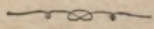


BIBLIOTEKA NAUK MATEMATYCZNYCH

I.

Dr. Karol Hertz.



KURS GEOMETRYI

zastosowany do użytku szkół męskich i żeńskich.

1. PLANIMETRYJA.

Księgozbiór

A. K. ZARZECKIEGO

N 601.



WARSZAWA

Nakładem Lesmana i Świszczowskiego,

Mazowiecka № 14.

—
1882.

Дозволено Цензурою
Варшава, 12 Мая 1882 года.



90587

w Drukarni J. Goldmanna, Muranowska Nr. 24.

BIBL. WSP
1968-D. 322-3

513(075)

Spis rzeczy.

Errata.
Przedmowa.

Wstęp.

	Str.
I. Ciało, przestrzeń, wymiary, wielkość, przedmiot Geometrii .	1
II. Powierzchnia, linija, punkt	2
III. Linija prosta i krzywa, płaszczyzna i powierzchnia krzywa, podział geometrii	4

Część pierwsza.

Planimetria.

I. O liniach prostych.

1. Linija prosta	9
2. Długość linii prostej	13
3. O kątach	17
4. Miara kątów	27
5. Linije równoległe i niektóre twierdzenia o kątach	33

II. O wielokątach.

1. Trójkąty	40
2. Przystawanie trójkątów	45
3. Własności prostokątów i pochyłych	55
4. O czworokątach	59
5. O wielokątach	64
6. Rozwiązania niektórych zadań geometrycznych	68

III. Koło.

1. Cięciwy w kole	81
2. O stycznych i cięciwach równoległych	89
3. Miara kątów w kole	92
4. Położenie kół względem siebie	98
5. Figury wpisane w koło i opisane na niem	101
6. Obliczanie długości okręgu i łuku	107

IV. Obliczanie pól (powierzchni).

1. Pola niektórych figur	111
2. Przemiany figur	126

V. Proporcjonalność odcinków i podobieństwo figur.

1. Proporcjonalność odcinków	139
2. Podobieństwo trójkątów	144
3. Twierdzenia, wypływające z podobieństwa trójkątów	150
4. Podobieństwo wielokątów	157
5. Niektóre zadania, odnoszące się do wielokątów foremnych .	161

D o d a t e k.

Obliczenie π	164
----------------------------	-----

ERRATA.

<i>str.</i>	<i>w.</i>	<i>zamiast</i>	<i>powinno być</i>
18	16 z góry	większą	mniejszą
21	18 „	kątów	kątowi
23	fig. 42 na przecięciu się linii powinna być litera <i>A</i>		
25	17 i 23 z góry	przywiedzenia	sprowadzenia
28	8 z dołu	którego	każdego
31	12 z góry	1 ^o kątowi	1 ^o kątowemu
53	9 „	więc kąt <i>DEF</i>	więc kąt <i>ABC</i>
—	10 „	<i>EF</i>	<i>DF</i>
62	15 z góry	<i>prostokątne</i>	<i>przekątne</i>
97	11 z dołu	na tych cięciwach	na tej cięciwie
123	7 z dołu	podstawa zaś 1,5 m. kw.	podstawa zaś 1,5 m.
125	10 z góry	$b=2,18$ m.	$b=2,18$ m.
127	1 z dołu	$— \sqrt{1369}=37$	$= \sqrt{1369}=37$
135	2 „	czworok. <i>ADEDBA</i>	czworok. <i>AEDBA</i>
143	9 z góry	kąta <i>A</i>	kąta <i>B</i>

Przedmowa.

Wiadomo, jak niezbędną jest znajomość geometryi przy gruntowniejszem nieco studyjowaniu niektórych gałęzi wiedzy przyrodniczej. Znajomość fizyki, mechaniki, kosmografii i fizyologii jest niemożliwą bez znajomości geometryi. Potrzeba więc krótkiego podręcznika tej nauki, w którymby w sposób przystępny wyłożone były zasady geometryi, czuć się daje szczególnie teraz, gdy nauki przyrodnicze stały się niezbędnymi dla każdego człowieka ukształconego. Literatura nasza posiada wprawdzie bardzo wiele cennych podręczników geometryi, lecz książki te ułożone według planu Legendre'a, reformatora geometryi Euklidesa, są, jak każdemu wiadomo, zbyt trudne i suche dla początkujących. Geometryja Euklidesa jest wprawdzie wzorem ścisłości logicznej i pomnikiem genialności wielkiego geometry, lecz dla ocenienia jej zalet trzeba być geometrą; dla początkującego zaś przedstawia ona prawie nieprzezwyciężone trudności, Euklides bowiem nie napisał swego wiekopomnego dzieła na to, aby 2,000 lat po jego śmierci dzieci trzynastoletnie uczyły się z niego początków geometryi. Wprawdzie niektórzy uczeni francuscy, angielscy i niemieccy, jak Legendre, Wright, Willock, Cooley, Löser, Focke i Kraz znacznie zmodyfikowali dzieło mistrza, lecz pomimo tego, podręczniki, dziś powszechnie w użyciu będące, przedstawiają dość wielkie trudności dla uczniów średniego uzdolnienia, jak o tem nauczyciele matematyki doskonale wiedzą. Na zachodzie Europy starano się usunąć tę trudność przez wprowadzenie kursu geometryi, mającego na celu zaznajomienie uczniów z formami geometrycznymi i ich głównymi własnościami bez użycia ścisłych dowodzeń. Metoda ta przynosi wprawdzie wielkie korzyści, lecz, mojem zdaniem, daje się ona tylko zastosować wtedy, gdy poprzedza systematyczny wykład geometryi. Jeżeli zaś na niej jedynie ograniczymy cały wykład tej nauki, to uczeń nie nabędzie tych właśnie wiadomości geometrycznych, które są niezbędne w zastosowaniach, i oprócz tego zоста-

nie pozbawionym korzyści, jakie przynoszą ściśle logiczne rozumowania, cechujące metodę Euklidesa. U nas taki sposób wykładu geometryi używanym jest prawie we wszystkich gimnazyjach żeńskich, tak że młodzież żeńska, która po ukończeniu szkół chciałaby się poświęcić jakiemuś zawodowi profesjonalno-uczonemu (np. medycynie lub nauczycielstwu), musi rozpocząć naukę na nowo. Oprócz tego także w gimnazyjach męskich, z powodu ściśłego trzymania się metody Legendre'a, postępy w tej ważnej gałęzi matematyki są stosunkowo niewielkie, szczególnie w niższych klasach. Z tych to względów ułożyłem niniejszy krótki podręcznik geometryi, w którym, obok ścisłości matematycznej, starałem się dowodzenia, o ile można, uczynić dostępnymi i krótkimi. Przy napisaniu tej książki miałem także na uwadze domowe kształcenie i szkoły żeńskie, i dla tego może ona być zastosowaną do wykładów w gimnazyjach męskich i żeńskich, szczególnie w dwu pierwszych latach wykładu geometryi, gdyż obejmuje całkowity kurs tej nauki. Znając z doświadczenia całą ważność stosownie dobranych przykładów i zadań, umieściłem mnóstwo prostych zadań na końcu każdego rozdziału, poczynając od pierwszego, by tym sposobem zachęcić i przyzwyczaić ucznia do samodzielnej pracy umysłowej.

Jeżeli książka moja zasłuży na uznanie, postaram się ułożyć cały szereg podobnych podręczników z dziedziny matematyki czystej i stosowanej.

Karol Hertz.

Warszawa d. 3 Maja 1882.

WSTĘP.

I. BRYŁA.—PRZESTRZEŃ.—WYMIARY.— PRZEDMIOT GEOMETRYI.

1. **Ciało** lub **bryła**. Każdy przedmiot istniejący w przyrodzie nazywamy *ciałem* lub *bryłą*. Ciałami więc są: książka, katedra, kałamarz, pióro, tablica, kreda i t. p.

2. **Przestrzeń**. Z codziennego doświadczenia wiemy, że ciała możemy dowolnie przenosić z jednego miejsca na drugie. Ośrodek nieograniczony, w którym ciała się znajdują i poruszają, nazywamy *przestrzenią*. Przestrzeń jest *rozciągłością nieograniczoną*.

Każde ciało zajmuje pewne *miejsce* w przestrzeni, czyli jest *ograniczoną częścią przestrzeni*.

3. **Wymiary**. Każde ciało może być mierzonym *wzdłuż*, *wszerz* i *wzwyż* i dla tego powiadamy, że każde ciało ma trzy wymiary: *długość*, *szerokość* i *wysokość* czyli *głębokość*. Ponieważ ciało stanowi *dowolną* część przestrzeni, więc i przestrzeń ma trzy wymiary.

4. **Wielkość przestrzenna**. Ponieważ każde ciało może być powiększonym, zmniejszonym i mierzonym za pomocą stosownie dobranej jednostki, więc ciało jest *wielkością*, a że stanowi część przestrzeni i ma trzy wymiary, więc jest *wielkością przestrzenną o trzech wymiarach*.

5. **Przedmiot geometryi**. Geometrią jest nauką o przestrzeni, porównywa ona części przestrzeni pomiędzy sobą w celu zbadania ich własności i związków, pomiędzy niemi zachodzących.

Bada ona prawa rządzące w przestrzeni i wynajduje środki i prawa, za pomocą których części przestrzeni dają się najłatwiej porównywać ze sobą.

Uwaga. Ciała nas otaczające, czyli tak nazwane *ciała fizyczne*, oprócz własności zajmowania pewnej części przestrzeni, czyli rozciągłości, mają jeszcze inne własności, jako-to: barwę, twardość, ciężkość i t. p. Oderwijmy w myśli od fizycznego ciała wszystkie jego własności i zostawmy mu tylko własność rozciągłości, a otrzymamy to, co ciałem *geometrycznem* lub *matematycznym* nazywamy. Szczególnie ważnem dla geometryi jest odrywanie uwagi od nieprzenikliwości i podzielności ciał. Ciała fizyczne, jak wiadomo, nie mogą jednocześnie zajmować jednego i tego samego miejsca w przestrzeni i podzielność ich ma granice, gdyż fizycy przyjmują, że każde ciało składa się z cząstek niepodzielnych, z atomów. Dla badań zaś geometrycznych przyjmujemy, że ciała matematyczne są przenikliwe, to jest dwa ciała mogą jednocześnie zajmować jedno i to samo miejsce w przestrzeni i są podzielne bez granic.

6. Pytania. Co nazywamy ciałem? Przykłady na ciała. Co nazywamy przestrzenią? Ile wymiarów ma ciało? Wskazać wymiary pokoju, tablicy, książki i globusu? Czy ciała są wielkościami i jakimi? Jaki jest przedmiot geometryi? Czem się różnią ciała matematyczne od fizycznych?

II. POWIERZCHNIA.—LINIJA.—PUNKT.

7. Powierzchnia. Ponieważ ciało jest ograniczoną częścią przestrzeni, więc każde ciało ma granice oddzielające je od reszty przestrzeni; pokój np. ograniczony jest z dołu podłogą, z góry—sufitem, po bokach—ścianami.

Weźmy ciało znane każdemu z życia powszedniego i mające kształt skrzynki ze wszech stron zamkniętej, i którego wszystkie trzy wymiary są jednakowe. Ciało takie, bez względu na materiał, z którego jest zrobione, nazywa się *sześcianem* (fig. 1), gdyż jest ograniczone *sześcioma* ścianami. Ściany te, oddzielające sześcian

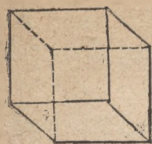


Fig. 1.

od przestrzeni go otaczającej, stanowią *powierzchnię sześcianu* i każda z nich nazywa się *kwadratem*.

Książka, globus, ołówek, kałamarz i wogóle każde ciało mają swoje powierzchnie. *Powierzchnię* więc nazywamy *granicę oddzielającą ciało od otaczającej je przestrzeni*.

Zupełnie tak samo jak ciało nie może istnieć bez powierzchni, tak samo powierzchnia nie może istnieć bez ciała, które ogranicza. Możemy jednak oderwać uwagę od ciała i rozważać tylko powierzchnię, którą ono jest ograniczone.

Z samego określenia powierzchni wynika, że ona *ma tylko dwa wymiary: długość i szerokość*; najcieńszy arkusz papieru nie jest powierzchnią, lecz ciałem, gdyż ma pewną grubość. Z tego, cośmy wyżej powiedzieli, wypada jeszcze, że *powierzchnia jestto rozciągłość o dwu wymiarach*.

8. Linija. Każda powierzchnia może się składać z oddzielnych części, albo też można sobie przedstawić powierzchnię rozdzieloną na części. Tak np. widzieliśmy, że powierzchnia sześcianu składa się z sześciu oddzielnych części, nazwanych ścianami. W powierzchni ołówka możemy widocznie rozróżnić trzy oddzielne części: boczną, wierzchnią i dolną. Nakoniec weźmy powierzchnię globusa: ona nie składa się z części, bo stanowi jedną całość, lecz nie nam nie przeszkadza wyobrazić sobie powierzchnię kuli rozdzieloną na dwie części, na dwie półkule.

To, co oddziela jedną część powierzchni od drugiej, czyli granica pomiędzy dwiema częściami powierzchni, nazywa się liniją. Tak np. każda ściana sześcianu ograniczona jest czterema linijami, nazwanymi *krawędziami* sześcianu; w ołówku powierzchnia boczna oddzieloną jest od powierzchni dolnej i górnej dwiema linijami; w powierzchni globusa granica oddzielająca dwie jej części, na które wyobraziliśmy ją sobie rozdzieloną, będzie liniją.

Z określenia linii wypada, że ona ma tylko jeden wymiar — *długość*, szerokości i grubości linija nie ma; linije nie mogą istnieć bez powierzchni, najcieńsza nić nie jest liniją lecz ciałem; również

linija, nakreślona na tablicy krêdą, lub na papierze ołówkiem, nie jest linią matematyczną, gdyż linije te utworzone są z cząstek krêdy lub grafitu.

Z tego, cośmy wyżej powiedzieli, wynika, że linija jest *rozciągłością jednowymiarową*.

9. Punkt. Każdą linię możemy sobie wyobrazić rozdzieloną na części. To miejsce, gdzie się kończy jedna część linii i zaczyna się druga, nazywa się *punktem*. Innemi słowy: *punkt jestto granica dwu części linii*.

Z tego określenia wypada, że *punkt nie ma żadnego wymiaru*.

Jeśli na papierze lub na tablicy nakreślimy punkt, to on nie będzie punktem matematycznym, lecz małym ciałem, mającem trzy wymiary; jest więc tylko uzmysłowieniem punktu matematycznego.— Punkty oznaczają się zwykle literami, jak np. na (fig. 2) oznaczono cztery punkty: *A*, *B*, *C* i *D*.

A

B

C

D

Fig. 2.

10. Pytania. Z jakich części składa się powierzchnia pokoju lub sześcianu? Z jakich części składa się powierzchnia wałka? Wskażcie linije na książce? Wskażcie linije na ołówku? Co nazywamy powierzchnią i ile ma wymiarów? Co nazywamy linią i ile ma wymiarów? Co nazywamy punktem i ile ma wymiarów?

III. LINIJA PROSTA I KRZYWA.—PŁASZCZYZNA I POWIERZCHNIA KRZYWA.—PODZIAŁ GEOMETRYI.

11. Tworzenie się linii. Jeżeli się punkt w przestrzeni porusza, to droga, którą przebył, daje nam wyobrażenie linii.

12. Linija prosta. Jeżeli się punkt wciąż w jednym i tym samym kierunku porusza, to linija tym sposobem utworzona nazywa się *liniją prostą*. Krawędzie sześcianu, nić naprężona, krawędź linijału dają nam pojęcie o liniach prostych.

13. Płaszczyzna. Powierzchnia, po której w dowolnym kierunku dadzą się prowadzić linije proste, nazywa się *plaską* lub *plaszczyzną*. Do ściany pokoju lub sześcianu można w dowolnym

kierunku przyłożyć linijkę krawędzią i krawędź ta ściśle przystanie do powierzchni ściany wszystkimi swymi punktami, a że krawędź linijalu przedstawi linię prostą, więc ściany pokoju lub sześcianu wyobrażają płaszczyznę.

14. Linija prosta nieograniczona i odcinek prostej. Linije proste, będące krawędziami sześcianu, mają określoną długość, lecz nie nam nie przeszkadza wyobrazić sobie linię prostą przedłużoną do nieskończoności z obu stron punktu dowolnie na niej obranego. Odwrotnie, na każdej nieograniczonej prostej możemy odciąć jakąś część; część ta będzie ograniczoną dwoma punktami i często ją nazywają *odcinkiem prostej*. Taki odcinek oznaczamy zwykle dwiema literami postawionemi na jego krańcowych punktach. Np. linija AB (fig. 3).

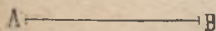


Fig. 3.

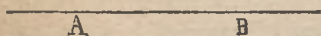


Fig. 4.

Takim samym sposobem oznaczamy też linię prostą nieograniczoną, stawiając dwie litery obok dwu dowolnych jej punktów. — Np. linija AB (fig. 4).



Fig. 5.

15. Linija łamana. Linija składająca się z części linij prostych, nie leżących w jednym kierunku, nazywa się *liniją łamaną* (fig. 5).

16. Powierzchnią łamaną jest powierzchnia utworzona z części różnych płaszczyzn.



Fig. 6.

17. Linija krzywa. Jeżeli punkt wśród ruchu swego wciąż zmienia kierunek, to obiega on linię, którą *liniją krzywą* nazywamy (fig. 6).

18. Powierzchnia krzywa. Wyobraźmy sobie ciało mające kształt



Fig. 7.

wałka (fig. 7); takie ciało nazywa się *walcem*.— Widzimy, że do górnej i dolnej jego powierzchni *A* i *B* możemy przykładać w dowolnych kierunkach krawędź linijału i ta zupełnie do nich przystaje bez żadnej próżni; wypada stąd, że walec ograniczony jest z dołu i z góry płaszczyznami. Jeśli zaś krawędź linijału przykładać będziemy do powierzchni bocznej walca, to zobaczymy, że ona w jednym tylko kierunku do niej przystaje, w każdym zaś innym kierunku krawędź linijału dotyka się powierzchni bocznej walca bardzo małą tylko częścią. Wypada stąd, że powierzchnia boczna walca nie jest płaszczyzną; taka powierzchnia nazywa się *powierzchnią krzywą*.



Fig. 8.

Widzimy, że linije oddzielające powierzchnię boczną walca od powierzchni górnej i dolnej są linijami krzywymi. Krzywe te linije nazywają się *okręgami kół*, a części płaszczyzny niemi ograniczone *kołami* (fig. 8).

Weźmy jeszcze ciało mające kształt głowy cukru (fig. 9); takie ciało nazywa się *stożkiem*.

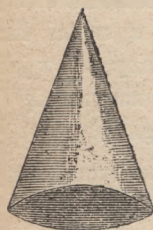


Fig. 9.

Z dołu ciało to ograniczone jest płaszczyzną, jak się o tem łatwo przekonać możemy, przykładając do tej części powierzchni stożka linijał. Płaszczyzna ta nazywa się *podstawą stożka*. Ku górze stożek zakończony jest punktem, który *wierzchołkiem* nazywamy. Przykładając do powierzchni bocznej stożka krawędź linijału, widzimy, że ona przystaje do tej powierzchni tylko w kierunku idącym od wierzchołka do podstawy stożka, w innych zaś kierunkach krawędź linijału do powierzchni bocznej stożka nie przystaje. Wypada więc, że boczna powierzchnia stożka jest *powierzchnią krzywą*.

W dwu przytoczonych wyżej przykładach krzywych powierzchni znajdowały się kierunki, do których linija prosta przy-

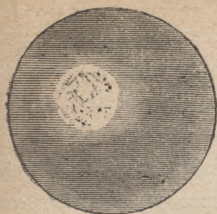


Fig. 10.

staje; damy teraz przykład krzywej powierzchni, do której linija prosta w żadnym kierunku nie przystaje. Taką powierzchnią są powierzchnie piłki lub globusa, które to ciała *kulami* zowią (fig. 10). Na powierzchni kuli linii prostej nigdzie nakreślić nie można.

19. Linija mieszana. Linia złożona z prostych i krzywych linii nazywa się *liniją mieszaną* (fig. 11).

20. Tworzenie się powierzchni i brył. Jeżeli się linija porusza w przestrzeni w innym kierunku, niż w kierunku swego przedłużenia, to opisuje powierzchnię.

Wyobraźmy sobie np., że ćwiartkę papieru obracamy około jednej z czterech prostych ją ograniczających, wtedy linija przeciwległa linii obrotu oczywiście utworzy powierzchnię boczną walca.

Jeżeli powierzchnia porusza się w kierunku nie przypadającym z którymkolwiek jej kierunkiem, a więc ani w kierunku swej długości, ani szerokości, to ona utworzy bryłę. Powierzchnia np. ćwiartki papieru w wyżej opisanym ruchu opisze walec.

21. Figury i ich podział. Zawszą ograniczoną, czyli zamkniętą część przestrzeni, czy to jedno-, czy dwu-, czy trzy-wymiarową nazywamy *figurą*; np. koło, kwadrat, sześcián, walec, kula i t. p. są figurami. Figury dzielą się na *plaskie* i *przestrzenne*; pierwsze z nich leżą na jednej płaszczyźnie, jak np. kwadrat i koło, drugie zaś na jednej płaszczyźnie pomieszczonemi być nie mogą, jak np. sześcián, walec, stożek, kula i t. p.

22. Podział geometryi. Ponieważ geometryja bada własności figur, więc odpowiednio podziałowi figur, geometryja dzieli się na dwa główne działy: na *geometryję płaską*, czyli *planimetryję*, i na *geometryję przestrzeni*, czyli *solidometryję*; pierwsza z nich bada własności figur płaskich, druga—własności figur przestrzennych.

23. Pytania. Jak się dzielą linije i powierzchnie? Nazwać przedmioty, u których widać linije proste, a potem takie, u których spostrzegać się dają linije krzywe. Mając daną jakąś powierzchnię, po

zem poznać, czy ona jest płaską lub krzywą? Nazwać przedmioty ograniczone płaszczyznami i takie, które ograniczone są powierzchniami krzywymi. Co nazywamy walcem, stożkiem i kulą? Na powierzchni którego z tych ciał można poprowadzić linije proste i w jakich kierunkach? Na której powierzchni można poprowadzić liniję prostą w każdym kierunku? Czy linija prosta jest ograniczoną? Co nazywamy odcinkiem prostej? Jak oznaczamy prostą nieokreśloną i jej odcinek? Jaki powinien być ruch punktu, ażeby utworzył liniję prostą i jak, ażeby on utworzył liniję krzywą? Z ruchu czego powstaje powierzchnia? Z ruchu czego powstaje ciało? Co to jest figura i jak się figury dzielą? Jaki jest podział geometryi?

CZĘŚĆ PIERWSZA.

GEOMETRYJA PŁASKA.

I. O liniach prostych.

1. Linija prosta.

24. **Własność linii prostej.** Pomiedzy dwoma punktami *A* i *B* (fig. 12) można poprowadzić nieskończenie wiele linii krzywych



Fig. 12.

i łamanych, *lecz tylko jedną linię prostą AB*. Doświadczenie pokazuje, że *linija prosta jest najkrótszą drogą pomiędzy dwoma punktami*, t. j. że jeżeli pomiędzy tymi samymi dwoma punktami poprowadzimy dowolną krzywą lub łamaną, to, wyprostowawszy ją i zmierzyszy, znajdziemy, że ona jest dłuższą od prostej. Z tego to powodu, prostolinijna odległość dwu punktów nazywa się ich *długością*, gdyż jest ona jedyna i zupełnie określona. Jeśli np. mówimy, że odległość dwu punktów równa się 6 calom, to się znaczy, że *długość linii prostej*, łączącej te dwa punkty, równa się 6 calom.

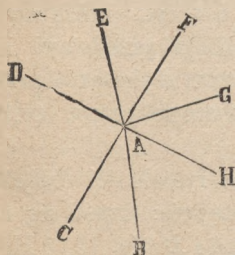


Fig. 13.

25. **Wniosek I.** Jeżeli dwie linie proste mają dwa punkty wspólne, to zupełnie do siebie przystają, gdyż pomiędzy dwoma punktami można tylko poprowadzić jedną linię prostą. Własność tę wyrażamy, mówiąc: *dwa punkty wyznaczają położenie linii prostej*. Łatwo widzieć, że przez jeden punkt można poprowadzić nieskończenie wiele linii prostych (fig. 13). Własność tę wyrażamy, mówiąc: *jeden punkt nie wyznacza położenia linii prostej*.

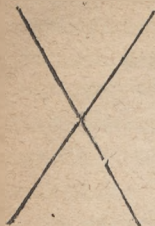


Fig. 14.

26. **Wniosek 2.** Dwie proste mogą się przeciąć w jednym tylko punkcie (fig. 14). Gdyby bowiem dwie proste miały więcej niż jeden punkt wspólny, to na zasadzie wniosku 1-go przystałyby do siebie, t. j. utworzyłyby jedną prostą.

27. **Pewnik.** Prawda oczywista sama przez się i nie dająca się zredukować do prawdy prostszej, nazywa się *pewnikiem* (aksyjmatem). Pewnik otrzymuje się z doświadczenia. Przytoczmy tu kilka pewników:

1. Całość jest większą od swych części.
2. Całość równa się sumie swych części.
3. Dwie ilości, z których każda równa się trzeciej, są sobie równe.
4. Jeżeli do ilości równych dodamy ilości równe, otrzymamy sumy równe.
5. Jeżeli od ilości równych odejmiemy ilości równe, otrzymamy różnice równe.
6. Jeżeli do ilości nierównych dodamy ilości równe, otrzymamy sumy nierówne.
7. Jeżeli od ilości nierównych odejmiemy ilości równe, otrzymamy różnice nierówne.
8. Własność linii prostej, że ona jest najkrótszą odległością pomiędzy dwoma punktami, jest również pewnikiem.

28. **Wykreślanie linii prostej. — Sprawdzenie linijalu.** Linije proste kreślą się na papierze lub na tablicy za pomocą znanego powszechnie linijalu, a mianowicie: położywszy linijal, kreślimy po jego krawędzi ołówkiem, piórem lub krędą i t. p., które uwi-
doczniają drogę, którą punkt przebiega, a linija przedstawi się w sposób dla oka widzialny (Wstęp, 12). Rozumie się samo przez się, że prosta tak nakreślona nie jest linią matematyczną, tylko jej znakiem (Wstęp, 8).

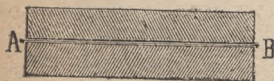


Fig. 15.

Dla dochodzenia rzetelności linijalu postępujemy jak następuje: kreśli się na papierze dwa punkty *A* i *B* (fig. 15) i kładziemy linijal tak, aby te dwa punkty leżały na krawędzi linijalu i kreślimy prostą;

następnie odwracamy linijką około krawędzi i znów kreślimy prostą wzdłuż tej krawędzi; jeśli ta ostatnia prosta zleje się z pierwotnie nakreśloną, to linijką jest rzetelnym; jeśli zaś otrzymamy dwie różne linie (fig. 16), to linijką nie jest rzetelnym.



Fig. 16.

Uwaga 1. Rzemieślnicy bardzo często kreślą prostą za pomocą silnie wypreżonego sznura, który pocierają krédą lub węglem.

W tym celu przymocowują sznur do dwu punktów płaszczyzny, na której linia ma być nakreśloną, podnoszą go, ująwszy za środek i następnie opuszczają; sznur, uderzywszy o płaszczyznę, zostawia na niej ślad, który jest linią prostą.

Uwaga 2. Chcąc przedłużyć linię prostą, przykładamy linijką tak, ażeby część jego krawędzi przystała do danej prostej i po przedłużeniu krawędzi kreślimy prostą.

29. Linije pionowe, poziome i ukośne. Zawieszony na nitce jakiś ciężarek, np. kula ołowiana przybiera zawsze stały kierunek, w którym też padać będzie po przecięciu nitki. Kierunek wypreżonej nitki nazywa się *pionowym*, nitka zaś wraz z kulą ołowianą—*pionem* lub *ołowianką*.

Jeżeli talerzyki u rzetelnej wagi są próżne, albo jednakowo obciążone, to belka wagi wtedy przybiera kierunek, który nazywa się *poziomym*. Linia prosta, która nie jest ani pionowa, ani poziomą, nazywa się *ukośną*.

Na tablicy lub na papierze linię pionową przedstawiamy w kierunku z góry na dół, lub odwrotnie; linię zaś poziomą od lewej strony do prawej, lub odwrotnie.

30. Płaszczyzny pionowe i poziome. Jeżeli na jakiejś płaszczyźnie można poprowadzić linię pionową, to taka płaszczyzna nazywa się *płaszczyzną pionową*. Tak np. na ścianie można poprowadzić linię pionową, więc ściana jest płaszczyzną pionową; na podłodze linii pionowej poprowadzić nie możemy, więc podłoga nie jest płaszczyzną pionową.

Płaszczyzna, w której wszystkie poprowadzić się dające linie przybierają kierunek poziomy, nazywa się *płaszczyzną poziomą*, np. powierzchnia wody spokojnie stojącej, płaszczyzna podłogi i t. p.

31. Libella i gruntwaga. Do oznaczenia kierunku poziomego w praktyce, używa się narzędzi zwanych *libellami*. Najprostsza libella składa się z rurki szklanej napełnionej prawie zupełnie wodą lub spirytusem, zalutowanej w obu końcach. Część rurki niezajęta przez wodę wypełnia powietrze. Rurka ta oprawia się w wydrążony walec metalowy, z wierzchu wyrznięty, aby można było widzieć ruch bulki powietrza, i przymocowywa się do deseczki gładko wyheblowanej, jak to fig. 17 pokazuje. Z położenia bulki powietrza



Fig. 17.

możemy sądzić o położeniu płaszczyzny, na której kładziemy libellę. Gdy bulka powietrza *a* przypada na sam środek rurki, wtedy płaszczyzna jest poziomą.

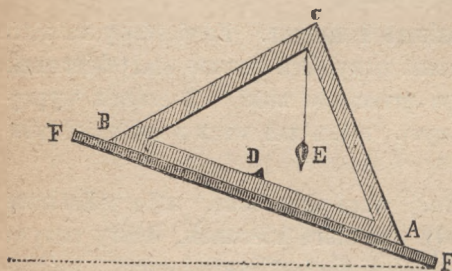


Fig. 18.

Mularze i cieśle w robotach swoich do wyznaczania poziomu lub pionu używają narzędzia zwanego *gruntwągą*. Gruntwaga (fig. 18) składa się z dwu ramion gładko wyheblowanych, równych, pod kątem prostym spojonych i opartych w punktach *A* i *C* na deszczulce

DE. W punkcie *B* przymocowaną jest ołowianka. Kiedy kulka ołowianki przypada na rys zrobiony na środku podstawy *AC*, wtedy podstawa gruntwagi wyznacza kierunek poziomu, a nie kierunku pionowy.

32. Pytania i zadania. Ile prostych można poprowadzić przez jeden punkt? Ile prostych można poprowadzić przez dwa punkty? Wyznaczyć dwa punkty i połączyć je linią prostą. Wyznaczyć trzy punkty, które nie leżą na jednej prostej, i przez każde dwa punkty poprowadzić linią prostą. Ile tu linii prostych jest możliwych? Ile prostych poprowadzić można przez 4, 5 i 6 punktów? W ilu punktach przecinają się dwie proste? W ilu punktach mogą się 3 proste przecinać, a w ilu 4? Co nazywamy pewnikiem? Wymień kilka pe-

wników. Jakie linie nazywamy pionowymi, jakie poziomymi i jakie ukośnymi? Jakie linie w pokoju są pionowe i jakie poziome? Kiedy języzek u wagi stoi pionowo? Którzy rzemieślnicy posługują się ołowianką? Wymień przedmioty, u których dają się spostrzegać linie ukośne. Które płaszczyzny w pokoju są poziome, a które pionowe? Wymień przedmioty, u których dają się spostrzegać płaszczyzny poziome i pionowe. Jak należy postawić drążek, ażeby miał kierunek pionowy? Jak się przekonać, czy pewna płaszczyzna jest pionową? Jak się przekonać, czy powierzchnia stołu jest poziomą?

2. Długość linii prostej.

33. Porównanie dwu odcinków prostych pomiędzy sobą.—

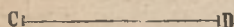
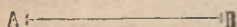


Fig. 19.

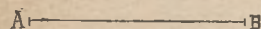


Fig. 20.

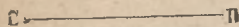
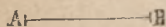


Fig. 21.

Dla porównania dwu odcinków AB i CD (fig. 19, 20 i 21) prostych pomiędzy sobą pod względem ich długości, przykłada się jeden np. AB do drugiego CD tak, aby ich punkty skrajne np. A i C przystały do siebie i aby odcinek AB przyjął kierunek odcinka CD , wtedy mogą mieć miejsce trzy przypadki: 1) punkt B upadnie na punkt D (fig. 19); 2) punkt B upadnie za punktem D (fig. 20); na koniec 3) punkt B upadnie pomiędzy punktami C i D (fig. 21).

W pierwszym przypadku odcinek AB jest *równym* odcinkowi CD . Równość tę wyrażamy tak: $AB = CD$.

W drugim przypadku odcinek AB jest *większym* od odcinka CD . Nierówność tę wyrażamy tak: $AB > CD$ (AB jest większem od CD).

W trzecim przypadku odcinek AB jest *mniejszym* od odcinka CD . Nierówność tę wyrażamy tak: $AB < CD$ (AB jest mniejszem od CD).

Z tego cośmy wyżej powiedzieli wypada, że *dwa odcinki linii prostych nazywają się równymi, gdy jeden z nich można nałożyć na drugi tak, ażeby oba do siebie przystały.*



Fig. 22.

Uwaga. Zamiast przykładać jeden odcinek do drugiego, można zastosować przyrząd nazwany *cyrklem*. Składa się on z dwu nóżek (fig. 22) połączonych ze sobą u góry w ten sposób, ażeby można było je rozsuwać; u dołu nóżki cyrkla zakończone są ostrzami stalowymi (niekiedy jedna nóżka ma u dołu wydrążenie dla pomieszczenia ołówka lub kredy). Dla porównania dwu odcinków AB i CD (fig. 19) pomiędzy sobą, zatwierdzamy cyrkiel tak, ażeby koniec jednej nóżki upadł w A , koniec zaś drugiej w B , i nie zmieniając rozwartości cyrkla podnosimy go i stawiamy koniec jednej nóżki na punkt C , koniec zaś drugiej na punkt prostej D , gdzie on upadnie. Oczywiście, że tym samym sposobem można rozwiązać zadanie: na danej nieograniczonej prostej odciąć długość równą danemu odcinkowi.

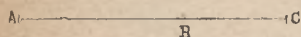


Fig. 23

34. Suma i różnica dwu odcinków prostej. Gdy narysujemy (fig. 23) odcinek AB i przedłużymy go o odcinek BC , to odcinek AC będzie tak wielkim, jak odcinki AB i BC razem wzięte;

czyli inaczej mówiąc: odcinek AC jest sumą obydwu odcinków AB i BC ; co się tak oznacza:

$$AC = AB + BC.$$

Jeżeli narysujemy odcinek AC (fig. 23) i odetniemy od niego odcinek mniejszy AB , to pozostały odcinek BC pokazuje nam, o ile większy odcinek AC jest dłuższym od mniejszego AB ; BC zatem jest *różnicą* między AC i AB , co się tak oznacza:

$$BC = AC - AB.$$

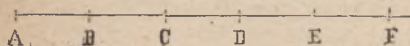


Fig. 24.

35. Wielokrotność odcinków prostych i dzielenie takich odcinków. Jeżeli na nieograniczonej prostej (fig.

24), poczynawszy od skrajnego punktu A , odetniemy równe odcinki AB , BC , CD , DE i t. d., będzie

AC 2-krotnością odcinka AB
 AD 3-krotnością „ AB
 AE 4-krotnością „ AB i t. d.

Każdy więc w ten sposób otrzymany odcinek jest wielokrotnością odcinka AB .

W fig. 24 odcinek AB jest połową AC , trzecią częścią odcinka AD , czwartą częścią AE i t. d. Odcinek zatem AC został przez punkt B podzielonym na dwie równe części, odcinek AD przez punkty B i C na trzy równe części, odcinek AE przez punkty B , C i D na cztery równe części.

36. Mierzenie odcinków prostej i wyznaczenie stosunku dwu odcinków. Mierzyć odcinek linii prostej znaczy tyle, co oznaczyć jej długość. Dla wymierzenia odcinka, trzeba odcinek pewnej długości obrać za *jednostkę*, a potem dochodzić, ile razy ta jednostka zawiera się w odcinku mierzonym. Jednostką długości jest np. stopa, arszyn, metr i t. p.

Jeżeli porównujemy ze sobą długości dwu wymierzonych odcinków w celu wyznaczenia, ile razy jeden odcinek jest większym od drugiego, albo też jaką część jednego stanowi drugi, to powiadamy, że *szukamy stosunku* tych dwu odcinków. Jeśli np. długość jednego odcinka 2 stopy i 6 cali, drugiego zaś 4 stopy, to stosunek większego do mniejszego odcinka $= \frac{48}{30} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$.

37. Podziałka (Skala). Wyobraźmy sobie, że trzeba na papierze lub na desce narysować takie odcinki, których na rysunku pomieścić nie możemy z powodu znacznej ich długości; uciekamy się wtedy do pomocy *podziałek pomniejszonych*. W tym celu pewną długość nakreśloną na papierze (fig. 25), np. decymetr, uważamy za większą długość w rzeczywistości, np. za dekametr. Chcąc

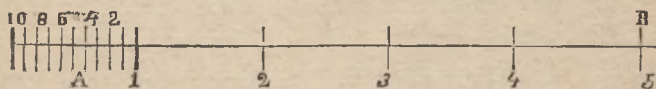


Fig. 25.

na rysunku przedstawić rzeczywistą długość 45 metrów, należy nakreślić linię równą długości AB na podziałce. Odwrotnie, chcąc znaleźć rzeczywistą długość pewnego odcinka rysunku, należy ją

przenieść na podziałkę i ile ona będzie miała decymetrów, tyle dekametrów ma w rzeczywistości.

Jeżeli długość jakiegoś odcinka została na rysunku zmniejszoną za pomocą pewnej danej długości, obranej za jednostkę, powiadamy, że odcinek został nakreślonym według pewnej podziałki (skali). *Podziałkę należy właściwie nazywać liczbą oderwaną, wskazującą stosunek długości rysunku odcinka do jego rzeczywistej długości.* Jeśli np. powiadamy, że pewien odcinek został nakreślonym według podziałki $\frac{1}{100}$, to znaczy, że rzeczywista długość odcinka jest 100 razy większą od długości rysunku.

38. Pytania i zadania. Nakreślić odcinek równy sumie kilku odcinków. Wyprostować linię łamaną, t. j. nakreślić odcinek równy sumie odcinków składających linię łamaną. Sprawdzić za pomocą dodawania i odejmowania odcinków prawdziwość pewników 4 — 8 ustępu 27. Od sumy trzech danych odcinków odjąć sumę dwu odcinków. Dany odcinek powiększyć 3, 5, 7 razy. Co znaczy zmierzyć dany odcinek? Co nazywamy stosunkiem dwu odcinków? Jaką liczbą stosunek ten się wyraża? Na odcinku prostej AB między punktami A i B wzięto punkt C . Czemu się równa $AC + CB$? $AB - AC$? $AB - CB$? Dany jest odcinek AB , należy go przedłużyć do punktu K tak, ażeby $AB = \frac{1}{6} AK$. Ten sam odcinek AB przedłużyć tak, aby $AK = 8AB$. Na linii prostej przechodzącej przez punkty A i B wyznaczyć punkt C tak, ażeby odcinek $BA = \frac{1}{5} BC$. Punkt C ma być tak wyznaczonym, ażeby punkt B był środkiem odcinka AC . Dane są trzy odcinki AB , CD , EF i nieograniczona prosta MN ; wykreślić, poczynawszy od punktu X dowolnie obranego na prostej, następujące sumy i różnice: a) $3AB + 2CD - 4EF$; b) $5AB + 7CD - 2EF$. Poczynawszy od punktu A nieograniczonej prostej odcięto długości równe $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HI$; wyznaczyć: a) Jaką część AH stanowi odcinek AC ? b) Jaką część odcinka AF stanowi odcinek AD ? c) Wyznaczyć stosunek odcinka AE do DG . d) Wyznaczyć stosunek odcinka CF do BG . Znaleść stosunek odcinka AB do odcinka CD , jeśli wiadomo, że $AB = 3CD + EB$, $CD = 2EB + KD$, $EB = 4KD + MB$, $KD = 2MB$. Znaleść stosunek dwu odcinków (większego do mniejszego i mniejszego do większego), jeśli wiadomo, że większy odcinek $= 7$ sąż. 4 st., mniejszy $= 1$ sąż. 5 st. Znaleść stosunek mniejszego odcinka do większego,

jeśli wiadomo, że większy równa się 3,28 metra, mniejszy zaś = 2,5 metra. Oznacz stosunek między długością i wysokością tablicy, między szerokością okna i drzwi. Do czego służy podziałka? Przyjmując w rysunku linię za 100 sąż. ross. oznaczyć podziałkę rysunku. Wymierzwszy długość pokoju, stołu, tablicy za pomocą stóp ross., narysować tę długość według podziałki $\frac{1}{120}$.

3. O kątach.

39. Linije równoległe i przecinające się. Na fig. 26 widzimy dwie

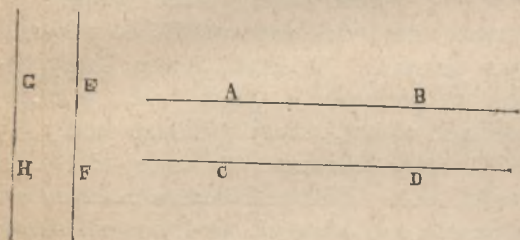


Fig. 26.

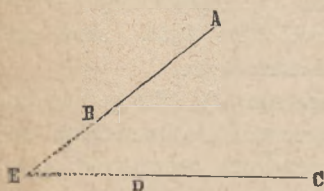


Fig. 27.

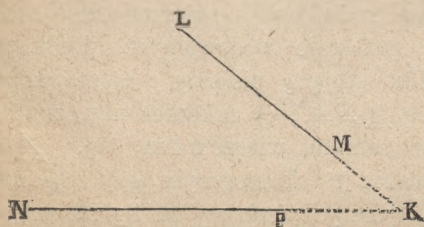


Fig. 28.

proste AB i CD , które nie *przecinają* się, jakkolwiek daleko byłyby przedłużone; widzimy też, że i linije proste EF i GH przedłużone ku górze i ku dołowi, nigdy się

ze sobą nie spotykają. Proste, leżące na jednej płaszczyźnie i nieprzecinające się ze sobą, jakkolwiek daleko byłyby przedłużone, nazywają się *równoległymi*. Proste AB i CD (fig. 27), będąc przedłużone ku stronie lewej, *przecinają* się w punkcie E ; proste znowu LM i NP (fig. 28), będąc przedłużone ku stronie prawej, *przecinają* się w punkcie K .

Uwaga 1. Równoległość linii AB i CD (fig. 26), oznaczają się tak:

$AB \parallel CD$.

Uwaga 2. Dwie linie równoległe mają *ten sam kierunek*, czyli są *jednokierunkowe*; dwie linie przecinające się mają *różne kierunki*, czyli są *różnokierunkowe*.

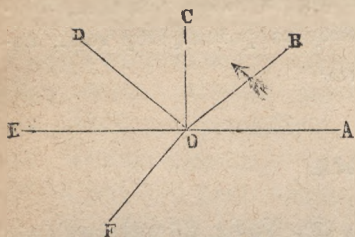


Fig. 29.

w kierunku strzałki możemy linię OA doprowadzić do położenia którejkolwiek z pozostałych prostych. Wielkość obrotu, który wykonać należy, aby prosta OA przystała do prostej OB , jest rzeczywiście większą, niż wielkość obrotu, który wykonać należy, by ta prosta przystała do OC , gdyż kierunek OC więcej niż kierunek OB zbacza od kierunku OA . *Wielkość zboczenia w kierunkach dwu prostych z jednego punktu wychodzących*, czyli innemi słowy: *wielkość nachylenia się dwu prostych nazywa się ich kątem*.

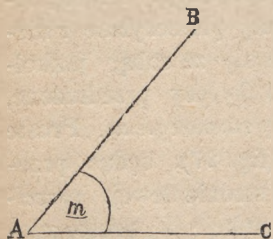


Fig. 30.

Punkt A (fig. 30) przecięcia się dwu prostych tworzących kąt, nazywa się *wierzchołkiem kąta*, same zaś proste—*ramionami kąta*.

Kąt oznacza się: a) albo jedną głoską m umieszczoną u wierzchołka zewnątrz lub wewnątrz rozwartości jego, wtedy czyta się go i oznacza: $\angle m$; b) albo też trzema głoskami, z których jedną stawiamy u wierzchołka, dwie zaś pozostałe w dowolnych punktach ramion; głoskę przy wierzchołku stojącą piszemy i wymawiamy we środku, tak np. $\angle CAB$ lub $\angle BAC$; c) na koniec kąt oznacza się jeszcze literą napisaną w samym wierzchołku, np. $\angle A$. Pierwszy i drugi sposób znakowania jest koniecznym, gdy z jednego punktu wychodzi kilka linii prostych; tak np. na fig. 29 mamy

między innemi następujące kąty: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, $\angle EOF$ it. d.

Uwaga. Z określenia kąta wypada, że *wielkość kąta nie zależy od długości jego ramion.*

41. Porównanie wielkości kątów. Mając dwa kąty $\angle BAC$

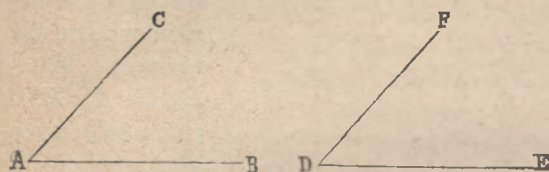


Fig. 31.

i $\angle EDF$ (fig. 30), to dla porównania ich wielkości *nakładamy* jeden na drugi tak, ażeby wierzchołek D upadł na wierzchołek A , ażeby ramię DE przyjęło kierunek ramienia AB i cały kąt FDE był zwrócony ku stronie kąta CAB . Wtedy mogą mieć miejsce trzy przypadki: 1) ramię DF przystanie do ramienia AC (fig. 31),

$\angle EDF$ (fig. 30), to dla porównania ich wielkości *nakładamy* jeden na drugi tak, ażeby wierzchołek D upadł na wierzchołek A , ażeby

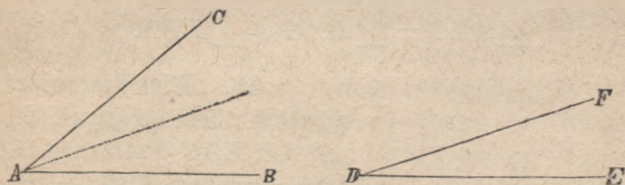


Fig. 32.

wtedy $\angle EDF = \angle BAC$; 2) ramię DF upadnie wewnątrz kąta BAC (fig. 32), wtedy $\angle EDF < \angle BAC$; na koniec 3) ramię DF

upadnie zewnątrz kąta BAC (fig. 33), wtedy $\angle EDF > \angle BAC$.

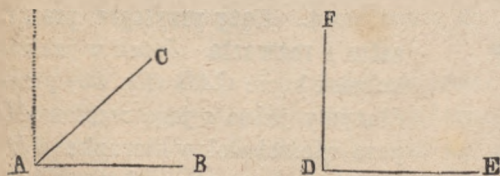


Fig. 33.

42. Summa i różnica kątów. Mając dane dwa kąty CAB i FDE

(fig. 34), możemy utworzyć kąt równy ich summie. W tym celu przykładamy kąt EDF do kąta BAC tak, ażeby wierzchołek D padł na wierzchołek A , ramię DE przyjęło kierunek ramienia AC

ramię zaś DF — kierunek AG . Kąt BAG oczywiście równa się sumie kątów danych.

$$\angle BAG = \angle BAC + \angle EDF.$$

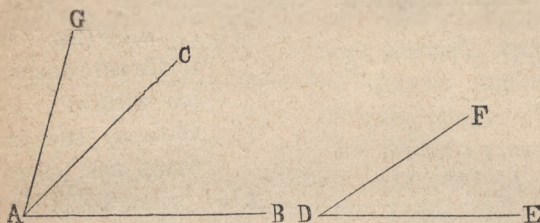


Fig. 34.

Dla otrzymania kąta równego różnicy dwu nierównych kątów BAG i EDF (fig. 34), przykładamy $\angle EDF$ do $\angle BAG$ tak, aby wierzchołek

D padł na wierzchołek A , aby ramię DF przyjęło kierunek ramienia AG i ramię DE upadło wewnątrz kąta GAB w kierunku AC , wtedy kąt BAC oczywiście będzie różnicą dwu kątów.

$$\angle BAC = \angle BAG - \angle EDF.$$

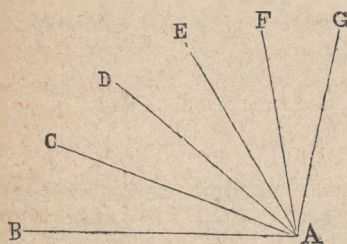


Fig. 35.

43. Wielokrotność i części kątów. Jeżeli kąty BAC , CAD , DAE , EAF , FAG (fig. 35) są sobie równe, to $\angle BAD = 2 \angle BAC$, $\angle BAE = 3 \angle BAC$, $\angle BAF = 4 \angle BAC$ i t. d. Odwrotnie kąt $BAC = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{3} \angle BAE = \frac{1}{4} \angle BAF$ i t. d.

