

BIBLIOTEKA
GŁÓWNA
W
SP
KRAKÓW

34744



DR. F. MOĆNIK

Geometrya
Poglądowa

CZĘŚĆ II.

(na klasę III i IV)



Seyfarth & Czajkowski

LWÓW

1904



306 4.1

~~Adm. Kraft.
per 11. 6.
Sobieskiego.~~

T. K.





LK

D^{ra} F. MOCNIKA

GEOMETRYA POGLĄDOWA

DLA

KLAS NIŻSZYCH SZKÓŁ ŚREDNICH.

Przełożył na język polski

GRZEGÓRZ MARYNIAK.

Część II.

(na klasę III. i IV.)

Wydanie szóste

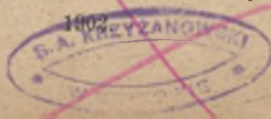
według 16 wydania niemieckiego, przerobionego i zastosowanego
do instrukcyi ministerstwa z r. 1884.



Z 95 drzeworytami w tekście.

WE LWOWIE.

NAKŁADEM KSIĘGARNI SEYFARTHA I CZAJKOWSKIEGO.





34.744

Z Drukarni Ludowej we Lwowie.

514.

Matem

TREŚĆ.

	Strona.
I. O równości figur płaskich	1
Zadania do wykreślenia z przemiany figur i ich podziału	6
II. O pomiarze figur płaskich	10
1. Pomiar figur prostokreślnych	10
2. Pomiar koła	20
III. O podobieństwie figur prostokreślnych	28
1. Proporcjonalność odcinków prostej	28
2. Podobieństwo trójkątów	31
3. Podobieństwo wieloboków	38
IV. O elipsie, hyperboli i paraboli	41
Przyczynek do planimetrii	49
Zadania rachunkowe z planimetrii, które rozwiązuje się przez wyszukanie pierwiastka kwadratowego.	

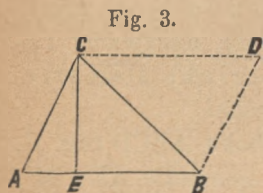
Stereometrya.

I. O prostych i płaszczyznach w przestrzeni	57
1. Położenie prostych względem siebie	58
2. Położenie prostych względem płaszczyzny	59
3. Położenie płaszczyzn względem siebie	62
4. Naroża	65
II. O bryłach i ich pomiarze	68
1. Graniastosłup	69
2. Walec	77
3. Ostrosłup	82
4. Stożek	90
5. Kula	96
6. Wielościany umiarowe	104
7. Wyznaczenie objętości ciał zapomocą naczynia albo za pomocą ich ciężaru	108
Zadania mieszane z pomiaru ciał	

Atoli widoczna, że $ABJG$ jest kwadratem odcinka AB , a $DFJH$ kwadratem odcinka BC , zaś tak $BCHJ$ jak i $FEGJ$ są prostokątami odcinków AB i BC . Mamy zatem następujące twierdzenie:

Kwadrat sumy dwu odcinków równa się sumie kwadratów obu tych odcinków, powiększonej o podwójny prostokąt obu odcinków.

§. 4. Wykreślmy w trójkącie ABC (fig. 3.) przez wierzchołki B i C równoległe do przeciwległych boków, a powstanie równoległobok $ABCD$, który z trójkątem ABC ma równą podstawę i równą wysokość. Trójkąt ABC jest tylko połową tego równoległoboku. Zatem:

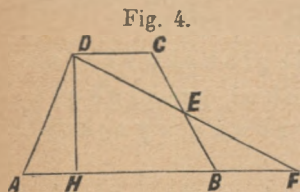


Każdy trójkąt jest połową równoległoboku, mającego z nim równą podstawę i równą wysokość.

Z tego twierdzenia wynika także następujące:

Dwa trójkąty o równych podstawach i wysokościach są równe co do powierzchni.

§. 5. Jeżeli w trapezie $ABCD$ (fig. 4.) jeden z nierównoległych boków n. p. BC podzielimy na dwie równe części w punkcie E i przez punkt D i E wykreślimy prostą, przecinającą przedłużenie boku AB w punkcie F , otrzymamy trójkąt $CDE \cong BFE$. Jeżeli zatem do czworoboku $ABED$ dodamy raz trójkąt CDE a drugi raz trójkąt BFE , muszą sumy być sobie równe t. j. trapez $ABCD =$ trójkątowi AFD .

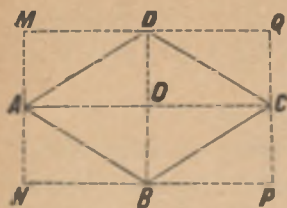


Ponieważ w trójkącie AFD podstawa $AF = AB + BF = AB + CD$, a więc równa się sumie równoległych boków trapezu, a wysokość trójkąta DH jest oraz wysokością trapezu, przeto:

Każdy trapez równa się co do powierzchni trójkątowi, mającemu sumę równoległych boków za podstawę i tę samą co trapez wysokość.

§. 6. Niech będzie $ABCD$ (fig. 5.) czworobokiem, którego przekątne są do siebie prostopadłe. Wykreślimy przez wierzchołki czworoboku równoległe do owych przekątni, a otrzymamy prostokąt $MNPQ$, którego boki równają się przekątniom danego czwo-

Fig. 5.



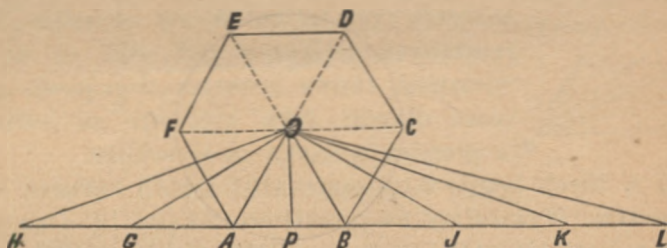
roboku. Prostokąt ten składa się z 4 mniejszych prostokątów, a dany czworobok z 4 trójkątów, z których każdy jest tylko połową przynależnego prostokąta; przeto:

Czworobok, którego przekątne są do siebie prostopadłe, jest połową prostokąta, mającego obie przekątne za boki.

Takimi czworobokami są w szczególności: deltoid, romb i kwadrat.

§. 7. Niech będzie O (fig. 6.) środkiem umiarowego wieloboku ACDEF a $OP \perp AB$. Wykreślmy proste OA, OB, OC,...

Fig. 6.



a rozpadnie się nasz wielobok na same przystające trójkąty. Odmierzwszy wszystkie boki wieloboku na przedłużonym boku AB i połączymy punkty końcowe z punktem O, otrzymamy trójkąty HGO, GAO, ABO,..., KLO, które razem tworzą trójkąt HLO i nie tylko sobie, lecz także i tym trójkątom co do powierzchni są równe, z których wielobok się składa (§. 4.). Umiarowy wielobok ABCDEF równa się przeto co do powierzchni trójkątowi HLO, którego podstawa HL jest obwodem wieloboku a wysokość OP odległością środka wieloboku od jednego z boków.

Każdy umiarowy wielobok jest więc co do powierzchni równy trójkątowi, mającemu obwód wieloboku za podstawę, a odległość środka wieloboku od jednego z boków za wysokość.

§. 8. 1. Jeżeli w umiarowym wieloboku ilość boków nieograniczenie wzrasta, zbliża się wielobok coraz bardziej do koła, obwód wieloboku do obwodu koła, a odległość środka wieloboku od jednego z boków, zbliża się coraz bardziej do promienia.

Z §. 7. wynika zatem także twierdzenie:

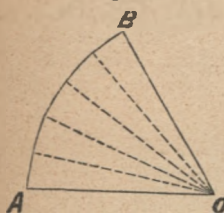
Koło równa się co do powierzchni trójkątowi, mającemu obwód koła za podstawę a promień za wysokość.

2. W ten sam sposób można wykazać, że:

Wycinek kołowy jest co do powierzchni równy trójkątowi, mającemu długość łuku tego wycinka za podstawę a promień za wysokość.

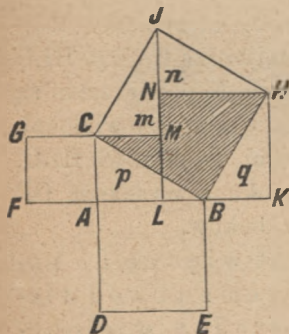
Jeżeli bowiem łuk wycinka kołowego AOB (fig. 7.) podzielimy na bardzo małe części (tak że je możemy uważać za proste) i do punktów podziału powykreślamy promienie, rozłoży się wycinek kołowy na trójkąty, których podstawy dają na sumę łuk AB; wysokością tych trójkątów jest promień. Suma rzeczonych trójkątów jest atoli co do powierzchni równa jednemu trójkątowi, mającemu długość łuku kołowego za podstawę, a promień wycinka za wysokość.

Fig. 7.



§. 9. Niech będzie w trójkącie ABC (fig. 8.) kąt przy A kątem prostym. Wykreślimy na przeciwprostokątnej BC i na przyprostokątniach AB i AC kwadraty BCJH, ABED i ACGF, można wówczas dowieść, że kwadrat przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów obu przyprostokątni.

Fig 8.



W tym celu wykreślimy z H i J do AB prostopadłe HK i JL, a następnie z C i H do JL prostopadłe CM i HN; powstałe trójkąty prostokątne CMJ, JNH, CAB i BKH, które po kolei oznaczamy dla krótkości przez m , n , p i q , są przystające, bo mają po przeciwprostokątnej równej i po kącie ostrym równym (gdyż ramiona kątów są albo równoległe albo prostopadłe do siebie). Jeżeli zatem do pięcioboku BCMNH dodamy raz trójkąty m i n , a drugi raz trójkąty p i q , musimy otrzymać równe sumy. W pierwszym razie otrzymamy na sumę kwadrat BCJH, a w drugim razie kwadraty NHKL i ACML, które przystają odpowiednio do kwadratów ABED i ACGF. Zatem

kwadrat $BCJH = \text{kwadratowi } ABED + \text{kwadratowi } ACGF$, co dla krótkości tak pisać będziemy:

$$\square BC = \square AB + \square AC; \text{ t. j. :}$$

W każdym prostokątnym trójkącie kwadrat przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów obu przyprostokątnej. (Twierdzenie Pitagorasa, Pythagoräischer Lehrsatz).

§. 10. Niech w trójkącie prostokątnym BAC (fig. 9.) będzie AD wysokością do przeciwprostokątnej BC ; wysokość ta dzieli przeciwprostokątną na odcinki BD i CD .

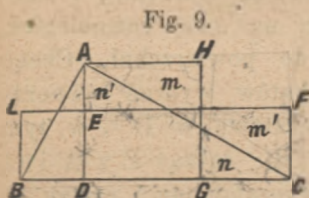


Fig. 9.

Odmierzmy $DE = BD$ i wykreślmy na AD kwadrat $ADGH$ a na DC i DE prostokąt $DCFE$, otrzymamy wówczas dwie pary trójkątów przystających m i m' tudzież n i n' (dlaczego?)

Mamy zatem

$$\triangle ADC = n + m = \triangle ADC = n' + m',$$

a więc kwadrat $ADGH = \text{prostokątowi } DCFE$.

Z tego wynika:

Kwadrat wysokości wykreślonej do przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, równa się prostokątowi, którego bokami są oba odcinki przeciwprostokątnej.

§. 11. Według twierdzenia Pitagorasa mamy (fig. 9.)

$$\square AB = \square AD + \square BD;$$

ponieważ kwadrat wykreślony na AD według twierdzenia podanego w §. 10., równa się prostokątowi $DCFE$, przeto jeżeli $BDEL$ jest kwadratem, wykreślonym na BD , będzie

$$\square AB = DCFE + BDEL = BCFL.$$

Ale $BCFL$ jest prostokątem o bokach BC i BL , albo co na jedno wyjdzie, o bokach BC i BD . Mamy zatem następujące twierdzenie:

Kwadrat przyprostokątnej trójkąta prostokątnego równa się prostokątowi, którego bokami są przeciwprostokątnia i odcinek przeciwprostokątnej, przyległy tej przyprostokątnej.

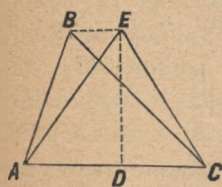
Zadania do wykreślenia.

Przemiana albo przekształcenie figur prostokątnych.

§. 12. Przemienić albo przekształcić jedną figurę prostokątną na inną, znaczy wykreślić taką figurę, któraby odpowiadała pewnym warunkom a co do powierzchni równała się danej figurze.

Dany trójkąt ABC (fig. 10.) przemienić na równoramienny o tej samej podstawie.

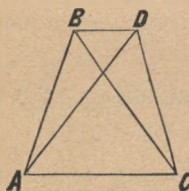
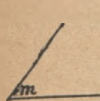
Fig. 10.



Jeżeli przez punkt B wykreślimy równoległą do AC, natenczas wszystkie trójkąty, które mają AC za podstawę i których wierzchołki leżą na owej równoległej, są sobie równe co do powierzchni. Chcąc z pomiędzy tych trójkątów wybrać równoramienny, połowimy podstawę w D i w tym punkcie kreślimy do AC prostą DE; łącząc E z A i C, otrzymamy trójkąt ACE, który jest równoramienny i równy co do powierzchni danemu trójkątowi ABC.

§. 13. 1. Trójkąt ABC (fig. 11.) przemienić na inny o tej samej podstawie ale taki, żeby kąt przy podstawie leżący równał się danemu kątowi m .

Fig. 11.

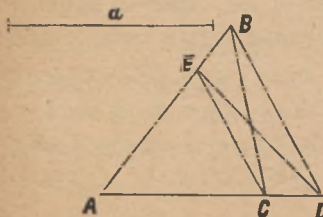


Kreślimy przez B równoległą do AC i w A rysujemy kąt $CAD = m$; ramię tego kąta przecina ową równoległą w D. Połączywszy D z C, otrzymamy trójkąt ADC, który jest żądanym trójkątem.

2. Dany trójkąt przemienić na prostokątny.

§. 14. 1. Trójkąt ABC (fig. 12.) przemienić na inny o danej podstawie a .

Fig. 12.

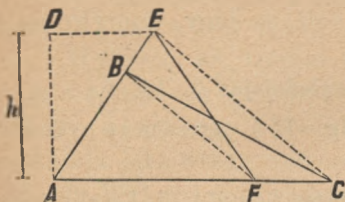


Odmierzamy a na AC od punktu A do D i łączymy D z B; następnie kreślimy $CE \parallel DB$ i łączymy D z E zapomocą prostej DE. Trójkąty CED i CEB mają wspólną podstawę CE i równe wysokości, są więc sobie równe co do powierzchni. Dodając trójkąt ACE do trójkąta CED, otrzymamy

ADE; dodając zaś ACE do trójkąta CEB, mieć będziemy ACB. Przeto trójkąt ADE o podstawie a równa się dawnemu trójkątowi ABC.

2. Trójkąt ABC (fig. 13.) przemienić na inny o danej wysokości h .

Fig. 13.



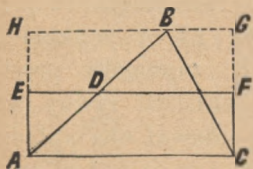
trójkąt AEF.

3. Wykreście trójkąt o bokach równych 4 cm, 3 cm, 2 cm i przemienie go na

- x a) trójkąt równoramienny o podstawie 3 cm;
- + b) " prostokątny o przyprostokątnej 3 cm;
- x c) " o kącie 60° ;
- d) " o podstawie 35 mm;
- e) " o wysokości 26 mm;
- x f) " o kącie 30° i o podstawie 3 cm;
- g) " o kącie 45° i o wysokości 25 mm.

§. 15. 1. Dany trójkąt ABC (fig. 14.) przemienić na prostokąt o tej samej podstawie.

Fig. 14.



Wykreślamy w A i C prostopadłe do AC, następnie połowimy bok AB i kreślimy przez punkt połowiący D równoległą do AC; przecina ona owe prostopadłe w E i F. Prostokąt ACFE jest równy trójkątowi ABC, albowiem każdy z nich jest połową prostokąta ACGH.

2. Dany trójkąt przemienić na prostokąt o tej samej wysokości.

3. Dany równoległobok przemienić na trójkąt o tej samej podstawie.

4. Dany równoległobok przemienić na trójkąt o tej samej wysokości.

§. 19. 1. Wykreślić kwadrat, równy sumie dwu danych kwadratów.

Wykreśla się trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne równają się bokom danych kwadratów; przeciwprostokątnia tego trójkąta jest bokiem żadanego kwadratu.

2. Wykreślić kwadrat, równy różnicy dwóch danych kwadratów.

Wykreśla się trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątnia równa się bokowi większego, a przyprostokątnia jedna bokowi mniejszego z dwu danych kwadratów; druga przyprostokątnia jest wtedy bokiem szukanego kwadratu.

3. Wykreście kwadrat, równy sumie trzech danych kwadratów.

4. Wykreście kwadrat, równy a) dwukrotności, b) trzykrotności, c) połowie danego kwadratu.

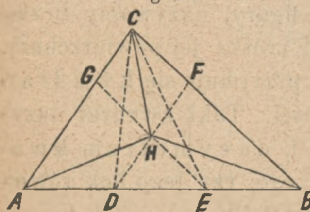
Podział figur prostokreślnych.

§. 20. 1. Dany trójkąt podzielić na kilka równych części zapomocą prostych, przechodzących przez jeden wierzchołek.

Dzielimy bok przeciwny temu wierzchołkowi na tyle równych części, na ile cały trójkąt ma być podzielony, a następnie łączymy punkty podziału z owym wierzchołkiem zapomocą prostych. (§. 4).

2. Trójkąt ABC (fig. 17.) podzielić tak na trzy równe części, żeby linie dzielące wychodziły z wierzchołków i przecinały się w jednym punkcie wewnątrz trójkąta.

Fig. 17.



Dzielimy bok AB na trzy równe części w punktach D i E, i wykreślamy proste CD i CE. Trójkąty ACD, DCE i ECB są równe co do powierzchni, albowiem mają podstawy i wysokości równe. Następnie kreślimy $DF \parallel AC$ i $EG \parallel BC$ a punkt przecięcia się tych równoległych łączymy z wierzchołkami danego trójkąta; proste AH, BH i CH są szukanymi liniami, dzielącymi dany trójkąt na trzy równe części, gdyż trójkąt $ACH = ACD =$

$= \frac{1}{3} ABC$, a trójkąt $BCH = BCE = \frac{1}{3} ABC$: zatem musi być także trójkąt $ABH = \frac{1}{3} ABC$.

§. 21. Równoległobok podzielić na kilka równych części tak, żeby linie dzielące były równoległe do jednego z boków równoległoboku.

Dzielimy boki przyległe owemu bokowi, na tyle równych części, na ile cały równoległobok ma być podzielony; następnie łączymy odpowiednie punkty podziału ze sobą. Tym sposobem otrzymane równoległoboki mają równe podstawy i równe wysokości, są przeto sobie równe.

II. Pomiar figur płaskich.

1. Pomiar figur prostokreślnych.

Obwód i powierzchnia.

§. 22. Zmierzyć płaski utwór geometryczny, znaczy wyznaczyć jego obwód i powierzchnię.

Chcąc wyznaczyć obwód figury prostokreślnej, potrzeba wymierzyć jej boki i liczby otrzymane z pomiaru, dodać. Jeżeli figura jest równoboczną, znajdziemy jej obwód, mnożąc długość jednego boku przez ilość boków.

Wyznaczenie więc obwodu figury prostokreślnej nie jest trudną rzeczą.

§. 23. Chcąc wyznaczyć powierzchnię pewnej figury, musimy pewną oznaczoną powierzchnię wybrać za jednostkę powierzchni i zbadać, ile razy owa jednostka mieści się w danej do pomiaru powierzchni. Liczbę, wyrażającą ilość jednostek powierzchni mieszczących się w polu tej figury, nazywamy liczbą wymiarową powierzchni tej figury albo krótko jej powierzchnią.

Za jednostkę powierzchni przyjmuje się kwadrat, którego bok równa się jednostce długości. Taki kwadrat nazywamy metrem kwadratowym (m^2), decymetrem kwadratowym (dm^2), zależnie od tego, czy jego bok równa się jednemu metrowi, czy decymetrowi i t. d.

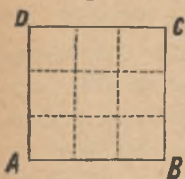
Powierzchni nie wyznaczamy bezpośrednio zapomocą badania, ile razy rzeczzone jednostki powierzchni mierzą się w powierzchni danej do pomiaru, lecz pośrednio w ten sposób, że mierzymy

te proste, od których wielkość figury zależy, a następnie z liczb wymiarowych owych prostych obliczamy powierzchnię.

Kwadrat.

§. 24. Niech bok kwadratu ABCD (fig. 18.) będzie na 3 dm długi. Podzielmy każdy bok tego kwadratu na trzy równe części i połączmy przeciwległe punkty podziału za pomocą prostych, a rozłoży się dany kwadrat na same małe kwadraty, z których każdy jest 1 dm^2 . Pasek wzdłuż AB ma 3 dm^2 , pasek powyżej pierwszego leżący również 3 dm^2 , a trzeci pasek ma także 3 dm^2 . Mamy więc razem 3 razy po 3 $dm^2 = 9 dm^2$.

Fig. 18.



Liczbę wymiarową powierzchni kwadratu znajdziemy zatem, jeżeli liczbę wymiarową jednego boku pomnożymy przez siebie samą; albo krócej: Powierzchnia kwadratu równa się drugiej potęgze jednego boku.

Z tego powodu nazywamy w arytmetyce drugą potęgą jakiejś liczby kwadratem tejże liczby.

Jeżeli liczbę wymiarową boku kwadratu oznaczymy literą s , a liczbę wymiarową jego powierzchni literą f , będzie

$$f = s^2.$$

Jeżeli S i F są liczbami wymiarowymi boku i powierzchni innego kwadratu, mamy także $F = S^2$, a stąd

$$F : f = S^2 : s^2; \text{ t. j.}$$

Powierzchnie dwóch kwadratów mają się tak do siebie, jak drugie potęgi ich boków.

§. 25. Kwadrat, którego bok równa się 10 dm , ma $10 \times 10 = 100 dm^2$; taki kwadrat jest 1 m^2 , przeto

$$1 m^2 = 100 dm^2,$$

$$\text{Podobnie } 1 dm^2 = 100 cm^2,$$

$$1 cm^2 = 100 mm^2.$$

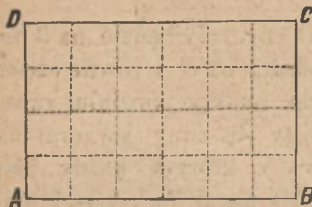
100 m^2 jako miarę powierzchni ziemi nazywamy arem (a), a 100 arów czyli 10000 m^2 hektarem (ha).

Prostokąt i równoległobok w ogóle.

§. 26. 1. Mamy obliczyć powierzchnię prostokąta ABCD (fig. 19), którego podstawa $AB = 6 cm$, a wysokość $AD = 4 cm$.

Podzielmy AB na 6, a AD na 4 równe części i powykreslajmy przez punkty podziału równoległe do AB i do AD, a rozłożymy się prostokąt na same kwadraty, z których każdy jest 1 cm^2 . Mamy 4 paski takich kwadratów a każdy pasek zawiera w sobie 6 cm^2 ; powierzchnia prostokąta jest zatem równa 4 razy po 6 $\text{cm} = 24 \text{ cm}^2$.

Fig. 19.



W podobny sposób znajdziemy, że prostokąt, 7 m długi a 3 m szeroki, ma $7 \times 3 = 21 \text{ m}^2$; że powierzchnia prostokąta o podstawie 8 dm a wysokości 5 dm równa się $8 \times 5 = 40 \text{ dm}^2$.

Jeżeli liczby wymiarowe boków są ułamkami, n. p. podstawa $= 4\frac{3}{4} \text{ m}$ a wysokość $3\frac{1}{4} \text{ m}$, to sprowadziwszy te ułamki do wspólnego mianownika, otrzymamy podstawę $4\frac{3}{4} = \frac{19}{4} \text{ m}$ a wysokość $3\frac{1}{4} = \frac{13}{4} = \frac{13}{4} \text{ m}$. Przyjmując $\frac{1}{4} \text{ m}$ za jednostkę długości, widzimy, że podstawa ma 19 takich jednostek a wysokość 13; prostokąt ma zatem 19×13 kwadratów takich, że bok każdego $= \frac{1}{4} \text{ m}$. 1 m^2 ma 16 takich kwadratów. Otrzymamy przeto powierzchnię prostokąta w m^2 , jeżeli iloczyn 19×13 podzielimy przez 16; więc powierzchnia naszego prostokąta równa się

$$\frac{19 \times 13}{16} = \frac{19}{4} \times \frac{13}{4} = \frac{19}{4} \times \frac{13}{4} \text{ m}^2.$$

Liczbę wymiarową powierzchni prostokąta znajdziemy, mnożąc liczbę wymiarową podstawy przez liczbę wymiarową wysokości (albo mnożąc podstawę przez wysokość).

Zwykle wyrażamy to twierdzenie krócej w ten sposób:

Powierzchnia prostokąta równa się iloczynowi podstawy i wysokości.

Oznaczmy podstawę prostokąta przez b , wysokość przez h , a powierzchnię jego przez f , będzie wówczas

$$f = b \cdot h.$$

Jeżeli iloczyn dwóch czynników podzielimy przez jeden czynnik, otrzymamy drugi; zatem

$$b = \frac{f}{h} \text{ zaś } h = \frac{f}{b}$$

2. Z powyższego twierdzenia i z §. 2. wynika:

Powierzchnia każdego równoległoboku równa się iloczynowi z podstawy i wysokości.

Oznaczając przez B i b liczby wymiarowe podstaw, przez H i h liczby wymiarowe wysokości dwu równoległoboków, a przez F i f liczby wymiarowe ich powierzchni, mieć będziemy:

$$F : f = B : b \quad H : h.$$

2. Jeżeli $B = b$, mamy $F : f = H : h$.

3. „ $H = h$, „ $F : f = B : b$.

Jakie twierdzenia wynikają z tych proporcji?

Trójkąt i trapez.

§. 27. 1. Powierzchnia trójkąta równa się połowie iloczynu z podstawy i wysokości. (§. 4. i §. 26. 2.)

Jeżeli w trójkącie prostokątnym przyjmiemy jedną przyprostokątnię za podstawę, będzie druga przyprostokątnia jego wysokością.

Oznaczmy podstawę trójkąta przez b , wysokość przez h , a jego powierzchnię przez f , otrzymamy

$$f = \frac{bh}{2}, \quad b = \frac{2f}{h}, \quad \text{zaś } h = \frac{2f}{b}.$$

Miedzy powierzchniami dwóch trójkątów zachodzą związki podobne do tych, które wyprowadziliśmy w §. 26. między powierzchniami dwóch równoległoboków.

2. Powierzchnia trapezu równa się połowie iloczynu ze sumy równoległoboków przez wysokość. (§. 5 i §. 27. 1.)

Czworobok mający prostopadłe przekątnie.

§. 28. Powierzchnia rombu albo deltoidu równa się połowie iloczynu obu przekątni. (§. 6. i §. 26. 1.)

2. Powierzchnia kwadratu równa się połowie z drugiej potęgi jednej przekątni.

Wielobok.

§. 29. 1. Powierzchnia umiarowego wieloboku równa się połowie iloczynu z obwodu i z odległości środka wieloboku od jednego boku.

Jeżeli a oznacza bok wieloboku o n bokach, r odległość środka wieloboku od jednego boku, u obwód, a f powierzchnię wieloboku, mamy

$$u = n \cdot a, \text{ zaś } f = \frac{u \cdot r}{2} = \frac{n \cdot a \cdot r}{2}; \text{ skąd wypływa}$$

$$a = \frac{u}{n}, u = \frac{2f}{r}, r = \frac{2f}{u}, \text{ a nadto } a = \frac{2f}{n r}.$$

2. Powierzchnię nieumiarowego wieloboku można obliczyć w jeden z następujących sposobów:

a) Dzielimy wielobok zapomocą przekątni na trójkąty, obliczamy powierzchnię każdego z nich i nareszcie dodajemy powierzchnię wszystkich trójkątów.

b) Kreślimy prostą przez dwa najbardziej oddalone wierzchołki, a następnie wykreślamy do niej prostopadłe ze wszystkich innych wierzchołków. Tym sposobem rozłożymy wielobok na trójkąty prostokątne i trapezy; obliczywszy ich powierzchnię, otrzymamy po dodaniu tych powierzchni powierzchnię całego wieloboku.

Zadania.

§. 30. Zadania do wykreslenia.

Wykazać rysunkiem prawdziwość wzorów arytmetycznych:

$$1. (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

$$3. (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$4. (a \pm b)c = ac \pm bc.$$

Prawdziwość wzoru 1. wykazaliśmy już geometrycznie w §. 3. Podobnie dowodzimy także prawdziwości innych wzorów.

Geometryczne przedstawienie wzoru 4 unaoecznia dodawanie i odejmowanie dwu prostokątów o równych podstawach lub równych wysokościach.

§. 31. Zadania rachunkowe.

1. Bok kwadratu równa się a) 21 m, b) 3·714 m, c) 6 dm 4 cm 5 mm; jak wielki jest obwód, a jak wielka powierzchnia tego kwadratu?

2. Jak wielki jest bok kwadratu, którego obwód równa się 2·58 m?

3. Obwód kwadratu równa się a) $2\cdot8\text{ m}$, b) $4\text{ m } 3\text{ dm } 8\text{ cm}$, c) $19\cdot256\text{ m}$; jak wielki jest bok, a jak wielka powierzchnia tego kwadratu?

4. Jak wielka jest a) suma kwadratów dwu odcinków, z których jeden równa się $5\text{ cm } 3\text{ dm}$ a drugi $8\text{ m } 1\text{ dm } 5\text{ cm}$, i b) różnica kwadratów tych odcinków?

5. Ogród ma kształt kwadratu o boku $22\cdot5\text{ m}$; jak wielką powierzchnię ma ten ogród?

6. Ile potrzeba zapłacić za 12 kwadratowych szyb szklanych o boku równym $4\cdot8\text{ dm}$, jeżeli za m^2 płaci się 3 zł. 40 ct.?

7. Podstawa prostokąta równa się 23 dm , a wysokość 15 dm , jak wielki jest jego obwód, a jak wielka powierzchnia?

8. Obliczcie powierzchnię następujących prostokątów:

- a) długość = $7\cdot4\text{ m}$, szerokość = $3\cdot5\text{ cm}$;
 b) „ = $3\text{ m } 1\text{ dm } 2\text{ cm}$, „ = $1\text{ m } 5\text{ dm } 9\text{ cm}$;
 c) „ = $18\frac{1}{2}\text{ dm}$, „ = $14\frac{3}{4}\text{ dm}$.

9. Jak wielka jest powierzchnia prostokąta na $53\cdot2\text{ m}$ długiego, jeżeli jego szerokość równa się $\frac{3}{4}$ długości?

10. Obwód prostokąta równa się 24 m , podstawa $9\cdot2\text{ m}$; jak wysoki jest ten prostokąt?

11. Szerokość prostokąta równa się $9\text{ m } 4\text{ dm}$, a obwód $86\text{ m } 2\text{ dm}$; jak wielka jest a) długość, b) powierzchnia tego prostokąta?

12. Prostokąt na 4 dm długi ma powierzchnię 34 dm^2 ; jak szeroki jest ten prostokąt?

13. Obwód prostokąta równa się 200 m , a podstawa jest dwa razy dłuższa od wysokości; obliczyć jego a) podstawę, b) wysokość, c) powierzchnię.

14. Prostokąt jest na 7 dm długi, a 6 dm szeroki; ile razy powiększy się jego powierzchnia, jeżeli się podwoi jego długość i szerokość?

15. O ile pomniejszy się powierzchnia prostokąta $4\cdot56\text{ m}$ długiego, a $3\cdot45\text{ m}$ szerokiego, jeżeli się każdy jego bok zmniejszy o $0\cdot75\text{ m}$?

16. Jak wielka jest powierzchnia deltoidu, którego przekątne równają się $2\cdot15\text{ dm}$?

17. Obliczcie powierzchnię rombu, którego przekątne równają się a) $3\text{ m } 5\text{ dm}$ i $5\text{ m } 4\text{ dm}$, b) $1\cdot04\text{ m}$ i $0\cdot85\text{ m}$.

18. Jak wielka jest powierzchnia kwadratu, którego przekątnia równa się *a*) $2m$, *b*) $3.5m$, *c*) $1m\ 4dm\ 8mm$?

19. Kwadrat ma ten sam obwód, co i prostokąt o bokach $48m$ i $32m$; o ile większa jest powierzchnia kwadratu od powierzchni prostokąta?

20. Rolnik kupił pole, które miało mieć $1\frac{1}{2}$ morga $= 0.8632ha$ powierzchni. Po zmierzeniu długości i szerokości okazało się że pole to jest na $284m$ długie, a $30m$ szerokie; czy podano prawdziwą powierzchnię pola?

21. Od pola $283m$ długiego ma być oddzielona parcela o powierzchni $38.205a$ a o długości tej samej, co i pole całe; jakąż szerokość będzie miała ta parcela?

22. Ile drzew można posadzić na obwodzie ogrodu $144m\ 2dm$ długiego, a $85m\ 4dm$ szerokiego, jeżeli mają następować po sobie w odstępie $4m\ 2dm$?

23. W pokoju ma być $64m^2$ powierzchni ściennej pokrytych tapetami; używa się tapet $38cm$ szerokich; ile sztuk tapet potrzeba, jeżeli każda sztuka jest $1\frac{1}{2}m$ długa?

