ROZDZIAŁ 1

Rachunek funkcyjny

Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą dowolnymi zbiorami. Wyrażenie (formułę) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, w którym występuje n zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ i które zamienia się w zdanie logiczne, gdy zamiast każdej ze zmiennej $x_1, \ldots, x_n$ podstawimy nazwę dowolnego elementu odpowiednio ze zbiorów $X_1, \ldots, X_n$, nazywamy *funkcją (formą) zdaniową* n zmiennych, których *zakresem zmienności* są odpowiednio zbiory $X_1, \ldots, X_n$. Symbolicznie

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{dla } x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n.$$

Mówimy również, że zakresem zmienności funkcji zdaniowej $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jest $X_1 \times \ldots \times X_n$.
Niech $a_1 \in X_1, \ldots, a_n \in X_n$ będą dowolnie ustalonymi elementami. Zapis $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ oznacza zdanie logiczne, otrzymane przez podstawienie nazw elementów $a_1, \ldots, a_n$ w miejsce zmiennych odpowiednio $x_1, \ldots x_n$ w funkcji zdaniowej $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dla $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$.
Mówimy, że n-ka uporządkowana $(a_1, \ldots, a_n) \in (X_1 \times \ldots \times X_n$ *spełnia* funkcję zdaniową $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dla $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$, jeżeli zdanie $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ jest prawdziwe.
Zbiór

$$\begin{aligned} S(\varphi) :&= \{(a_1, \ldots, a_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n : v(\varphi(a_1, \ldots, a_n)) = 1\} \\ &= \{(a_1, \ldots, a_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n : v(\varphi(a_1, \ldots, a_n))\}. \end{aligned}$$

nazywamy *zbiorem spełniania* funkcji zdaniowej $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.
Niech $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ i $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ dla $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$ będą funkcjami zdaniowymi. Funkcję

(i) $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \vee \psi(x_1,\ldots,x_n)$ dla $x_1 \in X_1,\ldots,x_n \in X_n$ nazywamy *alternatywą funkcji zdaniowych* $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ i $\psi(x_1,\ldots,x_n)$,
(ii) $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \wedge \psi(x_1,\ldots,x_n)$ dla $x_1 \in X_1,\ldots,x_n \in X_n$ nazywamy *koniunkcją funkcji zdaniowych* $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ i $\psi(x_1,\ldots,x_n)$,
(iii) $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n)$ dla $x_1 \in X_1,\ldots,x_n \in X_n$ nazywamy *implikacją funkcji zdaniowych* $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ i $\psi(x_1,\ldots,x_n)$,
(iv) $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n)$ dla $x_1 \in X_1,\ldots,x_n \in X_n$ nazywamy *równoważnością funkcji zdaniowych* $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ i $\psi(x_1,\ldots,x_n)$,
(v) $\sim \varphi(x_1,\ldots,x_n)$ dla $x_1 \in X_1,\ldots,x_n \in X_n$ nazywamy *negacją funkcji zdaniowej* $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$.

Twierdzenie 1. *Niech* $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ *i* $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ *dla* $x_1 \in X_1,\ldots,x_n \in X_n$ *będą funkcjami zdaniowymi. Wtedy*
(i) $S(\varphi \wedge \psi) = S(\varphi) \cap S(\psi)$,
(ii) $S(\varphi \vee \psi) = S(\varphi) \cup S(\psi)$,
(iii) $S(\sim \varphi) = -S(\varphi)$,
(iv) $S(\varphi \Rightarrow \psi) = -S(\varphi) \cup S(\psi)$,
(v) $S(\varphi \Leftrightarrow \psi) = (S(\varphi) \cap S(\psi)) \cup (-S(\varphi) \cap -S(\psi))$,
gdzie $-S(\varphi) = (X_1 \times \ldots \times X_n) \setminus S(\varphi)$.

Definicja 2. Funkcje zdaniowe $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ i $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ dla $x_1 \in X_1,\ldots,x_n \in X_n$ nazywamy *równoważnymi*, jeżeli $S(\varphi) = S(\psi)$, co zapisujemy symbolicznie $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \equiv \psi(x_1,\ldots,x_n)$.

