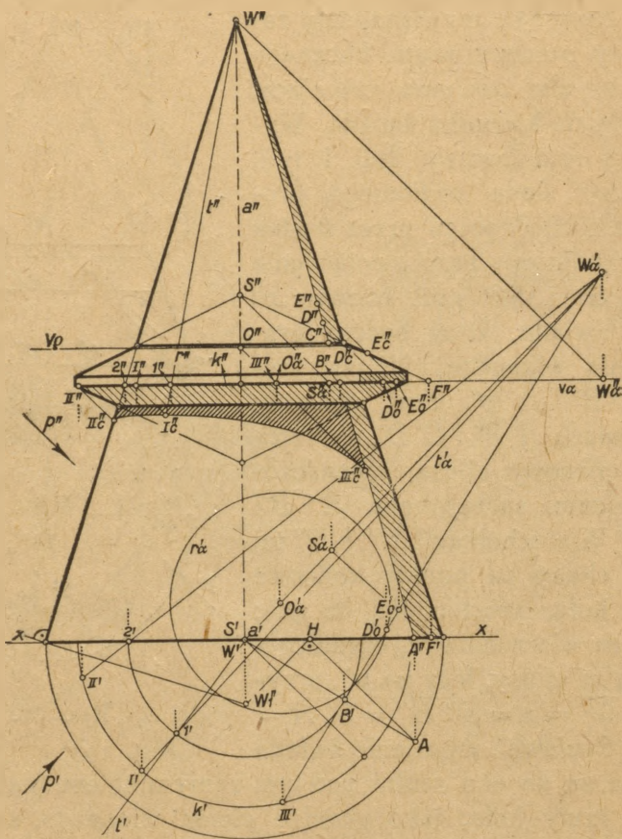
Cień kuli na rzutnię poziomą jest elipsą o środku Sh , cień na rzutnię pionową elipsą o środku Sv . Osi wielkie tych



Rys. 539.

elips schodzą się z kierunkami p' i p'' i równe są odcinkowi $Ah^0 Bh^0$. Osi małe obu elips równe są średnicy kuli.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie jedynie cienia własnego kuli, to na podstawie konstrukcji Rys. 541. postąpimy w sposób następujący: kreślimy $C'D' \perp p'$ (Rys. 542.) i wpiszemy w koło kwadrat, którego boki wyznaczą na poziomej średnicy

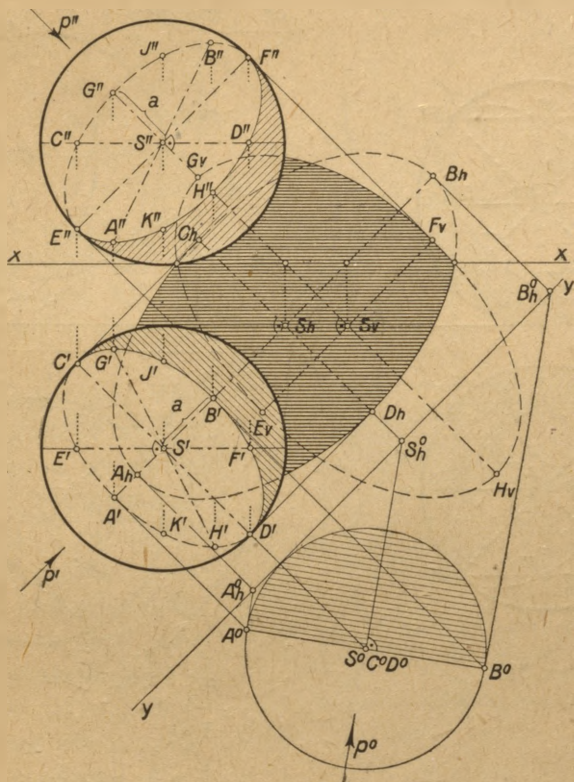


Rys. 540.

koła punkty E' , F' , a na pionowej punkty J' i K' . Szukana elipsa jest prostokątnie powinowata z kołem, przyczem osią tego powinowactwa jest prosta $C'D'$. Kreślimy $E'E_2 \parallel C'D'$ i łączymy E_2 z S' , a przez punkt E' prowadzimy równoległą do p' , otrzymując punkt E_1 . Odcinek $E_1S' = A'S' = B'S' = a$ równy jest małej osi szukanej elipsy (por. ust. 97., Rys. 290.).

Wyznaczenie rzutu pionowego granicy cienia własnego kuli nie wymaga wyjaśnień.

Na Rys. 543. wyznaczyliśmy cień własny kuli, stosując metodę poznaną w ust. 161. Promień światła p (p' p''), poprowadzony przez środek O (O' O'') kuli, obrócimy do położenia p_1 , równoległego względem rzutni pionowej, a to około prostej pionowej m (m' m''), która przechodzi przez ślad poziomy H_p

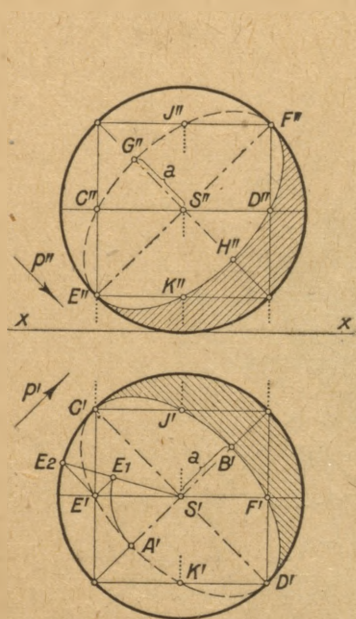


Rys. 541.

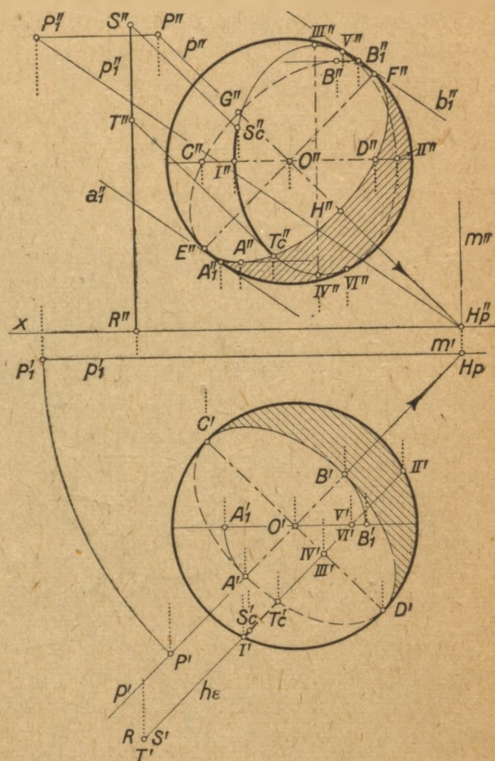
promienia p . Tworzące walca, równoległe do kierunku p_1 , stykają się z południkiem głównym kuli w punktach A_1 (A_1' A_1'') i A_2 (A_2' A_2''). Z punktami tymi wróciliśmy na płaszczyznę światła, przechodzącą przez środek kuli, oznaczając je jako A (A' A'') i B (B' B''). Odcinki $\overline{A'B'}$ i $\overline{C'D'}$ stanowią parę osi elipsy, będącej rzutem poziomym granicy cienia własnego kuli; odcinki $\overline{A''B''}$ i $\overline{C''D''}$ są parą średnic sprzężonych