24. Rolę $270m$ długą, a $150m$ szeroką chcemy zamienić za inną o tej samej powierzchni; długość tej drugiej roli równa się jednakże $\frac{2}{3}$ długości pierwszej. Jakże szeroką musi być ta druga rola?

25. Łąka jest $104.7m$ długa, a $47.5m$ szeroka; ile siana wydaje, jeżeli na $1a$ liczy się przeciętnie po $28kg$. siana?

26. Ile potrzeba zapłacić za miejsce pod budowlę $25m$ długie, a $19m$ szerokie, jeżeli za m^2 liczy się po $4\frac{2}{5}$ zł.?

27. Żwierciadło $2m\ 8dm$ wysokie, a $1m\ 9dm$ szerokie umieszczono w ramach zachodzących na $4cm$; jak wielka jest widzialna powierzchnia tego zwierciadła?

28. Rola ma $124m$ długości, a $20m$ szerokości; ile pszenicy potrzeba na zasiew tej roli, jeżeli na $1ha$ wysiewa się $3\frac{1}{10}hl$. pszenicy?

29. Osoba *A* chce ogród w kształcie kwadratu o boku $23m$, osoba zaś *B* chce ogród prostokątny o równej powierzchni a o długości $48m$ opasać murem; która z nich musi dłuższy mur wystawić?

[30] Chodnik $14.4m$ długi, a $2.2m$ szeroki ma być wyłożony płytami kamiennymi. Ile płyt potrzeba na to, jeżeli każda ma $3dm$ długości, a $2dm$ szerokości, i ile będzie kosztowało to wy-

brukowanie, jeżeli na każdą płytę wraz z jej ułożeniem przypada $1\frac{2}{5}$ zł.?

31. Ktoś posiada ogród prostokątny $64\cdot5m$ długi, a $41\cdot2m$ szeroki i chce wzdłuż obwodu jego mieć drogę $3\cdot4m$ szeroką; jaką powierzchnię zajmie ta droga?

32. Przez środek ogrodu prostokątnego o długości $32\cdot4m$, a o szerokości $20\cdot7m$ prowadzi tak wzdłuż jak i wszerz droga $1\cdot6m$ szeroka; jaką powierzchnię ma sam ogród?

33. Jak wielki jest obwód trójkąta, którego boki równają się po kolei $2m\ 4dm$, $2m\ 7dm$ i $3m$?

34. Wyrachujcie obwód równobocznego trójkąta, którego bok równa się a) $1\cdot5m$, b) $7m\ 5dm\ 8cm$.

35. Podstawa trójkąta równoramiennego równa się $2\cdot6m$, a każde ramię $2\cdot1m$; jak wielki jest jego obwód?

36. Jak długi jest bok trójkąta równobocznego, którego obwód równa się $5m\ 76cm$?

37. Obwód trójkąta równoramiennego równa się $4\cdot89m$, a podstawa $1\cdot25m$; jak długie jest każde ramię?

38. Jak wielką jest powierzchnia trójkąta, którego podstawa ma $5m\ 4dm$, a wysokość $3m\ 5dm$?

39. Obliczcie powierzchnię następujących trójkątów:

a) podstawa $1m\ 8dm$, wysokość $1m\ 6dm$;

b) „ $2\cdot345m$, „ $1\cdot724m$;

c) „ $25\frac{2}{5}m$, „ $14\frac{1}{2}m$.

40. Wyrachujcie powierzchnię trójkąta prostokątnego. którego przyprostokątne równają się a) $7\cdot9m$ i $3\cdot9$; b) $49m\ 5dm$ i $37m\ 8dm$.

41. Powierzchnia trójkąta prostokątnego równa się $27m^2\ 56dm^2\ 25cm^2$, a jedna przyprostokątnia $5m\ 25cm$; jak długa jest druga przyprostokątnia?

42. Jak wielka jest wysokość trójkąta o podstawie $12m$, jeżeli ma tę samą powierzchnię, co prostokąt $15\cdot2m$ długi a $8\cdot4m$ szeroki?

43. Jak wielka jest wysokość trójkąta o podstawie $8\cdot1m$ długiej, jeżeli jego powierzchnia równa się powierzchni kwadratu o boku $5\cdot4m$?

44. Dwa boki trójkąta są 344 cm i 450 cm długie, a wysokość wykreślona na pierwszy bok równa się 167.5 cm ; jak wielka jest wysokość tego trójkąta, wykreślona na bok drugi?

45. Część dachu ma kształt trójkąta o podstawie 11.2 m , a o wysokości 8.5 m ; jak wielka jest jej powierzchnia?

46. Równoległe boki trapezu 4.5 m wysokiego równają się 6.8 m i 4.2 m ; jak wielka jest jego powierzchnia?

47. Obliczcie powierzchnię trapezu, jeżeli są dane:

a) równoległe boki $3\text{ m } 4\text{ dm}$ i $7\text{ m } 2\text{ dm}$, a wysokość $4\text{ m } 2\text{ dm}$;

b) „ „ 12.745 m i 8.655 m , „ „ 8.8 m .

48. W trapezie, którego powierzchnia równa się 567 dm^2 , są równoległe boki 3.6 m i 2.7 m długie; jak wielkie jest ich oddalenie?

49. Powierzchnia trapezu równa się 114.8 m^2 , wysokość 6.4 m , a jeden z równoległych boków 12.8 m ; jak długi jest drugi bok równoległy?

50. Miejsce pod budowlę ma kształt trapezu, którego boki równoległe równają się $35\text{ m } 2\text{ dm}$ i $33\text{ m } 5\text{ dm}$, a wysokość $21\text{ m } 4\text{ dm}$; jak wielka jest jego powierzchnia?

51. Łąka ma kształt trapezu, którego powierzchnia równa się 1.5 ha , a boki równoległe są 168.42 m i 109.3 m długie; jak wielkie jest oddalenie równoległych boków?

52. Podwórze w kształcie trapezu o bokach równoległych $20\text{ m } 4\text{ dm}$ i $18\text{ m } 5\text{ dm}$ długich, a o wysokości 15 m ma być wyłożone płytami kamiennymi, z których każda ma 25 dm^2 ; wiele płyt potrzeba?

53. Ogród w kształcie trapezu, 9.6 m szeroki, a na jednym końcu 20.75 m zaś na drugim 14.25 m długi, kupiono za 480 zł ; po czemu płacono za 1 m^2 ?

54. Rola 109 m długa, po jednej stronie 56.2 m , a po drugiej 46.8 m szeroka, ma być zasiana żytem; wiele żyta potrzeba na zasiew, jeżeli na 32 a wysiewa się 1 hl ?

55. Dach ma dwie powierzchnie trójkątne, z których każda jest 7.75 m wysoką, i dwie trapezowate powierzchnie, każda 8.2 m wysoka; podstawa każdego z owych trójkątów jest 7.2 m długa, a boki równoległe każdego trapezu równają się 30.2 m i 25.4 m . Wiele dachówek potrzeba na pokrycie tego dachu, jeżeli każda dachówka pokrywa 5 dm^2 ?

56. Bok umiarowego pięcioboku równa się $4\text{ m } 7\text{ dm}$; jak wielki jest jego obwód?

57. Bok kwadratu jest $3\text{ m } 6\text{ dm}$ długi; jak wielki musi być bok umiarowego sześcioboku, żeby jego obwód równał się obwodowi owego kwadratu?

58. Jeżeli dany jest bok a umiarowego wieloboku, można z niego obliczyć oddalenie r środka wieloboku od jednego z boków, czego atoli tu dowieść jeszcze nie możemy.

Znaleziono że

w trójkącie równobocznym	$r = a \cdot 0.28868,$
w kwadracie	$r = a \cdot 0.5,$
w pięcioboku umiarowym	$r = a \cdot 0.68819,$
w sześcioboku	$r = a \cdot 0.86603,$
w ośmioboku	$r = a \cdot 1.20711,$
w dziesięcioboku	$r = a \cdot 1.53884.$

Obliczcie powierzchnię każdego z powyżej wymienionych wieloboków, jeżeli a) bok jego równa się 1.5 m , b) oddalenie środka od jednego z boków równa się 0.825 m .

59. Przekątnia trapezoidu jest 5.24 m długa, a prostopadłe wykreślone do niej z wierzchołków nieleżących na niej równają się 3.56 m i 2.35 m ; jak wielka jest powierzchnia tego czworoboku?

60. Obliczcie powierzchnię następujących wieloboków:

Fig. 20.

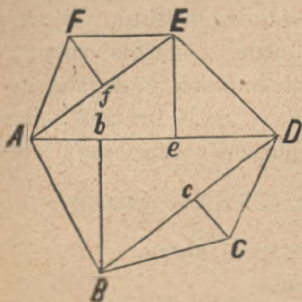
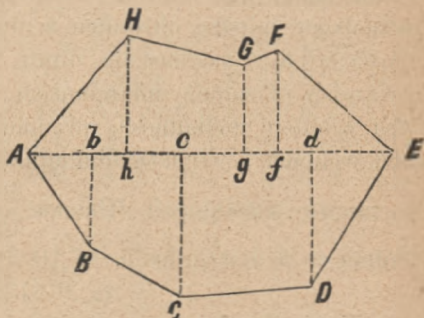


Fig. 21.



a) We wieloboku ABCDEF (fig. 20.) dane są:

$AD = 19.6\text{ m}$, $Bb = 10.6\text{ m}$, $Ee = 7.8\text{ m}$, $BD = 17.7\text{ m}$,
 $Cc = 3.8\text{ m}$, $Ae = 14.3\text{ m}$, $Ff = 5.2\text{ m}$.

b) We wieloboku ABCDEFGH (fig. 21.) są dane:

$Bb = 6.8\text{ m}$, $Cc = 10.6\text{ m}$, $Dd = 10.1\text{ m}$, $Ff = 8.3\text{ m}$,
 $Gg = 6.2\text{ m}$, $Hh = 9.2\text{ m}$, $Ab = 5.6\text{ m}$, $bh = 2.6\text{ m}$,
 $hc = 4.2\text{ m}$, $cg = 4.6\text{ m}$, $gf = 3\text{ m}$, $fd = 2.8\text{ m}$, $dE = 5.8\text{ m}$,

2. Pomiar koła.

Obwód.

§. 32. Sześciobok umiarowy, wpisany w koło, ma mniejszy, zaś opisany na kole, ma większy obwód niż koło. Obliczywszy zatem obwody tych sześcioboków, otrzymamy dwie wartości, między którymi mieści się obwód koła. Jeszcze ciśnień ograniczają obwód koła, obwody wpisanego i opisanego 12-boku, 24-boku. 48-boku i t. d. Podwajając w ten sposób ciągle liczbę boków, znajdziemy, że

obwód wpisanego umiarowego 3072-boku $= 3.141592 \times d$,

„ opisanego „ „ „ $= 3.141594 \times d$,

gdzie d jest średnicą koła.

A ponieważ obwód koła zawsze mieści się pomiędzy obwodem wpisanego i opisanego wieloboku, przeto te miejsca dziesiętne, w których zgadzają się ze sobą obwody wpisanego i opisanego 3072-boku, muszą być dobre i dla obwodu koła. Mamy zatem dokładnie w 5 dziesiętnych

$$\text{obwód koła} = 3.14159 \times d.$$

Liczbę 3.14159, przez którą potrzeba pomnożyć średnicę koła, by otrzymać jego obwód, a więc liczbę, oznaczającą stosunek, zachodzący między obwodem a średnicą koła, nazwano liczbą Ludolph'a i naznaczono literą π . Liczbę π można oznaczyć z wszelką pożądaną dokładnością. W rachunkach niewymagających wielkiej dokładności, przyjmuje się $\pi = 3\frac{1}{7} = 3.14$; przy rachowaniach z większą dokładnością potrzeba uwzględnić więcej miejsc dziesiętnych. Ułamek $\frac{355}{113} = 3.141593$ oznacza π dokładnie w 6 dziesiętnych. W 10 dziesiętnych mamy

$$\pi = 3.1415926536.$$

§. 33. Znacząc przez r , d i p liczby wymiarowe promienia, a względnie średnicy i obwodu koła, mamy na mocy powyższego rozumowania:

$$1. \quad p = d\pi,$$

$$2. \quad p = 2 \text{ tj. } r;$$

a) Obwód koła równa się iloczynowi ze średnicy, albo z podwójnego promienia, przez liczbę Ludolph'a. Następnie mamy:

$$3. \quad d = \frac{p}{\pi}, \quad 4. \quad r = \frac{p}{2\pi}; \text{ t. j.}$$

b) Średnica koła równa się obwodowi podzielonemu przez liczbę Ludolph'a;

c) Promień koła równa się obwodowi podzielonemu przez podwójną liczbę Ludolph'a;

Jeżeli n. p. promień koła $r = 4 m$, natenczas średnica $d = 8 m$, a obwód

$$p = 8 \times 3.14 = 25.12 m.$$

Przeciwnie, jeżeli $p = 20 dm$, mamy

$$d = 20 : 3.14 = 6.37 dm, \text{ zaś } r = 3.18 dm.$$

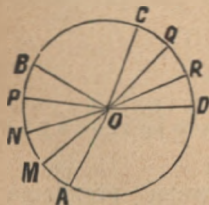
Jeżeli R i r oznaczają promienie dwóch kół, D i d średnice, a P i p ich obwody, mamy:

$$P = D\pi \text{ a } p = d\pi, \text{ stąd } P : p = D : d = R : r; \text{ t. j.}$$

d) Obwody dwóch kół mają się tak do siebie, jak ich promienie, albo jak ich średnice.

§. 34. Jeżeli w kole (fig. 22.) kąty AOM, MON, NOP, POB, COQ, QOR i ROD są sobie równe, natenczas także i łuki

Fig. 22.



AM, MN, NP, PB, CQ, QR i RD muszą być sobie równe, a także i wycinki kołowe, przynależne do tych łuków, muszą być sobie równe.

Zatem nie tylko kąt AOM mieści się w kącie AOB 4 razy, a w COD 3 razy, lecz także łuk AM zawiera się w łuku AB 4 razy, zaś w łuku CD 3 razy; podobnie mieści się wycinek kołowy AOM w wycinku AOB 4 razy, a w wycinku COD 3 razy; mamy zatem następujące proporcye:

$$\text{kąt} \quad AOB : COD = 4 : 3,$$

$$\text{łuk} \quad AB : CB = 4 : 3,$$

$$\text{wycinek} \quad AOB : COD = 4 : 3.$$

Z tego wynika:

Dwa łuki albo dwa wycinki jednego i tego samego koła mają się tak do siebie jak odpowiednie im kąty środkowe.

§. 35. Łuk można mierzyć albo stopniami łukowymi, minutami i sekundami, albo jednostką długości.

Cheąc łuk kołowy zmierzony stopniami wyrazić w jednostkach długości i na odwrót, używamy następującego twierdzenia, wynikającego z §. 34.

Długość łuku ma się tak do obwodu, jak przy należny kąt środkowy do 360° ,

Jeżeli więc w kole o promieniu r oznacza b długość łuku, mającego m° , do którego zatem należy kąt środkowy m° , mamy według powyższego twierdzenia:

$$b : 2r\pi = m^\circ : 360^\circ;$$

z tej proporeyi można obliczyć każdą z trzech ilości b , m , r , jeżeli dwie inne są dane. I tak otrzymamy:

$$b = \frac{mr\pi}{180}, m = \frac{180b}{r\pi} \text{ i } r = \frac{180b}{m\pi}.$$

N. p. Jak długi jest łuk 35° w kole o promieniu $2 dm$?

$$b = \frac{35 \cdot 2 \cdot 3.14}{180} = 1.22 dm.$$

W szczególności mamy:

$$1 \text{ stopień łukowy} = r\pi : 180 = 0.017453 r,$$

$$1 \text{ minuta łukowa} = r\pi : 10800 = 0.000291 r,$$

$$1 \text{ sekunda } = r\pi : 648000 = 0.000005 r.$$

Powierzchnia koła.

§. 36. 1. Z §. 8. 1 i z §. 27. 1 wynika:

Powierzchnia koła równa się połowie iloczynu z obwodu i promienia.

Jeżeli r , p i f są liczbami wymiarowemi promienia, a względnie obwodu i powierzchni koła, mamy:

$$f = \frac{p \cdot r}{2}.$$

Jeżeli n. p. promień $r = 8 dm$, będzie $p = 16 \times 3.14 = 50.24 dm.$, a $f = 50.24 \times 4 = 200.96 dm^2$.

Jak wielka jest powierzchnia koła, którego obwód równa się $44 cm$?

$$44 cm : 3\frac{1}{2} = 14 cm \text{ średnicy,}$$

$$44 \times \frac{7}{2} = 154 cm^2 \text{ powierzchni.}$$

2. Ponieważ $p = 2r\pi$, przeto otrzymamy z $f = p \cdot \frac{r}{2}$ także:

$$f = 2r\pi \cdot \frac{r}{2}, \text{ czyli } f = r^2\pi; \text{ t. j.}$$

Powierzchnia koła równa się iloczynowi z kwadratu promienia przez liczbę Ludolph'a.

Jeżeli n. p. promień $r = 5 m$, to

$$f = 5^2 \times 3.1416 = 25 \times 3.1416 = 78.54 m^2.$$

3. Jeżeli przez R i r naznaczymy promienie dwóch kół, a przez F i f ich powierzchnie, otrzymamy:

$$F = R^2\pi, \text{ zaś } f = r^2\pi, \text{ zatem}$$

$$F : f = R^2 : r^2; \text{ t. j.}$$

Powierzchnie dwóch kół mają się tak do siebie jak kwadraty ich promieni, albo także jak kwadraty ich średnic.

§. 37. Niech będzie w trójkącie ABC (fig. 23.) kąt przy B kątem prostym. Zakreślając na bokach tego trójkąta, jako na średnicach, koła, otrzymamy według twierdzenia Pitagorasa:

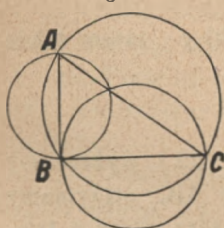
$$AC^2 = AB^2 + BC^2,$$

zatem także $\frac{AC^2}{4} = \frac{AB^2}{4} + \frac{BC^2}{4}$, czyli $\left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$;

mnożąc wyrazy ostatniego równania przez π , będzie

$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2 \pi = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \pi + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \pi.$$

Fig. 23.



Atoli te trzy ilości oznaczają kolejno powierzchnie kół, zakreślonych na przeciwprostokątnej i na obu przyprostokątniach. Zatem:

Powierzchnia koła zakreślonego na przeciwprostokątnej równa się sumie powierzchni obu kół, zakreślonych na przyprostokątniach.

Wykreście koło równe a) sumie, b) różnicy dwóch danych kół.

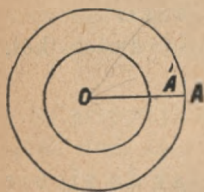
§. 38. Obliczyć powierzchnię pierścienia kołowego.

Należy odjąć powierzchnię mniejszego koła od powierzchni większego, albo potrzeba kwadrat mniejszego promienia odjąć od kwadratu większego, a różnicę pomnożyć przez liczbę Ludolpha.

Jeżeli (fig. 2.) $OA = R$ a $OA' = r$ są promieniami dwóch kół współśrodkowych, zaś f oznacza powierzchnię pierścienia kołowego, mamy:

$$f = (R^2 - r^2) \pi.$$

Fig. 24.



Niech będzie n. p. $R = 5 \text{ dm}$ a $r = 3 \text{ dm}$; otrzymamy

$$\begin{aligned} R^2 &= 25 \\ r^2 &= 9 \\ \hline f &= 16 \times 3.14 \\ &= 50.24 \text{ dm}^2. \end{aligned}$$

§. 39. Z §. 8. 2 i §. 27. 1 wynika następujące twierdzenie o powierzchni wycinka kołowego:

Powierzchnia wycinka kołowego równa się połowie iloczynu z długości jego łuku i z promienia.

Jeżeli przez r , b i f naznaczymy liczby wymiarowe promienia, a względnie długości łuku i powierzchni wycinka kołowego, będzie

$$f = \frac{b \cdot r}{2}.$$

Jeżeli zamiast długości łuku mamy dany kąt m° przynależny wycinkowi, otrzymamy według §. 35

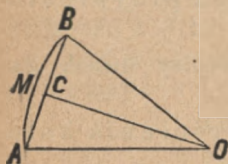
$$b = \frac{m r \pi}{180}, \text{ przeto } f = \frac{m r^2 \pi}{360}.$$

Z ostatniej równości mamy $m r^2 \pi = 360 f$; zatem także

$$m = \frac{360 \cdot f}{r^2 \pi}.$$

Dodatek. Jeżeli w wycinku AOB (fig. 25.) wykreślimy

Fig. 25.



przynależną mu cięciwę AB, otrzymamy odcinek kołowy ABM, który wraz z trójkątem ABO daje wycinek AOB. Jeżeli zatem od powierzchni wycinka odejmiemy powierzchnię trójkąta, otrzymamy powierzchnię odcinka.

§. 40. Zadania.

1. Średnica koła równa się

a) 3 m, b) $2\frac{1}{2}$ m, c) 0·56 m, d) 5 dm 4 cm 8 mm;

jak wielki jest jego obwód?

2. Promień koła równa się

a) 3·7 m, b) 1 m 6 dm 5 cm, c) 1·205 m;

jak wielki jest jego obwód?

3. Obwód koła równa się

a) 5 m, b) 27 dm, c) 339·202 cm, d) 2506·99 mm;

jak wielka jest jego średnica? ($\pi = 3\cdot1416$).

4. Wyrachujcie promień koła, którego obwód równa się:

a) 44 dm, b) 18·2 cm, c) 1 m 5 dm 3 cm.

5. Obliczcie powierzchnię koła, którego promień równa się:

a) 4 m, b) 2·92 m, c) 3 dm 28 mm, d) $42\frac{1}{2}$ cm.

6. Średnica koła równa się:

a) 3·75 m, b) 21·02 dm, c) 1 m 5 cm, d) 259·3 mm;

jak wielki jest jego obwód, a jak wielka jego powierzchnia?

7. Obwód koła równa się:

a) 17·97 dm, b) 5 m 8 dm 75 mm, c) $219\frac{1}{2}$ mm;

wyrachujcie jego m) promień, n) powierzchnię.

8. Jak długi jest łuk 20° , jeżeli średnica koła równa się 5 dm 4 cm?9. Promień koła równa się 2 m; jak długi jest łuk a) 30° , b) 125° , c) $75^\circ 30'$?10. Łuk kołowy, przynależny do kąta środkowego 48° , jest 4 dm 26 mm długi; jak wielki jest promień?

11. Łuk koła o średnicy 22·5 cm jest 29 cm długi; jak wielki jest kąt środkowy przynależny do tego łuku?

12. Promień koła równa się 8 dm; ile stopni ma kąt środkowy, wspierający się na łuku a) 5 dm, b) 12 dm, c) 2 dm 28 mm długim?

13. Wiele stopni, minut i sekund ma łuk kołowy, którego długość równa się promieniowi?

14. Jak wielki obwód ma tarcza u zegara wieżowego, jeżeli jej średnica równa się 0·96 m?

15. Pień drzewa ma 16 dm 2 cm w obwodzie, jak wielka jest jego średnica?

16. Stopień na równiku ziemi równa się 15 milom geogr.; jak wielki jest promień równika a) w milach geograf., b) w *km*, jeżeli 1 geograf. mila = $7\cdot42044$ *km*? ($\pi = 3\cdot14159$).

17. Globus ziemi ma 42 *cm* w średnicy; jak długi jest na nim 1 stopień równika?

18. Szerokość geograficzna Krakowa równa się $50^{\circ} 3' 50''$; ile *km* jest Kraków oddalony od równika, jeżeli południk jego jest kołem o promieniu 6371·56 *km*?

19. Jeden stopień na równoleżniku miasta Triestu jest długi 77·961, na równoleżniku Wiednia 74·314, a na równoleżniku Pragi 71·554 *km*; jak wielki promień ma każdy z tych trzech równoleżników?

20. Jak wielki musi być promień okrągłego stołu, naokoło którego ma siedzieć 8 osób, jeżeli na każdą osobę liczy się po 7 *dm* 2 *cm* z obwodu?

21. Wiele drzew można zasadzić naokoło okrągłego stawu o średnicy 87 *m*, jeżeli oddalenie jednego drzewa od drugiego ma się równać 4 *m*?

22. Aby naokoło obejść okrągły staw, potrzeba 10 minut czasu; jak wielka jest średnica tego stawu, jeżeli w każdej sekundzie przebywa się drogę 1 *m* 2 *dm*?

23. Koło u lokomotywy ma w średnicy 1 *m* 2 *dm*; ile razy musi się ono obrócić na drodze 1 *km* długiej?

24. Średnica windy u studni równa się 2 *dm* 5 *cm*; jak głęboka jest ta studnia, jeżeli sznur, sięgający aż do jej dna, daje się nawinąć na windę 15 razy?

25. Przednie koło u wozu ma 1·2 *m*, a tylne 1·7 *m* w średnicy; wiele obrotów więcej robi pierwsze od drugiego na drodze 4 *km*?

26. Jak wielkie jest ciśnienie powietrza na powierzchnię kołową o średnicy 1·2 *m*, jeżeli ciśnienie jego na 1 *cm*² równa się 1·033 *kg*?

27. Obwód pnia drzewa w przekroju poprzecznym równa się 2 *m* 3 *dm*; jak wielka jest powierzchnia tego przekroju?

28. Jak wielki jest wewnętrzny i zewnętrzny obwód żelaznego pierścienia o grubości 2·6 *cm*, jeżeli średnica mniejszego koła równa się 3 *dm*?

29. Okrągła wieża ma wewnątrz obwód $25\cdot2\text{ m}$, a zewnątrz obwód 35 m ; jak gruby jest jej mur?

30. Promienie dwóch współśrodkowych kół są:

a) $R = 6\text{ m}$, $r = 4\text{ m}$; b) $R = 3\text{ m } 5\text{ dm}$, $r = 2\text{ m } 8\text{ dm}$; jak wielka jest powierzchnia pierścienia?

31. Obwody dwóch współśrodkowych kół równają się 137 cm i 152 cm ; jak wielki jest między nimi zawarty pierścień kołowy?

32. Średnica koła równa się 1 m ; jak wielkie jest współśrodkowe wycięte koło, jeżeli powstały pierścień jest $1\text{ dm } 7\text{ cm}$ szeroki?

33. Naokoło okrągłego trawnika o obwodzie $28\text{ m } 4\text{ dm}$ jest droga $1\text{ m } 4\text{ dm}$ szeroka; jaką powierzchnię zajmuje ta droga?

34. Jak wielka jest powierzchnia wycinka kołowego, którego promień jest $3\cdot24\text{ dm}$ długi, a którego łuk ma $4\cdot5\text{ lm}$ długości?

35. Obwód koła równa się 249 mm ; jak wielka jest powierzchnia wycinka tego koła, jeżeli kąt środkowy, przynależny wycinkowi, ma 75° ?

36. Obliczcie powierzchnię wycinka kołowego, którego łuk ma długość $2\cdot7\text{ dm}$, a w mierze stopniowej 75° ?

37. Wiele stopni ma łuk wycinka kołowego o powierzchni $11\cdot82743\text{ dm}^2$, jeżeli promień jego równa się 5 dm ? ($\pi = 3\cdot14159$).

38. Z drewnianej tarczy kołowej, mającej obwód $1\cdot2\text{ m}$, odciał stolarz naokoło $0\cdot5\text{ dm}$; jak wielki jest obwód, a jak wielka powierzchnia pozostałej tarczy?

39. O ile jest większą powierzchnia koła o promieniu $8\cdot5\text{ cm}$ od powierzchni kwadratu, wpisanego w to koło?

40. Koło rozpędowe o obwodzie 12 m robi w 1 minucie 40 obrotów; z jaką chyżością porusza się punkt, leżący na jego obwodzie, t. j. ile metrów przebiega w sekundzie.

41. Jaką średnicę ma koło, które w 1 minucie robi 72 obrotów, jeżeli punkt na jego obwodzie porusza się z chyżością 21 m ?

42. Wiele obrotów w 1 minucie musi wykonywać koło młyńskie o średnicy 1 m , by punkt jego obwodu miał chyżość 8 m ?

43. W pudełku okrągłym o średnicy 2.8 cm mieści się 100 zapalek; wiele zapalek tej samej grubości pomieści się w pudełku o średnicy 4 cm ?

44. Na tarczy, służącej za cel przy strzelaniu, znajduje się jedna biała i cztery czarne powierzchnie w kształcie pierścienia kołowego; zewnętrzny biały pierścień ma szerokość 32 cm , a każdy czarny szerokość 2 cm . Środek tarczy jest kołem o średnicy 6 cm . Jak wielka jest *a)* cała tarcza, *b)* środkowa powierzchnia kołowa, *c)* powierzchnia każdego pierścienia?

III. Podobieństwo figur prostokreślnych.

1. Proporcjonalność długości.

§. 41. Stosunkiem dwóch długości (Verhältnis zweier Strecken) nazywamy iloraz ich liczb wymiarowych ze względu na jedną i tę samą jednostkę.

Chcąc liczbami wyrazić stosunek dwóch długości, odmierzamy krótszą długość na dłuższej tyle razy, ile razy się da.

a) Jeżeli krótsza długość CD (fig. 26.) mieści się bez reszty

Fig. 26.

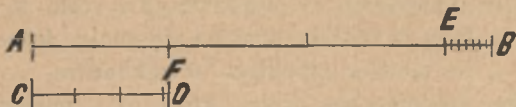
$A|-----|B$

$C|-----|D$

w dłuższej długości AB kilka razy, n. p. 3 razy, natenczas jest CD miarą (Mass) długości AB . Stosunek długości AB i CD jest w tym razie równy $3 : 1$.

b) Jeżeli zaś mniejsza długość w większej nie mieści się bez reszty, n. p. długość CD (fig. 27.) mieści się w AB 3 razy i pozostaje jeszcze reszta EB , natenczas odmierza się resztę EB na

Fig. 27.



CD tyle razy, ile razy się da; niech EB mieści się w CD 3 razy i niech pozostaje reszta FD . Tę resztę odmierza się znowu na poprzedzającej i niech FD mieści się w EB dokładnie 6 razy. Mamy wtedy:

$$EB = 6 FD,$$

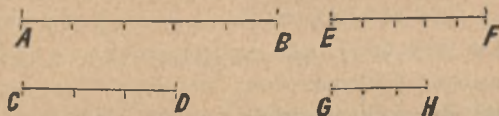
$$CD = 3 EB + FD = 19 FD,$$

$$AB = 3 CD + EB = 63 FD.$$

Dłuznie AB i CD mają zatem wspólną miarę (das gemeinsame Mass) FD, a mianowicie mieści się ona w AB 63 razy, a w CD 19 razy; między AB i CD zachodzi przeto stosunek 63 : 19.

§. 42. Dłuznie AB i CD pozostają do siebie w stosunku 5 : 3; dłuznie EF i GH mają ten sam stosunek 5 : 3. Pisząc między

Fig. 28.



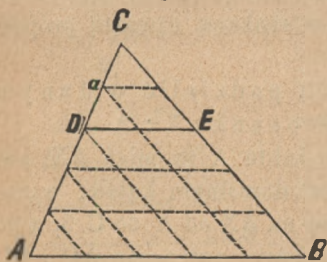
równymi stosunkami $AB : CD$ i $EF : GH$ znak równości, otrzymamy proporcją (Proportion) $AB : CD = EF : GH$.

W takim razie mówimy, że dłuznie AB i EF są proporcjonalne do dłuzni CD i GH.

Jeżeli $CD = EF$, natenczas proporcją $AB : CD = CD : GH$ nazywamy proporcją ciągłą (stetige Proportion); CD jest średnią geometrycznie proporcjonalną (die mittlere geometrische Proportionale) między AB i GH, a GH jest trzecią ciągłą proporcjonalną do AB i CD.

§. 43. a) Niech będzie w trójkącie ABC (fig. 29.) $DE \parallel AB$, a Ca miarą, mieszczącą się w dłuzni AD 3 razy, zaś w dłuzni

Fig. 29.



DC 2 razy; mamy wtedy $AD : DC = 3 : 2$. Podzielmy AC na 5 równych części i wykreślmy przez punkty podziału równoległe do AB, a podzielmy przez to także bok BC na 5 równych sobie części, z których 3 przypadają na EB, a 2 na CE; zatem także $BE : EC = 3 : 2$. Z obu powyższych proporcji wynika

$$AD : DC = BE : EC.$$

b) Następnie mamy

$$CD : AC = 2 : 5 \text{ i}$$

$$CE : BC = 2 : 5.$$

Wykreśliwszy nareszcie przez punkty podziału boku AC równoległą do BC, podzielimy przez to bok AB na 5 równych części, a bok DE na 2 równe części. Części dłużni AB są równe częściom: dłużni DE, bo równoległe między równoległymi są równe; przeto także

$$DE : AB = 2 : 5.$$

Z trzech ostatnich proporcji mamy zatem:

$$CD : AC = CE : BC = DE : AB.$$

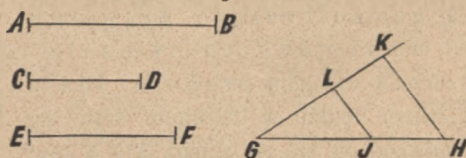
Jeżeli więc w trójkącie wykreślimy równoległą do jednego boku, natenczas a) równoległa ta dzieli dwa inne boki trójkąta na części proporcjonalne, b) boki nowego trójkąta są proporcjonalne do boków danego trójkąta.

Zadania do wykreślenia.

