

BIBLIOTEKA
GŁÓWNA

W
SP
KRAKÓW

34 743

DR. F. MOĆNIK

Geometrya
Poglądowa

Część I.

(na klasę I i II)

Seyfarth & Czajkowski

LWÓW



Самый главный недостаток

Книжки, которую вы держите

Ваша книга, которую вы держите

Ваша книга, которую вы держите

Ваша книга, которую вы держите

Ваша книга, которую вы держите

Ваша книга, которую вы держите

D^{ra} F. Močnika

Geometrya poglądowa

dla

klas niższych szkół średnich.

Przełożył na język polski

Grzegorz Maryniak.

Część I.

(na klasę I. i II.),

Wydanie siódme

według 24. wydania niemieckiego.

Z 110 drzeworytami w tekście

~~G. GEBETHNER & SPOŁKA
W KRAKOWIE.~~

WE LWOWIE.

Nakładem księgarni Seyfartha i Czajkowskiego.

1896.



34.743

Czcionkami Drukarni Ludowej we Lwowie, plac Bernardyński 7.

514
Matem.

TREŚĆ.

Zasadnicze pojęcia o ilościach przestrzennych.

	Strona
1. Pogląd na sześcian	1
2. Pogląd na walec	2
3. Związek między ciałami, powierzchniami, liniami i punktami	3
4. Podział linii, powierzchni i ciał	4
5. Geometrya	5

Planimetrya.

I. O liniach prostych.

1. Proste nieograniczone, promienie i odcinki	5
2. Długość odcinków	6
3. Pomiar odcinków	8

II. O linii kołowej.

1. Powstanie linii kołowej i określenia	11
2. Pomiar łuków kołowych	14

III. O kątach

1. Powstawanie i oznaczanie kątów	15
2. Wielkość kątów	15
3. Kąty półpełne, wklęsłe i wypukłe	17
4. Kąty proste, ostre i rozwarte	17
5. Pomiar kątów	19
6. Kąty przyległe i wierzchołkowe	22

IV. O liniach równoległych.

1. Równoległe i nierównoległe proste.	24
2. Kąty odpowiednie, naprzemianległe i jednostronne	25
3. Kąty mające ramiona parami równoległe albo prostopadłe	29

V. O trójkątach.

1. Określenia	30
2. Boki trójkąta	31
3. Kąty trójkąta	32
4. Związek między bokami a kątami trójkąta	35
5. Położenie symetryczne	37
6. Zadania konstrukcyjne	40

VI. O przystawianiu trójkątów.

1. Wykreślanie trójkątów i ich przystawianie	44
2. Trójkąt równoramienny	51
3. Trójkąt równoboczny	52

VII. O szczególnych własnościach koła.

1. Cięciwy i łuki	53
2. Kąty obwodowe	57
3. Styczne	59
4. Położenie dwóch kół względem siebie.	67

VIII. O czworobokach.

1. Określenia	63
2. Kąty czworoboku	63
3. Rodzaje czworoboków	64
4. Własności równoległoboków	64
5. Twierdzenia o trapezach, o deltoidzie i o prostych równoległych w trójkącie	67
6. Czworoboki w koło wpisane i opisane na kole	69
7. Przystawianie i symetria czworoboków	70
8. Zadania do wykreślenia	71

IX. O wielobokach.

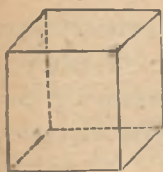
1. Określenia	76
2. Kąty wieloboku	76
3. Umiarowe wieloboki	77
4. Przystawianie i symetria wieloboków	78
5. Wielobok i koło	79
6. Zadania do wykreślenia	81

Zasadnicze pojęcia o ilościach przestrzennych.

1. Pogląd na sześcian *).

§. 1. Sześcian (fig. 1.) zajmuje przestrzeń ze wszystkich stron ograniczoną. Przestrzeń ze wszystkich stron ograniczoną nazywamy ciałem (der Körper). Sześcian zatem jest ciałem.

Fig. 1.



Sześcian rozciąga się w trzech kierunkach: z prawej strony ku lewej, z przodu w tył i z dołu do góry. Rozciągłość z prawej strony ku lewej nazywamy zazwyczaj długością (die Länge), z przodu w tył szerokością (die Breite), a z dołu do góry wysokością (die Höhe).

Każde ciało ma trzy rozciągłości: długość, szerokość i wysokość (głębokość, grubość).

Wymieńcie kilka ciał i wskażcie na nich wszystkie trzy rozciągłości. (Książka, lineal, izba szkolna, skrzynia i inne).

§. 2. Sześcian ograniczony jest sześcioma powierzchniami (Flächen), a mianowicie: dolną, górną, przednią, tylną, prawą i lewą. Powierzchnie ograniczające sześcian są płaskie.

Wskażcie powierzchnie izby szkolnej, książki, skrzyni, tablicy.

Każda powierzchnia sześcianu rozciąga się w dwóch kierunkach; n. p. przednia od ręki prawej ku lewej i z dołu do góry.

Powierzchnia ma tylko dwie rozciągłości: długość i szerokość (wysokość).

§. 3. Każdą powierzchnię sześcianu ograniczają cztery krawędzie (Kanten). Krawędź powstaje tam, gdzie się stykają dwie powierzchnie.

*) Sześcian (z drzewa, tekturki lub blachy) umieszczony jest na stole tak, że jedną ścianą swoją jest zwrócony ku uczniom.

Sześcian ma 12 krawędzi: przednią z góry, przednią z dołu, przednią po prawej stronie i t. d.

Krawędzie sześciannu są liniami prostymi (gerade Linien).

Każda krawędź sześciannu rozciąga się tylko w jednym kierunku, to jest wzdłuż.

Linia ma tylko jedną rozciągłość, mianowicie długość.

Wszystkie linie, ograniczające jakąś powierzchnię, razem wzięte tworzą obwód (der Umfang) tej powierzchni.

§. 4. Każdą krawędź ograniczają dwa jej punkty końcowe (Endpunkte); leżą one tam, gdzie się stykają trzy powierzchnie.

Sześcian ma 8 takich punktów na rogach, mianowicie jeden z przodu na dole po prawej ręce, jeden z przodu na dole po lewej ręce, jeden z przodu na górze po prawej stronie i t. d.; nie rozciągają się one w żadnym kierunku, nie mają więc ani długości, ani szerokości, ani grubości.

Punkt (der Punkt) nie ma żadnej rozciągłości.

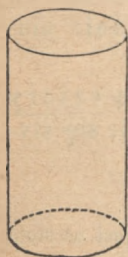
W podobny sposób przerobić poglądowo:

- a) prosty trójsięcienny graniastosłup,
- b) czworoscian,
- c) prosty ostrosłup czworosięcienny.

2. Pogląd na walec.

§. 5. Walec (fig. 2.) zajmuje przestrzeń ze wszystkich stron ograniczoną, jest więc ciałem. Rozciąga się on w trzech kierunkach; ma więc długość, szerokość i wysokość; długość i szerokość są jednakowo wielkie.

Fig. 2



Walec ograniczają trzy powierzchnie; dwie z nich są płaskie a trzecia krzywa. Na każdej z obu powierzchni płaskich znajduje się punkt, jednakowo oddalony od każdego punktu, leżącego na obwodzie tej powierzchni. Powierzchnia taka nazywa się powierzchnią kołową (eine Kreisfläche).

Walec ma tylko dwie krawędzie; są to linie krzywe, ograniczające powierzchnie kołowe. Linie te nazywamy liniami kołowemi (Kreislinien).

Punktów takich, w którychby się krawędzie stykały, walec nie ma.

W podobny sposób przerobić poglądowo:

- a) stożek prosty,
- b) ścięty stożek prosty,
- c) kulę.

