

ROZDZIAŁ 1

Relacje dwuargumentowe

DEFINICJA 1. *Relacją dwuargumentową* między elementami zbioru X i zbioru Y nazywamy dowolny podzbiór R iloczynu kartezjańskiego zbiorów X i Y . Przyjmujemy zapis

$$(x, y) \in R \iff xRy.$$

DEFINICJA 2. Niech $R \subseteq X \times Y$ będzie relacją w iloczynie kartezjańskim $X \times Y$. Zbiór

$$D(R) = \{x \in X : \exists y \in Y [(x, y) \in R]\}$$

nazywamy *dziedziną relacji* R . Zbiór

$$D^*(R) = \{y \in Y : \exists x \in X [(x, y) \in R]\}$$

nazywamy *przeciwdziedziną relacji* R .

DEFINICJA 3. Niech $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq W \times Z$ będą dowolnymi relacjami. *Złożeniem (superpozycją)* relacji R i S nazywamy relację $S \circ R \subseteq X \times Z$ określoną wzorem

$$(x, z) \in S \circ R \iff \exists t \in Y \cap W [(x, t) \in R \wedge (t, z) \in S]$$

dla $x \in X$ i $z \in Z$.

TWIERDZENIE 4. *Niech $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq W \times Z$ i $T \subseteq U \times V$ będą dowolnymi relacjami. Wtedy*

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R).$$





DEFINICJA 5. Niech $R \subseteq X \times Y$ będzie dowolną relacją. Relację

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}$$

nazywamy *relacją odwrotną* do relacji R .

STWIERDZENIE 6. Niech $R \subseteq X \times Y$ będzie dowolną relacją. Wtedy

$$(R^{-1})^{-1} = R.$$

TWIERDZENIE 7. Niech $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq W \times Z$ będą dowolnymi relacjami. Wtedy

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

Jeżeli $X = Y$, to mówimy, że relacja $R \subseteq X^2$ jest określona w X .

DEFINICJA 8. Niech R będzie relacją określoną w zbiorze X . Relację R nazywamy *zwrotną*, jeżeli

$$\forall x \in X xRx.$$

Relację R nazywamy *przeciwwrotną*, jeżeli

$$\forall x \in X [\sim (xRx)].$$

Relację R nazywamy *symetryczną*, jeżeli

$$\forall x, y \in X [xRy \Rightarrow yRx].$$

Relację R nazywamy *przeciwsymetryczną*, jeżeli

$$\forall x, y \in X [xRy \Rightarrow \sim (yRx)].$$

Relację R nazywamy *antysymetryczną*, jeżeli

$$\forall x, y \in X [(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y].$$

Relację R nazywamy *przechodnią*, jeżeli

$$\forall x, y, z \in X [(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz].$$

Relację R nazywamy *spójną*, jeżeli

$$\forall x, y \in X [xRy \vee yRx \vee x = y].$$