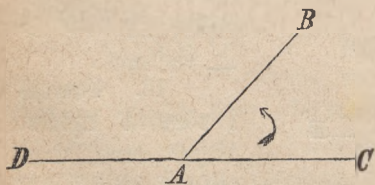


Fig. 36.

44. Kąty przyległe, proste, ostre i rozwarte. Jeżeli w jakimkolwiek kącie CAB (fig. 36) przedłużymy jedno z jego ramion AC poza wierzchołek w kierunku AD , to otrzymamy nowy kąt BAD . Dwa kąty BAC i BAD mają jedno ramię AB wspólne, dwa zaś

pozostałe ich ramiona AC i AD tworzą jedną linię prostą. Dwa takie kąty nazywają się *kątami przyległymi*.

Kąty CAB i BAD (fig. 36) nie są sobie równe, gdyż prosta AB nie jest jednakowo nachyloną względem prostej DC po lewej i prawej jej stronie, albowiem oczywiście kąt CAB jest mniejszym od kąta BAD , lecz jeśli linię AB będziemy obracali około punktu A w kierunku wskazanym strzałką, to kąt z prawej strony będzie się powiększać, a kąt po lewej będzie się ciągle zmniejszać, i łatwo widzieć, że przy tym obrocie prosta AB może przyjąć takie położenie, że ono będzie jednakowo nachylone do prostej CD po obydwu jej stronach, to jest

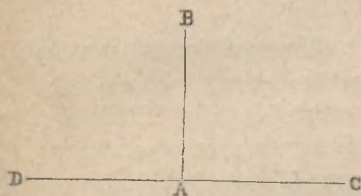


Fig. 37.



Fig. 38.

takie położenie, w którym $\angle CAB = \angle DAB$ (fig. 37). Kąt, który jest równym swemu kątowni przyległemu, nazywa się kątem prostym $\angle DAB = \angle BAC =$ kątów prostemu.

Kąt DAE (fig. 38) mniejszy od kąta prostego, nazywa się ostrym kąt DAF większy od kąta prostego, nazywa się rozwartym. Względnie do kątów prostych, kąty ostre i rozwarte nazywają się ukośnymi.

45. Linije prostopadłe i pochyłe. Dwie proste, tworzące pomiędzy sobą kąt prosty, nazywają się prostopadłemi do siebie, jeśli np. kąt BAC (fig. 37) jest prostym, to prosta AB jest prostopadłą do DC i prosta DC prostopadłą do AB , co się oznacza tak: $AB \perp DC$.

Jeśli z punktu A leżącego na prostej DC (fig. 37) poprowadzimy do niej prostopadłą, to powiadamy, żeśmy z punktu A wyprowadzili prostopadłą do DC ; jeśli zaś z punktu B leżącego zewnątrz prostej DC poprowadzimy do niej prostopadłą BA , to powiadamy, żeśmy z punktu B spuścili do prostej DC prostopadłą.

Jeśli dwie proste tworzą ze sobą kąt ukośny, np. EA względem DC (fig. 38), wtedy powiadamy, że jedna względem drugiej jest pochyłą.

Uwaga. Z samego określenia kąta prostego (§ 44, fig. 37) wypada, że jeśli prostą BA obrócimy około punktu A , czy to na prawo, czy też na lewo, to kąty przyległe z równych staną się nierównymi, czyli z prostych staną się ukośnymi, więc w danym punkcie do danej prostej możemy tylko poprowadzić jedną prostopadłą.

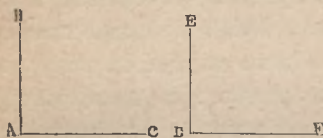


Fig. 39.

EDF poszedł w kierunku kąta BAC . Ponieważ ramię DE jest prostopadłe do ramienia DF , a ramię to leży teraz na ramieniu AC , więc ED jest prostopadłe do AC w punkcie A , a że ramię AB jest także prostopadłe do AC w punkcie A , więc ramię DE koniecznie przystanie do ramienia AB (§ 45, uwaga); $\angle EDF = \angle BAC$. To cośmy mówili o tych dwu kątach prostych stosuje się oczywiście do wszystkich, więc *wszystkie kąty proste są sobie równe*, czyli innemi słowy: *kąt prosty jest wielkością stałą*, to jest ma zawsze tę samą wartość.

Z tego to powodu *kąt prosty obieramy za jednostkę do mierzenia kątów* i oznaczamy przez d . Tak np. powiadamy, kąt ma wielkość równą: $\frac{1}{4}d$, $\frac{1}{5}d$, $\frac{5}{4}d$ i t. d .

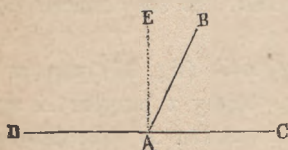


Fig. 40.

47. Summa kątów przyległych.

Niech będą dane dwa kąty przyległe BAC i BAD (fig. 40) nierówne pomiędzy sobą. Jeśli z punktu A wyprowadzimy prostopadłą AE do CD , to łatwo widzieć, że:

$$\angle BAC + \angle BAD =$$

$$\angle EAC + \angle EAD = d + d = 2d,$$

to jest *summa dwu kątów przyległych równa się dwóm kątom prostym*.

Wniosek I. Suma wszystkich kątów, leżących po jednej stronie prostej, równa się dwóm kątom prostym. Jakoż niech z punktu

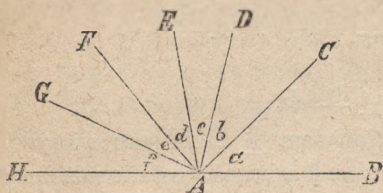


Fig. 41.

A (fig. 41) wychodzą proste AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, tworzące kąty: a, b, c, d, e, f , które leżą po jednej stronie prostej HB. Oczywiście, że $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e + \angle f = \angle BAD + \angle DAH = 2d$.

Wniosek II. Suma wszystkich kątów BAC, CAD, DAE, EAF i FAB, leżących naokoło jednego punktu A (fig. 42), równa się czterem kątom prostym.

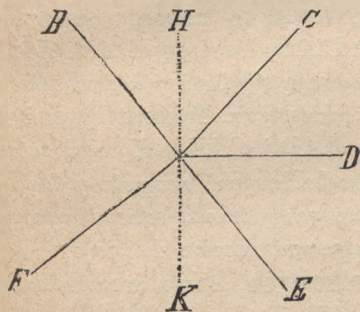


Fig. 42.

Jakoż jeśli przez punkt A (fig. 42) poprowadzimy jakąkolwiek prostą HK, suma wszystkich wyżej wyliczonych kątów równać się będzie sumie kątów przyległych, po obydwu stronach tej prostej leżących, lecz ta ostatnia suma równa się czterem kątom prostym (§ 47, Wniosek I).

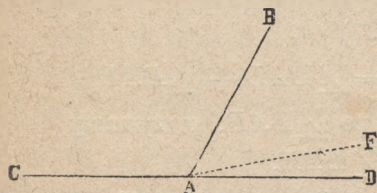


Fig. 43.

48. Jeżeli suma dwu kątów BAD i BAC (fig. 43), mających jedno ramię AB wspólne, równa się dwóm kątom prostym, to dwa drugie ramiona AD i AC stanowią jedną linię prostą.

Dla okazania tej prawdy należy dowieść, że AD jest przedłużeniem AC. W tym celu dajmy, że AD nie jest przedłużeniem AC, a jest niem AF, to jest dajmy, że CAF jest linią prostą.

Wtedy na zasadzie § 47 byłoby:

$$\angle CAB + \angle BAF = 2d,$$

a z założenia:

$$\angle CAB + \angle BAD = 2d,$$

więc na zasadzie pewnika 3-go (§ 27)

$$\angle CAB + \angle BAF = \angle CAB + \angle BAD,$$

skąd na zasadzie pewnika 5-go

$$\angle BAF = \angle BAD,$$

co jest rzeczywiście niemożliwem, albowiem $\angle BAF$ stanowi tylko część $\angle BAD$, więc na zasadzie pewnika 1 równość jest niemożliwą.

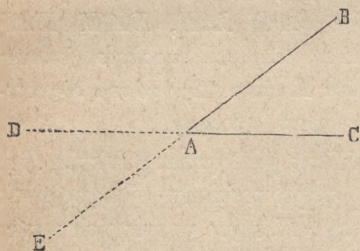


Fig. 44.

49. Kąty wierzchołkiem przeciwległe. Jeżeli, ramiona kąta BAC (fig. 44) przedłużymy poza wierzchołek A , to utworzy się drugi kąt DAE ; dwa kąty BAC i DAE nazywają się *kątami wierzchołkiem przeciwległymi*. Takimiż kątami są też BAD i CAE . Kątami zatem wierzchołkowymi nazywamy kąty, w których ramiona jednego są przedłużeniami ramion drugiego.

50. Równość kątów wierzchołkowych. Kąty wierzchołkowe są sobie równe. Jakoż wiemy, że (§ 47):

$$\angle BAC + \angle BAD = 2d,$$

$$\angle BAD + \angle DAE = 2d,$$

więc na zasadzie pewnika 3-go (§ 27)

$$\angle BAC + \angle BAD = \angle BAD + \angle DAE,$$

odjawszy na koniec z obu równości po $\angle BAD$, otrzymamy

$$\angle BAC = \angle DAE,$$

co było do okazania. W ten sam sposób można dowieść, że

$$\angle BAD = \angle CAE.$$

51. Twierdzenie i dowodzenie. W §§ 46, 47, 48 i 50 pokazaliśmy niektóre prawdy o kątach. Prawdy te nie były oczywistymi, tak jak nimi są pewniki, lecz ujawniliśmy je drogą rozumowania, opierając się na znanych nam już prawdach. Prawdy, które

stają się oczywistemi na zasadzie rozumowań, nazywają się *twierdzeniami*, rozumowania zaś ujawniające prawdę—*dowodzeniami*.

52. Części twierdzenia.—Wzajemnice. Weźmy twierdzenie (§ 47) „suma dwu kątów przyległych równa się dwu kątom prostym.” W tem twierdzeniu wypowiada się prawdę, że *jeżeli dwa kąty są przyległe, to suma ich będzie równą dwu kątom prostym*. W twierdzeniu tem są dwie części: 1) **założenie** (jeśli kąty są przyległe), 2) **konkluzya** (to suma ich będzie równą dwu kątom prostym).

Uważając twierdzenia §§ 47 i 48, widzimy, że konkluzya pierwszego twierdzenia (suma kątów równa się dwu kątom prostym) staje się założeniem drugiego, założenie zaś drugiego (jeśli kąty są przyległe) staje się konkluzją drugiego. Takie dwa twierdzenia, w których konkluzya jednego jest założeniem drugiego, i naodwrotń założenie jednego jest konkluzją drugiego, nazywają się *wzajemnicami*, albo *twierdzeniami odwrotnemi*.

53. Dowodzenie bezpośrednie i dowodzenia metodą przywie-dzenia do niorzeczności. Są dwa sposoby dowodzenia prawd geometrycznych. Pierwszy sposób, nazwany *dowodzeniem bezpośredniem*, polega na tem, że prawdę dowieść się mającą sprowadza się, na zasadzie znanych prawd, do oczywistości; takich dowodzeń użyliśmy w §§ 47 i 49. Drugi sposób dowodzenia, nazwany *metodą przywie-dzenia do niorzeczności*, polega na tem, że wprowadzamy przypuszczenie przeciwne prawdzie, którą dowieść mamy, i drogą rozumowania ujawniamy, że przypuszczenie to połączone ze znanemi prawdami prowadzi do wypadków rzeczywiście niezgodnych z dowiedzionemi prawdami; takiego dowodzenia użyliśmy w § 48. Zwykle wzajemnice twierdzeń tą metodą się dowodzą.

54. Pytania i zadania. Które proste nazywają się przecinającemi się i które równoległemi? Co nazywamy kątem? Od czego zależy wielkość kąta? Czy wielkość kąta zmieni się, jeśli przedłużymy jego ramiona? Po czem poznać, czy dwa kąty są sobie równe? Co to są kąty przyległe? Co to są kąty proste, ostre i rozwarte? Jak znaleźć sumę dwu danych kątów? Jak znaleźć różnicę dwu kątów? Jak znaleźć sumę trzech danych kątów? Jak dany kąt powiększyć pięć razy? *Dwójścinną* kąta nazywamy prostą, dzielącą dany kąt na dwie równe

części; dowieść, że dwójsieczne dwu kątów przyległych są do siebie prostopadłe. Daną jest prosta AB i dwa punkty C i D leżące zewnątrz tej linii; znaleźć punkt na prostej AB , któryby też leżał i na prostej łączącej dwa dane punkty C i D . (Czy zadanie to zawsze jest możliwem?). Dany jest kąt BAC , poprowadzić prostą AE przez punkt A w ten sposób, ażeby kąt $BAE <$ kąta BAC , i prostą AF w ten sposób, ażeby kąt $BAF >$ kąta BAC . Dany jest kąt BAC , poprowadzić: a) prostą AE tak, ażeby $\angle BAC = \angle BAE + \angle AEC$, b) prostą AF tak, ażeby $\angle BAC = \angle BAF - \angle CAF$. Z punktu O poprowadzić 6 prostych OA , OB , OC , OD , OE i OF tak, ażeby $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$; znaleźć stosunek kątów BOF i AOC , jako też kątów DOE do BOE . Po czem poznać, czy dany kąt jest prosty? Jakie linije nazywają się prostopadłemi i jakie pochyłemi? Które kąty nazywają się kątami wierzchołkiem przeciwległymi? Jaka jest własność kątów wierzchołkiem przeciwległych? Jaka jest własność kątów przyległych? Czemu się równa suma kątów leżących po jednej stronie prostej? Czemu się równa suma kątów leżących naokoło jednego punktu? Nakreślić kąt rozwarty i ostry tak, ażeby ich różnica równała się kątowi prostemu. Nakreślić dwa ostre kąty tak, ażeby suma ich równała się kątowi prostemu. Jeden z dwu kątów przyległych równa się: a) $\frac{2}{3}d$, b) $1,82d$, c) $1,2(34)d$. Czemu się równa drugi? Jeden z czterech kątów utworzonych przez dwie proste przecinające się, równa się: a) $1\frac{3}{4}d$, b) $0,283d$, c) $1,(23)d$, d) $1,4(24)d$; obliczyć wielkość każdego z pozostałych kątów. Jeden z dwu kątów przyległych jest $1\frac{2}{3}$ raza większym od drugiego — obliczyć każdy z tych kątów w częściach kąta prostego. Do jednego z ramion kąta rozwartego w jego wierzchołku wystawiono prostopadłą, tworzącą z drugim ramieniem kąt stanowiący $\frac{3}{7}$ danego — obliczyć kąt rozwarty. Z punktu A prostej BC , po jednej jej stronie poprowadzono dwie proste AD i AE tworzące z nią $\angle DAB = \angle EAC$, następnie kąt DAE podzielono prostą AF na dwie równe części — obliczyć $\angle FAB$ i $\angle FAC$. Jeden z czterech kątów leżących około punktu $= \frac{5}{6}d$ i dwójsieczne trzech pozostałych kątów tworzą po kolei kąty $\frac{7}{8}d$ i $\frac{1}{3}d$ — obliczyć te cztery kąty. Co to jest twierdzenie? Z jakich części ono się składa? Co to jest wzajemnica? Co to jest dowodzenie bezpośrednie i co dowodzenie przez sprowadzenie do niedorzeczności?

4. Miara kątów.

55. Koło i okrąg koła. Widzieliśmy wyżej (§ 46), że jednostką przy mierzeniu wielkości kąta jest kąt prosty, tak, że zmierzyć kąt znaczy znaleźć, ile w nim zawiera się kątów prostych, albo części kąta prostego; innymi słowy: zmierzyć kąt znaczy znaleźć stosunek jego do kąta prostego. Dla wyznaczenia tego stosunku musimy poznać własność linii krzywej nazwanej kołem.

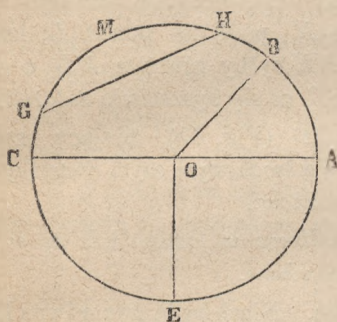


Fig. 45.

Jezeli prosta OA (fig. 45) obracać się będzie na płaszczyźnie około punktu O póki nie wróci do swego pierwotnego położenia, to punkt A nakerśli linię krzywą zamkniętą $ABCE$, która się nazywa *okręgiem*. Część płaszczyzny ograniczona okręgiem nazywa się *kołem*. Łatwo widzieć, że wszystkie punkty okręgu znajdują się w równej odległości od punktu O , nazwanego *środkiem koła*. Można więc powiedzieć, że *okrąg jest to linia krzywa, płaska (leżąca na płaszczyźnie), której wszystkie punkty są równo oddalone od punktu wewnętrznego nazwanego środkiem*.

Uwaga. Do rysowania koła służy cyrkiel (§ 33, Uwaga). Oznacza się koło zwykle jedną literą jego środka i mówi się koło O .

56. Linije w kole. Prosta idąca od środka do jakiegobądź punktu okręgu, zowie się *promieniem koła* np. OA , OB , OC , OE . Ponieważ wszystkie punkty okręgu są jednakowo oddalone od środka, więc *wszystkie promienie koła muszą być sobie równe*. Część okręgu jak GMI , nazywa się *łukiem koła*. Prosta GH łącząca końce łuku, nazywa się *cięciwą*. Cięciwa AC przechodząca przez środek koła, nazywa się *średnicą koła*. Oczywiście, że średnica jest dwa razy większą od promienia.

57. Twierdzenie. Dwa koła równego promienia przystają do siebie i są sobie równe.

Dowodzenie. Niech będą dwa koła M i N (fig. 46) o równych promieniach, t. j. $MA = NB$. Nałożmy koło N na koło M

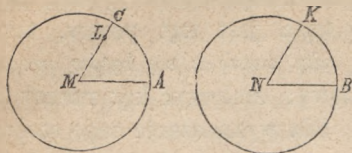


Fig. 46.

w ten sposób, ażeby środek N padł na środek M , promień NB przystał do promienia MA , co można, gdyż promienie te z założenia są sobie równe. Łatwo widzieć, że przy takim nałożeniu wszystkie punkty okręgu N przystaną do punktów okręgu M ,

gdyby bowiem jakiś punkt K okręgu N padł na punkt L , leżący wewnątrz okręgu M , to promień NK byłby równym ML , a zatem byłby mniejszym od promienia MC , co się sprzeciwia założeniu.

58. Kąty środkowe. Kąt AOB (Fig. 45), mający swój wierzchołek we środku koła, nazywa się *środkowym* czyli *centralnym*, łuk AB nazywa się *odpowiadającym kątowni*.

Twierdzenie. Jeśli dwa kąty środkowe w jednym kole są sobie równe, to i odpowiadające im łuki są też równe.

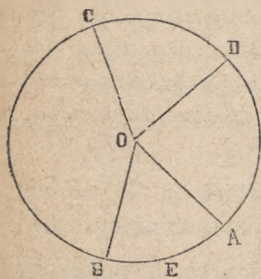


Fig. 47.

Dowodzenie. Niech będą dwa równe kąty AOB i COD (fig. 47). Nałożmy kąt AOB na COD tak, ażeby wierzchołki ich przystały do siebie i ramiona jednego przybrały kierunek ramion drugiego, co można, gdyż kąty te są sobie równe (§ 41). Z równości promieni koła wypada, że punkty A i B przy tem nałożeniu odpowiednio upadną na punkty C i D . Łatwo też widzieć, że każdy dowolny punkt w łuku AB musi przystać do którego z punktów łuku

CD , w przeciwnym razie bowiem punkt ten nie byłby w tej samej odległości od środka co inne punkty okręgu, więc łuk AB przystanie do łuku CD i będzie mu równym—co było do okazania.

Wzajemnica. Jeżeli w kole dwa łuki są sobie równe, to i odpowiadające im kąty środkowe są też równe.

Dowodzenie. Dajmy, że łuk AB = łukowi CD ; trzeba dowieść, że $\angle AOB = \angle COD$. W tym celu nałożmy kąt AOB na

kąt COD tak, ażeby miały wierzchołek O wspólny i ażeby ramię OB przybrało kierunek ramienia OD . Z powodu równości promieni OB i OD punkt B upadnie na punkt D , ponieważ wszystkie punkty okręgu są jednakowo oddalone od środka, więc gdy punkt B przystał do punktu D , to i cały łuk BA pójdzie wzdłuż łuku DC , a że z założenia te dwa łuki są sobie równe, więc punkt A upadnie na punkt C , proste OA i OC , mające dwa punkty wspólne, przystaną do siebie (§ 25) i $\angle AOB = \angle COD$.

Uwaga. Twierdzenie powyższe wraz ze swoją wzajemnicą będą jeszcze prawdziwe, gdy dwa kąty środkowe będą miały swoje wierzchołki we środku dwu kół równych, gdyż dowodzenie będzie zupełnie toż samo.

59. Stosunek dwu kątów środkowych można zamienić stosunkiem łuków na zasadzie twierdzenia:

W jednym kole lub w kołach równych stosunek dwu kątów środkowych równa się stosunkowi łuków im odpowiadających.

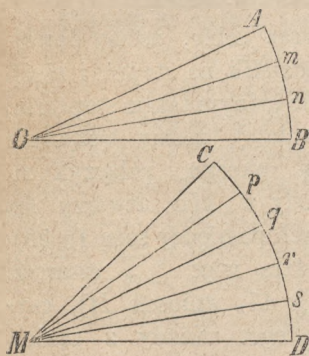


Fig. 48.

Mam dowieść, że jeśli kąty AOB i CMD mają swoje wierzchołki w środkach O i M dwóch równych kół, to

$$\frac{CMD}{AOB} = \frac{CD}{AB},$$

albo, innemi słowy, mam dowieść, że ile razy kąt CMD jest większym od kąta AOB , tyle razy łuk CD jest większym od łuku AB .

Dowodzenie. W tym celu dajmy, że łuk CD (fig. 48) może być podzielonym na pięć równych łuków $Cp=pq=qr=rs=sD$, łuk zaś AB na trzy także łuki $Am=mn=nB=Cp$. Połączymy punkty p, q, r, s ze środkiem M , punkty zaś m i n ze środkiem O , znajdziemy, że kąt CMD zostanie podzielonym na 5, kąt zaś AOB na trzy równe pomiędzy sobą kąty (§ 58), więc

$$\frac{\text{łuk } CD}{\text{łuk } AB} = \frac{5}{3}, \quad \frac{\angle CMD}{\angle AOB} = \frac{5}{3} \text{ i stąd}$$

$$\frac{\angle CMD}{\angle AOB} = \frac{\text{łuk } CD}{\text{łuk } AB} \quad \text{c. b. d. o.}$$

Wniosek. Stosunek łuku CD do AB wyraża się liczbą $\frac{5}{3}$, stosunek kąta COD do kąta AOB wyraża się tą samą liczbą $\frac{5}{3}$; więc widzimy, że powyższe twierdzenie da się jeszcze tak wyrazić: *jaka liczbą wyraża się stosunek dwu kątów środkowych, mających swoje wierzchołki w środkach kół o równych promieniach, taką samą liczbą wyraża się stosunek łuków tym kątom odpowiadających.*

60. Podział okręgu i miara kąta. Od niepamiętnych czasów dzielią każdy okrąg koła na 360 równych części, które nazwano *stopniami* ($^{\circ}$), każdy stopień na 60 *minut* ($'$), każdą minutę na 60 *sekund* ($''$). Tak np. $28^{\circ} 23' 27''$ oznacza łuk 28 stopni 23 minut 27 sekund.

Stopień więc w łuku jest 360-tą częścią okręgu, a ponieważ długość okręgu oczywiście zależy od wielkości jego promienia, więc i długość stopnia łuku bywa rozmaita, stosownie do wielkości okręgu, czyli, innemi słowy, stopień łuku jest *ilością zmienną*.

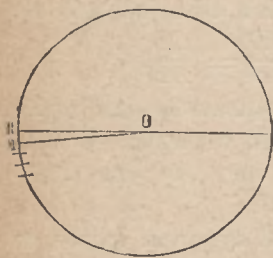


Fig. 49.

Wyobraźmy teraz sobie, żeśmy dowolny okrąg koła podzielili na stopnie i niech NB (fig. 49) będzie jednym takim stopniem, wyobraźmy sobie dalej, żeśmy wszystkie punkty podziału okręgu połączyli ze środkiem O , wtedy w nim utworzy się 360 kątów równych pomiędzy sobą (§ 58), każdy z nich będzie więc $\frac{1}{360}$ czterech kątów prostych (§ 47, wniosek II), czyli $\frac{1}{90}$ kąta prostego. Każdy z takich kątów NOB , jako stanowiący $\frac{1}{90}$ część

kąta prostego, jest ilością stałą, to jest niezależną od wielkości okręgu i nazywa się *stopniem kątowym*, każdy stopień kątowy dzieli się na 60 minut kątowych, każda minuta na 60 sekund kątowych. Stopnie, minuty i sekundy kątowe oznaczają się takimi samymi znakami co i kąty, minuty i sekundy w łuku.

Opierając się na twierdzeniu podanem w § 59 przychodzimy do następującej prawdy:

Każdy kąt zawiera w sobie tyle stopni, minut i sekund kątowych, ile łuk zakreślony z jego wierzchołka dowolnym promieniem i zawarty pomiędzy ramionami kąta zawiera stopni, minut i sekund łuku.

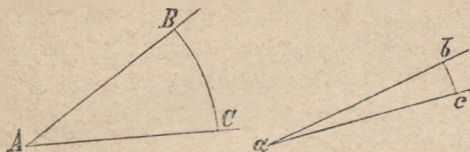


Fig. 50.

Jakoż niech będzie kąt A (fig. 50); nakreślmy kąt $\alpha = 1^\circ$ i z wierzchołków tych dwu kątów promieniami równymi zakreślmy dwa łuki BC i bc , gdzie $bc = 1^\circ$ w łuku. Na zasadzie § 59

$$\frac{A}{a} = \frac{BC}{bc},$$

lecz ponieważ $a = 1^\circ$ kątowi, $bc = 1^\circ$ w łuku, więc

$$\frac{A}{1^\circ \text{ kąt}} = \frac{BC}{1^\circ \text{ w łuku}},$$

to jest ile stopni kątowych (i części stopni) zawiera się w danym kącie A , tyle stopni w łuku zawiera łuk BC —c. b. d. o.

Prawdę tę wyraża się jeszcze tak: *Kąt środkowy ma za miarę łuk zawarty między jego ramionami.* Opierając się na powyższej prawdzie i na uwadze, że kąt prosty ma 90° , łatwo pojmujemy, że dla zmierzenia kąta, to jest dla wyznaczenia stosunku jego do kąta prostego, dość będzie z wierzchołka kąta dowolnym promieniem opisać łuk i wyznaczyć, ile stopni zawiera się w części łuku zawartego pomiędzy ramionami. Jakoż dajmy, żeśmy znaleźli, że łuk zawarty między ramionami kąta ma 45° , wtedy kąt ten będzie $= \frac{1}{2}d$, gdyż stosunek kąta danego do kąta prostego równa się stosunkowi łuku 45° do ćwiartki okręgu czyli 90° . Kąt $30^\circ = \frac{1}{3}d$, kąt $22^\circ 30' = \frac{1}{4}d$. i t. p.

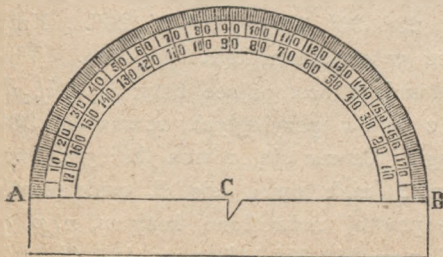


Fig. 51.

61. Przenośnik. Przenośnikiem nazywamy miedziane, drewniane lub rogowe półkoło podzielone na 180° , służące do mierzenia i kreślenia kątów (fig. 51). Mając wymierzyć dany kąt przenośnikiem, należy jego środek tak

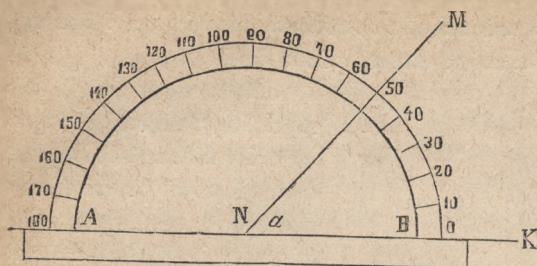


Fig. 52.

prz y ł o ż y ć do wierzchołka kąta, aby promień przenośnika padł wzdłuż jednego ramienia; potem odczytują się stopnie od promienia przenośnika aż do punktu podziału, przez który dru-

gie ramię kąta przechodzi. Tak np. na fig. 52 kąt α ma 50° . Chcąc za pomocą przenośnika nakreślić kąt 50° , kreślimy wzdłuż średnicy przenośnika prostą, następnie punkt podziału przenośnika odpowiadający 50° łączymy ze środkiem N prostą NM , kąt $MNB = 50^\circ$.

62. Pytania i zadania. Co nazywamy okręgiem i co kołem? Co nazywamy łukiem, cięciwą, promieniem i średnicą? Jaka jest własność promieni i średnic jednego koła lub kół równych? Co to jest kąt środkowy? Jakie łuki odpowiadają równym kątom środkowym w jednym kole lub w kołach równych? Jaki zachodzi związek pomiędzy kątami środkowymi i odpowiadającymi im łukami w jednym kole lub w kołach równych? Co to znaczy, że kąt centralny mierzy się łukiem zawartym między jego ramionami? Co to są stopnie, minuty i sekundy łuku i stopnie, minuty i sekundy katowe? Jaka zachodzi pomiędzy nimi różnica? Ile stopni opisuje strzałka minutowa zegara w ciągu a) 15 minut? b) półgodziny? c) 5 minut? Jaki kąt tworzą ze sobą strzałki zegarowe o 1-ej, 2-ej, 3-ciej, 4-ej i 5-ej godzinie? Nakreślić za pomocą przenośnika kąty 5° , 10° , 20° , 25° . Nakreślić za pomocą przenośnika kąty $18^\circ 15' 25''$, $23^\circ 35' 15''$ i $38^\circ 9' 20''$. Kąty 18° , $47^\circ 30'$, 120° , 105° wyrazić w częściach kąta prostego. Wyrazić w stopniach, minutach i sekundach następujące kąty: $\frac{2}{3}d$, $\frac{7}{15}d$, $\frac{8}{25}d$, $\frac{7}{18}d$, $\frac{171}{1800}d$. Jeden z kątów przyległych równa się $38^\circ 18' 25''$, czemu się równa drugi? Czemu się równa każdy z dwu kątów przyległych, jeśli większy z nich równa się $\frac{5}{4}$ mniejszego? Około punktu po jednej stronie prostej nakreślono kąty m , n , p , q i r , z których $m = 18^\circ 15' 27''$, $n = 34^\circ 15' 13''$, $p = 42^\circ 6' 18''$,

$q = 12^{\circ} 18' 12''$, obliczyć kąt r . Dwie proste, przecinając się ze sobą, tworzą kąty, z których jeden $= 28^{\circ} 15' 20''$, czemu się równają trzy pozostałe kąty? Mając dane dwa punkty A, B , należy wyznaczyć taki punkt C , aby kąt $BAC = 50^{\circ}$; ile rozwiązań ma to zadanie? Obracając trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, połączyć je trzema prostymi i wyznaczyć za pomocą przenośnika sumę trzech utworzonych tym sposobem kątów. Powtórzyć to wykreślenie kilka razy. Podobne wykreślenie i mierzenie wykonać dla czterech punktów.

V. Linije równoległe i niektóre twierdzenia o kątach.

63. Kąty, jakie powstają, gdy jedna prosta przecina dwie inne.

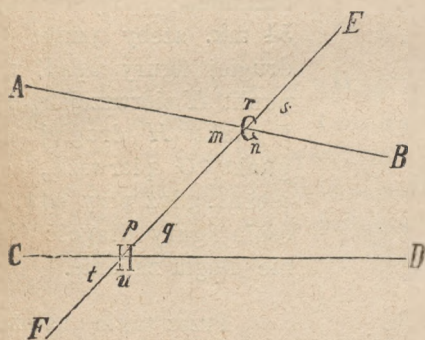


Fig. 53.

Dwie proste AB i CD (fig. 53), przecięte trzecią EF , która się nazywa *sieczną* albo *poprzączną*, tworzą z nią osiem kątów: r, s, m, n, p, q, t, u , które mianujemy jak następuje:

1-sze. Kąty *naprzemianległe wewnętrzne*; są to dwa kąty wewnętrzne, które leżą z obydwu stron siecznej EF . Takimi są $\angle m$ i $\angle q$, jako też $\angle n$ i $\angle p$.

2-re. Kąty *naprzemianległe zewnętrzne*; są to dwa kąty zewnętrzne, które leżą z obydwu stron *poprzącznej*. Takimi są s i t , r i u .

3-cie. Kąty *odpowiadające*; są to dwa kąty leżące po jednej stronie *poprzącznej*: jeden wewnętrzny a drugi zewnętrzny. Takimi są s i q , n i u , r i p , m i t .

4-te. Kąty *wewnętrzne*, które leżą wewnątrz dwu prostych AB i CD , po jednej stronie *poprzącznej*. Takimi są n i q , p i m .

5-te. Kąty zewnętrzne; są to kąty leżące zewnątrz danych prostych AB i CD po jednej stronie siecznej. Takimi są s i u , r i t .

64. **Twierdzenie.** Dwie proste są równoległe, jeśli tworzą z poprzeczną kąty naprzemianległe wewnętrzne równe.

Dowodzenie. Dajmy, że (fig. 54)

$$\angle a = \angle b;$$

trzeba dowieść, że

$$AB \parallel CD.$$

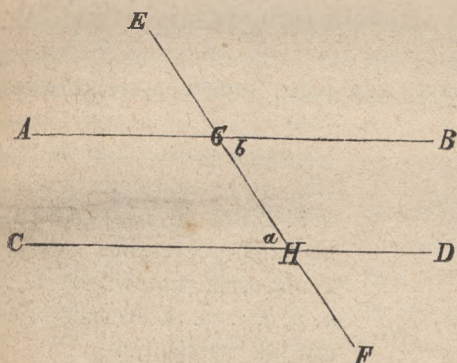


Fig. 54.

W tym celu wyobraźmy sobie przedewszystkiem, żeśmy fig. 54 podnieśli z miejsca, następnie obrócili ją tak, jak pokazuje fig. 55, i na koniec położyli na fig. 54 tak, ażeby punkt G drugiej figury upadł na punkt H pierwszej figury i punkt H drugiej na punkt G pierwszej, co można, gdyż przy odwróceniu figury długość GH nie uległa zmianie.

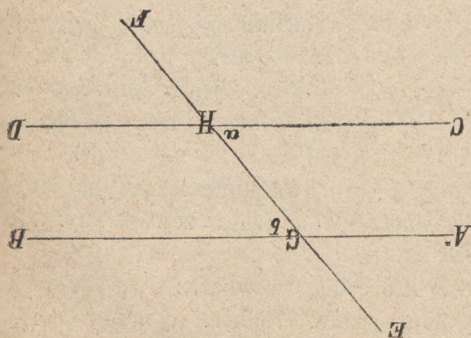


Fig. 55.

Przez takie nałożenia prosta $E'F'$ drugiej figury w całej swej rozciągłości przystanie do prostej FE pierwszej (§ 24, wniosek 1). Z powodu równości kątów b i a prosta AB drugiej figury przystanie do prostej CD pierwszej; z powodu równości tychże samych kątów

prosta CD drugiej figury przystanie do prostej AB pierwszej figury, tak że wskutek równości kątów a i b figura odwrócona w zupełności przystanie do danej.

Dowiodłszy tej prawdy, dajmy, że przy założeniu $\angle a = \angle b$, proste AB i CD nie są równoległe, lecz przecinają się w jakimś punkcie M (fig. 56), leżącym z prawej strony figury.

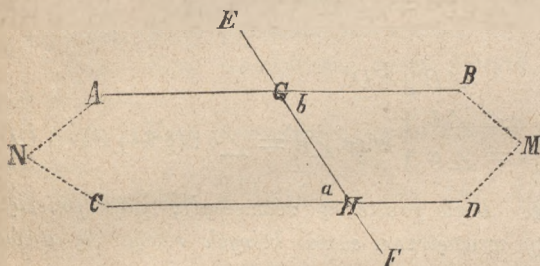


Fig. 56.

Otóż na zasadzie dowiedzionej wyżej prawdy, przypuszczenie takie jest niemożliwem, gdyż ono pociąga za sobą konieczność przecięcia się prostych i z lewej strony, albowiem po od-

wróceniu figury, prawa jej strona przechodzi na lewą i przystaje do tej lewej w zupełności. Lecz dwie różne proste AB i CD nie mogą mieć dwu punktów wspólnych (§ 24, wniosek 1).

Sprzeczność powyższa zostanie usunięta tylko wtedy, gdy proste AB i CD nie mają żadnego punktu wspólnego, czyli kiedy są równoległe.

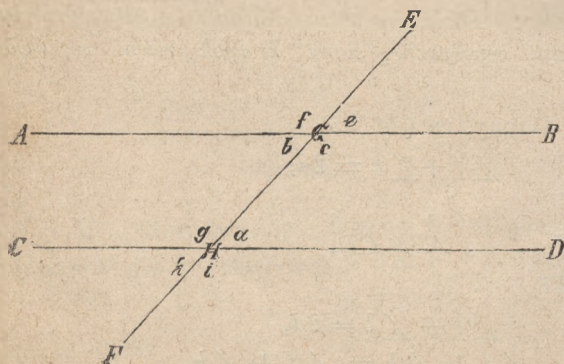


Fig. 57.

65. Twierdzenie. Dwie linie są równoległe, gdy przecięte poprzeczną tworzą kąty naprzenianległe zewnętrzne równe.

Dowodzenie. Dajmy, że (fig. 57)

$$\angle e = \angle k;$$

należy dowieść, że $AB \parallel CD$.

Ponieważ $\left. \begin{array}{l} \angle e = \angle b \\ \angle k = \angle a \end{array} \right\}$ więc $\angle a = \angle b$ i (§ 64) $AB \parallel CD$.
(§ 50)

66. Twierdzenie. *Dwie proste są równoległe, gdy przecięte poprzeczną tworzą kąty odpowiadające równe.*

Dowodzenie. Dajmy, że (fig. 57).

$$\angle e = \angle a;$$

należy dowieść, że

$$AB \parallel CD.$$

Ponieważ (§ 50) $\left. \begin{array}{l} \angle e = \angle b \\ \angle e = \angle a \end{array} \right\}$ więc $\angle a = \angle b$ i (§ 64) $AB \parallel CD$.
i z założenia

67. Twierdzenie. *Dwie proste są równoległe, gdy przecięte poprzeczną tworzą kąty wewnętrzne, suma których równa się dwóm kątom prostym.*

Dowodzenie. Dajmy, że (fig. 57)

$$\angle b + \angle g = 2d;$$

należy dowieść, że

$$AB \parallel CD.$$

Ponieważ (§ 47) $\angle g + \angle a = 2d$,
więc $\angle b + \angle g = \angle g + \angle a$
i $\angle b = \angle a$, zatem (§ 64) $AB \parallel CD$.

68. Twierdzenie. *Dwie proste są równoległe, gdy przecięte poprzeczną tworzą kąty zewnętrzne, suma których równa się dwóm kątom prostym.*

Dowodzenie. Dajmy, że (fig. 55)

$$\angle f + \angle k = 2d;$$

trzeba dowieść, że

$$AB \parallel CD.$$

Ponieważ (§ 47)

$\angle f + \angle b = 2d$,
więc $\angle f + \angle k = \angle f + \angle b$,
i $\angle k = \angle b$,
a zatem (§ 66) $AB \parallel CD$.

69. **Pewnik.** Przez punkt, dany zewnątrz prostej, można poprowadzić jedną tylko równoległą do tej prostej.

Pewnik ten należy uważać jako wynik doświadczenia.

70. **Wzajemnice twierdzeń** §§ 64, 65, 66, 67 i 68.

Dwie równoległe przecięte trzecią poprzeczną tworzą z nią:

1-sze. Kąty naprzemianległe wewnętrzne równe.

2-re. Kąty naprzemianległe zewnętrzne równe.

3-cie. Kąty odpowiadające równe.

4-te. Kąty wewnętrzne, suma których równa się dwóm kątom prostym.

5-te. Kąty zewnętrzne, suma których równa się dwóm kątom prostym.

Dowodzenie. Dajmy, że (fig. 58) $AB \parallel CD$;

trzeba dowieść, że

$$\angle a = \angle b.$$

Dajmy bowiem, że $\angle a$ nie jest równym $\angle b$ lecz że jest mniejszym od $\angle b$, w takim razie dla sprowadzenia równości tych dwu kątów należy $\angle a$ powiększyć tak, ażeby $\angle FKM = \angle b$; wtedy mielibyśmy dwie proste

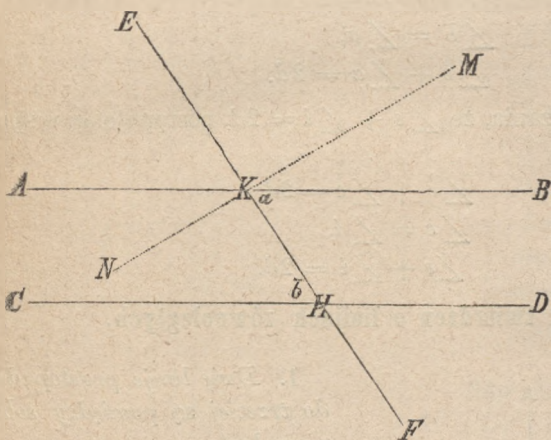


Fig. 58.

CD i MN , które przecięte trzecią EF utworzyłyby dwa kąty naprzemianległe wewnętrzne $\angle FKM$ i $\angle b$ równe, więc (§ 64) byłyby

$$MN \parallel CD,$$

a z założenia

$$AB \parallel CD,$$

lecz to się sprzeciwia pewnikowi (§ 69).

2-re. Dajmy, że $AB \parallel CD$ (fig. 57);

należy dowieść, że $\angle e = \angle k$.

Na zasadzie poprzedniego

lecz
$$\left. \begin{aligned} \angle a &= \angle b, \\ \angle b &= \angle e \\ \angle a &= \angle k \end{aligned} \right\} \text{ więc } \angle e = \angle k.$$

3-cie. Dla okazania równości $\angle e$ i $\angle a$, uważamy, że na zasadzie poprzedniego

lecz
$$\left. \begin{aligned} \angle a &= \angle b \\ \angle b &= \angle e \end{aligned} \right\} \text{ więc } \angle e = \angle a.$$

4-te. Dla okazania, że $\angle c + \angle a = 2d$, rozumujemy, jak następuje:

lecz
$$\begin{aligned} \angle b + \angle c &= 2d; \\ \angle b &= \angle a, \end{aligned}$$

więc
$$\angle c + \angle a = 2d.$$

5-te. Dla okazania, że $\angle e + \angle i = 2d$, postępujemy w sposób następujący.

Wiemy, że

$$\angle e + \angle c = 2d;$$

lecz

$$\angle c = \angle i,$$

więc

$$\angle e + \angle i = 2d.$$

71. Wnioski z twierzeń o liniach równoległych.

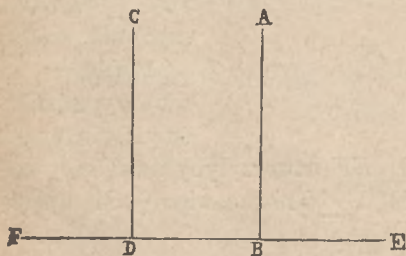


Fig. 59.

1. Dwie linie prostopadłe do trzeciej są pomiędzy sobą równoległe.

Jakoż dajmy, że proste AB i CD (fig. 59) są prostopadłe do prostej EF .

Ponieważ w tem założeniu $\angle B$ i $\angle D$ są proste, więc $\angle B + \angle D = 2d$, i na zasadzie (§ 67) $AB \parallel CD$.

2. Gdy jedna z dwu równoległych jest prostopadłą do prostej, to i druga będzie do tej ostatniej prostopadłą.

Jakoż, jeśli $AB \parallel CD$ (fig. 59), to (§ 70, 4) $\angle B + \angle D = 2d$; założywszy jeszcze, że prosta AB jest prostopadłą do EF , będzie $\angle B = d$, więc i $\angle D = d$, a tem samem prosta CD jest prostopadłą do EF .

Dwie proste równoległe do trzeciej są równoległe między sobą.

Dajmy, że $AB \parallel EF$, $CD \parallel EF$ (fig. 60), trzeba dowieść, że $AB \parallel CD$.

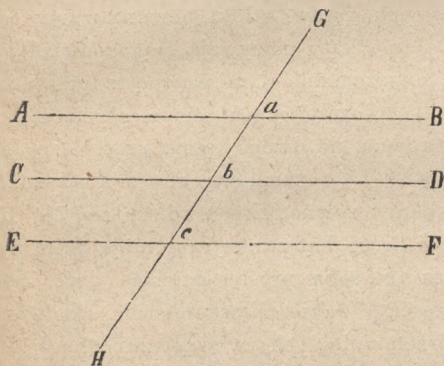


Fig. 60.

Poprowadziwszy sieczną GH , widzimy, że (§ 70, 3)

$\left. \begin{array}{l} \angle a = \angle c \\ \angle b = \angle c \end{array} \right\} \text{ więc}$
 $\angle a = \angle b \text{ i } AB \parallel CD$
 (§ 66).

72. Twierdzenie.

Dwa kąty, mające ramiona równoległe, każde do każdego, albo są równe, albo suma ich równa się dwóm kątom prostym.

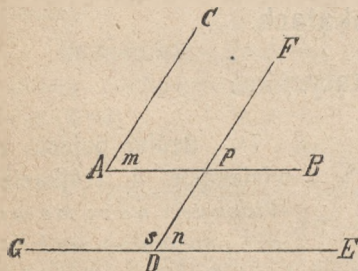


Fig. 61.

Dowodzenie. Dajmy, że $AC \parallel DF$ i $AB \parallel GE$ (fig. 61); mamy dowieść, że $\angle m = \angle n$.

$\angle m = \angle p$, gdyż $AC \parallel DF$ (§ 70, 3),
 $\angle n = \angle p$, gdyż $AB \parallel GE$,
 więc $\angle m = \angle n$.

Oprócz tego widzimy, że kąt s ma te same ramiona co i kąt n , lecz oczywiście kąt s nie może być równym $\angle m$, gdyż pierw-

szy jest rozwarty, drugi ostry. Dla otrzymania związku pomiędzy tymi kątami, postępuje się w sposób następujący:

$$\left. \begin{array}{l} \angle s + \angle n = 2d \text{ (§ 47)} \\ \angle n = \angle m \end{array} \right\} \text{ więc } \angle s + \angle m = 2d.$$

Stąd wynika, że dwa kąty mające ramiona równoległe są równe, gdy oba są ostre, albo oba rozwarte; jeśli zaś jeden z nich jest ostry, a drugi rozwarty, to suma tych kątów równa się dwóm kątom prostym.

73. Pytania i zadania. Jakie linie nazywają się równoległymi? Jakie kąty powstają, gdy dwie równoległe przetniemy poprzeczną? Jakie są własności tych kątów? Jaki pewnik mamy odnośnie do linii równoległych? Jakie kąty nazywają się odpowiadającymi? Jakie kąty nazywają się naprzemianległymi wewnętrznymi i jakie zewnętrznymi. Kiedy dwa kąty o ramionach równoległych są sobie równe, a kiedy suma ich równa się dwóm kątom prostym? Jeżeli kąt a (fig. 57) równa się $48^\circ 15'$, czemu się równają pozostałe siedm kątów? Jeżeli jeden z kątów zewnętrznych równa się $78^\circ 15' 28''$, czemu powinien się równać drugi kąt zewnętrzny, aby linie były równoległe? Jaki kąt tworzą ze sobą proste, dzielące dwa kąty wewnętrzne na dwie równe części? Jakie położenie mają względem siebie dwójścienne kątów naprzemianległych wewnętrznych? Jeżeli jeden z dwu kątów wewnętrznych równa się: a) $\frac{1}{5}$ drugiego, b) 1,25 drugiego, c) 0,1515... drugiego, czemu się równa każdy z nich?

II. O wielokątach.

1. Trójkąty.

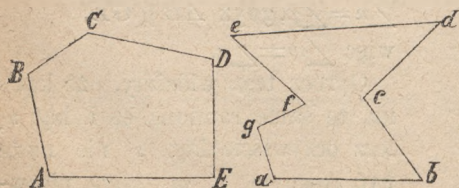


Fig. 62.

74. Ogólne pojęcie o wielokątach i trójkątach. Wielokątem nazywamy część płaszczyzny zamkniętej linijami prostymi, jak np. $ABCDEA$ i $abcdefga$ (fig. 62).

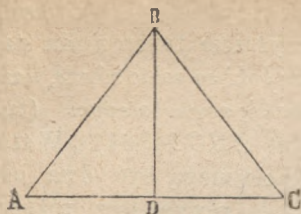


Fig. 63.

Najprostszy ze wszystkich wielokątów jest ten, który jest ograniczony trzema prostymi i taki nazywa się *trójkątem* (fig. 63).

Każdy trójkąt ma trzy *boki*: AB , BC , AC , trzy *kąty*: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, trzy *wierzchołki*: A , B , C .

Każdy bok ma dwa kąty *przyległe* (np. bok AC ma $\angle A$ i $\angle C$ *przyległe*) i jeden kąt *przeciwległy* (np. $\angle B$ jest *przeciwległy* bokowi AC). Każdy kąt jest *zawarty* pomiędzy dwoma bokami (np. $\angle C$ jest *zawarty* pomiędzy bokami BC i AC), a trzeci ma *przeciwległy* (np. $\angle C$ ma bok *przeciwległy* AB).