elipsy, stanowiącej rzut pionowy koła, odgraniczającego część oświetloną kuli od części leżącej w cieniu. Ośią wielką tej elipsy jest odcinek $E'' F'' \perp p''$ i równy odcinkowi $C' D'$; oś mała $G'' H''$ równa jest osi $A' B'$.

186. Cień prostej na kulę jest kołem, miejscem geometrycznym bowiem promieni światła, przechodzących przez prostą, jest płaszczyzna. Wyznaczenie cienia prostej na kulę sprowa-



Rys. 542.



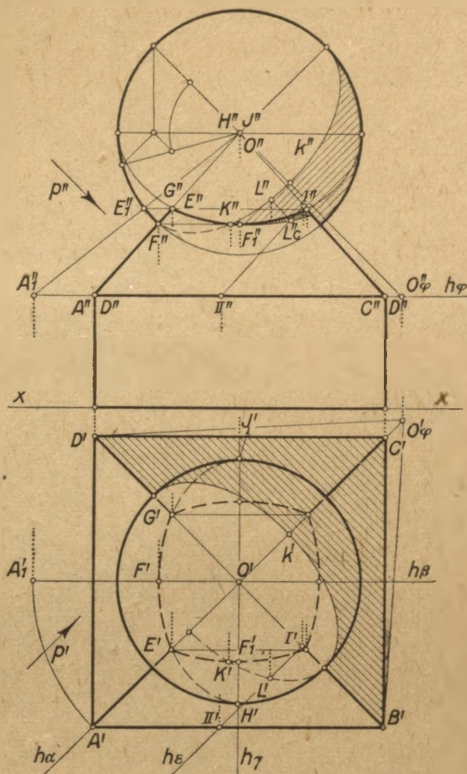
Rys. 543.

dza się więc do wykreślenia przekroju kuli płaszczyzną światła, przechodzącą przez tę prostą.

Na Rys. 543. wyznaczyliśmy cień odcinka RS na kulę. Płaszczyzna światła ε jest poziomo rzucająca, a rzut pionowy jej przekroju z kulą elipsą, styczną do zarysu kuli w punktach V'' i VI'' . Część tej elipsy, ograniczonej punktami Sc'' i Tc'' , jest rzutem pionowym cienia, jaki odcinek ST rzuca na kulę.

187. Przykłady.

a) Wyznaczyć cień zespołu, przedstawionego na Rys. 544. Linia przenikania kuli z ostrosłupem składa się z łuków czterech kół, których rzuty są elipsami. Wyznaczywszy cień własny k (k' k'') kuli, przystąpimy do wykreślenia cienia, jaki kula rzuca na ścianę ABO ostrosłupa. Linia tego cienia rzuconego jest łukiem elipsy, jaka powstanie z przecięcia walca świetlnego, przechodzącego przez koło k , z płaszczyzną ABO . Aby wyznaczyć cień np. punktu L (L' L'') koła k na ścianę ABO , poprowadziliśmy przez ten punkt promień światła i wyznaczyli, przy pomocy płaszczyzny poziomo rzucającej ε , jego punkt przebicia L_c z tą ścianą.

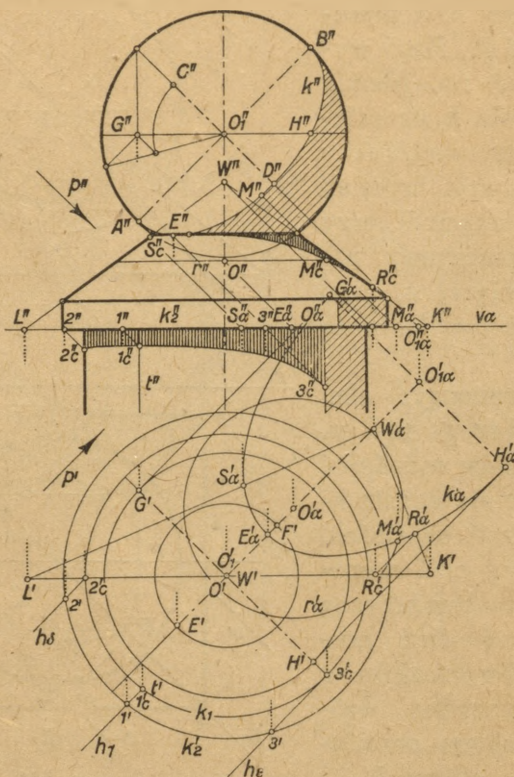


Rys. 544.

b) Wyznaczyć cień zespołu, podanego na Rys. 545. Kilka słów wyjaśnień wymaga jedynie konstrukcja cienia kuli na stożek. Wykreśliwszy cień rzucany k'_α kuli na płaszczyznę poziomą α i cień rzucany r'_α równoleżnika r na tę płaszczyznę, wrócimy z punktem przecięcia się M'_α elipsy k'_α i koła r'_α na równoleżnik r , otrzymując punkt $M_{c''}$. Przy pomocy cienia rzucanego $W'_\alpha K'$, tworzącej WK stożka, który przecina elipsę k'_α w punkcie R'_α , otrzymamy punkt R_c (R_c' $R_{c''}$) cienia, który leży na tworzącej konturowej stożka.

188. Cień powierzchni obrotowej. Cień własny powierzchni obrotowej jest linią stycznej walca promieni, opisanego na tej powierzchni. Na Rys. 546. powtórzyliśmy więc konstrukcję, opisaną szczegółowo w ust. 161. (por. Rys. 474.).