3. Związek między ciałami, powierzchniami, liniami i punktami.

§. 6. Przestrzeń, ze wszystkich stron ograniczoną, nazywamy ciałem lub bryłą. Każde ciało rozciąga się w trzech kierunkach, mianowicie w kierunku długości, szerokości i wysokości (głębokości albo grubości).

Granice ciał nazywamy powierzchniami. Powierzchnia ma tylko dwie rozciągłości: długość i szerokość.

Granice powierzchni nazywamy liniami. Linia każda ma tylko jedną rozciągłość, to jest długość.

Granice linii nazywamy punktami. Punkt nie jest ani długi, ani szeroki, ani gruby; punkt nie ma żadnej rozciągłości.

Ciała, powierzchnie, linie i punkty nazywamy utworami przestrzennymi (Raumgebilde).

Ciała, powierzchnie i linie rozciągają się w przestrzeni; z tego powodu nazwano je także ilościami przestrzennymi (Raumgrößen). Punkt nie ma żadnej rozciągłości; nie jest więc ilością przestrzenną.

§. 7. Utwory przestrzenne mogą powstać wskutek ruchu.

Jeżeli punkt porusza się w przestrzeni, wtedy droga, jaką przebywa, jest linią.

Iskra, przebiegająca powietrze, zakresła linię.

Linia poruszająca się, ale nie w kierunku swego przedłużenia, wytwarza powierzchnię.

Drut brudny, posuwany po kartce papieru, pozostawia po sobie zabrudzoną powierzchnię.

Jeżeli nareszcie poruszamy powierzchnię nie w kierunku jej rozciągłości, otrzymamy ciało.

Deszczulka, wciśnięta do miękkiej gliny, pozostawia po wyjęciu zagłębienie, które jest ciałem, ponieważ ma długość, szerokość i głębokość.

4. Podział linii, powierzchni i ciał.

§. 8. Rozróżniamy linie proste (gerade) i krzywe (krumme).

Jeżeli punkt porusza się w przestrzeni ciągle w tym samym kierunku, to linia przez to powstająca jest linią prostą (albo krótko: prostą). Jeżeli zaś punkt poruszający się zmienia ustawicznie kierunek swego ruchu, natenczas linię w ten sposób powstałą nazywamy krzywą.

Kamień wolno z ręki puszczoney spada na ziemię, poruszając się po linii prostej; wyrzucony zaś ukośnie zakreśla linię krzywą. Nić naprężona wyobraża linię prostą.

§. 9. Powierzchnie mogą być płaskie lub krzywe.

Powierzchnię nazywamy płaską albo krótko płaszczyzną (die Ebene), jeżeli można na niej wykreślić linie proste we wszystkich możliwych kierunkach; (n. p. powierzchnia sześciannu, ściana pokoju). Jeżeli zaś na jakiejś powierzchni nie można we wszystkich kierunkach nakreślić linii prostej, natenczas taką powierzchnię nazywamy krzywą; (n. p. powierzchnia boczna walca, na której tylko w jednym kierunku można prowadzić proste; powierzchnia kuli, na której w żadnym kierunku nie można wykreślić linii prostej).

Płaszczyznę, ograniczoną ze wszystkich stron liniami, nazywać będziemy figurą płaską (eine ebene Figur).

§. 10. Ciała są albo graniaste, albo okrągłe.

Ciało, ograniczone samemi płaszczyznami, nazywamy graniastem (ein eckiger Körper); n. p. sześciann. Ciało, ograniczone powierzchniami płaskimi i krzywymi, albo tylko krzywymi (jedną lub kilkoma) nazywamy okrągłym (ein runder Körper); (n. p. walec, który ograniczają dwie płaszczyzny i jedna powierzchnia krzywa; albo kula, którą ogranicza tylko jedna powierzchnia krzywa).

5. Geometrya.

§. 11. Naukę o utworach przestrzennych nazywamy geometryą.

Geometryę dzielimy na planimetryę i stereometryę. Planimetrya zapoznaje nas z własnościami tych utworów przestrzennych, które można pomieścić na tej samej płaszczyźnie; stereometrya zaś uczy nas o własnościach takich utworów przestrzennych, które nie mieszczą się na tej samej płaszczyźnie, lecz z niej wystają.

Planimetrya.

I. O liniach prostych.

1. Proste nieograniczone, promienie i odcinki.

§. 12. 1. Przez jeden punkt można wykreślić bardzo wiele prostych w różnych kierunkach. Dobierając punkt drugi, znajdziemy tylko jedną prostą, która przez oba punkty przechodzi. Dwa punkty linii prostej wyznaczają dokładnie jej położenie.

2. Dwie różne proste mogą mieć tylko jeden punkt wspólny; mówimy wtedy o nich, że się przecinają w tym punkcie, i nazywamy ich punkt wspólny punktem przecięcia (Schnittpunkt).

Do wykreślenia prostej używamy lineалу. W rysunku kropka uzmysławia punkt, kreseczka zaś linię.

Narysujcie dwa punkty i połączcie je z wolnej ręki linią prostą.

Narysujcie trzy punkty, nie leżące na linii prostej i wykreślcie przez każde dwa linię prostą. — Ile prostych można wykreślić w tym razie?

§. 13. Każdy punkt nieograniczonej prostej dzieli ją na takie dwie części, że każda z nich rozciąga się nieograniczenie tylko w jedną stronę. Prosta, na jednym końcu ograniczoną, nazywać będziemy promieniem (ein Strahl). Do zupełnego ograniczenia prostej potrzeba dwóch punktów. Prosta, dwoma punktami ograniczoną, nazywamy odcinkiem

prostej lub krótko odcinkiem (eine Strecke), punkty zaś, ograniczające odcinek, jego punktami końcowymi (Endpunkte).

Punkt naznaczamy w ten sposób, że przy kropce, uzmysławiającej go, piszemy literę jakąś lub cyfrę, n. p. A lub 1 i czytamy „punkt A” lub „punkt 1”.

Celem naznaczenia odcinka piszemy literę lub cyfrę przy każdym końcowym punkcie kreseczki, wyobrażającej odcinek, i te litery a względnie cyfry odczytujemy; n. p. odcinek AB. Promień naznaczamy zapomocą jego punktu granicznego i jakiegokolwiek innego punktu na tym promieniu.

2. Długość odcinków.

§. 14. Ze względu na długość mogą być odcinki albo równe (gleich) albo nierówne (ungleich).

Dwa odcinki są równe, jeżeli końce jednego o tyle są od siebie odległe, o ile końce drugiego. Równe odcinki, odpowiednio na sobie położone, nakrywają się tak, że jeden po za drugi nie wystaje (sie decken sich).

Niech n. p. odcinek AB (fig. 3.) równa się odcinkowi CD; położmy odcinek CD na odcinku AB tak, aby ich punkty początkowe C i A padły na siebie, natenczas i punkt D przypadnie na punkt B, albowiem oddalenie punktu D od punktu C jest tak wielkie, jak oddalenie punktu B od punktu A.

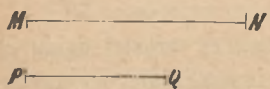
Fig. 3.



Ażeby naznaczyć równość odcinków AB i CD, piszemy: $AB = CD$.

Dwa odcinki, których końce są niejednakowo od siebie odległe, są nierówne, a mianowicie ten jest dłuższy, którego końce są więcej od siebie oddalone.

Fig. 4.



Dwa nierówne odcinki, jak MN i PQ (fig. 4.), nie nakrywają się w zupełności. Znakiem nierówności jest $>$ lub $<$; $MN > PQ$ znaczy, że odcinek MN jest większy od odcinka PQ; zaś $PQ < MN$ oznacza, że odcinek PQ jest mniejszy od odcinka MN.

Odcinek, łączący dwa punkty, jest najkrótszy ze wszystkich linii, które między tymi dwoma

punktami można wykreślić; z tego powodu wyznacza odcinek oddalenie dwóch punktów.