Bok, na którym trójkąt został wystawiony, nazywa się *podstawą trójkąta*. Ponieważ o każdym boku przypuścić można, że na nim trójkąt wykreślony został, więc każdy bok uważany być może za podstawę. Na fig. 63 bok AC jest podstawą. Wierzchołek trójkąta *przeciwległy* podstawie nazywa się *wierzchołkiem*, a prostopadła poprowadzona z wierzchołka na podstawę nazywa się *wysokością* trójkąta. Na fig. 63 B jest wierzchołkiem, a BD wysokością.

Uwaga. Część płaszczyzny, ograniczoną jakimikolwiek linijami prostymi lub krzywymi, nazywamy *figurą*.

75. Twierdzenie. *W każdym trójkącie suma dwu boków jest większą od trzeciego; różnica zaś dwu boków jest mniejszą od trzeciego.*

Dowodzenie. Ponieważ boki BC i BA (fig. 63) tworzą linię łamaną pomiędzy punktami A i C , bok zaś AC linię prostą, więc (§ 24)

$$BC + BA > AC.$$

Przyjmując, że $BC > BA$, otrzymamy przedewszystkiem

$$AC + AB > BC;$$

odejmując z obu stron tej nierówności po równym boku AB , otrzymamy (§ 27, 7)

$$AC > BC - AB.$$

76. Wniosek. W trójkącie wszystkie trzy boki mogą być sobie równe, gdyż warunkowi podanemu w powyższem twierdzeniu staje się zadość. *Trójkąt, w którym wszystkie trzy boki są sobie równe, nazywa się równobocznym* (trójkąt ABC fig. 64). W trójkącie mogą być dwa boki sobie równe, lecz różne od trzeciego, pod warunkiem jednak, ażeby każdy z równych boków był większym od połowy trzeciego. Trójkąt, w którym dwa boki są

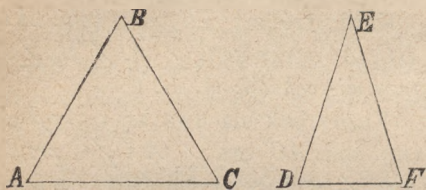


Fig. 64.

sobie równe, nazywa się *równoramiennym* (trójkąt DEF fig. 64). W trójkącie równoramiennym za podstawę przyjmujemy nierówny bok.

77. Twierdzenie. *Jeżeli na wspólnej podstawie nakreślimy dwa trójkąty, z których jeden obejmuje drugi, to suma boków niewspólnych jest w trójkącie obejmującym większą, aniżeli suma tych boków w trójkącie objętym.*

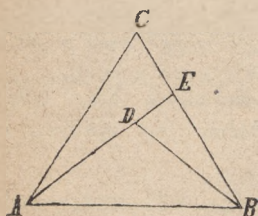


Fig. 65.

Założenie. Trójkąt ABC obejmuje trójkąt ABD (fig. 65);

należy dowieść,

że $AC + CB > AD + DB$.

Dowodzenie. W tym celu przedłużamy bok AD do przecięcia się z bokiem CD w punkcie E i otrzymamy (§ 75)

$$AC + CE > AD + DE;$$

$$DE + EB > DB;$$

dodając, otrzymamy

$$AC + CE + DE + EB > AD + DE + DB;$$

odejmując po DE , otrzymamy

$$AC + CE + EB > AD + DB,$$

czyli

$$AC + CB > AD + DB.$$

c. b. d. o.

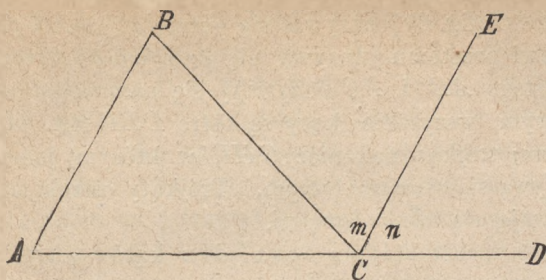


Fig. 66.

prowadźmy równoległą CE do boku AB ; utworzą się dwa kąty m i n .

$$\angle m = \angle B \text{ (§ 70, 1);}$$

$$\angle n = \angle A \text{ (§ 70, 3);}$$

lecz

$$\angle m + \angle n + \angle C = 2d \text{ (§ 47),}$$

więc

$$\angle A + \angle B + \angle C = 2d.$$

c. b. d. o.

79. Wnioski. 1-szy. *Suma kątów trójkąta jest ilością stałą, to jest we wszystkich trójkątach bez względu na ich kształt suma kątów jest jedna i ta sama.*

2-gi. *Znając dwa kąty trójkąta lub ich sumę, możemy otrzymać trzeci, odejmując od dwu prostych sumę dwu danych kątów. Jeśli np. kąt $A = 18^\circ 50'$, $\angle B = 47^\circ 10'$, to $\angle C = 180^\circ - (18^\circ 50' + 47^\circ 10') = 114$. Stąd też wypada, że jeśli dwa kąty jednego trójkąta, pojedynczo brane lub razem wzięte, równają się dwóm kątom drugiego trójkąta, to i trzeci kąt pierwszego trójkąta równa się trzeciemu kątowi drugiego.*

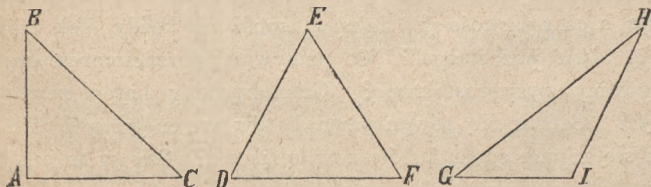


Fig. 67.

78. Twierdzenie. *Suma kątów trójkąta równa się dwóm kątom prostym.*

Mamy dowieść, że $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$ (fig. 66).

Dowodzenie.

Przedłużmy bok AC trójkąta i po-

3-ci. *W trójkącie może tylko być jeden kąt prosty albo rozwarty. Trójkąt, w którym je-*

den kąt jest prosty ABC (fig. 67) nazywa się *prostokątnym*. Bok BC przeciwległy kątowi prostemu nazywa się *przeciwprostokątną*, ramiona zaś kąta prostego AB i AC nazywają się *przyprostokątnemi*. Trójkąt, w którym wszystkie kąty są ostre DEF (fig. 67) nazywa się *ostrokątnym*; trójkąt nakoniec GHI , w którym jeden kąt jest rozwarty, nazywa się *rozwartokątnym*. Trójkąty ostrokątne i rozwartokątne nazywają się *ukośnokątnymi*.

4-ty. W trójkącie prostokątnym suma dwu kątów ostrych równa się kątowi prostemu.

5-ty. Z punktu danego zewnątrz prostej można do niej poprowadzić jedną tylko prostopadłą, w przeciwnym bowiem razie utworzyłby się trójkąt, mający dwa kąty proste.

6-ty. Jeżeli jeden z boków trójkąta ABC (fig. 67) przedłużymy, to kąt BCD nazywa się *kątem zewnętrznym* trójkąta, tak że *kątem zewnętrznym trójkąta nazywamy kąt utworzony przez jeden bok trójkąta i przez przedłużenie drugiego boku, pierwszemu przyległego*. Oczywiście, że każdy trójkąt ma trzy kąty zewnętrzne. Kąty A , B i C dla odróżnienia od kątów zewnętrznych nazywają się *kątami wewnętrznymi* trójkąta.

Z dowodzenia § 78 wypada, że kąt zewnętrzny trójkąta równa się sumie dwu kątów wewnętrznych, naprzeciwko niego leżących.

7-my. *Każdy kąt zewnętrzny trójkąta jest większym od kąta wewnętrznego, jemu nieprzyległego.*

8-my. *Kąt zewnętrzny, utworzony przez przeciwprostokątną i przedłużenie przykątnej, jest kątem rozwartym.*

80. Pytania i zadania. Co nazywamy wielokątem? Który wielokąt jest najprostszym? Co nazywamy figurą? Z ilu części składa się trójkąt? Jak się dzielą trójkąty ze względu na wielkość kątów? Jak się dzielą trójkąty ze względu na wielkość boków? Co nazywamy podstawą, a co wysokością? Jaką własność ma każdy bok trójkąta względem dwu pozostałych? Co nazywamy przeciwprostokątną? Co nazywamy przyprostokątną? Co nazywamy kątem zewnętrznym trójkąta? Czemu się równa suma kątów wewnętrznych trójkąta? Czemu się równa suma kątów zewnętrznych? Czy w trójkącie mogą być dwa kąty rozwarte lub proste? Czemu się równa suma kątów wewnętrznych przyległych przeciwprostokątnej? Czemu się rów-

na kąt zewnętrzny trójkąta? Czy można zbudować trójkąt z trzech boków, długości których są: 7, 10 i 19? Czy można zbudować trójkąt z boków: a) 4, 3, 1; b) 6, 10, 12; c) 45, 38, 78? Znamy dwa boki trójkąta 10 i 17, jakie są granice dla trzeciego boku, to jest od czego powinien być większym i od czego mniejszym? Ile wysokości ma trójkąt? Nakreślić wszystkie wysokości trójkątów: ostrokątnego, prostokątnego i rozwartokątnego. Narysować za pomocą cyrkla i linijaka trójkąt o bokach 3, 4 i 5 i przekonać się za pomocą przenośnika, co to jest za trójkąt? Podstawa trójkąta równoramiennego równa się 10 calom; od czego powinno być większem każde ramię? Czy może być trójkąt o kątach: a) 72° , 88° , 70° ; b) $45^{\circ} 18' 30''$, $72^{\circ} 15' 30''$, $18^{\circ} 16'$; c) $1\frac{1}{3}d$, $\frac{1}{4}d$, $\frac{1}{2}d$? Dane są dwa kąty trójkąta: a) $47^{\circ} 15' 25''$, $50^{\circ} 12'$; b) $120^{\circ} 18'$, $18^{\circ} 16' 30''$; c) $71^{\circ} 15'$, $48^{\circ} 45'$; e) $\frac{2}{3}d$, $\frac{4}{5}d$; f) $1,18d$, $0,32d$ —obliczyć kąt trzeci. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego równa się: a) $72^{\circ} 18'$; b) $14^{\circ} 18' 30''$; c) $\frac{3}{8}d$; e) $0,72d$ —obliczyć drugi kąt ostry. Obliczyć kąty zewnętrzne trójkąta, dwa wewnętrzne którego są: a) $67^{\circ} 18'$, $45^{\circ} 16''$; b) $\frac{2}{3}d$, $\frac{4}{5}d$; c) $1,2d$, $0,08d$. Jeden z kątów trójkąta jest dwa razy większym od drugiego, a drugi dwa razy większym od trzeciego—obliczyć każdy kąt trójkąta. Kąt zewnętrzny trójkąta równa się 136° , a jeden z kątów wewnętrznych jemu nieprzyległy równa się 46° , obliczyć kąty wewnętrzne trójkąta. Obliczyć kąt, jaki tworzą ze sobą proste, dzielące na dwie równe części dwa kąty ostre trójkąta prostokątnego. Kąty trójkąta mają się do siebie jak $0,25$; $\frac{5}{12}$; $0,833\dots$ —obliczyć kąty. Jeden z kątów zewnętrznych trójkąta prostokątnego równa się $\frac{7}{6}d$, obliczyć kąty wewnętrzne. Wiedząc, że $\angle A + \angle B = 1\frac{1}{2}d$, $\angle A - \angle B = \frac{1}{6}d$ —obliczyć kąty trójkąta. Obliczyć kąty trójkąta, wiedząc, że $\angle A - \angle B = \frac{3}{8}d$, $\angle C - \angle B = \frac{1}{2}d$.

2. Przystawanie trójkątów.

81. Ogólne uwagi. Dwa trójkąty, które mogą być tak na sobie położone, ażeby zupełnie do siebie przystały, nazywają się przystającymi lub równymi. Oczywiście, że jeżeli wszystkie kąty i boki jednego trójkąta będą równe wszystkim odpowiednim bokom i kątom drugiego trójkąta, to takie dwa trójkąty są przystające; lecz zobaczymy, że je-

żeli trzy tylko z sześciu części składowych jednego trójkąta będą równe trzem odpowiednim częściom składowym drugiego trójkąta,

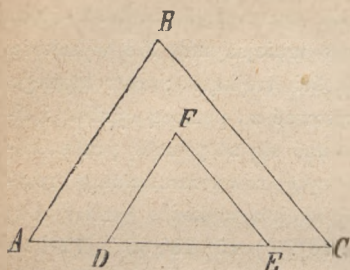


Fig. 68.

to te dwa trójkąty są przystające. Zadaniem niniejszego rozdziału jest zbadać warunki przystawiania trójkątów. Przedewszystkiem jednak bardzo łatwo widzieć możemy, że równość kątów dwu trójkątów nie pociąga za sobą równości trójkątów. Jakoż niech będzie trójkąt ABC (fig. 68), na podstawie tego trójkąta obierzmy dwa punkty D i E i poprowadźmy przez nie dwie proste DF

i EF odpowiednio równoległe do boków AB i BC , otrzymamy trójkąt DFE , którego $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle C$ (§ 72), $\angle F = \angle B$ (§ 79, wn. 2). Kąty więc trójkąta DFE są odpowiednio równe kątom trójkąta ABC , lecz DEF jest oczywiście mniejszym od trójkąta ABC .

82. Pierwsze twierdzenie o przystawianiu trójkątów. Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają po jednym boku równym, leżącym przy dwu kątach odpowiednio równych.

Niech będzie (fig. 69) bok $AC = DF$, $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$. Należy okazać, że trójkąty ABC i DEF są sobie równe.

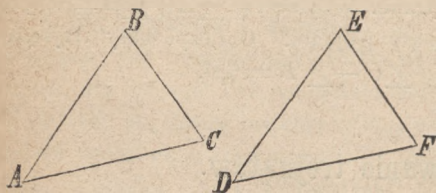


Fig. 69.

Dowodzenie. Położmy trójkąt DEF tak na trójkąt ABC , aby punkt D padł na punkt A i bok DF przybrał kierunek boku AC . Dla równości tych dwu boków punkt F upadnie na punkt C i bok DF przystanie do AC (§ 24); dla

równości $\angle A$ i $\angle D$, bok DE padnie wzdłuż boku AB , dla równości zaś $\angle C$ i $\angle F$ bok FE pójdzie w kierunku boku CB , wypada stąd, że punkt E przecięcia się dwu boków DE i FE le-

żeć musi jednocześnie na dwu bokach AB i CB , a zatem punkt ten leżeć musi na punkcie B , i trójkąt DEF przystanie do trójkąta ABC .

83. **Wnioski.** 1-szy. Dwa trójkąty **prostokątne** są sobie równe, jeżeli mają:

a) po równej przyprostokątnej i po przyległym jej kącie ostrym równym;

b) po równej przyprostokątnej i po przeciwległym jej ostrym kącie równym;

c) po przeciwprostokątnej i po ostrym kącie równym.

2-gi. Ze sposobu przystawiania trójkątów ABC i DEF widzimy, że $\angle B = \angle E$, bok $AB = DE$, bok $BC = EF$, t. j. że w równych trójkątach kąty równe leżą naprzeciwko boków równych i boki równe naprzeciwko kątów równych.

3-ci. Trójkąt mający dwa kąty równe jest równoramienny, t. j. boki leżące naprzeciwko kątów równych są sobie równe.

Dajmy, że (fig. 70) $\angle A = \angle B$, należy dowieść, że $AC = CB$. W tym celu wyobraźmy sobie drugi trójkąt DEF mający $\angle D = \angle A$, a tem samem $\angle F = \angle B$ i bok $DF = AB$.

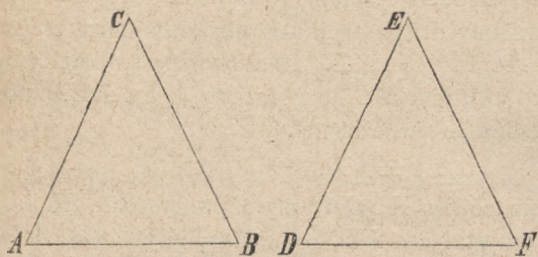


Fig. 70.

Jeżeli trójkąt ABC położymy na trójkąt DEF , tak aby punkty A i B padły odpowiednio na punkty D i F , to na zasadzie § 83 (wn. 2) bok $AC = DE$.

Jeżeli teraz trójkąt ABC odwró-

cimy i nałożymy go na DEF tak, aby punkty B i A padły odpowiednio na D i F , wtedy bok $AC = DE$, a więc bok $AC =$ bokowi CB .

4-ty. Trójkąt, mający wszystkie kąty równe, jest równoboczny.

84. Drugie twierdzenie o przystawianiu trójkątów. *Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają po dwa boki odpowiednio równe i jeżeli kąty pomiędzy tymi bokami zawarte są równe.*

Niech będzie (fig. 69) $AB=DE$, $BC=EF$, $\angle B=\angle E$, należy dowieść, że trójkąt $ABC=$ trójkątowi DEF .

Dowodzenie. W tym celu nałożmy trójkąt DEF na trójkąt ABC , tak ażeby wierzchołek E upadł na wierzchołek B ; bok ED przybrał kierunek boku BA i oba trójkąty znajdowały się po jednej stronie prostej AB . Dla równości DE i AB punkt D upadnie na A , dla równości $\angle B$ i $\angle E$, bok EF przybierze kierunek boku BC ; dla równości EF i BC punkt F upadnie na punkt C i bok DF przystanie do boku AC . Dwa więc trójkąty przystaną do siebie.

85. Wnioski. 1-szy. Ze sposobu przystawiania do siebie trójkątów ABC i DEF wypada, że $\angle A=\angle D$, $\angle C=\angle F$, $AC=DF$, to jest tak samo jak wniosek 2 § 83.

2-gi. Dwa trójkąty prostokątne są sobie równe, jeżeli mają po dwie przyprostokątne równe.

3-ci. W trójkącie równoramiennym kąty leżące naprzeciwko boków równych są sobie równe.

Dajmy, że (fig. 70) $AC=BC$, należy dowieść, że $\angle A=\angle B$.

W tym celu nakreślmy drugi trójkąt równoramienny DEF , w którym $DE=EF=AC$ i $\angle C=\angle E$. Nałożywszy trójkąt ABC na trójkąt DEF , tak aby bok AC przysłał do boku DE , znajdziemy, według poprzedniego twierdzenia,

$$\angle A=\angle D.$$

Odwróciwszy teraz trójkąt ABC i przyłożywszy go do trójkąta DEF , tak ażeby CB przysłał do ED , co można, gdyż $CB=AC=EF$, znajdziemy, że

$$\angle B=\angle D,$$

więc

$$\angle A=\angle B.$$

4-ty. W trójkącie równoramiennym kąty równe są ostre (§ 79, 3).

5-ty. W trójkącie równobocznym wszystkie kąty są sobie równe i każdy z nich równa się $\frac{2}{3}d$.

86. Trzecie twierdzenie o przystawianiu trójkątów. *Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają wszystkie trzy boki odpowiednio równe.*

Niech będzie (fig. 71) $AC=DE$, $CB=EF$, $AB=DF$, należy dowieść, że $\triangle ABC=\triangle DEF$.

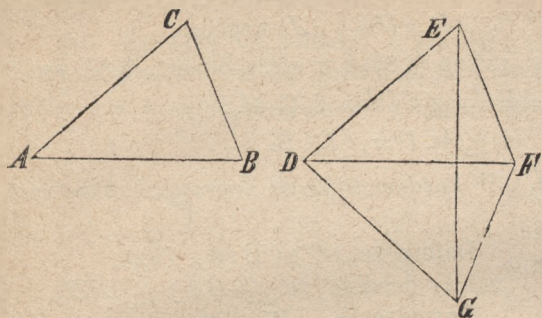


Fig. 71.

Dowodzenie.

W tym celu przyłożmy $\triangle ABC$ do $\triangle DEF$ tak, aby bok AB przysłał do boku DF i wierzchołek C padł na jakiś punkt G i cały $\triangle ABC$ przybrał położenie DFG , tak iż $AC=DE$

$=DG$, $CB=EF=FG$, $\angle C=\angle G$. Połączymy punkty E i G prostą EG , otrzymamy dwa $\triangle$ równoramienne DEG i EFG , w których (85, wn. 3)

$$\angle DEG=\angle DGE,$$

$$\angle FEG=\angle FGE,$$

$$\text{więc} \quad \angle DEG+\angle FEG=\angle DGE+\angle FGE,$$

$$\text{czyli} \quad \angle DEF=\angle DGF=\angle C.$$

Stąd wypada, że dwa $\triangle$ ACB i DEF mają kąty C i E równe, a że boki AC i CB , DE i EF , obejmujące te kąty, są z założenia odpowiednio równe, więc $\triangle ABC=\triangle DEF$.

87. **Wnioski.** 1. Dowiedliśmy, że $\angle C=\angle E$ i zatem idzie, że $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle F$, to jest, że w równych $\triangle$ ach równe kąty leżą naprzeciwko boków równych, i odwrotnie.

2. W $\triangle$ równoramiennym prosta, łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy, jest prostopadłą do podstawy i dzieli kąt przy wierzchołku na dwie równe części.

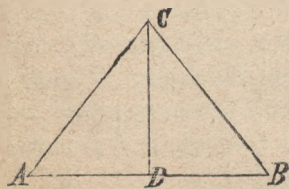


Fig. 72.

Dajmy, że (fig. 72) $AC=CB$, $AD=DB$; mamy dowieść, że

$$\angle ADC=\angle CDB=d$$

$$\text{i } \angle ACD = \angle DCB.$$

Dwa trójkąty ACD i CDB mają wszystkie trzy boki odpowiednio równe:

$$AC = CB, AD = DB \text{ i } CD \text{ wspólny,}$$

więc trójkąty te są sobie równe (§ 86) i w szczególności (§ 87, wn. 1)

$$\angle ADC = \angle CDB = d \text{ (§ 44)}$$

$$\text{i } \angle ACD = \angle DCB.$$

88. Twierdzenie. *W każdym trójkącie naprzeciwko boku większego leży kąt większy.*

Dajmy, że $AC > CB$ (fig. 73), należy dowieść, że $\angle CBA > \angle CAB$.

Dowodzenie. W tym celu na boku większym CA , poczynawszy od wierzchołka C , odetnijmy długość $CD = CB$ i poprowadźmy prostą BD .

W trójkącie równoramiennym CDB ($CD = CB$) $\angle CDB = \angle CBD$ (§ 85, 3).

Lecz $\angle CBD$ stanowi tylko część $\angle CBA$, więc,

$$\angle CBA > \angle CDB,$$

lecz kąt CDB jako zewnętrzny dla trójkąta ADB jest większym od kąta wewnętrznego CAB (§ 79, 7), więc tembardziej

$$\angle CBA > \angle CAB.$$

c. b. d. o.

89. Wzajemnica. *W trójkącie naprzeciw kąta większego leży bok większy.*

Dajmy, że $\angle CBA > \angle CAB$ (fig. 73), należy dowieść, że $CA > CB$.

Dowodzenie. Jeżeliby bok CA nie był większym od boku CB , to byłby albo mu równym, albo od niego większym. W przypadku $CA = CB$, byłby $\angle CAB = \angle CBA$ (§ 85, 3); w przypadku zaś $CA < CB$, byłby $\angle CBA < \angle CAB$, lecz jedno i drugie przypuszczenie sprzeciwia się założeniu, a zatem musi być

$$CA > CB.$$

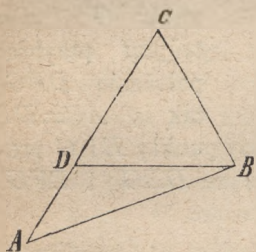


Fig. 73.

Wniosek. Ponieważ w trójkącie prostokątnym kąt prosty jest największy ze wszystkich, więc przeciwprostokątna jest większą od każdej z przyprostokątnych.

90. Czwarte twierdzenie o przystawaniu trójkątów. Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają po dwa boki odpowiednio równe i po kącie przeciwnym większemu z boków równym.

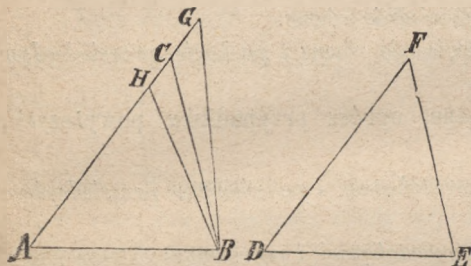


Fig. 74.

Dajmy, że $AB=DE$, $BC=EF$ i $\angle BAC = \angle EDF$ (fig. 74). Należy dowieść, że trójk. $ABC =$ trójkątowi DEF .

Dowodzenie. Nałożmy trójkąt DEF na trójkąt ABC , ażeby bok DE padł na bok AB , co jest możliwe, gdyż $DE=AB$. Ponieważ $\angle D = \angle A$, więc prosta DF przyjmie kie-

runek prostej AC i punkt D upadnie na jakiś punkt prostej AC , lecz gdzie—nie wiadomo; ten punkt bowiem może paść: albo a) na punkt H przed punktem C , b) albo na punkt G za punktem C , c) albo nakoniec na punkt C . Pierwsze dwa przypuszczenia są niemożliwe; dajmy bowiem, że punkt F padnie na G , wtedy bok EF przybrałby położenie BG i byłoby

$$BG=EF=BC;$$

trójkąt BGC byłby w tym przypadku równoramiennym i według § 85, 4, $\angle BCG$ byłby ostrym, a zatem $\angle BCA$ byłby rozwartym. Z tego zaś wypada (§ 89) $BC < AB$, co się sprzeciwia założeniu.

Ta sama sprzeczność ujawniłaby się w założeniu, że punkt F pada na punkt H . Pozostaje więc jeden przypadek możebny, że punkt F pada na C i że dwa trójkąty ABC i DEF przystają do siebie.

Wniosek. Ponieważ w trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest większą od każdej z przyprostokątnych, więc dwa

trójkąty prostokątne przystają do siebie, jeśli mają po równej przeciwprostokątnej i po jednej równej przyprostokątnej.

91. Streszczenie. Widzimy więc, że dwa trójkąty ukośnokątne przystają do siebie, gdy mają:

1-sze—po jednym boku równym, leżącym przy dwu kątach odpowiednio równych.

2-re—po dwa boki odpowiednio równe i po kącie, pomiędzy tymi bokami zawartym, równym.

3-cie—po trzy boki odpowiednio równe.

4-te—po dwa boki odpowiednio równe i po kącie, przeciwległym bokowi większemu, równym.

Trójkąty zaś prostokątne, oprócz przypadków powyższych, są równe, gdy mają:

1-sze—po równej przyprostokątnej i po równym przeciwległym jej kącie ostrym.

2-re—po równej przeciwprostokątnej i po równym ostrym kącie.

3-cie—po równej przeciwprostokątnej i po równej przyprostokątnej.

92. Twierdzenie. Jeśli dwa trójkąty mają po dwa boki równe, każdy każdemu, zawarte między nimi kąty nierówne, to naprzeciwko kąta większego leży bok większy.

Dajmy, że (fig. 75)

$$AB=DE, BC=EF \text{ i } \angle ABC > \angle DEF,$$

mam dowieść, że
 $AC > DF$.

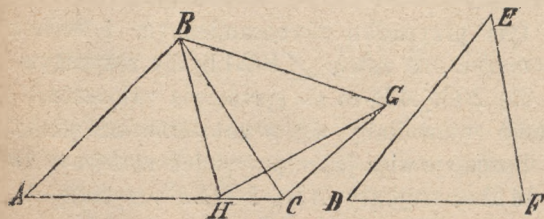


Fig. 75.

Dowodzenie.
Przyłożmy trójkąt DEF do trójkąta ABC tak, ażeby bok EF przysłał do równego mu boku BC i cały trój-

kąt przybrał położenie CBG , wtedy bok EF przyjmie położenie BG i bok DF położenie CG , pozostaje zatem dowieść, że $CG < AC$. W tym celu podzielmy cały kąt ABG na dwie równe części dwójsieczną BH , która upadnie wewnątrz kąta ABC , gdyż kąt ten jest większym od kąta CBG . Połączmy następnie punkt H z punktem G prostą HG , otrzymamy dwa trójkąty ABH i HBG , w których

$$AB = DE = BG, BH \text{ wspólny i } \angle ABH = \angle HBG,$$

trójkąty więc będą sobie równe (§ 84) i w szczególności $AH = HG$.

Lecz $HG + HC > GC$ (§ 75), podstawiając zatem zamiast HG równy bok AH , otrzymamy $AH + HC > GC$, czyli $AC > CG$, to jest $AC > DF$.

c. b. d. o.

93. Wzajemnica. *Gdy dwa trójkąty mają po dwa boki równe, a trzeci bok nierówny, wtedy naprzeciwko boku większego leży kąt większy.*

Dajmy, że (fig. 75)

$$AB = DE, BC = EF, AC > DF,$$

należy dowieść, że $\angle ABC > \angle DEF$.

Dowodzenie. Jakoż, jeśli kąt ABC nie jest większym od kąta DEF , to może być tylko albo mu równy, albo od niego mniejszy. W pierwszym przypadku dwa trójkąty ABC i DEF , mające kąt równy zawarty między bokami równymi, byłyby równe; a więc bok AC byłby równy bokowi DF , co się sprzeciwia założeniu. W drugim przypadku bok AC byłby mniejszy od boku EF na mocy § 92, co również sprzeciwia się założeniu. Więc kąt DEF , nie mogąc być ani równy ani mniejszy od kąta ABC , jest od niego większy.

94. Pytania i zadania. Ile jest przypadków przystawiania trójkątów ukośnokątnych i prostokątnych? Kąt przy wierzchołku trójkąta równoramiennego równa się: a) $48^\circ 20'$, b) $24^\circ 18' 36''$, c) $\frac{1}{4}d$, d) $1\frac{2}{5}d$ —obliczyć kąty przy podstawie. Każdy z kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego równa się: a) 40° , b) $50^\circ 18' 20''$, c) $\frac{3}{4}d$, d) $\frac{3}{7}d$ —czemu się równa kąt przy wierzchołku? Cemu się równają kąty w trójkącie równobocznym? Kąt zewnętrzny

przy podstawie trójkąta równoramiennego równa się: a) 120° , b) $101^\circ 25''$, c) $1\frac{1}{2}d$ —czemu równają się kąty trójkąta? Kąt zewnętrzny przy wierzchołku trójkąta równoramiennego równa się: a) 46° , b) $118^\circ 40'$, c) $\frac{3}{5}d$, d) $1\frac{1}{4}d$ —obliczyć kąty trójkąta. Obliczyć kąty trójkąta równoramiennego, jeśli: a) kąt przy podstawie jest pięć razy większym od kąta przy wierzchołku; b) jeśli jest ośm razy od niego mniejszym; c) jeśli stosunek tych kątów równa się $8 : 1$. Obliczyć kąty trójkąta równoramiennego, jeśli kąt przy podstawie jest większym od kąta przy wierzchołku a) o $8^\circ 18' 20''$, b) o $12^\circ 14' 50''$, c) o $\frac{2}{3}d$, d) o $\frac{1}{6}d$. W trójkącie ABC kąty jego są: a) $A=38^\circ$, $B=86^\circ$, b) $A=\frac{1}{4}d$, $B=1\frac{1}{3}d$, c) $A=100^\circ$, $C=16^\circ 18'$ —który z boków tego trójkąta jest największy i który najmniejszy? Dowieść, że w każdym trójkącie suma jego boków jest większą od sumy prostych łączących dowolny punkt wewnątrz trójkąta z jego trzema wierzchołkami, lecz jest mniejszą od połowy tej sumy (§ 77). Dowieść, że kąt zewnętrzny przy wierzchołku trójkąta równoramiennego jest dwa razy większy od kąta wewnętrznego przy podstawie (§ 79, 6). Dowieść, że dwójsieczne kątów przy podstawie trójkąta równoramiennego tworzą z podstawą jego nowy trójkąt równoramienny. Dowieść, że prosta, łącząca wierzchołki dwu trójkątów równoramiennych, mających wspólną podstawę, jest prostopadłą do tej podstawy i dzieli ją na dwie równe części (na zasadzie przystawiania trójkątów). Dowieść, że jeżeli od wierzchołka równoramiennego trójkąta odetniemy równe części na bokach i końce ich połączymy linią prostą, to ta prosta będzie równoległą do podstawy. Dowieść, że jeżeli przeciwprostokątną przedłużymy po za jej końce o długości odpowiednio równe przyległym przyprostokątnym i otrzymane tym sposobem punkty końcowe połączymy z wierzchołkiem kąta prostego linijami prostymi, to kąt pomiędzy nimi równa się $1\frac{1}{2}d$ (§ 85, 3, § 78). Dowieść, że jeżeli w trójkącie ABC poprowadzimy dwójsieczną BF i z punktu F , przecięcia się jej z bokiem AC , poprowadzimy $FD \parallel BC$, to $FD=BD$. Jeżeli w trójkącie prosta, łącząca wierzchołek ze środkiem podstawy, równa się połowie tej podstawy, to kąt przy wierzchołku jest prostym (§§ 85 i 78). Dowieść, że jeżeli przy wierzchołku trójkąta poprowadzimy proste odpowiednio równoległe do boków trójkąta, to otrzymamy nowy trójkąt równokątny z danym. Dowieść, że jeżeli podstawę trójkąta równoramiennego podzielimy na trzy równe części i punkty działu połączymy linijami prostymi z wierzchoł-

kiem, to kąt przy wierzchołku rozdzieli się na trzy kąty, z których krańcowe będą pomiędzy sobą równe, wewnętrzny zaś będzie większym od każdego z krańcowych (§§ 84 i 78). Dowieść, że jeżeli na bokach trójkąta równobocznego, pociąwszy od jego wierzchołka, odtniemy piąte części tych boków i otrzymane tym sposobem punkty połączymy linijami prostemi, to otrzymamy trójkąt równoboczny. Dowieść, że jeżeli dwa trójkąty są sobie równe, to mają równe: 1) wysokości; 2) proste łączące wierzchołki równych kątów ze środkami boków przeciwległych; 3) dwójścienne równych kątów zawarte pomiędzy wierzchołkami tych kątów i bokami przeciwległymi. Dowieść, że trójkąty równoramienne są sobie równe, gdy mają równe: 1) podstawy i kąty przy wierzchołku lub przy podstawie; 2) ramiona i kąty przy wierzchołku lub przy podstawie; 3) ramiona i podstawy; 4) wysokości i kąty przy wierzchołku; 5) wysokości i podstawy; 6) wysokości i ramiona.

3. Własności prostopadłych i pochyłych.

95. *Z punktu danego zewnątrz prostej można do niej poprowadzić jedną tylko prostopadłą.*

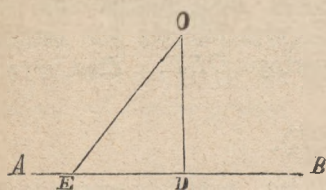


Fig. 76.

Dajmy, że z punktu O (fig. 76) poprowadziliśmy prostopadłą OD , należy dowieść, że każda inna prosta OE , poprowadzona z tego punktu do prostej AB , jest pochyłą.

Dowodzenie. Ponieważ w trójkącie prostokątnym EOD może być tylko jeden kąt prosty D (§ 79, 3), więc kąt E jest ukośnym i linia OE jest pochyłą.

Uwaga. Punkt D , w którym prostopadła OD przecina AB , nazywa się *spodkiem* prostopadłej, punkt zaś E —*spodkiem* pochyłej.

96. **Twierdzenie.** *Jeśli z punktu, wziętego zewnątrz prostej, poprowadzimy do niej prostopadłą i pochyłą, wtedy:*

1. *Prostopadła jest krótsza od wszelkiej pochylej.*
2. *Dwie pochyle, równo oddalone od spodka prostopadłej, są równe.*
3. *Z dwu pochylej ta jest krótsza, która się mniej oddala od spodka prostopadłej.*

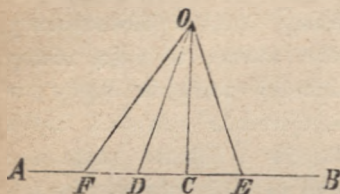


Fig. 77.

Dowodzenie. Niech będzie prosta AB (fig. 77), na którą z punktu zewnętrznego O spuszczone prostopadłą OC i pochyle OD , OE , OF .

1. Biorąc pod uwagę którąkolwiek pochylą OD i prostopadłą OC widzimy, że w trójkącie prostokątnym ODC przyprostokątna OC jest mniejszą od przeciwprostokątnej OD (§ 89, wniosek).

2. Przypuściwszy, że $DC=EC$, otrzymujemy dwa trójkąty prostokątne OCD i OCE , w których $DC=CE$ z założenia, bok OC wspólny i $\angle OCD=\angle OCE$ jako kąty proste, więc trójkąty te są sobie równe, a w szczególności $OD=OE$.

3. Założywszy $CF>CE$, odkładamy część $CD=CE$ i łączymy punkty D i O prostą OD ; Na zasadzie poprzedniego $OD=OE$, pozostaje więc dowieść, że $OF>OD$. Z trójkąta prostokątnego OCD wypada, że $\angle ODC$ jest ostrym (§ 89, wniosek), więc kąt ODF jest rozwarty (§ 47), lecz kąt OFD jako wewnętrzny jest mniejszym od kąta zewnętrznego ODC , więc kąt ten jest ostrym, a tem samem mniejszym od kąta rozwartego ODF . Ztąd wypada, że (§ 89)

$$OF > (OD=OE).$$

97. Wzajemnica. Jeżeli z jednego punktu poprowadzono kilka promieni do prostej, to będzie:

1. *Najkrótszy z promieni będzie prostopadły do prostej.*
2. *Dwa promienie równe mają swe spodki w równej odległości od spodka prostopadłej.*
3. *Z dwu nierównych promieni, większy ma swój spodek w większej od spodka prostopadłej odległości.*

Dowodzenie. 1. Założywszy, że promień OC (fig. 77) jest najkrótszym ze wszystkich innych OD , OE , OF , z punktu O

do prostej AB poprowadzonych, łatwo dowieść, że jest on prostopadłym.

Bo gdyby on nie był prostopadłym, to z punktu O możnaby było poprowadzić prostopadłą np. OD do prostej AB i ta według poprzedniego twierdzenia byłaby krótszą od OC , co się sprzeciwia założeniu.

2. Założywszy, że promienie OE i OD są sobie równe, łatwo dowieść, że $CE = CD$.

Bo gdyby $CE \leq CD$, to na zasadzie § 95 byłaby $OE \geq OD$, co się sprzeciwia założeniu.

3. Jeśli $OF > OE$, to będzie $CF > CE$.

Bo jeśli by odległość CF nie była większą od CE , to musiałyby być $CF \equiv CE$, a tem samem $OF \equiv OE$, co się sprzeciwia założeniu.

98. **Wnioski.** 1-szy. *Prostopadła OC (fig. 77) spuszczone na linię prostą AB jest najkrótszą linią, jaką z tego punktu do tej prostej poprowadzić można, więc wyróżnia się ona ze wszystkich linii, jakie z tego punktu wychodzą i dla tego długość tej prostopadłej nazywa się odległością punktu O od prostej AB .*

2-gi. *Z jednego punktu tylko dwie pochyłe równe do linii prostej poprowadzić można i te pochyłe leżą po obydwu stronach prostopadłej.*

99. **Twierdzenie.** *Wszelki punkt prostopadłej wyprowadzonej ze środka linii prostej jest równo oddalony od końców tej prostej.*

Wszelki zaś punkt nie leżący na tej prostopadłej nie jest równo oddalony od końców prostej.

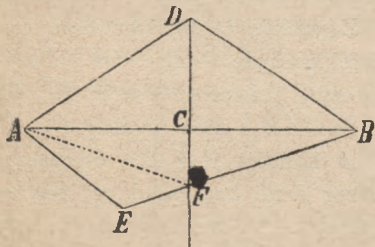


Fig. 78.

Dajmy, że CD (fig. 78) jest prostopadłą do AB w jej środku, należy dowieść, że

$$DA = DB, EB > EA.$$

Dowodzenie. 1. Ponieważ $CA = CB$, więc DA i DB są pochyłe równo oddalone od prostopadłej DC , więc (§ 96)

$$DA = DB.$$

2. Połączywszy punkt F prze-

cięcia się prostych BE i DC z punktem A linią prostą AF , znajdziemy, na zasadzie poprzedniego,

$$FA=FB,$$

lecz (§ 75)

$$AF+FE>AE;$$

podstawiając zamiast FA równą mu długość FB , otrzymamy

$$FB+FE>AE,$$

czyli

$$BE>AE.$$

100. Wzajemnica. *Wszelki punkt, równo oddalony od końców linii prostej, leży na prostopadłej wyprowadzonej z jej środka.*

Wszelki zaś punkt, nierówno oddalony od końców prostej, nie może leżeć na tej prostopadłej.

Dowodzenie. 1. Gdyby punkt nie leżał na prostopadłej, to nie mógłby być w równej od końców prostej odległości (§ 99).

2. Gdyby punkt leżał na prostopadłej, to byłby w równej odległości od końców prostej (§ 99), co się sprzeciwia założeniu.

101. Wniosek. Prosta, przechodząca przez dwa punkty, z których każdy jest równo oddalony od końców prostej, jest prostopadłą do tej ostatniej w jej środku. Jakoż na zasadzie § 99, oba te punkty muszą leżeć na prostopadłej, a że przez dwa punkty można poprowadzić jedną tylko prostą, więc prosta, przechodząca przez te dwa punkty, jest właśnie prostopadłą.

102. Pytania i zadania. Co nazywamy spodkiem prostopadłej i pochyłej? Co nazywamy odległością punktu od prostej? Jaka jest najkrótsza odległość punktu od prostej? Gdzie leży punkt równo oddalony od końców prostej? Z punktu O poprowadzono prostopadłą OD do prostej AB i dwie pochyłe OE i OF ; z których OE tworzy z prostą AB kąt ostry większy aniżeli OF , dowieść, że $OE>OF$. Dana jest prosta AB i dwa punkty C i D , z których każdy jest równo oddalony od końców A i B ; wyznaczyć kąt, jaki prosta CD , przechodząca przez dane dwa punkty, tworzy z prostą AB . Po jednej stronie prostej AB dane są dwa punkty M i N ; z punktu M poprowadzono prostopadłą MP do prostej AB i przedłużono ją po drugiej stronie AB o długość $PR=PM$; otrzy-

many punkt R połączono z punktem N prostą RN , która przecina prostą AB w punkcie S , następnie punkt S z punktem M prostą SM . Dowieść, że linija łamana MSN będzie mniejszą od wszelkiej drugiej łamanej, którą otrzymamy, łącząc inny jakiś punkt prostej AB z punktami M i N .

4. O czworokątach.

103. **Określenie.** Część płaszczyzny, ograniczona czterema linijami prostymi, nazywa się *czworokątem*— $ABCD$ (fig. 79).

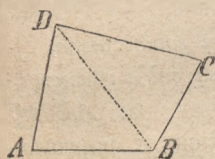


Fig. 79.

Czworokąt ma cztery boki AB , BC , CD , DA i cztery kąty wewnętrzne A , B , C , D . Wierzchołki tych kątów nazywają się wierzchołkami czworokąta.

Prosta BD , łącząca dwa przeciwległe wierzchołki D i B , nazywa się *przekątną*. W czworokącie są dwie przekątne DB i AC . Każda przekątna dzieli czworokąt na dwa trójkąty, np. przekątna DB dzieli czworokąt na trójkąty ADB i BDC .

104. **Twierdzenie.** W każdym czworokącie suma kątów wewnętrznych równa się czterem kątom prostym.

Dowodzenie. Poprowadziwszy przekątną DB , widzimy, że suma kątów trójkątów ADB i BDC , na które czworokąt został podzielony, równa się sumie kątów czworokąta; a że w każdym trójkącie suma kątów równa się dwóm kątom prostym (§ 78), więc suma kątów czworokąta równa się czterem kątom prostym.

105. **Podział czworokątów.** Czworokąt, w którym dwa przeciwległe boki są do siebie równoległe, a drugie dwa nierównoległe, nazywa się *trapezem* (fig. 80).

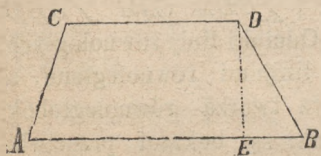


Fig. 80.

Czworokąt, w którym obie pary przeciwległych boków są do siebie równoległe, nazywa się *równoległobokiem* (fig. 81).

Równoległobok, mający wszystkie kąty równe, a zatem proste (§ 103), nazywa się *prostokątem* (fig. 82).



Fig. 81.

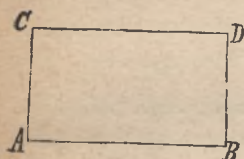


Fig. 82.

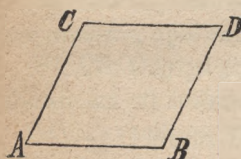


Fig. 83.

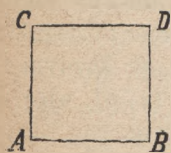


Fig. 84.

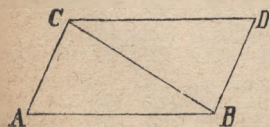


Fig. 85.

Równoległobok, mający wszystkie boki równe, lecz kąty nierówne, nazywa się *ukośnikiem*, albo *kwadratem ukośnym* (fig. 83).

Nareszcie równoległobok o równych bokach i równych kątach nazywa się *kwadratem* (fig. 84).

106. Twierdzenie. W każdym równoległoku:

- 1) przekątna dzieli go na dwa równe trójkąty;
- 2) przeciwległe boki są sobie równe;
- 3) przeciwległe kąty są sobie równe.

Dowodzenie. Założywszy, że $ABDC$ (fig. 85) jest równoległobokiem, i poprowadziwszy przekątną, mamy dwa trójkąty: ABC i CBD , w których bok CB jest wspólny, $\angle ACB = \angle CBD$, $\angle ABC = \angle DCB$, jako kąty naprzemianległe wewnętrzne (§ 70), a zatem na zasadzie § 82 będzie:

- 1) trójkąt $ACB =$ trójkątowi CBD .
- 2) $CD = AB$, $AC = BD$, jako boki leżące naprzeciwko kątów równych w trójkątach równych.
- 3) $\angle D = \angle A$, jako leżące naprzeciwko wspólnego boku w równych trójkątach, kąty zaś ACD i ABD są też równe, gdyż:

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACB = \angle CBD \\ \angle DCB = \angle CBA \end{array} \right\} \text{ jako kąty naprzemianległe wewnętrzne,}$$

więc suma $\angle ACB + \angle DCB$, czyli $\angle ACD$ równa się sumie $\angle CBD + \angle CBA$ czyli $\angle ABD$

Wnioski. 1. Odcinki linii równoległych, zawarte pomiędzy linijami równoległymi, są sobie równe, gdyż tworzą równoległobok, w którym te odcinki są bokami przeciwległymi.

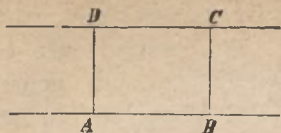


Fig. 86.

AD wyraża też odległość punktu D od prostej AB . Prosta AD , wspólna prostopadła do obu równoległych, nazywa się *odległością tych dwu równoległych*. Jeśli teraz z jakiegokolwiek punktu B prostej AB spuścimy prostopadłą BC na prostą DC , to

$$AD \parallel BC \text{ (§ 71)}$$

i dla tego $AD = BC$ (wniosek 1); stąd wypada, że *dwie równoległe są wszędzie równoodległe*.

Określenie. Boki równoległe AB i CD (fig. 80) trapezu nazywają się *podstawami*, a ich odległość DE *wysokością* trapezu.

Którykolwiek bok równoległoboku jest jego *podstawą*, a *wysokością* odległość podstawy od boku przeciwnego. Na fig. 81 AB jest podstawą, CE zaś jego wysokością.

107. Twierdzenie. *Przekątne równoległoboku przecinają się wzajemnie na dwie równe części.*

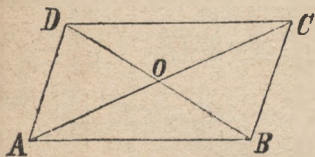


Fig. 87.

Niech będzie równoległobok $ABCD$ (fig. 87), AC i BD jego przekątne, należy dowieść, że $AO = OC$, $BO = OD$.

Dowodzenie. Porównajmy ze sobą dwa trójkąty AOD i BOC , w których znajdujemy owe cztery odcinki przekątnych. Trójkąty te są sobie równe, gdyż $AD = BC$ (§ 106), $\angle ADO = \angle OBC$, $\angle DAO = \angle OCB$ (§ 70), więc trójkąty AOD i OBC są sobie równe (§ 82) i $AO = OC$, $OD = OB$.

108. Twierdzenie. *W prostokącie przekątne są sobie równe, w kwadracie ukośnym przecinają się pod kątem prostym i są dwójścinnymi kątów przeciwległych.*

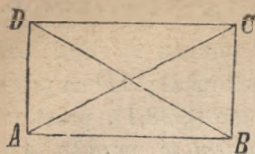


Fig. 88.

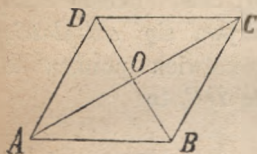


Fig. 89.

Dowodzenie. 1) Jakoż dwa trójkąty ADB i ADC (fig. 88), mające bok AD wspólny, bok $AB=DC$, jako boki przeciwległe prostokąta (§ 106) i kąty DAB i ADC pomiędzy nimi zawarte, jako proste, są równe; więc $AC=BD$.

2) Jeśli $ABCD$ (fig. 89) jest ukośnik, t. j. jeśli $AD=DC=CB=BA$, to trójkąt ADC jest równoramienny i na zasadzie § 87, wn. 2 linija DB , łącząca wierzchołek D ze środkiem O podstawy AC , jest prostopadłą do podstawy i dzieli kąt przy wierzchołku D na dwie równe części.