§. 44. Do trzech danych dłużni AB, CD i EF (fig. 30.) znaleźć czwartą proporcjonalną.

Wykreśla się kąt G dowolnej wielkości, odmierza się na jego ramionach $GH = AB$, $GJ = CD$, $GK = EF$, i połączywszy punkty H i K zapomocą prostej HK wykreśla się z J do niej

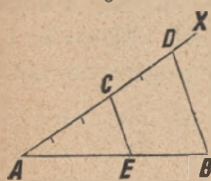
Fig. 30.



równoległą JL. Mamy wtedy $GH : GJ = GK : GL$, czyli $AB : CD = EF : GL$; więc GL jest szukaną czwartą proporcjonalną do AB, CD i EF.

§. 45. 1. Dłużnię AB (fig. 31.) podzielić w danym stosunku liczbowym, n. p. w stosunku 3 : 2.

Fig. 31.



Kreśli się z punktu A promień AX, nachylony do AB pod dowolnym kątem, a następnie odmierza się na AX od A do C 3, a od C do D 2 równe części; natenczas $AC : CD = 3 : 2$. Wykreślimy teraz prostą DB i do niej równoległą CE, a będzie także $AE : EB = 3 : 2$; zatem punkt E dzieli prostą AB w stosunku 3 : 2.

2. Daną dłuźnię podzielić w stosunku danych dłuźni.

Jeżeli dłuźnię AB (fig. 31.) mamy podzielić na dwie części, któreby pozostawały do siebie w takim stosunku jak $AC : CD$, natenczas odmierzamy na AX dane dłuźnie AC i CD , a następnie kreślimy DB i z punktu C prostą $CE \parallel DB$. Mamy wtedy $AE : EB = AC : CD$.

3. Daną dłuźnię AE (fig. 31.) powiększyć w danym stosunku, n. p. w stosunku $3 : 5$.

4. Daną dłuźnię AB (fig. 31.) pomniejszyć w danym stosunku $5 : 3$.

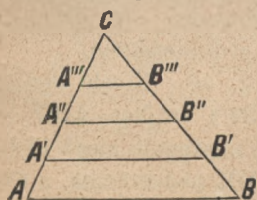
Konstrukcyja przy rozwiązywaniu zadania 3. i 4. będzie ta sama i wtedy, gdyby stosunek powiększenia lub pomniejszenia był podany nie w liczbach, lecz w dłuźniach; tylko odmierza się w tym drugim razie na ramieniu AX zamiast liczb stosunkowych dłuźnie stosunkowe.

2. Podobieństwo trójkątów.

§. 46. Dwie figury, mające ten sam kształt, a różniące się tylko wielkością, nazywamy podobnemi (*ähnlich*). Znakiem podobieństwa jest $\sim$, który piszemy między dwoma podobnemi figurami.

Aby wykryć cechy podobieństwa dwóch trójkątów, posuwajmy w trójkącie ABC (fig. 32.) oba punkty A i B po bokach AC i BC tak ku wierzchołkowi C , by dłuźnie, łączące owe punkty, t. j. dłuźnie $A'B'$, $A''B''$, ..., w każdym nowem położeniu były równoległe do AB . Każdy z powstałych przez to trójkątów, jak $A'B'C'$, $A''B''C''$, ..., będzie wprawdzie mniejszy od poprzedzającego, ale będzie miał ten sam kształt; będą to więc trójkąty podobne. We wszystkich tych trójkątach będą co dwa, jednakowo położone kąty, sobie równe, a także według §. 43. będą boki każdego z nowopowstałych trójkątów proporcjonalne do boków danego trójkąta.

Fig. 32.



Dwa trójkąty są zatem podobne, jeżeli mają kąty parami równe, a boki leżące naprzeciw równych kątów proporcjonalne.

Te boki w podobnych trójkątach, które eżą naprzeciw równych kątów nazwano bokami odpowiednimi albo homologicznymi (gleichliegende albo homologe Seiten).

Z §. 43. wynika przeto następujące twierdzenie:

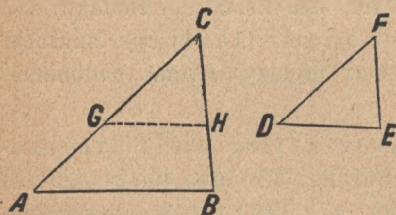
Jeżeli w trójkącie wykreślimy równoległą do jednego boku, otrzymamy trójkąt podobny do danego trójkąta.

§. 47. Równość kątów w dwóch trójkątach i proporcjonalność ich boków pozostają ze sobą w tak ścisłym związku, że z samej równości kątów w dwóch trójkątach można wnosić o podobieństwie tych trójkątów.

Niech w trójkątach ABC i DEF (fig. 33.) kąt $A = D$, $B = E$, natenczas także kąt C musi być równy kątowi F.

Odmierzmy $CG = DF$ i wykreślimy $GH \parallel AB$, a otrzymamy trójkąt $GHC \cong DEF$; a ponieważ $\triangle ABC \cong \triangle GHC$, przeto także $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Fig. 33.

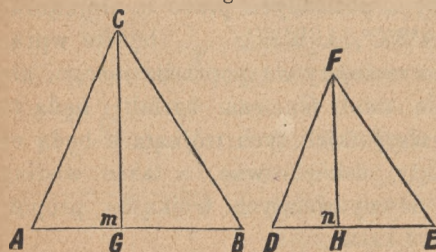


Z tego wynika:

Trójkąty, mające wszystkie trzy kąty parami równe, są do siebie podobne.

Ponieważ w dwóch trójkątach, mających po dwa kąty równe, także trzecie kąty muszą być równe, przeto już z równości co dwóch kątów w trójkątach można wnosić o ich podobieństwie.

Fig. 34.



§. 48. Niech będzie (fig. 34.) trójkąt $ABC \sim DEF$; następnie niech będą AB i DE podstawami, a CG i FH wysokościami tych trójkątów.

Ponieważ według założenia kąt $A = D$, zaś $m = n$, przeto $\triangle ACG \sim$

$\triangle DFH$, a zatem $CG : FH = AC : DF$. Z powodu podobieństwa trójkątów ABC i DEF mamy $AB : DE = AC : DF$, zatem także $CG : FH = AB : DE$; t. j.

W dwóch podobnych trójkątach są wysokości proporcjonalne do podstaw.

§. 49. Jeżeli każdy bok jednego trójkąta jest 2 razy, 3 razy, 4 razy tak wielki jak odpowiedni bok trójkąta podobnego, natenczas także suma wszystkich boków, t. j. obwód pierwszego trójkąta musi być 2 razy, 3 razy, 4 razy większy od obwodu drugiego trójkąta.

W trójkątach podobnych są obwody proporcjonalne co do dwóch odpowiednich boków.

§. 50. Niech będzie (fig. 34.) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$; oznaczmy przez F powierzchnię pierwszego trójkąta, zaś przez f powierzchnię drugiego, to otrzymamy

$$F = \frac{AB \cdot CG}{2}, \text{ zaś } f = \frac{DE \cdot FH}{2}, \text{ zatem}$$

$$F : f = AB \cdot CG : DE \cdot FH;$$

$$\text{a że } AB : DE = AB : DE, \text{ i}$$

$$CG : FH = AB : DE \text{ (§. 48.),}$$

skąd

$$AB \cdot CG : DE \cdot FH = AB^2 : DE^2, \text{ więc}$$

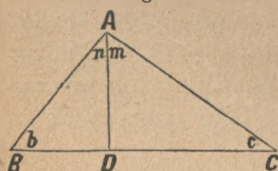
$$F : f = AB^2 : DE^2; \text{ t. j.}$$

Powierzchnie trójkątów podobnych są proporcjonalne względem kwadratów odpowiednich boków.

Jeżeli każdy bok jednego trójkąta jest 2, 3, 4, 5, 6 razy większy od odpowiedniego boku trójkąta podobnego, natenczas powierzchnia pierwszego trójkąta jest 4, 9, 16, 25, 36 razy większą od powierzchni drugiego trójkąta.

§. 51. Niech będzie trójkąt BAC (fig. 35.) przy A prostokątny i niech $AD \perp$ do przeciwprostokątnej BC .

Fig. 35.



W trójkątach BAC i BDA jest kąt $BAC = \sphericalangle BDA = R$, zaś $b = b$; zatem musi także $c = n$, a więc $\triangle BAC \sim \triangle BDA$.

W trójkątach BAC i ADC jest $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADC = R$, zaś $c = c$; zatem musi także $b = m$, więc $\triangle BAC \sim \triangle ADC$.

Ponieważ $\triangle BAC \sim \triangle BDA$ i $\triangle BAC \sim \triangle ADC$, przeto musi być także $\triangle BDA \sim \triangle ADC$.

1. W trójkątach podobnych są boki, leżące naprzeciw równych kątów, proporcjonalne; zatem

$$\begin{aligned} \text{z } \triangle BAC \sim \triangle BDA \text{ wypływa } BC : AB &= AB : BD, \\ \text{„ } \triangle BAC \sim \triangle ADC \text{ „ } BC : AC &= AC : CD. \end{aligned}$$

2. Podobnie otrzymamy

z podobieństwa $\triangle BDA \sim \triangle ADC \dots BD : AD = AD : CD$.

Jeżeli więc w trójkącie prostokątnym wykreślimy z wierzchołka kąta prostego prostopadłą do przeciwprostokątnej, natenczas:

1. każda przyprostokątnia danego trójkąta jest średnią proporcjonalną między całą przeciwprostokątną a jej odcinkiem, przyległym tej przyprostokątnej;

2. rzeczona prostopadła jest średnią geometrycznie proporcjonalną między oboma odcinkami przeciwprostokątnej.

Związki powyższe można wywieść także z twierdzeń, udowodnionych w §§. 11. i 10.

Według §. 11. mamy bowiem

$$AB^2 = BC \cdot BD, \text{ czyli } AB \cdot AB = BC \cdot BD,$$

$$\text{ i } AC^2 = BC \cdot CD, \text{ czyli } AC \cdot AC = BC \cdot CD,$$

zaś według §. 10. jest

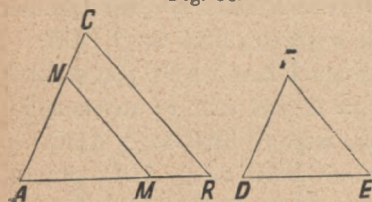
$$AD^2 = BD \cdot CD, \text{ czyli } AD \cdot AD = BD \cdot CD.$$

Jeżeli te trzy pary iloczynów równych zamienimy na proporcję, pisząc czynniki każdego pierwszego iloczynu jako wyrazy skrajne, a czynniki drugiego równego jako wyrazy średnie proporcji, otrzymamy trzy proporcje zgodne z temi, jakie pod 1. i 2. wyprowadziliśmy.

Zadania do wykreślenia.

§. 52. 1. Na danym odcinku DE (fig. 36.) wykreślić trójkąt podobny do danego trójkąta ABC.

Fig. 36.



Odmierzamy przy D kąt $\angle EDF = \angle BAC$, a przy E $\angle DEF = \angle ABC$; ich ramiona przecinają się w F, a DEF jest żądanym trójkątem.

2. Do trójkąta ABC (fig. 36.) wykreślić trójkąt podo-

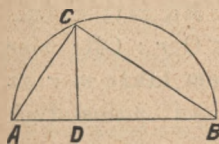
bny taki, żeby boki danego trójkąta pozostawały do boków nowego trójkąta w stosunku 5 : 3.

Szuka się najpierw do AB odcinka, pomniejszonego w stosunku 5 : 3, a następnie odmierza się go na AB od A do M i wykreśla się MN $\parallel$ BC, natenczas AMN jest żądanym trójkątem.

3. Wykreślić trójkąt podobny do danego trójkąta a nadto taki, żeby jego boki miały się tak do boków danego trójkąta, jak 5 : 3.

§. 53. Do dwu danych odcinków a i b wykreślić trzecią ciągłą proporecyonalną.

Fig. 37.



Wykreślamy $DC \perp AB$ (fig. 37.) i odmierzamy $DA = a$, $DC = b$; następnie kreślimy AC i do niej prostopadłą CB aż do przecięcia się z przedłużoną prostą AD w punkcie B. Mamy wtedy $DA : DC = DC : DB$ (§. 51. 2.), czyli $a : b = b : DB$; zatem DB jest trzecią proporecyonalną do a i b .

§. 54. Do dwu danych odcinków a i b wykreślić średnią geometrycznie proporecyonalną.

Rozwiązanie 1. Odmierza się (fig. 37.) $AD = a$, $DB = b$; następnie zakreśla się na AB półkole i wykreśla się w D prostą $DC \perp AB$; DC jest średnią proporecyonalną do AD i DB (§. 51. 2.).

Rozwiązanie 2. Odmierza się AB równe dłuższemu odcinkowi a , zaś $AD = b$; następnie zakreśla się na AB półkole i wykreśla się $DC \perp AB$. Cięciwa AC jest szukaną średnią proporecyonalną do a i b (§. 51. 1.).

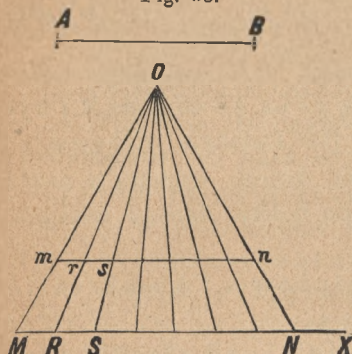
§. 55. Dany odcinek podzielić na kilka równych części.

a) Jedno rozwiązanie tego zadania podaliśmy już w I. części tej książki; jest ono jednakowoż żmudne i łatwo w niem błąd popełnić, gdyż potrzeba kreślić wiele linii równoległych.

b) Prostsze jest następujące rozwiązanie:

Odcinek AB (fig. 38.) mamy podzielić n. p. na 7 równych części; wykreślimy w tym celu promień MX, odmierzymy na nim 7 równych a zresztą dowolnie wielkich części aż do punktu N i następnie wykreślimy na MN trójkąt równoboczny MNO. Od-

Fig. 38.

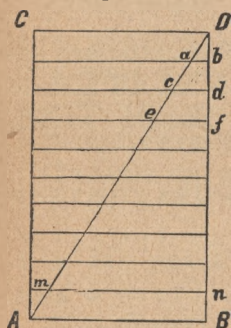


Albowiem $\triangle O m r \sim \triangle OMR$, zatem $mr : MR = Or : OR$; następnie $\triangle O r s \sim \triangle ORS$, przeto $rs : RS = Or : OR$; więc także $mr : MR = rs : RS$. Ale $MR = RS$, zatem także $mr = rs$. W podobny sposób można dowieść równości pozostałych części odcinka mn .

c) Chcąc zaś podzielić odcinek na bardzo małe cząsteczki, które według podanego pod b) dzielenia byłyby już niewyraźne, używamy następującego sposobu:

Mamy podzielić AB (fig. 39.) n. p. na 10 równych części. W tym celu wykreślamy w A i B dwie prostopadłe do AB , od-

Fig. 39.



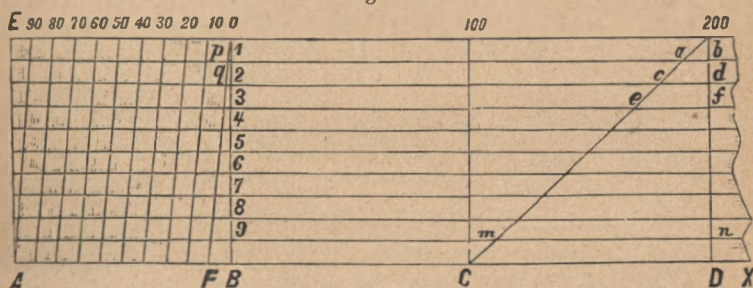
mierzamy na nich po 10 równych części i kreślimy przez każde dwa odpowiednie punkty podziału proste. Jeżeli następnie wykreślimy w prostokącie $ABDC$ przekątną AD , będzie zadanie rozwiązane. Z powodu podobieństwa trójkątów Dab i DAB musi stosunek $ab : AB$ równać się stosunkowi $Db : DB$; ale Db jest 10-tą częścią odcinka DB , zatem także ab musi być dziesiątą częścią odcinka AB . Podobnie można dowieść, że $cd = \frac{2}{10} AB$, $ef = \frac{3}{10} AB$, ..., $mn = \frac{9}{10} AB$.

§. 56. 1. Na powyższym sposobie dzielenia odcinka na kilka równych części polega konstrukcja podziałki w zmniejszonych rozmiarach z liniami poprzecznymi (Transversal-Massstab).

Wykreślić podziałkę w zmniejszonych rozmiarach z liniami poprzecznymi dla miary dziesiętnej czyli tak zwaną podziałkę tysięczną (Tausendtheiliger Massstab).

Odmierza się na prostej ABX (fig. 40.) 10 równych odcinków, z których każdy ma przedstawiać 100 jednostek długości. W punktach końcowych wykreśla się dwie prostopadłe do AX i odmierza się na nich znowu 10 równych, zresztą dowolnie długich części. Ostatnie punkty podziału owych normalnych łączy się za pomocą prostej, która do odcinka odmierzonego na AX musi być równoległa i jemu równa. Prosta też dzielimy również na 10 równych części. Następnie kreślimy przez przeciwległe punkty podziału linie proste, które do AX są albo prostopadłe, albo równoległe. Chcąc jedną część n. p. AB podzielić na 10

Fig. 40.



równych części, potrzeba tylko wykreślić w którymkolwiek oddziale przekątnię C 200, a wtedy jest $a b$ dziesiątą częścią odcinka CD, zatem także odcinka AB; $c d$ ma 2 takie części; $e f$ trzy i t. d. Części te odmierza się na AB i E o, i kreśli się przez F i o i przez następne punkty podziału poprzeczne (Transversalen). Nareszcie pisze się koło punktów podziału liczby tak, jak to widzimy na fig. 40.

Cała prosta ADX ma 1000 części; AB jest jej dziesiątą częścią, zatem ma 100 części; BF jako dziesiąta część AB ma 10 takich części; według konstrukcyi jest $p 1$ dziesiątą częścią BF, ma więc 1 taką część, jakich 1000 idzie na całą prostą; $q 2$ ma dwie takie części i t. d.

Jeżeli cała prosta ADX wyobraża n. p. jeden metr, natenczas jest AB decymetrem, BF centymetrem a $p 1$ milimetrem.

2. Zmierzyć odcinek prostej, nakreślonej na papierze, za pomocą podziałki tysięcznej.

3. Wykreście przy pomocy rzeczonyj podziałki odcinek a) 2 dm, b) 19 cm, c) 235 mm, d) 1 dm 8 cm 9 mm długi.

4. Narysujcie trójkąt o bokach 204 mm, 193 mm i 148 mm.

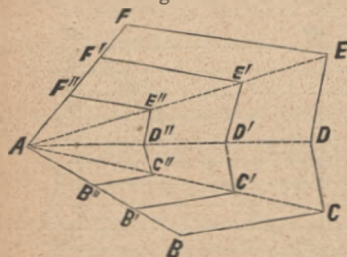
5. W trójkącie ABC stosunek boków $AB : AC$ równa się $5 : 6$; a kąt zawarty $A = 60^\circ$; wykreście na boku 235 mm trójkąt podobny do trójkąta ABC.

Podobieństwo wieloboków.

§.57. Dwa wieloboki nazywamy podobnymi, jeżeli mają ten sam kształt.

Aby wykryć własności wieloboków podobnych, wykreśmy we wieloboku ABCDE (fig. 41.) z wierzchołka A przekątnie AC

Fig. 41.



AD i AE. Niech punkty B, C, D, E, F. po prostych AB, AC, AD, AE, AF tak poruszają się ku punktowi A, żeby proste $B'C'$, $C'D'$, ..., $B''C''$, $C''D''$, w każdym nowem położeniu były równoległe do odpowiednich boków BC, CD ...; otrzymamy wskutek tego mniejsze wieloboki $AB'C'D'E'F'$ $AB''C''D''E''F''$,

... , które oczywiście mają ten sam kształt, co i dany wielobok; są więc wszystkie do siebie podobne. Kąt A jest wszystkim wielobokom wspólny; ale i inne kąty danego wieloboku nie zmieniły swej wielkości przy równoległym przesunięciu boków; zatem wszystkie wieloboki mają kolejno równe kąty. Nadto wynika z §. 43, że boki każdego nowego wieloboku są proporcjonalne względem odpowiednich boków danego wieloboku.

W wielobokach podobnych są więc kąty kolejno parami równe, a odpowiednie boki proporcjonalne.

Dwa umiarowe wieloboki, mające tę samą ilość boków, są podobne.

Z powyższego wywodu wynika następująco:

a) Odpowiednie przekątne dzielą podobne wieloboki na podobne trójkąty.

b) W wielobokach podobnych są odpowiednie przekątne proporcjonalne względem homologicznych boków.

§. 58. Jeżeli każdy bok jednego wieloboku jest 2 razy, 3 razy, 4 razy tak wielki, jak odpowiedni bok wieloboku podobnego, natenczas także suma wszystkich boków, czyli obwód pierwszego wieloboku jest 2 razy, 3 razy, 4 razy większy od obwodu drugiego wieloboku,

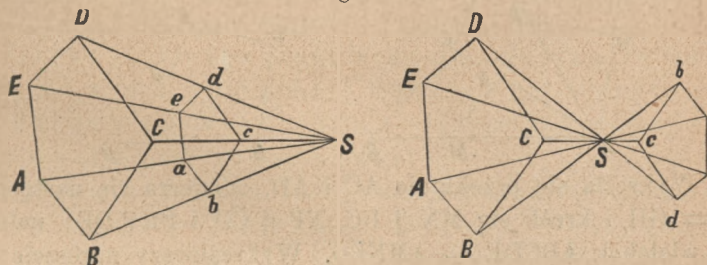
Obwody wieloboków podobnych są zatem proporcjonalne względem odpowiednich boków.

§. 59. Jeżeli zapomocą odpowiednio wykreślonych przekątni podzielimy na trójkąty dwa podobne wieloboki, których boki pozostają do siebie w stosunku n. p. 5 : 3, natenczas według §. 50. powierzchnie każdego z dwu odpowiednio położonych trójkątów pozostają do siebie w stosunku jak 25 : 9; zatem także sumy powierzchni wszystkich takich trójkątów, t. j. powierzchnie obu wieloboków muszą pozostawać do siebie w stosunku 25 : 9.

Powierzchnie wieloboków podobnych są więc proporcjonalne względem kwadratów odpowiednich boków.

Jeżeli jakąś figurę z rzeczywistości zdjętą przedstawiamy na papierze w zmniejszonych rozmiarach w ten sposób, że każdy bok na rysunku jest tylko $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$. . . rzeczywistej długości, natenczas powierzchnia narysowanej figury równa się $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{100}$ części powierzchni rzeczywistej.

Fig. 42.



§. 60. Jeżeli promienie, wykreślone z punktu S, (fig. 42) przetniemy w punktach A i a, B i b, C i c, . . .

na części proporcjonalne, natenczas wieloboki $ABCD$ i $a b c d \dots$ będą podobne.

Niech $SA : S a = SB : S b = SC : S c = \dots$; zatem trójkąty SAB i $S a b$, SBC i $S b c$, SCD i $S c d, \dots$ są podobne, więc $AB : a b = BC : b c$, ponieważ oba te stosunki równają się stosunkowi $SB : S b$. W ten sam sposób można wykazać, że $BC : b c = CD : c d, \dots$. Wieloboki $ABCD \dots$ i $a b c d \dots$ mają zatem odpowiednie boki proporcjonalne.

A ponieważ $AB \parallel a b$, $BC \parallel b c$, $CD \parallel c d, \dots$ przeto także i kąty A i a , B i b , C i $c, \dots$ są sobie równe.

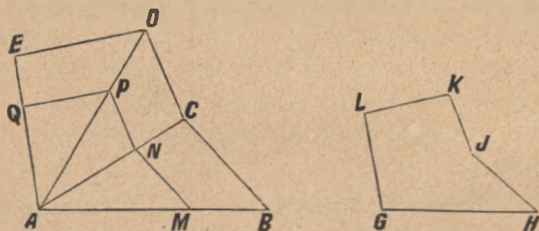
Oba wieloboki są zatem podobne.

Dwa wieloboki podobne można zawsze przez stósowne przesunięcie w takim położeniu umieścić obok siebie, że ich wierzchołki dzielą promienie wykreślone z jednego punktu na części proporcjonalne. O takich wielobokach mówimy wtedy, że są ustawione w perspektywie, zaś punkt S nazywamy punktem podobieństwa (*Ähnlichkeitspunkt*) wieloboków podobnych, a mianowicie zewnętrznym (*äusserer*) albo wewnętrznym, zależnie od tego, czy odpowiednie boki wieloboków leżą po tej samej stronie, czy po przeciwnych tego punktu.

Zadania do wykreślenia.

§. 61. 1. Na danym odcinku GH (fig. 43) wykreślić wielobok, podobny do danego wieloboku $ABCDE$.

Fig. 43.



Wykreśla się przekątnie AC i AD , odmierzają się następnie $AM = GH$ i kreśli się $MN \parallel BC$, $NP \parallel CD$ i $PR \parallel DE$; natenczas wielobok $ABCDE \sim AMNPQ$. Wykreśliwszy nareszcie na GH wielobok $GHJKL$, przystający do $AMNPQ$, mamy zadanie rozwiązane.

2. Do danego wieloboku $ABCDE$ (fig. 43.) wykreślić podobny i taki, żeby stosunek boków danego i szukanego wieloboku równał się $3 : 2$.

Zapomocą przekątni, wykreślonych n. p. z punktu A , dzielimy dany wielobok na trójkąty; następnie zmniejszamy boki AB , AC , AD i AE w stosunku $3 : 2$, a nareszcie odmierzamy tak zmniejszone boki od A do M , N , P i Q ; $AMNPQ$ jest żądanym wielobokiem.

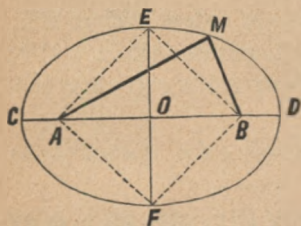
3. Wykreście dwa podobne sześcioboki, aby stosunek ich odpowiednich boków równał się $4 : 5$.

IV. Elipsa, hyperbola i parabola.

I. Elipsa.

§. 62. Mamy dane dwa punkty A i B (fig. 44.) Przytwierdźmy w nich końce nitki, nieco dłuższej od odległości obu owych punktów, a następnie wyprężmy ją zapomocą ołówka M . Posuwając

Fig. 44.



ołówek naokoło obu rzeczonych punktów tak, aby nitka ciągle była wyprężona, punkt M zakreśli linią krzywą, zwaną elipsą (die Elipse).

Z powyższego wykreślenia elipsy wynika, że długość obu kawałków nitki AM i BM zmienia się od punktu do punktu, bo zawsze, gdy jeden wzrasta, drugi maleje; ale ich suma $AM + BM$ pozostaje dla każdego punktu elipsy ta sama.

Elipsa jest więc linią krzywą, mającą tę własność, że suma odległości każdego jej punktu od dwu danych punktów równa się zawsze temu samemu danemu odcinkowi prostej.

Oba dane punkty A i B nazywamy ogniskami (Brennpunkte) elipsy; odległości któregośkolwiek punktu M elipsy do obu ognisk, mianowicie proste AM i BM , nazywano promieniami wodzącymi (Leitstrahlen) owego punktu. Prostą CD , przechodzącą przez oba ogniska, nazy-

wamy osią większą (grosse Asche), jej końcowe punkty C i D wierzchołkami (Scheitel). a punkt O, połowiący oś większą, środkiem (Mittelpunkt) elipsy. Prosta EF, prostopadłą w punkcie O do osi większej, nazwano osią mniejszą (kleine Achse) elipsy.

1. Ponieważ według wykreślenia elipsy $AC + BC = AD + BD$ czyli $2 AC + AB = 2 BD + AB$, przeto także $2 AC = 2 BD$ i $AC = BD$; t. j. wierzchołki elipsy są od ognisk równo odległe. Z tego wynika, że także środek elipsy jest równo odległy od obu jej ognisk.

Odległość $AO = BO$ jednego ogniska elipsy od środka nazwano mimośrodem (Excentricität) elipsy. Im mniejszy mimośród, tem bardziej zbliża się elipsa do koła.

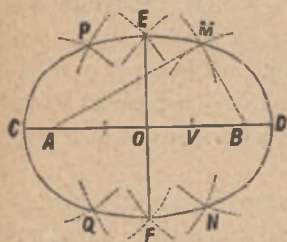
2. Ponieważ $AM + BM = AD + BD$, zaś $AD = BC$; zatem także $AM + BM = BC + BD$, czyli $AM + BM = CD$, t. j. suma obu promieni wodzących każdego punktu elipsy równa się jej osi większej.

Jeżeli suma odległości jakiegoś punktu od obu ognisk elipsy jest większa albo mniejsza od osi większej, natenczas ów punkt leży zewnątrz a względnie wewnątrz elipsy.

3. Trójkąty AOE i BOE są przystające, zatem $AE = BE$; a że $AE + BE = CD$, czyli $2 AE = CD$, przeto $AE = \frac{1}{2} CD$; t. j. odległość końca osi mniejszej od ogniska równa się połowie osi większej.

§. 63. Zadanie. Wykreślić elipsę, gdy dana jest jej oś większa i mimośród.

Fig. 45.



Niech będzie CD (fig. 45.) daną osią większą, a O jej środkiem. Odmierzmy $OA = OB$ i równe danemu mimośrowi, a otrzymamy ogniska A i B. Zakreślmy następnie połowę osi większej t. j. promieniem CO z punktu A i B łuki kołowe, które przecinają się w punktach E i F; punkty te są końcami osi mniejszej.

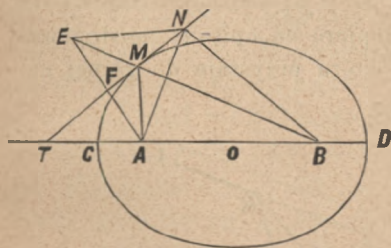
Wyberzmy teraz na osi większej między jej środkiem a ogniskiem dowolny punkt V i zakreślmy z obu ognisk najpierw promieniem CV, a potem promieniem DV łuki kołowe

powyżej i poniżej osi większej; łuki te przecinają się w punktach M, N, P i Q, które są punktami elipsy, gdyż dla każdego z nich jest jednym promieniem wodzącym CV a drugim DV, a więc suma tych promieni wodzących równa się osi większej. W ten sposób możemy wyznaczyć dowolną ilość punktów elipsy, jeżeli tylko na prostej OB wybierać będziemy równe punkty. Łącząc zapomocą linii ciągłej tak wyznaczone punkty, otrzymamy żądaną elipsę, a to tem dokładniej, im więcej jej punktów wyszukamy.

§. 64. Styczną (Tangente) linii krzywej nazywamy wogóle prostą, mającą z tą krzywą jeden punkt, punkt styczności (Berührungspunkt) wspólny, a to tak, że wszystkie sąsiednie mu punkty tej prostej leżą na zewnątrz owej krzywej linii.

Niech będą AM i BM (fig. 46.) promieniami wodzącymi punktu M. Przedłużmy BM i podzielmy kąt AME zapomocą prostej MT na dwie równe części, a będzie MT styczną elipsy.

Fig. 46.



Albowiem jeżeli odmierzymy $ME = AM$, to MT jest symetralną odcinka AE. Wybrawszy na MT jakiś punkt N, leżący poza punktem M, będzie suma odległości tego punktu N od ognisk t. j. $AN + BN$, czyli $EN + BN$ (gdyż $AN = EN$) większą od linii

EB, a że $EB = AM + BM = CD$, także większą od CD. Punkt N leży więc zewnątrz elipsy; a że tego można dowieść o każdym punkcie prostej MT, z wyjątkiem punktu M, zatem jest MT styczną elipsy w punkcie M.

Prosta, połowiąca kąt przyległy kątowni, utworzonemu przez promienie wodzące punktu elipsy, jest styczną elipsy w tym punkcie.

Z tego wynika także twierdzenie:

Styczna elipsy tworzy z promieniami wodzącymi punktu styczności równe kąty.

Albowiem kąt $AMT = EMT$, a że $EMT = BMN$, więc także $AMT = BMN$.

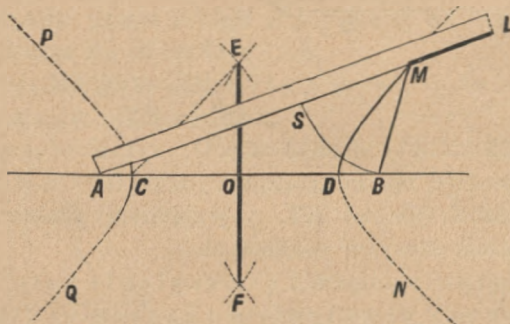
§. 65. **Zadanie.** W punkcie M (fig. 46.), leżącym na elipsie, wykreślić do niej styczną.

Przedłużwszy promień wodzący BM poza punkt M, potrzeba tylko (według §. 64) spółować kąt AME, aby otrzymać styczną MN. W tym celu odmierzymy $ME = MA$ i zakresłamy z E i A tym samym promieniem łuki kołowe, przecinające się w punkcie N. Prosta wykreślona przez M i N t. j. prosta NMT jest żadaną styczną.

2. Hyperbola.

§. 66. Mamy dane dwa punkty A i B. Przymocujemy w A koniec lineału AL tak, by się naokoło tego punktu mógł obracać. Następnie przytwierdźmy jeden koniec nitki, krótszej od AL o dany odcinek AS, w punkcie L, a drugi koniec w punkcie B. Nareszcie obracajmy lineał około końca A, a równocześnie przesuwajmy ołówek wzdłuż krawędzi AL tak, by przytem nitka była wypreżoną, wówczas opíše nam ołówek gałąź DM linii krzywej, zwanej hyperbolą (die Hyperbel). Obróciwszy lineał na dół, otrzymamy przez dopiero co opisane postępowanie dolną gałąź DN hyperboli, która przystaje do górnej ga-

Fig. 47.



