ROZDZIAŁ 1

Rachunek zdań

DEFINICJA 1. *Zdaniem* w sensie logicznym (*zdaniem logicznym*) nazywamy zdanie oznajmujące (w sensie gramatycznym), któremu możemy jednoznacznie przypisać ocenę prawdy lub fałszu, w oparciu o obiektywne kryteria rzeczywistości lub teorii, której dotyczy to zdanie.

PRZYKŁAD 2. Zamek wawelski w Krakowie był siedzibą królów polskich.
Kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej niezerowej jest liczbą dodatnią.

Logika posługuje się językiem symbolicznym. Jednym z najważniejszych rachunków logicznych jest *klasyczny rachunek zdań* (KRZ).
Alfabet KRZ składa się z trzech zbiorów symboli

(1) zmienne zdaniowe $p, q, r, s, p_1, p_2, \ldots$,
(2) funktory logiczne (stałe logiczne) $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \sim$,
(3) symbole pomocnicze (nawiasy).

DEFINICJA 3 (Język KRZ). *Wyrażeniem KRZ* nazywamy każdy skończony ciąg symboli alfabetu KRZ. *Wyrażeniem sensownym* lub *formułą KRZ* nazywamy wyrażenie zbudowane według następujących reguł:

(1) każda pojedyncza zmienna zdaniowa jest wyrażeniem sensownym,
(2) jeżeli α i β są wyrażeniami sensownymi, to $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$, $\sim \alpha$ są wyrażeniami sensownymi,
(3) każde wyrażenie, które powstaje ze zmiennych zdaniowych przez zastosowanie reguły (ii) skończoną liczbę razy, jest wyrażeniem sensownym. Ponadto każde wyrażenie, które jest wyrażeniem sensownym, powstaje według opisanej metody.

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Zbiór wszystkich wyrażeń sensownych (formuł) (KRZ) nazywamy *językiem KRZ* i oznaczamy symbolem J_{KRZ}.

DEFINICJA 4. *Wartościowaniem* w KRZ nazywamy każdą taką funkcję

$$v : J_{KRZ} \to \{0,1\}$$

że dla dowolnych formuł α, β należących do J_{KRZ} spełnione są podane w tabeli warunki Jeżeli $v(\alpha) = 1$, to mówimy, że formuła α jest *prawdziwa* przy wartościowaniu v. Jeżeli $v(\alpha) = 0$, to mówimy, że formuła α jest *fałszywa* przy wartościowaniu v.

DEFINICJA 5. Formuła α nazywamy *tautologią* (*prawem*) *KRZ*, jeżeli

$$v(\alpha) = 1$$

dla każdego wartościowania v w KRZ.

PRZYKŁAD 6. Niektóre prawa KRZ

(1) $p \Leftrightarrow \sim (\sim p)$ - prawo podwójnego przeczenia,
(2) $p \vee \sim p$ - prawo wyłączonego środka,
(3) $\sim (p \wedge \sim p)$ - prawo wyłączonej sprzeczności,
(4) $((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$ - prawo łączności alternatywy,
(5) $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$ - prawo łączności koniunkcji,
(6) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ - prawo przemienności alternatywy,
(7) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ - prawo przemienności koniunkcji,
(8) $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ - prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy,
(9) $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ - prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji,
(10) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$,
$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ - prawa de Morgana,
(11) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ - prawo kontrapozycji,
(12) $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ - prawo zaprzeczenia implikacji
(13) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$,
$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$,
$(q \Rightarrow r) \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ - prawa sylogizmu warunkowego,
(14) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ - prawo eliminacji implikacji,
(15) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ - prawo eliminacji równoważności,
(16) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$ - prawo eksportacji i importacji,
(17) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ - prawo symplifikacji,

(18) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ - prawo Friegie'go,
(19) $(\sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ - prawo Dunsa-Scotusa,

(20) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ - prawo Claviusa.

Zdanie T jest *twierdzeniem* danej teorii jeśli istnieje dowód.
Dowód wprost to ciąg zdań $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ taki, że $\varphi_n = T$ oraz zdanie φ_i z tego ciągu jest albo tautologią, albo twierdzeniem wcześniej udowodnionym, albo powstaje z poprzedniego przez zastosowanie reguł wnioskowania.
Dowód niewprost to ciąg zdań $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ taki, że $\varphi_0 =\sim T$ i każde zdanie φ_i z tego ciągu jest albo aksjomatem, albo twierdzeniem wcześniej udowodnionym albo powstaje z poprzedniego przez zastosowanie reguł wnioskowania, oraz istnieją w ciągu $k, j \leqslant n : \varphi_k =\sim \varphi_j$.

Przykład 7. Niektóre reguły wnioskowania

(1) $p \Rightarrow p \vee q$ reguła wprowadzania alternatywy,
(2) $p \wedge q \Rightarrow p$ reguła opuszczania koniunkcji,
(3) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ reguła modus ponendo ponens,
(4) $((p \Rightarrow q) \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$ reguła modus tollendo tollens,
(5) $((p \vee q) \wedge \sim p) \Rightarrow q$ reguła modus ponendo tollens,
(6) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ reguła sylogizmu hipotetycznego.