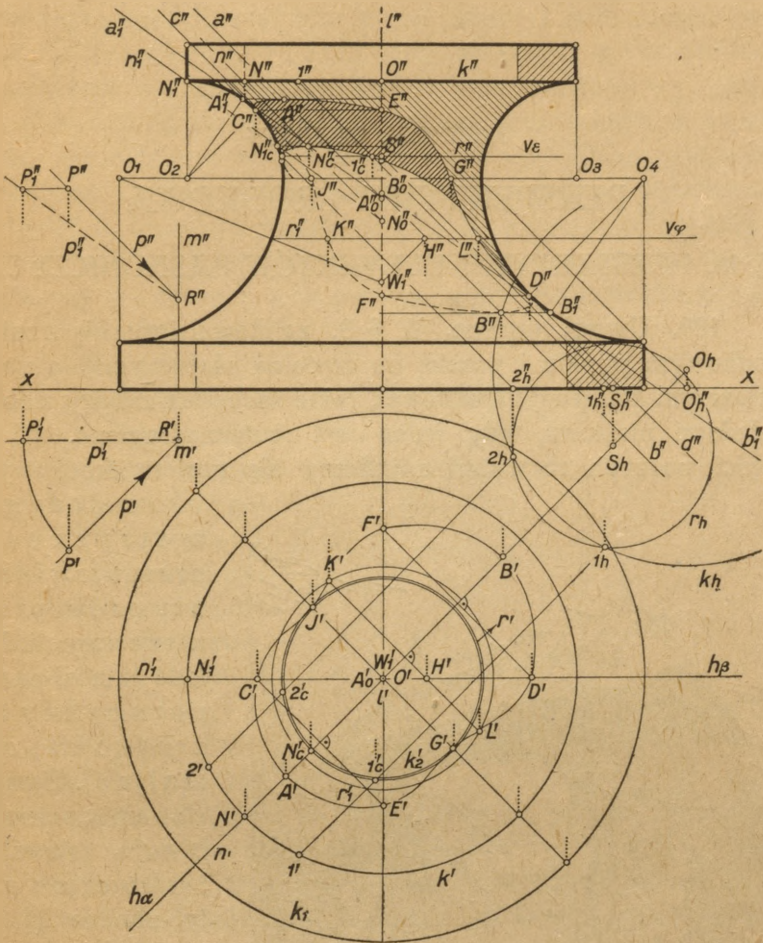
Jednak, prócz cienia własnego, posiada powierzchnia cień, jaki na nią rzuca koło k (k' k''). Aby wyznaczyć cień punktu N (N' N'') na powierzchnię, obróćmy go wraz z promieniem, który przez niego przechodzi, na płaszczyznę południka głównego β . Punkt N_1 (N_1' N_1'') rzuci cień N_{1c} na południk główny. Cień ten sprowadzimy zapomocą obrotu około osi powierzchni na płaszczyznę południka α , otrzymując tam punkt N_c (N_c' N_c'').



Rys. 545.

Dalsze punkty cienia koła k (k' k'') na powierzchnię znajdziemy (podobnie jak cień linii na stożek) przy pomocy cienia rzuconego. Cień koła k na rzutnię poziomą jest kołem kh , cień równoleżnika r (r' r'') kołem rh . Koła te przecinają się w punktach 1_h i 2_h . Te ostatnie są cieniami punktów 1 ($1'$ $1''$) i 2 ($2'$ $2''$) koła k (k' k'') na rzutnię poziomą. Promienie światła, przechodzące przez punkty 1 ($1'$ $1''$) i 2 ($2'$ $2''$), przecinają

równoleżnik r (r' r'') w punktach $1c$ ($1c'$ $1c''$) i $2c$ ($2c'$ $2c''$), które są cieniami pierwszych na powierzchnię. Tym sposobem, obie-



Rys. 546.

rając dalsze równoleżniki, otrzymamy żadaną ilość punktów krzywej, będącej cieniem koła k na powierzchnię.

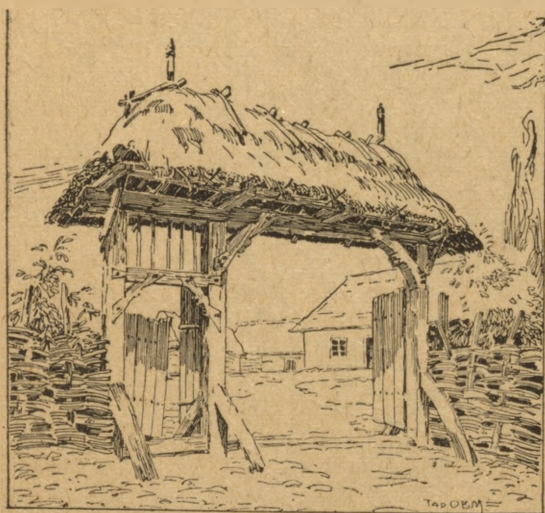
ROZDZIAŁ CZWARTY

PERSPEKTYWA ŚRODKOWA

§ 18. PERSPEKTYWA ELEMENTÓW ZASADNICZYCH

189. Uwagi ogólne. W § 9. zajmowaliśmy się rzutem środkowym punktu i prostej na dowolną płaszczyznę, a nadto związkami kolineacyi środkowej, jakie zachodzą między dwoma układami płaskimi, gdy jeden jest rzutem drugiego. W tej części naszych rozważań zajmiemy się rzutem środkowym,

jako metodą geometrycznego przedstawiania utworów przestrzennych. Metoda ta nosi nazwę perspektywy środkowej albo liniowej. Samem słowem „perspektywa” określają bardzo często rzuty ukośne (§ 6.), a więc metodę rzutów równoległych; dlatego, aby uniknąć nieporozumień, dodajemy przymiotnik „środkowa”. Określenie



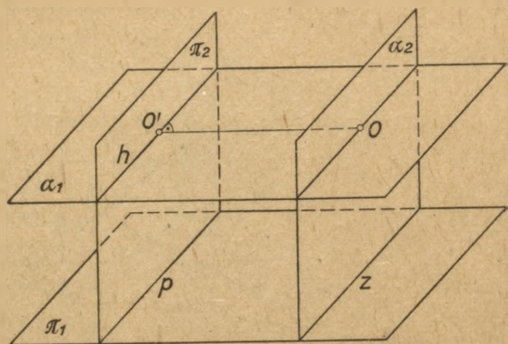
Rys. 547. Bramka do plebanii w Krasiejowie
koło Monasterzysk

(Rysunek prof. dr. Tad. Obmińskiego)

perspektywy środkowej mianem „liniowej” ma za zadanie podkreślić czysto geometryczny charakter tej metody w przeciwstawieniu do perspektywy malarskiej, gdzie uwzględniane

są ponadto momenty natury estetycznej, a także wpływ powietrza, barwy i oddalenia.