§. 15. Odcinkami można rachować podobnie jak i liczbami.

Fig. 5.

Jeżeli odcinek AB (fig. 5.) przedłużymy o odcinek BC, wtedy odcinek AC będzie tak długi, jak AB i BC razem wzięte, czyli AC jest sumą odcinków AB i BC; zatem

$$AC = AB + BC.$$

I naodwrot, odcinek AB jest różnicą odcinków AC i BC, mianowicie

$$AB = AC - BC.$$

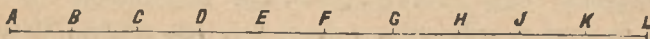
Zadania.

1. Narysujcie dwa nierówne odcinki i wyznaczcie ich sumę i różnicę.

2. Jakie położenie musimy nadać dwom odcinkom, by je zapomocą rysunku dodać, a jakie, by je odjąć można?

§. 16. Odcinając na prostej (fig. 6.) równe odcinki AB, BC, CD, ..., KL, widzimy, że odcinek AC jest dwa razy tak

Fig. 6.



wielki jak odcinek AB, AD jest 3 razy, ..., AL zaś 10 razy tak długi jak AB; otrzymaliśmy w ten sposób 2-, 3-, 4-, ..., 10-krotność odcinka AB; mamy zatem: $AC = 2 AB$, $AD = 3 AB$, ..., $AL = 10 AB$; a nadto $AE = 2 AC$, $AL = 5 AC$, $AL = 2 AF$.

I naodwrot, AB jest połową AC, trzecią częścią AD, czwartą częścią AE, ..., dziesiątą częścią AL; czyli

$$AB = \frac{AC}{2}, AB = \frac{AD}{3}, AB = \frac{AE}{4}, \dots, AB = \frac{AL}{10}; \text{ podobnie}$$

$$AC = \frac{AG}{3}, AE = \frac{AJ}{2} \text{ i t. d.}$$

Zadania.

1. Który odcinek na fig. 6. równa się:

a) sumie $BD + DG$?

b) różnicy $AE - AD$?

c) trzechkrotności odcinka $AC + CD$?

d) czterokrotności odcinka $AD - CD$?

2. Narysujecie odcinek 2-, 3-, 4 razy dłuższy od odcinka BD (fig. 6.).

3. Narysujecie odcinek równy $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ odcinka AG.

4. Narysujecie 10 odcinków, z którychby drugi był dwukrotnością pierwszego, trzeci trzechkrotnością pierwszego i t. d., a dziesiąty dziesięćkrotnością pierwszego.

5. Wykreście odcinek i podzielcie go na dwie równe części.

6. Wykreście cztery odcinki takie, żeby każdy następujący był połową poprzedzającego.

7. Narysujecie kilka odcinków i podzielcie je na oko na 2, 4, 8, 3, 6, 12, 5, 10, 7, 9 równych części.

O nauce geometrycznego dzielenia odcinków będzie mowa później.

3. Pomiar odcinków.

§. 17. Zmierzyć przedmiot znaczy oznaczyć jego wielkość.

Aby wymierzyć ilość przestrzenną, obieramy inną ilość przestrzenną tego samego rodzaju za jednostkę i próbujemy, ile razy ta jednostka w danej ilości się mieści. Odcinek można mierzyć tylko odcinkiem. Chcąc zatem zmierzyć odcinek, wybieramy znany jakiś odcinek za jednostkę długości i szukamy, ile razy jednostka ta mieści się w odcinku, który mamy zmierzyć. Liczbę, która nam to wskazuje, nazywamy liczbą wymiarową (die Masszahl) tego odcinka.

Jednostką długości w monarchii austriacko-węgierskiej jest metr (der Meter).

Metr (*m*) podzielono na 10 decymetrów, decymetr (*dm*) na 10 centymetrów, centymetr (*cm*) na 10 milimetrów (*mm*).

1.000 metrów daje 1 kilometr (*km*), 10.000 metrów 1 myriametr (*μm*).

Chcąc oznaczyć w metrach długość pokoju, należy wyznać, ile razy zawiera się metr w linii wzdłuż pokoju idącej. Jeżeli zawiera się n. p. 8 razy, długość pokoju jest 8 razy większa od metra, czyli ma 8 metrów; 8 jest liczbą wymiarową długości pokoju ze względu na metr jako jednostkę długości.

Zadania.

1. Z dwóch odcinków jest jeden $12\text{ m } 5\text{ dm } 6\text{ cm}$, drugi $7\text{ m } 3\text{ dm } 9\text{ cm}$ długi; jaka jest ich suma?

2. Jeżeli (fig. 5.) odcinek $AB = 6.63\text{ m}$, $BC = 3.26\text{ m}$, ile wynosi AC ?

3. Z dwóch żerdzi ma dłuższa $2\text{ m } 3\text{ dm}$, krótsza $1\text{ m } 9\text{ dm}$ długości; jaka jest różnica ich długości?

4. Jeżeli krótsza z dwóch żerdzi ma $2\text{ m } 18\text{ cm}$, a różnica obydwóch jest 0.29 m , jaka jest długość większej, a jaka suma obydwóch?

5. Pewien odcinek ma $7\text{ m } 4\text{ dm } 8\text{ cm}$, drugi zaś jest 5 razy dłuższy; oznaczyć długość drugiego odcinka.

6. Belka $4\text{ m } 3\text{ dm } 2\text{ cm}$ długa ma być przecięta na 4 równe części; jak długa będzie każda z tych części.

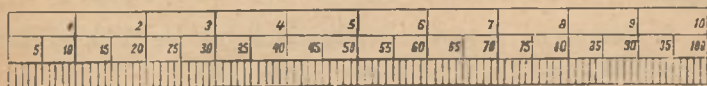
7. Droga długości $9\text{ km } 348\text{ m}$ jest zbudowana w szóstej swej części; ile brakuje do jej ukończenia?

§. 18. Do rzeczywistego pomiaru dłuższych linii używamy drążka metrycznego lub sznura albo łańcucha mierniczego.

Do wymierzenia zaś mniejszych długości używamy podziałek, t. j. płytek drewnianych lub metalowych, na których naznaczono długość jednej lub kilku jednostek długości wraz z ich podziałami na mniejsze jednostki.

Fig. 7. przedstawia długość jednego decymetra z jego podziałem na centymetry i milimetry.

Fig. 7.



Zadania.

1. Wymierzcie następujące rozciągłości: a) długość i szerokość tablicy; b) szerokość i wysokość drzwi i okien; c) długość, szerokość i wysokość izby szkolnej. (Przed wymierzaniem na oko oceńcie długość).

2. Narysujcie odcinek, oceńcie na oko jego długość w cm i mm , a następnie wymierzcie jego długość zapomocą podziałki (fig. 7.).

3. Wykreście dwa nierówne odcinki i oznaczcie ich długość w oba sposoby (jak w zad. 2.).

4. Używając podziałki narysujecie odcinek: a) 7 *cm*, b) 3 *cm* 5 *mm*, c) 63 *mm* długi.

5. Wykreście prostą o długości 4 *cm* 7 *mm* i przedłużcie ją o 2 *cm* 1 *mm*.

6. Wykreście prostą 58 *mm* długą i skróćcie ją o 29 *mm*.

7. Wykreście odcinek 1 *cm* 6 *mm* długi, a potem jego 2-, 3-, 4- i 5-krotność.

8. Wykreście odcinek mający 6 *cm*, a następnie jego połowę, trzecią, czwartą i piątą część.

§. 19. Gdy wymierzony odcinek przedstawiamy na rysunku, zwykle nie rysujemy go w rzeczywistej długości, lecz w zmniejszeniu, przyjmując, że n. p. 1 *cm* na papierze przedstawia 1 *m* lub 20 *m* rzeczywistej długości.

Podziałka, na której naznaczono miary rzeczywiste w zmniejszeniu, nazywa się podziałką zmniejszoną (*verjüngter Massstab*).