łęzi DM. Umieściwszy następnie koniec lineału w punkcie B, a drugi koniec nitki, będący pierwiej w B, przymocowawszy w A, możemy w równy sposób przez obracanie lineału i przez poruszanie ołówka otrzymać linią krzywą PCQ, która jest drugą, również z dwóch gałęzi złożoną, częścią hyperboli. Przystaje ona do części pierwszej MDN.

Z tego określenia powstawania hyperboli wynika, że wprawdzie każdy jej punkt ma różne odległości od obu stałych punktów A i B, ale że różnica tych odległości dla każdego punktu, n. p. dla punktu M różnica $AM - BM = (AL - ML) - MS = AS$, jest ta sama.

Hyperbola jest zatem linią krzywą, w której różnica odległości każdego jej punktu od dwu stałych punktów jest ta sama.

Dane punkty A i B nazywamy ogniskami, a punkt O, połowiący prostą AB, środkiem hyperboli.

Proste AM i BM, łączące oba ogniska z punktem hyperboli, nazwano promieniami wodzącymi owego punktu.

Prostą CD, której przedłużenia przechodzą przez ogniska, a ograniczoną po obu stronach hyperbolą, nazywamy osią główną (die Hauptachse) a jej końce C i D wierzchołkami hyperboli.

1. Ponieważ D i C są punktami hyperboli, przeto $AD - BD = BC - AC$, a stąd $AD + AC = BC + BD$, czyli $CD + 2 AC = CD + 2 BD$, zatem $2 AC = 2 BD$, a więc $AC = BD$; t. j. wierzchołki hyperboli są równo odległe od obu ognisk. Stąd wynika, że także środek hyperboli jest jednakowo odległy od obu wierzchołków.

Odległość $AO = BO$ ogniska hyperboli od jej środka nazwano mimośrodem hyperboli.

2. Ponieważ $AM - BM = AD - BD$, zaś $BD = AC$, przeto $AM - BM = AD - AC = CD$; t. j. różnica promieni wodzących każdego punktu hyperboli równa się osi głównej.

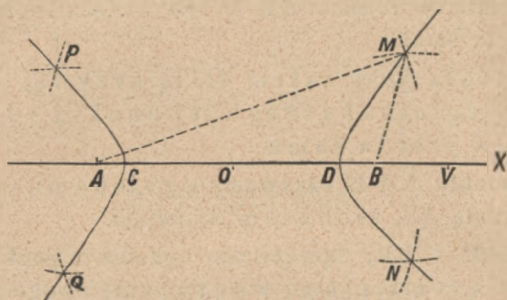
Jeżeli różnica odległości jakiegoś punktu od obu ognisk hyperboli jest mniejsza albo większa od osi głównej, natenczas punkt ów leży zewnątrz a względnie wewnątrz hyperboli.

2. Zakreślmy z wierzchołków C i D hyperboli mimośrodem OA powyżej i poniżej prostej CD łuki kołowe, które przecinają się w E i F. Wykreśliwszy prostą EF, musi ona przechodzić przez środek O i prostopadłą do osi głównej.

Prostą EF nazywamy osią poboczną albo drugorzędną (Nebenachse) hyperboli.

§. 67. **Zadanie.** Wykreślić hyperbolę, gdy dana jest jej oś główna i mimośród.

Fig. 48.



Niech będzie CD (fig. 48.) daną osią główną, a O jej środkiem. Przedłużywszy CD i odmierzywszy $OA = OB$ równe danemu mimośrodowi, otrzymamy ogniska A i B hyperboli. Wybierzmy teraz na przedłużeniu osi głównej poza jednym ogniskiem dowolny punkt V i zakreślmy z A i B najpierw promieniem DV, a potem promieniem CV powyżej i poniżej linii AX łuki kołowe. Punkty M, N, P i Q, w których przecinają się owe łuki, są wszystkie punktami hyperboli, gdyż dla każdego z nich, jest jednym promieniem wodzącym odcinek DV, a drugim odcinek CV, zatem ich różnica $CV - DV$ równa się osi głównej CD. Wybierając na linii BX coraz inne punkty i postępując w dopiero co opisany sposób, otrzymamy dowolnie wiele punktów, które połączone zapomocą linii ciągłej, dają żadaną hyperbolę.

§. 68. Podobnie jak przy elipsie w §. 64. można dowieść tu prawdziwości następujących twierdzeń:

1. Dwusieczna kąta, zawartego między promieniami wodzącymi punktu hyperboli, jest styczną hyperboli w tym punkcie.

2. Każda styczna hyperboli tworzy z promieniami wodzącymi punktu styczności równe kąty

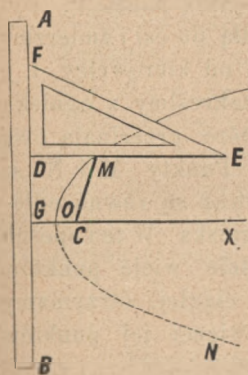
Zadanie. W punkcie leżącym na hyperboli, wykreślić do niej styczną.

Rozwiązanie polega na twierdzeniu 1.

3. Parabola.

§. 69. Niech będzie dana prosta AB (fig. 49.) i punkt C, obok niej leżący. Weźmy węgielnicę DEF i nitkę o długości

Fig. 49.



przyprostokątnei DE; przytwierdźmy jeden koniec nitki w E a drugi w C, a następnie przesuwajmy węgielnicę przyprostokątnią DF wzdłuż linii AB. Ołówek M przesuwany wzdłuż przyprostokątnei DE tak, że nitę ciągle jest wyprężona, zakresli gałąź niezamkniętej krzywej linii, którą nazwano parabolą (die Parabel). Gdy ołówek przesunie się do O, obróćmy węgielnicę DEF tak, by jej przyprostokątnia DF zajęła położenie linii GB, i postępujmy tak, jak przedtem, a otrzymamy dolną gałąź ON paraboli przystającą do górnej OM.

Z tego określenia powstawania paraboli wynika, że dla każdego punktu M paraboli długość nitki CM równa się odwiniętej części DM przyprostokątnei DE.

Parabola jest zatem taką linią krzywą, w której każdy punkt jest równo odległy od danego punktu i od danej prostej.

Prostą AB nazywamy kierownicą (Leitlinie), a punkt C ogniskiem paraboli.

Jeżeli odległość jakiegoś punktu od ogniska jest większa lub mniejsza od odległości jego od kierownicy, natenczas punkt ten leży zewnątrz, a względnie wewnątrz paraboli.

Prostą OX, przechodzącą przez ognisko, a prostopadłą do kierownicy, nazwano osią, zaś punkt O, w którym parabola przecina swą oś, nazywamy wierzchołkiem paraboli.

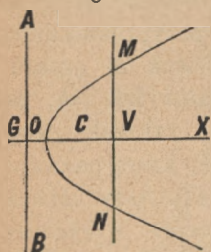
Prostą CM, wykreśloną z ogniska do jakiegokolwiek punktu paraboli, nazwano promieniem wodzącym tego punktu

Ponieważ O jest punktem paraboli, przeto $OC = OG$ t. j. wierzchołek paraboli jest równoodległy od ogniska i od kierownicy.

§. 70. **Zadanie.** Wykreślić parabolę, gdy dana jest jej kierownica i ognisko.

Niech będzie AB (fig. 50.) daną kierownicą, a C danem ogniskiem. Wykreślmy $CG \perp AB$, to punkt O , połowiący tę prostopadłą, jest wierzchołkiem, zaś poza C przedłużona prosta OX osią paraboli.

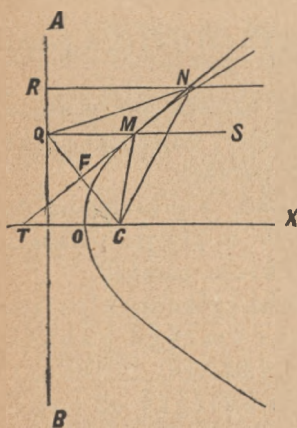
Fig. 50.



Wybermy na osi jakiś punkt V , wykreślmy w nim prostopadłą do osi i zmierzmy odległość tej prostopadłej od kierownicy, t. j. odcinek VG . Następnie zakreślmy z ogniska C promieniem VG łuki, które przecinają ową prostopadłą w M i N . Punkty M i N są punktami paraboli, ponieważ są równo odległe od kierownicy i od ogniska. W ten sposób można wyznaczyć dowolnie wiele punktów paraboli; połączywszy je zapomocą krzywej ciągłej, otrzymamy żadaną parabolę, a to tem dokładniej, im więcej jej punktów wyznaczymy.

§. 71. Niech będzie (fig. 51.) $MS \parallel OX$, a MQ przedłużeniem prostej MS . Podzielmy kąt CMQ na dwie równe części zapomocą prostej MT , to ta dwusieczna ma z parabolą tylko punkt M wspólny..

Fig. 51.



Albowiem $MC = MQ$, gdyż M jest punktem paraboli; zatem jest MT symetralną odcinka QC . Wybierzmy na MT jakiś punkt N , poza punktem M leżący, i wykreślmy $NR \perp AB$, natenczas $NC = NQ$; ale $NQ > NR$, więc także $NC > NR$, t. j. punkt N leży zewnątrz paraboli. Tego samego można dowieść o każdym punkcie prostej MT z wyjątkiem punktu M ; przeto jest MT styczną paraboli.

Dwusieczna kąta przyległego kątowi, utworzonemu przez promień wodzący punktu paraboli i przez równoległą do osi, wykreśloną z owego punktu, jest styczną paraboli w tym punkcie.

Z tego twierdzenia wynika także następujące :

Każda styczna paraboli tworzy z promieniem wodzącym punktu styczności i z równoległą do osi, wykreśloną z tego punktu, równe kąty.

Albowiem kąt $CMT = QMT$, a że $QMT = SMN$, więc także $CMT = SMN$.

Zadanie. Przez punkt M (fig. 51.) paraboli wykreślić do niej styczną.

Wykreślamy z danego punktu M paraboli prostopadłą MQ do kierownicy i promień wodzący MC ; następnie dzielimy kąt CMQ na dwie równe części, zakreślając z C i Q tym samym promieniem łuki kołowe, które przecinają się w N . Prosta MN jest żadaną styczną.

Przyczynek do planimetrii.

Rachunkowe zadania z planimetrii, które rozwiązuje się przez wyszukiwanie kwadratowego pierwiastka.

Trójkąt prostokątny.

§. 72. Twierdzeniu Pitagorasa, udowodnionemu w znaczeniu geometrycznem w §. 9, można nadać także znaczenie, arytmetyczne.

Oznaczmy w trójkącie prostokątnym BAC (fig. 52.) liczby wymiarowe przeciwprostokątnej BC i przyprostokątnej AC i AB przez a , względnie przez b i c ; wtedy a^2 , b^2 i c^2 są liczbami wymiarowemi powierzchni kwadratów, wykreślonych na BC , AC i AB . Z równania

$$\square BC = \square AC + \square AB$$

wynika zatem

$$a^2 = b^2 + c^2; \text{ t. j.}$$

W każdym trójkącie prostokątnym kwadrat z liczby wymiarowej przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów z liczb wymiarowych obu przyprostokątnej.

Takie właśnie jest znaczenie arytmetyczne twierdzenia Pitagorasa.

§. 73. Oznaczając (fig. 52.) przez h liczbę wymiarową wysokości AD , należącej do przeciwprostokątnej jako podstawy, zaś przez p i q liczby wymiarowe odcinków CD i BD przeciwprostokątnej, mamy najpierw $a = p + q$.

Z §§. 11. i 10. wynika następnie, że

$$b^2 = a p, c^2 = a q \text{ i że } h^2 = p q.$$

Jeżeli nareszcie oznaczymy przez f liczbę wymiarową powierzchni trójkąta prostokątnego BAC , otrzymamy uwzględniając §. 27. 1.

$$2 f = b c = a h.$$

Zapomocą powyższych równań i następujących trzech

$$a^2 = b^2 + c^2, b^2 = h^2 + p^2 \text{ i } c^2 = q^2,$$

wynikających z §. 72, możemy, jeżeli dane są dwie z siedmiu ilości a, b, c, h, p, q i f , wyszukać inne. Możemy tu mieć aż 21 zadań, z których kilka rozwiążemy w następującym paragrafie.

§. 74. 1. Dane są obie przyprostokątne b i c ; szukajmy pozostałych ilości a, h, p, q i f .

Najpierw mamy $a^2 = b^2 + c^2$. Znając kwadrat jakiejś liczby, otrzymamy samą liczbę, jeżeli z kwadratu wyszukamy pierwiastek kwadratowy; więc

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Z równania $a h = b c$ wynika, że $h = a = \frac{b c}{a} = \frac{b c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

Z równań $a p = b^2$ i $a q = c^2$ otrzymamy

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \text{ zaś } q = \frac{c^2}{a} = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Nareszcie mamy $f = \frac{b c}{2}$

Jeżeli n. p. z przyprostokątnej $b = 36 \text{ cm}$, zaś $c = 160 \text{ cm}$ mamy wyszukać przeciwprostokątną a , natenczas

$$b^2 = 36^2 = 1296$$

$$c^2 = 160^2 = 25600, \text{ zatem}$$

$$\sqrt{26896} = 164 \text{ cm.}$$

2. Dane są przeciwprostokątnia a i jedna przyprostokątnia b ; wyszukać pozostałe ilości c, h, p, q i f .

$$\text{Z } c^2 = a^2 - b^2 \text{ mamy } c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Dalsza część rozwiązania tego zadania jest podobną do rozwiązania zadania poprzedzającego.

3. Dane oba odcinki p i q przeciwprostokątnei; wyszukać a , b , c , h i f .

Najpierw mamy $a = p + q$.

$Z b^2 = a p = p (p + q)$ wynika $b = \sqrt{p (p + q)}$.

$Z c^2 = a q$ otrzymamy w tensam sposób $c = \sqrt{q (p + q)}$.

Następnie $h = \sqrt{p q}$ i nareszcie

$$f = \frac{a h}{2} = \frac{(p + q) \sqrt{p q}}{2}$$

4. Dane b , h ; mamy wyszukać p , q , a , c i f .

$Z p^2 = b^2 - h^2$ otrzymujemy $p = \sqrt{b^2 - h^2}$.

Następnie jest

$$q = \frac{h^2}{p} = \frac{h^2}{\sqrt{b^2 - h^2}}, \text{ zaś}$$

$$a = \frac{b^2}{p} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - h^2}}, \text{ zatem}$$

$$c^2 = a q = \frac{b^2 h^2}{b^2 - h^2}, \text{ więc } c = \frac{b h}{\sqrt{b^2 - h^2}}.$$

Nareszcie mamy

$$f = \frac{a h}{2} = \frac{b^2 h}{2 \sqrt{b^2 - h^2}}.$$

5. Dana przyprostokątnia b i powierzchnia f ; wyszukać drugą przyprostokątnię c i przeciwprostokątnię a .

Z równania $b c = 2 f$ mamy $c = \frac{2 f}{b}$.

Następnie jest $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + \frac{4 f^2}{b^2}}$.

6. Przyprostokątnei trójkąta prostokątnego równają się
a) 35 m i 12 m, b) 7.2 dm i 3.48 dm; jak wielka jest a) przeciwprostokątnia, b) powierzchnia, c) wysokość wykreślona na przeciwprostokątnię?

7) W trójkącie prostokątnym jest a) przeciwprostokątnia 68 dm, jedna przyprostokątnia 32 dm długa; b) przeciwprostokątnia 5.46 m, jedna przyprostokątnia 2.72 m; jaka jest długość drugiej przyprostokątnei, a jak wielka powierzchnia tego trójkąta?

8. Jak długa musi być drabina, by sięgała aż do szczytu 4·3 m wysokiego muru, jeżeli u spodu odległa jest od tego muru o 2·6 m?

9. Drabinę 9 m 4 dm długą przystawiono tak do pionowej ściany, że na dole odstaje od niej na 2 m 3 dm; do jakiej wysokości ściany sięga górny koniec drabiny?

10. Jak długi jest bok rombu, którego przekątne równają się 2·26 m i 1·75 m?

Kwadrat.

§. 75. Niech będą a , d f liczbami wymiarowemi boku, przekątnei i powierzchni kwadratu.

1. Z danego boku a kwadratu wyszukać przekątnię d .

Według §. 72 jest $d^2 = a^2 + a^2$, czyli $d^2 = 2a^2$. Pierwiastkując przez 2 otrzymamy $d = \sqrt{2a^2}$, czyli $d = a\sqrt{2}$.

2. Dana przekątnia d ; wyszukać bok a i powierzchnię f .

Ponieważ $2a^2 = d^2$, przeto $a^2 = \frac{d^2}{2} = \frac{2d^2}{4}$ zatem $a = \frac{\sqrt{2d^2}}{2}$.

Z $f = a^2$ otrzymamy wtedy $f = \frac{d^2}{2}$

3. Dana powierzchnia f ; szukamy a i d .

Z $a^2 = f$ mamy $a = \sqrt{f}$.

Z $d^2 = 2a^2$ otrzymamy następnie $d^2 = 2f$, zatem $d = \sqrt{2f}$.

4. Przekątnia kwadratu równa się 1·4 m; jak wielki jest jego bok, a jak wielka powierzchnia?

5. Powierzchnia kwadratu równa się 15·1322 dm^2 ; jak długi jest jego bok, a jak wielka przekątnia.

6. Jak długi jest bok kwadratu, którego powierzchnia równa się sumie powierzchni dwu kwadratów o bokach 2·58 dm i 9·34 cm?

Prostokąt.

§. 76. Oznaczmy liczby wymiarowe boków prostokąta przez a i b , liczbę wymiarową przekątnei przez d , zaś liczbę wymiarową powierzchni przez f .

1. Dane boki a i b prostokąta; wyszukać d i f .

Mamy $d^2 = a^2 + b^2$, zatem $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, zaś $f = a b$.

2. Dany bok a i przekątnia d ; wyrachować b i f .

Odejmując od równania $a^2 + b^2 = d^2$ obustronnie a^2 , otrzymamy $b^2 = d^2 - a^2$; zatem $b = \sqrt{d^2 - a^2}$; następnie powierzchnia $f = ab = \sqrt{d^2 - a^2}$.

3. Jak wielka jest przekątna prostokąta 6·5 m długiego, a 3·3 m szerokiego?

4. Przekątna prostokąta równa się 7·3 dm, a jeden jego bok 4·8 dm; jak długi jest bok kwadratu, równego co do powierzchni owemu prostokątowi?

Trójkąt równoboczny.

§. 77. Niech będzie w trójkącie równobocznym ABC (fig. 53) bok $AB = AC = BC = a$, wysokość $CD = h$, odległość środka O od jednego boku t. j. $OD = r$, odległość $OA = R$, zaś f niech oznacza liczbę wymiarową powierzchni.

1. Dany bok a ; wyszukać h , f , r i R .

Z trójkąta ACD mamy $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$,

Fig. 53.

$$\text{zatem } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Zaś } f = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Ponieważ w trójkącie prostokątnym ADO kąt $DAO = 30^\circ$, przeto $OD = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} OC$; zatem $r = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, zaś $R = \frac{2h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

2. Dana wysokość h ; wyszukać a , r , R i f .

$$\text{Z równania } \frac{a\sqrt{3}}{2} = h \text{ mamy } a = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Następnie jest } f = \frac{ah}{2} = \frac{h \cdot \sqrt{3} \cdot h}{3} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Nareszcie mamy tak jak pod 1. } r = \frac{h}{3} \text{ zaś } R = \frac{2h}{3}.$$

3. W trójkącie równobocznym bok równa się 8 dm; jak wielka jest a) wysokość, b) powierzchnia?

4. Obliczcie bok i powierzchnię trójkąta równobocznego, którego wysokość równa się $2\text{ dm } 4\text{ cm}$.

5. Jak długi jest bok trójkąta równobocznego, którego powierzchnia równa się powierzchni kwadratu o boku 15 dm ?

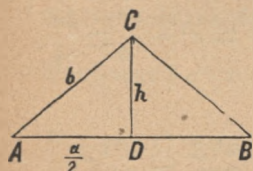
Trójkąt równoramienny.

§. 78. Niech będzie w trójkącie równoramiennym ABC (fig. 54.) podstawa $AB = a$, ramię $AC = BC = b$, wysokość $CD = h$, zaś powierzchnia niech będzie równa f .

1. Z danej podstawy a i z danego ramienia b wyszukać wysokość h i powierzchnię f .

$$\text{Mamy } h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}, \text{ a stąd } h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}},$$

Fig. 54.



$$\text{zaś } f = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

2. Dana wysokość h i ramię b ; wyszukać a i f .

$$\text{Ponieważ } \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - h^2, \text{ przeto } \frac{a}{2} = \sqrt{b^2 - h^2}, \text{ zaś } a = 2\sqrt{b^2 - h^2}; f = \frac{ah}{2} = h\sqrt{b^2 - h^2}.$$

3. W trójkącie równoramiennym podstawa równa się 4.8 dm , a każde ramię 2.5 dm ; jak wielka jest a) wysokość, b) powierzchnia?

4. Podstawa trójkąta równoramiennego równa się 3.36 m , a wysokość 4.25 m ; jak długie jest ramię tego trójkąta?

5. Trapez o bokach równoległych 36 mm i 26 mm , a o wysokości 19 mm równa się co do powierzchni trójkątowi równoramiennemu, którego podstawa jest tak długa, jak większy z owych równoległych boków; jak wielka jest wysokość tego równoramiennego trójkąta?

Sześciobok umiarowy.

§. 79. 1. Dany bok a umiarowego sześcioboku, wyszukać powierzchnię f .

Ponieważ obwód umiarowego sześcioboku równa się $6a$, zaś odległość jego środka od jednego boku jest wysokością trój-

kąta równobocznego o boku a i według §. 77. 1. równa się $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, zatem mamy

$$f = \frac{6 a \cdot a\sqrt{3}}{4} = \frac{3 a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

2. Jak wielka jest powierzchnia umiarowego sześcioboku, którego bok jest na 4.24 dm długi?

3. Kwadrat i sześciobok umiarowy mają równy obwód, mianowicie 2.4 m ; o ile mniejsza jest powierzchnia kwadratu od powierzchni sześcioboku?

Koło.

§. 80. 1. Z danej powierzchni f koła obliczyć jego promień r .

Według §. 36. 2. jest $r^2\pi = f$, zatem $r^2 = \frac{f}{\pi}$, a stąd

$$r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}.$$

2. Powierzchnia koła równa się a) 10 dm^2 , b) 0.8659 m^2 , c) 31.47 cm^2 ; jak wielki jest jego promień?

3. Wyrachujecie promień koła, którego powierzchnia równa się powierzchni kwadratu o boku $2 \text{ m } 3 \text{ dm}$ długim.

4. Powierzchnia koła równa się 4.0115 dm^2 ; jak wielki jest jego obwód?

5. Średnica koła równa się 315 mm ; jak wielka jest średnica innego koła, którego powierzchnia pozostaje w takim stosunku do powierzchni pierwszego koła jak 3 do 4?

6. Promienie dwu kół są $4 \text{ dm } 4 \text{ cm}$ i $3 \text{ dm } 2 \text{ cm}$ długie; jak wielki jest promień trzeciego koła, które równa się a) sumie, b) różnicy powierzchni obu owych kół?

7. O ile większy jest obwód koła o powierzchni 1.54 m^2 od obwodu sześcioboku umiarowego, wpisanego w to koło?

7. Jak wielki jest obwód koła, którego powierzchnia równa się powierzchni trójkąta równobocznego o boku 1 dm ?

9. Jak wielki jest dłuższy promień pierścienia kołowego o powierzchni 86.24 dm^2 , jeżeli krótszy promień jest 4.2 dm długi?

10. Powierzchnia pierścienia kołowego równa się $254{,}34 \text{ dm}^2$, a obwód zewnętrznego koła $94{,}2 \text{ dm}$; jak długie są promienie obu współśrodkowych kół?

11. Jak szerokie musi być miejsce naokoło areny o promieniu 9 m , jeżeli na niem mają być siedzenia dla 500 osób, a dla każdej osoby liczy się 75 dm^2 powierzchni?

12. Powierzchnia f wycinka kołowego i przynależny mu kąt środkowy m° są dane; szukajmy promienia.

Według §. 39. mamy: $mr^2\pi = 360 f$, zatem $r^2 = \frac{360 f}{m\pi}$,

a stąd $r = \sqrt{\frac{360 f}{m\pi}}$.

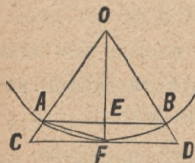
13. Powierzchnia wycinka kołowego o kącie środkowym 30° równa się $37{,}5 \text{ dm}^2$; jak wielki jest promień koła?

14. W kole o promieniu 2 dm mamy odcinek, którego cięciwa jest bokiem kwadratu, wpisanego w to koło; jak wielka jest powierzchnia owego odcinka?

15. Wyszukajcie powierzchnię odcinka koła, jeżeli dany jest promień r koła, a cięciwa odcinka równa się promieniowi.

§. 81. 1. Dany bok wieloboku umiarowego, wpisanego w dane koło; wyszukać bok wieloboku umiarowego o równej ilości boków ale opisanego na temże kole.

Fig. 55.



Niech będzie AB (fig. 55.) bokiem wieloboku umiarowego, wpisanego w koło, którego promień AO jest dany. Jeżeli wykreślimy promień $OF \perp AB$, a w punkcie F styczną do koła i przedłużymy promienie OA i OB aż do przecięcia się ze styczną w punktach C i D , będzie CD bokiem wieloboku umiarowego, opisanego na kole, a posiadającego tyle boków, co i wielobok wpisany.

Znając AB i $AO = FO$, można obliczyć także CD . Boki CD i AB są bowiem równoległe, ponieważ oba są prostopadłe do FO ; zatem $\triangle CDO \sim \triangle ABO$, a podstawy tych trójkątów są proporcjonalne względem ich wysokości, więc $CD : AB = FO : EO$. Z tych czterech ilości są AB i FO dane, zaś EO znajdziemy z trójkąta prostokątnego AEO ; można przeto wyrachować z powyższej proporcji CD .

2. Dana długość boku wieloboku umiarowego, wpisanego w dane koło; wyszukać bok wieloboku umiarowego, wpisanego w to samo koło, ale o podwójnej liczbie boków.

Niech będzie AB (fig. 55.) bokiem wieloboku umiarowego, wpisanego w koło o danym promieniu AO . Jeżeli wykreślimy promień $OF \perp AB$, a potem cięciwę AF , będzie ta cięciwa bokiem wieloboku umiarowego, wpisanego w koło, a posiadającego dwa razy tyle boków, co pierwszy wielobok.

Jeżeli tedy AB i $AO = FO$ są znane, można z trójkąta prostokątnego obliczyć najpierw EO ; odjąwszy EO od FO otrzymamy EF . Nareszcie z trójkąta prostokątnego AEF znajdziemy szukany bok AF .

3. Promień koła równa się 1 dm ; wyszukajcie bok $a)$ sześcioboku umiarowego opisanego na tem kole, $b)$ wpisanego umiarowego dwunastoboku, i $c)$ opisanego umiarowego dwunastoboku.

4. Promień koła jest 0.5 dm długi; o ile większe są obwód i powierzchnia tego koła od obwodu, a względnie od powierzchni $a)$ wpisanego kwadratu, $b)$ wpisanego umiarowego ośmioboku? — o ile są one mniejsze od obwodu, a względnie od powierzchni $c)$ opisanego kwadratu, $d)$ opisanego umiarowego ośmioboku?

Stereometrya.

1. Linie proste i płaszczyzny w przestrzeni.

Wyznaczenie płaszczyzn.

§. 82. Powierzchnię tego rodzaju, że każda prosta, mająca z nią dwa punkty wspólne, cała na niej leży, nazywamy powierzchnią płaską albo płaszczyzną (*ebene Fläche* albo *Ebene*).

Dwa punkty w przestrzeni wyznaczają w zupełności prostą, t. j. przez dwa punkty w przestrzeni można wykreślić tylko jedną prostą. Przesunąwszy przez tę prostą płaszczyznę, możemy ją obracać naokoło tej prostej, wskutek czego zajmie płaszczyzna niezmiernie wiele położeń. Dwa punkty albo jedna

prosta nie wyznaczają zatem płaszczyzny. Ale jeżeli obok prostej tej wybierzemy jeszcze punkt trzeci, natenczas pomiędzy owymi niezmiernie wieloma położeniami, jakie zająć może płaszczyzna, przesunięta przez tę prostą, podczas swego obrotu, będzie tylko jedno takie, w którym płaszczyzna przechodzi przez prostą i przez punkt obok niej leżący.

Przez prostą i przez punkt obok niej leżący, albo przez trzy punkty, nieleżące na jednej prostej, można zatem przesunąć tylko jedną płaszczyznę.

Położenie płaszczyzny wyznaczają przeto w zupełności:

1. trzy punkty, nieleżące na jednej prostej,
2. jedna prosta i punkt obok niej leżący,
3. dwie przecinające się proste i
4. dwie równoległe proste.

Każda płaszczyzna może powstać wskutek ruchu prostej, a mianowicie gdy ruchoma prosta ślizga się 1. po dwu przecinających się prostych, albo 2. po dwu równoległych prostych, albo 3. gdy obraca się naokoło jednego ze swoich punktów, a przytem posuwa się wzdłuż prostej, albo 4. gdy ślizga się po drugiej prostej ale równoległe do swego pierwotnego położenia.



1. Położenie prostych względem siebie.

§. 83. Jeżeli dwie proste w przestrzeni leżą na tej samej płaszczyźnie, natenczas albo są równoległe albo się przecinają. Jeżeli zaś obie nie leżą na tej samej płaszczyźnie, wtedy ani nie mogą być równoległe, ani się nie mogą przecinać; mówimy natenczas o takich prostych, że się krzyżują (kreuzen einander) albo że są wichrowate (wind-schief).

§. 84. Przesuwając dwie przecinające się proste tak w przestrzeni, żeby ich nowe położenia były równoległe do pierwotnych, nie zmienimy przez to kąta, jaki te dwie proste ze sobą tworzą.

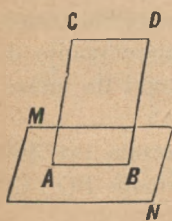
Podobnie jak dla kątów na płaszczyźnie mamy więc także i dla kątów w przestrzeni twierdzenie.

Dwa kąty, mające ramiona parami równoległe, są *a)* sobie równe, jeżeli obie pary równoległych ramion są skierowane w tę samą stronę albo obie pary w strony wprost przeciwne, zaś *b)* są spełniające, jeżeli tylko jedna para jest skierowana w tę samą stronę, a druga para w strony wprost przeciwne.

2. Położenie prostych względem płaszczyzny.

§. 85. Jeżeli prosta i płaszczyzna w całej swej rozciągłości nie mają żadnego wspólnego punktu, wtedy nazywamy je równoległymi. Prosta nierównoległa do płaszczyzny przecina ją w jednym punkcie, który

Fig. 56.



nazwano punktem przecięcia, punktem przebicia albo także spodkiem (Schnittpunkt albo Fusspunkt).

Niech będzie MN (fig. 56.) płaszczyzną, AB prostą leżącą na tej płaszczyźnie, a AC prostą wystającą z tej płaszczyzny. Przesuwajmy AB wzdłuż AC tak, aby była równoległa do swego pierwotnego położenia; gdy zajmie położenie CD, nie będzie miała ani z AB (gdyż jest do niej równoległa), a przeto ani z płaszczyzną MN żadnego wspólnego punktu. Zatem:

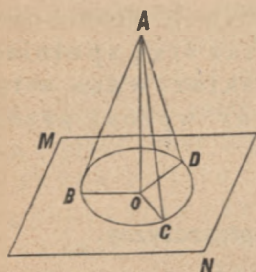
Prosta równoległa do prostej, na płaszczyźnie leżącej, jest także równoległa do samej płaszczyzny. Naodwrot:

Prosta równoległa do płaszczyzny jest także równoległa do każdej prostej w płaszczyźnie, jeżeli tylko ta druga prosta leży z nią na tej samej płaszczyźnie.

§. 86. Niech będzie MN (fig. 57.) płaszczyzną, zaś A punktem leżącym zewnątrz tej płaszczyzny. Z punktu A możemy wykreślić do płaszczyzny MN niezmiernie wiele dłuższych i krótszych prostych; niech między nimi będzie OA najkrótszą. Jeżeli przez jej spodek O wykreślimy na płaszczyźnie dowolną ilość prostych, musi OA zarazem być najkrótszą z prostych, jakie z punktu A do każdej z owych prostych można wykreślić,

t. j. AO musi być prostopadłą do tych wszystkich prostych.

Fig. 57.



W takim razie mówimy, że prosta AO jest prostopadłą do płaszczyzny MN , podczas gdy każda inna prosta, jak $AB, AC, \dots$ jest pochyłą do płaszczyzny MN .

Prosta jest zatem prostopadłą do płaszczyzny, jeżeli jest prostopadłą do wszystkich prostych, wykreślonych w płaszczyźnie przez jej spodek.

Powstanie prostopadłej do płaszczyzny można sobie wyobrazić w następujący sposób: Jeżeli kąt prosty AOB obraca się naokoło jednego swego ramienia AO , natenczas zakresła drugie jego ramię płaszczyznę BCD , a ramię AO jest prostopadłe do każdego położenia drugiego ramienia, więc także i do płaszczyzny.