Przyjmijmy płaszczyznę poziomą π_1 , pionową π_2 (Rys. 548.) i dowolny punkt O , nie leżący na żadnej z tych płaszczyzn, a będący środkiem rzutu, albo jak się też mówi okiem. Płaszczyzna π_1 , zwana płaszczyzną podstawy, przecina płaszczyznę π_2 , stanowiącą płaszczyznę rzutów, a zwaną tłem, wzdłuż prostej podstawowej p . Płaszczyzna α_1 , przechodząca przez środek rzutów równolegle do π_1 , przecina tło w prostej h , którą nazywamy linią horyzontu lub krótko horyzontem. Rzut prostokątny O' środka rzutów na tło, nazywamy punktem głównym, a odległość środka rzutów od tła, a więc odcinek OO' , krótko oddaleniem. Płaszczyzna α_2 , równoległa do płaszczyzny π_2 , nosi nazwę płaszczyzny zniknięcia. Prosta z , wzdłuż której płaszczyzna zniknięcia przecina płaszczyznę podstawową, określamy mianem prostej zniknięcia. Odległość horyzontu od linii podstawowej, równą odległości środka rzutów od prostej zniknięcia, nazywamy wysokością horyzontu.

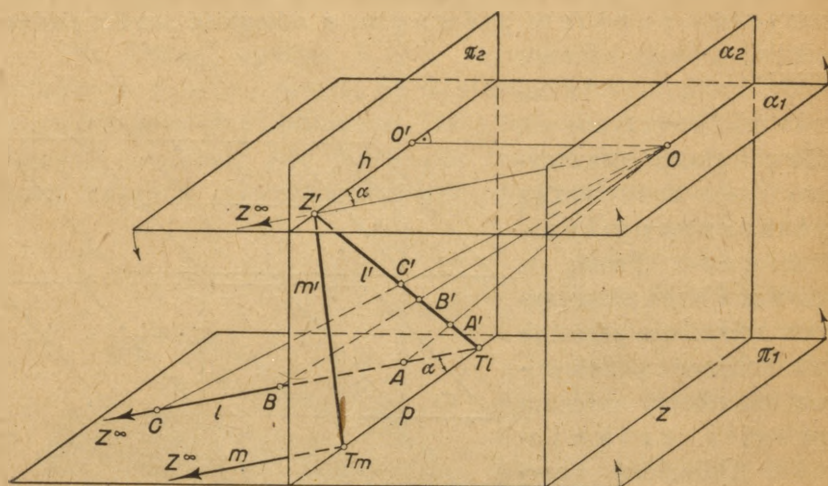


Rys. 548.

Porównując rozważania nasze o kolineacji¹⁾ (ust. 113.) z powyższymi określeniami, widzimy, że środek kolineacji odpowiada środkowi rzutów, oś kolineacji prostej podstawowej, oś wzajemna w_2 horyzontowi h , a oś wzajemna z_1 prostej zniknięcia z .

190. Perspektywa prostych, leżących na płaszczyźnie podstawowej. Rzut środkowy (perspektywiczny) prostej l , przyjętej na płaszczyźnie π_1 , jest krawędzią l' płaszczyzny, przechodzącej przez tę prostą i środek rzutów O , z tłem π_2 (Rys. 549.). Połączmy dowolny punkt A prostej l ze środkiem rzutów O , to punkt A' , w którym promień OA przebija tło, leży na prostej l' i jest rzutem środkowym punktu A . Prosta l'

określić więc można jako miejsce geometryczne rzutów środkowych wszystkich punktów prostej l . Perspektywę punktu niewłaściwego Z^∞ prostej l otrzymamy, prowadząc przez środek rzutów promień równoległy do prostej l i znajdując punkt przebicia tego promienia z tłem. Punkt ten, oznaczony na Rys. 549. literą Z' , leży na horyzoncie i nosi nazwę śladu zbiegu prostej l . Promień OZ' nazywać będziemy promieniem zbiegu prostej l . Przez punkt T_l , w którym prosta l przebija tło, przechodzi perspektywa l' tej prostej, a punkt ten nazywamy śladem tłowym prostej l .

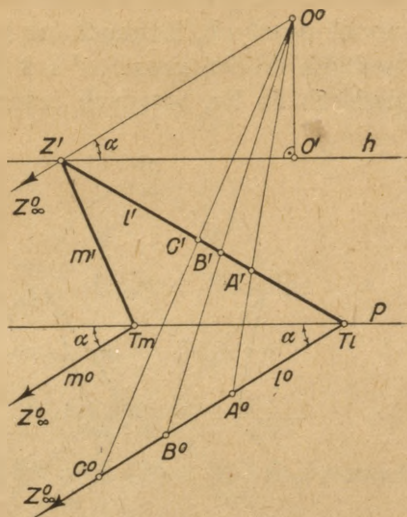


Rys. 549.

Jakkolwiek dwa dowolne punkty np. A' i B' wyznaczają prostą l' na tle, a więc także i prostą l na płaszczyźnie podstawowej, to jednak z reguły posługiwać się będziemy przy wyznaczaniu obrazów perspektywicznych prostych, a więc i położeń tych prostych w przestrzeni, ich śladami tłowymi i śladami zbiegów.

Przyjmijmy na płaszczyźnie π_1 prostą $m \parallel l$ i oznaczmy jej ślad tłowy literą T_m . Rzut środkowy punktu niewłaściwego Z^∞ , prostej m , jest punktem Z' . Proste równoległe, leżące na płaszczyźnie podstawowej, mają wspólny ślad zbiegu na horyzoncie. Ślady tłowe tych prostych leżą na linii podstawowej.

Obróćmy płaszczyznę α_1 około horyzontu h , a płaszczyznę π_1 około prostej p w kierunku wskazanym strzałkami tak, aby padły na tło (π_2), to wówczas otrzymamy obraz przedstawiony na Rys. 550., jeśli płaszczyznę tego rysunku przyjmiemy za tło. Punkt O^0 jest kładem środka rzutów na tło, $O^0 Z'$ kładem promienia zbiegu, a proste l^0 i m^0 kładem prostych l i m na tło. Proste l' i m' są rzutami środkowymi (perspektywami) prostych l i m . Jeżeli punkty $A^0, B^0, \dots$ przyjęte na prostej l^0 rzucimy z punktu O^0 na prostą l' , to otrzymane tam punkty $A', B', \dots$ są perspektywami punktów $A, B, \dots$ prostej l (porównaj Rys. 549.).

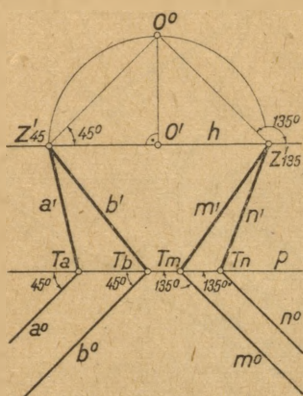


Rys. 550.

