ROZDZIAŁ 1

Relacje częściowego porządku

DEFINICJA 1. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Relację R określoną w zbiorze X nazywamy *relacją częściowego porządku* jeżeli jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia na X. Jeżeli R jest relacją częściowego porządku w zbiorze X, to parę (X, R) nazywamy *zbiorem częściowo uporządkowanym*.

DEFINICJA 2. Jeżeli $\leqslant$ jest relacją częściowego porządku w zbiorze X, to relację $<$ definiujemy następująco

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \wedge x \neq y$$

dla dowolnych $x, y \in X$.

UWAGA 3. Jeżeli $\leqslant$ jest relacją częściowego porządku w X, to relacja $<$ jest przeciwzwrotna, przeciwsymetryczna i przechodnia.

DEFINICJA 4. Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Element $x_0 \in X$ nazywamy

- *elementem największym* w X, jeżeli
$$\forall_{x \in X}[x \leqslant x_0],$$
- *elementem maksymalnym* w X, jeżeli
$$\sim \exists_{x \in X}[x_0 < x],$$
- *elementem najmniejszym* w X, jeżeli
$$\forall_{x \in X}[x_0 \leqslant x],$$

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

- *elementem minimalnym* w X, jeżeli

$$\sim \exists_{x \in X}[x < x_0].$$

TWIERDZENIE 5. *Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Wtedy w zbiorze X istnieje co najwyżej jeden element największy (najmniejszy). Element największy (najmniejszy), jeśli istnieje, jest jednocześnie jedynym w $(X, \leqslant)$ elementem maksymalnym (minimalnym).*

DEFINICJA 6. Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech A będzie podzbiorem zbioru X. Relację $\leqslant_{|A}$ zdefiniowaną następująco

$$\forall_{x,y \in A}[x \leqslant_{|A} y \Leftrightarrow x \leqslant y]$$

nazywamy *relacją $\leqslant$ zawężoną do zbioru A.*

STWIERDZENIE 7. *Jeżeli $(X, \leqslant)$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym, to $(A, \leqslant_{|A})$ jest również zbiorem częściowo uporządkowanym.*

DEFINICJA 8. Podzbiór $A \subseteq X$ zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \leqslant)$ nazywamy *łańcuchem*, jeżeli

$$\forall_{x,y \in A}[x \leqslant y \vee y \leqslant x].$$

DEFINICJA 9. Niech $A \subseteq X$ będzie podzbiorem zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \leqslant)$. Element $x_0 \in X$ nazywamy *ograniczeniem górnym zbioru* A, jeżeli

$$\forall_{x \in A}[x \leqslant x_0].$$

Element $x_0 \in X$ nazywamy *ograniczeniem dolnym zbioru* A, jeżeli

$$\forall_{x \in A}[x_0 \leqslant x].$$

LEMAT 10 (Kuratowskiego-Zorna). *Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Jeżli w zbiorze X dla każdego łańcucha $A \subseteq X$ istnieje ograniczenie górne, to w X istnieje element maksymalny. Dokładniej, dla każdego $x_0 \in X$ istnieje element maksymalny x taki, że $x_0 \leqslant x$.*

DEFINICJA 11. Jeżeli relacja $\leqslant$ częściowego porządku w zbiorze X jest spójna, czyli

$$\forall_{x,y \in X}[x \leqslant y \vee y \leqslant x],$$

to relację $\leqslant$ nazywamy *liniowym porządkiem* w zbiorze X. Jeżeli $\leqslant$ jest relacją liniowego porządku w zbiorze X, to parę $(X, \leqslant)$ nazywamy *zbiorem liniowo uporządkowanym.*

STWIERDZENIE 12. *Jeżeli $(X, \leqslant)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym i $A \subseteq X$, to $(A, \leqslant_{|A})$ jest również zbiorem liniowo uporządkowanym.*

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Uwaga 13. Jeżeli $(X, \leqslant)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym i X jest niepustym zbiorem skończonym, to w $(X, \leqslant)$ istnieje element najmniejszy i największy.

W zbiorze liniowo uporządkowanym $(X, \leqslant)$ element najmniejszy będziemy nazywać *elementem pierwszym*, a element największy - *elementem ostatnim*.

Definicja 14. Zbiór liniowo uporządkowany $(X, \leqslant)$ nazywamy *zbiorem dobrze uporządkowanym*, jeżeli każdy niepusty podzbiór zbioru X ma element najmniejszy. Relację $\leqslant$ nazywamy wtedy *relacją dobrze porządkującą zbiór X*.