Zadania.

1. Podziałkę 3 *m* długą, na której uwidocznione są także decymetry, narysować w takim zmniejszeniu, by 1 *m* rzeczywistej długości równał się 3 *cm*.

Fig. 8.



Na linii prostej (fig. 8.) odcinam długość 3 *cm* naturalnej wielkości 3 razy i dzielę pierwszą część po lewej na 10 równych części.

2. Narysujecie 3 proste i przenieście na nie z powyższej podziałki kolejno 2 *m*, 1 *m* 5 *dm* i 2 *m* 7 *dm*.

3. Wykreście 3 odcinki i wymierzcie zapomocą podziałki na fig. 8. długość każdego w *m* i *dm*.

4. Narysujecie podziałkę na 5 *m* w zmniejszeniu 1 *m* = 2 *cm*, by na niej można odczytać nawet 5 *cm*.

Ponieważ 100 *cm* miary rzeczywistej mają być przedstawione przez 2 *cm* albo 20 *mm*, to 5 *cm* miary rzeczywistej będą przedstawione przez 1 *mm*.

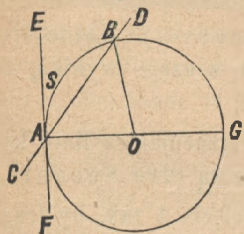
5. Narysujecie podziałkę na 40 *m* w dowolnem zmniejszeniu, by na niej można odczytać jeszcze metry.

II. O linii kołowej.

1. Powstawanie linii kołowej i określenia.

§. 20. Z pomiędzy linii krzywych najważniejsza jest linia kołowa (die Kreislinie).

Fig. 9.



Niech odcinek AO (fig. 9.) obraca się na płaszczyźnie około stałego punktu O, aż wróci do pierwotnego położenia, to punkt A zakreśli wtedy linię krzywą, którą nazywamy linią kołową albo kołem. Linia kołowa jest to więc linia krzywa, posiadająca tę własność, że wszystkie jej punkty są równo oddalone od stałego punktu O.

Punkt ten nazywa się środkiem koła (der Mittelpunkt, das Centrum).

Do wykreślenia linii kołowej używamy cyrkla.

Długość całej linii kołowej nazywamy okręgiem albo obwodem koła (der Kreisumfang, die Peripherie des Kreises), a płaszczyznę, ograniczoną tą linią, powierzchnią koła (Kreisfläche).

Półowę obwodu koła nazwano półokręgiem albo półkołem, czwartą zaś część ćwiartką koła.

Odcinek, łączący środek koła z jakimkolwiek punktem obwodu, nazywa się promieniem (der Halbmesser, Radius) koła, n. p. OA, OB, OG. Ponieważ wszystkie punkty obwodu koła są jednakowo oddalone od środka, zatem wszystkie promienie koła są równe.

Położenie punktu względem koła może być trojaki: albo punkt znajduje się na polu koła, albo na obwodzie, albo poza polem koła, stosownie do tego, czy oddalenie owego punktu od środka koła jest mniejsze, czy równe lub większe od promienia koła.

Dwa koła o równych promieniach są równe. Dwa równe koła dokładnie się nakrywają, jeżeli jedno położymy na drugim tak, aby ich środki na siebie przypadły; gdyby się bowiem nie nakryły, nie byłyby wszystkie punkty obwodów tych kół jednakowo oddalone od środka.

Koła o nierównych promieniach są nierówne.

§. 21. Prosta może mieć z linią kołową dwa punkty wspólne, albo tylko jeden, albo nie ma żadnego wspólnego punktu, stosownie do tego, czy oddalenie jej od środka koła jest mniejsze, czy równe lub większe od promienia koła.

Odcinek AB, łączący dwa punkty obwodu, nazywa się cięciwą (die Sehne); cięciwę AG, przechodzącą przez środek koła, nazywamy średnicą (der Durchmesser). Każda średnica jest dwa razy większa od promienia, z czego wynika, że wszystkie średnice koła są równe.

Prosta CD nieograniczonej długości, przecinająca linię kołową w dwóch punktach, nazywa się sieczną (die Secante).

Obracając sieczną około punktu przecięcia A tak, by drugi punkt przecięcia B coraz bardziej zbliżał się do punktu A i nareszcie padł na punkt A, otrzymamy prostą EF, która z linią kołową ma tylko jeden punkt wspólny (t. j. punkt A).

Prostą EF, mającą z linią kołową tylko jeden punkt wspólny A, a leżącą zresztą poza polem koła, nazywamy styczną (die Tangente) koła, a punkt A punktem styczności (der Berührungspunkt).

§. 22. Część obwodu koła nazywa się łukiem (der Bogen), n. p. ASB.

Dwa łuki tego samego koła albo kół równych są równe, jeżeli odpowiednio na sobie położone całkiem się nakryją; w przeciwnym razie łuki są nierówne.

Część powierzchni koła ~~AOBSA~~, ograniczoną dwoma promieniami i łukiem, nazywamy wycinkiem koła (der Kreis-ausschnitt).

Część powierzchni koła AB~~SA~~, leżąca między cięciwą a łukiem do tej cięciwy należącym, zowie się odcinkiem koła (der Kreisabschnitt).

Każda średnica koła dzieli jego obwód na dwa równe łuki, a powierzchnię na dwa równe odcinki.

Każda cięciwa, nie będąca średnicą, dzieli obwód koła na dwa nierówne łuki, a powierzchnię na dwa nierówne odcinki koła. Zazwyczaj odnosimy cięciwę do mniejszego łuku i do mniejszego odcinka, albo też zaznaczamy wyraźnie, że mówimy o większym łuku lub większym odcinku koła.

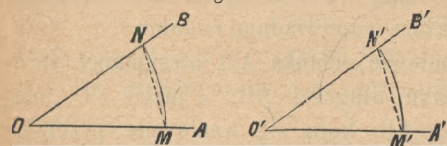
Dwa równe łuki, położone odpowiednio na sobie, nakryją się tak, że ich punkty końcowe padną na siebie; wskutek tego nakryją się także ich cięciwy, jako proste, łączące ich punkty końcowe. I nawzajem, jeżeli mamy w kole dwie równe cięciwy i jedną tak na drugiej położymy, że ich końcowe punkty padną na siebie, natenczas i łuki nakryją się, albowiem wszystkie ich punkty są równo oddalone od środka koła.

Do równych łuków należą zatem w tem samym kole (albo także w równych kołach) równe cięciwy, a do równych cięciw równe łuki.)

§. 23. Zadania.

1. Wykreślić łuk równy danemu łukowi MN (fig. 10.).

Fig. 10.



Kreślimy dowolną prostą $O'A'$ i z punktu O' zakreślamy promieniem OM łuk, który przecina prostą $O'A'$ w punkcie M' ; cyrklem rozwartym na długość cięciwy MN zakreślamy z M' łuk, który wyznaczy punkt N' ; łuk $M'N' =$ łukowi MN ,

ponieważ należą do równych cięciw.

2. Wyznaczyć punkt, znajdujący się w pewnem oddaleniu od danego punktu.

Zakreślimy z danego punktu, jako środka, koło promieniem równym danemu oddaleniu, naówczas wszystkie punkty, tego koła odpowiadają warunkom zadania.

Zadanie, które ma niezmiernie wiele różnych rozwiązań, nazywamy nieoznaczonem, w przeciwstawieniu do zadania oznaczonego, posiadającego albo tylko jedno rozwiązanie, albo ograniczoną, dokładnie oznaczyć się dającą, liczbę rozwiązań.

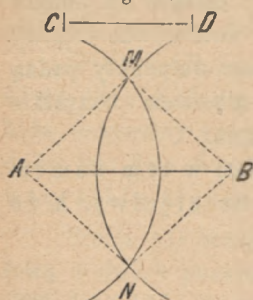
Powyższe zadanie jest zatem nieoznaczone.