Wniosek. Ponieważ kwadrat łączy w sobie własności prostokąta i ukośnika, więc w kwadracie prostokątne są równe i prostopadłe do siebie i są dwójsiecznymi kątów przeciwległych.

109. Twierdzenie. Jeśli przez środek jednego z nierównoległych boków trapezu poprowadzimy równoległą do podstaw, to prosta ta 1) przejdzie i przez środek drugiego boku nierównoległego i 2) równać się będzie połowie sumy dwu podstaw.

Dajmy, że $ABCD$ (fig. 90) jest trapezem, t. j. niech

$AB \parallel DC$ i niech $DE=EA$ i $EF \parallel AB$.

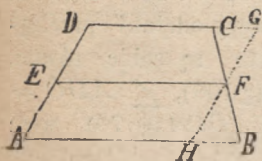


Fig. 90.

Należy dowieść, że $BF=CF$ i

$$EF = \frac{AB+CD}{2}.$$

Dowodzenie. 1) Przez punkt F , w którym prosta EF przecina bok CB , poprowadźmy równoległą HG do boku AD i niech ta prosta przetnie podstawę DC na jej przedłużeniu w punkcie G , podstawę zaś AB w punkcie H ; otrzymamy dwa trójkąty $F CG$ i HFB .

Trójkąty te są sobie równe, gdyż $FG=DE$, $FH=AE$ (§ 106,1), więc $FG=FH$, $\angle CFG=\angle HFB$ (§ 49), $\angle G=\angle H$ (§ 70), więc $FC=FB$, czyli punkt F jest środkiem boku CB .

2) Z równości tychże samych trójkątów CFG i HFB wypada, $HB=CG$.

$$\text{Lecz} \quad \left. \begin{array}{l} EF=AH \\ EF=DG \end{array} \right\} (\S 106,1),$$

$$\text{czyli} \quad EF=AB-BH$$

$$EF=DC+CG,$$

$$\text{więc} \quad 2EF=AB+DC$$

$$EF=\frac{AB+DC}{2}.$$

110. Pytania i zadania. Co nazywamy trapezem, równoległobokiem, prostokątem, kwadratem i ukośnikiem? Co nazywamy podstawą i wysokością trapezu i równoległoboku? Jakie są własności boków i kątów przeciwległych równoległoboku? Czemu się równa suma kątów wewnętrznych czworokąta? Co nazywamy przekątnymi czworokąta i jakie są własności przekątnych równoległoboku, prostokąta, ukośnika i kwadratu? Co nazywamy odległością dwu równoległych i jaka jest własność linii równoległych ze względu na ich odległości? Jaka jest własność prostej łączącej środki dwu nierównoległych boków trapezu? Obliczyć kąt D czworokąta $ABCD$, wiedząc, że $\angle A=3/4d$, $\angle B=5/6d$, $\angle C=7/8d$. Obliczyć kąt A czworokąta, wiedząc, że $\angle B=112^\circ 18' 15''$, $\angle C=83^\circ 17' 15''$, $\angle D=97^\circ 15' 28''$. Jeden kąt trapezu $=125^\circ 18' 20''$, drugi kąt $=110^\circ 15' 14''$ —obliczyć dwa pozostałe kąty. Obliczyć kąty równoległoboku, wiedząc, że jeden z nich równa się $12/3d$, $7/8d$, $105^\circ 18'$, $62^\circ 15' 14''$. Obliczyć kąty równoległoboku, wiedząc, że różnica pomiędzy dwoma jego kątami równa się $4/5d$, $2/3d$, $40^\circ 18'$, $6^\circ 12' 20''$. Obliczyć kąty ukośnika, wiedząc, że przekątna jego tworzy z bokiem kąt $5/6d$, $1/5d$, $18^\circ 12'$, $64^\circ 18' 20''$. Bok ukośnika tworzy z przekątnymi kąty, różnica których $=5/8d$, $30^\circ 15'$, $10^\circ 8' 10''$ —obliczyć kąty ukośnika. Obwód, to jest suma boków równoległoboku równa się 140 calom, różnica zaś pomiędzy dwoma bo-

kami przyległymi równa się 40 calom—obliczyć boki równoległoboku. Obwód trapezu równa się 30 stóp., boki nierównoległe są odpowiednio równe 10 i 8 stóp.—obliczyć długość prostej łączącej środki dwu nierównoległych boków. Jaki kształt ma czworokąt, w którym a) $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 70^\circ$? b) $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 100^\circ$, $\angle C = 90^\circ$? Dowieść, że czworokąt, którego przekątne przecinają się wzajemnie na dwie części równe, jest równoległobokiem. Dowieść, że punkt przecięcia się przekątnych równoległoboku dzieli na dwie równe części wszelką prostą, która przezeń przechodzi, a końcami opiera się na bokach równoległoboku. Dowieść, że jeżeli w czworokącie dwa boki są równe i równoległe, to dwa pozostałe będą też równe i równoległe, czyli że taki czworokąt jest równoległobokiem. Dowieść, że czworokąt, w którym przekątne są równe i są dwójsiecznymi kątów przeciwległych, jest kwadratem. Dowieść, że dwa równoległoboki są sobie równe, gdy mają po dwa równe boki i po równym kącie pomiędzy nimi zawarty. Zastosować to twierdzenie do prostokątów, ukośników i kwadratów. Dowieść, że w każdym trójkącie prosta, łącząca środki dwu boków, jest równoległą do trzeciego i równa jego połowie. Dowieść, że środki boków każdego czworokąta są wierzchołkami równoległoboku. Dowieść, że środki boków prostokąta są wierzchołkami ukośnika. Dowieść, że w równoramiennym trapezie (trapez mający boki nierównoległe równe) kąty przy każdej podstawie są sobie równe. Dowieść odwrotnego twierdzenia.

5. O wielokątach.

111. **Określenie.** Część płaszczyzny, ograniczona więcej niż czterema prostymi, nazywa się wielokątem lub wielobokiem. Stosownie do liczby prostych, ograniczających część płaszczyzny, mamy pięciokąt, sześciokąt, siedmiokąt i t. d. Tak np. (fig. 91) część płaszczyzny $ABCDEF$ jest ograniczona sześcioma prostymi, jest więc *sześciokątem* lub *sześciobokiem*. Łatwo widzieć, że trójkąty i czworokąty są również wielokątami. Proste

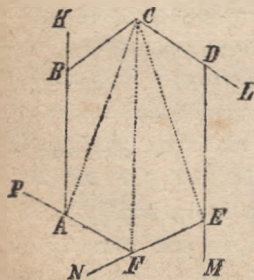


Fig. 91.

AB, BC, CD, DE, EF, FA nazywają się *bokami* wielokąta. Suma wszystkich boków wielokąta czyli linija łamana $ABCDEF A$ nazywa się *obwodem*, a wielkość zamkniętej bokami części płaszczyzny—*powierzchnią* albo *połem* wielokąta. Dwa boki wielokąta, obok siebie leżące, tworzą *kąt wewnętrzny* albo poprostu *kąt* wielokąta. Wierzchołki kątów wielokąta nazywają się także jego wierzchołkami. W każdym wielokącie liczba kątów równa się liczbie boków. Sześciokąt $ABCDEF A$ (fig. 91) ma sześć boków i sześć kątów. Kąt utworzony przez bok wielokąta i przez przedłużenie boku przyległego pierwszemu nazywa się *kątem zewnętrznym* wielokąta. Kąt KBC (fig. 91) jest kątem zewnętrznym.

Wielokąt nazywa się *równobocznym*, gdy ma wszystkie boki równe; *równokątnym*,—gdy ma wszystkie kąty równe.

Wielokąt, który jednocześnie jest równoboczny i równokątny, nazywa się *foremnym*; jako przykłady mogą służyć: trójkąt równoboczny i kwadrat.

112. *Liczba przekątnych wielokąta, z jednego wierzchołka poprowadzić się dających, równa się liczbie boków mniej trzy.*

Jakoż, weźmy wierzchołek C (fig. 91). Z tego wierzchołka można poprowadzić przekątne do wszystkich wierzchołków wielokąta, z wyjątkiem trzech, a mianowicie do C, B, D ; ponieważ wierzchołków jest tyle co i boków, więc liczba przekątnych, od punktu C poprowadzić się dających, równa się liczbie boków mniej trzy.

Uwaga 1. Oznaczając przez n liczbę boków wielokąta, znajdziemy, że liczba przekątnych, z jednego punktu poprowadzić się dających, równa się $(n-3)$. Tak np. w sześciokącie liczba takich przekątnych równa się $(6-3)=3$, w siedmiokącie $(7-3)=4$ i t. d.

Uwaga 2. Ponieważ z każdego wierzchołka n -kąta można poprowadzić $(n-3)$ przekątnych, więc ze wszystkich wierzchołków możnaby było poprowadzić $(n-3) \times n$ przekątnych. Lecz przy takim obliczeniu każdą przekątną liczyliśmy dwa razy, gdyż jeśli poprowadziliśmy przekątną CE od jakiegoś wierzchołka C do wierzchołka E , to poprowadziwszy przekątną EC od wierzchołka E do wierzchołka C , otrzymamy tę samą prostą co poprzednio. Tym sposobem więc dla otrzymania prawdziwej liczby przekątnych

wielokąta należy liczbę poprzednio otrzymaną podzielić przez dwa, czyli liczba wszystkich przekątnych wielokąta równa się $\frac{n \times (n-3)}{2}$. Tak np. w siedmiokącie liczba przekątnych równa się

$$\frac{7 \times (7-3)}{2} = \frac{7.4}{2} = 14.$$

113. *Przekątne poprowadzone od jednego wierzchołka dzielą wielokąt na tyle trójkątów, ile wielokąt ma boków mniej dwa.*

Jakoż, prowadząc z punktu *C* (fig. 91) przekątne *CA*, *CF* i *CE*, dzielimy wielokąt na trójkąty *CBA*, *CAF*, *CFE* i *CED*, z których dwa skrajne utworzone są z dwu boków wielokąta i jednej przekątnej, średnie zaś z dwu przekątnych i jednego boku wielokąta. Gdyby każdy trójkąt zawierał po jednym boku wielokąta, to liczba trójkątów równałaby się liczbie boków wielokąta, lecz ponieważ dwa skrajne trójkąty zawierają po dwa boki wielokąta, więc liczba trójkątów, na które przekątne dzielą wielokąt, równać się będzie liczbie jego boków mniej dwa.

Tak np. czworokąt, przekątne, poprowadzone z jednego wierzchołka, dzielą na (4—2) czyli dwa trójkąty, pięciokąt na (5—2) czyli na trzy trójkąty i w ogóle wielokąt o *n* bokach na (*n*—2) trójkątów.

114. **Twierdzenie.** *W wielokącie suma kątów wewnętrznych równa się dwóm kątom prostym wziętym tyle razy, ile jest boków mniej dwa.*

Dowodzenie. Poprowadziwszy przekątne *CA*, *CF*, *CE* (fig. 91), rozdzielamy wielokąt na tyle trójkątów, ile on ma boków mniej dwa (§ 113); i oczywiście suma kątów wewnętrznych wielokąta równa się sumie wszystkich kątów trójkątów. A że suma kątów każdego trójkąta równa się dwóm kątom prostym (§ 78), więc suma kątów wewnętrznych wielokąta równa się dwóm kątom prostym, wziętym tyle razy, ile ten wielokąt ma boków mniej dwa. Tak np. w siedmiokącie suma jego kątów wewnętrznych równa się (7—2) × 2*d* = 10*d*, w trzynastokącie—(13—2) × 2*d* = 22*d*; w ogóle w wielokącie o *n* bokach suma jego kątów wewnętrznych równa się (*n*—2) × 2*d*.

Wniosek. Ponieważ w wielokącie foremnym wszystkie jego kąty są sobie równe (§ 111), więc dla otrzymania wielkości jednego kąta we-

wewnętrznego należy sumę kątów wewnętrznych rozdzielić przez liczbę boków. Tak np. w siedmiokącie foremnym każdy kąt wewnętrzny równa się $\frac{(7-2)2d}{7} = \frac{10}{7}d$, w dziesięciokącie $= \frac{(10-2)2d}{10} = \frac{8}{5}d$

i w ogóle w n kącie $= \frac{(n-2)}{n} 2d$.

Uwaga. Gdyby liczba trójkątów, na które przekątne dzielą wielokąt, równała się liczbie jego boków, wtedy suma kątów wewnętrznych równałaby się dwóm kątom prostym wziętym tyle razy, ile wielokąt ma boków; lecz ponieważ liczba trójkątów jest o dwa mniejszą od liczby boków, więc dla otrzymania sumy kątów wewnętrznych wielokąta można jeszcze pomnożyć dwa kąty proste przez liczbę boków, a od iloczynu odjąć cztery kąty proste.

115. Twierdzenie. *W wielokącie suma kątów zewnętrznych, powstających z przedłużenia wszystkich jego boków, równa się czterem kątom prostym.*

Dowodzenie. Przy każdym wierzchołku wielokąta, np. przy D (fig. 91), utworzyły się dwa kąty przyległe: jeden zewnętrzny, a drugi wewnętrzny, suma których $= 2d$ (§ 47). Stąd wypada, że suma wszystkich kątów zewnętrznych i wewnętrznych wielokąta równa się dwóm kątom prostym pomnożonym przez liczbę wierzchołków, lub liczbę boków tegoż wielokąta. Lecz (§ 114, *Uwaga*) suma kątów wewnętrznych wielokąta równa się iloczynowi z liczby boków przez dwa kąty proste mniej 4 kąty proste, więc suma kątów zewnętrznych wielokąta równa się czterem kątom prostym. c. b. d. o.

Wniosek. Ponieważ w wielokącie foremnym wszystkie kąty wewnętrzne są sobie równe, więc i kąty zewnętrzne są równe, a zatem każdy kąt zewnętrzny równa się czterem kątom prostym podzielonym przez liczbę boków wielokąta. Tak np. w ośmiokącie

foremnym każdy kąt zewnętrzny równa się $= \frac{4}{8}d = \frac{1}{2}d = 45^\circ$.

116. Pytania i zadania. Jak wielka jest suma wszystkich kątów pięciokąta, sześciokąta, siedmiokąta, ośmiokąta, dziewięciokąta i dziesięciokąta? Ile wszystkich przekątnych może być w każdym z tych wielokątów? Na ile trójkątów rozpada się dziesięciokąt i dwudziestokąt przez poprowadzenie przekątnych z jednego wierzchołka?

Obliczyć liczbę boków wielokąta, gdy suma jego kątów wewnętrznych równa się: $6d$, $8d$, $10d$, $20d$, $30d$. Co nazywamy wielokątem foremnym? Czemu się równa każdy kąt wewnętrzny w wielokącie foremnym o 5, 6, 7, 8, 9 i 10 bokach? Czemu się równa każdy z kątów zewnętrznych w każdym z tych wielokątów? W jakim wielokącie foremnym kąt wewnętrzny równa się 135° , 144° , 108° ? W jakim wielokącie foremnym kąt zewnętrzny równa się 30° , 20° , 10° , 15° ? W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ przedłużono oba boki przylegające do AB , aż do punktu ich przecięcia w G ;—obliczyć wielkość kąta przy G . Dowieść, że można układać posadzkę: 1) z trójkątów równobocznych; 2) z kwadratów; 3) z sześciokątów foremnych. Pokazać, że nie można z innych figur foremnych, branych oddzielnie, złożyć posadzki (na zasadzie, że suma kątów wokoło jednego punktu równa się $4d$). Dowieść, że dwa wielokąty o n bokach są sobie równe, gdy mają $(n-2)$ boki po sobie idące równe i przyległe $(n-1)$ kątom równym, każdy każdemu. Dowieść, że dwa wielokąty o n bokach są sobie równe, gdy mają $(n-1)$ boków równych, zawierających $(n-2)$ kątów równych każdy każdemu.

Rozwiązanie niektórych zadań geometrycznych.

117. **Miejsca geometryczne.** *Miejszem geometrycznem na płaszczyźnie nazywamy linię (albo liniję), której wszystkie punkty mają tę samą własność; żaden zaś inny punkt płaszczyzny tej własności nie ma.*

a) Z określenia koła wypada, że *miejszem geometrycznem punktów, które od danego punktu są odległe na daną długość, jest okrąg koła zakresłony z danego punktu jako środka, promieniem równym danej długości.*

b) Z własności (§ 106) linii równoległych wypada, że *miejszem geometrycznem punktów, które od danej linii prostej odległe są na daną długość, są dwie linie równoległe do danej i poprowadzone od niej w danej odległości.*

c) Z własności (§ 99) prostej prostopadłej do danej prostej, poprowadzonej przez jej środek, wypada, że *miejszem geometrycznem punktów jednakowo oddalonych od dwu danych punktów jest prostopadła poprowadzona do prostej, łączącej dwa te punkty, i przechodząca przez jej środek.*

d) Niech będzie kąt BAC (fig. 92) i prosta AO dwójsieczną tego kąta. Obierając na tej dwójsiecznej dowolny punkt O i prowadząc z niego prostopadłe OB i OC do ramion kąta AB i AC , otrzymamy dwa trójkąty prostokątne: AOB i AOC , mające przeciwprostokątną AO wspólną i kąty OAB i OAC równe z założenia, zatem na zasadzie (§ 83, c) trójkąty te będą sobie równe i w szczególności $OB=OC$; lecz (§ 98) OB oznacza odlegość punktu O od prostych AB i AC , więc *każdy punkt dwójsiecznej O jest równo oddalonym od ramion kąta BAC .*

Odwrotnie, łatwo dowieść, że każdy punkt O równo odalony od ramion kąta BAC leży na dwójsiecznej tego kąta. Jakoż dajmy, że prostopadłe OB i OC do ramion AB i AC kąta BAC są sobie równe, t. j. dajmy, że $OB=OC$. Połączymy punkt O z wierzchołkiem A , otrzymamy dwa trójkąty prostokątne: AOB i AOC mające przeciwprostokątną OA wspólną i przyprostokątne OB i OC równe, więc trójkąty te są sobie równe (§ 90. Wn.): $\angle BAO=\angle OAC$, czyli że punkt O leży na dwójsiecznej kąta BAC .

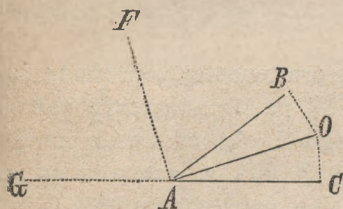


Fig. 92.

Jeśli ramię AC przedłużymy i kąt BAG przyległy kątowi BAC podzielimy na dwie równe części prostą AF , to łatwo widzieć, że i ta prosta posiada tę samą własność co i prosta AO , to jest że każdy jej punkt jest równo oddalonym od ramion AB i AG .

Jeśli jeszcze uwzględnimy, że proste AO i AF są do siebie prostopadłe, otrzymamy własność następującą:

Miejscem geometrycznem punktów jednakowo oddalonych od dwu danych prostych są dwie linije prostopadłe do siebie, będące dwójsiecznymi kątów utworzonych przez dane dwie proste.

118. Zadanie I. *Na danej prostej znaleźć punkt, będący na danej odległości od punktu danego zewnątrz prostej.*

Dane są (fig. 93): prosta AB , punkt C zewnątrz tej prostej i odległość a . Należy na danej prostej znaleźć punkt, czyniący za-
dość zadaniu.

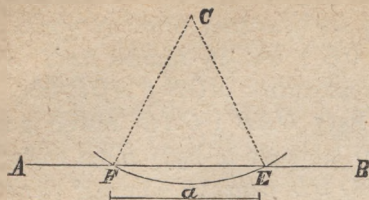


Fig. 93.

Rozwiązanie. Ponieważ szukany punkt powinien być w odległości a od punktu C , więc musi leżeć na okręgu koła zakreślonego z punktu C jako ze środka promieniem równym a (§ 117, a); lecz ponieważ punkt szukany powinien jeszcze leżeć i na prostej

AB , więc musi się znajdować na wspólnym przecięciu okręgu koła, zakreślonego z punktu C promieniem równym a , z prostą AB .

Rozbiór. Analizować czyli dyskutować zadanie znaczy szukać, jakim warunkom powinny zadość czynić ilości dane, aby rozwiązanie zadania było możebnem, i ile może być takich rozwiązań.

Trzy różne przedstawiają się tu przypadki:

1-szy. Jeśli odległość a jest mniejszą od prostopadłej poprowadzonej z punktu C na prostą AB , to łuk koła zakreślony z punktu C promieniem a nie przetnie prostej AB (§ 96) i zadanie będzie niemożebnem.

2-gi. Jeśli odległość a równa się prostopadłej poprowadzonej z punktu C na prostą AB , to spodek tej prostopadłej czyni zadość zadaniu i to tylko ten spodek, gdyż odległość jakiegokolwiek innego punktu C jest większą od prostopadłej (§ 96), a zatem i od a . Założenie więc w tym przypadku ma tylko jedno rozwiązanie.

3-ci. Jeśli odległość a jest większą od prostopadłej poprowadzonej z punktu C na prostą AB , to znajdują się dwa tylko punkty E i F , czyniące zadość warunkowi zadania (§ 96), po jednym z każdej strony prostopadłej. Zadanie więc w tym przypadku ma dwa rozwiązania.

119. **Zadanie II.** Podzielić daną prostą AB (fig. 94) na dwie równe części.

Rozwiązanie. Wiadomo (§ 117, c), że każdy punkt równo oddalony od końców A i B prostej AB leży na prostopadłej wystawionej ze środka tej prostej; oprócz tego wiadomo, że dwa punkty w zupełności wyznaczają położenie prostej; wypada stąd, że jeżeli znajdziemy dwa punkty jednakowo oddalone od końców A i B prostej AB , to, połączywszy je prostą, otrzymamy szukany

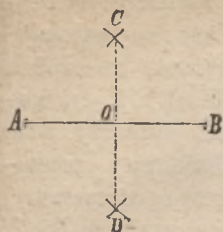


Fig. 94.

środek prostej AB w punkcie, w którym nowo poprowadzona prosta ją przecina. Pozostaje zatem tylko wyznaczyć dwa takie punkty. W tym celu z punktów A i B promieniem większym od połowy prostej AB zakreślamy dwa łuki kół, które się przetną w punktach C i D , jednakowo od punktów A i B oddalonych (§ 117, a). Połączywszy te punkty prostą CD , widzimy, że ta podzieli prostą AB w punkcie O na dwie równe części.

120. **Zadanie III.** Z punktu danego na prostej wystawić do niej prostopadłą. Dana jest prosta AB (fig. 95) i na niej punkt C , trzeba z tego punktu wystawić do niej prostopadłą.

Rozwiązanie. Opierając się na znanej własności, że prostopadła ze środka prostej wystawiona jest miejscem geometrycznym punktów jednakowo oddalonych od skrajności prostej (§ 117, c) i że dwa punkty w zupełności wyznaczają linię prostą, powyższe zadanie rozwiązujemy w sposób następujący. Po obu stronach

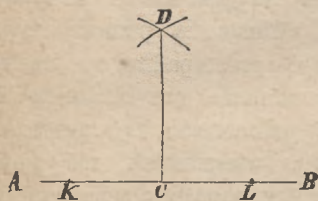


Fig. 95.

punktu danego C , odcinamy na prostej AB części równe CK i CL ; następnie z punktów L i K promieniem dowolnym lecz jednakowym zakreślamy dwa łuki przecinające się w punkcie D . Prosta DC , łącząca punkty C i D , będzie prostopadłą do AB , gdyż punkty C i D , jako równo oddalone od punktów K i L , muszą leżeć na prostopadłej do prostej AB .

121. **Zadanie IV.** Z punktu danego zewnątrz prostej poprowadzić do niej prostopadłą.

Dana jest prosta AB (fig. 96) i punkt C zewnątrz leżący; trzeba z tego punktu poprowadzić do niej prostopadłą.

Rozwiązanie. Opierając się na dwu wyżej przytoczonych rozwiązaniach, postępujemy w sposób następujący. Z punktu C jako ze środka jakimkolwiek promieniem zakreślamy łuk koła, przecinający daną prostą w punktach L i K . Ponieważ punkt C

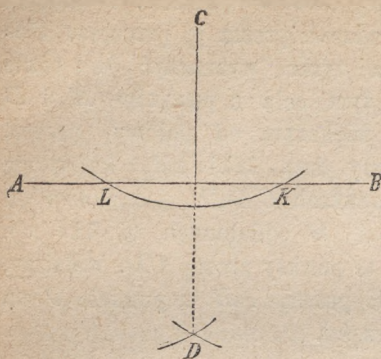


Fig. 96.

Uwaga. W praktyce dla prowadzenia prostopadłych używa się węgielnicy (fig. 97). Jest to deseczka, mająca kształt trójkąta prostokątnego. Chcąc za pomocą tego przyrządu wystawić prostopadłą do danej prostej w danym punkcie, przykładamy ją do prostej tak, aby jedno ramię kąta prostego przystało do niej, wierzchołek zaś padł na dany punkt, prosta poprowadzona wzdłuż drugiego ramienia będzie oczywiście szukaną prostopadłą.

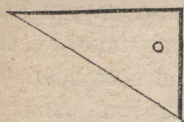


Fig. 97.

Łatwo też zrozumieć, jak postąpić należy dla rozwiązania innych zadań o prostopadłej.

122. **Zadanie V.** Na prostej w danym jej punkcie wykreslić kąt równy danemu.

Dana jest prosta BC (fig. 98) i na niej punkt A ; nakreślić przy tym punkcie kąt równy K .

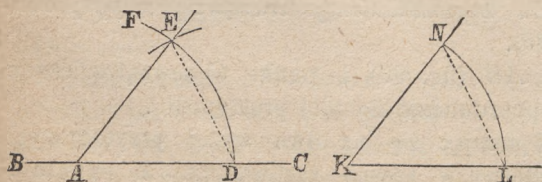


Fig. 98.

Rozwiązanie.

Z wierzchołka kąta danego K , jako środka, dowolnym promieniem KL zakreślamy łuk koła przecinający ramiona tego kąta

w punktach L i N ; potem z punktu A jako środka, tym samym co poprzednio promieniem zakreślamy łuk DF , przecinający w D prostą BC ; następnie z punktu D promieniem równym LN zakreślamy łuk koła przecinający łuk poprzednio nakreślony w punkcie E . Połączymy punkt E z punktem A , otrzymamy kąt $EAC = \angle K$. Jakoż dwa trójkąty EAD i NKL są sobie równe, gdyż boki AE i AD są równe KN i KL jako równe promienie, bok zaś $DE = NL$ z założenia, więc dwa trójkąty mają wszystkie boki równe (§ 86), stąd zaś wypada że $\angle A = \angle K$.

123. Zadanie VI. Przez punkt dany poprowadzić równoległą do prostej danej.

Dana jest prosta BC (fig. 99) i punkt A zewnątrz niej; należy przez ten punkt poprowadzić prostą równoległą do danej.

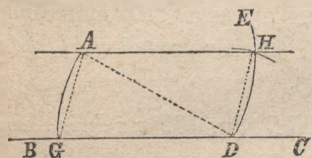


Fig. 99.

Prostą BC w G . Długością cięciwy AG zakreślamy z punktu D łuk koła, przecinający w H łuk DE ; poprowadziwszy na koniec prostą AH , otrzymamy żadaną równoległą.

Jakoż dwa trójkąty AGD i AHD , jako mające wszystkie trzy boki odpowiednio równe, są sobie równe i z ich równości wypada, że $\angle GDA = \angle HAD$ i $GD \parallel AH$ (§ 64).

124. Zadanie VII. Przez dany punkt poprowadzić linię prostą, któraby czyniła z daną prostą kąt równy danemu.

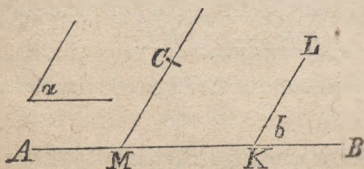


Fig. 100.

Dana jest prosta AB , punkt C i kąt α (fig. 100); należy przez punkt C poprowadzić prostą, któraby przecięła prostą AB pod kątem α .

Rozwiązanie. W tym celu przy dowolnym punkcie K prostej AB kreślę kąt b równy

danemu a (Zad. V) i przez punkt C prowadzę prostą CM równoległą do LK , wskutek czego i kąt $LMB=b=a$ (§ 70, 3).

Uwaga. W praktyce linie równoległe prowadzą się za pomocą węgielnicy. Chcąc np. za pomocą węgielnicy poprowadzić przez punkt C równoległą do prostej AB (fig. 101), postępujemy w sposób następujący. Przystawiamy przeciwprostokątną MN węgielnicy do danej prostej AB , a przyłożywszy do drugiego jej boku MP linijkę stałą, posuwamy przy nim węgielnicę, aż przeciwprostokątna przejdzie przez punkt C . Wtedy prosta CD nakreślona wzdłuż przeciwprostokątnej MN

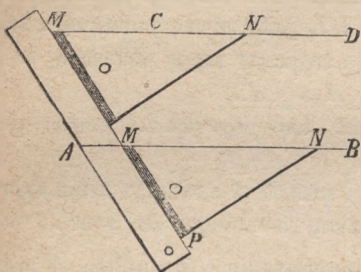


Fig. 101.

będzie równoległą do linii danej (§ 71).

125. **Zadanie VIII.** Podzielić kąt ABC (fig. 102) na dwie równe części.

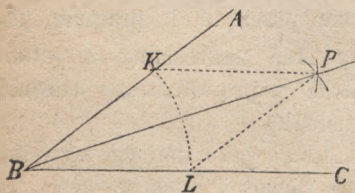


Fig. 102.

Rozwiązanie. Na ramionach kąta, poczynając od wierzchołka, odkładamy części równe BK i BL , następnie z punktów K i L promieniami dowolnymi, lecz równymi sobie, zakreślamy łuki kół przecinające się w punkcie P ; przeto BP , łącząca punkty B i P , rozdzieli dany kąt na dwie równe części.

Jakoż, połączymy punkt P z punktami K i L linijami prostymi KP i PL , otrzymamy dwa trójkąty BKP i PBL równe sobie (§ 86), a z ich równości wypada, że $\angle KBP = \angle PBL$.

126. **Zadanie IX.** Dany kąt prosty ABC (fig. 103) podzielić na trzy równe części.

Rozwiązanie. Z wierzchołka kąta prostego B , jako środka, zakreślamy łuk koła przecinający ramiona w punktach A i C . Z punktu A , jako środka, tym samym co poprzednio promieniem $AD =$

czny jest zarazem *dostatecznym*, albowiem łuk koła zakreślony z punktu C , jako środka, promieniem $a=b$, który jest większy od prostopadłej CH , przecina ramię AB w punktach A i B i trójkąt ABC jest jedynym rozwiązaniem.

3-cie. Gdy bok $a < b$, trzeba żeby $\angle A$ był ostry; bo inaczej $\angle B$ byłby rozwarty (§ 88) i trójkąt byłby niemożliwy (§ 79, 3). W tym przypadku, jeśli bok przeciwny a jest większy od prostopadłej CH (fig. 104, górna), łuk koła zakreślony z punktu C przecina prostą w dwu punktach B i B' i dwa trójkąty ABC i $AB'C$ czynią zadość zadaniu; otrzymujemy więc *dwa rozwiązania*.

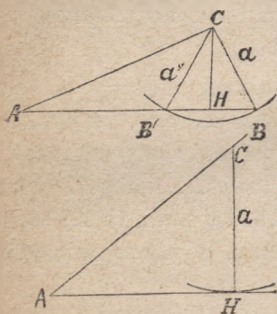


Fig. 105.

Jeżeli zaś bok przeciwny a jest równy prostopadłej CH (fig. 105), wtedy łuk koła zakreślony z punktu C promieniem równym a będzie styczny do ramienia AB w punkcie H i wtedy trójkąt ACH jest jedynym rozwiązaniem zadania.

Nakoniec, jeśli bok przeciwny a jest mniejszy od prostopadłej CH , wtedy łuk koła zakreślony z punktu C nie przetnie ramienia AB i zadanie jest niemożliwe do rozwiązania.

Stąd widzimy, że w tym trzecim przypadku zagadnienie może mieć dwa rozwiązania, albo tylko jedno albo nawet nie mieć żadnego.

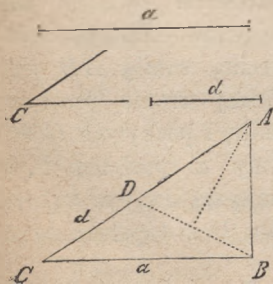


Fig. 106.

128. **Zadanie XI.** Zbudować trójkąt, mając jego podstawę, kąt przyległy podstawie i różnicę dwu pozostałych boków.

Dane są: podstawa a , $\angle C$ przyległy bokowi a i różnica d dwu pozostałych boków; — nakreślić trójkąt.

Rozwiązanie. Wyobraźmy sobie, żeśmy trójkąt nakreślili i że nim jest ABC (fig. 106). Odłożywszy na boku AC , począwszy od punktu A , część $AD=AB$ i połączysz punkt D z punktem B

prostą BD , otrzymamy trójkąt, w którym znamy bok $CB = a$, bok $CD = AC - AB = d$ i $\angle C$. Trójkąt ten da się łatwo nakreślić, gdyż, nakreśliwszy kąt C , odkładamy na jego ramionach długości a i d i końce tych linii łączymy prostą. Pozostaje więc tylko wyznaczyć wierzchołek A szukanego trójkąta, lecz wierzchołek ten znajduje się w równej odległości od B i D , gdyż $AB = AD$, więc leżeć musi na prostopadłej wystawionej ze środka prostej DB (§ 99), a że ten sam wierzchołek musi też leżeć i na przedłużeniu CD , więc przypada na wspólnem ich przecięciu— A .

Uwaga. W taki sam sposób wykreśla się trójkąt, w którym znamy podstawę, kąt przyległy tej podstawie i sumę dwu pozostałych boków.

129. **Zadanie XII.** *Daną prostą podzielić na kilka równych części.*

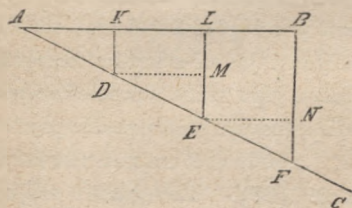


Fig. 107.

Rozwiązanie. Dajmy, że prostą AB (fig. 107) mamy podzielić na trzy równe części. Przez skrajność prostej AB poprowadźmy jakąkolwiek prostą AC i na niej odłóżmy trzy dowolne, lecz równe odcinki $AD = DE = EF$. Ostatni punkt F połączmy z drugą skrajnością prostej AB linią prostą FB i przez punkty E i D

poprowadźmy proste EL i DK równoległe do BF . Proste odetną trzy odcinki AK , KL i LB równe pomiędzy sobą, t. j. prosta AB zostanie podzieloną na trzy równe odcinki.

Dla dowiedzenia tego przez punkty D i E poprowadźmy DM i EN równoległe do AB ; otrzymamy trzy trójkąty ADK , DEM i EFN równe pomiędzy sobą, gdyż $AD = DE = EF$ z założenia, kąty zaś przyległe tym bokom są równe jako kąty odpowiadające. Z równości tych trójkątów wypada $AK = DM = EN$; lecz $DM = KL$, $EN = LB$ jako boki przeciwległe równoległoboków $DKLM$ i $ELBN$.

130. Pytania i zadania. Co nazywamy miejscem geometrycznem? Znaleźć punkt równo oddalony od trzech danych punktów (117,c). Znaleźć punkt równo oddalony od trzech danych prostych (117,d). Dowieść, że prostopadłe wyprowadzone ze środków boków trójkąta schodzą się w jednym punkcie (117). Dowieść, że trzy wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie (należy poprowadzić przez wierzchołki trójkąta proste równoległe do boków przeciwnych i następnie zastosować poprzednie twierdzenie). Dowieść, że dwójsieczne kątów trójkąta schodzą się w jednym punkcie (117,d). Na danej prostej znaleźć punkt równo oddalony od dwu punktów danych. (117,c). Na danej prostej znaleźć punkt równo oddalony od dwu prostych danych; wskazać, ile może być rozwiązań (117,d). Na danej prostej znaleźć punkt oddalony od drugiej danej prostej na daną długość (117,b). Na danym okręgu koła znaleźć punkt oddalony od danej prostej na daną długość. Dyskusja (118). Zbudować trójkąt, mając dane wszystkie trzy jego boki. Czy zadanie jest zawsze możliwe? Zbudować trójkąt, mając dane dwa jego boki i kąt pomiędzy nimi zawarty. Zbudować trójkąt, mając dane: jeden bok i dwa kąty jemu przyległe. Zbudować trójkąt prostokątny, mając jego przeciwprostokątną i jeden z kątów ostrych. Zbudować trójkąt prostokątny, mając jedną z jego przeciwprostokątnych i kąt ostry. Zbudować trójkąt prostokątny, mając jego przeciwprostokątną i jedną z jego przyprostokątnych. Zbudować trójkąt równoramienny, mając jego podstawę i wysokość (87). Zbudować trójkąt prostokątny i równoramienny, znając jego przeciwprostokątną (opierając się na łatwej do dowodzenia własności, że prosta łącząca środek przeciwprostokątnej z wierzchołkiem kąta prostego równa się połowie przeciwprostokątnej). Znaleźć miejsce geometryczne punktów końcowych prostych jednakowej długości, tworzących z daną prostą jeden i ten sam kąt. Podzielić kąt na 4, 8, 16.... równych części. Wykreślić kąt $120'$ za pomocą cyrkla i linijalu (122). Znając sumę i różnicę dwu odcinków prostej, znaleźć te odcinki. Znając sumę i różnicę dwu kątów, wyznaczyć kąty. Przez dany punkt poprowadzić prostą, przecinającą dane dwie równoległe w ten sposób, ażeby odcinek zawarty pomiędzy równoległymi miał daną długość. (Z dowolnego punktu jednej z równoległych należy zakreślić okrąg promieniem równym danej długości, punkty przecięcia się tego okręgu z drugą

równoległą, należy połączyć linijami prostemi i przez dany punkt poprowadzić do nich równoległe). Czy powyższe zadanie zawsze jest możliwe? Mając dane dwa punkty A i B zewnątrz prostej XY i po jednej jej stronie, znaleźć na tej prostej taki punkt O , ażeby kąty AOX i BOY były równe. (Z punktu A należy poprowadzić prostopadłą AH do XY i przedłużyć ją o część $HA' = HL$, punkt A' połączyć z punktem B prostą $A'B$, która przetnie prostą XY w szukanym punkcie O . Dowodzenie polega na równości trójkątów i kątów wierzchołkiem przeciwległych). Dowieść, że rozwiązanie zadania: przejść z punktu A do B najkrótszą drogą dotykającą się prostej XY —będzie takie samo jak poprzednie. Zadania powyższe często się przytrafiają w zjawiskach przyrody, gdyż fizyka uczy, że ciało sprężyste przy uderzeniu o płaszczyznę, promień światła padający na zwierciadło, fala napotykaląca po drodze płaszczyznę i t. d. zostają odbite pod kątem równym kątow padania. Na bilardzie mającym kształt prostokąta $ABCD$ znajdują się dwie bile M i N ; w jakim kierunku należy uderzyć bilę M , ażeby, odbiwszy się o wszystkie boki bilardu, zetknęła się z bilą N ? (W tym celu należy z punktu M poprowadzić prostopadłą MI na bok AB i odłożyć na niej część $IM_1 = IM$, następnie z punktu M poprowadzić prostopadłą M_1K na bok BC i odłożyć na niej $KM_2 = KM_1$, z punktu M_2 poprowadzić prostopadłą M_2L na bok DC i odłożyć na niej $LM_3 = LM_2$, otrzymany punkt M_3 należy połączyć prostą z punktem N , otrzymanym, odkładając na prostopadłej NS do boku AD część $SN_1 = SN$. Prosta M_3N_1 przetnie bok DC w punkcie R ; prosta, łącząca punkt R z punktem M_2 przetnie bok BC w punkcie Q , nakoniec prosta, łącząca ten punkt z punktem M , przetnie bok AB w punkcie P , który, połączony z bilą M , da nam kierunek uderzenia MP). Zbudować prostokąt, mając dane dwa przyległe boki. Zbudować prostokąt, mając dany jeden bok i kąt pomiędzy przekątnymi (108, 85,3). Zbudować prostokąt, mając przekątną i kąt pomiędzy przekątnymi. Zbudować trójkąt prostokątny, znając jego przeciwprostokątną i sumę przyprostokątnych (wyobraziwszy sobie, że szukany trójkąt został narysowany, przedłużamy jedną jego przyprostokątną o długość drugiej przyprostokątnej, otrzymamy trójkąt równoramienny, którego podstawa równa się sumie przyprostokątnych lub—przeciwprostokątnej szukanego trójkąta, kąty zaś przy podstawie— 45° . Ten trójkąt bardzo łatwo daje się

nakreślić, a za pomocą niego—szukany trójkąt). Zbudować prostokąt, mając jego obwód i przekątną. (Zadanie sprowadza się do poprzedniego). Podzielić kąt pomiędzy dwiema prostymi nieprzecinającymi się w granicach rysunku na dwie równe części. (Należy korzystać z własności dwójsiecznej kąta (117,d) i wyznaczyć dwa punkty tej dwójsiecznej, prowadząc dwie dowolne proste, przecinające dwie dane, i dzieląc utworzone kąty na równe części). Zbudować trójkąt równoramienny, znając jego wysokość i kąt przy podstawie. Zbudować trójkąt równoboczny, mając jego wysokość. (Należy nakreślić dowolny trójkąt równoboczny, na wysokości jego odciąć, począwszy od wierzchołka, daną wysokość i poprowadzić równoległą do podstawy). Zbudować trójkąt, mając dwa jego boki i wysokość odnośną do trzeciego boku (na zasadzie wykreślenia trójkąta prostokątnego, znając przeciwprostokątną i przyprostokątną). Zbudować trójkąt, mając jeden jego bok, ośrodkową względem tego boku (liniję łączącą wierzchołek ze środkiem boku przeciwległego) i kąt przyległy temu bokowi (127). Zbudować trójkąt, mając jeden z jego boków i wysokości odnośnie do dwu pozostałych boków (na zasadzie wykreślenia trójkątów prostokątnych). Zbudować trójkąt prostokątny, znając jedną przyprostokątną i różnicę dwu ostrych kątów. (Wyobraźmy sobie, żeśmy trójkąt szukany nakreślili i niech nim będzie ABC . Dla wprowadzenia do rysunku różnicy kątów $B-C$ nakreślimy na przeciwprostokątnej przy punkcie C kąt $BCD=C$ i przedłużymy przyprostokątną AB do przecięcia się z prostą CD w punkcie D . Kąt $D=\angle B-\angle C$. Stąd wypada, że dla rozwiązania naszego należy zbudować trójkąt prostokątny, którego jedna przyprostokątna AC jest dana i kąt jej przeciwległy $\angle D=\angle B-\angle C$ jest wiadomy, podzieliwszy drugi kąt ostry tego trójkąta prostokątnego na dwie równe części, otrzymamy szukany trójkąt). Zbudować trapez, znając trzy jego boki i kąt zawarty pomiędzy dwoma. Zbudować kwadrat ukośny, znając jego przekątną.

III. K o ł o.

1. Cięciwy w kole.

W § 55 daliśmy określenie koła i jego okręgu, niektórych prostych w kole, jakoteż niektórych twierdzeń, odnoszących się do koła, teraz zajmijmy się bliższem zbadaniem tej ważnej figury.

131. Twierdzenie. *Linija prosta nie może spotykać okręgu w więcej niż dwu punktach.*

Dowodzenie. Jakoż, gdyby jakakolwiek prosta spotykała okrąg w trzech punktach A, B, C , to łącząc te punkty ze środkiem koła O , otrzymalibyśmy trzy proste: OA, OB i OC równe jako promienie jednego koła (§ 56); lecz z jednego punktu tylko dwie równe pochyłe do prostej prowadzić możemy (§ 98, wn. 2-gi) zatem i prosta tylko w dwu punktach może spotykać koło.

132. Określenia. Wszelka nieograniczona prosta CD (fig. 108), przecinająca okrąg koła, nazywa się *sieczną*.

Część koła $OABO$ (fig. 109), zawarta między łukiem AB i dwoma promieniami OA i OB , nazywa się *wycinkiem* koła. Część koła EKF (fig. 108), zawarta pomiędzy łukiem EKF i cięciwą EF , nazywa się *odcinkiem* koła.

133. Twierdzenie. *Średnica jest największą cięciwą koła.*

Niech będzie koło O (fig. 109) i cięciwa jakakolwiek AB ; należy dowieść, że wszelka średnica, np. EF jest większą od dowolnie poprowadzonej cięciwy AB .

Dowodzenie. W tym celu połączmy końce cięciwy AB ze środkiem koła, otrzymamy

$$OA + OB > AB \text{ (§ 24 lub § 75),}$$

lecz OA i OB jako promienie jednego koła są sobie równe (§ 57),

więc

$$2OA > AB.$$

a że $2OA = EF$ (§ 56), a zatem

$$EF > AB.$$

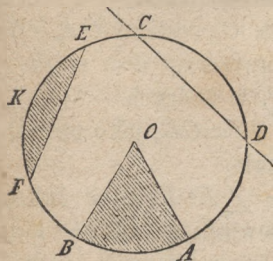


Fig. 108.

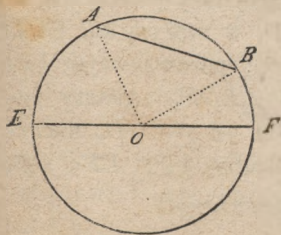


Fig. 109.

134. Twierdzenie. *Każda średnica dzieli koło i okrąg jego na dwie równe części.*

Dowodzenie. Zegnijmy odcinek $EABF$ (fig. 109) wzdłuż średnicy EF tak, ażeby część koła leżąca nad nią upadła na część koła pod nią leżącą; łatwo widzieć, że wtedy wszystkie punkty górnego łuku $EABF$ przystaną do odpowiednich punktów dolnego łuku; jeśliby bowiem jakiś punkt łuku pierwszego nie upadł na łuk dolny, lecz zewnątrz lub wewnątrz niego, to punkty jednego i tego samego okręgu nie byłyby w równej od środka odległości (porównaj § 57).

Jeśli zaś $EABF$ przystanie do łuku pod średnicą, to te dwa łuki będą sobie równe, jakoteż i odcinki, czyli, jak tu, półkoła.

135. Twierdzenie. *W kole, albo w kołach równych:*

1-sze. Łuki równe są podparte cięciwami równymi.

2-re. Łuk mniejszy jest podparty cięciwą mniejszą.

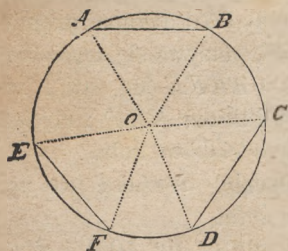


Fig. 110.

Dowodzenie. 1-sze. Dajmy, że łuk $EF =$ łukowi AB (fig. 110). Połączymy punkty A, B, E i F ze środkiem koła O prostymi OA, OB, OE i OF , otrzymamy dwa trójkąty OAB i OEF , w których

$OA = OE, OF = OB$, jako promienie jednego koła,

$\angle AOB = \angle EOF$, gdyż łukom równym odpowiadają równe kąty środkowe (§ 58, wzajemn.); te trójkąty zatem będą równe i w ogólności cięciwa $AB =$ cięciwie EF .

2-gie. Dajmy, że łuk $CD > EF$. Połączymy punkty C i D ze środkiem koła O , otrzymamy trójkąt COD , w którym kąt COD jest oczywiście większym od kąta EOF (§ 59); porównywając dwa trójkąty DOC i EOF ze sobą, widzimy, że $\angle EOF$, zawarty pomiędzy pierwszą parą boków, jest mniejszym od $\angle COD$, zawartego pomiędzy drugą parą boków, więc (na zasadzie § 92) $EF < CD$.

136. Wzajemnica. *W kole, albo w kołach równych:*

1-sze. Cięciwy równe podpierają łuki równe.

2-re. Cięciwa mniejsza podpira łuk mniejszy.

Dowodzenie 1-sze. Dajmy, że cięciwa $AB =$ cięciwie EF . Połączmy końce równych cięciw ze środkiem koła O prostymi OA , OB , OE i OF , otrzymamy dwa trójkąty OAB i FOE równe pomiędzy sobą, gdyż mają wszystkie trzy boki odpowiednio równe; z równości zaś tych trójkątów wypada, że $\angle AOB = \angle EOF$, a stąd że łuk $AB =$ łukowi EF (§ 58).

2-re. Dajmy, że cięciwa $CD >$ cięciwy EF . Połączmy punkty C i D ze środkiem koła O prostymi CO i DO , otrzymamy trójkąt COD , którego dwa boki CO i DO są odpowiednio równe dwóm bokom OF i OE trójkąta EOF , lecz bok trzeci $CD > EF$, więc $\angle COD > \angle EOF$ (§ 93), zatem i łuk $CD >$ łuku EF (§ 59).

Uwaga 1. Łatwo widzieć, że powyższe twierdzenia stosują się i do tego przypadku, gdy zamiast jednego koła będą dwa koła równe.

Uwaga 2. Drugie części twierdzenia i wzajemnicy oczywiście są tylko prawdziwe w przypadku, gdy łuki nie są większe od półokręgu, gdyż wtedy są one w sensie odwrotnym prawdziwe, to jest: łukowi mniejszemu odpowiada cięciwa większa, i nawzajem cięciwie mniejszej odpowiada łuk większy.

137. Twierdzenie. Średnica prostopadła do cięciwy dzieli tę cięciwę i oba łuki przez nią podparte na dwie równe części.

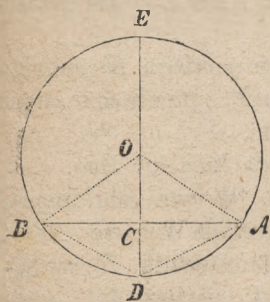


Fig. 111.