Ponieważ położenie płaszczyzny BCD wyznaczają już dwa tylko położenia obracającego się ramienia, n. p. proste BO i CO prostopadłe do AO , przeto mamy twierdzenie:

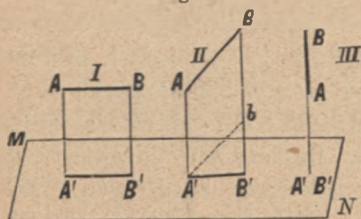
Prosta, prostopadła do dwu prostych, wykreślonych na płaszczyźnie przez jej spodek, jest prostopadła do tej płaszczyzny.

Prostopadłą, jako najkrótszą prostą, jaką z jakiegoś punktu można wykreślić do płaszczyzny, nazywamy odległością (Abstand) owego punktu od płaszczyzny.

Z powyższego wyluszczenia wynika, że z punktu obok płaszczyzny leżącego można wykreślić do niej tylko jedną prostopadłą.

§. 87. Jeżeli z punktu A (fig. 58), leżącego w przestrzeni

Fig. 47.



wykreślimy prostopadłą AA' do płaszczyzny MN , natenczas spodek A' tej normalnej nazywamy rzutem (Projection) punktu A , a samą płaszczyznę MN płaszczyzną rzutów (Projectionsebene).

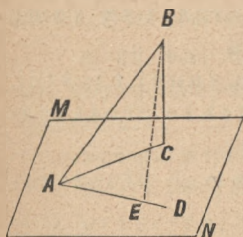
Rzutem prostej na płaszczyznę nazwano zbiór rzutów wszystkich punktów owej prostej na tę płaszczyznę.

Rzutem odcinka prostej na płaszczyznę jest zatem prosta, łącząca rzuty końcowych punktów tego odcinka. Niech będzie A' rzutem punktu A , zaś B' rzutem punktu B na płaszczyznę MN , wówczas prosta $A'B'$ jest rzutem odcinka AB na tę płaszczyznę.

§. 88. Kątem nachylenia (*Neigungswinkel*) prostej do płaszczyzny nazywamy kąt, jaki tworzy prosta ze swoim rzutem na tę płaszczyznę.

Jeżeli AB (fig. 59.) jest pochyłą, zaś BC prostopadłą do płaszczyzny MN , natenczas AC jest rzutem prostej AB na płaszczyznę MN , a kąt BAC jest kątem nachylenia prostej AB do tej płaszczyzny.

Fig. 59.



Wykreślmy przez punkt A na płaszczyźnie MN dowolną prostą AD , odmierzymy na niej $AE = AC$ i połączmy B z E zapomocą prostej BE , to BE jest dłuższą od prostopadłej BC . W trójkątach

ABC i ABE są zatem dwa boki parami równe, zaś trzecie boki nierówne, przeto naprzeciw większego z tych boków leży także kąt większy, czyli kąt $BAE > BAC$. Z tego wynika:

Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny jest najmniejszy z tych wszystkich kątów, jakie tworzy ta prosta z innymi prostymi, wykreślonemi na płaszczyźnie przez jej spodek.

Między prostymi, między ich rzutami i kątami nachylenia do płaszczyzny zachodzą następujące związki:

1. Jeżeli prosta jest równoległa do płaszczyzny, t. j. jeżeli kąt nachylenia równa się zero, natenczas jej rzut jest tak długi, jak i ona sama (fig. 58. I.); jeżeli kąt nachylenia powiększa się, rzut maleje (fig. 58. II.); jeżeli nareszcie kąt nachylenia równa się 90° , t. j. jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, wtedy jej rzut równa się zero (fig. 58. III.).

2. Rzuty równych prostych, nachylonych pod równym kątem do płaszczyzny, są równe, i naodwrot; rzut dłuższej prostej jest większy, i naodwrot.

§. 89. Niech będzie (fig. 57.) $AO \perp$ do płaszczyzny MN , zaś $AB = AC = AD$; trójkąty prostokątne AOB , AOC i AOD są przystające, a zatem $OB = OC = OD$. Z tego wynika:

Spodki wszystkich równych pochyłych, wykreślonych z jednego punktu do płaszczyzny, leżą na obwodzie koła, którego środkiem jest spodek prostopadłej, wykreślonej z owego punktu do płaszczyzny.

§. 90. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny nie zmienia się, jeżeli przesuniemy tę prostą równoległe do jej pierwotnego położenia.

Z tego wynikają następujące twierdzenia:

1. Dwie równoległe proste tworzą z tą samą płaszczyzną równe kąty nachylenia.

2. Każda prosta równoległa do innej prostej, prostopadłej do płaszczyzny, jest także prostopadłą do tej płaszczyzny.

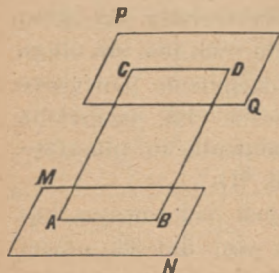
3. Proste, prostopadłe do tej samej płaszczyzny, są do siebie równoległe.

3. Położenie płaszczyzn względem siebie.

§. 91. Jeżeli dwie płaszczyzny w całej swej rozciągłości nie mają żadnego wspólnego punktu, natenczas nazywamy je równoległymi. Dwie nierównoległe płaszczyzny, dostatecznie przedłużone, przecinają się w jednej prostej, którą nazywamy ich linią przecięcia (Schnittlinie) albo krawędzią (Kante).

Niech będzie AB (fig. 60.) prostą na płaszczyźnie MN , a AC prostą wystającą z tej płaszczyzny.

Fig. 60.



Posuwajmy płaszczyznę MN wraz z prostą AB równoległe do pierwotnego położenia tak, aby punkt A poruszał się po prostej AC ; gdy płaszczyzna MN zajmie położenie PQ , a AB położenie CD , zakresłą punkty A i B podczas tego ruchu równoległe i równe proste AC i BD , zaś prosta AB za-

kreśli płaszczyznę $ABCD$, przecinającą obie równoległe płaszczyzny MN i PQ w równoległych prostych AB i CD . Z tego wynika:

1. Jeżeli dwie równoległe płaszczyzny przecniemy trzecią, otrzymamy równoległe linie przecięcia.

2. Równoległe proste między równoległymi płaszczyznami a nie leżące na nich, są równej długości.

Z twierdzenia 2. wynika także, że wszystkie punkty jednej z dwu równoległych płaszczyzn są równo odległe od drugiej płaszczyzny. Tę odległość nazywamy odległością obu równoległych płaszczyzn.

§. 92. Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny nie zmienia się, gdy przesuwamy płaszczyznę równoległe do jej pierwotnego położenia.

Z tego wynikają następujące twierdzenia:

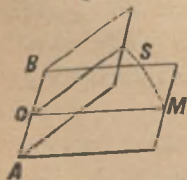
1. Dwie równoległe płaszczyzny tworzą z prostą, przecinającą je, równe kąty nachylenia.

2. Prosta, prostopadła do jednej z dwu równoległych płaszczyzn, jest także prostopadła i do drugiej płaszczyzny.

3. Płaszczyzny, prostopadłe do tej samej prostej, są do siebie równoległe.

§. 93. Jeżeli płaszczyzna ABM (fig. 61.), po jednej stronie ograniczona, obraca się naokoło granicznej prostej AB w kierunku ku ABS , to zbacza tem bardziej od swego pierwotnego położenia, im większy jest obrót.

Fig. 61.



Wielkość zboczenia kierunków dwu płaszczyzn, mających tę samą linią graniczną, nazywamy kątem dwuściennym (Flächenwinkel) obu płaszczyzn; wspólną linią graniczną nazwano krawędzią, a obie płaszczyzny ścianami kąta dwuściennego.

W kącie dwuściennym, utworzonym przez płaszczyzny AM i AS , jest AB krawędzią, zaś AM i AS są jego ścianami. Kąt dwuścienny oznaczony przez M (AB) S .

Wielkość kąta dwuściennego $M(AB)S$ zależy od wielkości obrotu, jaki wykonać musi płaszczyzna AM naokoło krawędzi AB , by zajęła położenie płaszczyzny AS . Atoli wielkość tego obrotu mierzymy kątem MOS , jaki zakresła linia MO , prostopadła do krawędzi, podczas tego obrotu. Kąt MOS nazywano kątem nachylenia obu płaszczyzn AM i AS , które tworzą kąt dwuścienny; otrzymamy ten kąt, gdy w dowolnym punkcie krawędzi wykreślimy do niej dwie prostopadłe takie, aby jedna z nich leżała na jednej ścianie kąta dwuściennego, a druga na drugiej.

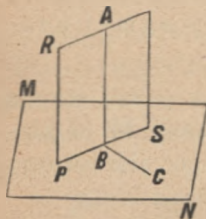
Ponieważ kąty dwuścienne mierzymy odpowiadającymi im kątami nachylenia, przeto wszystkie związki i twierdzenia, jakie wywiedliśmy z planimetrii dla kątów, są ważne także i dla kątów dwuściennych, jeżeli tylko wyrazy

kąt, wierzchołek, ramię, prosta
zastąpimy odpowiednio wyrazami
kąt dwuścienny, krawędź, ściana, płaszczyzna.

Rozróżniamy i tu także kąty dwuścienne wklęsłe i wypukłe, ostre, proste, rozwarte i półpełne; następnie kąty dwuścienne przyległe, wierzchołkowe, odpowiednie, naprzemianległe i jednostronne.

§. 84. Gdy kąt nachylenia dwu płaszczyzn jest kątem prostym, natenczas są płaszczyzny do siebie prostopadłe; w przeciwnym razie są pochyle.

Fig. 62.



1. Niech będzie (fig. 62.) prosta $AB \perp$ płaszczyzny MN . Przesuniemy przez AB płaszczyznę RS , przecinającą się z płaszczyzną MN w prostej PS ; natenczas musi być także płaszczyzna $RS \perp$ płaszczyzny MN .

Albowiem wykreśliwszy w płaszczyźnie MN prostą $BC \perp PS$, będzie $\angle ABC$ kątem nachylenia płaszczyzn RS i MN ; atoli kąt ten jest prosty, gdyż $AB \perp BC$, zatem płaszczyzna $RS \perp$ płaszczyzny MN .

Każda więc płaszczyzna, przesunięta przez prostą prostopadłą do jakiejś płaszczyzny, jest także prostopadła do tej płaszczyzny.

2. Przyjawszy naodwrot, że płaszczyzna $RS \perp MN$ i że $AB \perp PS$, otrzymamy po wykreśleniu w płaszczyźnie MN pro-

stej $BC \perp PS$ kąt nachylenia obu płaszczyzn $ABC = R$. A że także kąt $ABS = R$, przeto jest $AB \perp$ płaszczyzny MN ; t. j.

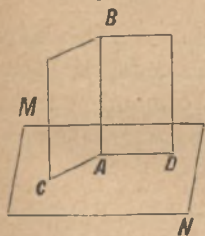
Jeżeli do wspólnej krawędzi dwu prostopadłych płaszczyzn wykreślimy prostopadłą, leżącą w jednej z tych płaszczyzn, będzie ta prostopadła także prostopadłą do drugiej płaszczyzny.

3. Ponieważ w punkcie na płaszczyźnie można wykreślić do niej tylko jedną prostopadłą, przeto:

Jeżeli w jakimś punkcie krawędzi, wspólnej dwom prostopadłym do siebie płaszczyznom, wykreślimy prostopadłą do jednej z owych płaszczyzn, to prostopadła ta leżeć będzie na drugiej płaszczyźnie.

4. Niech płaszczyzny CAB i DAB (fig. 63.), przecinające się w krawędzi AB , będą prostopadłe do płaszczyzny MN ; wtedy

Fig. 63.



także krawędź AB jest prostopadłą do płaszczyzny MN . Albowiem jeżeli w punkcie A wykreślimy prostopadłą do płaszczyzny MN , musi ona według twierdzenia 3. leżeć tak w płaszczyźnie CAB jak i w płaszczyźnie DAB , musi być zatem wspólną krawędzią AB obu płaszczyzn.

Krawędź dwu płaszczyzn, prostopadłych do tej samej trzeciej płaszczyzny, jest prostopadłą do tej trzeciej płaszczyzny.

§. 95. Kąt nachylenia dwu płaszczyzn nie zmieni się, gdy jedną z nich przesuniemy równolegle do pierwotnego położenia. Z tego wynika:

1. Dwie równoległe płaszczyzny tworzą z tą samą trzecią płaszczyzną równe kąty nachylenia.

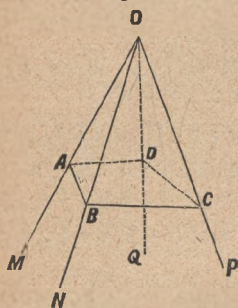
2. Jeżeli jedna z dwu równoległych płaszczyzn jest prostopadła do trzeciej płaszczyzny, natenczas i druga płaszczyzna jest do niej prostopadła.

4. Naroża.

§. 96. Jeżeli promień OM (fig. 64.), którego punkt początkowy O jest stały, posuwa się wzdłuż obwodu wieloboku $ABCD$,

to zakresła płaszczyzny MON, NOP, POQ, ..., które zamykają przestrzeń z jednej strony nieograniczoną, a zwaną narożem (Ecke) albo kątem bryłowym.

Fig. 64.



Stały punkt O nazywamy wierzchołkiem (Scheitel), płaszczyzny MNO, NOP, POQ, ..., ścianami (Seitenflächen), proste, w których przecinają się każde dwie po sobie następujące ściany nazwano krawędziami (Kanten), kąt zawarty między dwiema sąsiednimi krawędziami kątem płaskim (Kantenwinkel) albo bokiem (Seite), a kąt nachylenia dwu ścian przyległych nazywamy kątem dwuściennym (Flächenwinkel)

albo tylko kątem (Winkel) naroża. Samo naroże oznaczamy przez OMNPQ.

Aby powstało naroże, potrzeba co najmniej trzech płaszczyzn. Naroże ma tyle boków lub kątów, ile krawędzi lub ścian. Ze względu na ilość krawędzi albo ścian rozróżniamy naroża trójsściennne, czworościennne, pięćściennne, ... (dreikantige, vierkantige, fünfkantige, ...).

Naroże, mające wszystkie boki równe, nazwano równobocznem, zaś naroże o równych wszystkich kątach równokątnem (gleichwinklig). Naroże równoboczne i równokątne nazywamy umiadowem (regelmässig).

§. 97. Aby z trzech danych kątów płaskich $AOB = a$, $AOC = b$, $BOD = c$ (fig. 65.), z których a jest największy, utworzyć naroże, potrzeba płaszczyzny AOC i BOD obracać około prostych OA i OB tak ku sobie, by proste OC i OD zajęły to samo położenie. Gdyby te proste nie padły na siebie, albo gdyby nakryły się ale na płaszczyźnie AOB, wtedy nie powstałoby naroże. Aby powstać mogło naroże, muszą proste OC i OD paść na siebie poza płaszczyznę AOB w linii OE, co tylko wtedy stać się może, jeżeli $b + c > a$. A że kąt a jest największym kątem z trzech danych, musi być także $a + b > c$ i również $a + c > b$. Z tego wynika:

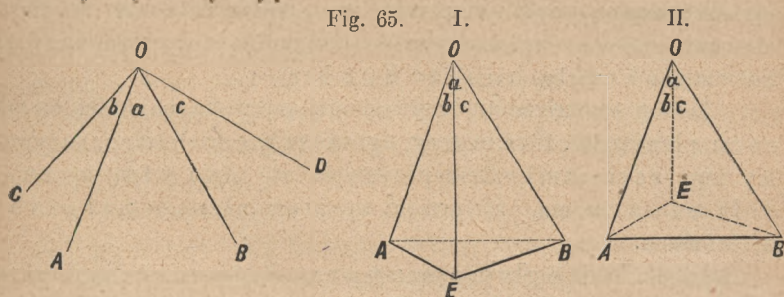
W każdym narożu trójściennem suma dwu którychkolwiek kątów płaskich jest większa od trzeciego kąta.

§. 98. Suma wszystkich kątów, leżących na płaszczyźnie naokoło jednego punktu, równa się $4R$; naodwrot, jeżeli suma wszystkich kątów płaskich naokoło wspólnego wierzchołka równa się $4R$, leżą te kąty na jednej płaszczyźnie, a zatem nie mogą utworzyć naroża. Z tego wynika:

W każdym narożu (niemającym kątów dwuściennych wypukłych) suma wszystkich kątów płaskich jest mniejsza od czterech prostych.

§. 99. Dwa naroża nazywamy przystającemi, jeżeli jedno daje się tak wsunąć w drugie, że ich wszystkie krawędzie i ściany się nakrywają.

Fig. 65.



Przy konstrukeyi naroża z trzech danych kątów płaskich, wskazanej w §. 97. (fig. 65), mogą płaszczyzny AOC i BOD w dwojaki sposób obracać się koło prostych OA i OB, a mianowicie albo na przedniej stronie płaszczyzny AOB (fig. 65. I), albo na tylnej (fig. 65. II.). Naroża, przez to powstałe, mają po kolei równe kąty płaskie i równe kąty dwuścienne, a jednak nie można jednego tak wsunąć w drugie, by się nakryły, gdyż ich równe części składowe następują po sobie w przeciwnym porządku (w jednym narożu z prawej strony ku lewej, a w drugim z lewej ku prawej).

Oba rzeczony naroża pozostają do siebie w takim stosunku jak przedmiot do swego obrazu w zwierciadle, albo jak prawa ręka do lewej. Takie dwa naroża nazywamy symetrycznemi.

Jeżeli dwa symetryczne naroża umieścimy tak przy sobie, żeby miały jedną ścianę wspólną, a same leżały po przeciwnych

stronach tejże ściany, natenczas prosta, łącząca dwa odpowiednie punkty obu naroży, jest prostopadła do owej wspólnej ściany, zaś ściana dzieli tę prostą na dwie równe części.

Płaszczyznę, na której leży owa wspólna ściana dwu symetrycznych naroży, nazwano płaszczyzną symetrii obu tych naroży.

II. Bryły i ich pomiar.

§. 100. Przestrzeń ze wszystkich stron ograniczoną nazywamy ciałem albo bryłą (Körper). Bryłę ograniczoną samemi płaszczyznami nazwano bryłą graniastą albo wielościanem (eckiger Körper albo Polyëder); zaś bryłę, ograniczoną po części płaskimi, a po części krzywemi powierzchniami, albo ograniczoną tylko jedną powierzchnią krzywą, nazwano okrągłą (runder Körper).

Do ograniczenia bryły graniastej potrzeba najmniej czterech płaszczyzn. Płaszczyzny, ograniczające wielościan, nazywamy jego ścianami, linie przecięcia się dwu ścian krawędziami, a naroża, utworzone ścianami, nazwano narożami wielościanu.

§. 101. Dwie bryły nazywamy przystającemi, jeżeli jedną można tak wsunąć w drugą, że się nakryją ich wszystkie ściany.

Dwie bryły, dające się tak umieścić po przeciwnych stronach płaszczyzny, że prosta, łącząca dwa odpowiednie punkty tych brył, jest prostopadła do owej płaszczyzny, a płaszczyzna rzeczona tę prostą połowi, nazywamy symetrycznemi (§. 99.), zaś ową płaszczyznę nazwano płaszczyzną symetrii obu brył.

Tak w przystających jak i w symetrycznych bryłach są każde dwie odpowiednie proste równe, każde dwie odpowiednie ściany przystające i każde dwa odpowiednie kąty dwuścienne równe; zaś odpowiednie naroża są tylko w przystających bryłach przystające, a w symetrycznych są symetryczne. Dwa symetryczne ciała nie mogą się nakryć.

§. 102. Zmierzyć bryłę znaczy wyznaczyć jej powierzchnię i objętość (Oberfläche i Cubikinhalt).

Powierzchnią bryły nazywamy sumę z powierzchni wszystkich jej ścian. Chcąc zatem otrzymać powierzchnię jakiegoś ciała, potrzeba wyznaczyć powierzchnię każdej jego ściany, a potem znalezione powierzchnie dodać.

§. 103. Wielkość przestrzeni, jaką bryła jakaś zajmuje, nazywamy jej objętością albo pojemnością (Volumen albo Cubikinhalt).

Dwie bryły, mające równą objętość, są równe co do objętości (inhaltsgleich).

Chcąc wyznaczyć objętość jakiejs bryły, przyjmujemy pewną znaną bryłę za jednostkę miary objętościowej i badamy, ile razy ta druga bryła mieści się w bryle, którą mamy zmierzyć. Liczbę, wskazującą nam to, nazwano liczbą wymiarową objętości bryły.

Za jednostkę miary objętościowej przyjmuje się sześciąt (Würfel albo Cubus), którego bok ma jednostkę długości, a więc jest na 1 metr, 1 decymetr, . . . długi; taki sześciąt nazywamy metrem sześciennym (m^3), a względnie decymetrem sześciennym (dm^3), . . . Cubikmeter, Cubikdecimeter, . . .).

Wyznaczyć objętość bryły znaczy więc zbadać, ile m^3 , dm^3 ,... w niej się mieści. To badanie byłoby żmudnem, a we wielu razach nie dałoby się wcale uskutecznić, gdybyśmy zechcieli jednostkę objętości kłaść obok siebie i nad sobą tyle razy w bryle, ile razy się da; o wiele prościej wynajduje się objętość bryły zapomocą rachunku, a to z wielkości prostych i ścian, od których zależy wielkość objętości.

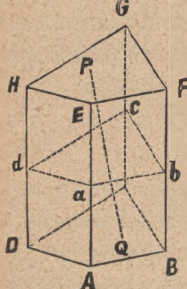
1. Graniastosłup.

Powstanie i części składowe graniastosłupa.

§. 104. Niech nieograniczona prosta AE (fig. 66.) ślizga się równolegle do siebie wzdłuż obwodu wieloboku ABCD...; zakreśli ona podczas tego ruchu szereg płaszczyzn, przecinających się w liniach równoległych BF, CG, DH,... Płaszczyzny te ograniczają przestrzeń z dwu stron niezamkniętą, a zwaną przestrzenią graniastosłupową (prismatischer Raum).

Jeżeli przestrzeń graniastosłupową przetniemy napoprzek dwiema równoległymi płaszczyznami, otrzymamy bryłę, zwaną graniastosłupem albo pryzmatem (Prisma).

Fig. 66.



Te dwa równoległe przekroje nazywamy podstawami (Grundflächen), a inne ściany ścianami bocznymi (Seitenflächen) graniastosłupa.

Graniastosłup ABCDEFGH może także w ten sposób powstać, że wielobok ABCD porusza się w przestrzeni równoległe do siebie tak, że wszystkie jego wierzchołki zakreślają linie proste.

Graniastosłup jest więc bryłą, ograniczoną dwoma przystającymi wielobokami i tyloma równoległobokami, ile boków ma jeden z owych wieloboków. Wieloboki są podstawami, a równoległoboki ścianami bocznymi graniastosłupa.

Proste, w których przecinają się ściany boczne, nazywamy krawędziami bocznymi (Seitenkanten), zaś linie przecięcia się ścian bocznych z podstawami nazwano krawędziami podstawowymi (Grundkanten). Wszystkie krawędzie boczne graniastosłupa są sobie równe i do siebie równoległe.

Oddalenie PQ obu podstaw graniastosłupa nazywamy wysokością (Höhe) graniastosłupa.

Rodzaj graniastosłupów.

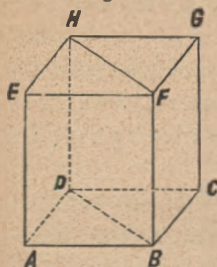
§. 105. Podług ilości krawędzi bocznych rozróżniamy graniastosłupy trójboczne, czworoboczne i wieloboczne (dreiseitige, vierseitige i mehrseitige).

Ze względu na położenie krawędzi bocznych względem podstawy mamy graniastosłupy proste (gerade) i pochyłe (schief) stosownie do tego, czy krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy, czy pochyłe.

W prostym graniastosłupie są ściany boczne prostokątami, a każda krawędź boczna jest równa wysokości graniastosłupa.

Graniastosłup ABCDEFGH (fig. 67.) mający równoległoboki za podstawy, nazwano równoległościanem (Parallelepiped). Może on być podobnie, jak każdy inny graniasto-

Fig. 67.



słup, prostym lub pochyłym. Równoległościan jest ograniczony sześcioma równoległobokami.

Równoległościan, mający za podstawę prostokąt, nazwano prostokątnym (rechtwinklig). Ogranicza go sześć prostokątów.

Równoległościan prosty i prostokątny, którego wszystkie krawędzie są równe, nazywamy sześcianiem.

Równoległościan pochyły, a ograniczony samymi rombami, nazwano rombościanem (Rhomböeder).

Przecięcia graniastosłupów.

§. 106. 1. Jeżeli graniastosłup przetniemy płaszczyzną równoległą do podstawy, otrzymamy z przecięcia wielobok przystający do podstawy (fig. 66.).

2. Jeżeli przetniemy graniastosłup płaszczyzną przesuniętą przez dwie niebezpośrednio po sobie następujące krawędzie boczne, n. p. przez BF i DH (fig. 67.), otrzymamy z przecięcia równoległobok BFHD; przecięcie to nazywamy przecięciem przekątnem albo przekrojem przekątnym (Diagonalschnitt) graniastosłupa).

Każdy graniastosłup wieloboczny można podzielić zapomocą przekrojów przekątnych na graniastosłupy trójboczne.

3. Jeżeli pochyły graniastosłup przetniemy płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi bocznych, otrzymamy tak zwany przekrój normalny (normaler Querschnitt) graniastosłupa pochyłego.

Powierzchnia graniastosłupa.

§. 107. Chcąc otrzymać powierzchnię graniastosłupa, oblicza się powierzchnię ścian bocznych i takowe się dodaje; sumę tę nazywamy powierzchnią ścian bocznych albo pobocznica (Mantelfläche). Dodawszy do pobocznicę podwójną powierzchnię podstawy, otrzymamy powierzchnię całego graniastosłupa.

Rozwinąwszy ściany boczne graniastosłupa na płaszczyźnie łatwo wymiarkujemy, że:

1. Pobocznica prostego graniastosłupa równa się prostokątowi, którego podstawą jest obwód

podstawy graniastosłupa, a wysokością wysokość graniastosłupa.

2. Pobocznicą graniastosłupa pochyłego równa się prostokątowi, którego podstawą jest obwód normalnego przekroju, a wysokością krawędź boczna graniastosłupa.

§. 108. Powierzchnia sześcianu równa się sześciokrotnej powierzchni jednego kwadratu, będącego ścianą sześcianu, a zatem sześciokrotności z drugiej potęgi krawędzi.

Oznaczając liczby wymiarowe krawędzi i powierzchni sześcianu przez s i p , będzie

$$p = 6 s^2, \text{ a stąd } s = \sqrt{\frac{p}{6}}.$$

Oznaczając przez S i P liczby wymiarowe krawędzi i powierzchni drugiego sześcianu, mamy $P = 6 S^2$, zatem $P : p = S^2 : s^2$; t. j.

Powierzchnie dwu sześcianów są proporcjonalne względem kwadratów ich krawędzi.

§. 109. Jeżeli wszystkie ściany bryły jakiejś narysujemy w związku ze sobą na jednej płaszczyźnie, otrzymamy siatkę (Netz) tej bryły.

Zadanie. Narysować siatkę graniastosłupa.

Wykreślamy ściany boczne graniastosłupa obok siebie, a przy jednej u góry i na dole rysujemy podstawy.

Objętość graniastosłupa.

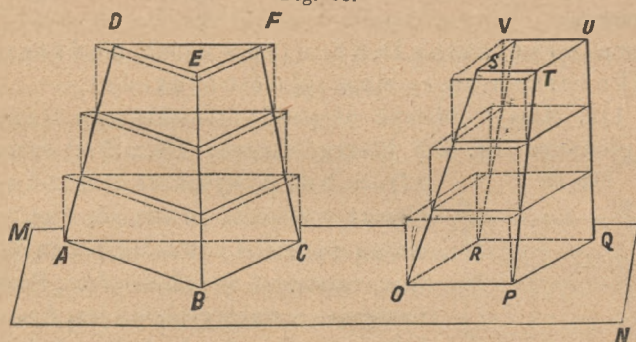
§. 110. Dwa proste graniastosłupy o równych podstawach i wysokościach są równe co do objętości.

Jeżeli równe podstawy danych graniastosłupów są oraz przystające, wtedy i graniastosłupy przystają do siebie, a zatem mają równe objętości.

Jeżeli zaś równe podstawy nie są przystające, można je podzielić na części takie, że część jednej podstawy będzie przystającą do odpowiedniej części drugiej podstawy. Proste graniastosłupy, mające te części podstawy za swoje podstawy, przystają do siebie parami, każde dwa z nich mają więc równe objętości; a że sumy równych ilości są równe, przeto i całe dane graniastosłupy, które składają się z owych równych co do objętości a mniejszych graniastosłupów, mają równe objętości.

§. 111. Niech bryły $ABCDEF$ i $OPQRSTUV$, ustawione na płaszczyźnie MN (fig. 68.), będą takie, że ich przekroje każdą płaszczyzną równoległą do MN są równe co do powierzchni.

Fig. 68.



Przetnijmy obie bryły dowolną ilością płaszczyzn równoległych do MN i wystawmy na każdym przekroju graniastosłup prosty aż do najbliższej płaszczyzny przecinającej; każde dwa takie odpowiednie graniastosłupy, z których jeden jest w pierwszej bryle a drugi w drugiej, są sobie równe co do objętości (według §. 110.), ponieważ mają równe podstawy i równe wysokości. Zatem także suma z objętości wszystkich schodkowato po sobie następujących graniastosłupów w pierwszej bryle musi być równa sumie objętości wszystkich graniastosłupów w drugiej bryle.

To wnioskowanie nie zależy od odległości pojedynczych płaszczyzn przecinających i pozostanie także wtedy dobrem, gdy oddalenie rzeczonych płaszczyzn będzie bardzo małe, a więc ich ilość bardzo wielka. Ale gdy oddalenie przekrojów zmaleje do ilości mało co różnej od zera, będą sumy z przyzmatów w obu bryłach równe tym bryłom, które mając równe podstawy i wysokości są sobie zatem równe co do objętości.

Dwie bryły dające się tak ustawić, że przecięte każdą płaszczyzną równoległą do stałej płaszczyzny mają równe przekroje, są równe co do objętości.

Twierdzenie to nazwano twierdzeniem Cavalieręgo (der Cavalieri'sche Satz).

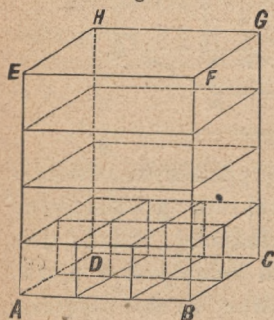
§. 112. Jeżeli dwa graniastosłupy o równych podstawach i wysokościach ustawimy ich podstawami na jednej płaszczyźnie,

a następnie w dowolnej wysokości przetniemy je płaszczyzną równoległą do podstaw, otrzymamy przekroje równe podstawom, a więc i między sobą równe, gdyż założyliśmy, że podstawy obu graniastosłupów są równe. Zatem według twierdzenia Cavalie-re'go mamy:

Dwa graniastosłupy o równych podstawach i wysokościach są równe co do objętości.

§. 113. Mamy obliczyć objętość prostokątnego i prostego równoległościanu (fig. 69.), którego długość $AB = 3\text{ m}$, szerokość

Fig. 69.



$AD = 2\text{ m}$, a wysokość $AE = 4\text{ m}$. Ponieważ wysokość równa się 4 m , przeto można podzielić równoległościan na 4 równe warstwy o wysokości 1 m . Ponieważ następnie równoległościan jest 3 m długi, a 2 m szeroki, przeto można każdą ową warstwę rozłożyć na $3 \times 2 = 6$ sześciątów, z których każdy jest metrem sześciennym. Objętość równoległościanu jest zatem $6 \times 4 = 3 \times 2 \times 4 = 24\text{ m}^3$.

Liczba wymiarowa objętości równoległościanu prostokątnego i prostego równa się więc iloczynowi z liczb wymiarowych trzech przecinających się krawędzi (długości, szerokości i wysokości) albo równa się iloczynowi z liczb wymiarowych podstawy i wysokości.

Krócej wyrażamy to twierdzenie zwykle w następujący sposób:

Objętość prostego i prostokątnego równoległościanu równa się iloczynowi z trzech przecinających się krawędzi albo iloczynowi z podstawy przez wysokość.

Oznaczając przez a, b, c liczby wymiarowe przecinających się krawędzi, zaś przez v liczbę wymiarową objętości, otrzymamy

$$v = a b c, \text{ a stąd } a = \frac{v}{bc}, \quad b = \frac{v}{ac}, \quad c = \frac{v}{ab}.$$

§. 114. Ponieważ według §. 112. każdy graniastosłup równa się co do objętości równoległościanowi prostemu i prost-

kątnemu, mającemu z nim równą podstawę i równą wysokość, przeto twierdzimy ogólnie:

Objętość każdego graniastosłupa równa się iloczynowi z podstawy przez wysokość.

Jeżeli B i b są liczbami wymiarowymi podstaw, H i h liczbami wymiarowymi wysokości dwu graniastosłupów, zaś V i v liczbami wymiarowymi ich objętości, mamy:

1. $V : v = BH : bh$.
2. Gdy $B = b$, wtedy $V : v = H : h$.
3. Gdy $H = h$, wtedy $V : v = B : b$.

Wypowiedzcie twierdzenie zawarte w tych trzech proporcjach.