Jeżeli wszystkie punkty jakiejś linii (ale tylko tej, a nie jeszcze jakiejś innej linii) czynią zadość pewnemu warunkowi, natenczas nazywamy linię taką miejscem geometrycznem owych punktów (geometrischer Ort).

Linia kołowa jest przeto miejscem geometrycznem wszystkich punktów, znajdujących się w tej samej odległości od danego punktu.

3. Wyznaczyć punkt, któryby od dwóch danych punktów o pewną długość był odległy.

Fig 11.



Niech A i B (fig. 11.) będą danymi punktami, a CD żądanem oddaleniem. Miejscem geometrycznem punktów, odległych od A o długość CD, jest koło zakreślone promieniem CD z punktu A, miejscem zaś geometrycznem punktów, odległych od B o długość CD, jest koło zakreślone z punktu B promieniem równym CD; punkt, czyniący zadość obu warunkom, musi być wspólny obu kołom, zatem leży tam, gdzie się oba koła przecinają. A ponieważ obie linie kołowe przecinają się w punktach M i N, przeto mamy dwa różne punkty, które odpowiadają zadaniu

Jeżeli CD równa się połowie odcinka AB, otrzymamy tylko jeden punkt leżący w środku długości AB, a jeżeli CD jest mniejsze od połowy odcinka AB, koła się wcale nie przetną, co jest dowodem, że niema żadnego punktu, odpowiadającego warunkom zadania

4. Wyznaczyć punkt, znajdujący się w pewnej a nierównej odległości od dwóch danych punktów.

Rozwiązanie tego zadania jest podobne do rozwiązania zadania 3.

2. Pomiar łuków kołowych.

§. 24. Do mierzenia łuków kołowych używamy stopnia, t. j. 360-tej części obwodu koła, za jednostkę miary łukowej i dochodzimy, ile razy ta jednostka mieści się w łuku, który mamy zmierzyć. Stopień podzielono na 60 minut, a minutę na 60 sekund.

Stopnie, minuty i sekundy naznaczamy znakami $^{\circ}$, $'$, $''$; n. p. 52 stopni 41 minut 12 sekund $= 52^{\circ} 41' 12''$.

Zadania.

1. Ile stopni ma półokrąg, a ile ćwiartka koła?

2. Ile stopni ma 3-cia, 5-ta, 6-ta, 8-ma, 9-ta, 10-ta część obwodu koła?

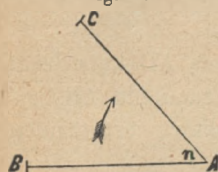
3. Którą częścią obwodu koła jest łuk 10° , 20° , 30° , 36° , 40° , 60° , 90° , 120° ?

III. O kątach.

1. Powstawanie i oznaczanie kątów.

§. 25. Gdy z punktu A (fig. 12.) wykreślimy dwa promienie AB i AC, otrzymamy dwie proste, mające różne kierunki.

Fig. 12.



Różnicę kierunków dwu prostych nazywamy kątem (der Winkel).

W piśmie znaczymy kąt znakiem $\sphericalangle$.

Kąt powstanie także wtedy, gdy promień AB obracamy w płaszczyźnie około stałego punktu A, aż zajmie położenie promienia AC; skutkiem obrotu jest rozchylenie promieni, a wielkość tego rozchylenia jest kątem.

Do uzmysłowienia tego sposobu powstawania kąta można użyć cyrkla.

Oba promienie AB i AC nazywamy ramionami (Schenkel), a punkt, w którym się przecinają promienie, tworzące kąt, wierzchołkiem (der Scheitel) kąta.

Kąt naznaczamy albo literą u jego wierzchołka, albo małą literą napisaną u wierzchołka między ramionami (n), albo nareszcie trzema literami, pisząc i czytając najpierw literę u jednego ramienia, potem u wierzchołka kąta, a w końcu literę u drugiego ramienia. Kąt na fig. 12. jest więc albo kątem A, albo kątem n , albo kątem CAB lub BAC.

2. Wielkość kątów.

§. 26. Wielkość kąta nie zależy od długości ramion, lecz jedynie od wielkości obrotu, jaki wykonać potrzeba, by jedno ramię zajęło położenie drugiego.

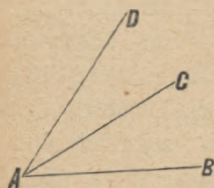
Dwa kąty są równe, jeżeli do ich powstania potrzeba było obrotu tej samej wielkości. Jeżeli z dwóch równych kątów jeden tak na drugim położymy, by ich wierzchołki padły na siebie i żeby ramię jednego kąta padło na ramię drugiego, nateczas i druga para ramion musi przypaść na siebie; kąty takie nakrywają się zatem.

Dwa kąty są nierówne, jeżeli do powstania jednego potrzeba było innego obrotu, niż do powstania drugiego.

Który z dwóch nierównych kątów jest większy, a który mniejszy? W jaki sposób można się o tem przekonać?

§. 27. Obróćmy ramię AC (fig. 13.) kąta BAC około wierzchołka A w stronę lewą aż do położenia AD, a otrzymamy kąt

Fig. 13.



BAD tak wielki, jak oba kąty BAC i CAD razem; kąt BAD jest przeto sumą kątów BAC i CAD, więc $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD$.

Obróciwszy zaś ramię AD kąta BAD o kąt CAD w stronę ku ramieniu AB, pozostanie nam kąt BAC, który jest różnicą kątów BAD i CAD; zatem

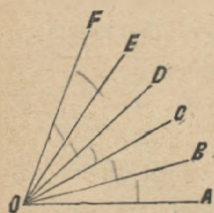
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD - \sphericalangle CAD.$$

Można więc kąty dodawać i odejmować, podobnie jak inne ilości.

Jakie położenia muszą zająć ramiona i wierzchołki dwóch kątów, aby można rysunkiem wyznaczyć ich sumę? Jakie położenie nadać musimy ramionom i wierzchołkom dwóch kątów, by wyznaczyć rysunkiem ich różnicę?

§. 28. Jeżeli kąty AOB, BOC, COD, DOE, EOF (fig. 14.) są sobie równe, to kąt AOC jest dwa razy większy od kąta AOB,

Fig. 14.



$\sphericalangle AOD$ 3 razy większy, $\sphericalangle AOE$ 4 razy, $\sphericalangle AOF$ 5 razy większy od kąta AOB, czyli $\sphericalangle AOC = 2 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOD = 3 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOE = 4 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOF = 5 \sphericalangle AOB$.

I na odwrót, jest kąt AOB połową kąta AOC, trzecią częścią kąta AOD, czwartą częścią $\sphericalangle AOE$ i piątą częścią kąta AOF; czyli $\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC = \frac{1}{3} \sphericalangle AOD = \frac{1}{4} \sphericalangle AOE = \frac{1}{5} \sphericalangle AOF$.

Zadania.

1. Przeczytajcie na fig. 14. wszystkie kąty, oraz podajcie części składowe kątów złożonych.

2. Który kąt na fig. 14. równa się

a) sumie $\sphericalangle BOC + \sphericalangle COE$?

b) różnicy $\sphericalangle AOF - \sphericalangle COF$?

3. Narysujcie na oko trzy kąty takie, aby drugi z nich był 2 razy, a trzeci 5 razy większy od pierwszego.

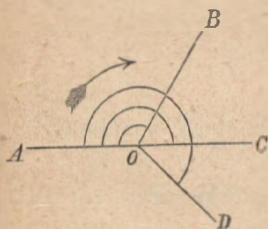
4. Podzielcie na oko kąt na 2, 3, 4, 5, 6 równych części.

3. Kąty półpełne, wklęsłe i wypukłe.

§. 29. Kąt, którego ramiona rozchodzą się od wierzchołka w przeciwnych kierunkach, tworząc jedną prostą, nazywamy kątem półpełnym (ein gestreckter Winkel). Wszystkie kąty półpełne są sobie równe.