Dowodzenie. Niech będzie średnica DE (fig. 111) prostopadła do cięciwy AB ; należy dowieść, że $BC = CA$, łuk BD równy łuk. DA , łuk BE równy łukowi AE . W tym celu połączmy punkty A i B z punktami O i D . Pochyłe OB i OA , równe jako promienie jednego koła, są równo oddalone od spodka C prostopadłej OC , to jest: $BC = CA$ (§ 97, 2). Z równości zaś odcinków BC i CA wypada, że pochyłe DB i DA , jako równo oddalone

od spodka C prostopadłej DC , są sobie równe, t. j. $BD = DA$, a że równe cięciwy podpierają łuki równe, więc łuk BD równy łukowi DA .

Ponieważ zaś półokręgi DBE i DAE są równe i łuki BD i DA są też równe, więc

139. **Zadanie.** Przez dany punkt poprowadzić okrąg koła.

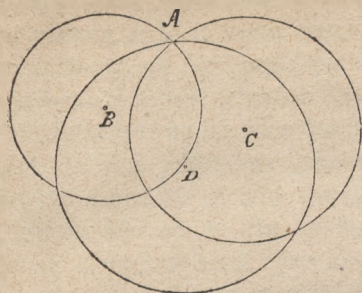


Fig. 113.

Rozwiązanie. Dajmy, że dany jest punkt A (fig. 113) i należy przez ten punkt poprowadzić okrąg koła. Oczywiście, że takich okręgów może być nieskończenie wiele, gdyż każdy dowolny punkt B, C, D płaszczyzny możemy obrać za środek koła szukanego i z nich promieniami równymi odległości tych punktów od danego

punktu A zakreślić koła. Zadanie więc powyższe jest *nieoznaczonem*.

140. **Zadanie.** Przez dane dwa punkty poprowadzić okrąg koła.

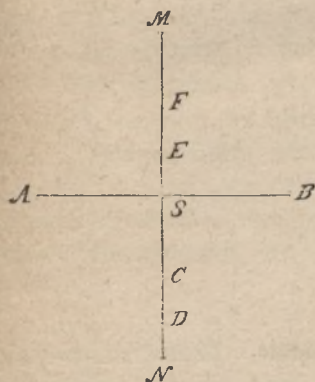


Fig. 114.

Rozwiązanie. Dajmy, że przez punkty A i B (fig. 114) trzeba poprowadzić okrąg koła. Ponieważ szukane koło przechodzić ma przez punkty A i B , więc prosta AB będzie cięciwą szukanego koła i dla tego środek tego koła leżeć musi na prostopadłej MN do cięciwy wystawionej z jej środka S (§ 137, 1). Ponieważ zaś środek ten żadnemu innemu warunkowi nie potrzebuje czynić zadość, więc każdy punkt: E, F, C, D . . prostej MN czyni zadość warunkowi, t. j., że okręgów, przechodzących

przez dane dwa punkty jest nieskończenie wiele. Zadanie więc to, zarówno jak i poprzednie, jest *nieoznaczonem*; zachodzi atoli pomiędzy nimi ta różnica, że w zadaniu poprzednim położenie środków szukanych okręgów było zupełnie dowolne, w zadaniu zaś w mowie będącem środki szukanych okręgów muszą leżeć na prostopadłej do prostej AB , wystawionej z jej środka.

141. **Zadanie.** Przez dane dwa punkty poprowadzić okrąg koła o danym promieniu.

Rozwiązanie. Dane są dwa punkty A, B i promień r (fig. 115),

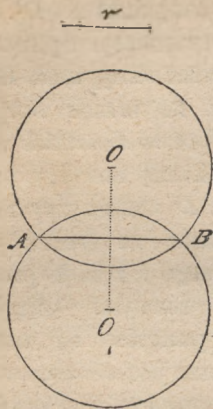


Fig. 115.

koła, zakreślony z punktu A promieniem r , przetnie prostą OO_1 w dwu punktach O i O_1 i otrzymamy *dwa rozwiązania*.

2-re. Jeśli $r = \frac{AB}{2}$, to okrąg, zakreślony z punktu A promieniem r , dotknie się prostej OO_1 w jednym tylko punkcie i otrzymamy *jedno rozwiązanie*.

3-cie. Jeśli $r < \frac{AB}{2}$, wtedy okrąg koła, zakreślony z punktu A promieniem równym r , wcale prostej OO_1 nie przetnie i *rozwiązanie będzie niemożliwe*.

Wypada to z § 96.

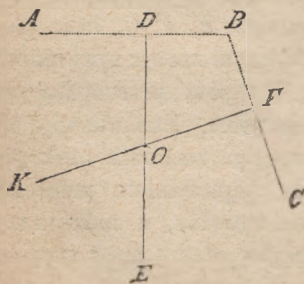


Fig. 116.

należy poprowadzić okrąg koła przechodzący przez te dwa punkty i mający dany promień. Na zasadzie poprzedniego zadania, środek szukanego okręgu leżeć musi na prostopadłej OO_1 wystawionej ze środka prostej AB , lecz ponieważ środek ten musi być oddalony od punktu A na odległość promienia r , więc leżeć też musi na okręgu koła opisanego z punktu A promieniem równym r (§ 57); stąd wynika, że środek szukanego koła leżeć musi na wspólnem przecięciu się O prostopadłej OO_1 i okręgu nakreślonego z punktu A promieniem $= r$.

Dyskusja. 1-sze. Jeśli $r > \frac{AB}{2}$, to okrąg

142. Zadanie. Przez trzy punkty nie leżące na jednej prostej poprowadzić okrąg koła.

Rozwiązanie. Dane są trzy punkty A, B i C (fig. 116) nie leżące na jednej prostej, a trzeba poprowadzić przez nie okrąg koła. Przedewszystkiem widzimy, że w przypadku gdy dane trzy punkty leżą na jednej prostej, to przez nie okręgu koła przeprowadzić nie można, albowiem linija prosta nie może

spotykać okręgu koła w trzech punktach (§ 131). Weźmy więc przy-

padek, gdy te trzy punkty A , B i C leżą na dwu przecinających się prostych AB i BC . Ponieważ AB ma być cięciwą szukanego koła, więc środek jego leżeć musi na prostopadłej DE wystawionej ze środka D prostej AB ; dla tej samej przyczyny środek szukanego koła leżeć musi na prostopadłej wystawionej ze środka F prostej BC ; a ponieważ dane proste mogą się przecinać w jednym tylko punkcie, więc środkiem szukanym będzie punkt O przecięcia się DE i FK . Jeśli teraz z punktu O promieniem równym OA opiszemy okrąg koła, to on przejdzie i przez dwa pozostałe punkty B i C . Widzimy stąd, że zadanie powyższe jest zupełnie *oznaczonem*, t. j. ma tylko *jedno* rozwiązanie.

Uwaga 1. Trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, wyznaczają okrąg koła, t. j. że przez trzy punkty można tylko poprowadzić jeden okrąg koła.

Uwaga 2. Dwa okręgi mające trzy punkty wspólne przystają do siebie.

Uwaga 3. Ponieważ trzy punkty na jednej prostej nie leżące wyznaczają okrąg koła, więc przez cztery, pięć lub więcej punktów nie zawsze można go poprowadzić, albowiem okrąg przeprowadzony przez trzy z nich nie zawsze przejdzie przez pozostałe.

143. Twierdzenie. *W kole lub w kołach równych, cięciwy równe są równo oddalone od środka; i nawzajem: cięciwy równo oddalone od środka są sobie równe.*

Dowodzenie 1-sze. Niech będą w kole O (fig. 117) dwie cięciwy

równe AB i CD . Odległościami są prostopadłe OL i OK , poprowadzone na nie ze środka O (§ 98). Mamy dowieść, że $OL=OK$. W tym celu połączymy punkty A i C ze środkiem koła O prostymi OA i OC , otrzymamy dwa trójkąty prostokątne OAK i OCL równe pomiędzy sobą, gdyż w nich przyprostokątne AK i CL są sobie równe jako połowy (§ 135) równych cięciw, przeciwprostokątne OC i OA równe jako promienie jednego koła (§ 90, wn.), więc $OK=OL$.

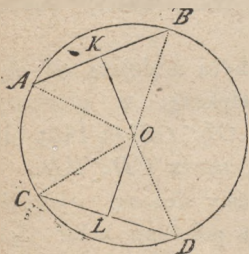


Fig. 117.

2-re. Założywszy nawzajem, że odległości OL i OK cięciw od środka są sobie równe, otrzymamy dwa trójkąty prostokątne OAK i

OC równe pomiędzy sobą, jako mające po równych przeciwprostokątnych OA i OC i po równych przyprostokątnych OK i OL . Z ich zaś równości wynika, że $AK = CL$. Ponieważ zaś $AK = \frac{AB}{2}$, $CL = \frac{CD}{2}$, więc i $AB = CD$.

144. Twierdzenie. *W kole lub w kołach równych z dwu nierównych cięciw mniejsza leży dalej od środka koła.*

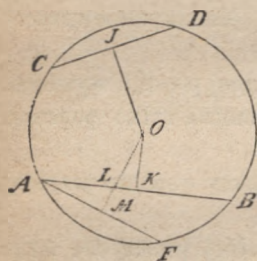


Fig. 118.

Założenie. Dajmy, że cięciwa CD (fig. 118) jest mniejszą od cięciwy AB , należy dowieść, że prostopadła OI do CD jest większą od prostopadłej OK do cięciwy AB .

Dowodzenie. Ponieważ cięciwa AB jest większą od cięciwy CD , więc i łuk $AB >$ łuku CD (§ 133), więc na łuku AB możemy odłożyć łuk $AF =$ łukowi CD ; poprowadziwszy cięciwę AF , znajdujemy, że ona jest równą cięciwie CD (§ 135). Poprowadziwszy ze środka O prostopadłą OM na cięciwę AF , znajdujemy, że $OM = OI$ (§ 143); pozostaje więc tylko dowieść, że $OM > OK$. Lecz $OL > OK$ (§ 96), więc tembardziej $OM > OK$.

145. Wzajemnica. *W kole lub w kołach równych cięciwa więcej oddalona od środka jest mniejszą.*

Założenie. Dajmy, że $OI > OK$ (fig. 118), należy dowieść, że cięciwa $CD <$ od cięciwy AB .

Dowodzenie. Gdyby cięciwa CD nie była mniejszą od cięciwy AB , to byłaby albo równą, albo większą; w pierwszym przypadku $OI = OK$ (§ 143), w drugim zaś $OI < OK$ (§ 141), lecz oba te przypadki sprzeciwiają się założeniu, zatem $CD < AB$.

146. Pytania i zadania. Co nazywamy sieczną, wycinkiem i odcinkiem koła? Czy jeden punkt wyznacza położenie koła? Jakie jest miejsce geometryczne środków kół przechodzących przez dane dwa punkty? Ile trzeba punktów dla wyznaczenia koła? Czy dwa razy większemu łukowi odpowiada cięciwa dwa razy większa? Dowieść, że największą odległością punktu, zewnątrz koła leżącego, od okręgu jest długość całej siecznej poprowadzonej przez dany punkt i przechodzącej przez środek, najmniejszą zaś—zewnątrzny odcinek tej siecznej.

Dowieść, że ze wszystkich cięciw, przechodzących przez dany punkt, leżący wewnątrz koła, najmniejszą jest ta, która w tym punkcie dzieli się na dwie równe części (§ § 135, 92). Przez dany punkt wewnątrz koła poprowadzić cięciwę dzielącą się w tym punkcie na dwie równe części (§ 135). Znaleźć miejsce geometryczne środków równych cięciw danego koła. Nakreślić okrąg koła, przechodzący przez dane dwa punkty i przecinający dany okrąg w ten sposób, ażeby cięciwa wzajemnego ich przecięcia się była równoległą do danej prostej (§ 135).

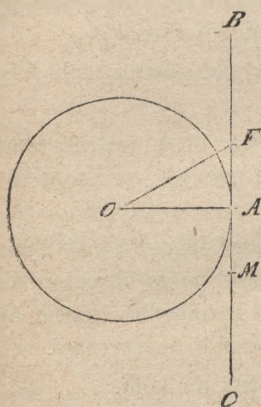


Fig. 119.

2. 0 stycznych i cięciwach równoległych.

147. **Określenie.** *Styczną do koła nazywamy prostą BC (fig. 119), mającą jeden tylko punkt A wspólny z okręgiem. Punkt A nazywa się punktem zetknięcia, czyli styczności.*

Z samego określenia koła (§ 55) wypada, że odległość każdego punktu, leżącego wewnątrz koła, od środka jest mniejszą od promienia; odległość zaś punktu leżącego zewnątrz koła od środka jest większą od promienia.

Normalną do okręgu w danym punkcie jest prostopadła do stycznej w tym punkcie.

Uwaga. Te same określenia któreśmy dali dla okręgu koła, służą tu i dla dowolnej krzywej.

Kąt utworzony przez dwie cięciwy, wychodzące z jednego punktu, nazywa się *wpisanym*, jak np. ABC (fig. 120).

Kąt, którego ramiona są styczne do okręgu, nazywa się *opisanym*, jak np. DEF (fig. 120).

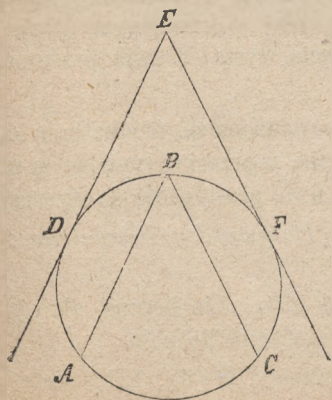


Fig. 120.

148. **Twierdzenie.** *Prostopadła do promienia wyprowadzona z jego skrajności jest styczną do okręgu.*

Założenie. Dajmy, że prosta BC (fig. 119) jest prostopadłą do promienia OA w punkcie A ; należy dowieść, że ta prostopadła jest w tym punkcie styczną do okręgu.

Dowodzenie. Połączwszy jakikolwiek punkt F prostej BC ze środkiem O , znajdziemy, że ona jest pochyłą względem tej prostej, a zatem większą od prostopadłej OA , skąd wypada, że punkt F leży poza okręgiem (§ 147). Prosta zatem BC ma tylko jeden punkt wspólny z okręgiem, czyli jest do niego styczną.

149. **Wzajemnica.** *Styczna do koła jest prostopadła do promienia w punkcie zetknięcia.*

Założenie. Dajmy, że prosta BC (fig. 119) jest styczną do okręgu w punkcie A , należy dowieść, że ona jest prostopadłą do promienia OA .

Dowodzenie. Ponieważ z samego określenia stycznej wypada, że wszelki jej punkt F odmienny od A leży po za okręgiem, więc promień OA jest najkrótszą z prostych łączących środek O ze styczną BC ; więc promień ten jest prostopadły do stycznej.

Wniosek 1-szy. Promień jest normalny do koła.

Wniosek 2-gi. Przez punkt dany na okręgu można zawsze poprowadzić styczną do koła (§ 45, uwaga).

Wniosek 3-ci. Prostopadła do stycznej wystawiona w punkcie zetknięcia przechodzi przez środek koła; w przeciwnym bowiem razie możnaby było w punkcie zetknięcia wystawić dwie prostopadłe do stycznej.

Wniosek 4-ty. Prostopadła, poprowadzona ze środka koła do stycznej, przechodzi przez punkt zetknięcia; w przeciwnym bowiem razie możnaby było ze środka poprowadzić dwie prostopadłe do stycznej.

150. **Twierdzenie.** *Łuki kół zawarte pomiędzy dwiema równoległymi są sobie równe.*

Dwie linie równoległe mogą być albo obie sieczne, albo jedna sieczna a druga styczna, albo też obie styczne do koła.

a) **Założenie.** Sieczna $AB \parallel$ siecznej CD (fig. 121); należy dowieść, że łuk $AC =$ łukowi BD .

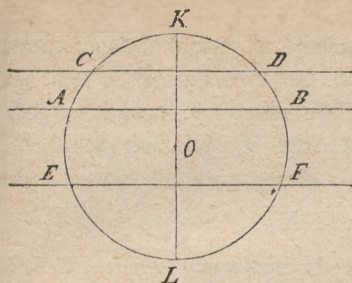


Fig. 121.

skąd $\text{łuk } AK = \text{łuk. } CK = \text{łuk. } BK = \text{łuk. } DK$,
czyli $\text{łuk } AC = \text{łuk. } BD$.

Jeśli równoległe AB i EF leżą po obu stronach środka, to przedłużwszy prostopadłą OK do prostej AB , otrzymamy średnicę KL prostopadłą do EF (§ 71, 2). Średnica, jak wiadomo (§ 134), dzieli okrąg na dwie równe części; będzie więc

$$KAEL = KBFL,$$

lecz $\left. \begin{array}{l} \text{łuk } AK = \text{łuk. } BK \\ \text{łuk } EL = \text{łuk. } FL \end{array} \right\} (\S 137),$

więc $\text{łuk } AK + \text{łuk. } EL = \text{łuk. } BK + \text{łuk. } FL$

i $KAEL - (\text{łuk } AK + \text{łuk. } EL) = KBFL - (\text{łuk } BK + \text{łuk. } FL)$
czyli $\text{łuk } AE = \text{łuk. } BF$.

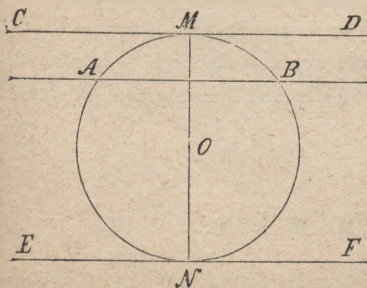


Fig 122.

Dowodzenie. Ze środka O poprowadźmy prostopadłą OK do jednej z siecznych, np. na AB , a będzie ona prostopadłą i do drugiej CD (§ 71, 2).

Ponieważ prosta OK jest prostopadłą do AB , będzie (§ 137)

$$\text{łuk } AK = \text{łuk. } BK.$$

Ponieważ prosta OK jest prostopadłą do CD , będzie

$$\text{łuk } CK = \text{łuk. } KD,$$

b) **Założenie.** Sieczna $AB \parallel$ stycznej CD (fig. 122) należy dowieść, że

$$\text{łuk } AM = \text{łuk. } MB.$$

Dowodzenie. Przez punkt zetknięcia M poprowadźmy promień OM ; promień ten będzie prostopadłym do prostej CD (§ 145), a więc i do siecznej AB (§ 71, 2), zatem (§ 137) podzieli łuk AB na dwie równe części, t. j.

$$\text{łuk } AM = \text{łuk. } MB.$$

c) **Założenie.** Styczna $CD \parallel$ stycznej EF (fig. 122), należy dowieść, że łuk $MAN =$ łuk MBN .

Dowodzenie. Przez punkt zetknięcia M poprowadźmy promień OM ; promień ten będzie prostopadłym do stycznej CD , a więc i do stycznej EF , promień zatem OM przedłużony, przejdzie przez punkt styczności N (§ 149, wn. 4). Stąd wypada, że prosta MN jest średnicą koła, a jako taka dzieli okrąg na dwie równe części, t. j.

$$MAN = MBN.$$

151. Pytania i zadania. Jaką prostą nazywamy styczną do koła? Jaką prostą nazywamy *normalną*? Jaka prosta w kole jest normalną do okręgu? Poprowadzić styczną do koła w punkcie danym na okręgu (§ 149). Nakreślić koło, mające swój środek w danym punkcie i styczne do danej prostej. Znaleźć miejsce geometryczne środków kół stycznych do danej prostej i mających dany promień. Nakreślić koło styczne do danej prostej w danym punkcie i mające dany promień. Nakreślić koło, mające dany promień, którego środek leżałby na danej prostej i które byłoby jeszcze stycznym do drugiej danej prostej (§§ 106, 149). Poprowadzić styczną do koła równoległą do danej prostej. (Ze środka koła należy poprowadzić prostopadłą do danej prostej, punkty przecięcia się tej prostopadłej z okręgiem będą punktami styczności). Poprowadzić styczną do okręgu prostopadłą do danej prostej. (Zadanie sprowadza się do poprzedniego). Poprowadzić styczną do okręgu, któraby z daną prostą utworzyła dany kąt. (Zadanie poprzednie, § 70, 3). Nakreślić koło styczne do dwu prostych równoległych. Ile może być rozwiązań tego zadania? Jakie jest miejsce geometryczne środków tych kół? Jakie jest miejsce geometryczne środków kół stycznych do dwu prostych nierównoległych (§ 117, c)? Nakreślić koło styczne do dwu prostych równoległych i mające środek swój na danej prostej. Nakreślić koło styczne do dwu prostych nierównoległych i mające dany promień. Nakreślić koło styczne do trzech danych prostych.

3. Miara kątów w kole.

152. Powtórzenie. W § 60-m widzieliśmy, że *kąt środkowy* ma za miarę łuk zawarty między jego ramionami, to znaczy, że wszelki kąt, mający swój wierzchołek w środku koła, zawiera tyle

stopni katowych, ile łuk zawarty między jego ramionami zawiera stopni łukowych. Zajmiemy się teraz zbadaniem miar kątów w kole, nie będących środkowymi.

153. Twierdzenie. *Kąt wpisany w koło ma za miarę połowę łuku zawartego między jego ramionami.*

Dowodzenie. Mogą tu zachodzić trzy przypadki.

a) *Kiedy jedno ramie kąta jest średnicą, a drugie cięciwą, np. $\angle ABC$ (fig. 123).*

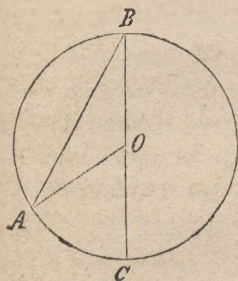


Fig. 123.

Połączywszy środek koła O z punktem A , otrzymamy trójkąt ABO , który będzie równoramienny, gdyż $AO = BO$ jako promienie jednego koła; w tym trójkącie zatem $\angle BAO = \angle ABO$ (§ 85, 3). Lecz w trójkącie ABO kąt zewnętrzny $\angle AOC = \angle ABO + \angle BAO = 2\angle ABO$ (§ 79, 6), czyli $\angle B = \frac{\angle AOC}{2}$,

t. j. kąt wpisany w koło jest połową kąta środkowego, opierającego się na tym samym łuku, albo, innymi słowami, kąt wpisany

ABC zawiera w sobie połowę liczby stopni zawartych w łuku AC .

b) *Kiedy oba ramiona są cięciwami i środek koła leży wewnątrz kąta, np. $\angle ABC$ (fig. 124).*

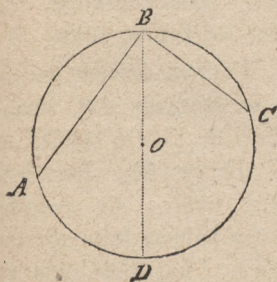


Fig. 124.

Poprowadziwszy przez wierzchołek kąta B średnicę BD , znajdziemy, że kąt ABC zostanie podzielony na dwa kąty ABD i DBC , z których każdy na zasadzie poprzedniego przypadku mierzy się połową łuku zawartego pomiędzy jego ramionami, t. j. kąt ABD mierzy się połową łuku AD , kąt DBC połową łuku DC ; więc kąt ABC mierzy się połową sumy łuków AD i CD , czyli połową łuku AC .

c) *Kiedy oba ramiona są cięciwami i środek koła leży zewnątrz kąta (fig. 125).*

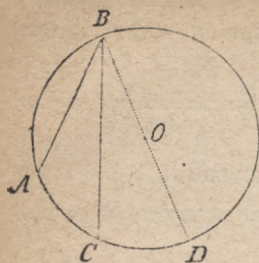


Fig. 125.

Prowadząc średnicę BD , znajdziemy:

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD,$$

lecz na zasadzie α , $\angle ABD$ mierzy się połową łuku AD , $\angle CBD$ mierzy się połową łuku CD , więc $\angle ABC$ mierzy się połową łuku $(AD - CD)$, czyli połową łuku AC .

We wszystkich zatem przypadkach kąt wpisany mierzy się połową łuku zawartego pomiędzy jego ramionami.

Wniosek 1-szy. Wszystkie kąty ACB , $AC'B$, $AC''B$ (fig. 126) wpisane w jeden odcinek koła są równe, gdyż mają za miarę połowę tego samego łuku AB zawartego między ich ramionami.

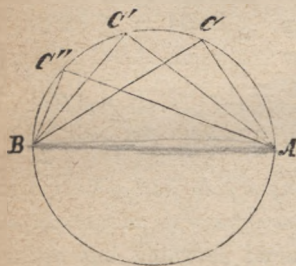


Fig. 126.

Wniosek 2-gi. Wszelki kąt ADB (fig. 127) wpisany w półkoło jest prosty, bo ma za miarę połowę półokręgu.

154. Twierdzenie. Kąt zawarty pomiędzy styczną i cięciwą ma za miarę połowę łuku podpartego cięciwą.

Założenie. Niech będzie kąt BAC (fig. 128) zawarty pomiędzy styczną AB i cięciwą AC , należy dowieść, że kąt BAC mierzy się połową łuku AC .

Powodzenie. Poprowadziwszy prostą CE równoległą do stycznej AB , znajdziemy, że $\angle BAC = \angle ACE$ (§ 70, 1) i łuk $AC =$ łuk. AE (§ 150). Lecz ponieważ kąt ACE mierzy się połową łuku AE , albo też połową łuku równego AC (§ 153), więc i kąt BAC mierzy się połową łuku AC .

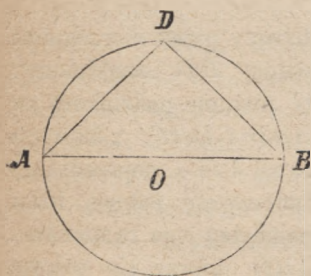


Fig. 127.

155. Twierdzenie. Kąt zawarty między dwiema siecznymi przecinającymi się wewnątrz koła, ma za miarę połowę sumy łuków zawartych między jego ramionami i przedłużeniami tych ramion.

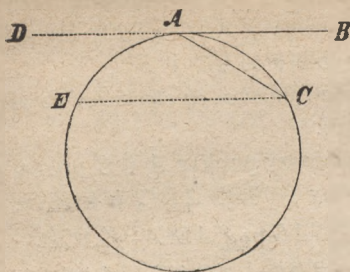


Fig. 128.

ED (§ 153), więc kąt ACB mierzy się połową sumy łuków AB i ED .

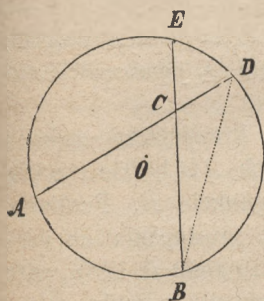


Fig. 129.

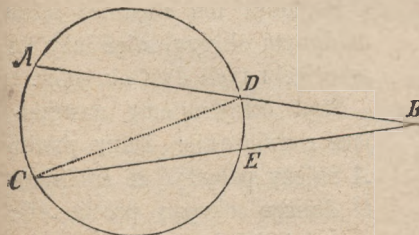


Fig. 130.

z punktem stycznej C prostą AC , otrzymamy trójkąt ABC , w którym
skąd

$$\begin{aligned}\angle ACK &= \angle ABC + \angle BAC, \\ \angle ABC &= \angle ACK - \angle BAC.\end{aligned}$$

Założenie. Niech będzie kąt ACB (fig. 129) zawarty między cięciwami AD i EB , przecinającymi się wewnątrz koła.

Dowodzenie. Połączymy punkty D i B prostą BD , otrzymamy trójkąt BCD , w którym

$$\angle ACB = \angle CDB + \angle CBD$$

(§ 79, 7), lecz $\angle CDB$ mierzy się połową łuku AB , $\angle CBD$ zaś—połową łuku

156. **Twierdzenie.** Kąt, wierzchołek którego znajduje się za okręgiem koła, ma za miarę połowę różnicy łuków zawartych między jego ramionami.

Dowodzenie. Mogą tu zachodzić trzy przypadki.

a) *Ramiona kąta są oba sieczne*, np. kąt ABC (fig. 130).

Połączymy punkty D i C prostą DC , otrzymamy trójkąt, w którym

$$\angle ABC = \angle ADC - \angle DCB$$
 (§ 79, 7).

Lecz $\angle ADC$ mierzy się połową łuku AC , $\angle DCB$ —połową łuku DE , więc $\angle ABC$ jako ich różnica, mierzy się połową różnicy tych łuków.

b) *Jedno ramię AB jest sieczną a drugie BK jest styczną* (fig. 131).

Połączymy punkt A

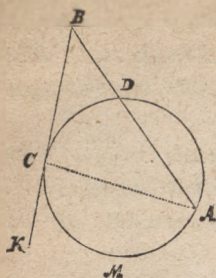


Fig. 131.

Lecz $\angle ACK$ mierzy się połową łuku AMC (§ 152), $\angle BAC$ — połową łuku DC (§ 151), więc $\angle ABC$ mierzy się połową różnicy łuków AMC i DC .

c) Oba ramiona są stycznymi do okręgu (fig. 132).

Połączymy punkty A i C prostą AC , otrzymamy trójkąt ABC , w którym

$$\angle CAK = \angle ABC + \angle ACB,$$

$$\text{skąd } \angle ABC = \angle CAK - \angle ACB.$$

Lecz $\angle CAK$ mierzy się połową łuku ANC , $\angle BCA$ połową łuku AMC , więc $\angle ABC$ mierzy się połową różnicy łuków ANC i AMC .

157. Zadanie. Przez punkt A (fig. 133) dany zewnątrz koła O , poprowadzić styczną do okręgu.

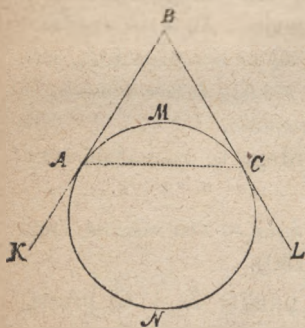


Fig. 132.

Rozwiązanie. Przypuśćmy zadanie rozwiązane i niech AB będzie styczną do koła O w punkcie B . Ponieważ styczna koła jest prostopadła do promienia w jego skrajności (§ 148), więc kąt ABO jest prosty i punkt B zetknięcia musi leżeć na okręgu koła, którego średnica jest AO (§ 153 wn. 2),

a że punkt ten musi też leżeć na danym okręgu, więc leży na przecięciu tych dwu okręgów.

Stąd otrzymujemy następujące rozwiązanie: Dany punkt A należy połączyć ze środkiem O danego okręgu prostą AO ; na niej, jako na średnicy, nakreślić koło, które przetnie

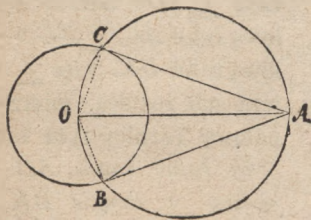


Fig. 133.

dane w dwu punktach C i B , te zatem będą szukanymi punktami zetknięcia i proste AC i AB szukanymi stycznymi.

Uwaga. Zadanie to ma dwa rozwiązania.

158. Pytania i zadania. Co jest miarą kąta środkowego? Co jest miarą kąta, mającego swój wierzchołek na okręgu? Co jest miarą kąta, mającego swój wierzchołek zewnątrz okręgu? Czemu się równa kąt wpisany w koło, jeśli łuk, na którym się opiera, równa się: a) 50° , b) 80° , c) $18^\circ 15'$, d) $\frac{1}{6}$ okręgu, e) $\frac{1}{8}$ okręgu? Kąt wpisany równa się: a) $14^\circ 30'$, b) 15° , c) 45° , d) 90° ; czemu się równa łuk, na którym się opiera? Obliczyć wielkość kąta zawartego pomiędzy styczną i cięciwą, jeśli cięciwa podpira łuk: a) 84° , b) $40^\circ 15' 20''$, c) $28^\circ 15' 29''$, d) $\frac{1}{8}$ okręgu. Co jest miejscem geometrycznem wierzchołka kąta, którego ramiona przechodzą przez dwa punkty stałe (§ 153)? Jeżeli z jakiegokolwiek punktu C poprowadzimy dwie proste CA i CB do końca prostej AB , to kąt BCA nazywa się kątem, pod którym z punktu C widzimy prostą AB ; wiedząc to—oznaczyć miejsce geometryczne punktów, z których daną prostą widzimy: a) pod kątem prostym, b) pod kątem 60° . Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła tak, że łuki przeciwległe zawarte pomiędzy końcami cięciw są: a) $32^\circ 15'$ i $147^\circ 45'$, b) $128^\circ 15' 24''$ i $123^\circ 18' 36''$, c) $\frac{1}{8}$ okręgu i $\frac{1}{6}$ okręgu — obliczyć kąt przez cięciwy te utworzony. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła pod 50° —obliczyć wielkość łuków zawartych pomiędzy nimi, jeśli łuki te mają się do siebie w stosunku: a) $2 : 3$, b) $5 : 7$, c) $7 : 8$. Obliczyć kąt pomiędzy dwiema siecznymi, jeśli łuki pomiędzy nimi zawarte są: a) $23^\circ 18' 25''$ i $86^\circ 41' 35''$, b) $\frac{1}{8}$ okręgu i $\frac{1}{12}$, c) $128^\circ 50' 18''$ i $48^\circ 24' 22''$. Dowieść, że jeżeli z punktu danego zewnątrz koła poprowadzimy dwie styczne do okręgu, to długości odcinków tych stycznych, zawartych między punktem przecięcia i punktem styczności, będą równe (§§ 85, 154). Z punktu danego na prostej wystawić do niej prostopadłą, nie przedłużając danej prostej. Cięciwa dzieli okrąg koła w stosunku $7 : 17$ —obliczyć wielkości kątów, opierających się na tych cięciwach. Cięciwa AB dzieli okrąg koła w stosunku $3 : 5$ —obliczyć kąty, jakie ona tworzy ze stycznymi poprowadzonymi w punktach A i B . Styczna do okręgu przecina przedłużoną średnicę, przechodzącą przez dowolny punkt stycznej pod kątem $57^\circ 27'$ —obliczyć łuki zawarte pomiędzy punktem styczności i końcami średnicy. W koło wpisany jest trójkąt, którego jeden bok jest średnicą, dwa zaś pozostałe dzielą półokrąg w stosunku $5 : 7$ —obliczyć kąty trójkąta. Okrąg koła podzielono w stosunku $3 : 4 : 5$ i przez punkty dzielenia poprowadzono styczne do koła — obliczyć kąty, jakie tworzą ze sobą styczne. Dowieść, że jeżeli przez końce jednej średnicy poprowadzimy cięciwy równoległe

do siebie, to cięciwy te będą równe i końce ich leżą na prostej, przechodzącej przez środek koła (równość trójkątów i własność równoległych). Znaleźć miejsce geometryczne środków cięciw, przechodzących przez jeden i ten sam punkt (połączyć środek koła z danym punktem i z środkami cięciw, następnie zastosować §§ 137, 153, wn. 2).

4. Położenie kół względem siebie.

159. Określenie. Dwa koła, mające wspólny środek, nazywają się kołami *współśrodkowymi* (fig. 134). Dwa koła, nie mające wspólnego środka, nazywają *mimośrodkowymi* (fig. 139, 140). Prosta OO' , łącząca ich środki, nazywa się *linią środków*.

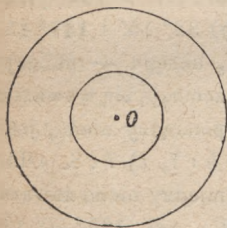


Fig. 134.

Dwa koła mimośrodkowe albo się *stykają* (fig. 139), albo *przecinają* (fig. 138), albo żaden z tych przypadków między nimi nie zachodzi (fig. 140).

Dwa koła *stykają się*, jeżeli okręgi ich mają tylko jeden punkt wspólny. Zetknięcie może być albo *zewnątrzne* (fig. 137), albo *wewnętrzne* (fig. 139).

160. Twierdzenie. Jeżeli dwa koła mają jeden punkt wspólny leżący zewnątrz linii środków, to muszą też mieć drugi punkt wspólny.

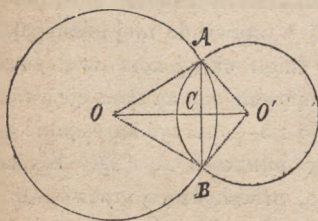


Fig. 135.

Żałożenie. Dajmy, że dwa koła O i O_1 (fig. 135) mają wspólny punkt A , leżący zewnątrz linii środków OO_1 ; należy dowieść, że jeszcze mają jeden punkt wspólny.

Dowodzenie. Z punktu A poprowadźmy prostopadłą AC do linii środków OO' i przedłużmy ją o długość $CB=AC$. Łatwo dowieść,

że punkt B jest wspólny dla obu okręgów. W samej rzeczy, ponieważ punkty O i O' leżą na prostopadłej OO' , wystawionej ze środka C prostej AB , więc $OB=OA$ i $O'B=O'A$ (§ 99), a że OA i $O'A$ są promieniami kół O i O' , więc OB i $O'B$ są ich promieniami i punkt B jest wspólny dla obu kół.

Wniosek 1-szy. Linija środków dzieli wspólną cięciwę dwu przecinających się kół na dwie równe części i jest do niej prostopadłą.

Wniosek 2-gi. Linija środków dwu kół stycznych przechodzi przez ich punkt zetknięcia, gdyż jeśliby punkt wspólny dwu okręgów leżał zewnątrz linii środków, to te dwa okręgi musiałyby mieć drugi punkt wspólny i nie byłyby stycznymi.

Wniosek 3-ci. Dwa koła nie mogą mieć trzech punktów wspólnych, gdyż w tym przypadku przystają do siebie (§ 142).

Uwaga. Z tego, cośmy wyżej powiedzieli wynika, że dwa okręgi mogą mieć względem siebie pięć różnych położeń. Pokażemy teraz, jaki zachodzi związek pomiędzy odległością środków i promieniami dla każdego z tych położeń.

161. Twierdzenia. 1-sze. *Jeśli dwa okręgi są zewnętrzne względem siebie, odległość ich środków jest większą od sumy promieni.*

2-re. *Jeśli dwa okręgi są styczne zewnętrznie, odległość ich środków równa się sumie promieni.*

3-cie. *Jeżeli dwa okręgi przecinają się, odległość ich środków jest mniejsza od sumy promieni a większa od ich różnicy.*

4-te. *Jeżeli dwa okręgi są styczne wewnętrznie, odległość ich środków równa się różnicy promieni.*

5-te. *Jeżeli dwa okręgi są wewnątrz jeden drugiego, odległość ich środków jest mniejsza od różnicy promieni.*

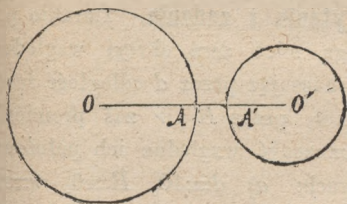


Fig. 136.

Dowodzenie 1-sze. W kołach zewnętrznych $O O'$ (fig. 136) jest wiadoczne $OO' = OA + AA' + A'O'$;

więc $OO' > OA + O'A$.

2-gie. W kołach stycznych zewnętrznie (fig. 137) punkt zetknięcia A leży na linii środków OO' (§ 159, wn. 2), więc

$$OO' = OA + O'A.$$

3-cie. W kołach siecznych (fig. 138) jeden z punktów wspólnych A i środki kół O, O' tworzą trójkąt AOO' , w którym, przypuszczając promień $OA > O'A$, mamy:

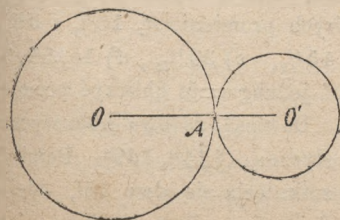


Fig. 137.

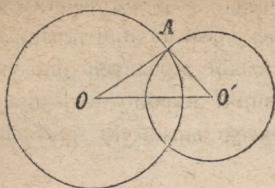


Fig. 138

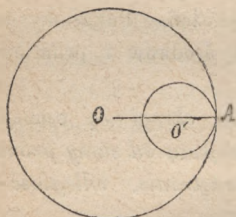


Fig. 139.

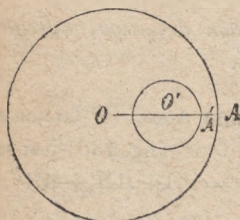


Fig. 140.

$$OO' < OA + O'A$$

i $OO' > OA - O'A$ (§ 75).

4-te. W kołach *stycznych wewnętrznie*, środki kół O , O' (fig. 139) i punkt zetknięcia A leżą na jednej linii prostej; więc

$$OO' = OA - O'A.$$

5-te. Jeżeli okręgi O i O' (fig. 140) są wewnątrz jeden drugiego, wtedy

$$OO' = OA - O'A' - A'A;$$

więc $OO' < OA - O'A'.$

Wzajemnice tych prawd są bardzo łatwe do okazania. Jakoż dajmy np., że wiemy, iż odległość środków kół równa się sumie promieni i mamy dowieść, że koła te są styczne zewnętrznie. W tym celu rozumujemy w ten sposób: Ponieważ przy tem założeniu nie może zachodzić żaden z przypadków 1, 3, 4 i 5, więc musi mieć miejsce przypadek 2-gi; i t. d.

162. Pytania i zadania. Ilorazkie położenia mogą mieć dwa okręgi względem siebie? Oznaczając przez d odległość środków dwu kół, przez R i r zaś promienie tych kół, oznaczyć względne ich położenie w przypadkach: a) $d=10$, $R=6$, $r=2$;

b) $d=10\frac{1}{2}$, $R=6\frac{1}{2}$, $r=3\frac{1}{6}$; c) $d=5\frac{1}{2}$, $R=6,3$, $r=4\frac{2}{3}$;
d) $d=6$, $R=9\frac{2}{5}$, $r=3\frac{2}{5}$; e) $d=14$, $R=9$, $r=6$. Wyznaczyć względne położenie dwu okręgów, których promienie są $18\frac{3}{4}$ i $3\frac{5}{12}$, odległość zaś środków: a) $22\frac{1}{6}$, b) $15\frac{1}{3}$, c) $30\frac{1}{7}$, d) 15 , 58 (3), e) 17, 5. Dwa koła są styczne, promień jednego $=5$; obliczyć promień drugiego, jeżeli odległość środków $=8$. Dowieść, że dwa koła styczne mają w punkcie zetknięcia wspólną styczną (§ 148, 149). Dowieść, że prosta, przechodząca przez punkt zetknięcia się dwu kół, odcina od ich okręgów łuki, którym odpowiadają równe kąty środkowe (zastosować zadanie poprzednie i § 154). Dowieść, że jeżeli przez punkt

zestknięcia się dwu kół poprowadzimy dwie proste i punkty przecięcia się ich z każdym okręgiem połączymy linijami prostemi, to proste te będą równoległe. Znaleźć miejsce geometryczne środków kół stycznych do danego koła i mających dany promień. Nakreślić koło o danym promieniu styczne (wewnętrznie i zewnętrznie) do danego koła w danym punkcie. Nakreślić koło, przechodzące przez dany punkt i styczne zewnętrznie do danego koła w danym punkcie. Nakreślić koło, ażeby ono było stycznem do danego okręgu O i do danej prostej AB w punkcie M . (Wyobraźmy sobie zadanie rozwiązaniem i punkt zetknięcia kół niech będzie N . Środek szukanego koła musi leżeć na prostopadłej do AB wystawionej w punkcie M . Oprócz tego, ponieważ środek szukanego koła musi być od punktu O w odległości równej sumie promieni, więc przedłużywszy prostopadłą w punkcie M o odległość równą promieniowi danego koła, otrzymamy punkt P , od którego środek szukanego koła leży w tej samej odległości, co i od środka danego koła; środek zatem szukanego koła musi jeszcze leżeć i na prostopadłej wystawionej ze środka prostej OP). Takie samo zadanie w przypadku, gdy koło ma być stycznem wewnętrznie.

5. Figury wpisane w koło i opisane na niem.

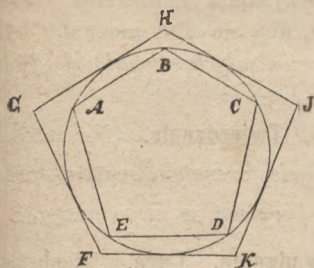


Fig. 141.

163. **Określenia.** Wielokąt $ABCDEA$ (fig. 141) jest *wpisany* w koło, gdy ma wszystkie wierzchołki na okręgu.

Natomiast, koło jest *wtedy opisane* na wielokącie.

Wielokąt $FGHIKF$ (fig. 141) jest *opisany* na kole, gdy wszystkie jego boki są styczne do okręgu.

Natomiast, koło jest *wtedy wpisane* w wielokąt.

Widocznem jest, że w każde koło można wpisać i na każdym kole opisać wielokąt o dowolnej liczbie boków; gdyż do tego wystarcza obrać na okręgu tyle punktów, ile wielokąt ma mieć wierzchołków i połączyć je cięciwami, lub też poprowadzić przez te punkty styczne do okręgu.

Pozostaje więc tylko pytanie, czy na każdym wielokącie można opisać okrąg, lub w każdym wielokąt wpisać okrąg?

164. Twierdzenie. *Na każdym trójkącie można opisać okrąg i wpisać w niego okrąg.*

Dowodzenie. Pierwsza część tego twierdzenia dowodzi się na zasadzie § 142, że przez trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, można zawsze poprowadzić okrąg.

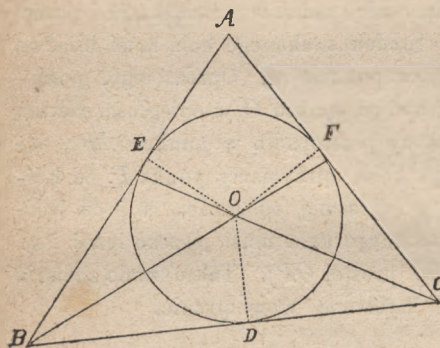


Fig. 142.

Co do drugiej, uważajmy, że linie OB i OC (fig. 142) dwójsieczne kątów B i C przecinają się w punkcie O , równo oddalonym od wszystkich boków trójkąta, t. j., że $OD = OE = OF$ (§ 117, d); jeśli więc promieniem OD opiszemy z punktu O koło, to ono przejdzie przez punkty D , E i F i będzie stycznym do boków trójkąta (§ 148).

Uwaga. Łatwo widzieć, że nie na każdym wielokącie można opisać koło, gdyż wzięwszy dla przykładu czworokąt, łatwo znajdziemy, że warunkiem koniecznym, aby na nim możnaby było opisać koło, jest, aby suma kątów przeciwnych równała się dwóm kątom prostym (§ 153).

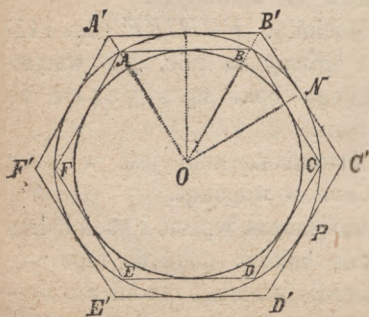


Fig. 143.

165. Twierdzenie. *Na każdym wielokącie foremnym można opisać okrąg i wpisać w niego okrąg.*

Dowodzenie. 1-sze. Niech będzie wielokąt foremny $ABCDEF$ (fig. 143). Podzieliwszy dwa jego kąty, np. A i B , na dwie równe części prostymi OA i OB , otrzymamy punkt ich przecięcia się O , który będzie środkiem opisanego koła, czyli innymi słowami, wszystkie proste OA , OB , OC ,

OD , OE i OF , poprowadzone z punktu O do wierzchołków wielokąta, będą sobie równe.

Jakoż $\angle OAB = \angle OBA$, jako połowy równych kątów A i B , więc i $OA = OB$ (§ 83, wn. 3). Trójkąty OAB i OBC są równe, gdyż $AB = BC$, jako boki wielokąta foremnego, $\angle ABO = \angle OBC$ z podzielenia i OB wspólne, więc $OB = OC$ i $\angle OBC = \angle OCB$, czyli $\angle OCB = \frac{1}{2} \angle BCD$. W ten sam sposób okażemy, że $OC = OD$ i t. d. Z równości prostych $OA = OB = OC = OD = OE = OF$ wypada, że okrąg, opisany z punktu O promieniem równym jednej z tych prostych, przejdzie przez wszystkie wierzchołki A , B , C , D , E i F wielokąta, czyli będzie na nim opisany.

2-re. Jeżeli z punktu O poprowadzimy prostopadłe OH , OK .. na boki AB , BC .. danego wielokąta, to one będą sobie równe i przejdą przez środki tych boków jako wysokości równych i równoramiennych trójkątów; stąd wynika, że okrąg opisany promieniem np. OH przejdzie przez punkty H , K .. i będzie stycznym do boków wielokąta (§ 118), czyli będzie weń wpisany.

Wniosek. Punkt O , wspólny środek okręgów opisanych i wpisanych, nazywa się *środkiem wielokąta foremnego*. W tym środku, na zasadzie tego cośmy wyżej powiedzieli, przecinają się wszystkie dwójsieczne kątów wielokąta i wszystkie prostopadłe wystawione ze środków jego boków.

Kąt AOB (fig. 143) nazywa się *środkowym wielokąta*; ponieważ na zasadzie (§ 161) wszystkie te kąty są sobie równe i suma ich równa się czterem kątom prostym (§ 47, wn. 2), więc każdy z nich równa się czterem kątom prostym podzielonym przez liczbę boków wielokąta, t. j. $= \frac{4d}{n}$. Tak np., kąt środkowy dziesięciokąta równa się $\frac{4d}{10} = 36^\circ$.

Promień OA koła opisanego nazywamy *promieniem wielokąta foremnego*, promień zaś OH koła wpisanego nazywają czasem *apotemą*.

166. Twierdzenie. Jeżeli okrąg koła podzielimy na n równych części i punkty podziału połączymy linijami prostymi, to otrzymamy wielokąt foremny wpisany; jeżeli zaś w punktach podziału poprowadzimy styczne do koła i te przedłużymy do przecięcia się ze sobą, otrzymamy wielokąt foremny opisany.