Kwantyfikatory
$\bigwedge$, $\forall$ - kwantyfikator *ogólny, uniwersalny*
$\bigvee$, $\exists$ - kwantyfikator *szczegółowy, egzystencjalny*
Niech $\varphi(x)$ dla $x \in X$ będzie funkcją zdaniową. Zdanie logiczne: *Zbiorem spełniania funkcji zdaniowej* $\varphi(x)$ *jest zbiór* X zapisujemy symbolicznie

$$\forall_x[\varphi(x)].$$

Wobec tego

$$\upsilon(\forall_x[\varphi(x)]) = 1 \Longleftrightarrow S(\varphi) = X.$$

Zdanie logiczne: *Zbiór spełniania funkcji zdaniowej* $\varphi(x)$ *jest niepusty* zapisujemy symbolicznie

$$\exists_x[\varphi(x)].$$

Wobec tego

$$\upsilon(\exists_x[\varphi(x)]) = 1 \Longleftrightarrow S(\varphi) \neq \emptyset.$$

Symbolicznie przyjmujemy zapis

$$\forall_{x\in X}[\varphi(x)] \Longleftrightarrow \forall_x[x \in X \Rightarrow \varphi(x)],$$

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

oraz

$$\exists_{x\in X}[\varphi(x)] \iff \exists_x[x \in X \Rightarrow \varphi(x)].$$

Mówimy wtedy, że *kwantyfikatory są ograniczone przez zbiór* X.
Niech $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ dla $x \in X$ będą funkcjami zdaniowymi. Symbolicznie przyjmujemy zapis

$$\forall_{\psi(x)}[\varphi(x)] \iff \forall_x[\psi(x) \Rightarrow \varphi(x)],$$

oraz

$$\exists_{\psi(x)}[\varphi(x)] \iff \exists_x[\psi(x) \Rightarrow \varphi(x)].$$

Mówimy wtedy, że *kwantyfikatory są ograniczone przez funkcję zdaniową* $\psi(x)$.
Mówimy, że w wyrażeniu $\forall_x[\varphi(x)]$ i $\exists_x[\varphi(x)]$ *zmienna x jest związana* odpowiednio kwantyfikatorem $\forall$ lub $\exists$. Jeżeli zmienna x występująca w funkcji zdaniowej nie jest związana żadnym kwantyfikatorem, to x nazywamy *zmienną wolną*.

Definicja 3. *Prawem rachunku funkcyjnego* nazywamy wyrażenie α zbudowane ze zdań logicznych lub funkcji zdaniowych spełniające następujące warunki

(i) jeżeli α jest zdaniem, to α jest zdaniem prawdziwym,
(ii) jeżeli α jest funkcją zdaniową o zmiennych wolnych $x_1, \ldots, x_n$ dla $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$, to α jest funkcją zdaniową prawdziwą w zbiorze $X_1 \times \ldots \times X_n$.

Twierdzenie 4. *Jeżeli α jest prawem rachunku zdań, to podstawiając w wyrażeniu α za zmienne zdaniowe dowolne zdanie rachunku funkcyjnego lub dowolne funkcje zdaniowe o zmiennych wybranych spośród $x_1, \ldots, x_n$, których zakresami zmienności są odpowiednio zbiory $X_1, \ldots, X_n$, otrzymujemy prawo rachunku funkcyjnego.*

Przykład 5. Najważniejsze prawa rachunku funkcyjnego.
Niech X i Y będą zbiorami niepustymi.