Kąt mniejszy od półpełnego nazywa się wklęsłym (ein hohler Winkel), a większy od półpełnego kątem wypukłym (einerhabener Winkel).

Fig. 15.



Na fig. 15. jest AOC kątem półpełnym, AOB wklęsłym, a AOD wypukłym.

Aby powstał kąt półpełny, musiał poruszający się promień wykonać pół obrotu; by powstał kąt wklęsły, musiał promień wykonać mniej niż pół, aby zaś powstał kąt wypukły, więcej niż pół obrotu.

Do każdego kąta wklęsłego należy po drugiej stronie ramion kąt wypukły; z tych dwóch kątów zazwyczaj kąt wklęsły uważamy za miarę rozchylenia dwu przecinających się prostych.

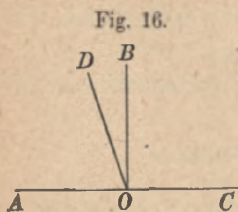
Kąt powstały wskutek całego obrotu nazywamy pełnym (ein voller Winkel). Kąt pełny jest dwa razy większy od półpełnego. Wszystkie kąty pełne są sobie równe. Kąt wklęsły wraz z należącym do niego kątem wypukłym tworzą kąt pełny.

4. Kąty proste, ostre i rozwarte.

§ 30. Kąty wklęsłe dzielimy na proste, ostre i rozwarte. Kąt prosty (ein rechter Winkel) jest połową półpełnego; aby kąt prosty mógł powstać, musi poruszające

się ramię wykonać ćwierć obrotu. Kąt prosty znaczyć będziemy literą R . Wszystkie kąty proste są sobie równe.

Kąt mniejszy od prostego nazywa się kątem ostrym (ein spitzer Winkel), a większy od prostego, ale mniejszy od półpełnego, kątem rozwartym (ein stumpfer Winkel).



Jeżeli na fig. 16. $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC$, to każdy z tych kątów jest połową półpełnego kąta AOC, a więc każdy z nich jest kątem prostym; $\sphericalangle AOD$ jest ostry, a $\sphericalangle COD$ rozwarty.

Kąty ostre i kąty rozwarte nazywamy w przeciwstawieniu do kątów prostych także kątami ukośnymi (schiefe Winkel).

Zadania.

1. Jakiego rodzaju kąty mamy

a) na sześciacie?

b) na czworoięcianie?

2. Wyszukajcie kąty proste na przedmiotach, znajdujących się w pokoju.

3. O której godzinie tworzą obie wskazówki zegaru kąty proste, a o której kąt półpełny?

4. Narysujcie kąt a) prosty, b) ostry, c) rozwarty o równych ramionach.

5. Narysujcie kąt prosty, któregooby jedno ramię było trzy razy dłuższe od drugiego.

6. Wykreślcie kąt rozwarty i przedstawcie go jako sumę trzech kątów.

§. 31. Jeżeli dwie proste tworzą kąt prosty, mówimy wtedy, że padają na siebie prostopadle albo normalnie, a każdą z nich nazywamy prostopadłą, normalną, albo pieniem (eine Senkrechte, eine Normale, ein Perpendikel) względem drugiej. Jeżeli dwie proste tworzą kąt ukośny, wtedy mówimy, że padają na siebie ukośnie i nazywamy je ukośnemi liniami. Na fig. 16. jest BO prostopadle na AO, co piszemy w następujący sposób: $BO \perp AO$; przeciwnie jest linia DO ukośna do AO lub CO.

Zadania.

1. Jakie położenie mają względem siebie *a)* krawędzie sześcianu, *b)* czworościanu?

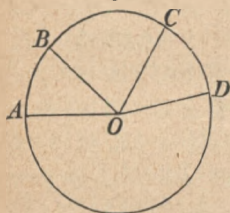
2. Wskażcie na przedmiotach w szkole te proste, które są do siebie *a)* prostopadłe, *b)* ukośne.

3. Wykreście prostą i narysujecie do niej prostopadłe z różnych punktów, obok niej leżących.

5. Pomiar kątów.

§. 32. Gdy odcinek AO (fig. 17.) obracamy na płaszczyźnie około punktu O tak, że kolejno przechodzi w położenie BO, CO, DO

Fig. 17.



i t. d., to łuk, który A zakresła i kąt, który położenie poruszanego odcinka tworzy z jego pierwotnem położeniem, będą tem większe, im dalej obrócimy odcinek. Po wykonaniu całego obrotu otrzymamy największy łuk, t. j. cały obwód, i największy kąt, t. j. kąt pełny.

Kąt AOB, którego wierzchołek leży w środku koła, a którego ramionami są promienie koła, nazywamy kątem środkowym (ein Centriwinkel).

Jeżeli kąty środkowe AOB i COD są równe, to także należące do nich łuki AB i CD muszą być równe. Gdy bowiem kąt COD położymy na kącie AOB tak, aby ich wierzchołki padły na siebie, a ramię CO padło na AO, to z powodu równości kątów także DO padnie na BO; a wtedy także łuk CD nakryje łuk AB, ponieważ wszystkie jego punkty tak są oddalone od punktu O, jak punkty łuku AB.

W podobny sposób można dowieść równości kątów AOB COD, gdy łuki AB i CD są równe.

Z tego wynika:

a) Do równych kątów środkowych w kole należą równe łuki.

b) Do równych łuków kołowych należą równe kąty środkowe.

Zadanie.

Wykreślić kąt, równy danemu kątowi.

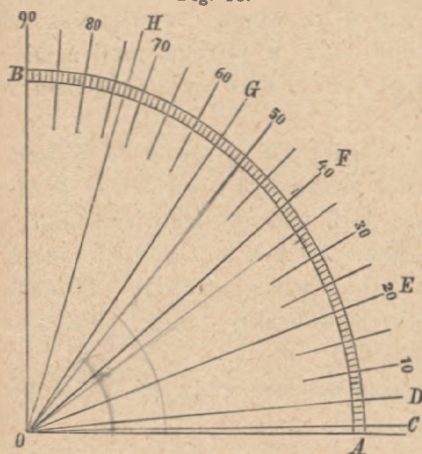
Zadanie to rozwiążemy podobnie jak zadanie w §. 23. 1.

§. 33. Dwa ostatnie twierdzenia nastroczają nam bardzo prosty sposób mierzenia kątów.

Podzieliwszy obwód koła na 360 równych części, a więc tak, aby każda z nich była stopniem łukowym, połączmy punkty podziału ze środkiem koła, a otrzymamy 360 kątów środkowych, tworzących razem kąt pełny; kąty te są równe, bo należą do równych łuków. Kąt, odpowiadający stopniowi łukowemu, nazywamy także stopniem, albo stopniem kątowym (ein Winkelgrad). Stopień kątowy, t. j. 360-ta część kąta pełnego, służy za jednostkę do pomiaru kątów; stopień kątowy podzielono na 60 minut kątowych, a każdą minutę na 60 sekund kątowych.

Chcąc więc wymierzyć jakiś kąt, należałoby się przekonać, ile razy w nim się mieści stopień kątowy. W rzeczywistości jednak mierzymy nie kąt, ale łuk, zawarty między jego ramionami, wnioskując słusznie, że każdy kąt ma tyle stopni, minut

Fig. 18.



i sekund łukowych, ile stopni, minut i sekund łukowych ma łuk, zakreślony z wierzchołka kąta, a zawarty między jego ramionami.

Stopnie, minuty i sekundy kątoweznaczmy tak jak stopnie, minuty i sekundy łukowe, t. j. zapomocą znaków: $^{\circ}$, $'$, $''$.