Dowodzenie. Dajmy, że okrąg koła podzieliliśmy w punktach A, B, C, D, E na 5

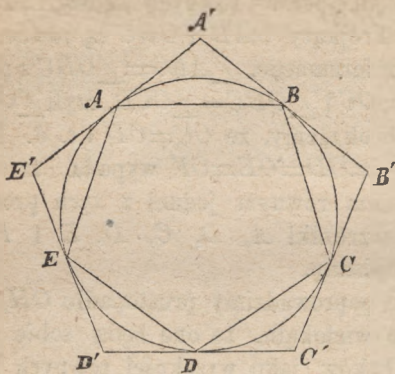


Fig. 144.

równych części; punkty podziału połączyliśmy prostymi AB, BC, CD, DE, EA ; należy dowieść, że wielokąt $ABCDEA$ jest foremny. Boki tego wielokąta będą sobie równe jako cięciwy podpierające łuki równe (§ 135). Kąty tego wielokąta będą równe dla tego, że się mierzą równymi łukami, albowiem każdy z nich, np. $\angle A$,

jako kąt wpisany, mierzy się połową łuku zawierającego $n-2$ części równych (§ 153), gdyż tyle części obejmują ramiona takiego kąta. Na naszym rysunku np. $\angle A$ mierzy się połową łuku zawierającego $(5-2)$ równych części, t. j. $\frac{3}{2} \cdot \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$.

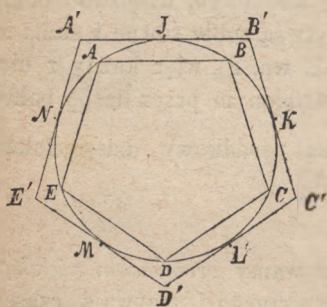


Fig. 145.

Wniosek 1. Zamiast prowadzić styczne do okręgu w punktach $A, B \dots$ możemy też prowadzić te styczne w punktach $I, K, L \dots$ (fig. 145), t. j. przez środki łuków $AB, BC \dots$, i wtedy otrzymamy również wielokąt foremny opisany, lecz boki jego będą równoległe do boków wielokąta wpisanego.

Wniosek 2. Mając wielokąt foremny wpisany w koło, możemy bardzo łatwo wpisać i opisać wielokąty foremne, o dwa razy większej liczbie boków co dany,

gdyż w tym celu wystarczy podzielić łuki podparte przez boki danego wielokąta na dwie równe części, a połączywszy punkty podziału (fig. 146) linijami prostymi, otrzymamy wielokąt ...

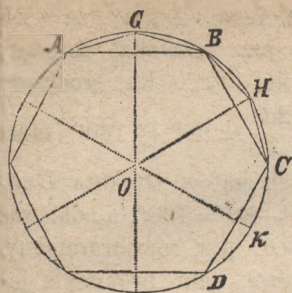


Fig. 146.

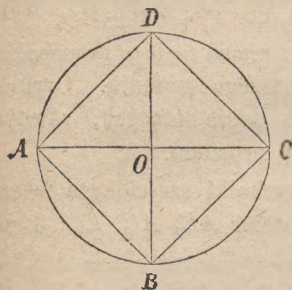


Fig. 147.

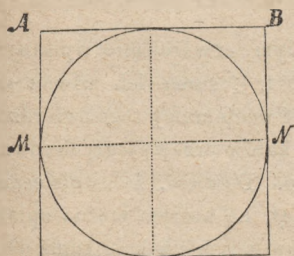


Fig. 148.

wpisany o podwójnej liczbie boków; poprowadziwszy zaś w tych punktach styczne do koła, otrzymamy wielokąt opisany. Postępując w podobny sposób, możemy otrzymać wielokąty foremne, mające ośm, szesnaście i t. d. razy większą liczbę boków, niż dany.

167. Zadanie. Wpisać kwadrat w dane koło.

Rozwiązanie. Poprowadźmy dwie średnice AC i BD (fig. 147) prostopadłe do siebie i połączmy ich skrajności.

Czworobok $ABCD$ jest kwadratem.

Jakoż łuki AD , DC , CB i BA są sobie równe, gdyż kąty środkowe DOC , DOA , COB , AOB jako proste są sobie równe i stąd wypada, że i cięciwy je podpierające AD , DC , CB i BA są też równe (§ 135). Oprócz tego, kąty tego czworokąta są proste, jako wpisane w półkole (§ 153, wn. 2). Jeżeli zaś w czworokącie boki są równe i kąty proste, to jest on *kwadratem*.

Uwaga 1. Podzieliwszy k a ż d y z łuków AB , BC , CD , DA na dwie równe części i punkty podziału połączwszy p r o s t e m i, otrzymamy ośmiokąt foremny. W ten sam sposób możemy wpisać w koło wielokąt foremny o 16, 32 i t. d. bokach.

Uwaga 2. Widocznem jest, że bok kwadratu opisanego na kole (fig. 148), równa się średnicy koła.

168. Zadanie. Wpisać w koło sześciokąt foremny i trójkąt równoboczny.

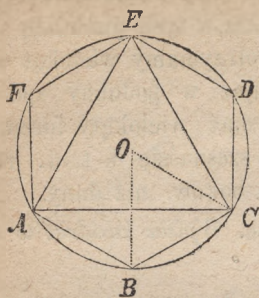


Fig. 149.

Rozwiązanie. 1-sze. Dajmy, że w koło wpisaliśmy już sześciokąt foremny $ABCDEF$ (fig. 149). Kąt środkowy $BOC = \frac{4d}{6} = \frac{2d}{3} = 60^\circ$ (§ 160); suma dwu pozostałych kątów trójkąta BOC równa się $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, a ponieważ trójkąt BOC jest równoramienny, gdyż $CO = BO$, jako promienie jednego koła, więc $\angle OBC = \angle OCB = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ (§ 85, 3); wypada stąd,

że wszystkie trzy kąty trójkąta BOC są sobie równe, a tem samem, że trójkąt ten jest równoboczny (§ 83, 4) i $CB = BO$. Węć bok sześciokąta foremnego wpisanego w koło równa się jego promieniowi. Wypada stąd następujące rozwiązanie naszego zadania. Cyrkiem odkładamy na okręgu sześć cięciw po sobie idących, równych promieniowi, i punkty podziału łączymy prostymi.

2-re. Łącząc co drugi punkt wierzchołki sześciokąta foremnego $ABCDEF$ (fig. 149) linijami prostymi AE, AC, EC , otrzymamy trójkąt równoboczny AEC (§ 135).

Uwaga. Z tego, cośmy w poprzednich paragrafach mówili, widocznem jest, w jaki sposób można w dane koło wpisać wielokąty foremne o 12, 24, 48... i t. d. bokach i jak na kole opisać takie wielokąty.

169. Zadania. Dowieść, że w każdym czworokącie wpisanym w koło, kąty przeciwległe są spełniające, t. j. suma ich równa się dwóm kątom prostym (§ 163, uw.). Dowieść wzajemnie tego twierdzenia, t. j. że na czworokącie, w którym suma kątów przeciwległych równa się dwóm kątom prostym, można opisać koło. Dowieść, że dwójścienne kątów każdego czworokąta tworzą czworokąt, na którym można opisać koło (§ 114). Dowieść, że w czworokącie opisanym na kole suma dwu boków przeciwległych równa się sumie dwu innych (§ 154). Dowieść, że jeżeli w czworokącie suma dwu przeciwległych boków równa się sumie dwu innych, to w ten czworokąt można wpisać koło. Dowieść, że w czworokącie wpisanym w koło kąt, jaki jedna przekątna tworzy z bokiem, równa się kątowi, jaki druga przekątna tworzy z bo-

kiem pierwszemu przeciwległym. Dowieść, że boki trójkąta równobocznego opisanego na kole są dwa razy większe od boków trójkąta równobocznego wpisanego w to koło; (poprowadzić styczne do koła przez wierzchołki trójkąta wpisanego i następnie zastosować §§ 153, 154). Czemu się równa każdy kąt wewnętrzny wielokąta foremnego o 15, 20, 40, 50 bokach? Czemu się równa kąt zewnętrzny wielokąta foremnego o 18, 32, 42 bokach?

6. Obliczenie długości okręgu i łuku.

170. **Stosunek okręgu koła do średnicy.** Wiemy, że długością linii prostej jest jej stosunek do innej prostej przyjętej za jednostkę. Otóż dla *mierzenia długości okręgu*, który jest linią krzywą, należy go przedewszystkiem wyprostować i następnie wyznaczyć, ile jednostek liniowych mieści się w tak wyprostowanej linii. Można by to było skutecznie, obkładając okrąg nitką i wyprostowując ją następnie. Lecz ponieważ taki sposób mierzenia nie zawsze jest dogodny, więc starano się matematycznie wyznaczyć, ile razy okrąg koła jest większy od średnicy lub promienia. Przy tem wyznaczeniu posługiwano się oczywiście prawdą, że okrąg koła jest większym od obwodu wielokąta foremnego wpisanego w to koło, i mniejszym od obwodu takiegoż wielokąta opisanego na niem, i że w miarę tego, jak liczba boków tych wielokątów powiększa się, obwody ich coraz bardziej zbliżają się do okręgu.

Wpisawszy w koło sześciokąt foremny i opisawszy na niem kwadrat, znajdziemy, na zasadzie tego cośmy wyżej mówili, że *okrąg koła jest większym od 3 średnic (§ 165) i mniejszym od 4 średnic (§ 167 uw. 2)*. W jeszcze ciaśniejszych granicach zamknie się koło wielokątami wpisanym i opisanym o 12 i o 8 bokach, o 24 i o 16 bokach i t. d. Obliczając obwody takich wielokątów foremnych, których liczba boków coraz się podwaja, wyznaczono w przybliżeniu długość okręgu koła, a mianowicie znaleziono, że długość każdego okręgu jest 3,14159... razy większą od jego średnicy. Liczbę tę, oznaczającą stosunek okręgu koła do średnicy, oznacza się literą grecką π (*pi*) i nazywa się *ludolfiną*. Jest więc

$$\pi = 3,14159 \dots$$

W wielu razach przy obliczeniach wystarcza przybliżona wartość

$$\pi=3,14 \text{ lub } \pi=\frac{22}{7}.$$

Oznaczając przez C długość okręgu, przez D średnicę jego, przez r promień, otrzymamy

$$C=\pi \cdot D=\pi \cdot 2r=2\pi r,$$

skąd

$$D=\frac{C}{\pi}, \quad r=\frac{C}{2\pi}.$$

Wzory te wyrażają, że:

- 1) *Okrąg koła równa się iloczynowi z liczby π przez średnicę lub też przez podwójny promień.*
- 2) *Średnica koła równa się okręgowi podzielonemu przez liczbę π .*
- 3) *Promień koła równa się okręgowi podzielonemu przez podwójną liczbę π .*

Promień koła wynosi 3 cale; jak wielki jest jego okrąg?

$$C=2\pi r=6,28 \cdot 3=18,84 \text{ calom.}$$

Obliczyć promień koła, którego okrąg równa się 2198 metr.?

$$r=\frac{C}{2\pi}=\frac{2198}{6,28}=350 \text{ metrów.}$$

Wniosek 1-szy. Dane są dwa okręgi C i c , których promienie są R i r , średnice zaś D i d . Na zasadzie tego, cośmy wyżej mówili, wypada, że

$$C=2\pi R, \quad c=2\pi r; \quad C=\pi D, \quad c=\pi d,$$

stąd

$$\frac{C}{c}=\frac{R}{r}=\frac{D}{d}; \text{ to jest:}$$

okręgi kół mają się do siebie, jak ich promienie lub średnice, t. j. że długości okręgów rosną w tym samym stosunku, co i ich promienie lub średnice.

Wniosek 2-gi. Znając stosunek okręgu koła do średnicy, można też obliczyć długość dowolnego łuku. Jakoż dajmy, że trzeba obliczyć długość l łuku, mającego n° , i którego promień

równa się R . Ponieważ długość C okręgu równa się $2\pi R$, więc długość jednego stopnia równa się $\frac{2\pi R}{360}$, a długość n stopni daną będzie wzorem $l = \frac{2\pi Rn}{360} = \frac{\pi Rn}{180}$. Dajmy np., że trzeba obliczyć długość łuku o 42° , którego promień równa się 3 metrom. Z wzoru podanego wyżej otrzymujemy:

$$l = \frac{22}{7} \cdot 3 \cdot \frac{42}{180} = 2\frac{1}{5} \text{ metra.}$$

Jeżeli łuk ma stopnie, minuty i sekundy, to należy wielkość łuku zamienić na sekundy; obliczyć długość jednej sekundy i następnie długość całego łuku.

Dajmy, że trzeba obliczyć długość łuku $5^\circ 37' 30''$, którego promień = 14 calom. Długość 360° czyli $360 \times 60 \times 60$ sekund równa się: $2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 14 = 88$ calom, więc długość łuku

$$l'' = \frac{88}{360 \times 60 \times 60} \text{ cali,}$$

a że łuk $5^\circ 37' 30''$ ma 20250'', więc długość tego łuku równa

$$\frac{88 \cdot 20250}{360 \times 60 \times 60} = 1\frac{3}{8} \text{ cala.}$$

Znając liczbę stopni łuku i jego długość, można obliczyć promień. Jakoż w tym celu oblicza się długość jednego stopnia, a następnie długość 360° czyli całego okręgu, a że okrąg równa się $\frac{44}{7}$ promienia, więc podzieliwszy długość okręgu przez $\frac{44}{7}$, otrzymamy długość promienia. Jeżeli np. długość łuku 36° równa się $12\frac{4}{7}$ stóp, to długość całego okręgu równa się $12\frac{4}{7} \times 10$ stóp, więc długość promienia równa się:

$$\frac{12\frac{4}{7} \times 10}{\frac{44}{7}} = \frac{880}{7} : \frac{44}{7} = 20 \text{ stop.}$$

Ogólnie z wzoru $l = \frac{\pi Rn}{180}$ otrzymamy $R = \frac{180 l}{\pi n}$. W naszym

przypadku $R = \frac{180 \cdot 12\frac{4}{7}}{22\frac{4}{7} \cdot 36} = 20 \text{ stop.}$

Znając długość łuku i jego promień, możemy bardzo łatwo obliczyć liczbę stopni łuku. Jakoż dajmy, że trzeba obliczyć liczbę stopni łuku długości 18 cali, jeżeli promień jego równa się 14 cal.

W tym celu uważmy, że liczba stopni łuku będzie tyle razy mniejszą od 360° , ile razy długość łuku jest mniejszą od długości okręgu. Lecz długość okręgu $= 14 \times 6\frac{2}{7}$ cali $= 2 \times 44$ calom, więc dany łuk stanowi $\frac{9}{44}$ całego okręgu, a tem samem liczba jego stopni równa się $\frac{9}{44} \times 360^\circ = 81\frac{0}{11}^\circ = 73\frac{7}{11}$ stopnia, czyli $73^\circ 38' 10\frac{10}{11}''$.

Ogólnie z wzoru $l = \frac{\pi R n}{180}$ otrzymamy $n = \frac{180 l}{\pi R}$.

W naszym przypadku $n = \frac{180 \cdot 18}{2\frac{2}{7} \cdot 14} = \frac{810}{11}$ stopnia.

171. Pytania i zadania. Jaki jest stosunek okręgu koła do średnicy? W jaki sposób się go wyznacza? Czemu się równa długość okręgu? Jak obliczyć promień koła, mając długość jego okręgu? Promień koła wynosi: a) $2\frac{1}{3}$ st., b) 2,28 cala, c) 4,32 sążnia—obliczyć okrąg (π przyjmuje się równem $2\frac{2}{7}$ lub 3,14). Średnica koła wynosi: a) 1 cal, b) $5\frac{2}{3}$ stopy, c) 3,45 arszyna — obliczyć okrąg koła. Okrąg koła równa się: a) 33 metrom, b) $4\frac{2}{5}$ sążnia, c) $8\frac{1}{11}$ cala, d) 6,28 łokcia—obliczyć promień koła. Drzewo ma w obwodzie $85\frac{3}{4}$ cala—jak wielka jest grubość drzewa (średnica)? Przednie koła wozu mają po 0,9 metra, tylne po 1,4 metra w średnicy—ile obrotów zrobi każde koło, jeżeli wóz przebył drogę długości 10 kilometrów (10,000 metrów)? Długość promienia równika ziemskiego wynosi 860 mil geograficznych—jak wielki jest okrąg równika? U koła zębatego, mającego promień $5\frac{1}{9}$ stopy, odległość środków zębów wynosi $3\frac{1}{9}$ cala—ile zębów ma to koło ($\pi = 2\frac{2}{7}$)? Jeżeli koło od wozu o średnicy 1,4 arszyna robi 550 obrotów — jak wielką będzie przebyta droga? Zrobiony być ma stół okrągły na 10 osób—jak wielką średnicę dać mu trzeba, licząc 0,6 metra na jedną osobę? Koło zębate ma 50 zębów, odległość środków których wynosi $5\frac{1}{2}$ cala—obliczyć promień koła. Długość równika ziemskiego wynosi 5,400 mil—obliczyć średnicę równika. Koło u wozu na długości drogi 2 wiorsty 260 sążni, zrobiło 420 obrotów—jaka jest wielkość średnicy tego koła? Długość promienia wynosi 21 stóp — obliczyć długość łuku mającego: a) 60° , b) 45° , c) $22^\circ 30'$, d) $7^\circ 30'$, e) $25^\circ 30' 15''$. Kąt wpisany w koło o średnicy 3 metrów, równa się 42° — obliczyć długość łuku zawartego między jego ramionami. Promień koła ma 2,24 metra — obliczyć długość łuku podpartego bokiem 15° kąta foremnego wpisanego. Łuk podparty bokiem dwunastokąta foremnego wpisanego w koło

równa się 20 stopom—obliczyć promień koła. Łuk o $48^{\circ} 30'$ ma 1,50 metr. długości—jak wielki jest promień tego koła? Koniec mniejszej skazówki zegarowej przechodzi w 20 minut 5 milimetrów — obliczyć długość skazówki. Koniec większej skazówki zegarowej przechodzi w 45 minut 8 cali — obliczyć długość skazówki. W kole, którego promień równa się 14 stop., długość łuku wynosi: a) 7 stóp, b) $8\frac{2}{3}$ stopy, c) 4,15 st., d) 0,9 st., e) $2\frac{1}{3}$ arszyna—obliczyć ile łuk ten ma stopni. Obliczyć ile stopni, minut i sekund ma łuk, którego długość równa się długości promienia. Z dwu okręgów jeden ma długość 25 stóp, drugi zaś promień $= 6\frac{2}{3}$ stopy — obliczyć, ile razy długość drugiego okręgu jest większą od długości pierwszego. Przednie koła wozu robią 50 obrotów w tym samym czasie, w którym tylne robią 40—obliczyć średnicę kół przednich, jeśli średnica kół tylnych $= 1\frac{1}{2}$ arszyna. Promienie trzech okręgów są odpowiednio równe $2\frac{1}{2}$ m., $3\frac{1}{2}$ m., 5 m.,—czemu się równa promień okręgu, którego długość równa się sumie długości danych okręgów?

IV. O obliczaniu pól (powierzchni).

1. Pola niektórych figur.

172. Pojęcie o wymierzaniu pól. Przestrzeń, zawarta między linijami granicznymi figury, nazywa się jej *polem* czyli *powierzchnią*.

Wymierzyć pole jakiej figury jestto oznaczyć, ile razy drugie pole przyjęte za jednostkę zawiera się w polu danej figury.

Za jednostkę miary pola przyjmuje się kwadrat, którego bok równy jest jednostce miary długości, np. stopie, łokciowi, arszynowi, metrowi i t. p. Według tego, mamy stopę kwadratową—stp. $\square$, łokieć kwadratowy—łok. $\square$, arszyn kwadratowy—arsz. $\square$, metr kwadratowy—m. $\square$ i t. p.

Wymierzać pole figury znaczy więc tyle, co dochodzić, ile kwadratowych jednostek jest w niem zawartych. W tym celu należałoby właściwie, jednostkę kwadratową przykładać do danej figury i oznaczyć, ile ich się na niej zawiera; jeśli jednostka taka nie mieściłaby się w niej bez reszty, należałoby obrać mniejszą jednostkę kwadratową i tę przykładać do reszty i t. d. Ale postępowanie takie byłoby bardzo znużającym, a nawet najczęściej nie da-

łoby się wykonać. Dla tego też przy wyznaczeniu pola figury staramy się mechaniczne *dokładanie jednostek zastąpić rachunkiem*.

Do tego celu służą następujące twierdzenia.

173. Twierdzenie. *Pole prostokąta równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość.*

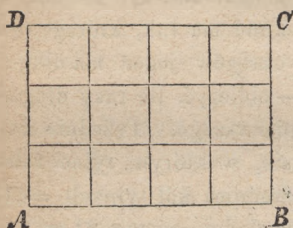


Fig. 150.

Dowodzenie. Niech będzie prostokąt $ABCD$ (fig. 150), którego podstawa AB zawiera 4 jednostki liniowe, a wysokość AD 3 także jednostki; należy obliczyć pole tego prostokąta, t. j. ile w nim zawiera się jednostek kwadratowych.

Prowadząc przez punkty podziału podstawy i wysokości proste równoległe do boków prostokąta, łatwo widzieć, że otrzymamy trzy rzędy kwadratów, z których każdy zawiera cztery kwadraty, t. j. tyle, ile jednostki ma podstawa; cały zatem prostokąt rozdzieli się na $3 \times 4 = 12$ kwadratów.

Za pomocą podobnego rozumowania łatwo się przekonać, że prostokąt 8 stóp długi i 5 stóp szeroki zawiera $8 \times 5 = 40$ stóp kwadratowych; że pole prostokąta, którego podstawa ma 80 m., a wysokość 50 metrów $= 80 \times 50 = 4,000$ m. W przypadku więc, gdy podstawa i wysokość prostokąta wyrażają się w liczbach całkowitych, pole prostokąta otrzymuje się, *mnożąc podstawę przez wysokość*.

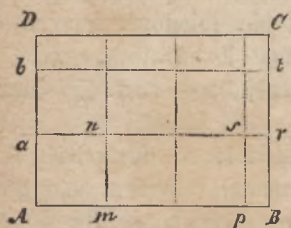


Fig. 151.

Niech teraz będzie prostokąt $ABCD$ (fig. 151), którego podstawa $AB = 3\frac{1}{3}$ jednostki liniowej, a wysokość $AD = 2\frac{1}{2}$ jednostki. Prowadząc przez punkty podziału a i b proste równoległe do AB , przez punkty zaś m , p i r proste równoległe do AD , znajdziemy: po 1-sze, że prostokąt $pBrs$ stanowi $\frac{1}{3}$ kwadrata $Aanm$, t. j. $\frac{1}{3}$ jednostki kwadratowej, a z a t e m

w rzędzie $ABra$ zawiera się $3\frac{1}{3}$ kwadratowej jednostki; po 2-re, widzimy, że rząd $bDCt$ stanowi połowę rzędu $AarB$, t. j. równa

się $\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{3}$ jednostki kwadratowej. Stąd wypada, że pole prostokąta zawiera $2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{3}$ jednostki kwadratowej.

Widzimy stąd, że i w przypadku, gdy podstawa i wysokość prostokąta są wyrażone w liczbach ułamkowych, pole jego równa się *iloczynowi z podstawy przez wysokość*.

Oznaczając więc ogólnie pole prostokąta przez p , podstawę przez b , wysokość przez h , otrzymamy

$$p = bh.$$

Przykłady. Pole prostokąta, którego podstawa równa się $2\frac{1}{2}$ m., a wysokość $4\frac{1}{5}$ metra, równa się: $2\frac{1}{2} \times 4\frac{1}{5} = \frac{5}{2} \times 2\frac{1}{5} = 2\frac{1}{2} = 10,5$ metra kwadratowego.

Ile trzeba desek 12 stóp długich, 1 stopa 6 cali szerokich dla ułożenia podłogi w pokoju prostokątnym, którego długość 8 sążni rusk., a szerokość 18 stóp?

Pole podłogi równa się $56 \times 18 = 1008$ stóp kwadr., pole każdej deski $12 \times 1\frac{1}{2}$ st. kwadr. = 18 st. kwadr. Podzieliwszy 1008 przez 18, otrzymamy, że liczba desek wynosi 56.

Wniosek 1-szy. Znając pole prostokąta i podstawę jego, wyznaleźć można jego wysokość, *dzieląc pole przez podstawę*. Podobnie wyznajduje się podstawę, *dzieląc pole przez wysokość*.

W ogóle
$$h = \frac{p}{b}; \quad b = \frac{p}{h}.$$

Przykłady. Jak wielka jest wysokość prostokąta, który ma 10 stóp długości i pole jego równa się 250 stopom kw.?

$$\text{Wysokość} = \frac{250}{10} = 25 \text{ stóp.}$$

Jaką szerokość należy nadać ćwiartce papieru, której długość 12 cali, ażeby jej pole równało się 66 calom kwadratowym?

$$\text{Szerokość} = \frac{66}{12} = 5\frac{1}{2} \text{ cala.}$$

Wniosek 2-gi. Ponieważ kwadrat jestto prostokąt, w którym podstawa i wysokość są sobie równe, więc dla otrzymania pola kwadratu należy *długość jednego boku pomnożyć przez tę samą długość*, czyli *podnieść ją do kwadratu*.

Pole zatem kwadratu równa się kwadratowi jego boku.

Przykłady. Jak wielkie jest pole kwadratu, którego bok równa się 5 calom?

Pole to równa się $5 \times 5 = 5^2 = 25$ calom kwadratowym.

Obliczyć pole taflı kwadratowej, której bok równa się 1,2 arsz.

Pole to równa się $(1,2)^2 = 1,44$ arsz. kwadr.

Obliczyć pole kawałka gruntu kwadratowego, jeżeli bok jego równy 102 metrom.

Pole to równa się $102^2 = 10404$ metr. kwadr. = 104,04 arom = 1,0404 hektarom.

W ogóle, oznaczając bok kwadratu przez a , a pole kwadratu przez P , otrzymamy: $P = a^2$.

Wniosek 3-ci. Jeżeli wiadome jest pole kwadratu, a mamy wyznaczyć długość jego boku, potrzeba tylko wyszukać taką liczbę, któraby pomnożona przez siebie dała liczbę, wyrażającą pole kwadratu, t. j. trzeba tylko *z tej liczby wyciągnąć pierwiastek kwadratowy*.

Przykłady. Pole kwadratu równa się 36 metrom kwadratowym—czemu się równa bok jego?

Bok kwadratu równa się $\sqrt{36} = 6$ metrów.

Pole kwadratu równa się 625 kwadr. stop.—czemu się równa bok kwadratu?

Bok kwadratu równa się $\sqrt{625} = 25$ stop.

Należy ogrodzić plac kwadratowy mający 2025 kwadr. metrów—jaki ma być bok tego placu?

Bok ten równa się $\sqrt{2025} = 45$ metrów.

Wniosek 4-ty. *Pola dwu prostokątów, mających równe podstawy, są w stosunku wysokości, t. j. pole jednego tyle razy będzie większem od pola drugiego, ile razy wysokość jednego jest większą od wysokości drugiego.*

Jakoż dajmy, że mamy dwa prostokąty, których pola oznaczmy przez P i p , podstawy przez B i b , wysokości zaś przez H i h ; będziemy mieli:

$$P = BH,$$

$$p = bh,$$

stąd

$$\frac{P}{p} = \frac{BH}{bh} = \frac{H}{h}.$$

Takim samym sposobem można dowieść, że pola dwu prostokątów, mających równe wysokości, mają się w stosunku podstaw.

174. **Określenie.** Dwie figury, mające jednakowe pola, nazywają się *równoważnymi*. Tak np. prostokąt, mający 5 stóp długości i 8 stóp szerokości jest równoważny z prostokątem, mającym 20 stóp długości i 2 stopy szerokości, gdyż pola ich równają się: $5 \times 8 = 20 \times 2$ stopom kwadr. Prostokąt mający 4 stopy długości i 9 stóp szerokości jest równoważny z kwadratem mającym bok równy 6 stopom.

Dwie figury równe, t. j. takie, które mogą przystawać do siebie, są tem samem równoważne; ale dwie figury równoważne nie są koniecznien równne. I tak: kwadrat i koło mogą być równoważne, t. j. równe co do wielkości ich pól, ale, nie mając tego samego kształtu, nie mogą być równe.

175. **Twierdzenie.** Pole równoległoboku równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość.

Dowodzenie.

Niech będzie równoległobok $ABCD$ (fig. 152). Jeżeli ze skrajności podstawy AB wyprowadzimy prostopadłe AF i BE aż do przecięcia się z bokiem przeci-

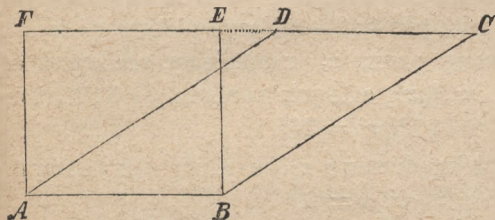


Fig. 152.

wległym CD , lub jego przedłużeniem, utworzymy prostokąt $ABEF$ równoważny równoległobokowi $ABCD$. Jakoż dwa trójkąty prostokątne EBC i AFD są równe, bo mają przeciwprostokątne BC i AD równe, jako boki przeciwległe równoległoboku $ABCD$ (§ 106, 2), boki BE i AF także równe, jako boki przeciwległe prostokąta $ABEF$.

Teraz uważajmy, że

równoległobok $ABCD$ = trapezowi $FCBA$ — trójkąt. AFD ,
prostokąt $ABEF$ = trapezowi $FCBA$ — trójkąt. EBC .

A że trójkąty AFD i EBC są sobie równe, więc pola prostokąta i równoległoboku są różnicami dwu równych wielkości, więc są równymi wielkościami, t. j. równoważne. Zamiast przeto obliczać pole

równoległoboku, możemy obliczyć pole prostokąta. Otóż pole prostokąta $ABEF$ równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość, t. j. $AB \cdot BE$ (§ 169); więc i pole równoległoboku ma za miarę ten sam iloczyn $AB \cdot BE$, to jest *równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość*.

Oznaczając podstawę AB równoległoboku przez b , wysokość zaś BE przez h , otrzymamy, że pole p wyraża się wzorem

$$p = bh.$$

Przykłady. Obliczyć pole równoległoboku, którego podstawa równa się 2,4 m., wysokość zaś = 3,15 m.

Pole szukane równa się $2,4 \times 3,15 = 7,56$ kwadr. metr.

Pole równoległoboku równa się $8\frac{2}{3}$ st. kwadr., wysokość zaś = $2\frac{4}{5}$ stopy—obliczyć podstawę.

Szukana podstawa = $8\frac{2}{3} : 2\frac{4}{5} = 3\frac{2}{21}$ stopy.

Pole równoległoboku równa się 36 stop. kwadr., a podstawa jego ma się do wysokości jak 4 : 9—obliczyć podstawę i wysokość.

Oznaczając podstawę przez x , znajdziemy, że wysokość = $\frac{9}{4}x$, pole zaś = $\frac{9}{4}x \cdot x = \frac{9}{4}x^2$, a że pole to równa się 36 st. kwadr., więc

$$\frac{9}{4}x^2 = 36.$$

Wyciągając pierwiastki kwadratowe z obu stron, otrzymamy

$$\frac{3}{2}x = 6,$$

skąd $x = 4$, wysokość zaś = $4 \times \frac{9}{4} = 9$ stop.

Wnioski. 1-szy. Dwa równoległoboki o równej podstawie i równej wysokości są sobie równe.

2-gi. Pola dwu równoległoboków o równej wysokości mają się do siebie, jak ich podstawy.

3-ci. Pola dwu równoległoboków o równej podstawie mają się do siebie, jak ich wysokości.

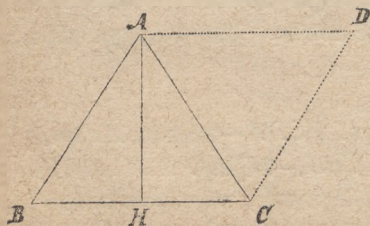


Fig. 153.

176. Twierdzenie. Pole trójkąta równa się połowie iloczynu z podstawy przez wysokość.

Dowodzenie. Niech będzie trójkąt ABC (fig. 153), mający bok BC za podstawę i prostopadłą AH za wysokość. Do-

pełnimy równoległoboku $BCDA$, prowadząc równoległe AD do BC i CD do AB . Przekątna AC dzieli ten równoległobok na dwa trójkąty równe ABC i ADC (§ 106, 1); zatem trójkąt ABC jest połową równoległoboku $ABCD$, mającego z nim wspólną podstawę BC i tę samą wysokość AH . Lecz pole równoległoboku równa się iloczynowi $BC \cdot AH$, więc pole trójkąta ABC równa się połowie tego iloczynu, t. j. *równa się połowie iloczynu z podstawy BC przez wysokość AH .*

Oznaczając podstawę przez b , a wysokość przez h , otrzymamy, że pole p trójkąta wyraża się wzorem

$$p = \frac{bh}{2}.$$

Przykłady. Jak wielkie jest pole trójkąta, którego podstawa ma 2,3 m., a wysokość 4,5 m.?

$$\text{Szukane pole} = \frac{2,3 \times 4,5}{2} = 5,175 \text{ m. kwadr.}$$

Pole trójkąta równa się 25 st. kwadr., a wysokość 5 stop.— obliczyć podstawę trójkąta.

Podzieliwszy pole trójkąta przez jego wysokość, otrzymamy połowę podstawy. Więc $25 \frac{1}{5} = 5$ stp. stanowi połowę podstawy, a $2 \times 5 = 10$ całą podstawę.

Wnioski. 1-szy. W trójkącie prostokątnym bierze się zwykle za podstawę jedną przypostrókatną, druga wtedy wyraża wysokość. *Pole więc trójkąta prostokątnego równa się połowie iloczynu z obydwu przypostrókatnych.*

Przykład. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, znając jego przypostrókatne 2,4 i 3,6.

$$\text{Szukane pole równa się } \frac{2,4 \times 3,6}{2} = 4,32.$$

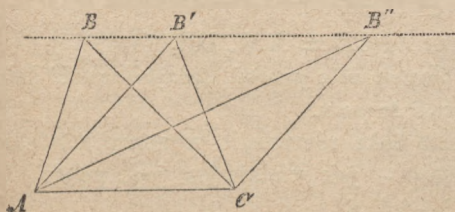


Fig. 154.

2-gi. Dwa trójkąty o tej samej podstawie i wysokości są sobie równoważne. Stąd wypada, że trójkąty ABC , $AB'C$, $AB''C$ i t. d. (fig. 154), mające wspólną podstawę AC ,

a wierzchołki B, B', B'' na prostej równoległej do podstawy, są równoważne, gdyż mają równe podstawy i równe wysokości (§ 106, 1).

3-ci. Pola dwu trójkątów o równej wysokości mają się tak do siebie, jak ich podstawy.

4-ty. Pola dwu trójkątów o równej podstawie mają się tak do siebie, jak ich wysokości.

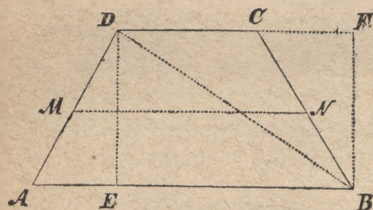


Fig. 155.

177. Twierdzenie. Pole trapezu równa się iloczynowi z połowy sumy podstaw przez wysokość trapezu, lub też iloczynowi z prostej, łączącej środki boków nierównoległych przez wysokość.

Dowodzenie. Niech będzie trapez $ABCD$ (fig. 155). Prowadząc przekątną DB , rozkładamy go na dwa trójk.

ABD i DCB ; będzie trapez $ABCD = \text{trójk. } ABD + \text{trójk. } DCB$.

$$\left. \begin{aligned} \text{Pole trójk. } ABD &= \frac{AB \cdot DE}{2} \\ \text{Pole trójk. } BCD &= \frac{DC \cdot BF}{2} \end{aligned} \right\} \text{pole trapezu} = \frac{AB \cdot DE}{2} + \frac{DC \cdot BF}{2}.$$

Lecz $DE = BF$ (§ 106, 1), więc

$$\text{pole trapezu } ABCD = \frac{AB \cdot DE}{2} + \frac{DC \cdot DE}{2} = \frac{(AB + DC)DE}{2};$$

t. j. pole trapezu równa się iloczynowi z połowy sumy podstaw przez wysokość.

Lecz ponieważ $\frac{AB + DC}{2} = MN$ (§ 109), więc

$$\text{pole trapezu } ABCD = MN \cdot DE,$$

t. j. pole trapezu równa się iloczynowi z prostej, łączącej środki boków nierównoległych przez wysokość trapezu.

Przykłady. W trapezie boki równoległe wynoszą 2,7 stopy i 8,3 stp., wysokość zaś 6 stóp — jak wielkie jest jego pole?

$$\text{Szukane pole} = \frac{(2,7 + 8,3) \cdot 6}{2} = 3 \cdot 11 = 33 \text{ st. kwadr.}$$

Równoległe boki trapezu wynoszą 3,3 metra i 1,5 m., wysokość 2,4 m. — jak wielki jest bok kwadratu równoważnego temu trapezowi?

$$\text{Pole trapezu} = \frac{(3,3+1,5) \cdot 2,4}{2} = 2,4 \cdot 2,4 = (2,4)^2 \text{ m. kw.}$$

Oznaczając przez x bok szukanego kwadratu, znajdziemy, że pole kwadratu $= x^2$, więc

$$x^2 = (2,4)^2 \text{ i } x = 2,4 \text{ m.}$$

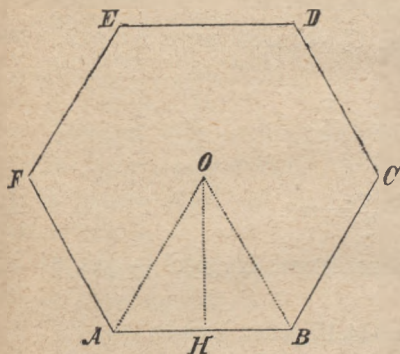


Fig 156.

178. Twierdzenie. *Pole wielokąta foremnego równa się obwodowi pomnożonemu przez połowę promienia koła wpisanego (apotemy).*

Dowodzenie. Niech będzie wielokąt foremny $ABCDEF$ (fig. 156). Jeżeli środek jego połączy się ze wszystkimi wierzchołkami liniami prostymi, to wielokąt podzielimy na równe trójkąty. Obliczywszy pole tych trójkątów i dodawszy do siebie,

otrzymamy pole wielokąta. Pole każdego trójkąta $= \frac{AB \cdot OH}{2}$,

więc pole całego sześciokąta $= \frac{6AB \cdot OH}{2}$, lecz $6AB$ jest to obwód

sześciokąta, OH zaś promień koła wpisanego, czyli apotema. Ponieważ powyższy sposób dowodzenia stosuje się do każdego wielokąta foremnego, więc wypada stąd, że *pole każdego wielokąta foremnego równa się iloczynowi z jego obwodu przez połowę apotemy.*

179. Twierdzenie. *Pole koła ma za miarę iloczyn z okręgu przez połowę promienia.*

Dowodzenie. Wyobraźmy sobie, żeśmy w kole poprowadzili bardzo znaczną liczbę promieni; skutkiem tego pole jego rozpadnie się na znaczną liczbę wycinków tak wązkich, że bez znacznego błędu możemy je wszystkie uważać za trójkąty równoramienne. Wycinki te tembardziej będą się zbliżały do trójkątów, im liczba promieni będzie większą, a gdy ona stanie się nieskończenie wiel-

ką, czyli, jak matematycy się wyrażają, w *granicę*, wycinki będą zupełnie równe trójkątom. Wysokość każdego z takich trójkątów będzie równa promieniowi koła, gdyż promień jest prostopadły do stycznej (§ 149), a łuk, służący za podstawę każdemu trójkątowi, można uważać za odcinek stycznej do koła. Ponieważ rzeczywiście pole koła równa się sumie pól wspomnianych wyżej trójkątów, a pole trójkąta równa się iloczynowi z podstawy przez połowę wysokości, więc pole koła równa się iloczynowi sumy z podstaw trójkątów, czyli z okręgu koła, przez połowę promienia. c. b. d. o.

Oznaczając okrąg koła przez C , promień przez r i pole przez K , otrzymamy

$$K = C \cdot \frac{r}{2},$$

a że $C = 2\pi r$ (§ 170), więc

$$K = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2.$$

Przykłady. Promień koła ma 10 m. długości — jak wielkie jest jego pole?

$$K = 3,1415 \times 100 = 314,15 \text{ metr. kwadr.}$$

Obliczyć pole koła, którego promień równa się 7 calom.

$$K = 22\frac{7}{7} \cdot 49 = 22 \cdot 7 = 154 \text{ cal. kwadr.}$$

Wniosek 1. Z wzoru $K = \pi r^2$, wypada, że $r^2 = \frac{K}{\pi}$ i $r = \sqrt{\frac{K}{\pi}}$.

Przykład. Pole koła równa się $38\frac{1}{2}$ st. kwadr. — jak wielki jest jego promień?

$$r = \sqrt{\frac{38\frac{1}{2}}{\pi}} = \sqrt{7\frac{1}{2}} : \sqrt{22\frac{7}{7}} = \sqrt{49/4} = 7/2 = 3\frac{1}{2} \text{ stopy.}$$

Wniosek 2-gi. Jeżeli przez K i k oznaczymy pola dwu kół, których promieniami są R i r , otrzymamy

$$K = \pi R^2,$$

$$k = \pi r^2,$$

skąd

$$K : k = R^2 : r^2;$$

t. j. *pola dwu kół mają się do siebie, jak kwadraty z ich promieni.* Jeżeli np. promień jednego koła jest pięć razy większy od promienia drugiego, to pole pierwszego będzie 25 razy większe od pola drugiego.

Wniosek 3-ci. Powtarzając to samo rozumowanie, co dla obliczenia pola koła, otrzymamy, że *pole wycinka kołowego równa się długości jego łuku pomnożonej przez połowę promienia.*

Oznaczając przez n liczbę stopni łuku wycinka, przez r jego promień, przez l jego długość i przez p jego pole otrzymamy (§ 170 wn. 2):

$$l = \frac{2\pi R n}{360}, \text{ więc } p = \frac{2\pi r n}{360} \times \frac{r}{2} = \frac{\pi r^2 n}{360}.$$

Przykład. Obliczyć pole wycinka kołowego, którego łuk ma 30° i którego promień równa się 10 stop.

$$S = \frac{\pi \cdot 100 \cdot 30}{360} = \frac{3,1415 \times 100}{12} = \frac{314,15}{12} = 26,18 \text{ stop. kwadr.}$$

Wniosek 4-ty. Chcąc obliczyć *pole odcinka kołowego*, należy wprzód obliczyć pole wycinka, którego jedną częścią jest dany odcinek, a potem odjąć od tego pole trójkąta, który stanowi drugą część wycinka.

Przykład. Obliczyć pole odcinka, którego łuk równa się 90° i promień równa się 5 m.

Widocznem jest, że szukane pole stanowi różnica pomiędzy polem czwartej części koła i polem trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątne są promieniami koła. Lecz pole czwartej części koła

$$= \frac{\pi \cdot 25}{4} = \frac{3,1415 \times 100}{16} = 19,634 \text{ metr. kwadr.}; \text{ pole trójkąta równe } \frac{5 \times 5}{2} = 12,5, \text{ więc pole odcinka} = 7,134 \text{ metr. kwadr.}$$

180. **Pola wielokątów nieforemnych.** Pola takich figur można w dwojaki sposób obliczyć.

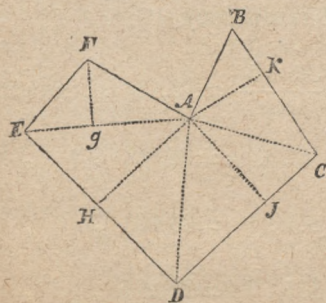


Fig. 157.

a) *Sposób pierwszy.* Niech będzie wielokąt $ABCDEF$ (fig. 157), którego pole mamy wyznaczyć. Poprowadziwszy przekątne AE , AD i AC , otrzymamy trójkąty $\triangle AEF$, $\triangle AED$, $\triangle ADC$ i $\triangle ABC$, w których dajmy, że $AE=3,36$ st., $ED=5,18$ st., $DC=4,22$ st., $BC=3,22$ s., $Fg=2,01$ s., $AH=3$ st., $AI=3,12$ st., $AK=1,8$ st.

$$\text{Pole trójk. } AEF = \frac{3,36 \cdot 2,01}{2} = 3,3768 \text{ st. kwadr.}$$

$$\text{„ „ } AED = \frac{5,18 \cdot 3}{2} = 7,7700 \text{ „ „}$$

$$\text{„ „ } ADC = \frac{4,22 \cdot 3,12}{2} = 6,5832 \text{ „ „}$$

$$\text{„ „ } ABC = \frac{3,22 \cdot 1,8}{2} = 2,8980 \text{ „ „}$$

$$\text{Pole wielokąta } ABCDEF = 20,6280 \text{ st. kwadr.}$$

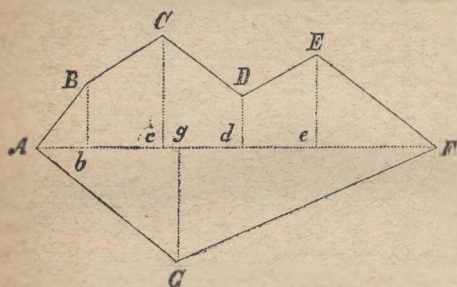


Fig. 158.

na które one dzielą przekątną. Niech $Bb=5$ st., $Cc=7$ st., $Dd=4$ st., $Ee=5,75$ st., $Gg=8$ st., $Ab=3,5$ st., $bc=6$ st., $cg=2$ st., $gd=4$ st., $de=5,8$ st., $eF=7,8$ st.

Mając te dane, możemy obliczyć pola wszystkich trójkątów i trapezów, na które wielokąt został rozdzielony.

$$\text{trójkąt } ABb = \frac{Ab \cdot Bb}{2} = \frac{3,5 \cdot 5}{2} = 8,75 \text{ st. kwadr.}$$

$$\text{trapez } BbCc = \frac{Bb+Cc}{2} \cdot bc = 6 \cdot 6 = 36,00 \text{ „ „}$$

$$\text{„ } CcDd = \frac{Cc+Dd}{2} \cdot cd = 5,5 \cdot 6 = 33,00 \text{ „ „}$$

$$\text{„ } DdEe = \frac{Dd+Ee}{2} \cdot de = 4,875 \cdot 5,8 = 28,275 \text{ „ „}$$

b) *Sposób drugi.*

Niech będzie wielokąt $ABCDEF$ (fig. 158).

Poprowadźmy największą przekątną jego AF i ze wszystkich jego wierzchołków poprowadźmy prostopadłe (rzędne) Bb , Cc , Dd , Ee i Gg na przekątną AF i zmierzmy te prostopadłe i odcinki,

$$\begin{aligned} \text{trójkąt } EeF &= \frac{Ee \cdot eF}{2} = \frac{5,75 \cdot 7,8}{2} = 22,425 \text{ st. kwadr.} \\ \text{„ } GgF &= \frac{gF \cdot gG}{2} = \frac{17,6 \cdot 8}{2} = 70,4 \text{ „ „} \\ \text{„ } AGg &= \frac{Ag \cdot Gg}{2} = \frac{11,5 \cdot 8}{2} = 46,00 \text{ „ „} \end{aligned}$$

$$\text{Wielokąt } ABCDEFGA = 244,85 \text{ st. kwadr.}$$

Uwaga. Widocznem jest, że powyższa metoda daje się też zastosować i do figur krzywokreślnych. Jakoż dajmy, że mamy obliczyć pole figury krzywokreślnej $AMBNA$ (fig. 159). Poprowadziwszy dowolną prostą AB ,

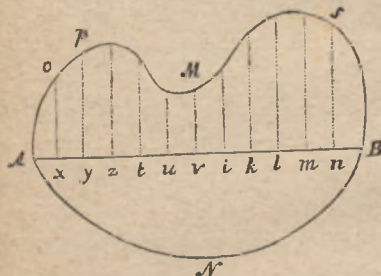


Fig. 159.

dzielimy ją na pewną liczbę równych odcinków Ax , xy i t. d. i z punktów podziałów wystawiamy prostopadłe xo , yp ... do prostej AB . Część figury AMB rozdzieli się tym sposobem na dwa trójkąty: Aox i Bns o krzywych przeciwprostokątnych i na trapezy krzywokreślne, jak $xoyp$. Fi-

gury te można bez znacznego błędu uważać za prostokreślne, jeśli tylko liczba podziałów prostej AB będzie dość znaczna i tym sposobem można na zasadzie znanych twierdzeń obliczyć część $AMBA$. W taki sam sposób obliczy się i druga część $ANBA$.