§. 115. Ponieważ sześciian jest równoległościanem prostym i prostokątnym o równej długości, szerokości i wysokości, przeto:

Objętość sześciianu równa się trzeciej potęgze z jego krawędzi.

Z tego powodu nazywają w arytmetyce trzecią potęgę liczby jej sześcianiem.

Oznaczając przez s i v liczby wymiarowe krawędzi i objętości sześciianu, otrzymamy

$$v = s^3, \text{ a stąd } s = \sqrt[3]{v}.$$

Jeżeli S i V oznaczają krawędź i objętość drugiego sześciianu, mamy także $V = S^3$, zatem $V : v = S^3 : s^3$; t. j.

Objętości dwu sześcianów są proporcjonalne względem trzecich potęg z ich krawędzi.

§. 116. Sześciian o krawędzi 10 dm długiej ma objętość:

$$10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ } dm^3.$$

Taki sześciian jest metrem sześciennym; więc

$$1 \text{ } m^3 = 1000 \text{ } dm^3.$$

W podobny sposób można się przekonać, że

$$1 \text{ } dm^3 = 1000 \text{ } cm^3,$$

$$1 \text{ } cm^3 = 1000 \text{ } mm^3.$$

Jeden decymetr sześcienny jako miarę pojemności nazwano litrem (Liter); 100 litrów = 1 hektolitrowi.

§. 117. **Zadania rachunkowe.**

1. Krawędź sześciianu równa się *a*) 7 m , *b*) 2·13 m , *c*) 159 mm , *d*) 1 m 2 dm 5 cm ; jak wielka jest jego powierzchnia i objętość?

2. Obliczcie krawędź sześciianu, którego powierzchnia równa się *a*) 40344 cm^2 , *b*) 22 m^2 18 dm^2 , *c*) 50 dm^2 80·86 cm^2 ?

3. Jak długa jest krawędź sześcianu, którego objętość równa się a) 29791 cm^3 , b) $16\cdot003 \text{ dm}^3$, c) 1 m^3 157 dm^3 621 cm^3 ?

4. Powierzchnia sześcianu równa się 30 dm^2 ; jak wielka jest jego objętość?

5. Sześcián o krawędzi 2 dm długiej waży 16 kg ; jak wielki jest ciężar innego sześcianu, zrobionego z tej samej materyi, ale o długości krawędzi 6 dm ?

6. Wyszukajcie krawędź sześcianu, którego objętość równa się sumie objętości dwu sześcianów o krawędziach $1\cdot2 \text{ dm}$ i $2\cdot1 \text{ dm}$ długich.

7. Równoległoscian prosty i prostokątny jest a) 11 dm długi, 6 dm szeroki, 9 dm wysoki; b) $4\cdot2 \text{ dm}$ długi, $1\cdot5 \text{ dm}$ szeroki, $1\cdot2 \text{ dm}$ wysoki; c) 7 m 15 dm długi, 3 m 72 dm szeroki, 2 m 18 dm wysoki; jak wielka jest jego powierzchnia i objętość?

8. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 5 m jest kwadrat o boku 3 m długim; jak wielka jest jego a) powierzchnia, b) objętość?

9. Jak wielka jest a) powierzchnia, b) objętość prostego graniastosłupa o wysokości $3\cdot5 \text{ dm}$, którego podstawą jest prostokąt $2\cdot3 \text{ dm}$ długi a $1\cdot2 \text{ dm}$ szeroki?

10. Jak wysoki jest równoległoscian prosty i prostokątny, 75 cm długi a 36 cm szeroki, jeżeli jego objętość równa się $21\cdot600 \text{ cm}^3$?

11. Obie kwadratowe podstawy prostego równoległoscianu równają się razem 162 dm^2 , zaś cztery ściany boczne $590\cdot4 \text{ dm}^2$; jak wielka jest jego objętość?

12. Ile m^3 ma mur 11 m 2 dm długi, 8 dm gruby a 3 m 2 dm wysoki?

13. Ktoś chce wykopać dół 10 m długi, 4 m 2 dm głęboki, a o pojemności 273 m^3 ; jak szeroki musi być ten dół?

14. Graniastosłup o wysokości 8 dm , a o kwadratowej podstawie waży 135 kg ; jak wielka jest krawędź podstawy, jeżeli każdy dm^3 waży $2\cdot7 \text{ kg}$?

15. Naczynie graniastosłupowe ma za podstawę prostokąt 2 m długi, a $1\cdot2 \text{ m}$ szeroki; jak głębokie musi być to naczynie, aby pojemność jego równała się 12 hektolitrom?

16. W graniastosłupie równa się *a*) podstawa 15 m^2 , wysokość $2\text{ m } 4\text{ dm}$; *b*) podstawa 2.864 dm^2 , wysokość $9\text{ dm } 2\text{ cm}$; jak wielka jest objętość tego graniastosłupa?

17. Podstawa graniastosłupa równa się $31\text{ m}^2\text{ } 78\text{ dm}^2$, a objętość $1\text{ m}^3\text{ } 573\text{ dm}^3\text{ } 110\text{ cm}^3$; jak wielka jego wysokość?

18. Jak wielka jest podstawa graniastosłupa 4.5 dm wysokiego, którego objętość równa się 124.2 dm^3 ?

19. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 2.4 dm jest trójkąt prostokątny o przyprostokątniach 0.5 dm i 1.2 dm długich; obliczcie jego *a*) powierzchnię, *b*) objętość.

20. Wysokością prostego graniastosłupa jest *h*, zaś podstawą trójkąt równoboczny o boku *a*; obliczcie jego powierzchnię *p* i objętość *v* (§. 77. 1).

21. Jak wielka jest powierzchnia i objętość prostego graniastosłupa trójsściennego, którego każda krawędź równa się 3 dm ?

22. Wysokością prostego graniastosłupa jest *h*, zaś podstawą sześciobok umiarowy o boku *a*; obliczcie jego powierzchnię *p* i objętość *v* (§. 79. 1.).

23. Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości $1\text{ m } 8\text{ dm}$ jest sześciobok umiarowy o boku $1\text{ m } 1\text{ dm}$ długim; jak wielka jest pobocznicą tego graniastosłupa?

24. Naczynie graniastosłupowe o podstawie 9 dm^2 napełniono wodą do wysokości $6\text{ dm } 4\text{ cm}$; jak wielkie jest ciśnienie wody na dno tego naczynia, jeżeli 1 dm^3 wody waży 1 kg ?

25. Ile m^3 objętości ma mur $28\text{ m } 6\text{ dm}$ długi, 1 m wysoki, a u dołu $6\text{ m } 2\text{ dm}$, zaś u góry $5\text{ m } 6\text{ dm}$ gruby?

26. Przy budowie kolei żelaznej wykopano dół 165 m długi, u góry 22 m , a u dołu 8 m szeroki, zaś 6.4 m głęboki; ziemię z tego dołu wysypano jednostajnie na przestrzeni 25 a ; o ile podwyższyła się przez to ta przestrzeń?

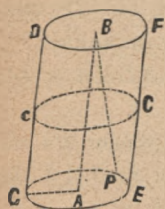
2. Walec.

Powstanie walca i jego części składowe.

§. 118. Jeżeli nieograniczona prosta CD ślizga się równolegle do siebie po obwodzie koła, zakreślonego z punktu A (fig. 70.) promieniem CA, natenczas zakreśla powierzchnię krzywą, która

ogranicza przestrzeń z dwu stron zamkniętą, a zwaną przestrzenią walcowatą (cylindrischer Raum).

Fig. 70.



Przecinając przestrzeń graniastosłupową dwiema płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny koła, otrzymamy bryłę okrągłą, zwaną walcem (Cylinder).

Oba równoległe przekroje nazywamy podstawami, zaś boczną powierzchnię krzywą nazywano pobocznicą walca.

Walec CEFD może także i w ten sposób powstać, że powierzchnia kołowa CE posuwa się równoległe do siebie tak, że przytem jej środek A zakreśla prostą AB.

Podstawami walca są zatem dwa równe koła. Prostą AB, łączącą ich środki, nazywamy osią (Achse) walca. Każda płaszczyzna, przesunięta przez oś walca, przecina jego pobocznice w linii prostej, którą nazwano bokiem (Seite) walca; n. p. CD. Wszystkie boki walca są równe i równoległe do osi. Odległość BP obu podstaw walca nazywamy jego wysokością.

Ponieważ koło jest wielobokiem umiarkowanym o niezmiernie wielkiej liczbie boków, przeto można także powiedzieć:

Walec jest graniastosłupem, którego podstawą jest koło.

Rodzaje walców.

§. 119. Walec (fig. 71.), którego oś jest prostopadła do podstawy, nazywamy prostym (gerader Cylinder), każdy inny pochyłym (schief). Prosty walec może

Fig 71.



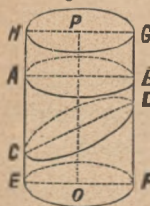
w ten sposób powstać, że prostokąt ABCD obraca się naokoło jednego ze swoich boków, n. p. naokoło AB, jako osi. W prostym walcu wysokość równa się osi.

Walec prosty, którego bok równa się średnicy podstawy, nazywamy równobocznym (gleichseitig).

Przekroje walca.

§. 120. 1. Przecinając walec (fig. 72.) płaszczyzną równoległą do jego podstawy, otrzymamy na przekrój AB koło, równe kołu podstawowemu.

Fig. 72.



2. Jeżeli płaszczyzna, przecinająca walec, nie jest równoległą do jego podstawy, otrzymamy na przekrój CD elipsę.

3. Jeżeli nareszcie płaszczyzna, przecinająca walec, przechodzi przez jego oś, otrzymamy na przekrój osiowy (Achsenschnitt) równoległobok; n. p. $EFGH$. W każdym walcu prostym jest przekrój osiowy prostokątem, a w równobocznym jest kwadratem.

Powierzchnia walca.

§. 121. Jeżeli pobocznice walca prostego rozwinie my na płaszczyźnie, spostrzeżemy, że:

Pobocznica walca prostego równa się prostokątowi, którego podstawą jest obwód podstawy walca, a wysokością wysokość walca.

Cheąc otrzymać całą powierzchnię walca prostego, potrzeba do jego pobocznic dodać podwójną powierzchnię podstawy.

Oznaczmy przez r , h , m , p promień podstawy, a względnie wysokość, pobocznice i całą powierzchnię walca prostego, to $2r\pi$ będzie obwodem, zaś $r^2\pi$ powierzchnią jego podstawy; zatem

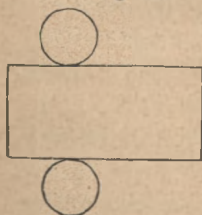
$$m = 2r\pi \cdot h = 2r\pi h, \text{ zaś}$$

$$p = 2r^2\pi + 2r\pi h, \text{ czyli } p = 2r\pi (r + h).$$

W walcu równobocznym jest $h = 2r$, przeto $p = 6r^2\pi$.

§. 122. **Zadanie.** Wykreślić siatkę walca prostego.

Fig. 73.



Kreślimy prostokąt (fig. 73.), którego podstawa równa się obwodowi podstawy walca, a wysokość wysokości walca. Następnie zakreślamy dwa koła równe podstawom walca i to tak, by jedno z nich stykało się z podstawą prostokąta, a drugie z przeciwnym bokiem podstawy.

Objętość walca.

§. 123. Ponieważ każdy walec można uważać za graniastosłup, którego podstawą jest koło, przeto z §. 114. wynika:

Objętość walca równa się iloczynowi z jego podstawy przez wysokość.

Jeżeli r jest promieniem podstawy walca, h jego wysokością, zaś v objętością, otrzymamy

$$v = r^2 \pi \cdot h.$$

Dla walca równobocznego $h = 2r$, więc jego $v = 2r^3 \pi$.

Jeżeli R jest promieniem podstawy, a V objętością drugiego walca równobocznego, będzie także $V = 2R^3 \pi$, zatem

$$V : v = R^3 : r^3.$$

§. 124. Rurą walcową nazywamy ciało, ograniczone poboczniciami dwóch walców i dwoma pierścieniami kołowymi, przystającymi do siebie. Powstaje ona wtedy, gdy z walca wytniemy walec mniejszy ale o wspólnej osi. Chcąc jej objętość obliczyć, potrzeba od objętości walca większego odjąć objętość walca mniejszego.

Jeżeli R i r są promieniami podstaw obu walców, zaś h wysokością walcowatej rury, wtedy jej objętość

$$v = R^2 \pi h - r^2 \pi h = (R^2 - r^2) \pi h.$$

§. 125. Zadania rachunkowe.

1. W walcu prostym *a*) promień podstawy równa się 3 dm , wysokość 5 dm ; *b*) średnica podstawy równa się 1.57 m , wysokość 1.26 m ; jak wielka jest jego pobocznica i objętość?

2. Obliczcie powierzchnię walca prostego o wysokości 7.5 dm , którego podstawa ma 17.4 dm w obwodzie.

3. Jak wielki jest promień podstawy walca prostego o wysokości 1.5 m , jeżeli jego pobocznica równa się 1.1386 m^2 ?

4. Powierzchnia walca prostego równa się 28.9665 dm^2 , a obwód jego podstawy 4.71 dm ; jak wielka jest jego wysokość?

5. Objętość walca równa się 37.268 dm^3 ; jak wysoki jest ten walec, jeżeli średnica podstawy jest 3.7 dm długa?

6. Walec 4 dm 3 cm wysoki ma objętość 20 dm^3 ; jak wielki jest promień jego podstawy?

7. Jak wielka jest *a*) powierzchnia, *b*) objętość walca równobocznego, którego bok jest $2\frac{2}{5}\text{ m}$ wysoki?

8. Jak długi jest promień walca równobocznego, jeżeli *a*) jego pobocznica równa się 10 dm^2 , *b*) jego objętość 10 dm^3 ?

9. Z pobocznic m i z objętości v walca prostego obliczyć promień r jego podstawy.

$$\text{Mamy } \frac{v}{m} = \frac{r^2 \pi \cdot h}{2r \pi \cdot h} = \frac{r}{2}; \text{ zatem } r = \frac{2v}{m}.$$

10. Ile litrów pojemności ma naczynie walcowate o średnicy 86 mm , a o wysokości $172\cdot1\text{ mm}$?

11. Ile litrów ma naczynie w kształcie walca równobocznego o wysokości $503\cdot1$.

12. Naczynie walcowate ma mieć 1 litr pojemności; jak wysokie musi być to naczynie, jeżeli średnica jego wewnętrznej pobocznicy ma mieć $108\cdot4\text{ mm}$?

13. Koneweczką 2 litrową wlewamy wodę do zbiornika walcowatego o średnicy 6 dm ; jak wysoko sięgać będzie woda w tym zbiorniku, jeżeli wlejemy 25 koneweczek?

14. Walcowate naczynie $\frac{1}{2}$ hektolitrowe jest $399\cdot3\text{ mm}$ wysokie; jak wielka jest średnica jego podstawy?

15. Za okrągły pniak $2\text{ m } 3\text{ dm}$ długi, a 66 cm gruby zapłacono $88\frac{1}{2}\text{ zł.}$; po czemu liczono m^3 ?

16. Ile dm^3 wody otrzymanym przy każdym poruszeniu tłoka pompy do góry, jeżeli średnica tłoka ma 21 cm , a poruszamy tłok do góry o $4\cdot2\text{ dm}$?

17. Walec do wałkowania ziemi jest $1\cdot2\text{ m}$ długi, a średnica jego podstawy równa się 3 dm ; ile razy musi się obrócić ten walec naokoło swej osi, jeżeli ma przewałkować pole o powierzchni 200 m^2 ?

18. Sześcian ma tę samą objętość, co walec prosty, którego wysokość równa się $2\cdot4\text{ dm}$, a pobocznica $7\cdot54\text{ dm}^2$; jak wielka jest powierzchnia tego sześcianu?

19. Belka $5\cdot2\text{ m}$ długa, 3 dm szeroka, a $2\cdot6\text{ dm}$ wysoka, ma na całej swej długości wydrążenie walcowate; jaka jest jej objętość, jeżeli średnica wydrążenia równa się 18 cm ?

20. Rura walcowata, 5 cm gruba, ma wewnętrzną średnicę 18 cm długą, a wysokość $2\cdot85\text{ m}$; jak wielka jest jej wewnętrzna i zewnętrzna pobocznica?

21. Rura walcowata jest 32 dm długa, a średnica wewnętrzna ma $1\cdot4\text{ dm}$; jaka jest objętość tej rury, jeżeli jej grubość równa się 5 cm ?

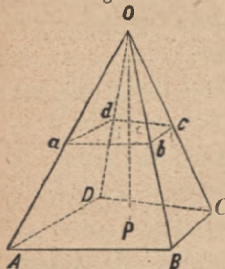
22. Wysokość wieży walcowatej o zewnętrznym obwodzie 13 m równa się $7\cdot2\text{ m}$, a grubość muru 86 cm ; ile m^3 muru ma ta wieża?

3. Ostrosłup.

§. 126. Naroże (§. 96.) nazywają także przestrzenią ostrosłupową (pyramidaler Raum).

Jeżeli przestrzeń ostrosłupową (fig. 74.) przetniemy płaszczyzną $ABCD$, przecinającą wszystkie krawędzie tej przestrzeni, otrzymamy bryłę graniastą, zwaną ostrosłupem (Pyramide) albo piramidą.

Fig. 74.



Przekrój $ABCD$ nazywamy podstawą, trójkąty AOB , BOC , COD , ... ścianami bocznymi, a punkt O , w którym przecinają się wszystkie ściany boczne, wierzchołkiem ostrosłupa. Linie przecięcia się każdych dwu sąsiednich ścian bocznych nazwano krawędziami bocznymi, zaś linie przecięcia się ścian bocznych z podstawą krawędziami podstawowymi. Prostopadłą OP , wykreśloną z wierzchołka na podstawę, nazywamy wysokością ostrosłupa.

Ostrosłup może powstać także w ten sposób, że wielobok $ABCD$ posuwa się równolegle po prostej AO , a przytem ciągle się pomniejsza, pozostając jednakowoż zawsze podobny do $ABCD$ aż w punkcie O zmaleje do zera.

Rodzaje ostrosłupów.

§. 127. Ze względu na ilość krawędzi bocznych rozróżniamy ostrosłupy trójścienne, czworościenne i wielościenne.

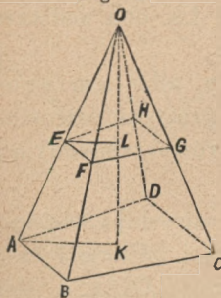
Ostrosłup, który ma wszystkie krawędzie boczne równe, nazywamy prostym, każdy inny pochyłym. Podstawą prostego ostrosłupa jest wielobok wpisany w koło, którego środkiem jest spodek wysokości ostrosłupa; ściany boczne takiego ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi.

Ostrosłup prosty, mający za podstawę wielobok umiary, nazwano umiarym (regelmässige Pyramide). Ściany boczne takiego ostrosłupa są trójkątami równoramiennymi i przystającymi; wysokość któregokolwiek z tych trójkątów nazywamy wysokością boczną (Seitenhöhe) ostrosłupa umiary.

Przekroje ostrosłupa.

§. 128. 1. Przetnijmy ostrosłup $OABCD$ (fig. 75) płaszczyzną $EFGH$ równoległą do jego podstawy $ABCD$; OK i OL niech będą odległościami obu tych płaszczyzn od wierzchołka O .

Fig. 75.



Ze sposobu powstawania ostrosłupa wynika, że wielobok $EFGH$, otrzymany z przecięcia ostrosłupa, jest podobny do podstawy $ABCD$. A że powierzchnie podobnych wieloboków są proporcjonalne względem kwadratów odpowiednich boków, przeto

$$EFGH : ABCD = EF^2 : AB^2.$$

Ponieważ $EF \parallel AB$, zatem $EF : AB = OE : OA$, zaś z powodu, że $EL \parallel AK$, mamy $OL : OK = OE : OA$; przeto jest także $EF : AB = OL : OK$ i $EF^2 : AB^2 = OL^2 : OK^2$; więc $EFGH : ABCD = OL^2 : OK^2$.

Z tego wynika następujące twierdzenie:

Jeżeli ostrosłup przetniemy płaszczyzną równoległą do jego podstawy, natenczas 1. wielobok otrzymany z przekroju jest podobny do podstawy, 2. powierzchnia tego wieloboku i powierzchnia podstawy są proporcjonalne względem kwadratów z ich odległości od wierzchołka.

2. Przesuwając płaszczyznę przez dwie niebezpośrednio po sobie następujące krawędzie boczne ostrosłupa, otrzymamy na przekrój trójkąt; przekrój ten nazywamy przekątnym przekrojem ostrosłupa.

Każdą wielościenną piramidę można za pomocą przekrojów przekątnych podzielić na trójsienne ostrosłupy.

Ostrosłup ścięty.

§. 129. Przekrój równoległy do podstawy danego ostrosłupa (fig. 75.) dzieli go na dwie bryły, mianowicie na jedną, zawartą między dwiema równoległymi płaszczyznami, a zwaną ostrosłupem ściętym (abgekürzte Pyramide albo Pyramidenstumpf), i na drugą bryłę, która jest ostrosłupem mniejszym, zwanym ostrosłupem dopełniczym (Ergänzungs-pyramide) ściętego ostrosłupa. Ostrosłup ścięty $ABCDEFGH$

jest więc różnicą dwóch ostrosłupów OABCD i OEF GH, których podstawami są dolna i górna podstawa ostrosłupa ściętego, zaś ich wspólny wierzchołek O jest punktem przecięcia się krawędzi bocznych ściętego ostrosłupa.

Podstawy ostrosłupa ściętego są wielobokami podobnymi, a jego ściany boczne są trapezami. Odległość LK obu podstaw nazywamy wysokością ostrosłupa ściętego.

Jeżeli przekrojony ostrosłup był prosty albo umiarowy, to i ostrosłup ścięty jest także taki. W prostym ostrosłupie ściętym są ściany boczne trapezami równoramiennymi, a w umiarowym oraz przystającymi.

§. 130. **Zadanie.** Dana wysokość $LK = h$ ostrosłupa ściętego (fig. 75.) i dane dwa odpowiednie boki $AB = S$ i $EF = s$ dolnej i górnej podstawy; znaleźć wysokości $OK = A$ i $OL = a$ obu ostrosłupów, których różnicą jest ostrosłup ścięty.

Według §. 128. 1. mamy

$OK : OL = AB : EF$ czyli $A : a = S : s$; zatem

$(A - a) : (S - s) = A : S$, i $(A - a) : S - s = a : s$,

albo ponieważ $A - a = h$, jest

$h : (S - s) = A : S$, i $h : (S - s) = a : s$; a stąd

$$A = \frac{h \cdot S}{S - s}, \text{ zatem } a = \frac{h \cdot s}{S - s}.$$

Przeczytajcie te dwa wzory słowami.

Powierzchnia całego ostrosłupa i ostrosłupa ściętego.

§. 131. Aby otrzymać powierzchnię ostrosłupa, szukujemy pobocznice jego, t. j. sumę powierzchni wszystkich ścian bocznych i dodajemy do niej powierzchnię podstawy.

Cheąc wyszukać pobocznice umiarowego ostrosłupa, potrzeba powierzchnię jednego z bocznych trójkątów pomnożyć przez ilość krawędzi bocznych.

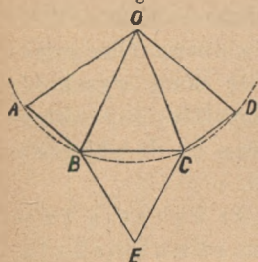
§. 132. Aby wyszukać powierzchnię ostrosłupa ściętego, dodajemy do jego pobocznic sumę powierzchni obu podstaw.

Pobocznice umiarowego ostrosłupa ściętego znajdziemy, jeżeli powierzchnię jednego z bocznych trapezów pomnożymy przez ich ilość.

§. 133. **Zadanie.** Wykreślić siatkę ostrosłupa.

Kreślimy trójkąty boczne tak obok siebie, by miały wierzchołek wspólny, a następnie koło podstawy jednego z tych trójkątów rysujemy wielobok, będący podstawą ostrosłupa.

Fig. 76.



Aby wykreślić siatkę prostego ostrosłupa n. p. trójsięnnego, zakreślamy z O (fig. 76.) promieniem równym krawędzi bocznej łuk kołowy i wykreślamy w nim cięciwy AB, BC i CD równe bokom podstawy, a potem pod BC kreślimy podstawę BCE.

Jak wykreśla się siatkę ostrosłupa ściętego.

Objętość ostrosłupa.

§. 134. Jeżeli dwa ostrosłupy o równych podstawach i wysokościach ustawimy na tej samej płaszczyźnie, a następnie przetniemy je płaszczyzną równoległą do ich podstawy, otrzymamy równe przekroje. Albowiem oznaczając przez B i b ich podstawy, przez h ich wysokość, przez d oddalenie płaszczyzny przecinającej od wierzchołka, a przez F i f przekroje, mamy (według §. 128. 1.) $B : F = h^2 : d^2$, zaś $b : f = h^2 : d^2$, zatem także $B : F = b : f$. A że $B = b$ według założenia, przeto musi być także $F = f$.

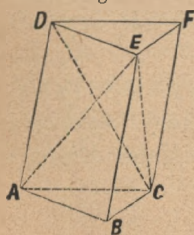
Przecinając więc dwa ostrosłupy o równych podstawach i równych wysokościach płaszczyzną równoległą do podstawy w tem samym oddaleniu od wierzchołka, otrzymamy równe przekroje.

Z tego wynika następnie według twierdzenia Cavaliere'go:

Dwa ostrosłupy o równych podstawach i wysokościach są równe co do objętości.

§. 135. Niech będzie ABCDEF (fig. 77.) trójsięnnym graniastosłupem. Przecinając go płaszczyzną EAC, otrzymamy ostrosłup trójsięnnny EABC i czworościenny EA CFD. Ten ostatni ostrosłup dzieli płaszczyzna CED na dwa trójsięienne ostrosłupy EACD i ECDF tak, że trójsięnnny graniastosłup składa się z trzech trójsięiennych ostrosłupów. Te trzy trójsięienne ostrosłupy są równe co do objętości, jak to zaraz wyka-

Fig. 77.



żemy. Ostrosłupy EACD i ECDF mają bowiem równe podstawy ACD i CDF, leżące na tej samej płaszczyźnie, i wspólny wierzchołek E, zatem także mają tę samą wysokość; są więc równe co do objętości. W ostrosłupach zaś EACD i EABC można wierzchołek przyjąć w punkcie C; ich podstawy EAB i EAD leżą wtedy na jednej płaszczyźnie i są sobie równe. Oba ostrosłupy mają zatem także równe podstawy i tę samą wysokość, są więc równe co do objętości; przeto wszystkie trzy ostrosłupy EACD, ECDF i EABC są sobie równe co do objętości. Z tego wynika:

Każdy trójsścienny ostrosłup jest trzecią częścią graniastoslupa, mającego z nim równą podstawę i równą wysokość.

§. 136. Z §§. 135. i 114. wynika zatem:

Objętość trójsściennego ostrosłupa równa się trzeciej części iloczynu z podstawy przez wysokość.

Ponieważ objętość każdej wielościennej piramidy równa się objętości trójsściennej, mającej z nią równą podstawę i wysokość, przeto ogólnie twierdzimy:

Objętość ostrosłupa równa się trzeciej części iloczynu z jego podstawy przez wysokość.

Oznaczając przez f powierzchnię podstawy ostrosłupa, przez h jego wysokość, zaś przez v objętość, otrzymamy

$$v = \frac{f \cdot h}{3}, \quad f = \frac{3v}{h}, \quad h = \frac{3v}{f}.$$

Miedzy objętościami dwu ostrosłupów zachodzą te same stosunki, jakie wyprowadziliśmy w §. 114. dla objętości dwu graniastoslupów.

Objętość ostrosłupa ściętego.

§. 137. Aby otrzymać objętość ostrosłupa ściętego (fig. 75.), wyszukujemy najpierw objętość obu ostrosłupów, których różnicą jest ostrosłup ścięty, a następnie odejmujemy objętość dopełniczego ostrosłupa od objętości całego ostrosłupa.

Jeżeli przez B , A , P oznaczymy podstawę, wysokość i objętość całego ostrosłupa, zaś przez b , a , p podstawę, wysokość i objętość dopełniczego, natenczas objętość ostrosłupa ściętego

$$v = P - p = \frac{B \cdot A}{3} - \frac{b \cdot a}{3}.$$

Ponieważ z proporcji $B : b = A^2 : a^2$ (§. 128. 1.) można wyszukać każdą z czterech ilości B , b , A i a , jeżeli tylko trzy inne są dane, przeto do obliczenia objętości ostrosłupa ściętego potrzeba mieć tylko trzy różne od siebie warunki.

Zazwyczaj dane są obie podstawy i wysokość ostrosłupa ściętego. Oznaczając w tym razie dla uproszczenia rachunku podstawy przez M^2 i m^2 , zaś wysokość ostrosłupa ściętego przez h , wysokość dopełniczego przez x , a więc całego ostrosłupa wysokość przez $h + x$, otrzymamy objętość ostrosłupa ściętego

$$v = \frac{M^2 (h + x)}{3} - \frac{m^2 x}{3} = \frac{M^2 h}{3} + \frac{x}{3} (M^2 - m^2).$$

Do wyznaczenia x mamy z §. 128. 1.

$M^2 : m^2 = (h + x)^2 : x^2$, zatem także $M : m = (h + x) : x$ i $Mx = m(h + x)$; z tego równania otrzymamy $x = \frac{mh}{M - m}$.

Podstawiawszy tę wartość w wyrażeniu na v , będzie

$$v = \frac{M^2 h}{3} + \frac{mh}{3} \cdot \frac{M^2 - m^2}{M - m} = \frac{M^2 h}{3} + \frac{mh}{3} (M + m),$$

czyli

$$v = (M^2 + Mm + m^2) \frac{h}{3}.$$

Ponieważ $M^2 : Mm = Mm : m^2$, zatem jest Mm średnią geometrycznie proporcjonalną obu podstaw M^2 i m^2 . Z wzoru na v mamy przeto twierdzenie:

Objętość ostrosłupa ściętego równa się iloczynowi ze sumy obu podstaw i ich średniej geometrycznie proporcjonalnej przez trzecią część wysokości.

§. 138. Zadania rachunkowe.

1. Krawędź podstawowa czworosściennego ostrosłupa umiarkowanego równa się $1\ m\ 3\ dm$, a wysokość boczna $1\ m\ 8\ dm$; jak wielka jest jego powierzchnia?

2. Pobocznicą ostrosłupa prostego o kwadratowej podstawie równa się $1'036\ m^2$, a wysokość boczna $1'48\ m$; jak długi jest bok jego podstawy?

3. Jak wielka jest objętość ostrosłupa, którego

a) podstawa równa się $18\ cm^2$, a wysokość $6'5\ cm$,

b) „ „ „ $2\ m^2\ 35\ dm^2$, a wysokość $7'2\ dm$?

4. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt $1\cdot1\text{ m}$ długi, a $0\cdot9\text{ m}$ szeroki; jak wysoki jest ten ostrosłup, jeżeli jego objętość równa się $1\cdot188\text{ m}^3$?

5. Objętość ostrosłupa, $7\text{ dm } 5\text{ cm}$ wysokiego, a mającego za podstawę kwadrat, równa się 40 dm^3 ; jak długi jest bok jego podstawy?

6. Krawędź podstawowa umiarowego czworościennego ostrosłupa jest 4 dm długa, a krawędź boczna $4\text{ dm } 3\text{ cm}$; wyszukać jego *a)* powierzchnię, *b)* objętość.

7. Wysokość umiarowego trójsściennego ostrosłupa równa się $5\text{ m } 48\cdot3\text{ cm}$, a każdy bok podstawy $2\text{ m } 80\cdot4\text{ cm}$; jak wielka jest jego objętość? (§. 77. 1.).

8. Krawędź podstawowa umiarowego trójsściennego ostrosłupa jest 12 cm długa, a krawędzie boczne równają się krawędziom podstawowym; jak wielka jego *a)* powierzchnia, *b)* objętość?

9. W umiarowej sześciościennej piramidzie dana jest krawędź podstawowa a i krawędź boczna b ; wyszukać wysokość h piramidy, wysokość boczną s , pobocznice m i objętość v .

Ponieważ odległość środka umiarowego sześcioboku od jednego wierzchołka równa się bokowi tego sześcioboku, przeto wysokość h piramidy jest przyprostokątnią trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątnią jest b , zaś drugą przyprostokątnią a ; zatem $h = \sqrt{b^2 - a^2}$. Wysokość boczna s jest przyprostokątnią trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej b , zaś o drugiej przyprostokątnej $\frac{a}{2}$; przeto $s = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.

Z tego otrzymamy uwzględniając §. 79. 1.

$$m = 3a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}, \text{ zaś } v = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{b^2 - a^2}.$$

10. Dana jest krawędź podstawowa a umiarowego ostrosłupa sześciościennego i jego wysokość h ; wyszukać pobocznice m i objętość v .

$$m = 3a\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}, \text{ zaś } v = \frac{a^2h\sqrt{3}}{2}.$$

11. Każdy bok podstawy prostego ostrosłupa sześciościennego równa 14 cm , a wysokość boczna 36 cm ; jak wielka jest jego *a)* powierzchnia, *b)* objętość?

12. Wielka piramida Cheopsa przy Gizeh w Egipcie jest 149 m wysoka, jej podstawą jest kwadrat o boku 233 m długim; jak wielka jest jej objętość?

13. Czworościenny ostrosłup, mający za podstawę kwadrat o obwodzie 4 m 6 dm długim, jest 1 m 4 dm wysoki; jaki jest jego ciężar, jeżeli dm^3 waży 2·7 kg?