Gdy ćwiartkę koła AB (fig. 18.) podzielimy na 90 równych części i połączmy punkty podziału ze środkiem O, natenczas liczba, wyrażająca ilość stopni jakiegos

łuku, podaje także ilość stopni kątowych kąta, do którego ten łuk należy. Tak n. p. kąt AOC ma jeden stopień, czyli $\sphericalangle AOC = 1^\circ$; $\sphericalangle AOD = 5^\circ$; $\sphericalangle AOE = 20^\circ$; $\sphericalangle AOF = 40^\circ$; $\sphericalangle AOG = 55^\circ$, $\sphericalangle AOH = 73^\circ$, $\sphericalangle AOB = 90^\circ$.

Kąt pełny ma 360° , półpełny 180° , wklęsły mniej niż 180° , wypukły więcej niż 180° , prosty 90° , ostry mniej niż 90° , a rozwarty więcej niż 90° , ale mniej niż 180° .

Dwa kąty, których suma równa się 90° , nazywamy kątami dopełniającymi (complementäre Winkel), n. p. kąty 60° i 30° , a każdy z nich dopełnieniem (Complement) drugiego. Równe kąty mają równe dopełnienia i naodwrot.

Dwa kąty, których suma równa się 180° , nazywamy kątami spełniającymi (supplementäre Winkel), n. p. kąty 120° i 60° , a każdy z nich spełnieniem (Supplement) drugiego. Równe kąty mają równe spełnienia i naodwrot.

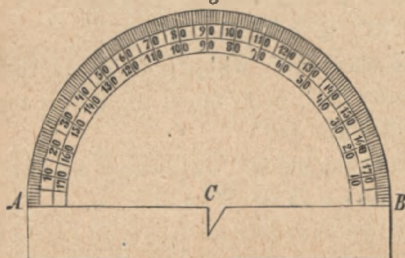
Zadania.

1. Jak wielki kąt zakreśla skazówka godzinowa zegaru w 1, 2, 5, 12 godzinach?
2. Jak wielki kąt zakreśla skazówka minutowa w 1 godzinie, w 1, 5, 10, 30 minutach czasu?
3. Jak wielki kąt tworzą ze sobą obie skazówki zegaru o 1., 2., 5., 6., 8., 9., 11. godzinie?
4. Oznaczcie sumę kątów $37^\circ 48' 35''$, $28^\circ 39'$ i $78^\circ 9' 55''$.
5. Jaka jest różnica kątów $128^\circ 15' 31''$ i $69^\circ 42' 18''$?
6. Jak wielkie jest dopełnienie kąta a) 35° , b) $48^\circ 12'$, c) $75^\circ 8' 30''$?
7. Jak wielkie jest spełnienie kąta a) 55° , b) $96^\circ 20'$, c) $137^\circ 51' 28''$?
8. Wyszukajcie 2-, 3-, 4- i 5-krotność kąta a) $18^\circ 35'$, b) $9^\circ 12' 48''$.
9. Obliczcie połowę, trzecią, czwartą i piątą część kąta a) $72^\circ 27'$, b) $58^\circ 20'$.
10. Ile razy mieści się kąt a) 8° w 96° , b) $16' 28''$ w $108^\circ 16'$, c) $12^\circ 35' 49''$ w $100^\circ 46' 32''$?

§. 34. Gdy rysunek nie wymaga wielkiej dokładności, używamy do mierzenia i rysowania kątów przyrządu, przedstawionego w fig. 19, zwanego kątomierzem (Transporteur).

Jest to płytka z drzewa, blachy lub kartonu, wycięta w kształcie półkoła, podzielonego na stopnie; linia AB na tej płytce jest

Fig 19.



średnicą, a punkt C na wycięciu środkiem koła.

Zadania.

1. Jak zmierzymy za pomocą kątomierza kąt, narysowany na papierze?

2. Narysujcie kilka kątów i oceńcie ich wielkość najpierw na oko, a potem zmierzcie je kątomierzem.

3. Wykreślcie po tej samej stronie prostej z dowolnie na niej obranego punktu kilka promieni, zmierzcie otrzymane kąty i wyznaczcie ich sumę. — Czy otrzymany wypadek zgadza się z rzeczywistą sumą tych kątów (180°)?

4. Narysujcie z dowolnie obranego punktu trzy, cztery albo i więcej promieni, zmierzcie wszystkie kąty, leżące naokoło owego punktu, i wyszukajcie ich sumę.

5. Wykreślcie trzy nie w tym samym punkcie przecinające się proste i zmierzcie kątomierzem utworzone kąty.

6. Jak się rysuje za pomocą kątomierza kąt, którego wielkość w stopniach jest podana?

7. Wykreślcie kąt 20° , 30° , 50° , 90° ; 15° , 65° ; 24° , 79° , 81° , 100° , 150° , 142° , 180° , 209° , 270° i 326° .

8. Narysujcie kąt ostry i kąt rozwarty i wykreślcie za pomocą kątomierza kąty równe tym dwom kątom.

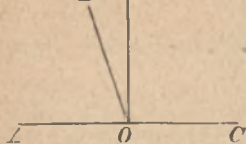
6. Kąty przyległe i wierzchołkowe.

§. 35. Kąt, utworzony przez jedno ramię jakiegoś kąta i przez przedłużenie drugiego ramienia poza jego wierzchołek, nazywamy kątem przyległym (Nebenwinkel). Takie kąty mają

Fig. 20.

D

B



wierzchołek i jedno ramię wspólne, podczas gdy drugie dwa ramiona tworzą linię prostą.

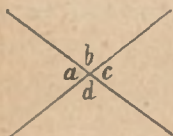
Kąt AOB (fig. 20.) jest przyległy kątowi BOC, a kąt AOD kątowi COD i naodwrot. Dwa kąty sobie przyległe razem wzięte tworzą zawsze kąt półpełny; suma dwóch

kątów przyległych równa się zatem dwóm prostym czyli 180° .

Kąt przyległy kątowi prostemu jest prosty, ostremu — rozwarty, a rozwartemu — ostry.

§. 36. Kąt, leżący między prostymi, tworzącymi przedłużenie ramion jakiegoś kąta poza jego wierzchołek, nazywamy kątem jemu wierzchołkiem przeciwległym albo wprost jego kątem wierzchołkowym (Scheitelwinkel). Rysujemy

Fig. 21.



więc kąt wierzchołkowy jakiegoś kąta, przedłużając jego ramiona poza jego wierzchołek.

W fig. 21. jest a kątem wierzchołkowym kąta c , b zaś kątem wierzchołkowym kąta d .

Kąty wierzchołkowe są sobie równe.

Przekonać się o tem można każdego razu przez pomiar; ale prawdziwości tego twierdzenia można także dowieść z własności kątów przyległych. Ponieważ b jest kątem przyległym tak kątowi a jak i kątowi c , przeto

$$a + b = 2 R$$

$$b + c = 2 R;$$

a ponieważ dwie ilości równe trzeciej są sobie równe, zatem

$$a + b = b + c.$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Odejmując} & b = b, & \text{pozostanie} \\ \hline & a = c; & \end{array}$$

albowiem równe ilości pomniejszone o równe dają równe reszty.

Wykażcie w ten sposób, że także $b = d$.

Znając jeden z kątów a , b , c , d , można inne trzy z łatwością obliczyć.

Zadania.

1. Wyrachujcie kąt przyległy kątowi 10° , 39° , 63° , 85° , 100° , 15° , $48'$; $57^\circ 30'$; $128^\circ 24'$; $68^\circ 6' 35''$; $102^\circ 51' 55''$.

2. Jeżeli w fig. 21. kąt $a = 75^\circ$, jak wielki jest kąt b , c , d ?

3. Jakiś kąt ma a) 81° , b) $17^\circ 38'$, c) $131^\circ 18' 47''$; jak wielki jest kąt wierzchołkowy kąta, przyległego każdemu z tych kątów?