181. Zadania. Oznaczając przez b podstawę, przez h wysokość prostokąta, obliczyć pole: a) $b=2,15$ st., $h=3,18$ st.; b) $b=2\frac{2}{3}$ m., $h=1\frac{1}{8}$ metra; c) $b=2\frac{3}{4}$ arsz., $h=4\frac{2}{5}$ arsz.; d) $b=2$ sąż. 2 arsz. 5 wersz., $h=1$ sąż. 1 arsz. 7 wersz. Obliczyć wysokość prostokąta, wiedząc, że pole jego równa się 3,18 m. kw., podstawa zaś 1,5 m. kw. Obliczyć podstawę prostokąta, wiedząc, że pole jego równa się: a) 84 sąż. kw., b) $2\frac{1}{25}$ diesiatiny, c) 8,25 cal. kw., d) 15 arsz. kwadr.; wysokość zaś odpowiednio równa: a) 7 sąż., b) 3,6 arsz., c) 2,4 cala, d) 2 arsz. 8 wersz. Bok kwadratu ma 2,56 m. długości — obliczyć jego pole. Obwód kwadratu równa się 25 arsz. — obliczyć jego pole. Obliczyć bok kwadratu, którego pole równa się: a) 25 stop. kwadr.,

b) 10 m. kw., c) 144 cal. kw., d) 256 arsz. kw., e) $2\frac{1}{2}$ diesiatiny. W ogrodzie formy kwadratowej, którego bok ma 52,5 m. długości, zrobiona ma być naokoło droga, mająca 0,8 metra szerokości — jak wielką przestrzeń ona zajmie? Obliczyć bok kwadratu, którego pole ma być równe sumie pól dwu kwadratów, których boki równają się 15 i 20 metr. Obliczyć bok kwadratu, którego pole ma być równe sumie pól trzech kwadratów, których boki są 3, 4 i 5 arsz. Obliczyć bok kwadratu, którego pole ma być równe różnicy pól dwu kwadratów, których boki są 35 i 21 stop. Obliczyć podstawę i wysokość równoległoboku, którego pole równa się 100 m. kw., stosunek zaś podstawy do wysokości równa się $16\frac{1}{4}$. Obliczyć podstawę i wysokość prostokąta, którego pole równa się 28 arsz. kw., stosunek zaś wysokości do podstawy równa się $\frac{4}{5}$. Pokój ma 8 sążni długości i 16 stóp szerokości — ile desek potrzeba na wydyłowanie podłogi, jeżeli jedna deska ma 1 sąż. 5 st. długości i $1\frac{1}{2}$ st. szerokości? Ktoś posiada ogród prostokątny 50,8 m. długi i 40,25 metra szeroki — jak wielką przestrzeń zajmuje ten ogród? Podstawa równoległoboku przewyższa jego wysokość o 10 m., stosunek zaś podstawy do wysokości równa się 6 — obliczyć pole równoległoboku. Ile trzeba zapłacić za podłogę posadzkową w sali długiej na 6 sąż. 2 ar., szerokiej na 6 sąż., jeśli każdy sążeń kwadratowy wraz z robotą kosztuje 20 rs.? Ile rolek tapety potrzeba na wytapetowanie pokoju mającego 3 sąż. długości, 8 arsz. szerokości, 1 sąż. 1 arsz. wysokości, jeśli w pokoju znajdują się trzy okna szerokie na $1\frac{1}{2}$ arsz., wysokie na $2\frac{1}{2}$ arsz. i dwoje drzwi szerokie na 2 arsz., wysokie na 1 sąż., jeśli każda rolka tapety ma 10 arsz. długości i 12 wersz. szerokości? Przekątne ukośnika równają się 4,5 m. i 2,8 m. — obliczyć jego pole. Jeżeli każdy bok kwadratu, którego pole równa się 36 decym. kw., powiększymy o dwa decymetry, to o ile powiększy się pole kwadratu? Podstawy dwu prostokątów są jednakowe — ile razy pole jednego jest większe od pola drugiego, jeśli wysokości ich są: a) 15 c. i 3 c., b) 2 sąż. i 8 st., c) 16,5 m. i 0,15 m? Jeżeli do pokrycia jednej ściany w sali potrzeba 50 m. sukna 1,4 m. szerokiego — ile będzie potrzeba na przeciwległą, równej wielkości ścianę, jeżeli sukno jest 0,9 metr. szerokie? Ktoś chce zamienić swoje pole, które ma 2 dies. i 250 sąż. kwadr. na inne pole prostokątne równej wielkości, mające 80 sążni szerokości — jak długie musi być pole? Podstawa prostokąta równa się

8 m., wysokość zaś 2,15 m.—o ile powiększy się pole jego, jeśli a) wysokość powiększymy o 0,8 m., a podstawę o 1,2 m.; b) jeśli wysokość powiększymy o 2,15 m., a podstawę o 1,2 m.? Znaleźć pole równoległoboku, w którym a) podstawa równa się 2,5 m., a wysokość 1,8 m.; b) podstawa 2 arsz. 4 wersz., a wysokość 1 st. 2 cale. Obwód ukośnika równa się 80 calom, a wysokość 6 cal.—czemu się równa jego pole? Pole ukośnika równe 3 st. kw. $120\frac{24}{25}$ calom kwadr., bok jego jest na $\frac{4}{5}$ st. większym od wysokości—obliczyć bok i wysokość. Oznaczmy przez b podstawę trójkąta, a przez h jego wysokość—obliczyć pole trójkąta, jeśli a) $b=2,18$ m., $h=1,5$ m.; b) $b=2$ st. 4 cal., $h=1$ st. 6 cal.; c) $b=14$ arsz. 8 wersz., $h=2$ arsz. 6 wersz. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, jeśli przyprostokątne jego są: a) 12 c., 15 c.; b) 1,18 m., 0,18 m.; c) 2 sąż. 2 arsz., 1 sąż. 8 wer. Dowieść, że iloczyn z przyprostokątnych trójkąta prostokątnego równa się iloczynowi z przeciwprostokątnej przez prostopadłą poprowadzoną na nią z wierzchołka kąta prostego. Pole trójkąta prostokątnego równa się 25 c. kw., a przyprostokątne są w stosunku $\frac{9}{8}$ —obliczyć te przyprostokątne. Obliczyć pole trójkąta wpisanego w koło, jeśli jeden z jego boków jest średnicą koła, dwa zaś pozostałe boki są odpowiednio równe 8 c. i 9 c. Przekątne ukośnika są: a) 5 m. i 8 m., b) 2 st. 4 cal. i 1 st. 2 cal.—obliczyć jego pole. Obliczyć bok kwadratu równoważnego trójkątowi, w którym podstawa równa $145\frac{5}{6}$, wysokość zaś—11,666 . . . Obliczyć pole kwadratu, którego przekątna równa się 8 st. 4 cal. Wysokość trójkąta jest większą od jego podstawy o 2 metry; jeśli podstawę i wysokość powiększymy o 6 m., to pole jego powiększy się o 48 m. kw.—obliczyć podstawę i wysokość trójkąta. Oznaczając przez B i b podstawy, a przez h wysokość trapezu, szukamy pola trapezu, gdy a) $B=2,15$ m., $b=1,17$ m., $h=0,82$ m.; b) $B=13$ sąż. 1 st., $b=9$ sąż. 6 st. 4 cal., $h=6$ sąż. 3 cal.; c) $B=12$ arsz. 8 wer., $b=6$ ar. 12 wer., $h=2$ sąż. 3 st.; Pole trapezu=27 st. kw. 54 c. kw.; jego podstawy: $b=5$ st. 4 cal.; $B=6$ st. 10 c.—obliczyć odległość pomiędzy podstawami. Pole trapezu równa się $54\frac{3}{16}$ cal. kw., odległość pomiędzy podstawami równa się $8\frac{1}{2}$ cal. —obliczyć długość prostej, łączącej środki boków nierównoległych. Pole trapezu równa się 60 c. kw., podstawy są w stosunku 2 : 1, a odległość pomiędzy nimi równa się 8 calom—obliczyć podstawy trapezu. Obliczyć pole koła, jeśli promień jego

równa się: a) 2,15 m., b) 2 sąż. 3 st., c) 3 arsz. 8 wersz. Obliczyć pole koła, jeśli średnica jego równa się: a) 8 met., b) 2 sąż., c) 8 arsz. (We wszystkich następnych zadaniach przyjęliśmy $\pi=22/7$). W koło wpisano sześciokąt foremny, którego bok równa się 4 met.—obliczyć pole tego koła. Obliczyć pole koła, którego okrąg równa się $6\frac{2}{7}$ cala. Obliczyć promień koła, którego pole równa się 154 c. kw. Obliczyć bok sześciokąta foremnego wpisanego w koło, którego pole równa się 616 st. kwadr. Obliczyć, o ile pole koła o promieniu 21 cali jest większem od pola kwadratu wpisanego w to koło. Obliczyć pole pierścienia kołowego, zawartego pomiędzy dwoma kołami współśrodkowymi o promieniach: a) 80 i 60 stóp, b) 12,6 i 6,3 cala. Obliczyć pole wycinka kołowego, w którym: a) łuk $=38^{\circ} 6' 40''$ a promień 150 cal., b) łuk $=48^{\circ} 20'$, promień 18 metr. Pole wycinka kołowego $s=576$ milimetr. kwadr., długość łuku $l=20$ milimetrom—obliczyć długość promienia r i liczbę stopni n . Łuk wycinka kołowego zawiera $n=50^{\circ}$, pole jego $s=90$ st. kw.—obliczyć długość łuku l i promień r . Obliczyć długość łuku i wielkość pola wycinka, którego kąt środkowy równa się 125° i pole całego koła $=1,2566$. Obliczyć pole odcinka kołowego, którego promień równa się 10 metr., a łuk ma 90° . Pole koła, którego promień równa się 1 metr., zostało podzielonem na dwie równe części za pomocą koła współśrodkowego—obliczyć promień tego koła.

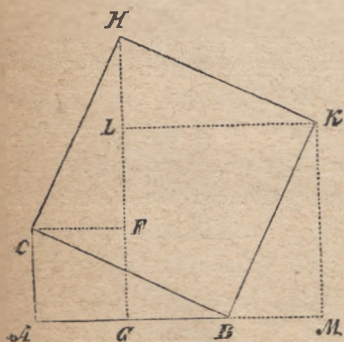


Fig. 160.

2. Przemiany figur.

182. Twierdzenie Pytagorasa.

W trójkącie prostokątnym, kwadrat wystawiony na przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów wystawionych na bokach kąta prostego.

Dowodzenie. Niech ABC (fig. 160) będzie trójkątem prostokątnym, CK kwadratem zbudowanym na przeciwprostokątnej. Z punktów H i K poprowadźmy prostopadłe HG i KM na przyprostokątną

AB ; z punktów znowu C i K poprowadźmy proste CF i KL równoległe do AB . Trójkąty prostokątne ABC , CHF , HKL i KBM są sobie równe, gdyż mają przeciwprostokątne równe (jako boki jednego kwadratu) i po jednym kącie ostrym równym (np. $\angle CBA = \angle BKM$, jako kąty o ramionach wzajemnie prostopadłych). Z równości tych trójkątów wypada, że $AB = LK = KM = AC = CF$; skąd wynika, że czworokąty $LKMG$ i $AGCF$ są kwadratami zbudowanymi na przyprostokątnych AB i AC danego trójkąta. Jeżeli do figury $CFLKBC$ dodamy trójkąty CFH i HLK , otrzymamy kwadrat $CHKB$; jeżeli zaś do tej samej figury dodamy dwa trójkąty ACB i BKM równe pierwszym, otrzymamy figurę $ACFLKMA$, składającą się z kwadratu $ACFG$, zbudowanego na AC , i kwadratu $LKMG$, zbudowanego na KM , czyli AB . Stąd wypada, że kwadrat wystawiony na przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów wystawionych na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego. c. b. d. o.

Uwaga. Dla lepszego zrozumienia powyższego zadania, można całą powyższą figurę wyrysować na papierze i wykroić część $AMKLFCA$, następnie przeciąć figurę po prostych BK i BC tak, aby trójkąty BKM i ACB u dołu odjęte i u góry na miejsce trójkątów KHL i HFC przystawione być mogły.

Wniosek 1-szy. Ponieważ pole kwadratu równa się kwadratowi z jego boku, więc oznaczając przeciwprostokątną BC przez a , przyprostokątne zaś AC i AB przez b i c , możemy twierdzenie Pytagorasa przedstawić w kształcie równania

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ z którego wypada, że } a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Z tego równania otrzymujemy

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{ i } \quad b = \sqrt{a^2 - c^2},$$

t. j. w trójkącie prostokątnym kwadrat, wystawiony na jednym boku kąta prostego, jest różnicą kwadratów wystawionych na przeciwprostokątnej i na drugiej przyprostokątnej.

Wniosek 2-gi. Za pomocą twierdzenia Pytagorasa można obliczyć każdy bok trójkąta prostokątnego, mając drugie dwa dane:

1-sze. Jeżeli dane są obie przyprostokątne, stosujemy wzór $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, np. jeśli $b = 35$ m., $c = 12$ m., to $a = \sqrt{35^2 + 12^2} = \sqrt{1369} = 37$.

2-re. Gdy dana jest przeciwprostokątna i jedna przyprostokątna, wtedy stosujemy wzór $b = \sqrt{a^2 - c^2}$; jeśli np. $a = 30$, $c = 24$, to $b = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{900 - 576} = \sqrt{324} = 18$.

183. **Zadania.** Na zasadzie twierdzenia Pytagorasa rozwiążemy mnóstwo zadań, z których przytoczymy tu najważniejsze.

Zadanie I. Zbudować kwadrat, któryby był dwa razy większy od danego.

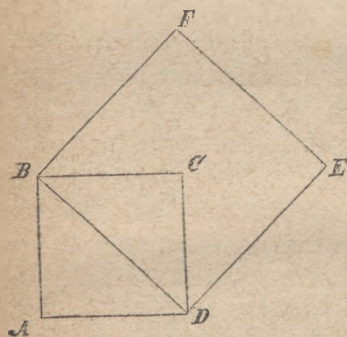


Fig. 161.

Rozwiązanie. Dajmy, że chcemy zbudować kwadrat, któryby był dwa razy większy od kwadratu $ABCD$ (fig. 161). Poprowadziwszy przekątną BD i zbudowawszy na niej kwadrat $BDEF$, widzimy, że on, na zasadzie twierdzenia Pytagorasa, równa się sumie kwadratów wystawionych na przyprostokątnych BC i CD trójkąta BCD , czyli równa się dwa razy wziętemu kwadratowi $ABCD$. Kwadrat zatem $BDEF$ czyni zadość żądanemu warunkowi.

W ten sam sposób prowadząc przekątne nowego kwadratu, możemy nakreślić kwadrat cztery razy większy od danego i t. d.

Zadanie II. Nakreślić kwadrat dwa razy mniejszy od danego $ABCD$ (fig. 162).

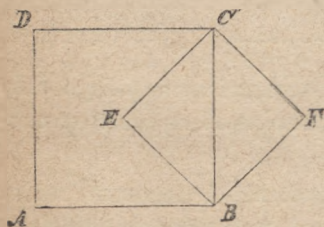


Fig. 162.

Rozwiązanie. Na boku CB danego kwadratu, jako na przekątnej, kreślimy kwadrat $ECFB$, względem którego dany jest dwa razy większym (zadanie poprzed.), a zatem stanowi on połowę danego.

Tak dalej postępując, możemy nakreślić kwadrat w 4, 8, 16 . . razy mniejszy od danego.

Zadanie III. Zbudować kwadrat, równoważny: a) sumie dwu kwadratów $ABCD$ i $abcd$ i b) różnicy tych dwu kwadratów.

Rozwiązanie. a) Należy nakreślić trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne są AB i ab . Kwadrat, wystawiony na przeciwprostokątnej tego trójkąta, będzie szukany.

b) Należy nakreślić trójkąt prostokątny, w którym bok większego kwadratu byłby przeciwprostokątną, a bok mniejszego przyprostokątną. Kwadrat, wystawiony na drugiej przyprostokątnej, będzie szukany.

Na zasadzie powyższego, bardzo łatwo nakreślić kwadrat równy sumie trzech lub więcej kwadratów.

Zadanie IV. Obliczyć wysokość trójkąta równoramiennego, znając jego podstawę i bok.

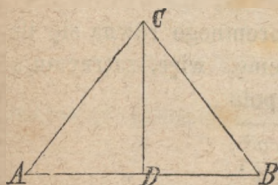


Fig. 163.

Rozwiązanie. Niech w trójkącie równoramiennym ABC (fig. 163) będzie $AB = c$, $AC = b$. Prostopadła CD , poprowadzona z wierzchołka kąta C na podstawę, dzieli tę podstawę na dwie równe części (§ 87, 2), więc na zasadzie twierdzenia Pytagorasa

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = b^2 - \frac{c^2}{4} \text{ i } CD = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

Jeśli np. $AB = 8$ st., $AC = 5$ st., to $CD = \sqrt{25 - 16} = 3$ st.

Wniosek 1-szy. Pole trójkąta równoramiennego ABC równa się $\frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{c}{2} \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}}.$

Dla wyżej przytoczonego przykładu pole $= \frac{8 \cdot 3}{2} = 12$ st. kw.

Wniosek 2-gi. W przypadku, gdy trójkąt jest równoboczny, każdy bok jego równa się a , otrzymamy, że wysokość jego równa się

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{3}, \text{ pole zaś } = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

Jeśli np. bok trójkąta równobocznego równa się 10 m., to wysokość jego $= 5 \sqrt{3} = 5 \cdot 1,732 = 8,660$ m., pole zaś $= 8,66 \cdot 5 = 43,3$ m.

Wniosek 3-ci. Na zasadzie twierdzenia Pytagorasa można też obliczyć promień koła wpisanego w wielokąt foremny (apotema),

znając promień koła opisanego i bok. Jakoż na fig. 143 widzimy, że apotema r jest przyprostokątną w trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątną jest promień R koła opisanego, drugą zaś przyprostokątną jest połowa boku ($\frac{a}{2}$) wielokąta. Wypada stąd,

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

Ponieważ w sześciokącie foremnym bok jego równa się promieniowi R , więc apotema r sześciokąta foremnego równa się

$$\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2} \sqrt{3}.$$

Wiemy (§ 178), że pole wielokąta foremnego równa się iloczynowi z połowy jego obwodu przez apotemę, więc, zatrzymując powyższe znakowanie, otrzymamy wzór na pole

$$S = \frac{na}{2} \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}},$$

gdzie n oznacza liczbę boków wielokąta.

Dla sześciokąta foremnego wzór powyższy przechodzi w następujący

$$S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Jeśli np. promień koła opisanego na sześciokącie foremnym równa się 10 metrom, to pole jego równa się

$$\frac{3 \cdot 100 \cdot 1,732}{2} = 259,8 \text{ metr. kwadr.}$$

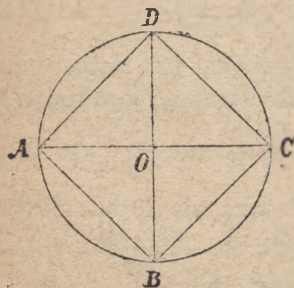


Fig. 164.

Zadanie V. Obliczyć bok kwadratu wpisanego w koło.

Rozwiązanie. Niech będzie kwadrat $ABCD$ (fig. 164) wpisany w koło. Z trójkąta prostokątnego AOB otrzymamy

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2R^2,$$

$$\text{skąd} \quad AB = R\sqrt{2},$$

gdzie R oznacza promień koła.

Zadanie VI. Obliczyć bok trójkąta równobocznego wpisanego w koło.

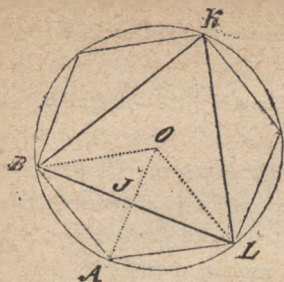


Fig. 165.

Rozwiązanie. Jeżeli BA i AL (fig. 165) są bokami sześciokąta foremnego, to BL jest bokiem trójkąta równobocznego i czworobok $ABOL$ jest ukośnikiem (§ 168), którego przekątne OA i BL dzielą się wzajemnie na części równe i są do siebie prostopadłe (§§ 107, 108). Stąd wypada, że

$$BI^2 = BO^2 - OI^2; \text{ czyli } \left(\frac{BL}{2}\right)^2 = BO^2 - OI^2;$$

oznaczając promień BO koła przez R , otrzymamy

$$\left(\frac{BL}{2}\right)^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3}{4}R^2,$$

$$BL^2 = 3R^2 \text{ i } BL = R\sqrt{3}.$$

Jeżeli np. promień koła równa się 5 stop., to bok trójkąta równobocznego wpisanego równać się będzie

$$5\sqrt{3} = 5 \cdot 1,732 = 8,660 \text{ stop.}$$

184. Twierdzenie. W trójkącie ostrokątnym, kwadrat z boku przeciwległego kątowi ostremu równa się sumie kwadratów dwu boków kąta, mniej podwójny iloczyn z podstawy przez jej odcinek od wierzchołka kąta ostrego do spodka wysokości.

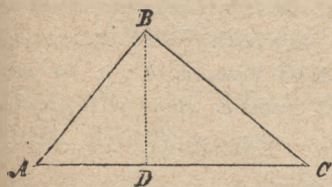


Fig. 166.

Dowodzenie. Niech będzie trójkąt ABC (fig. 166), w którym kąt A jest ostry. Z wierzchołka B poprowadźmy na podstawę AC wysokość BD , która utworzy na podstawie odcinki AD i DC .

W trójkącie prostokątnym BDC będzie

$$BC^2 = BD^2 + DC^2,$$

lecz BD jest przyprostokątną w trójkącie prostokątnym ABD , więc $BD^2 = AB^2 - AD^2$ (§ 182 wn. 2); oprócz tego $DC = AC -$

AD , więc $DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD$ *). Jeśli otrzymane dla BD^2 i DC^2 wartości podstawimy w równanie $BC^2 = BD^2 + DC^2$, otrzymamy

$$BC^2 = AB^2 - AD^2 + AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD.$$

c. b. d. o.

185. Twierdzenie. W trójkącie rozwartokątnym kwadrat z boku przeciwległego kątowi rozwartemu równa się sumie kwadratów dwu boków kąta więcej podwójny iloczyn z podstawy trójkąta przez jej odciętek od wierzchołka kąta rozwartego do spodka wysokości.



Fig. 167.

Dowodzenie. Niech będzie trójkąt ABC (fig. 167), w którym kąt A jest rozwarty.

Z wierzchołka C poprowadźmy wysokość CD na podstawę BA .

W trójkącie prostokątnym BCD mamy

$$BC^2 = BD^2 + DC^2;$$

lecz w trójkącie prostokątnym CAD

$$DC^2 = CA^2 - AD^2,$$

oprócz tego

$$BD = BA + AD \text{ i } BD^2 = BA^2 + AD^2 + 2BA \cdot AD **).$$

Podstawiając te wartości na BD i DC w równanie $BC^2 = BD^2 + DC^2$, otrzymamy

$$BC^2 = CA^2 - AD^2 + BA^2 + AD^2 + 2BA \cdot AD = CA^2 + AB^2 + 2BA \cdot AD.$$

c. b. d. o.

Wniosek 1. Na zasadzie powyższych twierdzeń możemy obliczyć wysokość trójkąta, znając wszystkie trzy jego boki. Jakoż oznaczając boki przeciwległe kątom A , B , C (fig. 166) przez a , b i c , to jest oznaczając AC przez b , BC przez a , AB przez c , mamy w trójkącie prostokątnym BCD , $BD^2 = a^2 - DC^2$; a potem w trójkącie ABC , $c^2 = b^2 + a^2 - 2b \cdot DC$; skąd

*) Oznaczając przez a i b dwie wielkości, otrzymujemy przez mnożenie
 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

**) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$$DC = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}.$$

Podstawiając tę wartość w równanie $BD^2 = a^2 - DC^2$, otrzymamy

$$BD^2 = a^2 - \frac{(b^2 + a^2 - c^2)^2}{4b^2} = \frac{4b^2a^2 - (b^2 + a^2 - c^2)^2}{4b^2} =$$

$$\frac{(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) *)}{4b^2}.$$

Tak samo rozkładając każdy z czynników w nawiasach, otrzymamy

$$(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = (a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c)$$

$$(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = c^2 - (a - b)^2 = (c + a - b)(c - a + b).$$

Więc
$$BD^2 = \frac{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c + b - a)}{4b^2},$$

skąd
$$BD = \frac{1}{2b} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c + b - a)}.$$

Wniosek 2. Ponieważ pole trójkąta równa się połowie iloczynu z podstawy przez wysokość, więc oznaczając pole trójkąta ABC przez s , otrzymamy

$$s = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2b} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c + b - a)}.$$

Przykład. Obliczyć pole trójkąta, w którym $a = 18$ m., $b = 12$ m., $c = 10$ metrom.

$$a + b + c = 40, \quad a + b - c = 20, \quad a + c - b = 16, \quad b + c - a = 4,$$

więc
$$s = \frac{1}{4} \sqrt{40 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 4} = \frac{20 \cdot 8}{4} \sqrt{2} = 40 \sqrt{2} = 56,56 \text{ m. kw.}$$

186. Twierdzenie. W każdym równoległoboku suma kwadratów jego przekątnych równa się sumie kwadratów czterech jego boków.

*) Na zasadzie twierdzenia, że różnica kwadratów równa się iloczynowi z sumy przez różnicę, t. j. $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$.

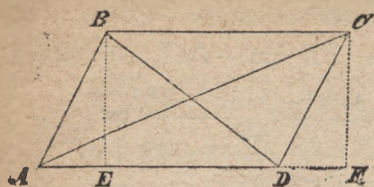


Fig. 168.

Dowodzenie. Niech będzie równoległobok $ABCD$ (fig. 168), którego przekątne są BD i AC . Poprowadziwszy prostopadłe BE i CF na bok AD , otrzymamy na zasadzie (§§184, 185)

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE.$$

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2AD \cdot DF.$$

Lecz trójkąty prostokątne ABE i DCF są sobie równe, ponieważ mają $AB = CD$ (jako boki przeciwległe równoległoboku) i $\angle ABE = \angle DCF$ (kąty między ramionami równoległymi), więc $AE = DF$. Dodając powyższe dwa równania stronami i uważając, że $AD = BC$, otrzymamy

$$BD^2 + AC^2 = AD^2 + DC^2 + BC^2 + AB^2.$$

c. b. d. o.

Zadanie VII. Trójkąt nierównoboczny ABC (fig. 169) zamienić na równoramienny.

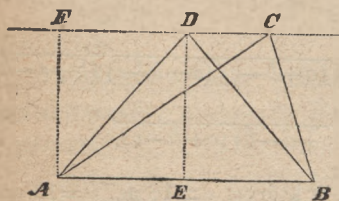


Fig. 169.

Rozwiązanie. Przez wierzchołek C poprowadźmy równoległą FC do podstawy AB . Wiadomo, że każdy punkt tej prostej, połączony z końcami podstawy, daje trójkąt równoważny danemu (§ 176 wn. 1). Lecz ponieważ szukany trójkąt ma być równoramienny, więc wierzchołek jego musi się jeszcze

znajdować na prostopadłej ED do AB , wystawionej z jej środka E (§ 117, b). Wypada stąd, że trójkąt ADB jest szukany.

Zadanie VIII. Trójkąt ABC (fig. 169) zamienić na równoważny mu trójkąt prostokątny.

Rozwiązanie. Wystawiamy w punkcie A prostopadłą AF do prostej AB , aż do przecięcia się z prostą CF w punkcie F . Trójkąt AFB będzie żądanym (§ 176, wn. 2).

Zadanie IX. Dany trójkąt ABC (fig. 170) zamienić na inny, któryby miał daną podstawę a .

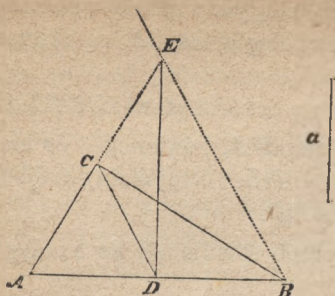


Fig. 170.

Rozwiązanie. Odłóżwszy $AD=a$, łączmy punkt D z punktem C prostą DC i prowadźmy prostą BE równoległą do DC aż do przecięcia się z przedłużonym bokiem AC w punkcie E . Połączmy punkt E z punktem D prostą ED , otrzymamy żądany trójkąt AED .

Jakoż,

$\triangle ACD$ jest równoważny $\triangle ACD$,

$\triangle CDE$ jest równoważny $\triangle CDB$ (§ 176, wn. 2);

dodawszy stronami, otrzymamy

$$\triangle ACD + \triangle CDE = \triangle ACD + \triangle CDB;$$

czyli

$$\triangle ADE = \triangle ABC.$$

W sposób podobny rozwiązuje się zadanie: *Dany trójkąt zamienić na inny, któryby miał daną wysokość.*

Zadanie X. *Dany trójkąt zamienić na prostokąt równoważny.*

Rozwiązanie. Przez środek wysokości prowadzi się równoległą do podstawy i przez końce podstawy prostopadłe do niej aż do przecięcia się z równoległą. Otrzymany prostokąt będzie żądany.

Zadanie XI. *Dany wielokąt zamienić na trójkąt równoważny.*

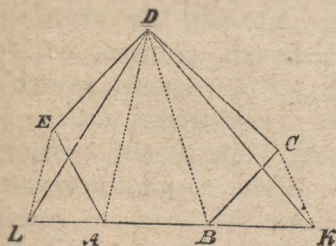


Fig. 171.

Rozwiązanie. Niech będzie pięciokąt $ABCDEA$ (fig. 171), który trzeba zamienić na trójkąt równoważny. Poprowadźmy przekątną DB i przez wierzchołek C równoległą do niej CK , aż do spotkania K z przedłużeniem boku AB . Połączmy punkty D i K prostą DK , otrzymamy czworokąt $DKAED$ równoważny danemu pięciokątowi.

Jakoż,

dany pięciokąt $ABCDEA =$ czworok. $ADEDBA +$ trójk. DBC ,
otrzymany czworok. $DKAED =$ czworok. $DBAED +$ trójk. DBK .

Lecz dwa trójkąty DBC i DBK , mające wspólną podstawę i wierzchołki C i K , na prostej CK , równoległej do DB , są równoważne (§ 176, wn. 2), więc

pięciokąt $ABCDEA$ równoważny czworokątowi $DKAED$.

Poprowadziwszy następnie przekątną DA , równoległą do niej EL i połączywszy punkty D i L prostą DL , otrzymamy trójkąt KDL , równoważny czworokątowi $DKAED$.

Widoczne jest, że powyższy sposób stosuje się do każdego bez wyjątku wielokąta.

Zadanie XII. Prostokąt $ABCD$ (fig. 172) zamienić na kwadrat równoważny.

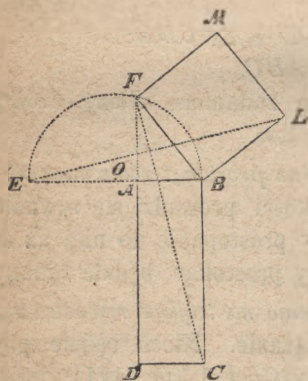


Fig. 172.

Rozwiązanie. Przedłużamy mniejszy bok AB prostokąta tak, aby było $BE=BC$; nad prostą BE , jako nad średnicą ze środka A , opisujemy półokrąg, który przecina przedłużony bok AD w punkcie F ; prowadzimy prostą BF i na niej wystawiamy kwadrat $FBML$, który będzie żądanym. Jakoż połączywszy punkty E i L , jakoteż F i C prostymi EL i FC , otrzymamy dwa trójkąty EBL i FBC równe sobie, gdyż $BL=BF$, jako boki jednego kwadratu, $BE=BC$ z wykreślenia, $\angle LBE = \text{kątowni prostemu } LBF + \angle FBE$, $\angle FBC = \text{kątowni prostemu } ABC + \angle EBF$; więc $\angle EBL = \angle FBC$. Lecz trójkąt EBL stanowi połowę kwadratu $FMBL$, gdyż ma z nim wspólną podstawę BL i równą wysokość (punkty E , F i M leżą na prostej równoległej do BL) (§ 176, wn. 2), trójkąt znowu FBC stanowi połowę prostokąta $ABCD$. Wypada stąd, że i prostokąt $ABCD$ jest równoważny kwadratowi $BFML$.

Uwaga 1. Ponieważ każdy wielokąt można zamienić na trójkąt jemu równoważny, a każdy trójkąt na prostokąt równoważny, więc każdy wielokąt można zamienić na kwadrat jemu równoważny.

Uwaga 2. Widzieliśmy, że pole koła równa się iloczynowi z jego okręgu przez pół promienia, więc koło można uważać jako równoważne prostokątowi, mającemu za podstawę okrąg koła, a za wysokość połowę promienia. Stąd wypada, że jeślibyśmy za pomocą jakiegoś sposobu geometrycznego mogli *ściśle* wyprostować okrąg koła, to możnaby było koło zamienić na kwadrat równoważny, czyli, jak mówią, przeprowadzić *kwadraturę koła*, lecz ponieważ geometryja uczy, że niema żadnego sposobu *matematycznego* na *ściśle* wyprostowanie okręgu koła, więc *kwadratura koła jest niemożliwą*.

187. Pytania i zadania. *Jakie jest twierdzenie Pytagorasa?* Czemu się równa kwadrat przeciwprostokątnej? Czemu się równa kwadrat przyprostokątnej? Czemu się równa wysokość trójkąta równoramiennego? Czemu się równa wysokość trójkąta równobocznego? Czemu się równa bok kwadratu wpisanego w koło? Czemu się równa bok trójkąta równobocznego wpisanego w koło? Czemu się równa promień koła wpisanego w wielokąt foremny (apotema)? W trójkącie prostokątnym dane są obie przyprostokątne: a) 6 cali i 8 cali; b) 9 metr. i 12 metr.; c) 28 m. i 15 m.; d) 1,28 i 3,4; e) $2\frac{2}{3}$ i $5\frac{1}{6}$ —obliczyć przyprostokątne. W trójkącie prostokątnym dane są przeciwprostokątna i przyprostokątna: a) 15 c. i 12 c., b) 30 m. i 24 metr., c) 285 m. i 182 m., d) 18,25 i 6,11, e) $12\frac{4}{5}$ i $10\frac{2}{3}$ —obliczyć drugą przeciwprostokątną. Jaki kształt ma trójkąt, którego boki są: a) $5\frac{2}{3}$, 5 i $2\frac{2}{3}$; b) 5, $2\frac{1}{2}$ i 4; c) 3, 2 i 2,75? Zrobioną ma być drabina tak długa, aby przystawiona do domu w ten sposób, że dolny jej koniec odstaje od domu na 2,5 m. sięgała do 4,5 m. wysokości tego domu—jak wielka będzie długość tej drabiny? Przekątna kwadratu równa się 15 m.—obliczyć bok i pole kwadratu. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego równa się 24 c., a pole jego równa się 384 c. kw.—obliczyć przeciwprostokątną. Przekątne ukośnika są: 210 c. i 112 c.—obliczyć jego obwód. Obliczyć długość cięciwy, której odległość od środka koła wynosi 6 sąż. 2 st., jeśli promień tego koła równa się 17 sąż. i 6 stóp. W kole, którego promień równa się 3,7 c., poprowadzono cięciwę długości 5,92 c.—obliczyć odległość jej od środka. Cięciwa, mająca długości 36 c., oddalona jest od środka na $7\frac{1}{2}$ c.—obliczyć promień koła. Obliczyć pole trójkąta prostokątnego, mając jego przeciwprostokątną $a=7,09$ metra

i przyprostokątną $b=6,45$ m. Obliczyć pole trójkąta równoramiennego, jeśli jego podstawa i bok równają się: a) 80 m. i 41 m., b) 87,16 c. i 104,15 c. Pole trójkąta równoramiennego równa się 1,848 c. kw., podstawa zaś 66 c.—obliczyć jego wysokość i bok. Pole trójkąta równoramiennego równa się $762\frac{2}{3}$ m. kw., wysokość zaś $21\frac{7}{9}$ —obliczyć podstawę i bok. Obliczyć pole trójkąta równobocznego, którego bok równa się: a) 15 c., b) 28 m., c) 15,18 m. Obliczyć pole sześciokąta foremnego, którego bok równa się: a) 15 c., b) 10 m., c) 15 ar. Obliczyć bok sześciokąta foremnego, jeśli pole jego równa się: a) 280 st. kw., b) 182,15 m. kw., c) 212 ar. kw. Obliczyć pole trójkąta, znając jego boki: a) 10,17 i 21, b) 25,29 i 36, c) 14,13 i 15. Znając promień koła równy 10 m., obliczyć pola wpisanych w nie: trójkąta równobocznego, kwadratu i sześciokąta. Obliczyć różnicę pomiędzy polem koła o promieniu 10 c. i polem kwadratu wpisanego w to koło. To samo zadanie dla sześciokąta foremnego. Dowieść, że jeżeli na przeciwprostokątnej i na przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jako na średnicach, opiszemy półkoła, to suma pól półksiężyców utworzonych przez okręgi kół równa się polu trójkąta prostokątnego. Nakreślić koło równoważne: a) sumie dwu kół, b) różnicy dwu kół, c) 9 razy większe niż koło dane, d) 25 razy mniejsze od koła danego. Nakreślić koło, którego pole równałoby się polu pierścienia utworzonego przez dwa koła współśrodkowe (na zas. twierdz. Pytagorasa). Dany trójkąt podzielić na kilka równych części prostemi wychodzącymi z jednego wierzchołka. Podzielić trójkąt na cztery przystające trójkąty. (Łączy się środki wszystkich boków prostemi). Dany trójkąt ABC zamienić na równoważny trójkąt, którego jeden bok byłby BC , drugi zaś równałby się danej prostej b . (Podstawą danego trójkąta jest dana BC , wierzchołek zaś powinien się znajdować na prostej równoległej do podstawy i poprowadzonej od niej w odległości równej wysokości AD danego trójkąta, oraz na okręgu koła zakreślonego z końca podstawy promieniem równym b). Zbudować trójkąt, którego pole równałoby się summie lub różnicy dwu trójkątów, mających jednakową wysokość. Zbudować kwadrat, którego pole stanowiłoby $\frac{1}{3}$ część pola danego kwadratu. Trapez zamienić na kwadrat równoważny. Wykreśleniem dowieść prawdziwości twierdzeń: a) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, b) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, c) $(a+b) \cdot (a-b)=a^2-b^2$.

V. Proporcjonalność odcinków i podobieństwo figur.

1. Proporcjonalność odcinków.

188. Znaleźć największą wspólną miarę dwu odcinków.

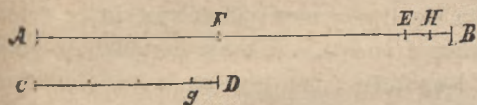


Fig. 173.

Wspólną miarą dwu odcinków AB i CD (fig. 173) jest odcinek, który się w nich mieści bez reszty. Ponieważ największa wspólna miara tych dwu odcinków nie może być większą od mniejszego

odcinka CD , więc probujemy, czy CD nie mieści się w AB , i w tym celu przenosimy CD na AB tyle razy, ile można. Jeśli się zawiera bez reszty, to CD oczywiście będzie największą wspólną miarą tych odcinków. Jeśli zaś okaże się, że CD mieści się w AB np. dwa razy i jeszcze zostaje reszta EB , t. j. jeśli $AB = 2CD + EB$, to przenosimy tę resztę EB na mniejszy odcinek CD . Przy tem mogą zachodzić dwa przypadki: albo EB mieści się bez reszty, albo też zostaje reszta. W pierwszym przypadku EB jest wspólną miarą. Jakoż dajmy np., że EB mieści się w CD trzy razy, będziemy mieli: $CD = 3EB$, $AB = 2CD + EB = 6EB + EB = 7EB$, t. j. EB mieści się w AB dokładnie 7 razy, w CD zaś 3 razy. Jeżeli zaś okaże się, że przy tem odkładaniu zostanie reszta GD , tak że $CD = 3EB + GD$, to nową resztę przenosimy na pierwszą resztę EB i dajmy, że ona mieści się w niej dwa razy, tak że $EB = 2GD$. Widoczne jest, że wspólną miarą dwu danych odcinków będzie w tym razie GD , gdyż idąc w górę otrzymujemy następujące równości: $EB = 2GD$, $CD = 3EB + GD = 7GD$, $AB = 2CD + EB = 14GD + GD = 15GD$. Gdyby odcinek GD nie mieścił się dokładnie w EB , należałoby otrzymaną resztę przenieść na GD i t. d.

Jeżeli postępując sposobem wyżej wyłożonym, to jest tym samym, który służy do znalezienia największego wspólnego dzielnika dwu liczb, dochodzimy do reszty równej zeru, to ostatnia reszta będzie wspólną miarą dwu odcinków i odcinki nazywają się *wspólnymi*.

miernymi; jeżeli zaś okaże się, że nigdy do reszty równej zeru nie dojdziemy, to odcinki dane nie mają wspólnej miary i nazywają się *niewspółmiernymi*. W przypadku, gdy odcinki są współmierne, stosunek ich wyraża się liczbą całkowitą lub ułamkową, np. przyjmując, że $AB = 16GD$ i $CD = 7GD$, znajdziemy, że stosunek $\frac{AB}{CD} = \frac{16}{7}$. W przypadku zaś, gdy odcinki nie mają wspólnej miary, stosunek ich wyraża się liczbą niewspółmierną, którą tylko z danem przybliżeniem obliczyć można. Tak np. dowodzi się geometrycznie, że przekątna kwadratu i bok jego są niewspółmierne. Łatwo też wykazać rachunkiem, że stosunek tych dwu prostych wyraża się liczbą niewspółmierną. Oznaczając przez a bok kwadratu, znajdziemy, że przekątna jego $d = a\sqrt{2}$ (Zad. V. s. 130). Więc $\frac{d}{a} = \sqrt{2}$ t. j. liczbie niewspółmiernej.

Dla otrzymania stosunku dwu odcinków, w przypadku gdy one są niewspółmierne, można postąpić w sposób następujący. Podzieliwszy odcinek CD np. na 100 równych części, dochodzimy, ile takich części zawiera się w większym odcinku. Ponieważ taka część nie może się dokładnie zawierać w większym odcinku, gdyż w przeciwnym razie odcinki byłyby współmierne, więc dajmy, że liczba wyrażająca, ile razy setna część mniejszego odcinka zawiera się w większym, zawarta jest pomiędzy 228 i 229; stąd wypada, że $\frac{228}{100} < \frac{AB}{CD} < \frac{229}{100}$.

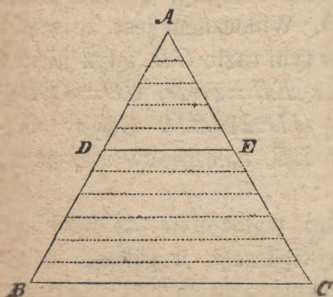


Fig. 174.

189. Twierdzenie. *Wszelka równoległa do jednego z boków trójkąta dzieli dwa inne na części proporcjonalne.*

Założenie. Dajmy, że $DE \parallel BC$ (fig. 174), mamy dowieść, że

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Dowodzenie. 1-sze. Dajmy, że odcinki AD i DB są współ-

mierne i dla utkwienia myśli, dajmy, że wspólna miara mieści się w AD pięć razy, a w DB sześć razy, tak że $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{6}$. Przeniósłszy wspólną miarę na odcinki AD i DB i przez punkty podziału poprowadziwszy linie równoległe do podstawy trójkąta, znajdziemy (§ 129), że te odetną na odcinkach AE i EC równe części, a mianowicie na AE pięć, a na EC sześć równych części; będzie więc $\frac{AE}{EC} = \frac{5}{6}$, a że $\frac{AD}{DB} = \frac{5}{6}$, zatem $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

2-re. Dajmy teraz, że AD i DB są niewspółmierne. Z poprzedniego paragrafu wiadomo, że stosunek dwu odcinków niewspółmiernych można wyznaczyć z dowolnem przybliżeniem, podzieliwszy prostą AD na pewną liczbę równych części i przeniósłszy te części na DB . Jeżeli przez punkty podziału, takim sposobem otrzymane, poprowadzimy linie równoległe do BC , otrzymamy przybliżony stosunek $\frac{AE}{EC}$ równy stosunkowi przybliżonemu $\frac{AD}{DB}$, a że stopień przybliżenia jest zupełnie dowolnym, więc nasze twierdzenie jest też prawdziwe i w przypadku niewspółmierności odcinków.

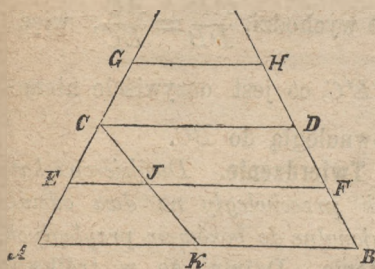


Fig. 175.

Wniosek 1. Zupełnie takim samym, jak poprzedni, sposobem możemy dowieść dwu następujących równości:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}; \quad \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}.$$

Wniosek 2. Równoległe AB , CD , EF . . . (fig. 175) odcinają na dwu jakichkolwiek prostych AC i BD odcinki proporcjonalne.

Jakoż poprowadziwszy prostą CK równoległą do BD , otrzymamy $\frac{AE}{EC} = \frac{KI}{IC} = \frac{BF}{FD}$ (§ 129); takim samym sposobem dowiedzemy, że $\frac{EC}{CG} = \frac{FD}{DH}$. Lecz z proporcji $\frac{AE}{EC} = \frac{BF}{FD}$ wypada, że

$\frac{AE}{BF} = \frac{EC}{FD}$, z proporcji zaś $\frac{EC}{CG} = \frac{FD}{DH}$ wynika, że $\frac{EC}{FD} = \frac{CG}{DH}$,
więc $\frac{AE}{BF} = \frac{EC}{FD} = \frac{CG}{DH}$.

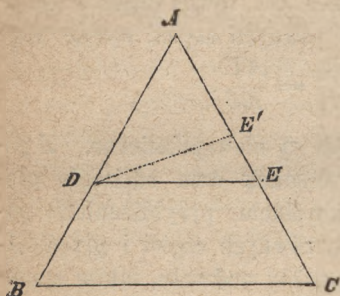


Fig. 176.

190. **Wzajemnica.** *Wszelka prosta, wyznaczająca na dwu bokach trójkąta odcinki proporcjonalne, jest równoległa do trzeciego boku.*

Założenie. Dajmy, że prosta DE (fig. 176) oznacza na bokach trójkąta ABC odcinki czyniące zadość proporcji

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC},$$

mamy dowieść, że $DE \parallel BC$.

Dowodzenie. Gdyby bowiem DE nie było równoległą do BC ,

możnaby było przez punkt D poprowadzić prostą DE' , równoległą do BC i na zasadzie twierdzenia poprzedniego byłoby

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}, \text{ skąd } \frac{AD + DB}{DB} = \frac{AE' + E'C}{E'C}; \text{ t. j. } \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{E'C},$$

a że $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, albo, co na jedno wychodzi, $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$, więc

byłoby $\frac{AC}{EC} = \frac{AC}{E'C}$, skąd $EC = E'C$, co jest oczywiście niemożliwym, więc DE' nie może być równoległą do BC .

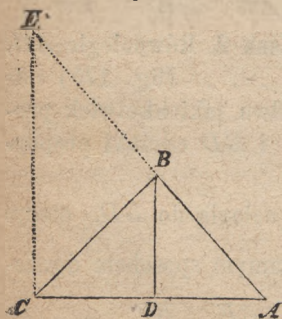


Fig. 177.

191. **Twierdzenie.** *Dwójściana kąta dzieli bok przeciwległy na dwa odcinki proporcjonalne do boków im przyległych.*

Założenie. Dajmy, że w trójkącie ABC (fig. 177) prosta BD jest dwójścianą kąta B , mamy dowieść, że

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

Dowodzenie. Przedłużmy bok AB i poprowadźmy prostą EC równoległą do BD . Na zasadzie § 189

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BE},$$

lecz na zasadzie § 70.3 $\angle BEC = \angle ABD$, $\angle DBC = \angle BCE$, a że z założenia $\angle ABD = \angle DBC$, więc $\angle BEC = \angle BCE$ i trójkąt BCE jest równoramienny (§ 83, wn. 3), t. j. $BE = BC$, stąd wypada,

że
$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}.$$

192. Wzajemnica. Jeśli w trójkącie ABC (fig. 177) prosta BD , wychodząca z wierzchołka kąta A , dzieli bok przeciwległy na odcinki proporcjonalne do boków przyległych, to prosta ta jest dwój-sieczną kąta A .

Założenie. Dajmy, że $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, mamy dowieść, że

$$\angle ABD = \angle DBC.$$

Dowodzenie. Uskuteczniwszy to samo co poprzednie wy-kreślenie, znajdziemy, że $\frac{AB}{BE} = \frac{AD}{DC}$ (§ 189), a że z założenia

$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, więc $\frac{AB}{BE} = \frac{AB}{BC}$, skąd $BE = BC$, a zatem $\angle BEC = \angle BCE$ (§ 85, wn. 3); lecz $\angle BEC = \angle ABD$, $\angle BCE = \angle DBC$, więc $\angle ABD = \angle DBC$.

193. Zadanie. Do trzech danych prostych a, b, c (fig. 178), zna-leźć czwartą proporcjonalną, t. j. znaleźć taką prostą x , aby $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

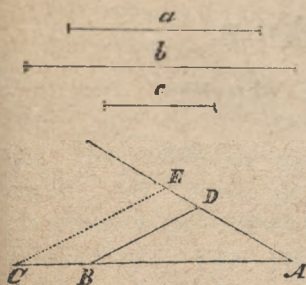


Fig. 178.

Rozwiązanie. Wykreśla się kąt do-wolny A , odcina się na jego ramionach $AB = a$, $AC = b$ i $AD = c$ i prowadzi prostą EC równoległą do BD ; prosta AE będzie szukaną czwartą pro-porcjonalną. Jakoż, na zasadzie § 189

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \text{ czyli } \frac{a}{b} = \frac{c}{AE}.$$

194. Zadanie. Daną prostą podzielić w danym stosunku.

Rozwiązanie. Chcąc daną prostą podzielić w danym stosunku, np. $5 : 7$, dość będzie podzielić ją na $7 + 5$ równych części (§ 129), wtedy odcinki zawierające siedm i pięć takich równych części będą szukanyimi odcinkami.