14. Jak wielki jest ciężar trójsściennego na 8 dm wysokiego ostrosłupa z lanego żelaza, jeżeli każdy bok jego podstawy jest 2·8 dm długi, a $1 dm^3$ żelaza lanego waży 7·1 kg;

15. Dach altany jest ośmiościennym ostrosłupem, którego krawędź boczna jest 1 m 5 dm długa, a każdy bok podstawy równa się 1 m; dach ten ma być pokryty miedzią; ile m^2 blachy miedzianej potrzeba na to?

16. Podstawy prostego ostrosłupa ściętego są kwadratami o obwodach 1·56 m i 1·24 m, wysokość jednego z bocznych trapezów równa się 0·63 m; jak wielka jest powierzchnia tego ostrosłupa?

17. Pobocznica prostego ostrosłupa ściętego równa się $3·56 m^2$; podstawami jego są równoboczne trójkąty o bokach 4·9 dm i 3·6 dm długich; jak wielka jest wysokość trapezów bocznych?

18. Ostrosłup prosty na 15 dm wysoki, a mający za podstawę kwadrat o boku 9 dm, przecięto płaszczyzną równoległą do podstawy w odległości 3 dm od podstawy; jak wielka jest powierzchnia tego przekroju?

19. Ostrosłup ścięty o wysokości 20 cm ma kwadratowe podstawy o bokach 25 cm i 19 cm długich; wyszukajcie jego objętość.

20. Podstawami ostrosłupa ściętego o wysokości 1·26 m są trójkąty równoboczne; jak wielka jest jego objętość, jeżeli bok dolnej podstawy równa się 0·82 m, a górnej 0·42 m?

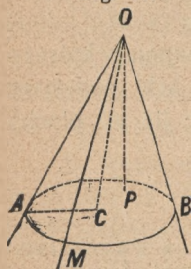
21. Jak wielka jest objętość czworograniastej belki 4 m wysokiej, jeżeli bok jej dolnego kwadratowego przekroju jest 5·2 dm, a górnego 4 dm długi?

22. Kamień ociosany w kształcie prostego ostrosłupa ściętego jest 2·2 m wysoki, u dołu 1·1 m długi, a 1 m szeroki, zaś u góry 0·8 m długi, a 0·73 m szeroki; jak wielki jest jego ciężar, jeżeli $1 dm^3$ waży 2·7 kg?

4. Stożek.

§. 139. Jeżeli promień OA (fig. 78.), mający punkt O stały, ślizga się po obwodzie koła, zakreślonego z punktu C promieniem CA , natenczas promień OA zakreśla powierzchnię krzywą; powierzchnia ta ogranicza przestrzeń z jednej strony niezamkniętą, a zwaną przestrzenią stożkową albo ostrokągową (kegelförmiger albo konischer Raum).

Fig. 78.



Jeżeli przestrzeń stożkową przetniemy płaszczyzną równoległą do płaszczyzny rzeczonego koła, otrzymamy bryłę okrągłą zwaną stożkiem (der Kegel) albo ostrokreśm. Rzeczony przekrój nazywamy podstawą, krzywą powierzchnię boczną poboczną, a punkt O wierzchołkiem stożka.

Stożek $OAMB$ może także w ten sposób powstać, że koło posuwa się równolegle do swego pierwotnego położenia tak, że jego środek C porusza się po prostej CO , a przytem koło statecznie maleje i w punkcie O staje się punktem.

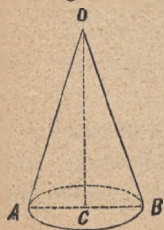
Podstawą stożka jest zatem koło. Prostą OC , łączącą wierzchołek stożka ze środkiem tego koła, nazywamy osią stożka. Każda płaszczyzna, przesunięta przez oś stożka, przecina jego pobocznice w linii prostej n. p. OA , zwanej bokiem stożka. Prostopadłą OP , wykreśloną z wierzchołka na podstawę, nazwano wysokością stożka.

Stożek można uważać za ostrosłup, którego podstawą jest koło.

Rodzaje stożków.

§. 140. Jeżeli oś stożka jest prostopadła do jego podstawy, wtedy taki stożek nazywamy prostym (fig. 79.), w każdym innym razie mamy stożek pochyły.

Fig. 79.



Stożek prosty powstaje, jeżeli trójkąt prostokątny ACO obraca się naokoło jednej swej przyprostokątnej CO jako osi; druga przyprostokątnia AO zakreśla wtedy podstawę, a przeciwprostokątnia AC pobocznice stożka. W stożku prostym jest oś oraz wysokością, a wszystkie boki są sobie równe.

Stożek prosty, w którym bok równa się średnicy podstawy, nazywamy **równobocznym**.

Oznaczmy w stożku prostym promień podstawy przez r , wysokość przez h , a bok przez s ; jeżeli dane są dwie z tych trzech ilości, można łatwo wyszukać trzecią. Mamy bowiem

$$s = \sqrt{r^2 + h^2}, h = \sqrt{s^2 - r^2}, r = \sqrt{s^2 - h^2}.$$

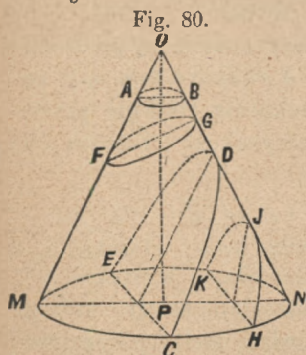
Przykłady. 1. Dane $r = 5\text{ cm}$, $h = 12\text{ cm}$; wyszukać s .

2. „ $r = 11\text{ cm}$, $s = 61\text{ cm}$; „ h .

3. „ $s = 25\text{ dm}$, $h = 24\text{ dm}$; „ r .

Przekroje stożka.

§. 141. 1. Przecinając stożek płaszczyzną równoległą do podstawy, otrzymamy na przekrój koło AB (fig. 80).



Ten przekrój stożka i jego podstawasą proporcjonalne względem kwadratów z ich odległości od wierzchołka (jak dla ostrosłupa wykazaliśmy w §. 128. 1.).

2. Jeżeli płaszczyzna przecinająca nie jest równoległą do podstawy, natenczas przekrój jest a) elipsą FG, gdy płaszczyzna przecinająca przecina wszystkie boki stożka albo ich przedłużenia; b) parabolą CDE, jeżeli płaszczyzna przecinająca jest równoległą do boku stożka; i c) hiperbolą HJK, jeżeli płaszczyzna przecinająca jest równoległą do osi stożka.

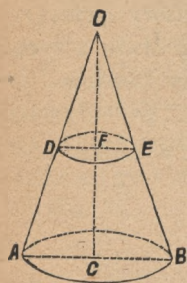
3. Przecinając stożek płaszczyzną przesuniętą przez jego oś, otrzymamy na przekrój trójkąt MON. Przekroje osiowe stożka prostego są równoramiennymi trójkątami przystającymi, a stożka równobocznego trójkątami równobocznymi i przystającymi.

Stożek ścięty.

§. 142. Przekrój stożka płaszczyzną DE (fig. 81.), równoległą do podstawy, dzieli stożek na dwie bryły, a mianowicie na jedną zawartą między dwoma równoległymi kołami, a zwaną stożkiem ściętym (der abgekürzte Kegel albo der Kegelstumpf), i na drugą, która jest mniejszym stożkiem, zwaną stożkiem dopełnieniem (Ergänzungskegel).

Stożek ścięty ABED jest więc różnicą dwu stożków, których podstawami są podstawy ściętego stożka; ich wspólny wierzchołek jest punktem, w którym zbiega się przedłużona pobocznicą stożka ściętego. Odległość CF obu podstaw stożka ściętego nazywamy jego wysokością. Prosta, wykreślona na pobocznicę stożka ściętego od obwodu jego górnej podstawy do obwodu dolnej, nazywano bokiem; n. p. DA.

Fig. 81.



Stożek ścięty może być, podobnie jak każdy stożek prosty albo pochyły. W prostym stożku ściętym są wszystkie boki sobie równe.

§. 143. Jeżeli w prostym stożku ściętym dane są promienie R i r obu podstaw, można z wysokości h obliczyć bok s , i naodwrot. Bok s jest bowiem przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątniami są wysokość i różnica obu promieni; mamy więc

$$s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}, \text{ zaś } h = \sqrt{s^2 - (R - r)^2}.$$

Przykłady. 1. $R = 9 \text{ dm}$, $r = 5 \text{ dm}$, $h = 3 \text{ dm}$; wyszukać s .

2. $R = 18 \text{ cm}$, $r = 15 \text{ cm}$, $s = 13 \text{ cm}$; wyszukać h .

Stożek ścięty można uważać za ostrosłup ścięty, którego podstawami są wieloboki umiarowe o bardzo wielkiej ilości boków; wszystkie więc twierdzenia, jakie udowodniliśmy dla ostrosłupa ściętego, są ważne i dla stożka ściętego, tylko potrzeba zastąpić w nich stosunek odpowiednich boków obu podstaw ostrosłupa ściętego stosunkiem promieni obu podstaw stożka ściętego.

Jeżeli R i r są promieniami podstaw prostego stożka ściętego, zaś h jego wysokością, otrzymamy na wysokości A i a obu stożków, których różnicą jest stożek ścięty, podobnie jak w §. 130. wyrażenia

$$A = \frac{h \cdot R}{R - r}, \text{ zaś } a = \frac{h \cdot r}{R - r}.$$

Powierzchnia całego stożka i stożka ściętego.

§. 144. Rozwinąwszy pobocznice stożka prostego na płaszczyźnie, łatwo wymiarkujemy, że:

Pobocznicą prostego stożka równa się wycinkowi koła, którego łukiem jest obwód podstawy, a promieniem bok stożka; rzeczona pobocznicą

równa się zatem połowie iloczynu z obwodu podstawy stożka przez jego bok.

Chcąc otrzymać całą powierzchnię stożka prostego, potrzeba do poboczniczy dodać powierzchnię podstawy.

Oznaczmy przez r , s , m i p promień podstawy, a względnie bok, pobocznice i powierzchnię prostego stożka, a otrzymamy

$$m = 2 r \pi \cdot \frac{s}{2}, \text{ czyli } m = r \pi s, \text{ zaś}$$

$$p = r^2 \pi + r s \pi, \text{ czyli } p = r \pi (r + s).$$

W stożku równobocznym $s = 2 r$, zatem $p = 3 r^2 \pi$.

Jeżeli przez P oznaczymy powierzchnię innego stożka równobocznego, w którym promień podstawy jest R , będzie także $P = 3 R^2 \pi$, przeto

$$P : p = 3 R^2 \pi : 3 r^2 \pi, \text{ czyli } P : p = R^2 : r^2.$$

Fig. 82.



§. 145. Jeżeli pobocznice (fig. 82.)

prostego stożka ściętego rozwiniemy na płaszczyźnie, otrzymamy część pierścienia kołowego; jej łuki są obwodami obu podstaw i są od siebie odległe o bok stożka ściętego. Ponieważ można sobie wyobrazić, że ta część pierścienia ko-

łowego składa się z bardzo wielu małych trapezów, przeto pobocznica stożka ściętego równa się sumie powierzchni wszystkich tych trapezów, a więc równa się połowie iloczynu ze sumy wszystkich dolnych i wszystkich górnych równoległych boków trapezów, t. j. ze sumy obwodów obu kół podstawowych, przez wysokość trapezów, t. j. przez bok stożka ściętego.

Pobocznica prostego stożka ściętego równa się więc połowie iloczynu ze sumy obwodów jego podstaw przez jego bok.

Dodawszy do poboczniczy powierzchnię obu podstaw, otrzymamy całą powierzchnię prostego stożka ściętego.

Oznaczając przez R i r promienie obu podstaw, przez s bok stożka ściętego i prostego, przez m jego pobocznice, a przez p powierzchnię, otrzymamy

$$m = \frac{(2 R \pi + 2 r \pi) \cdot s}{2} = (R + r) \pi s, \text{ zaś}$$

$$p = R^2 \pi + r^2 \pi + (R + r) \pi s.$$

§. 146. **Zadanie.** Wykreślić siatkę prostego stożka.

Fig. 83.



Kreślimy (fig. 83.) koło podstawowe a następnie zakreślamy boki stożka łuk kołowy, stykający się z owym kołem; nareszcie odmierzymy na tym łuku średnicę przereźzonego koła $3\frac{1}{7}$ razy i wykończamy wycinek kołowy.

Jak się rysuje siatkę prostego stożka ściętego?

Objętość stożka.

§. 147. Ponieważ stożek można uważać za ostrosłup, którego podstawą jest koło, przeto wynika z §. 136:

Objętość stożka równa się trzeciej części iloczynu z jego podstawy przez wysokość.

Jeżeli r jest promieniem podstawy, a h wysokością stożka, natenczas jego objętość

$$v = \frac{r^2 \pi \cdot h}{3}.$$

Gdy w stożku prostym zamiast wysokości h dany jest bok s , mamy $h = \sqrt{s^2 - r^2}$; zatem

$$v = \frac{r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2}}{3}.$$

W stożku równobocznym $s = 2r$, więc $h = r\sqrt{3}$,

$$\text{zaś } v = \frac{r^2 \pi \cdot r \sqrt{3}}{3} = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}.$$

Oznaczając przez V objętość innego równobocznego stożka, którego promień podstawy jest R , będzie

$$V : v = \frac{R^3 \pi \sqrt{3}}{3} : \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}, \text{ czyli}$$

$$V : v = R^3 : r^3.$$

Objętość stożka ściętego.

§. 148. Objętość stożka ściętego znajdziemy w ten sam sposób, jak objętość ostrosłupa ściętego (§. 137.). jeżeli sumę powierzchni obu podstaw i ich średniej geometrycznie proporcjonalnej pomnożymy przez trzecią część wysokości.

Oznaczając przez R i r promienie podstaw, a przez h wysokość stożka ściętego, będzie jego objętość.

$$v = (R^2 \pi + \sqrt{R^2 \pi \cdot r^2 \pi} + r^2 \pi) \cdot \frac{h}{3}, \text{ czyli}$$

$$v = (R^2 + Rr + r^2) \pi \cdot \frac{h}{3}.$$

§. 149. Zadania rachunkowe.

1. W stożku prostym promień podstawy równa się $3\cdot81\text{ dm}$, a bok $5\cdot26\text{ dm}$; jak wielka jest a) pobocznicą, b) powierzchnia tego stożka?

2. Podstawa stożka prostego równa się 15 dm^2 , a bok 4 dm ; jak wielka jest jego powierzchnia?

3. Pobocznicą prostego stożka równa się $23\cdot55\text{ dm}^2$, a promień jego podstawy jest $1\text{ dm } 5\text{ cm}$ długi; jak wielki jest bok, a jak wielka wysokość tego stożka?

4. Promień podstawy stożka równa się 5 dm , a jego wysokość $4\text{ dm } 8\text{ cm}$; jak wielka jego objętość.

5. Średnica podstawy stożka prostego o wysokości 4 m równa się $2\cdot1582\text{ m}$; jak wielka jest jego a) powierzchnia, b) objętość?

6. Jak wysoki jest stożek, którego objętość równa się 1 m^3 $137\cdot385\text{ dm}^3$, a średnica jego podstawy jest $8\cdot42\text{ dm}$ długa?

7. Powierzchnia stożka prostego równa się $11\cdot204\text{ m}^2$, a promień podstawy $1\cdot2\text{ m}$; jak wielka jego objętość?

8. Jak wielka jest powierzchnia stożka prostego o objętości $25\cdot7892\text{ m}^3$, jeżeli obwód jego podstawy równa się $11\cdot345\text{ m}$;

9. Wysokość stożka prostego równa się $5\text{ dm } 8\text{ cm}$, a jego bok $6\text{ dm } 4\text{ cm}$; jak wielka jego objętość?

10. Bok stożka równobocznego niech będzie s , a wysokość h ; z jednej z tych ilości znaleźć drugą.

11. Bok stożka równobocznego jest $7\cdot5\text{ dm}$ długi; jak wielka jego a) powierzchnia, b) objętość?

12. Powierzchnia stożka równobocznego równa się 2530 cm^2 ; jak wielka jego objętość?

13. Objętość stożka równobocznego równa się $0\cdot16\text{ cm}^3$; wyszukajcie jego powierzchnię?

14. Dach stożkowaty wieży, mający bok $3\cdot8\text{ m}$ długi, a średnicę $3\cdot2\text{ m}$, ma być pokryty blachą miedzianą; ile m^2 blachy potrzeba na to?

15. Jodla 18 m wysoka ma kształt stożka; jak wielka jest jej objętość, jeżeli na dolnym końcu ma $6\cdot2\text{ dm}$ w średnicy?

16. Usypana kupa zboża ma kształt stożka, którego wysokość równa się $1\cdot7\text{ m}$, a obwód podstawy $10\cdot5\text{ m}$; wiele hektolitrow zboża ma ta kupa?

17. Stożek z mosiądzu na 1.62 dm wysoki, waży 3.56076 kg , jak wielki jest promień jego podstawy, jeżeli 1 dm^3 mosiądzu waży 8.4 kg ? ($\pi = 3.1416$).

18. Stożkowaty pagórek z piasku, mający 82.4 m w obwodzie, a 9.6 m wysoki, ma być skopany; wiele dm^3 piasku otrzymamy, jeżeli piasek powiększa swą objętość wskutek skopania o $\frac{1}{5}$?

19. Stożek o wysokości 96 dm , a o promieniu podstawy 6.5 dm długim, przecięto płaszczyzną równoległą do jego podstawy w wysokości 4.5 dm (od podstawy); jak wielki jest promień przekroju?

20. Średnice podstaw prostego stożka ściętego o boku 1.2 m długim równają się 0.7 m i 0.3 m ; jak wielka jego a) pobocznicą, b) powierzchnią?

21. Obwody podstaw prostego stożka ściętego równają się 1.36 m i 0.94 m , a wysokość 1 m ; jak wielka jego a) powierzchnią, b) objętość?

22. Pobocznicą prostego stożka ściętego ma 50.24 dm^2 , a obwód jego dolnej podstawy 9.42 dm , zaś bok 7 dm ; jak wielka jest średnica jego górnej podstawy?

23. Wyrachujcie powierzchnię i objętość prostego stożka ściętego o boku 5 dm długim, jeżeli promienie jego podstaw równają się 7 dm i 4 dm .

24. Ma być zrobione okrągłe naczynie miedziane, którego dno ma mieć w średnicy 0.8 m , bok ma być 1.2 m długi, a górna średnica 0.9 m ; ile m^2 blachy miedzianej potrzeba?

25. Każdą 2.2 m wysoka ma u góry średnicę wewnętrzną 1.8 m , a u dołu 3.2 m ; ile hektolitrów zawiera?

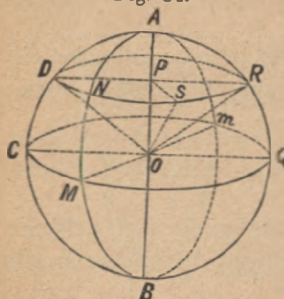
26. Ile m^3 ma okrągły ścięty pień drzewa 7 dm długi, jeżeli średnica większego przekroju równa się 0.76 m , a mniejszego 0.5 m ?

5. Kula.

Powstanie i określenie.

§. 150. Jeżeli półkole ACB (fig. 84.) obraca się naokoło swej średnicy AB jako osi, to zakreśla powierzchnię krzywą, mającą tę własność, że każdy jej punkt jest równo odległy od

Fig. 84.



środka O obracającego się półkola. Powierzchnię tę nazywamy kulistą (Kugelfläche), a ciało nią ograniczone kulą (Kugel).

Kula jest zatem bryłą okrągłą, ograniczoną tylko jedną powierzchnią krzywą, ale taką, że każdy jej punkt jest równo odległy od punktu wewnątrz niej leżącego.

Ten punkt O nazwano środkiem (Mittelpunkt) kuli. Odległość OD środka kuli od jakiegoś punktu powierzchni kulistej nazywamy promieniem (Halbmesser albo Radius kuli; prostą DR , łączącą dwa punkty powierzchni kulistej, nazywamy cięciwą (Sehne), a cięciwę, przechodzącą przez środek, średnicą (Durchmesser) kuli. Wszystkie promienie kuli są sobie równe; podobnież wszystkie średnice kuli są sobie równe.

Każdy punkt D obracającego się półkola ACB zakreśla koło DNR , którego promień DP jest prostopadły do AB . Wszystkie tak zakreślone koła są do siebie równoległe.

Powierzchnia kulista i punkt.

§. 151. Odległość jakiegokolwiek punktu od środka kuli nazywamy odległością środkową (Centralabstand) owego punktu.

Punkt jakiś leży na powierzchni kuli, wewnątrz niej albo zewnątrz zależnie od tego, czy jego odległość środkowa równa się promieniowi kuli, czy jest od niego mniejsza albo większa.

Powierzchnia kulista i prosta.

§. 152. Odległość jakiegokolwiek prostej od środka kuli nazywamy odległością środkową tej prostej.

Jeżeli odległość środkowa prostej jest większa od promienia kuli, to ta prosta nie ma żadnego punktu wspólnego z powierzchnią kulistą. Jeżeli odległość środkowa prostej równa promieniowi, natenczas ta prosta ma tylko jeden punkt wspólny z powierzchnią kulistą, a inne jej punkty leżą zewnątrz kuli; taką prostą nazywamy styczną (Tangente) powierzchni kulistej. Jeżeli nareszcie odległość środkowa prostej jest mniejsza

od promienia kuli, wtedy prosta ta przecina powierzchnię kulistą w dwóch punktach.

Oznaczając promień kuli OD (fig. 84) przez r , długość cięciwy DR przez s , zaś jej odległość środkową OP przez a , mamy z trójkąta prostokątnego DPO

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{s^2}{4}}, \quad s = 2 \sqrt{r^2 - a^2}, \quad a = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}.$$

Z ostatnich dwóch równań wynikają następujące twierdzenia:

1. Równe cięciwy tej samej kuli są równo odległe od środka kuli; i naodwrot.
2. Dłuższa cięciwa w tej samej kuli leży bliżej środka kuli; i naodwrot.
3. Średnica kuli jest najdłuższą cięciwą kuli.

Powierzchnia kulista i płaszczyzna.

§. 153. Odległość jakiejkolwiek płaszczyzny od środka kuli nazywamy odległością środkową tej płaszczyzny.

Jeżeli odległość środkowa płaszczyzny jest większa od promienia kuli, natenczas płaszczyzna ta nie ma z powierzchnią kulistą żadnego wspólnego punktu. Jeżeli odległość środkowa płaszczyzny równa się promieniowi kuli, to ta płaszczyzna ma z powierzchnią kulistą tylko jeden punkt wspólny i nazywamy ją wtedy płaszczyzną styczną (Tangentialebene); na niej leżą wszystkie linie styczne, jakie można wykreślić w danym punkcie styczności do powierzchni kulistej. Jeżeli nareszcie odległość środkowa płaszczyzny jest mniejsza od promienia, to płaszczyzna ta przecina powierzchnię kulistą.

§. 154. Każde przecięcie kuli płaszczyzną jest kołem.

Prawdziwość tego twierdzenia wynika już ze sposobu powstawania kuli, można atoli jej dowieść także w następujący sposób:

Niech będzie DNR (fig. 84.) płaskim przekrojem kuli. Wykreślimy ze środka kuli O prostopadłą OP do płaszczyzny przekroju, następnie połączmy punkt P z dowolnie obranymi punktami obwodu przekroju zapomocą prostych PD i OS, a nareszcie wykreślimy promienie OD i OS; otrzymamy trójkąty prostokątne OPD i OPS, które przystają do siebie, zatem $PD = PS$. Z tego

wynika, że wszystkie punkty, leżące na obwodzie przekroju DNR, są równo odległe od punktu P, czyli że przekrój jest kołem.

Koło DNR nazywamy kołem na kuli (Kugelkreis).

Miedzy promieniem $OD = r$ kuli, promieniem $PD = \rho$ koła na kuli i odległością środkową $OP = a$ tego koła zachodzą następujące związki, dające się wywieść z trójkąta prostokątnego DPO;

$$r = \sqrt{\rho^2 + a^2}, \quad \rho = \sqrt{r^2 - a^2}, \quad a = \sqrt{r^2 - \rho^2}.$$

Z tego wynika:

1. Równe koła na kuli są równo odległe od środka kuli; i naodwrot.
2. Większe koło na kuli leży bliżej środka kuli; i naodwrot.
3. Największem jest to koło na kuli, którego środkiem jest środek kuli; takie koło nazwano wielkiem (der grösste Kugelkreis).

Promień koła wielkiego równa się promieniowi kuli; wszystkie koła wielkie na jakiejś kuli są zatem sobie równe.

Do zupełnego wyznaczenia koła wielkiego potrzeba znać dwa jego punkty, nie leżące ze środkiem kuli na jednej prostej.

Przez końce średnicy kuli można wykreślić niezmiernie wiele kół wielkich, zaś przez takie dwa punkty, które nie są końcami średnicy, tylko jedno.

§. 155. Wykreślmy przez dwa punkty M i N (fig. 84), leżące na powierzchni kulistej, koło wielkie; punkty M i N dzielą to koło na dwa łuki MN i MB *m* AN. Mniejszy łuk MN koła wielkiego wykreślonego przez punkty M i N, nazywamy sferyczną odległością (sphärischer Abstand) obu tych punktów.

Średnicę kuli, prostopadłą do płaszczyzny koła na kuli, nazwano osią tego koła, zaś końce owej średnicy jego biegunami (Pole). Wszystkie równoległe koła na kuli mają tę samą oś i te same bieguny.

Każdy biegun koła na kuli ma od wszystkich jego punktów równą odległość sferyczną. Każdy biegun koła wielkiego ma od wszystkich jego punktów odległość sferyczną 90° .

(Południki i równoleżniki na globusie, oś ziemi, biegun północny i południowy, równik, szerokość geograficzna i długość).

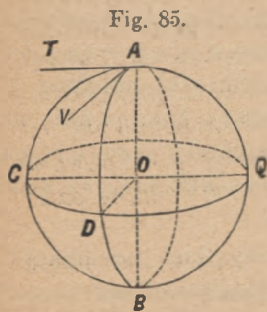
§. 156. Każdy przekrój kuli płaszczyzną dzieli kulę na dwie części, zwane odcinkami kuli (Kugelabschnitte);

odeinki te są równe albo nierówne zależnie od tego, czy płaszczyzna przecinająca przechodzi przez środek kuli, czy nie przechodzi. W pierwszym razie nazywamy każdy z obu odcinków półkulą (Halbkugel). Każdą płaszczyznę dzieli powierzchnię kulistą na dwie części, zwane czaszkami kulistymi (Kugelmützen). Czaszka kulista ADNR (fig. 84.) może także w ten sposób powstać, że łuk AD koła wielkiego obraca się naokoło średnicy AB jako osi.

Przekroje kuli dwiema równoległymi płaszczyznami dzielą ją na dwa odcinki i na część zawartą między temi równoległymi płaszczyznami, którą nazywać będziemy warstwą kulistą (die Kugelschicht); część powierzchni kulistej, przynależną warstwie kulistej, nazywamy pasem sferycznym (die Kugelzone). Pas sferyczny CMQDNR (fig. 84.) może także w ten sposób powstać, że łuk CD koła wielkiego obraca się naokoło średnicy AB.

Jeżeli wycinek AOD koła wielkiego obraca się naokoło jednego ze swoich promieni, n. p. naokoło AO, to promień DO zakreśla pobocznice stożka prostego, a łuk AD czaszkę kulistą; bryłę ograniczoną temi dwiema powierzchniami nazwano wycinkiem kuli (Kugelschnitt).

§. 157. Kątem sferycznym (der sphärische Winkel) dwu kół wielkich ACB i ADB (fig. 85.) nazywamy kąt nachylenia ich płaszczyzn. Punkt przecięcia się A obu kół nazywamy wierzchołkiem, a łuki AC i AD ramionami kąta sferycznego.



Sferyczny kąt równa się kątowi TAV, jaki tworzą ze sobą styczne AT i AV, wykreślone w wierzchołku A do obu kół. Miarą kąta sferycznego TAV jest łuk CD zawarty między ramionami AC i AD, a leżący na kole wielkiem CDQ, którego

punkty mają od punktu A odległość sferyczną 90° ; albowiem kąt środkowy COD, odpowiadający łukowi CD, równa się kątowi TAV (ramiona ich zgodnie równoległe).

§. 158. Część powierzchni kulistej, zawartą między dwoma półkami wielkimi, nazwano dwukątem sferycznym (sphärisches Zweieck); jak n. p. ACBDA (fig. 85.).

Część powierzchni kulistej, ograniczoną trzema łukami kół wielkich, nazywamy trójkątem sferycznym (sphärisches Dreieck); jak n. p. ACD. Łuki AC, AD i CD są bokami, a kąty sferyczne między nimi zawarte A, C, D są kątami trójkąta sferycznego ACD.

Powierzchnia kuli.

§. 159. Powierzchnia kuli (czego atoli tu dowieść nie możemy) równa się czterokrotności powierzchni jej koła wielkiego.

Oznaczając promień kuli przez r , zaś jej powierzchnię przez p , będzie $r^2\pi$ powierzchnią koła wielkiego, zatem

$$p = 4 r^2\pi,$$

$$\text{a stąd } r^2 = \frac{p}{4\pi}, \text{ przeto } r = \sqrt{\frac{p}{4\pi}}.$$

Jeżeli R jest promieniem, a P powierzchnią innej kuli, mamy $P = 4 R^2\pi$, zatem

$$P : p = 4 R^2\pi : 4 r^2\pi, \text{ czyli } P : p = R^2 : r^2; \text{ t. j.}$$

Powierzchnie dwu kul są proporcjonalne względem drugich potęg ich promieni.

Objętość kuli.

§. 160. Powykreślajmy na kuli południki i równoleżniki, a rozłóżmy się powierzchnia kuli na same czworokątne i trójkątne figury, które możemy uważać za płaskie i prostolinijne, jeżeli tylko liczba owych powykreślanych kół jest bardzo wielka. Uważajmy następnie każdy z tych trójkątów i czworoboków za podstawę ostrosłupa, którego wierzchołek jest w środku kuli, a będzie kula sumą ostrosłupów, których wspólna wysokość jest promieniem kuli, zaś podstawy tych ostrosłupów dają na sumę całą powierzchnię kuli. Z tego wynika:

Kula równa się co do objętości ostrosłupowi, mającemu za podstawę powierzchnię kuli, a za wysokość promień tej kuli; czyli uwzględniając §. 136:

Objętość kuli równa się trzeciej części iloczynu z jej powierzchni przez promień.

Oznaczając przez r promień kuli, przez p jej powierzchnię, zaś przez v objętość mamy

$$p = 4r^2\pi, \text{ zatem } v = \frac{4r^2\pi \cdot r}{3} = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

$$\text{Naodwrot jest } r^3 = \frac{3v}{4\pi}, \text{ a stąd } r = \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}}.$$

Jeżeli R jest promieniem innej kuli, a V jej objętością,

$$\text{mamy także } V = \frac{4}{3}R^3\pi, \text{ przeto}$$

$$V : v = \frac{4}{3}R^3\pi : \frac{4}{3}r^3\pi, \text{ czyli } V : v = R^3 : r^3; \text{ t. j.}$$

Objętości dwu kul są proporcjonalne względem trzecich potęg ich promieni.

§. 161. Zadania rachunkowe.

1. W kuli o promieniu 24 cm mamy w odległości 6 cm od środka cięciwę prostopadłą do średnicy; jaka jest długość tej cięciwy?

2. Jak odległa jest cięciwa $9 \text{ dm } 6 \text{ cm}$ długa od środka kuli o promieniu $1 \text{ m } 4 \text{ dm}$?

3. Powierzchnia koła wielkiego kuli równa się 19.6 cm^2 ; jak wielkie jest koło na tej kuli, odległe od jej środka o 2 cm ?

4. Powierzchnia koła na kuli równa się 6.16 cm^2 , a jego odległość od środka kuli 22.5 cm ; jak wielki jest promień tej kuli?

5. Wyszukajcie powierzchnię i objętość kuli, której promień równa się a) 2 dm , b) 1.5 m , c) $1 \text{ m } 2 \text{ dm } 5 \text{ cm}$, d) $25\frac{1}{2} \text{ cm}$.

6. Obwód koła wielkiego kuli równa się 7.1 m ; jak wielka jest a) powierzchnia, b) objętość?

7. Jak wielka jest objętość kuli, której koło wielkie ma powierzchnię $14 \text{ m}^2 \text{ } 86 \text{ dm}^2 \text{ } 17 \text{ cm}^2$? ($\pi = 3.1416$).

8. Powierzchnia kuli równa się a) 88 dm^2 , b) 4988.92 cm^2 , c) $1 \text{ m}^2 \text{ } 8 \text{ dm}^2 \text{ } 1.03 \text{ cm}^2$; jak wielki jej promień?

9. Wyszukajcie promień kuli, której objętość równa się a) 33510.4 dm^3 , b) $5 \text{ m}^3 \text{ } 715 \text{ dm}^3$.

10. Jak wielka jest objętość kuli, mającej powierzchnię 22 dm^2 ?

11. Objętość kuli równa się 22 dm^3 ; wyszukać jej powierzchnię.

12. Koło na kuli, odległe od jej środka o 9 cm , ma powierzchnię 454.74 cm^2 ; jak wielka jest a) powierzchnia, b) objętość tej kuli?

13. Jaki stosunek zachodzi między *a*) powierzchniami, *b*) objętościami dwu kul, których promienie są 0.36 m i 0.48 m długie?