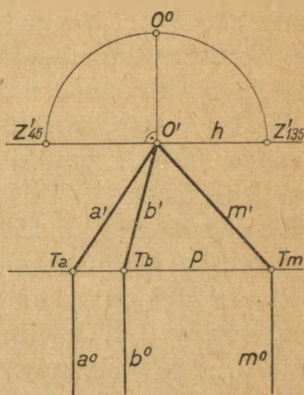
Z Rysunków 549. i 550. widoczne jest, że kąt nachylenia promienia zbiegu z linią horyzontu, równy jest kątowi, jaki prosta l , względnie proste do niej równoległe, a leżące na płaszczyźnie podstawy, zawierają z linią podstawową albo z tłem. Oczywiście też jest, że każdy punkt horyzontu jest śladem zbiegu prostych równoległych, a nachylonych do tła pod kątem równym kątowi nachylenia promienia zbiegu z tłem, względnie równym kątowi, jaki kład promienia zbiegu zawiera z horyzontem.

191. Punkty i koło oddalenia. Na szczególną uwagę zasługują ślady zbiegu Z'_{45} i Z'_{135} prostych, leżących na płaszczyźnie podstawy, nachylonych do tła pod 45° i 135° . Ślady te, leżące na horyzoncie (Rys. 551.), nazywamy punktami oddalenia. Ponieważ prostokątny trójkąt $O' O^0 Z'_{45}$ jest trójkątem równoramiennym i przystającym do trójkąta $O' O^0 Z'_{135}$, więc $O' Z'_{45} = O' Z'_{135} = O' O^0 = d$, czyli, że odległość punktu głównego od każdego z dwóch punktów oddalenia, równa jest odległości środka rzutów od tła. Koło, zakreślone promieniem d , przechodzące więc przez punkty oddalenia, zwie się kołem oddalenia.

192. Proste prostopadłe do tła. Z pojęcia śladów zbiegu wynika wprost, że ślad zbiegu prostych, leżących na płaszczyźnie podstawy, a prostopadłych do tła, jest punktem głównym. Proste a' , b' i m' (Rys. 552.) są rzutami środkowymi prostych a , b i m , prostopadłych do tła, a leżących na płaszczyźnie π_1 . Proste l' i m' na Rys. 553. są rzutami środkowymi prostych, leżących na płaszczyźnie podstawy, a prostopadłych do tła, proste n' i s' perspektywami prostych prostopadłych do tła, leżących jednak dowolnie w przestrzeni.



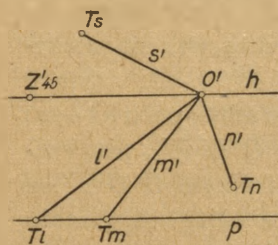
Rys. 551.



Rys. 552.

193. Zadania.

1) Wykreślić rzut środkowy kwadratu, leżącego na płaszczyźnie podstawowej, której kład na płaszczyznę rysunku jest dany.

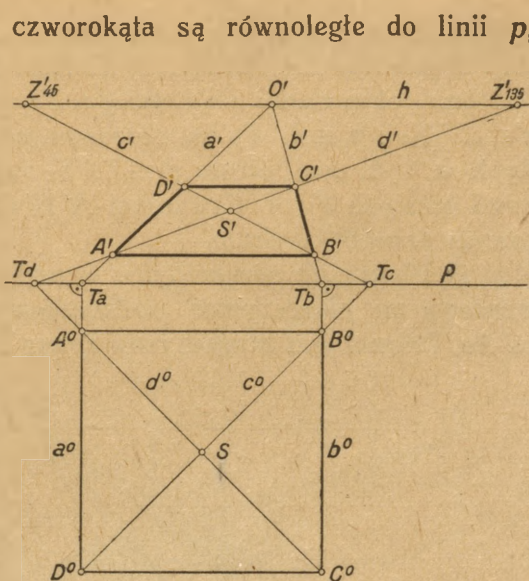


Rys. 553.

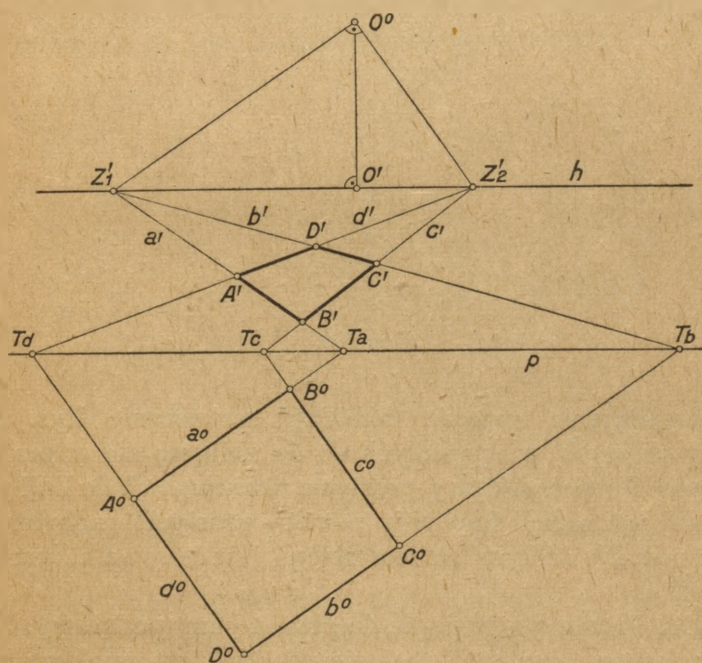
a) Para boków kwadratu jest prostopadła do linii podstawowej (Rys. 554.). Ślady tłowe T_a i T_b prostych a i b łączymy z punktem głównym i otrzymujemy rzuty środkowe tych prostych. Ślady tłowe T_c i T_d przekątnych kwadratu połączone, pierwszy z punktem oddalenia Z'_{45} , drugi z punktem oddalenia Z'_{135} , dają perspektywy prostych c , d i przecinają dwie poprzednio otrzymane proste w punktach A' , B' , C' i D' , które są perspektywami wierzchołków kwadratu. Boki $A'B'$

i $C'D'$ otrzymanego ślady łowe bowiem prostych $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ są punktami niewłaściwymi prostej p , a jak wiadomo, przez ślady te przejść muszą proste $\overline{A'B'}$ i $\overline{C'D'}$. Rzut środkowy kwadratu jest więc w tym przypadku trapezem. Wynika też stąd, że wykreśliwszy proste a' , b' i c' , otrzymamy punkty C' i D' , kreśląc przez B' i D' równoległe do p .