(1) prawa de Morgana

$$\sim\exists_{x\in X}[\varphi(x)] \iff \forall_{x\in X}[\sim \varphi(x)],$$
$$\sim\forall_{x\in X}[\varphi(x)] \iff \exists_{x\in X}[\sim \varphi(x)],$$

(2) prawo egzemplifikacji

$$\forall_{x\in X}[\varphi(x)] \Longrightarrow \exists_{x\in X}[\varphi(x)],$$

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

(3) prawa przestawiania kwantyfikatorów

$$\begin{aligned}
\forall_{x\in X}\forall_{y\in Y}[\varphi(x,y)] &\iff \forall_{y\in Y}\forall_{x\in X}[\varphi(x,y)],\\
\exists_{x\in X}\exists_{y\in Y}[\varphi(x,y)] &\iff \exists_{y\in Y}\exists_{x\in X}[\varphi(x,y)],\\
\exists_{x\in X}\forall_{y\in Y}[\varphi(x,y)] &\implies \forall_{y\in Y}\exists_{x\in X}[\varphi(x,y)],
\end{aligned}$$

(4) prawa włączania i wyłączania kwantyfikatorów ($\varphi(x)$ jest funkcją zdaniową o zmiennej wolnej x, ψ jest zdaniem lub funkcją zdaniową nie zawierającą zmiennej wolnej x)

$$\begin{aligned}
\forall_{x\in X}[\varphi(x)\vee\psi] &\iff ((\forall_{x\in X}[\varphi(x)]\vee\psi),\\
\exists_{x\in X}[\varphi(x)\vee\psi] &\iff ((\exists_{x\in X}[\varphi(x)]\vee\psi),\\
\forall_{x\in X}[\varphi(x)\wedge\psi] &\iff ((\forall_{x\in X}[\varphi(x)]\wedge\psi),\\
\exists_{x\in X}[\varphi(x)\wedge\psi] &\iff ((\exists_{x\in X}[\varphi(x)]\wedge\psi),\\
\forall_{x\in X}[\varphi(x)\Rightarrow\psi] &\iff ((\exists_{x\in X}[\varphi(x)]\Rightarrow\psi),\\
\exists_{x\in X}[\varphi(x)\Rightarrow\psi] &\iff ((\forall_{x\in X}[\varphi(x)]\Rightarrow\psi),\\
\forall_{x\in X}[\psi\Rightarrow\varphi(x)] &\iff (\psi\Rightarrow(\forall_{x\in X}[\varphi(x)])),\\
\exists_{x\in X}[\psi\Rightarrow\varphi(x)] &\iff (\psi\Rightarrow(\exists_{x\in X}[\varphi(x)])),
\end{aligned}$$

(5) prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji

$$\forall_{x\in X}[\varphi(x)\wedge\psi(x)] \iff ((\forall_{x\in X}[\varphi(x)])\wedge(\forall_{x\in X}[\psi(x)])),$$

(6) prawo rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem alternatywy

$$((\forall_{x\in X}[\varphi(x)])\vee(\forall_{x\in X}[\psi(x)])) \implies \forall_{x\in X}[\varphi(x)\vee\psi(x)],$$

(7) prawo rozdzielności kwantyfikatora szczegółowego względem alternatywy

$$\exists_{x\in X}[\varphi(x)\vee\psi(x)] \iff ((\exists_{x\in X}[\varphi(x)])\vee(\exists_{x\in X}[\psi(x)])),$$

(8) prawo rozdzielności kwantyfikatora szczegółowego względem koniunkcji

$$\exists_{x\in X}[\varphi(x)\wedge\psi(x)] \implies ((\exists_{x\in X}[\varphi(x)])\wedge(\exists_{x\in X}[\psi(x)])),$$

(9) prawa rozdzielności kwantyfikatora ogólnego względem implikacji

$$\begin{aligned}
\forall_{x\in X}[\varphi(x)\Rightarrow\psi(x)] &\implies ((\forall_{x\in X}[\varphi(x)])\Rightarrow(\forall_{x\in X}[\psi(x)])),\\
\forall_{x\in X}[\varphi(x)\Rightarrow\psi(x)] &\implies ((\exists_{x\in X}[\varphi(x)])\Rightarrow(\exists_{x\in X}[\psi(x)])),
\end{aligned}$$

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

(10) prawo rozdzielności kwantyfikatora szczegółowego względem implikacji

$$((\exists_{x\in X}[\varphi(x)]) \Rightarrow (\exists_{x\in X}[\psi(x)]) \Longrightarrow \exists_{x\in X}[\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)].$$