14. Jaki stosunek zachodzi między objętościami dwu kul, których powierzchnie pozostają w stosunku $48 : 75$?

15. Jaki jest stosunek powierzchni dwu kul, jeżeli stosunek ich objętości równa się $27 : 64$?

16. Jak wielka jest powierzchnia kuli, której objętość równa się sumie objętości dwu kul o średnicach 6 dm i 12 cm długich?

17. Jak długa jest średnica kuli, która co do objętości równa się sześciannowi o krawędzi 1.11 m ?

18. Na półkuli o promieniu r opisano prosty walec i w tę półkulę wpisano stożek prosty; jaki zachodzi związek między objętością tej półkuli, a różnicą z objętości walca i stożka?

19. Ile m^2 blachy miedzianej potrzeba na pokrycie kopuły, mającej kształt półkuli o średnicy 9 m ?

20. Jak wielki jest ciężar kuli działowej o średnicy 12 cm , jeżeli każdy dm^3 waży 7.2 kg ?

21. Pomalowane sklepienia w kształcie półkuli o średnicy 4.1 m kosztuje $22\frac{1}{2}\text{ zł}$; ile płacono za pomalowanie 1 m^2 ?

22. Ma być położona kula na wieży; ile potrzeba będzie zapłacić za to, jeżeli jej średnica jest 1.05 m długa, a za położenie 1 m^2 płaci się $48\text{ zł. } 80\text{ ct.}$?

23. Balon zrobiony z kitajki, a napełniony gazem do oświetlania, ma w średnicy 6.5 m ; ile m^3 kitajki potrzeba było na jego zrobienie, a ile waży gaz zawarty w balonie, jeżeli 1 m^3 gazu do oświetlania waży 392 g ?

24. Jak wielka jest *a*) powierzchnia, *b*) objętość naszej ziemi, jeżeli uważamy ją za dokładną kulę o średnicy 12739.7 km $\pi = 3.1415927$).

25. Średnica globusu ziemi równa się 32 cm ; jaki jest stosunek jego powierzchni i powierzchni ziemi?

26. Jak wielka musiałaby być średnica globusu ziemi, by jego 1 mm^2 przedstawiał $1\text{ }\mu\text{m}^2$?

27. Austria ma powierzchnię 11305·91 geograficznych mil kwadratowych; jaką przestrzeń zajmie na globusie o średnicy 5 *dm*? (1 geogr. mila kwadratowa = 55·0629 *km*²).

28. Jak wielka jest *a*) powierzchnia, *b*) objętość księżyca naszej ziemi, jeżeli jego średnica równa się 3482 *km*?

29. Planeta Merkury ma średnicę 4816 *km* długą, jak wielka jego *a*) powierzchnia, *b*) objętość?

30. Średnica słońca jest 112½ razy większa od średnicy ziemi; jaki stosunek zachodzi między objętością słońca a ziemi?

31. Średnica zewnętrzna wydrążonej kuli równa się 3 *dm*, a wewnętrzna 2·9 *dm*; jak wielka jej objętość?

32. Promień zewnętrzny wydrążonej kuli jest 2 *dm* długi, a grubość jej ściany równa się 2·5 *cm*; jak wielka jest *a*) przestrzeń wydrążona kuli, *b*) objętość jej skorupy?

33. Jeżeli średnica ziemi równa się 1716·83 milom geograficznym, a wysokość warstwy powietrza 11 milom geograficznym, ile mil sześciennych objętości ma warstwa powietrza, a jak wielkie wywiera ciśnienie na ziemię naszą?

6. Wielościiany umiarowe.

§. 162. Wielościan, którego wszystkie ściany są wielobokami umiarowymi i przystającymi, a mający wszystkie naroża przystające, nazwano umiarowym (regelmässiger Körper).

Z twierdzenia, że suma wszystkich kątów płaskich naroża jest mniejsza od 360° (§. 98.), wynika, że może być tylko pięć umiarowych wielościanów.

Albowiem kąt umiarowego (równobocznego) trójkąta ma 60°; z takich kątów mogą trzy, cztery albo pięć tworzyć naroże; z sześciu albo z więcej jak sześciu takich kątów nie może powstać naroże, gdyż ich suma wynosi 360° albo więcej niż 360°. Trójkątami równobocznymi mogą być ograniczone tylko trzy wielościiany umiarowe, a mianowicie czworościan, ośmiościan i dwudziestościan.

Czworościan (das Tetraëder) (fig. 86.) ograniczają cztery równoboczne trójkąty, z których każde trzy tworzą naroże; czworościan ma 4 naroża i 6 krawędzi.

Ośmiościan (das Octaëder) (fig. 87.) jest ograniczony ośmioma równobocznymi trójkątami, z których każde cztery tworzą naroże; ma 6 takich naroży i 12 krawędzi.

Fig. 86.

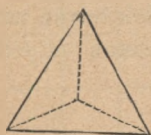


Fig. 87.

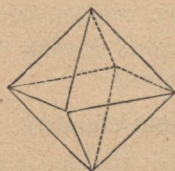
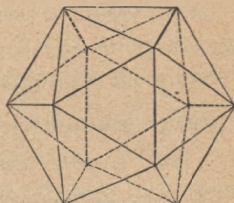


Fig. 88.



Dwudziestościan (das Ikosaëder) (fig. 88.) jest ograniczony dwudziestoma równobocznymi trójkątami, z których każde pięć tworzą jedno naroże; ma 12 naroży i 30 krawędzi.

Kąt umiarowego czworoboku (kwadratu) jest prosty; tylko trzy takie kąty mogą utworzyć naroże; z czterech albo z więcej niż z czterech kątów prostych nie można utworzyć naroża. Jest więc tylko jeden wielościan umiarowy ograniczony kwadratami, zwany sześcianiem (Hexaëder, Cubus albo Würfel).

Sześciian (fig. 89.) jest ograniczony sześcioma kwadratami i ma 8 trójsięciennych naroży i 12 krawędzi.

Fig. 89.

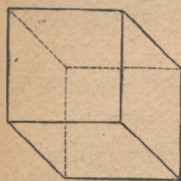
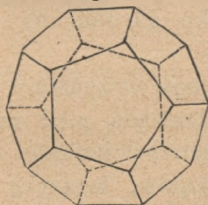


Fig. 90.



W umiarowym pięcioboku każdy kąt równa się 108° ; tylko trzy takie kąty mogą utworzyć naroże. Mamy przeto tylko jeden wielościan umiarowy, ograniczony pięciobokami umiarowymi, a zwany dwunastościanem (Dodekaëder) (fig. 90.)

Ma on 12 ścian, 20 trójsięciennych naroży i 30 krawędzi.

Kąt umiarowego sześcioboku ma 120° . Ponieważ już trzy takie kąty na sumę dają 360° , przeto nie można z takich kątów utworzyć naroża. Również z kątów umiarowego wieloboku, mającego więcej niż sześć boków, nie można utworzyć naroża.

Mamy więc tylko pięć wielościanów umiarowych.

W każdym wielościanie umiarowym jest punkt, równo odległy od wszystkich ścian i równo odległy od wierzchołków

naroży. Punkt ten nazywany środkiem (Mittelpunkt) umiarowego wielościanu.

Jeżeli przez środek i przez wszystkie krawędzie wielościanu umiarowego przesuniemy płaszczyzny, podzielimy wielościan na przystające ostrosłupy, mające ściany wielościanu umiarowego za podstawy, a odległość środka wielościanu od jednej jego ściany za wspólną wysokość.

Siatki umiarowych wielościanów.

§. 163. 1. Aby narysować siatkę czworościanu, kreślimy trójkąt równoboczny (fig. 91.), którego bok jest dwa razy dłuższy od danej krawędzi czworościanu; następnie dzielimy

Fig. 91.

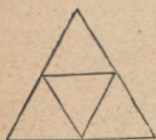


Fig. 92.

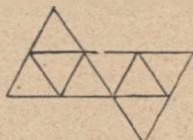
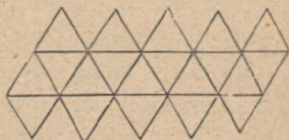


Fig. 93.



każdy bok na dwie równe części, a punkty połowiące łączymy zapomocą prostych.

2. Chcąc otrzymać siatkę ośmiościanu, kreślimy (fig. 92.) najpierw dla danej krawędzi siatkę czworościanu, a następnie drugą taką samą siatkę ale tak, by obie miały jeden bok wspólny.

3. Siatkę dwudziestościanu otrzymamy, jeżeli na prostej (fig. 93.) odmierzymy daną krawędź pięć razy, następnie na każdej z nich wykreślimy w górze i na dole trójkąty równoboczne i przez wierzchołki trójkątów, leżących po jednej stronie narysujemy prostą; nareszcie rysujemy na tej prostej znowu trójkąty równoboczne tak, żeby ich było na każdej stronie prostej po pięć.

4. Chcąc otrzymać siatkę sześciannu, kreślimy nad prostą (fig. 94.) cztery kwadraty obok siebie takie, aby bok każdego był równy krawędzi sześciannu; następnie wykreślamy jeszcze dwa kwadraty po przeciwnych stronach jednego z owych pierwszej narysowanych kwadratów.

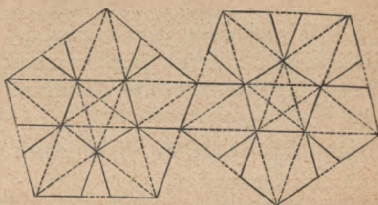
5. Aby nareszcie otrzymać siatkę dwunastościanu, wykreślamy na danej krawędzi pięciobok umiarowy (fig. 95.),

a na jego bokach znowu pięcioboki umiarowe, przy czem korzystną jest rzeczą użyć przedłużenia przekątnej; przy tej nary-

Fig. 94.



Fig. 95.



sowanej siatce rysujemy jeszcze drugą przystającą do pierwszej, a mającą z nią jeden bok wspólny.

Pomiar umiarowych wielościanów.

§. 164. Jak się oblicza powierzchnię i objętość sześcianu, podaliśmy już przy nauce o graniastopach. Co się zaś tyczy pomiaru innych umiarowych wielościanów, ograniczymy się tu tylko na rozwiązaniu następujących zadań.

1. Dana krawędź a jakiegoś α) czworościanu, β) ośmiościanu, γ) dwudziestościanu; obliczyć jego powierzchnię.

Powierzchnia trójkąta równobocznego o boku a równa się (§. 77. 1.) $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, zatem

$$\alpha) \text{ powierzchnia czworościanu} = 4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3};$$

$$\beta) \quad \quad \quad \text{ośmiościanu} = 8 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 2a^2 \sqrt{3};$$

$$\gamma) \quad \quad \quad \text{dwudziestościanu} = 20 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 5a^2 \sqrt{3}.$$

2. Jaki zachodzi stosunek między powierzchnią czworościanu, ośmiościanu i dwudziestościanu, jeżeli mają równo długą krawędź?

3. Obliczcie powierzchnię a) czworościanu, ośmiościanu, c) dwudziestościanu, jeżeli krawędź równa się 1.2 dm .

4. Czworościan, ośmiościan i dwudziestościan mają jednakową powierzchnię, a mianowicie 1.5 dm^2 ; jak długa jest krawędź każdej z tych brył;

5. Jak wielką objętość v ma czworościan o krawędzi a ?

Czworościan jest umiadowym trójsięciennym ostrosłupem, w którym powierzchnia podstawy równa się $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Wysokością tego ostrosłupa jest przyprostokątnia trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątnią jest krawędź boczna a , zaś drugą przyprostokątnią odległość środka podstawy od wierzchołka,

t. j. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{3}$ (§. 77. 1.); zatem wysokość równa się

$$\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \sqrt{\frac{6a^2}{9}} = \frac{a \sqrt{6}}{3}.$$

Przeto objętość czworościanu

$$v = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{9 \cdot 2}}{36} = \frac{3a^3 \sqrt{2}}{36} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

6. Wyszukajcie objętość v ośmiościanu, którego krawędzią jest a .

Ośmiościan składa się z dwu umiadowych czworościennych ostrosłupów.

Podstawa każdego z tych ostrosłupów równa się a^2 .

Wysokością ich jest przyprostokątnia trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątnią jest krawędź boczna a , zaś drugą przyprostokątnią jest połowa przekątnej podstawy, t. j. $\frac{a \sqrt{2}}{2}$; wysokość rzeczonych ostrosłupów równa się zatem

$$\sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a \sqrt{2}}{2}.$$

Przeto objętość obu ostrosłupów

$$v = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{a \sqrt{2}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

7. Jaki stosunek zachodzi między objętością czworościanu i ośmiościanu o równej krawędzi?

8. Jak wielka jest objętość a) czworościanu, b) ośmiościanu, jeżeli krawędź równa się 6 cm ?

9. Czworościan ma tę samą powierzchnię, co sześciąt o krawędzi 5 cm ; jak wielka jest objętość tego czworościanu?

7. Wyznaczenie objętości ciał zapomocą naczynia albo zapomocą ich ciężaru.

§. 165. W bardzo prosty sposób można wyszukać objętość dowolnej bryły zapomocą naczynia graniastosłupowego lub walcowatego, którego podstawa jest znana, a którego wysokość podzielono na wewnętrznej ścianie na decymetry i centymetry. W tym celu kładziemy ciało, którego objętość chcemy wynaleść, do takiego naczynia i nalewamy do naczynia tyle wody, by całe ciało było zanurzone w wodzie; odczytujemy wysokość, do której sięga woda, a następnie wyjmujemy ciało z wody i znowu zapisujemy wysokość teraz niższego stanu wody. Objętość naszego ciała równa się tedy objętości graniastosłupowej lub walcowatej bryły, mającej tę samą podstawę co naczynia, a której wysokość równa się różnicy z odczytanych stanów wody. Jeżeliby ciało dane do pomiaru rozpuszczało się w wodzie, używa się do napełniania zamiast wody mialkiego piasku.

Zapomocą takiego naczynia można oznaczyć pojemność każdego naczynia, niemającego nawet kształtu jednej z poznanych i pomierzonych brył. W tym celu napełnia się to naczynie całkowicie wodą, a następnie wylewa się tę wodę do naczynia z podziałką; z podstawy i wysokości wody w tem drugim naczyniu wyrachować można łatwo szukaną pojemność.

§. 166. Objętość ciała można wyznaczyć także z jego ciężaru.

Wielkość ciśnienia, jakie wywiera ciało o dowolnej objętości na swoją podstawę, nazywamy ciężarem bezwzględnym (*absolutes Gewicht*) tego ciała; zaś ciężar jednostki objętości, n. p. jednego decymetra sześciennego ciało nazwano ciężarem gatunkowym (*specifisches Gewicht*) tego ciała. N. p. 1 dm^3 srebra waży 10·51 kg ; ciężar gatunkowy srebra dla 1 dm^3 jako jednostki objętości jest 10·51 kg .

Ponieważ 1 dm^3 destylowanej wody waży 1 kg , przeto ciężar gatunkowy jakiegoś ciała podaje nam oraz ile razy większy jest ciężar tego ciała o pewnej objętości od ciężaru wody destylowanej o tej samej objętości.

W następującej tabelce podajemy ciężary gatunkowe niektórych ciał.

1 decymetr sześcienny			
cynku	waży 719 kg	ołowiu . . .	waży 11·35 kg
drzewa bukowego	" 0·74 "	platyny . . .	" 21·45 "
" dębowego	" 0·86 "	pumeksu . . .	" 1·08 "
" korkowego	" 0·24 "	rtęci	" 13·60 "
granitu (przeciętnie)	" 2·70 "	srebra	" 10·51 "
kości słoniowej . .	" 1·83 "	szkła (przeciętnie)	" 2·60 "
marmuru	" 2·72 "	węgla kamiennego	" 1·30 "
miedzi kutej . . .	" 8·88 "	złota	" 19·36 "
" lanej	" 8·79 "	żelaza kutego .	" 7·79 "
mosiądzu (przec.)	" 8·40 "	" lanego . . .	" 7·12 "

Mamy n. p. wyszukać objętość bryły srebra, ważącej 32 kg.

Ponieważ 1 dm^3 srebra waży 10·51 kg, przeto 32 kg srebra ma tyle dm^3 objętości, ile mieści się 10·51 kg w 32 kg; mamy zatem

$$32 : 10·51 = 3·045 dm^3.$$

Objętość jakiegoś ciała w decymetrach sześciennych znajdujemy, jeżeli jego ciężar bezwzględny, wyrażony w kilogramach, podzielimy przez ciężar gatunkowy dla 1 dm^3 .

Naodwrot z objętości jakiegoś ciała wyszukamy jego ciężar bezwzględny, jeżeli ciężar gatunkowy tego ciała pomnożymy przez objętość wyrażoną w dm^3 mosiądzu, mamy;

$$1 dm^3 \text{ mosiądzu waży } 8·4 kg \\ 225 \text{ " " " } 8·4 kg \times 225 = 1890 kg.$$

Zapomocą ciężaru można w bardzo łatwy sposób wyszukać pojemność naczynia o jakimkolwiek kształcie. Ważymy najpierw próżne to naczynie, a następnie napełniwszy je całkowicie wodą, oznaczamy ciężar naczynia wraz z wodą i odejmujemy pierwszy ciężar od drugiego. Tyle decymetrów sześciennych albo litrów pojemności ma to naczynie, ile kilogramów ma owa różnica ciężarów.

§. 167. Zadania.

1. Do naczynia w kształcie graniastosłupa 48 cm długiego, a 32 cm szerokiego, napełnionego w części wodą, wrzucono nieforemną bryłę tak, że się cała zanurzyła w wodzie, a woda pod-

niosła się do wysokości 36 *cm*. Po wyjęciu bryły sięgała woda do 24 *cm* wysokości; jak wielka jest objętość tej bryły?

2. Naczynie walcowate o średnicy 3 *dm*, a o wysokości 4 *dm*, napelniono w części wodą tak, że sięgała do 2·7 *dm* wysokości; gdy wrzucono do tego naczynia jakieś nieforemne ciało, wypełniła woda całkowicie naczynie. Jak wielka objętość tego ciała?

3. Jak wielka jest pojemność naczynia, które próżne waży 1·5 *kg*, a napelnione wodą 14·8 *kg*?

4. Ile *kg* waży woda, wypełniająca naczynie 165 *cm* długie, 85 *cm* szerokie, a 7 *dm* głębokie?

5. Kawał ołowiu waży 24 *kg*; jak wielka jego objętość?

6. Ile *m*³ ma belka a) z drzewa dębowego, b) z drzewa bukowego, która waży 135 *kg*?

7. Ile *cm*³ ma dwuzłotówka, zawierająca $\frac{1}{45}$ *kg* srebra i $\frac{1}{105}$ *kg* miedzi?

8. Jak długa jest krawędź sześcianu z marmuru, ważącego 174 *kg*?

9. Walek z żelaza, 2·5 *m* długi, waży 680 *kg*; jak wielka jego średnica?

10. Kula z kości słoniowej waży 12·135 *dkg*; jak wielki jej promień?

11. Ile *kg* waży płyta z żelaza lanego, 1·9 długa, 0·2 *m* szeroka, a 0·08 *m* gruba?

12. Ile waży walec z drzewa dębowego, jeżeli jego długość równa się 2 *m* 8 *dm*, a średnica 3·5 *dm*?

13. Na słupach bramy ogrodowej umieszczono dwie kule z granitu; jaki ich ciężar, jeżeli średnica każdej równa się 5·2 *dm*?

14. Jak wielki jest ciężar kuli.

a) z ołowiu, jeżeli jej średnica jest 2·4 *dm* długa?

b) z marmuru " " " " 3·1 *dm* "

15. Ile waży próżna kula z mosiądzu, której średnica wewnętrzna ma 3 *dm*, a ściana jest na 1 *cm* gruba?

16. Sześcian z mosiądzu, mający krawędź 1·2 *dm* długa, waży 14·5 *kg*; jak wielki jest ciężar 1 *cm*³ mosiądzu?

17. Hektoliter wina waży 100·8 *kg*; jaki jest ciężar gatunkowy tego wina.

18. Głowa cukru ma kształt prostego stożka; obwód jej podstawy równa się 6 dm , a bok 5 dm ; jaki jest ciężar gatunkowy cukru, jeżeli ta głowa cukru waży $6\cdot8\text{ kg}$?

Zadania mieszane

z pomiaru ciał.

1. Jak długa jest krawędź sześciannu, którego powierzchnia jest dwa razy większa od powierzchni drugiego sześciannu, mającego krawędź 2 dm długą?

2. Jak wielka jest krawędź sześciannu, którego objętość jest dwa razy większa od objętości drugiego sześciannu o krawędzi $0\cdot12\text{ m}$?

3. Podstawą prostego ostrosłupa o wysokości $0\cdot6\text{ m}$; jest sześciobok umiarowy o boku $0\cdot26$; jak długa jest krawędź sześciannu, mającego tę samą objętość co ten ostrosłup?

4. Sześciann i dwudziestościan mają krawędzie $1\cdot4\text{ dm}$ długie; jaki jest stosunek ich powierzchni?

5. Sześciann ma tę samą powierzchnię co i ośmiościan o krawędzi 1 dm ; jaki jest stosunek ich objętości?

6. Walec prosty, 2 dm wysoki, ma u podstawy średnicę 3 dm ; inny walec tylko $1\cdot8\text{ dm}$ wysoki ma z pierwszym jednakową pobocznice. Jak wielka jest średnica podstawy drugiego walca?

7. Z naczynia graniastosłupowego, napełnionego całkowicie wodą, a mającego długość $3\cdot2\text{ dm}$, szerokość $2\cdot5\text{ dm}$ a wysokość $2\cdot2\text{ dm}$. przelano wodę do naczynia walcowatego o średnicy 3 dm ; do jakiej wysokości sięgać będzie woda w tem drugim naczyniu?

8. Stożek równoboczny ma równą objętość z sześciannem o krawędzi 2 dm ; jak długi jest bok tego stożka?

9. Jak długa jest krawędź sześciannu, mającego tę samą objętość co kula o średnicy $1\cdot5\text{ dm}$?

10. Średnica kuli równa się $2\cdot5\text{ dm}$; tę samą długość ma krawędź sześciannu; o ile jest mniejsza powierzchnia kuli od powierzchni sześciannu?

11. Z sześcianu drewnianego o objętości 25 dm^3 ma być utoczona możliwie największa kula; jaką objętość będzie miała ta kula?

12. Średnica kuli równa się 2.5 dm ; tę samą długość ma średnica walca równobocznego; jaki jest stosunek powierzchni tych dwu brył?

13. Kula ma średnicy 1 dm ; tę samą długość ma średnica stożka równobocznego; jaki jest stosunek objętości tych dwu brył?

14. Średnica podstawy stożka prostego równa się 1.5 m ; a wysokość jego 1.8 m ; jak długa musi być średnica kuli, by z owym stożkiem miała równą powierzchnię?

15. Jak wielki jest promień kuli, która ma tę samą objętość, co a) sześcián o krawędzi 2.1 dm , b) walec o wysokości 0.12 m i o średnicy 0.08 m , c) stożek prosty, którego podstawa ma 0.25 m w średnicy, a którego bok równa się 0.38 m ?

16. Jak wielka jest objętość kuli a) wpisanej, b) opisanej na ośmiościanie o krawędzi 8 cm ?

17. Promień podstawy stożka prostego równa się 1.5 m , a wysokość jego 1.8 m ; ostrosłup ma z tym stożkiem ten sam wierzchołek, a za podstawę kwadrat wpisany w podstawę stożka. Jak wielka jest różnica a) powierzchni, b) objętości obu tych brył?

18. Jedna kula ma w średnicy 28 cm , a druga 15 cm ; jak długa musi być średnica trzeciej kuli, by jej powierzchnia równała się sumie powierzchni obu pierwszych kul?

19. Mamy dwie kule o średnicach 2 dm i 1 dm 8 cm ; jak wielka jest średnica trzeciej kuli, której objętość równa się sumie objętości obu pierwszych kul?

20. Powierzchnia jednej kuli jest dwa razy większa od powierzchni drugiej kuli, mającej objętość 8 dm^3 ; jak długi jest promień pierwszej kuli?

21. Jak wielki jest promień kuli, której objętość jest dwa razy większa od objętości kuli o powierzchni 12 dm^2 75 cm^2 ?

22. W walec równoboczny o średnicy 2 dm wpisano kulę i prosty stożek; jaki zachodzi stosunek między objętościami tych trzech brył?

23. Na kuli o promieniu r opisano równoboczny walec i równoboczny stożek; jaki jest stosunek ich powierzchni?

24. Jak wielkie ciśnienie wywiera na 1 m^2 stos drzewa dębowego 80 cm wysoki, jeżeli na przestrzeń zawartą między polanami odliczy się 30% ?

25. Walek mosiężny ma ważyć 4 kg i być $3\cdot5\text{ dm}$ długi; jakąż średnicę musi mieć ten walek?

26. Ma być ulany walec z żelaza; ciężar tego walca ma być równy 1 kg , a średnica 4 cm . Jak wielka musi być jego wysokość?

27. Mają być ulane ciężarki walcowate do 1 kg , a to a) z ołowiu, b) z mosiądzu, c) z żelaza; wiele cm musi mieć ich średnica, jeżeli ma być tylko połową wysokości walca?

28. Ile kul o średnicy 1 cm można ułać z 2 kg ołowiu?

29. Beeczka o pojemności $0\cdot6\text{ m}^3$ jest napełniona oliwą, ważącą 520 kg ; jaki jest ciężar gatunkowy oliwy?

30. Walec równoboczny, zrobiony z materiału o ciężarze gatunkowym $7\cdot8$, waży $73\cdot3\text{ kg}$; jak wielka jest powierzchnia stożka równobocznego z tego samego materiału, jeżeli ma mieć ten sam promień co walec?

31. Jeden kawałek ołowiu waży 5 kg , drugi 3 kg ; jak wielka będzie średnica kuli ulanej z każdego z owych kawałków, a jak wielka średnica kuli ulanej z obu kawałków?

32. Sześciian wydrążony z blachy cynkowej 2 mm grubej ma wysokość zewnętrzną 1 dm ; jaki jest ciężar litego sześcianu z cynku, który dokładnie wypełnia wydrążony sześciian?

33. Ma być ulana rura miedziana $3\cdot5\text{ m}$ długa o średnicy zewnętrznej $0\cdot28\text{ m}$, a o wewnętrznej $0\cdot27\text{ m}$; ile kg miedzi potrzeba na to?

34. Do wodociągu 1580 m długiego potrzeba rur z ołowiu 13 mm grubych, których średnica wewnętrzna równa się 79 mm ; ile kosztuje potrzebny do tego ołów, jeżeli za 100 kg ołowiu płaci się 28 zł. , a z powodu złączania rur dolicza się 2% materiału?

35. Ile waży młóździerz z mosiądzu, mający kształt wydrążonego stożka ściętego, jeżeli średnica zewnętrzna górnej

podstawy równa się 2 dm , zewnętrzna dolnej $1\cdot6\text{ dm}$, wewnętrzna górnej $1\cdot8\text{ dm}$, a wewnętrzna dolnej $1\cdot4\text{ dm}$, i jeżeli wysokość całego moździerza równa się $2\cdot4\text{ dm}$, a głębokość wewnętrznej przestrzeni $2\cdot1\text{ dm}$?

36. Zewnętrzna średnica kuli wydrążonej, zrobionej z kości słoniowej, równa się 2 dm , grubość ściany $0\cdot16\text{ dm}$; a) ile waży ta wydrążona kula, b) ile waży ta kula, jeżeli wypełnimy ją wodą destylowaną?

37. Walec ze szkła o wysokości wewnętrznej 1 dm , a o średnicy $1\cdot5\text{ dm}$, wypełniono całkowicie wodą; jeżeli kulę o średnicy 8 cm zanurzymy w wodzie tego naczynia, wyleje się część wody. Do jakiej wysokości sięgać będzie woda w walcu tym po wyjęciu kuli?

38. Ma być wykopana piwnica $13\cdot4\text{ m}$ długa, $8\cdot2$ szeroka a $3\cdot1\text{ m}$ głęboka; ile m^3 ziemi potrzeba wykopać, a ile wozów ziemi wywieźć, jeżeli z 5 m^3 ziemi przez skopanie otrzymuje się 9 m^3 , a na jeden wóz nabiera się $\frac{3}{4}\text{ m}^3$?

39. Pień $6\cdot2\text{ m}$ długi ma na jednym końcu w obwodzie $2\cdot5\text{ m}$, a na drugim $1\cdot8\text{ m}$; ile potrzeba za niego zapłacić, jeżeli za 1 m^3 płaci się $17\frac{1}{2}\text{ zł}$?

40. Ile m^3 sągowego drzewa daje pniak 5 m długi, mający na jednym końcu w średnicy 7 dm , zaś na drugim 6 dm , jeżeli z 1 m^3 puia otrzymuje się $1\frac{1}{2}\text{ m}^3$ drzewa sągowego?

41. Dach na wieży ma kształt ostrosłupa prostego; bok kwadratowej podstawy tego ostrosłupa równa się $4\cdot2\text{ m}$, a krawędź boczna 8 m ; za pokrycie tego dachu blachą zapłacono 325 zł . Po ile płacono za pokrycie 1 m^2 ?

42. Kopuła, mająca kształt półkuli o średnicy $10\cdot2\text{ m}$, ma być pokryta blachą miedzianą; ile potrzeba zapłacić za to pokrycie, jeżeli na zakładki i na przecinanie blachy dolicza się 8% , a za m^2 płaci się po 5 zł . 24 ct ?

43. Sklepienie walcowate o łuku sklepieniowym półkolistym ma długość 2 m , grubość 5 dm , a średnicę wewnętrzną $4\cdot5\text{ m}$; ile cegieł potrzeba na to sklepienie, jeżeli 1 cegła jest 30 cm długa, 16 cm szeroka, a 6 cm gruba?

44. Ile m^3 muru ma sklepienie walcowate $8\cdot2\text{ m}$ długie, 7 dm grube, jeżeli promień wewnętrzny równa się 4 m , a łuk sklepieniowy ma 60° ?

45. Wiadro w kształcie stożka ściętego jest 4.3 dm głębokie a wewnętrzny promień dolnej podstawy równa się 4 dm , zaś górnej 3.8 dm ; ile litrów pojemności ma to wiadro?

46. Sikawka ma dwa walce o średnicy 1.8 dm ; tłok podnosi się w każdym walcu o 2.5 dm , a to 24 razy na minutę; ile hektolitrów wody wyrzuca ta sikawka w połowie godziny?

47. Wielkość ciśnienia cieczy na dno naczynia równa się ciężarowi walcowatego albo graniastosłupowego słupa cieczy, którego podstawą jest dno naczynia, a wysokość równa się wysokości, do jakiej sięga poziom cieczy. Jak wielkie jest ciśnienie na dno naczynia walcowatego o średnicy 1.2 dm , napełnionego do wysokości 2 dm wodą deszczową? (ciężar gatunkowy $= 1.09$).

48. Dno naczynia graniastosłupowego o długości 1 m , a o szerokości 5 dm , może wytrzymać tylko ciśnienie 170 kg ; do jakiej wysokości można napełnić to naczynie oliwą? (ciężar gatunkowy $= 0.92$).

49. Naczynie w kształcie stożka ściętego ma dno o powierzchni 96 cm^2 , powierzchnia jego otworu górnego równa się 70 cm^2 , a wysokość 5 dm ; jeżeli to całe naczynie wypełnimy wodą, a) jak wielkie będzie ciśnienie na dno, b) o ile jest ciśnienie na dno większe od ciężaru wody?

50. Wielkość ciśnienia powietrza na jakąś powierzchnię równa się ciężarowi walcowatego słupa rtęci, którego podstawą jest owa powierzchnia, a wysokością każdorazowy stan barometru. Jak wielkie jest ciśnienie powietrza na powierzchnię 1 dm^2 przy stanie barometru 742 mm ?

51. Jak ciśnie powietrze na całą powierzchnię ciała ludzkiego przy stanie barometru 736 mm , jeżeli się przyjmie, że powierzchnia ciała ludzkiego równa się 1.2 m^2 ?

52. Jak wielkie jest ciśnienie powietrza przy stanie barometru 736 mm na powierzchnię a) sześcianu o krawędzi 1 dm , b) półkuli o średnicy 2 dm ?

53. Jaki musiałby być stan barometru, by ciśnienie powietrza na powierzchnię kuli o średnicy 3.1 dm równało się 3042 kg ?

54 Kupa potłuczonych kamieni jest u dołu 4.7 m długa, u góry 3.5 m długa, zaś jej szerokość równa się 1.2 m a wysokość 0.54 m ; ile m^3 ma ta kupa?

Środkowa część jest graniastosłupem trójsięnnym, a obie części boczne dają razem prosty ostrosłup o kwadratowej podstawie.

55. Namiot czworosięnnym jest 4 m długi, 3 m szeroki a wysokość ścian wynosi 3.5 m ; do ścian bocznych przytyka ostrosłupowy dach, którego wierzchołek od każdego górnego naroża jest odległy o 2.8 m ; ile metrów płótna 120 cm szerokiego potrzeba na ten namiot?

56. Walec maszyny parowej ma średnicę 8 dm , a długość 1.4 m ; po obu końcach jest zamknięty półkulami; ile m^3 pary pomieści się w nim?

57. Framuga ma u góry sklepienie w kształcie ćwierci kuli, a u dołu tworzy połowę walca o promieniu 6.2 dm , a o wysokości 2 m ; jak wielka jest powierzchnia framugi?

58. Ile cegieł potrzeba do zamurowania bramy o sklepieniu kolistym, jeżeli jej szerokość u dołu równa się 2.7 m , wysokość 4 m , głębokość 0.7 m , a na 1 m^3 muru zużywa się 264 cegieł?