b) Kwadrat leży dowolnie na płaszczyźnie podstawowej (Rys. 555.). Promień,



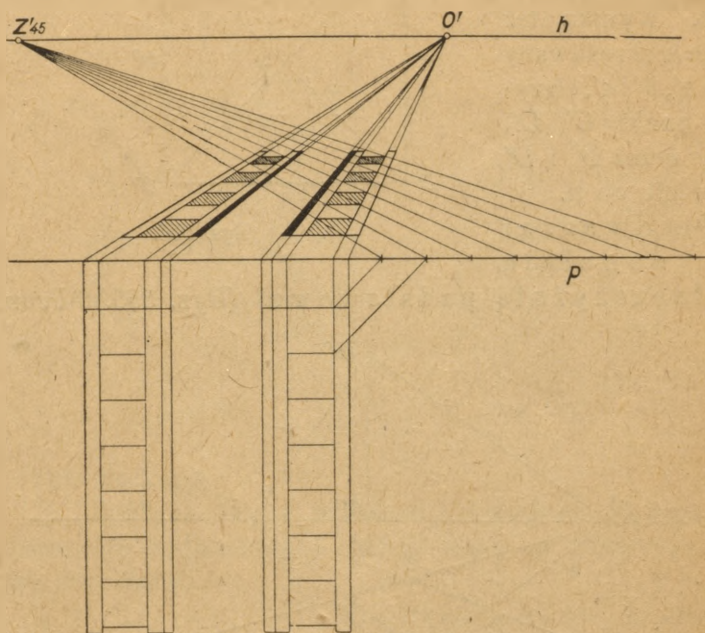
Rys. 554.



Rys. 555.

wykreślony z punktu O^0 równolegle do $a^0 \parallel b^0$ przecina horyzont w punkcie Z_1' , który jest śladem zbiegu prostych a i b . Podobnie otrzymamy ślad zbiegu Z_2' prostych c i d . Proste $a' \equiv Z_1' T_a$ i $b' \equiv Z_1' T_b$ są obrazami perspektywicznymi prostych a i b , zaś proste $c' \equiv Z_2' T_c$ i $d' \equiv Z_2' T_d$ perspektywami prostych c i d . Czworokąt $A' B' C' D'$ jest rzutem środkowym danego kwadratu.

2) Wykreślić perspektywę ornamentu geometrycznego, leżącego na płaszczyźnie podstawowej. Kład tej ostatniej na tło, którem jest płaszczyzna rysunku, jest dany.



Rys. 556.

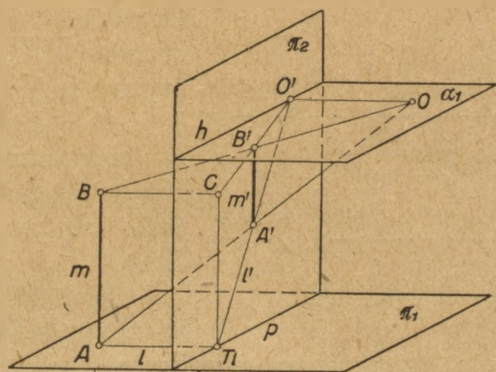
Rozwiązanie zadania tłumaczy dostatecznie Rys. 556. Obrazy prostych prostopadłych do tła zbiegają się w punkcie głównym O' ; perspektywy prostych równoległych do linii podstawowej wyznaczyliśmy przy pomocy prostych, nachylonych do tła pod 45° , których śladem zbiegu jest dany na horyzoncie punkt Z'_{45} .

194. Proste prostopadłe do płaszczyzny podstawy. Ślad zbiegu każdej prostej równoległej do tła jest punktem nie-

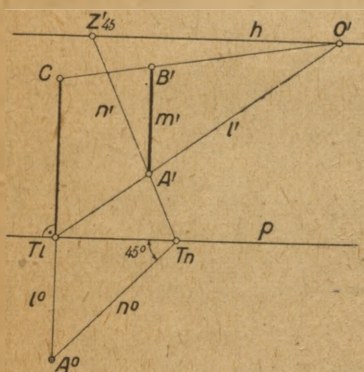
właściwym, którego kierunek określony jest kierunkiem tej prostej. Aby wykreślić perspektywę odcinka $\overline{AB}$ (Rys. 557.), połączmy punkty A i B ze środkiem rzutów O , a następnie poprowadźmy przez nie prostopadłe do płaszczyzny tłowej.

Perspektywa prostej $l \perp p$ jest prostą l' , łączącą punkt T_l z punktem O' . Punkt A' , w którym promień $\overline{AO}$ przecina prostą l' , jest

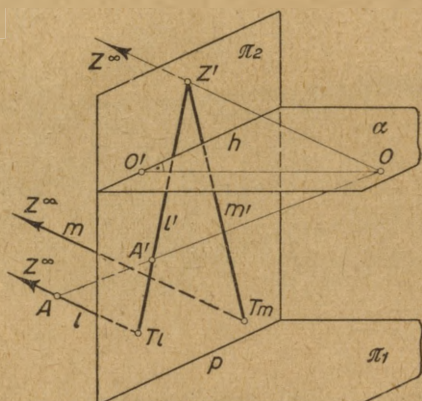
rzutem środkowym punktu A . Niechaj prostopadła, wykreślona z punktu B do tła, przebiega go w punkcie C , to punkt przecięcia się $\overline{BO}$ i $\overline{CO'}$ jest perspektywą punktu B . Odcinek $\overline{A'B'}$, prostopadły do linii podstawy p , jest rzutem środkowym odcinka $\overline{AB}$, na płaszczyznę π_2 . Zauważmy jeszcze, że odcinek $\overline{CT_l}$ jest rzutem prostokątnym odcinka $\overline{AB}$ na tło.



Rys. 557.



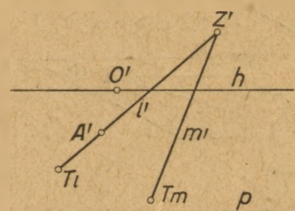
Rys. 558.



Rys. 559.

Wykonajmy kład płaszczyzny podstawy π_1 na tło, którym niechaj będzie płaszczyzna rysunku. Rzut poziomy odcinka jest punktem A^0 (Rys. 558.), rzut prostokątny na tło

odcinkiem $T_l C$. Przez punkt A^0 kreślimy prostą n^0 , pod 45° do linii podstawowej p . Rzut środkowy n' prostej n^0 jest prostą, łączącą ślad tłowy T_n z danym śladem zbiegu Z'_{45} . Proste l' i n' wyznaczają szukany punkt A' . Punkt B' leży na promieniu $C O'$, przyczem $A' B'$ jest równoległe do $C T_l$.



Rys. 560.

Odcinek $A' B'$ jest rzutem środkowym odcinka $A B$, prostopadłego do płaszczyzny podstawy.