195. Pytania i zadania. W trójkącie ABC bok $AB=8$ metr., $AC=11$ m.; z punktu D prostej AB , odległego od A na $2,5$ m., poprowadzono prostą DE równoległą do BC — obliczyć odcinki AE i EC . W trójkącie ABC z punktu D , dzielącego bok AB w stosunku $5 : 3$, poprowadzono prostą DE równoległą do BC — obliczyć odcinki AE i EC boku AC , którego długość $=2,28$ m. W trójkącie ABC bok $AB=21,7$ m., $AC=17,36$ m.; prosta DE odcina od tych boków długości $AD=15,5$ m. i $AE=12,4$ m.; — wyznaczyć: jakie jest położenie prostej DE względem GC . W trójkącie ABC bok $AB=3\frac{1}{3}$ arsz., bok $AC=7\frac{1}{7}$ ar.; prosta DE odcina długości $AD=2$ arsz. i $AE=4\frac{2}{7}$ arsz. — jakie jest położenie DE względem BC . Daną prostą podzielić w stosunku $5 : 7$. Dowieść, że proste wychodzące z jednego punktu dzielą się dwiema równoległymi na części proporcjonalne. W trójkącie ABC bok $AB=21,7$ m., $AC=15,5$ m., $BC=29,76$ — wyznaczyć: na jakie odcinki dwójsieczna kąta A dzieli bok BC . To samo zadanie dla $AB=2\frac{2}{3}$ st., $AC=8\frac{4}{5}$ st., $BC=7\frac{2}{7}$ st. Dowieść, że prosta AD , dzieląca kąt zewnętrzny trójkąta ABC na dwie równe części, przecina przedłużony bok BC w punkcie E , mającym tę własność, że $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{BC}$ (dowodzenie takie samo jak i w § 191). Daną prostą AB podzielić w stosunku $3 : 4 : 5$.

2. Podobieństwo trójkątów.

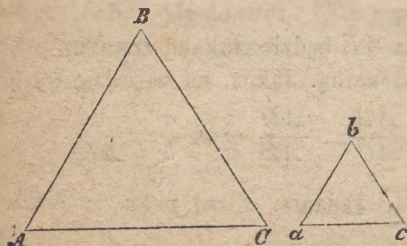


Fig. 179.

196. Określenie. Dwa trójkąty ABC i abc (fig. 179) nazywają się podobnymi, gdy mają kąty równe. Boki, leżące naprzeciwko kątów równych, nazywają się odpowiednimi. Jeśli np. $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$, to boki AB i ab , AC i ac , BC i bc ,

nazywają się *odpowiednymi*. Dla oznaczenia podobieństwa trójkątów używamy znaku ∞ ; tak np. $ABC \infty abc$ oznacza, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta abc .

Z samego określenia podobieństwa trójkątów wynika, że:

1-sze. Dwa trójkąty ukośnokątne są do siebie podobne, gdy mają po dwa kąty równe każdy każdemu.

2-re. Dwa trójkąty prostokątne są do siebie podobne, gdy mają po jednym kącie ostrym równym.

3-cie. Jeśli w trójkącie ABC (fig. 180) poprowadzimy prostą DE równoległą do BC , to otrzymamy trójkąt

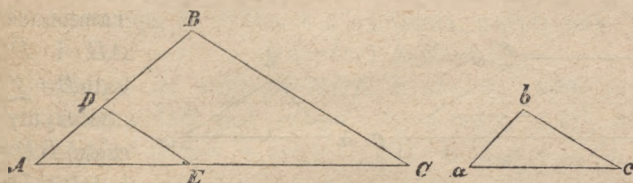


Fig. 180.

ADE podobny do trójkąta ABC , gdyż $\angle ADE = \angle ABC$, $\angle AED = \angle ACB$ (§ 70,3).

4-te. Dwa trójkąty, mające boki równoległe, albo prostopadłe, jeden do drugiego, są podobne. Jakoż, kąty odpowiednie, zawarte między takimi bokami są albo równe, albo spełniające do dwu prostych (§ 70,4). Lecz widocznem jest, że dwa kąty pierwszego trójkąta nie mogą być oba spełniającymi do dwu prostych kątów drugiego, bo wtedy suma wszystkich kątów w obydwu trójkątach przewyższałaby cztery kąty proste, więc dwa kąty jednego trójkąta muszą być równe dwu kątom drugiego. Zatem dwa dane trójkąty, mając kąty odpowiednio równe, są podobne.

197. **Twierdzenie.** W trójkątach podobnych boki odpowiednie są proporcjonalne.

Założenie. Trójkąt (fig. 180) $ABC \infty \triangle abc$, t.j. $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$; należy dowieść, że

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}.$$

Dowodzenie. Odkładając na bokach AB i AC odcinki AD i AE odpowiednio równe ab i ac , i połączymy punkty D i E prostą DE , znajdziemy, że dwa trójkąty ADE i abc mające po dwa boki AD i ab , AE i ac równe i $\angle A = \angle a$, są sobie równe (§ 84); stąd wypada, że $\angle ADE = \angle b$, a że $\angle B = \angle b$, więc $\angle ADE = \angle B$ i prosta $DE \parallel BC$ (§ 66). Z równoległości zaś tych prostych wypada (§ 18¹), że

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}, \text{ czyli } \frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}.$$

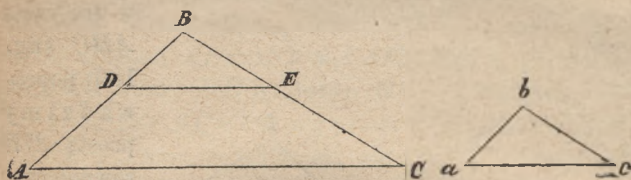


Fig. 181.

Jeżeli teraz (fig. 181) na ramionach AB i BC kąta $B = \angle b$ odłożymy części $BD = ba$ i $BE = bc$ i punkty D i

E połączymy prostą DE , znajdziemy, rozumując tak jak poprzednio,

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE}, \text{ czyli } \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$

Porównyując tę proporcję z poprzednią, znajdziemy

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$$

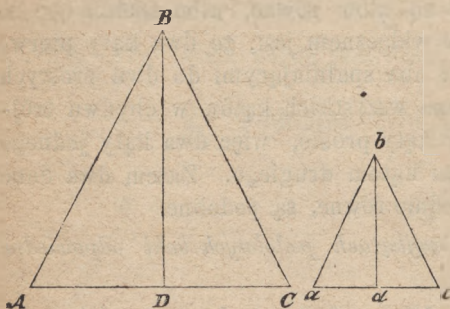


Fig. 182.

Wniosek. W trójkątach podobnych ABC i abc (fig. 182) wysokości mają się do siebie w stosunku boków odpowiednich.

Jakoż, ponieważ $ABC \sim abc$, więc $\angle A = \angle a$, a że $\angle D = \angle d$, jako proste, więc trójkąt $ABD \sim abd$ (§ 196,

2) i
$$\frac{BD}{bd} = \frac{AB}{ab}.$$

198. Twierdzenie. Dwa trójkąty, mające boki proporcjonalne, są podobne.

Założenie. Dajmy, że $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$ (fig. 181), należy dowieść, że trójkąty ABC i abc są równokątne, czyli podobne.

Dowodzenie. Na boku AB odłóżmy część $BD=ba$ i poprowadźmy ośną DE równoległą do AC . Trójkąt $BDE \sim ABC$ (§ 196, 3) i dla tego będziemy mieli

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}.$$

Porównawszy te stosunki z danymi

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}$$

i uwzględniając, że $BD=ab$ z podłożenia, znajdziemy

$$BE=bc \text{ i } DE=ac;$$

stąd wypada, że trójkąty BDE i abc są sobie równe (§ 86), a że trójkąt BDE jest równokątny z trójk. ABC , więc i trójk. abc jest równokątny z trójk. ABC , t. j. $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$.

199. **Twierdzenie.** Dwa trójkąty, mające kąt równy zawarty między bokami proporcjonalnymi, są podobne.

Założenie. Niech będą dwa trójkąty ABC i abc (fig. 181), w których $\angle B = \angle b$ i $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$; należy dowieść, że te trójkąty są podobne.

Dowodzenie. Na boku AB weźmy długość $BD=ba$ i poprowadźmy równoległą DE do AC . Trójkąty podobne BDE i ABC dają proporcycje $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE}$, czyli $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{BE}$, gdyż $DB=ab$ z wykreślenia; lecz z założenia $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$, więc $BE=bc$. Dowodzi to, że trójkąty BDE i abc , mające kąt równy zawarty między bokami odpowiednio równymi, są równe. A że trójkąt BDE jest podobny trójkątowi ABC (§ 196, 3), więc trójkąty ABC i abc są podobne.

200. **Twierdzenie.** Obwody trójkątów podobnych mają się do siebie, jak boki odpowiedn.

Dowodzenie. Jakoż, dajmy, że dwa trójkąty ABC i abc (fig. 181) są podobne. Z ich podobieństwa wynika, że

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CA}{ca},$$

stąd

$$\frac{AB+BC+CA}{ab+bc+ca} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CA}{ca}.$$

201. Twierdzenie. Pola dwu trójkątów podobnych mają się do siebie, jak kwadraty z boków odpowiednich.

Dowodzenie. Dajmy naprzód, że dwa trójkąty ABC i abc (fig. 182) mają po jednym kącie A i a równym. Poprowadziwszy wysokości BD i bd i oznaczając pola trójkątów przez P i p , mamy

$$\frac{P}{p} = \frac{AC \cdot BD}{ac \cdot bd} \quad (\S 176),$$

lecz $ABD \sim abd$ (§ 196, 3), więc $\frac{BD}{bd} = \frac{AB}{ab}$, a zatem

$$\frac{P}{p} = \frac{AC \cdot AB}{ac \cdot ab},$$

t. j. pola trójkątów, mających kąt równy, mają się do siebie w stosunku iloczynów z boków stanowiących ramiona tego kąta.

Jeśli teraz przyjmiemy, że trójkąty ABC i abc są podobne, otrzymamy $\frac{AC}{ac} = \frac{AB}{ab}$. Podstawiając więc w proporcji

$$\frac{P}{p} = \frac{AC \cdot AB}{ac \cdot ab} \quad \text{zamiast} \quad \frac{AC}{ac} \quad \text{wartość jego} \quad \frac{AB}{ab}, \quad \text{otrzymamy}$$

$$\frac{P}{p} = \frac{AB^2}{ab^2}.$$

Przykład. Przypuśćmy, że pole trójkąta $ABC = 25$ st. kw. i że stosunek $\frac{AB}{ab} = \frac{5}{3}$, trzeba obliczyć pole abc .

Na zasadzie poprzedniego twierdzenia

$$p = \frac{9}{25} \cdot P = \frac{9}{25} \cdot 25 = 9 \text{ st. kw.}$$

Wniosek. Wyciągając pierwiastki kwadratowe ze wszystkich wyrazów proporcji $\frac{P}{p} = \frac{AB^2}{ab^2}$, otrzymamy

$$\frac{AB}{ab} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{p}},$$

t. j. boki dwu trójkątów podobnych mają się w stosunku pierwiastków kwadratowych z pól tych trójkątów.

202. **Pytania i zadania.** Jakie trójkąty nazywają się podobnymi? Jaka jest własność trójkątów podobnych? Kiedy dwa trójkąty prostokątne są podobne? Boki trójkąta ABC są 14 stóp. 6 cali, 19 st. 6 c., 26 st. 6 c., najmniejszy bok trójkąta $abc \sim ABC$ równa się 4 st. 10 c.;—obliczyć pozostałe boki trójkąta abc . Boki trójkąta są: $43\frac{1}{12}$ c., $90\frac{5}{12}$ c., $103\frac{1}{3}$ c.; prostą równoległą do pierwszego boku poprowadzono tak, ażeby odcinek jej, zawarty pomiędzy dwoma drugimi bokami, równał się $2\frac{5}{6}$ c.;—obliczyć: w jakich odległościach od wierzchołka kąta przeciwległego przecina ona drugie dwa boki trójkąta. Podstawy trapezu są: 13,2 m. i 17,6 m., jeden z boków równa się 7,7 m.;—obliczyć: o jaką długość należy przedłużyć ten bok, aby przeciął się z przedłużeniem drugiego boku. Boki równoległoboku są odpowiednio równe 9 st. i 3 st.; odległość boków, mających długości 9 stóp, równa się 3 st.;—obliczyć odległość dwu pozostałych boków. Jeden z boków trójkąta ma $3\frac{2}{3}$ cala, a różnica pomiędzy dwoma drugimi bokami równa się 2,25 cala; w trójkącie danemu podobnym różnica boków odpowiednich równa się 2,7 c., obwód zaś równa 13,1 c.;—obliczyć boki tego ostatniego trójkąta. W trójkącie dane są: bok a , wysokość h poprowadzona na bok a i odległość p od a odcinka, zawartego pomiędzy bokami b i c i poprowadzonego równoległe do a ;—obliczyć ten odcinek, jeśli 1) $a=19,2$; $h=17,6$; $p=7,7$; 2) $a=8$ decim., $h=1,5$ dec., $p=0,8$ dec. Tyka długości 8 m., pionowo ustawiona, rzuca cień 2,4 m.;—obliczyć wysokość przedmiotu, który w tym samym czasie rzuca cień długości 12,6 m. Dla wynalezienia wysokości jakiegoś przedmiotu pionowego AB należy obrać sobie punkt C , któregooby odległość od spodu A przedmiotu mierzyć można, potem ustawić pionowo w C tykę CD i położyć się za nią nawznak w ten sposób, aby oko ujrzało w prostym kierunku i koniec tyki D i wierzchołek przedmiotu B . Stanowisko oka E oznacza się palikiem i wymierza odległości EC i EA ;—obliczyć wysokość tego przedmiotu, jeśli: $CD=1,8$ m., $CE=1,5$ m. $AE=13,5$ m. W trójkąt, którego podstawa równa się 8 m., a wysokość 6 m. i którego wszystkie kąty są ostre, wpisano prostokąt, z podstawą leżącą na podstawie

trójkąta;—obliczyć podstawę i wysokość prostokąta, jeśli wiemy, że stosunek ich długości $= \frac{5}{4}$. Obliczyć obwód trójkąta abc , jeśli wiadomo, że obwód trójkąta podobnego $ABC = 18,4$ m., a stosunek boków odpowiednich równa się $4:5$. Pole trójkąta $S = 148$ m. $\square$; jeden z jego boków $a = 6$, bok odpowiedni trójkąta podobnego $a_1 = 9$;—obliczyć pole drugiego trójkąta. To samo zadanie w założeniu, że $a = 18,2$ m.; $a_1 = 9,8$ m.; $S = 84,5$ m. $\square$. Stosunek pól dwu trójkątów podobnych $= \frac{25}{16}$ —obliczyć boki mniejszego z nich, jeśli boki większego są: 16, 10 i 12 st. Trójkąt $ABC \sim abc$; boki trójkąta ABC są: 18, 12; 15, 18; 16, 25 m.;—obliczyć boki trójkąta abc , jeśli pole jego równa się 144 m. kw. Dwa trójkąty mają po kącie równym; boki, zawierające ten kąt, są w pierwszym trójkącie 17,6 m. i 13,2 m.; w drugim 8,4 m. i 11,2 m.; pole pierwszego $= 116,16$ m. kw.;—obliczyć pole drugiego.

2. Twierdzenia wypływające z podobieństwa trójkątów.

203. Twierdzenie. Jeśli w trójkącie prostokątnym, z wierzchołka kąta prostego poprowadzimy prostopadłą na przeciwprostokątną, wtedy:

1-sze. Trójkąt rozkłada się na dwa trójkąty podobne do niego, a tem samem podobne pomiędzy sobą.

2-gie. Każda przyprostokątna jest średnią proporcjonalną pomiędzy przeciwprostokątną i odcinkiem, jej przyległym.

3-cie. Prostopadła jest średnią proporcjonalną pomiędzy odcinkami przeciwprostokątnej.

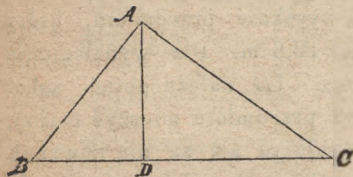


Fig. 183.

Założenie. Niech ABC (fig. 183) będzie trójkątem prostokątnym, w którym z wierzchołka A kąta prostego poprowadzono prostopadłą AD na przeciwprostokątną BC ; mamy dowieść, że

1) trójk. $ABD \sim$ trójk. ABC ; tr. $ADC \sim$ r. ABC .

$$2) \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

$$3) \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

Dowodzenie. 1-sze. Trójkąty prostokątne ABD i ABC , mające kąt ostry B wspólny, są podobne (§ 196, 2); tak samo trójkąty prostokątne ADC i ABC , mające kąt ostry C wspólny, są także podobne. Zatem dwa trójkąty ABD i ADC , podobne trójkątowi ABC , są podobne pomiędzy sobą.

2-gie. Z podobieństwa trójkątów ABD i ABC otrzymamy

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD};$$

z podobieństwa zaś trójkątów ADC i ABC wypada, że

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

3-cie. Z podobieństwa trójkątów ABD i ADC wypływa, że

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

Wniosek 1-szy. Z proporcji $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}$ wypada $BC \cdot BD =$

AB^2 , z proporcji zaś $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$ wypada $BC \cdot DC = AC^2$; dodaw-

szy do siebie te dwie równości, otrzymamy $BC \cdot BD + BC \cdot DC = AB^2 + AC^2$; czyli $BC \cdot (BD + DC) = AB^2 + AC^2$,

t. j. $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Otrzymujemy tym sposobem drugie dowodzenie twierdzenia Pytagorasa.

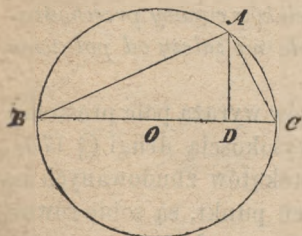


Fig. 184.

Wniosek 2-gi. Jeśli z punktu A (fig. 184), dowolnie wziętego na okręgu, poprowadzimy prostopadłą AD na średnicę BC i cięciwy AB i AC do punktów krańcowych tej średnicy, to trójkąt ABC będzie prostokątny, gdyż $\angle A$ jest prosty (§ 153, wn. 2). Więc na zasadzie twierdzenia poprzedniego:

1-sze. Każda z cięciw jest średnią proporcjonalną pomiędzy średnicą i odcinkami przyległymi, t. j.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

2-gie. Prostopadła AD jest średnią proporcjonalną pomiędzy odcinkami średnicy, t. j.

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

204. **Twierdzenie.** Dwie cięciwy przecinają się w kole na części odwrotnie proporcjonalne.

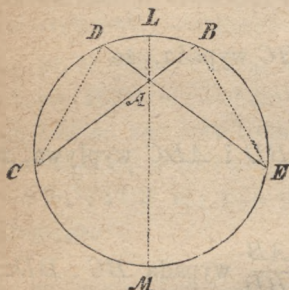


Fig. 185.

Dowodzenie. Niech CB i ED (fig. 185) będą dwie cięciwy, przecinające się w punkcie A . Połączymy punkty B i E , jakoteż C i D prostymi BE i CD , otrzymamy dwa trójkąty ACD i AED podobne, gdyż $\angle D = \angle B$, jako mające za miarę połowę łuku CME (§ 153); $\angle C = \angle E$, jako mające za miarę połowę łuku DLB . Z podobieństwa zaś tych trójkątów wypada, że

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB}.$$

Z własności proporcji wypada, że

$$AC \cdot AB = AE \cdot AD.$$

Oczywiście, że jakakolwiek inna cięciwa LM , przechodząc przez punkt A , dzieli się w tym punkcie na odcinki AL i AM , dla których $AL \cdot AM = AE \cdot AD$. Wypada stąd, że powyższe twierdzenie można jeszcze tak wyrazić: *Iloczyn odcinków cięciwy przechodzącej przez jeden i ten sam punkt wewnątrz koła nie zależy od położenia cięciwy, czyli jest ilością stałą.*

Wniosek. Ponieważ iloczyn dwu odcinków wyraża pole prostokąta, którego podstawą jest jeden odcinek, a wysokością drugi (§ 173), więc widzimy stąd, że pola wszystkich prostokątów zbudowanych na odcinkach cięciw, przechodzących przez jeden punkt, są sobie równe.

205. **Twierdzenie.** Dwie sieczne koła są odwrotnie proporcjonalne do swoich odcinków zewnętrznych.

Dowodzenie. Niech AC i AE (fig. 186) będą dwie sieczne, przechodzące przez punkt A . Połączymy punkty B i E , jakoteż C i D , prostymi BE i CD , otrzymamy dwa trójkąty podobne ACD

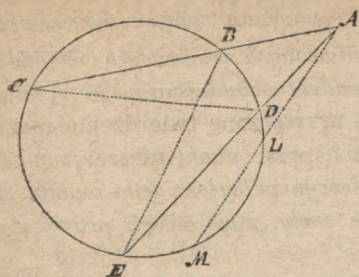


Fig. 186.

i ABE , gdyż mają kąt A wspólny, $\angle C = \angle E$ (§ 153). Z podobieństwa tych trójkątów wypada, że

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB}.$$

Z własności proporcji wypada
 $AC \cdot AB = AD \cdot AE$.

Poprowadziwszy dowolną sieczną AM , otrzymamy $AM \cdot AL = AD \cdot AE$. Wypada stąd, że *iloczyn siecznej przez jej odcinek zewnętrzny*

nie zależy od położenia siecznej, czyli jest ilością stałą.

Wniosek. Pola prostokątów zbudowanych na siecznych, przechodzących przez jeden i ten sam punkt i na ich odcinkach zewnętrznych, są sobie równe.

206. Twierdzenie. *Jeśli z punktu wziętego zewnątrz koła poprowadzimy styczną i sieczną, to styczna będzie średnią proporcjonalną między sieczną i jej odcinkiem zewnętrznym.*

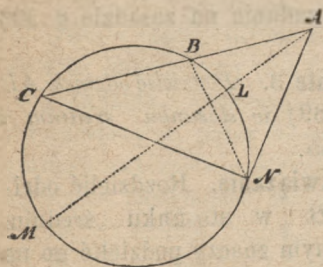


Fig. 187.

Dowodzenie. Niech AN (fig. 187) będzie styczną, AC sieczną przechodzącymi przez punkt A . Poprowadźmy proste BN i CN , a otrzymamy dwa trójkąty podobne CAN i ABN , gdyż kąt A jest wspólny, $\angle ACN = \angle ANB$, jako mające za miarę połowę łuku BN (§§ 153, 159). Z podobieństwa tych trójkątów wypada, że

$$\frac{AC}{NA} = \frac{NA}{AB}.$$

Z własności proporcji wynika, że
 $NA^2 = AC \cdot AB$.

Poprowadziwszy przez punkt A dowolną sieczną AM , otrzymamy $AM \cdot AL = AN^2$, t. j. *iloczyn wszystkich siecznych, przechodzących*

przez dany punkt przez ich odcinki zewnętrzne są ilością stałą, która równa się kwadratowi stycznej do koła poprowadzonej z tego punktu.

Wniosek. Pola prostokątów, zbudowanych na siecznych i ich odcinkach wewnętrznych, równają się polu kwadratu zbudowanego na stycznej.

Uwaga. Wszystkie trzy wyżej przytoczone twierdzenia można złączyć w jedno, a mianowicie: Jeżeli przez punkt płaszczyzny koła poprowadzimy prostą do koła, to iloczyn odległości tego punktu od dwu punktów przecięć z kołem będzie stały, jakiegokolwiek prosta weźmie położenie.

Iloczyn ten matematycy nazywają potęgą punktu względem koła.

Zadanie 1. Znaleźć średnią proporcjonalną pomiędzy dwoma odcinkami a i b .

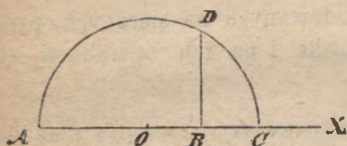


Fig. 188.

Zadanie 2. Rozwiązać powyższe zadanie na zasadzie § 203 i na zasadzie § 206.

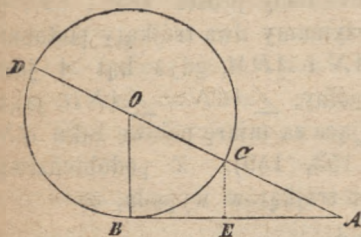


Fig. 189.

Rozwiązanie. Na prostej nieograniczonej AX (fig. 188), weźmy $AB=a$ i $BC=b$; na sumie AC , jako na średnicy, nakreślimy półokrąg ADC i z punktu B wyprowadźmy do średnicy prostopadłą BD . Prosta BD będzie średnioproporcjonalną szukaną (§ 203, wn. 2).

Zadanie 3. Podzielić odcinek AB (fig. 189) w stosunku średnim i skrajnym.

Rozwiązanie. Rozdzielić odcinek AB w stosunku średnim i skrajnym znaczy podzielić go na dwie takie części, aby część większa AE była średnioproporcjonalną pomiędzy całym odcinkiem AB i częścią jego mniejszą EB .

Dla rozwiązania tego zadania wystawmy z punktu B prostopadłą BO do AB i równą jej połowie i poprowadźmy prostą AO ; potem z punktu O , jako środka promieniem OB nakreślimy okrąg, który przetnie prostą AO

w punkcie C ; nakoniec z punktu A jako środka promieniem AC nakreślmy łuk CE , który przetnie prostą AB w punkcie szukanym E .

Jakoż na zasadzie § 206

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

skąd

$$\frac{AD-AB}{AB} = \frac{AB-AC}{AC}.$$

Lecz ponieważ $AB = 2BO = CD$, więc $AD-AB = AD-CD = AC = AE$, $AB-AC = AB-AE = EB$, więc

$$\frac{AE}{AB} = \frac{EB}{AE}, \text{ albo, co na jedno wychodzi, } \frac{AB}{AE} = \frac{AE}{EB}.$$

Wniosek. Oznaczając odcinek AB przez a , łatwo obliczyć wielkość AE .

Jakoż (§ 182) $AO^2 = AB^2 + BO^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5}{4}a^2$, skąd

$$AO = \frac{a}{2}\sqrt{5}; \text{ że zaś } AE = AC = AO - OC = AO - \frac{a}{2}, \text{ więc } AE = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Uwaga. Dzielenie powyższe nazywa się *dzieleniem boskiem* lub *złotem* (sectio divina v. sectio aurea). Przekonano się, że dzielenie to napotyamy w dzielach natury i sztuk.

Zadania. Oznaczając przez a przeciwprostokątną, przez b i c przyprostokątne, przez h —prostopadłą, spuszczoną z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną, przez p i q odcinki przeciwprostokątnej, rozwiązać następujące zadania: Obliczyć a , p , q i h , jeśli: 1) $b=24$; $c=45$; 2) $b=3,6$; $c=4,8$; 3) $b=2,977$; $c=19,236$. Znaleźć c , h , p i q , jeśli $a=7,09$ m. i $b=6,45$ m. Znaleźć q , a , p i c , jeśli $b=126,3$ m., $h=84,5$ m. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego są 5 i 12 s.—obliczyć odległość wierzchołka kąta prostego od przeciwprostokątnej. Prostopadła spuszczone z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną dzieli ją na dwa odcinki 3,6 m. i 6,4 m.—obliczyć przyprostokątne. Z końca A przeciwprostokątnej AC trójkąta prostokątnego wystawiono do niej prostopadłą aż do przecięcia się z przedłużoną przyprostokątną BC w punkcie M ;—obliczyć długość MB , wiedząc, że $AB = 7$ m., a $BC = 5$ m. Przyprostokątne trójkąta pro-

stokątnego są 8 m. i 6 m.—obliczyć długość odcinków, na które przeciwprostokątną dzieli dwójściana kąta prostego. Prostopadła spuszczone z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną, mająca długości $7\frac{1}{17}$ stopy, dzieli tę przeciwprostokątną na dwa odcinki, będące w stosunku 64:225;—obliczyć przeciwprostokątną. Promień koła równa się $8\frac{1}{2}$ stopy; z punktu okręgu oddalonego od końca średnicy na $11\frac{1}{3}$ st. spuszczone na nią prostopadłą;—obliczyć odcinki średnicy, na które prostopadła ją dzieli. Przyprostokątna trójkąta prostokątnego równa się 23,74 m. i tworzy z przeciwprostokątną kąt 60° —obliczyć przeciwprostokątną. (Opisując koło na trójkącie, widzimy, że druga przyprostokątna jest bokiem trójkąta równobocznego wpisanego w koło). Dwie cięciwy przecinają się wzajemnie w ten sposób, że odcinki jednej są 1,5 i 2,8; jeden zaś z odcinków drugiej cięciwy jest $3\frac{1}{2}$;—obliczyć drugi odcinek. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła tak, że odcinki jednej są 21,25 cala i 11,2 c., odcinki zaś drugiej cięciwy są w stosunku 2 : 3;—obliczyć długości odcinków drugiej cięciwy. W kole poprowadzono cięciwę 0,8 m., z jednego końca tej cięciwy poprowadzono średnicę, a z drugiego prostopadłą do tej średnicy, w skutek czego średnica została podzieloną na dwie części, z których część nieprzylegająca do cięciwy równa się 1,2 m.—obliczyć długość średnicy i cięciwy, przylegających do danego odcinka średnicy. Obliczyć średnicę koła, jeśli cięciwa, przechodząca przez jeden jej koniec równa się 36 c., a prostopadła spuszczone z końca cięciwy na średnicę dzieli ją na części, różnica których równa się 6 calom. Jedna z dwu siecznych koła równa się 0,072 m., a część jej zewnętrzna 0,016 m.—obliczyć drugą sieczną, jeśli jej odcinek zewnętrzny równa się 0,024 m. Promień koła równa się 3 st. 5 c.; z punktu oddalonego od środka o 4 st. 11 cali poprowadzono sieczną, którą okrąg koła dzieli na dwie równe części;—obliczyć długość siecznej. Z punktu, leżącego zewnątrz koła, poprowadzono styczną, której długość = 0,02736 m., i sieczną, której wewnętrzna część jest trzy razy większą od zewnętrznej—obliczyć sieczną. Z punktu danego zewnątrz koła poprowadzono do niego styczną i sieczną;—obliczyć długości tych linii, wiedząc, że sieczna jest większą od stycznej o 2 milimetry i że odcinek zewnętrzny siecznej równa się $3\frac{1}{2}$ milim. Przez punkt dany zewnątrz koła poprowadzić sieczną do koła tak, żeby ona została podzieloną

przez okrąg na dwie równe części (Wyobraźmy sobie z punktu poprowadzoną styczną do koła i dajmy, że szukana sieczna przecina okrąg koła w punktach B i C . Na zasadzie § 206 będzie $AM^2 = AB \cdot AC$).

$$AC = AB \cdot 2AB = 2AB^2, \text{ stąd } AB^2 = \frac{AM^2}{2} = \frac{2AM^2}{4} \text{ i } AB = \frac{AM\sqrt{2}}{2}.$$

Stąd wypada, że dla otrzymania punktu B , należy z punktu A promieniem, równym połowie boku kwadratu wpisanego w koło o promieniu AM , opisać okrąg koła; punkt jego przecięcia się z danym okręgiem będzie szukany punkt). Czy zadanie powyższe zawsze jest możliwem? Opisać okrąg koła, przechodzący przez punkty A, B i styczny do prostej MN . (Oczywiście, że dla rozwiązania tego zadania dość będzie znaleźć punkt styczności O . Lecz przedłużając prostą AB do przecięcia się z prostą MN , w punkcie L , widzimy, że punkt O znajdzie się, uwzględniając, że na zasadzie § 206 LO jest średnią proporcjonalną między LA i LB). Zbudować kwadrat równoważny: a) prostokątowi; b) równoległobokowi; c) trójkątowi; d) trapezowi; e) wielokątowi (na zasadzie średniej proporcjonalnej). Prosta, styczna do dwu okręgów, nazywa się wspólną ich styczną; styczna wspólna może być zewnętrzną lub wewnętrzną. Przyjmując, że promienie dwu danych kół są R i r , odległość zaś środków d ;—obliczyć punkty, w których wspólne styczne zewnętrzne i wewnętrzne przecinają linię środków. Dowieść na zasadzie podobieństwa trójkątów, że przez te punkty przechodzą też proste łączące końce dwu jakichkolwiek promieni równoległych w obu kołach. Wyprowadzić stąd sposób prowadzenia stycznych wspólnych do dwu kół.

4. Podobieństwo wielokątów.

208. **Określenie.** Dwa wielokąty nazywają się podobnymi, gdy mają kąty równe i boki odpowiednie proporcjonalne. Bokami odpowiednimi nazywamy boki, łączące wierzchołki kątów równych. Dwa wielokąty $ABCDEFA$ i $abcdefa$ (fig. 190) nazywają się podobnymi, gdy:

$$\angle A = \angle a, \angle B = \angle b, \angle C = \angle c, \angle D = \angle d, \angle E = \angle e, \angle F = \angle f$$

$$\text{ i } \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \frac{FA}{fa}.$$

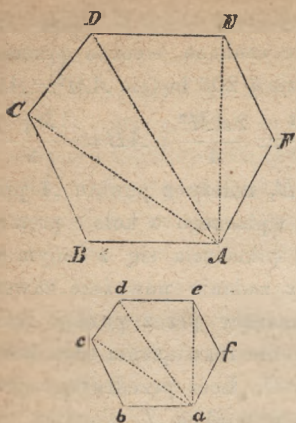


Fig. 190.

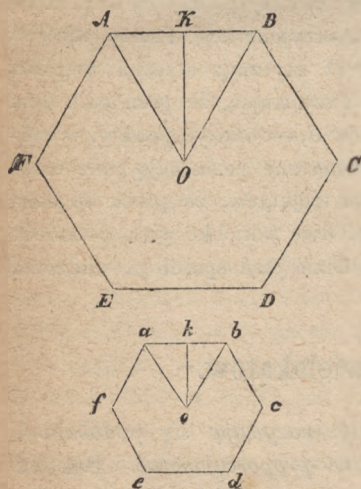


Fig. 191.

Z określenia podobieństwa wielokątów wynika, że dwa wielokąty foremne o jednakowej liczbie boków są podobne. Jakoż wiemy, że wielkość kąta wielokąta foremnego zależy tylko od liczby boków (§ 114, wniosek), a zatem w wielokątach foremnych jednoimiennych kąty są równe. Oprócz tego, z powodu równości boków wielokątów foremnych będzie (fig. 191)

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \frac{FA}{fa},$$

gdyż w tych stosunkach poprzedniki i następniki są sobie równe.

209. Twierdzenie. Dwa wielokąty podobne przekątnemi, poprowadzonymi z wierzchołków dwu kątów równych, rozkładają się na równą liczbę trójkątów podobnych i równie ułożonych.

Założenie. Dajmy, że dwa wielokąty $ABCDEF$ i $abcdef$ (fig. 190) są podobne, t. j. dajmy, że $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$, $\angle D = \angle d$, $\angle E = \angle e$, $\angle F = \angle f$

$$\text{i } \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \frac{FA}{fa},$$

naależy dowieść, że

$$\triangle ABC \sim \triangle abc, \triangle ACD \sim \triangle acd, \triangle ADE \sim \triangle ade, \\ \triangle AEF \sim \triangle aef.$$

Dowodzenie. Ponieważ z założenia

$\angle B = \angle b$ i $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$, więc na zasadzie § 199 tr. $ABC \sim \text{tr. } abc$.

Z podobieństwa tych trójkątów wynika, że $\angle ACB = \angle acb$, a że z założenia $\angle C = \angle c$, więc $\angle C - \angle ACB = \angle c - \angle acb$, czyli $\angle ACD = \angle acd$; oprócz tego z podobieństwa tych dwu trójkątów wynika, że $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}$, a że z założenia $\frac{AB}{ab} = \frac{CD}{cd}$, więc $\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd}$, więc dwa trójkąty ACD i acd , mające po kącie równym i zawartym pomiędzy bokami proporcjonalnymi, są podobne (§ 199). Dowiedzie się tak samo podobieństwa trójkątów pozostałych.

210. Twierdzenie odwrotne. Jeżeli dwa wielokąty dzielą się przekątnymi, poprowadzonymi z wierzchołków kątów równych, na jednakową liczbę trójkątów podobnych i podobnie ułożonych, to te dwa wielokąty są podobne.

Założenie. Niech w dwu wielokątach $ABCDEF A$ i $abcdef a$ (fig. 190) będzie:

tr. $ABC \sim \text{tr. } abc$, tr. $ACD \sim \text{tr. } acd$, tr. $ADE \sim \text{tr. } ade$, tr. $AEF \sim \text{tr. } aef$; należy dowieść, że wielokąty $ABCDEF A$ i $abcdef a$ są podobne.

Dowodzenie. Z podobieństwa trójkątów ABC i abc wynika, że $\angle B = \angle b$ i $\angle ACB = \angle acb$; z podobieństwa zaś trójkątów ACD i acd wynika, że $\angle ACD = \angle acd$, więc $\angle ACB + \angle ACD = \angle acb + \angle acd$, czyli $\angle C = \angle c$. W ten sam sposób dowiedzie się, że $\angle D = \angle d$, $\angle E = \angle e$ i t. d.

Oprócz tego z podobieństwa trójkątów ABC i abc wynika, że

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac};$$

z podobieństwa trójkątów ACD i acd wynika, że

$$\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd} = \frac{AD}{ad};$$

z podobieństwa trójkątów ADE i ade otrzymamy

$$\frac{AD}{ad} = \frac{DE}{de} = \frac{AE}{ae};$$

nakoniec z podobieństwa trójkątów AEF i aef otrzymamy

$$\frac{AE}{ae} = \frac{AF}{af} = \frac{FE}{fe}.$$

Porównyując te proporcycje, otrzymamy

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \frac{FA}{fa}.$$

Więc wielokąty $ABCDEF$ i $abcdef$, mające kąty równe i boki odpowiednie proporcjonalne, są podobne.

Uwaga. Stosunek dwu boków odpowiednich w wielokątach podobnych nazywa się *stosunkiem podobieństwa* tych dwu wielokątów.

Gdy stosunek podobieństwa równa się *jedności*, wtedy dwa wielokąty stają się *równymi*.

211. Twierdzenie. *Obwody dwu wielokątów podobnych mają się jak boki odpowiednie, a ich pola jak kwadraty z tych boków.*

Dowodzenie 1-sze. Ponieważ w wielokątach podobnych $ABCDEF$ i $abcdef$ ma miejsce

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef} = \frac{FA}{fa},$$

więc na zasadzie własności znanej proporcji

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EF+FA}{ab+bc+cd+de+ef+fa} = \frac{AB}{ab}.$$

2-ie. Ponieważ dwa wielokąty podobne składają się z jednakowej liczby trójkątów podobnych i podobnie ułożonych (§ 209), więc na zasadzie § 201 będzie

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{AB^2}{ab^2}, \quad \frac{ACD}{acd} = \frac{CD^2}{cd^2}, \quad \frac{ADE}{ade} = \frac{DE^2}{de^2}, \quad \frac{AEF}{aef} = \frac{EF^2}{ef^2},$$

$$\text{a że } \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EF}{ef},$$

$$\text{więc } \frac{ABC}{abc} = \frac{ACD}{acd} = \frac{ADE}{ade} = \frac{AEF}{aef},$$

zatem na zasadzie znanej własności proporcji

$$\frac{ABC+ACD+ADE+AEFA}{abc+acd+ade+aefa} = \frac{ABC}{abc} = \frac{AB^2}{ab^2},$$

$$\text{czyli } \frac{ABCDEF}{abcdef} = \frac{AB^2}{ab^2}.$$

c. b. d. o.

Wniosek 1-szy. Wyciągając pierwiastki kwadratowe z obu stron tego równania, otrzymamy

$$\frac{AB}{ab} = \frac{\sqrt{ABCDEF A}}{\sqrt{abcdef a}},$$

t. j. boki odpowiednie wielokątów podobnych są w stosunku pierwiastków kwadratowych z ich pól.

Wniosek 2-gi. Obwody wielokątów foremnych o równej liczbie boków są proporcjonalne do promieni albo do apotem. W samej rzeczy ponieważ takie wielokąty są podobne (§ 208), więc

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EF+FA}{ab+bc+cd+de+ef+fa} = \frac{AB}{ab}.$$

Jeśli ze środków O i o (fig. 191) poprowadzimy prostopadłe OK i ok do boków AB i ab i połączymy wierzchołki A i B , a i b ze środkami O i o , otrzymamy dwa trójkąty podobne AOB i aob , gdyż $\angle O = \angle o$, $\angle OAB = \angle oab$, ponieważ $\angle OAB = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle oab = \frac{1}{2}\angle a$. Z podobieństwa zaś tych trójkątów wynika, że

$$\frac{AB}{ab} = \frac{OA}{oa} = \frac{OK}{ok} \quad (\S\S 197, 197 \text{ wn.}).$$

Wypada stąd, że

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EF+FA}{ab+bc+cd+de+ef+fa} = \frac{AB}{ab} = \frac{OA}{oa} = \frac{OK}{ok}.$$

5. Niektóre zadania, odnoszące się do wielokątów foremnych.

212. **Zadanie 1.** Mając promień koła i bok wielokąta wpisanego, znaleźć bok wielokąta opisanego o równej liczbie boków.

Rozwiązanie. Niech będzie wielokąt foremny $ABCDEF A$ (fig. 192) wpisany w koło. Poprowadziwszy ze środka O wielokąta prostopadłe do jego boków i przedłużywszy je do przecięcia się z okręgiem w punktach $M, N, P, \dots$ prowadzimy w tych punktach styczne do okręgu; tym sposobem utworzy się wielokąt $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1 A_1$, którego kąty będą równe kątom danego wielokąta, gdyż boki ich są równoległe do siebie (§§ 166 wn. 1. 72). Oprócz tego i boki tego wielokąta będą równe pomiędzy sobą, gdyż, uważając dwa trójkąty prostokątne OMB_1 $OB_1 N_1$ w których przeciwprostokątna OB_1 jest wspólna, przypro-

$$\frac{A_1 B_1}{AB} = \sqrt{\frac{OM}{OA^2 - \frac{AB^2}{4}}}$$

Oznaczając przez n liczbę boków wielokąta, przez a — bok jego, przez b — bok wielokąta opisanego równoimiennego, a przez r promień koła, znajdziemy, że powyższa proporcycja przybiera kształt

$$\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{\frac{r}{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

skąd

$$b_n = \sqrt{\frac{a_n r}{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

Przykład. Obliczyć bok sześciokąta foremnego opisanego na kole, którego promień równa się r . Ponieważ w tym przypadku $a_6 = r$ (§ 168),

$$\text{więc } b_6 = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = \sqrt{\frac{r^2}{\frac{3r^2}{4}}} = \frac{r^2}{\frac{r\sqrt{3}}{2}} = \frac{2r}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}r\sqrt{3}.$$

213. **Zadanie 2.** Mając dany promień koła i bok wielokąta foremnego wpisanego, znaleźć bok wielokąta foremnego wpisanego o podwójnej liczbie boków.

Rozwiązanie. Niech $AB = a_n$ (fig. 193) będzie bokiemi wielokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu r . Poprowadziwszy prostopadłą OD do boku AB , przedłużywszy ją do przecięcia się z okręgiem koła w punkcie C i połączymy punkt C z punktem A prostą AC znajdziemy, że $AC = a_{2n}$ będzie bokiemi wielokąta foremnego wpisanego o podwójnej liczbie boków.

Z trójkąta ostrokątnego OAC otrzymamy (§ 184)

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD;$$

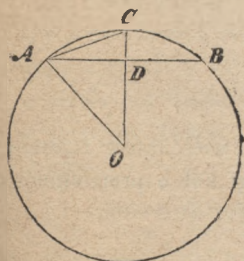


Fig. 193.

z trójkąta zaś prostokątnego OAD

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{OA^2 - \frac{AB^2}{4}}.$$

Podstawiając tę wartość w powyższe równanie i używając znakowania wyżej podanego, otrzymamy

$$a_{2n}^2 = 2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}},$$

skąd

$$a_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}}.$$

Przykład 1. Obliczyć bok ośmiokąta foremnego wpisanego w koło, którego promień równa się r . W tym przypadku $a_4 = r\sqrt{2}$ (str. 130 zad. V), więc

$$a_8 = \sqrt{2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - 2\frac{r^2}{4}}} = \sqrt{2r^2 - 2r \sqrt{\frac{r^2}{2}}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

2. Obliczyć bok dwunastokąta foremnego wpisanego w koło, którego promień równa się 10 m. W tym przypadku $a_6 = 10$, więc

$$a_{12} = \sqrt{2r^2 - 2r \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ = 10 \sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ m.}$$

Dodatek.

Obliczenie π .

Oznaczając przez P i P' obwody dwu wielokątów foremnych o jednakowej liczbie boków wpisanych w okręgi kół o promieniach R i R' , mamy (§ 211, wn. 2)

$$\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}, \text{ albo } \frac{P}{R} = \frac{P'}{R'}.$$

Ta proporcja istnieje jakkolwiek małe są boki dwu wielokątów wpisanych, lecz ponieważ z powiększeniem się liczby boków obwody wielokątów coraz bardziej się zbliżają do okręgów C i C_1 , więc będzie

$$\frac{C}{R} = \frac{C_i}{R_i}, \text{ czyli } \frac{C}{2R} = \frac{C_i}{2R_i},$$

to jest stosunek okręgu koła do średnicy jest liczbą stałą, t. j. jednakową dla wszystkich kół. Stosunek ten nazywamy π i dowodzi się, że jest liczbą niewspółmierną.

Z równania $\pi = \frac{C}{2R}$ kładąc $R=1$, wypada $\pi = \frac{C}{2}$, t. j. π równa się połowie okręgu koła, którego promień równa się jedności. Dla przybliżonego obliczenia połowy takiego okręgu obliczamy na zasadzie wzorów §§ 212 i 213 boki, a następnie i obwody wielokątów foremnych wpisanych i opisanych o 6, 12, 24..... bokach. Tak postępując otrzymamy następującą tablicę.

Liczba boków wielokąta	Połowa obwodu wielokąta wpisanego	Połowa obwodu wielokąta opisanego.
6	3,00000	3,46411
12	3,10582	3,21539
24	3,13262	3,15966
48	3,13934	3,14609
96	3,14103	3,14272
192	3,14114	3,14187

Z tej tablicy widzimy, że ponieważ połowy obwodów wielokątów wpisanego i opisanego o 192 bokach zgadzają się w trzech pierwszych cyfrach dziesiętnych, więc cyfry te należą do π , gdyż łatwo widzieć, że wartość π zawiera się pomiędzy połówkami obwodów wielokątów foremnych wpisanych i opisanych o jednakowej liczbie boków.

Znakomity matematyk grecki Archimedes, postępując tą drogą i zatrzymując się na 96 bokach, otrzymał dla π liczbę $\frac{22}{7}$ (z przybliżeniem do 0,01); Adryjan Metius znalazł $\pi = \frac{355}{113} = 3,141592$ (z przybliżeniem do 0,00001); Ludolf z Ceuln w Holandyi obliczył π

z przybliżeniem do 35 cyfr dziesiątych; nakoniec Anglik *Shank* (1873) do 707 cyfr.

214. Pytania i zadania. Dowieść, że dwa wielokąty równokątne są podobne, gdy mają ($n - 2$) boki po sobie idące proporcjonalne i przyległe kątom równym. Dowieść, że dwa wielokąty o n bokach są podobne, gdy mają $n - 1$ boków proporcjonalnych, zawierających $n - 2$ kątów odpowiednich równych. W wielokątach podobnych dwa punkty nazywają się odpowiednimi, gdy złączone z końcami boków odpowiednich linijami prostemi, wyznaczają trójkąty podobne i podobnie ułożone. Dwie proste, łączące dwa punkty odpowiednie, nazywają się linijami odpowiednimi, jak np. dwie przekątne, które łączą wierzchołki odpowiednie. Dowieść, że w wielokątach podobnych linije odpowiednie są proporcjonalne do boków odpowiednich; (należy końce prostych odpowiednich połączyć prostemi z dwoma wierzchołkami odpowiednimi danych wielokątów i do otrzymanych tym sposobem pięciokątów zastosować twierdzenie wypowiedziane w zadaniu poprzednim). Dowieść, że dwa trapezy mające boki odpowiednie proporcjonalne są podobne. Dowieść, że dwa prostokąty mające dwa boki przyległe proporcjonalne, są podobne. Dowieść, że dwa równoległoboki, mające kąt równy, zawarty pomiędzy dwoma bokami proporcjonalnymi, są podobne. Dowieść, że wszystkie kwadraty są podobne. Boki pięciokąta są 4 m., 2,5 m., 3,5 m. 5 m., i 6 m.; obwód drugiego pięciokąta podobnego pierwszemu równa się 39 m.; obliczyć: 1) boki tego ostatniego pięciokąta, 2) stosunek pól tych pięciokątów. Boki sześciokąta są: 5 dec., 4 dec., 7,5 dec, 6 dec., 10,5 dec. i 8,5 dec; najmniejszy bok drugiego sześciokąta podobnego do pierwszego równa się 3 dec.—obliczyć obwód tego drugiego sześciokąta. Obliczyć stosunek boków odpowiednich dwu wielokątów podobnych, których pola są w stosunku 25:36. Obliczyć pole wielokąta, gdy wiadomo, że pole drugiego wielokąta jemu podobnego równa się 28,8 m. kwad. i że stosunek boków odpowiednich wielokątów pierwszego i drugiego równa się $\frac{3}{5}$. Dowieść, że pole wielokąta zbudowanego na przekątnej trójkąta prostokątnego równa się sumie pól wielokątów jemu podobnych i zbudowanych na przyprostokątnych tego trójkąta, uważanych jako boki odpowiednie względem przyprostokątnej (zastosować twierdzenie o stosunku pól wielokątów podobnych i twierdzenie

Pytagorasa). Na danej prostej wykreślić wielokąt podobny danemu. Obliczyć bok i pole ośmiokąta foremnego wpisanego w koło, którego promień równa się 4 cal. Obliczyć bok i pole dwunastokąta foremnego wpisanego w koło, którego promień równa się 1 m. Obliczyć bok 8-io kąta foremnego opisanego na kole, którego promień równa się R . Obliczyć bok dwunastokąta foremnego opisanego na kole, którego promień równa się 2 cal. Znając pole k^2 sześciokąta foremnego wpisanego, obliczyć pole sześciokąta foremnego opisanego.

K O N I E C.

Biblioteka Gł. KSP
w Krakowie

90587