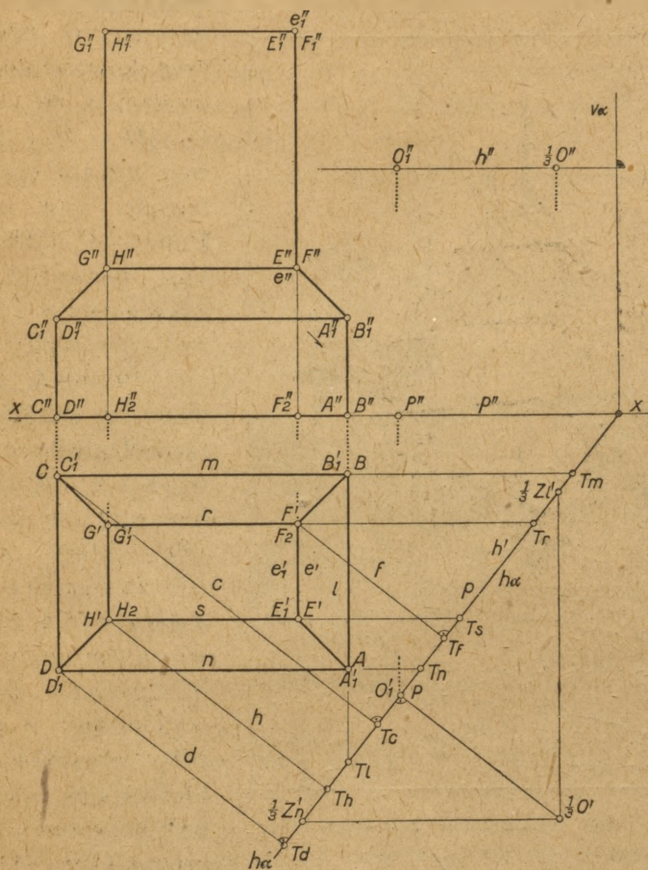
195. Proste dowolnie położone w przestrzeni. Ślady tłowe i ślady zbiegu takich prostych leżą poza obrybem linii podstawy i horyzontu (Rys. 559.).

Rys. 560. jest obrazem perspektywicznym dwóch prostych równoległych, nie leżących na płaszczyźnie podstawy i dowolnie nachylnych do tła. Punkt A' jest rzutem środkowym punktu, który leży na prostej l .



Rys. 561. Wschodnia ściana rynku w Pruchniku koło Jarosławia
(Rysunek prof. dr. Tad. Obmińskiego)

196. Perspektywa jako metoda pośrednia. Wykreślenie rzutu środkowego, z danych rzutów prostokątnych, stanowi ważne zadanie geometryczne, które na jednym przykładzie rozpatrzmy. W przeciwstawieniu do rozważań poprzednich metoda zadania naszego, którego podstawą są dane rzuty prostokątne, jest metodą pośrednią.



Rys. 562.

Rys. 562. przedstawia zespół geometryczny dwóch graniastosłupów i jednego ostrosłupa. Poziomo rzucająca płaszczyzna α jest tłem, prosta h (h' h'') horyzontem, a punkt O_1 (O_1' O_1'') punktem głównym. Środek rzutów leży na prostopadłej, wyprowadzonej w punkcie O_1 do płaszczyzny tła. Aby rysunek perspektywiczny robił właściwe wrażenie, musimy

oddalenie oka od tła przyjąć dostatecznie wielkie. Zasadą praktyczną jest, aby oddalenie to nie było mniejsze od półtora-krotnego największego wymiaru przedstawionego rysunkiem przedmiotu. Względ na ograniczoną płaszczyznę rysunku nie pozwala zazwyczaj na oznaczenie rzutów oka, posługujemy się więc zazwyczaj t. zw. zredukowanym oddaleniem oka.



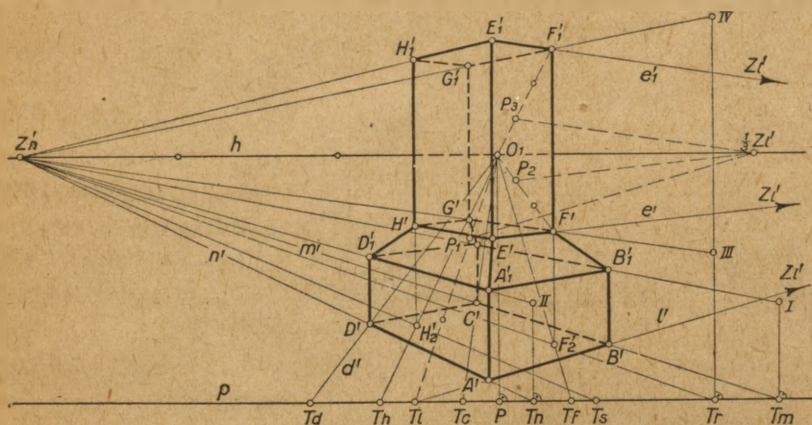
Rys. 563. Kapliczka w Worochcie
(Rysunek prof. dr. Tad. Obmińskiego)

W naszym przykładzie przyjęliśmy oddalenie zredukowane do jednej trzeciej, t. zn. odcinek $O_1, \frac{1}{3}O = O_1', \frac{1}{3}O'$ wyraża trzecią część odległości oka od tła. Punkt $\frac{1}{3}O (\frac{1}{3}O', \frac{1}{3}O'')$ nosi nazwę zredukowanego środka rzutów (oka).

Promień, wykreślony z punktu $\frac{1}{3}O'$, równoległe do prostych $n \parallel s \parallel r \parallel m$, przecnie horyzont w punkcie $\frac{1}{3}Zn'$, który stanowi tak zwany zredukowany ślad zbiegu wiązki promieni równoległych; promień wykreślony z punktu $\frac{1}{3}O'$, prostopadłe do pierwszego, wyznacza na horyzoncie drugi zredukowany ślad zbiegu $\frac{1}{3}Zl$, a mianowicie

dla wiązki promieni o kierunku prostopadłym do pierwszej. Przedłużmy proste m, n, r, s aż do przecięcia się ze śladem h_α i oznaczmy punkty przecięcia literami T_m, T_n, T_r, T_s . Prosta l przecina ślad h_α w punkcie T_l , a prostopadłe c, d, h, f wykreślone do h_α wyznaczają na niej punkty T_c, T_d, T_h, T_f . Przygotowawszy tak Rys. 562., przystąpić możemy do wykreślenia rzutu środkowego.

Przyjmijmy więc linię podstawy p i linię horyzontu h (Rys. 564.), uwzględniając wysokość horyzontu, równą odległości prostych równoległych p'' i h'' . Na horyzoncie przyjmijmy punkt główny O_1 , a jego rzut prostokątny na linię podstawy p oznaczmy literą P (porównaj Rys. 562.). Odcinek O_1I' , $\frac{1}{3}Zn'$ przenieśmy trzykrotnie od punktu O_1 na lewo, otrzymując ślad zbiegu Zn' wiązki prostych, równoległych do osi rzutów x . Odcinek O_1I' , $\frac{1}{3}Zl'$, przeniesiony na prawo od punktu głównego O_1 , wyznaczy na horyzoncie zredukowany ślad zbiegu $\frac{1}{3}Zl'$ prostych prostopadłych do rzutni pionowej. Z kolei przenieśmy na linię podstawy p szereg punktów T_c, T_l, T_h, T_d i T_n, T_f, T_s, T_r, T_m , znajdujących się na podstawie $h\alpha$



Rys. 564.

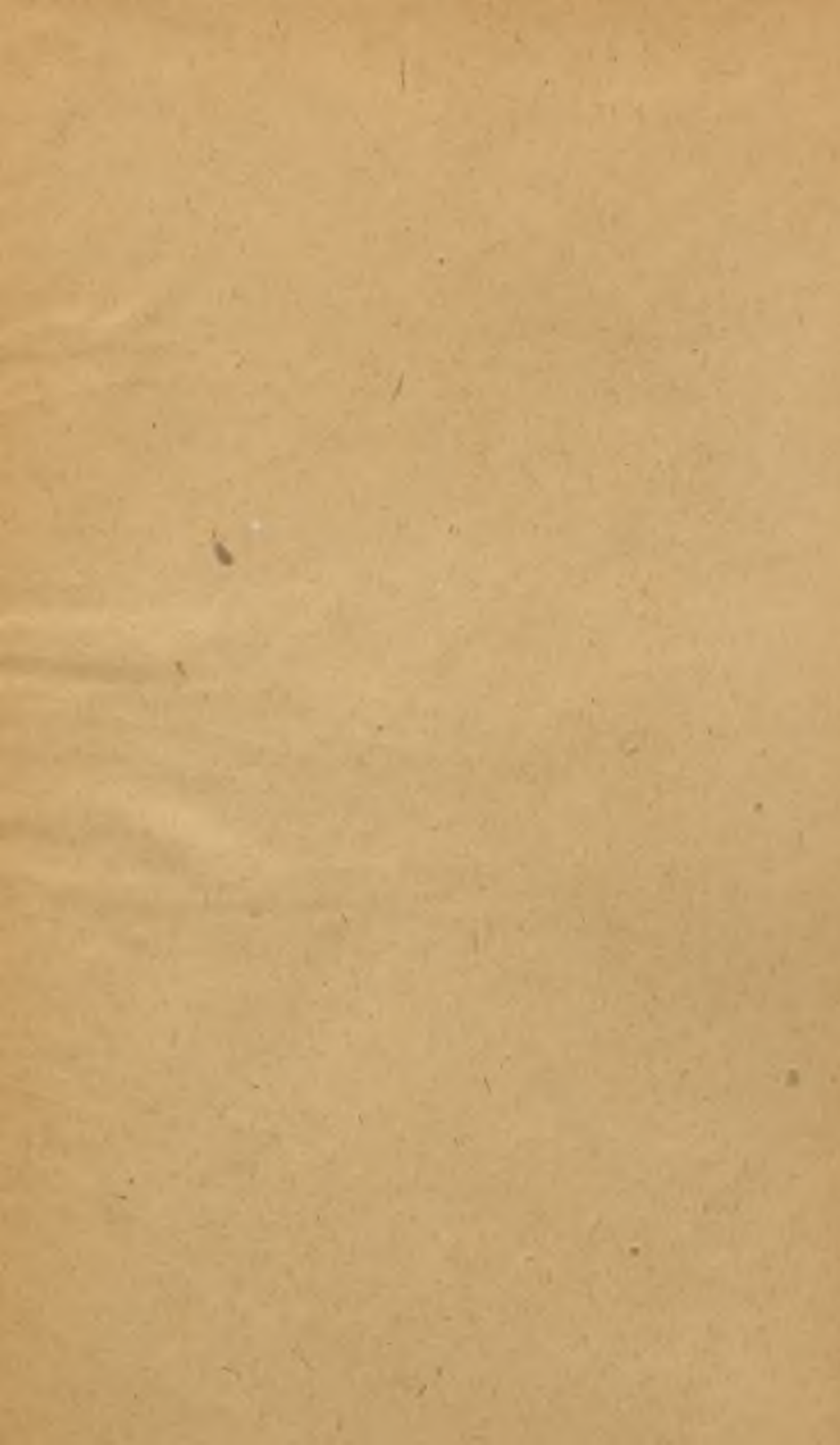
w Rys. 562., przyczem punkt wyjścia stanowi punkt P . Ślady łowe, jakimi są punkty T_m, T_r, T_s i T_n , łączymy ze śladem zbiegu Zn' , otrzymując perspektywy prostych m, n, r, s . Prosta d' , łącząca ślad łowy T_d z punktem głównym O_1 , jest rzutem środkowym prostej d , poprowadzonej z punktu D (DD') prostopadle do tła. Proste n' i d' przecinają się w punkcie D' , który jest rzutem środkowym punktu D ; prosta $T_c O_1$ przecina prostą m' w punkcie C' . Odcinek $C'D'$ jest perspektywą krawędzi CD . Połączmy punkt T_l z punktem O_1 , a odcinek $O_1 T_l$ podzielmy na trzy równe części. Punkt podziału P_1 połączmy ze śladem zbiegu $\frac{1}{3}Zl'$, a przez punkt T_l poprowadźmy równoległą l' do prostej $P_1, \frac{1}{3}Zl'$.

Prosta l' jest perspektywą prostej l (patrz Rys. 562.), a odcinek $A'B'$ rzutem środkowym boku AB . W istocie bowiem:

$$\Delta O_1 T_1 Z_1' \sim \Delta O_1 P_1 \frac{1}{3} Z_1'.$$

W punktach A', B', C', T_m i T_n wykreślimy prostopadłe do prostej p , odmierzymy $T_m I = T_n II = B'' B_1''$, a punkty I i II połączymy ze śladem zbiegu Z_n' . Tym sposobem otrzymamy perspektywę $A_1' B_1' C_1' D_1'$ prostokąta $A_1 B_1 C_1 D_1$. W analogiczny sposób wyznaczymy punkty F_2' i H_2' , następnie czworokąt $E' F' G' H'$, a wreszcie $E_1' F_1' G_1' H_1'$.







M 52786/1

UP - Kraków BG



1050284283