IV. O liniach równoległych.

1. Równoległe i nierównoległe proste.

§. 37. Dwie proste, leżące na tej samej płaszczyźnie, ale w ten sposób, że chociażbyśmy je jak najdalej przedłużali, nigdzie się nie przecinają, nazywamy równoległymi (parallel).

Fig. 22.



Aby naznaczyć, że prosta ab (fig. 22.) jest równoległa do cd , piszemy $ac \parallel cd$.

Dwie równoległe proste mogą mieć albo równe albo wprost przeciwne kierunki, t. j. albo obie rozciągają się w tę samą stronę, n. p. obie w prawo, albo jedna rozciąga się w prawo, a druga w lewo.

Z pojęcia o równoległych prostych wynika:

1. Przez punkt leżący obok prostej można do niej wykreślić tylko jedną prostą równoległą.

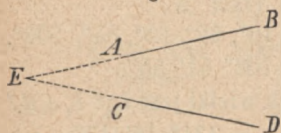
2. Dwie proste, równoległe do tej samej trzeciej, są także do siebie równoległe.

3. Jeżeli jakaś prosta przecina jedną z dwurównoległych prostych, natenczas przecina także drugą.

4. Kąty, które tworzą dwie przecinające się proste, nie zmieniają się, jeżeli jedną z owych prostych przesuniemy równoległe do jej pierwotnego położenia.

Dwie proste, leżące na tej samej płaszczyźnie, a przy tem nierównoległe, muszą się przeciąć, gdy je dostatecznie przedłużymy, jak n. p. AB i CD (fig. 23).

Fig. 23.



Dwie nierównoległe proste są w stronę ku wspólnemu punktowi przecięcia zbieżne (convergierend), a w stronę przeciwną rozbieżne (divergierend).

Zadania.

1. Które krawędzie sześciannu są równoległe, a które nierównoległe?

2. Jakie położenie względem siebie mają krawędzie a) czworoscianu, b) ostrosłupa ściętego?

3. Jakie położenie względem siebie mają promienie, wybiegające z punktu świecącego?

4. Wymieńcie kilka przedmiotów, na których są a) równoległe, b) nierównoległe krawędzie.

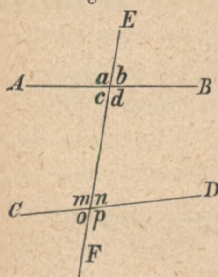
5. Narysujcie prostą, a następnie równoległą do niej w dowolnym odstępnie.

6. Wykreście prostą, a następnie cztery do niej równoległe, a to w równych odstępach.

2. Kąty odpowiednie, naprzemianległe i jednostronne.

§. 38. Prosta EF (fig. 24.), przecinająca proste AB i CD, tworzy z nimi ośm kątów, którym dla ich ważności nadano osobne nazwy.

Fig. 24



Cztery kąty c, d, m i n , które leżą między prostymi AB i CD, nazywamy kątami wewnętrznymi (innere Winkel), cztery inne, t. j. a, b, o i p kątami zewnętrznymi (äussere Winkel).

Dwa kąty, z których jeden jest zewnętrzny, a drugi wewnętrzny, mające osobne wierzchołki i leżące po tej samej stronie przecinającej prostej, nazywamy kątami odpowiednimi (Gegenwinkel); n. p. a i m , b i n , c i o , d i p .

Dwa kąty zewnętrzne, albo dwa kąty wewnętrzne, nie mające wspólnego wierzchołka a leżące po przeciwnych stronach przecinającej prostej, nazywamy kątami naprzemianległymi (Wechselwinkel; n. p. a i p , b i o , c i n , d i m).

Nareszcie dwa kąty wewnętrzne albo dwa zewnętrzne, leżące po tej samej stronie przecinającej prostej, zowią się kątami jednostronnymi (Anwinkel); n. p. a i o , b i p , c i m , d i n .

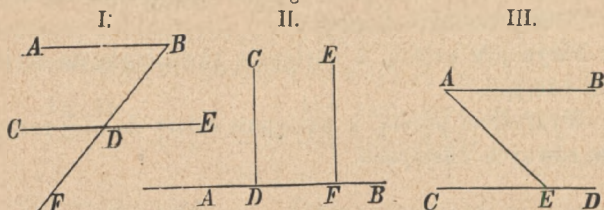
Zadania.

1. Wyszukajcie w fig. 24. kąt wierzchołkowy kąta a , oba jego kąty przyległe, kąt odpowiedni, naprzemianległy i jednostronny; uczynicie to samo dla kąta b, c, d, m, n, o, p .

2. Jeżeli kąt $a = 98^\circ$, a $m = 110^\circ$, jak wielkie są wtedy inne kąty;

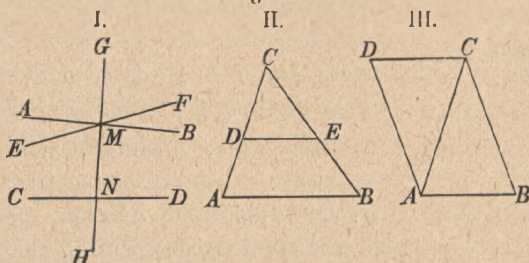
3. Wyszukajcie w fig. 25. I. II. i III. kąty odpowiednie, naprzemianległe i jednostronne.

Fig. 25.



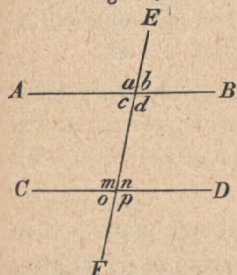
4. Wyszukajcie kąty odpowiednie, naprzemianległe i jednostronne w fig. 26., a mianowicie w I., uważając raz AB i CD, to znów EF i CD za proste przecięte; w II. najpierw AC, potem BC za prostą przecinającą, w III. zaś we wszystkich możliwych przypadkach.

Fig. 26.



§. 39. Szczególniejszą własność mają kąty odpowiednie, naprzemianległe i jednostronne wtedy, gdy obie przecięte linie AB i CD (fig. 27.) są równoległe.

Fig. 27.



Przesuwając prostą AB wzdłuż EF tak, by w każdym nowym położeniu była równoległa do pierwotnego położenia, nie zmienimy przez to wielkości kątów, które linia AB tworzy z linią EF, albowiem przy równoległym przesuwaniu prostej AB nie zmieni się jej nachylenie do prostej EF. Gdy więc AB zajmie położenie prostej CD, nakryją się kąty odpowiednie, są przeto sobie równe; kąty naprzemianległe zamieniają się na wierzchołkowe, są więc także równe; nareszcie kąty jednostronne będą kątami przyległymi, ich więc suma równa się $2 R$. mamy zatem:

$$\begin{array}{lll}
 1. a = m, & 2. a = p, & 3. a + o = 2 R, \\
 b = n, & b = o, & b + p = 2 R, \\
 c = o, & c = n, & c + m = 2 R, \\
 d = p, & d = m, & d + n = 2 R; \text{ czyli:}
 \end{array}$$

Gdy dwie równoległe proste przecina trzecia prosta, natenczas:

1. kąty odpowiednie są sobie równe,
2. kąty naprzemianległe są sobie równe,
3. suma kątów jednostronnych wynosi 180° .

Jeżeli zaś dwa kąty odpowiednie albo też dwa kąty naprzemianległe nie są równe, lub jeżeli dwa kąty jednostronne nie spełniają się do 180° , linie przecięte nie mogą być równoległe; gdy je więc dostatecznie przedłużymy, przetną się, i to po tej stronie, po której suma wewnętrznych kątów jednostronnych jest mniejsza niż $2 R$.

Zadanie.

Narysujcie dwie równoległe proste przecięte trzecią, następnie wymierzcie zapomocą kątomierza jeden z powstałych kątów i wyrachujcie stąd siedm pozostałych kątów.

§. 40. Jeżeli dwie proste przecina trzecia tak, że dwa kąty odpowiednie są równe, to proste przecięte są równoległe.

Jeżeli n. p. $a = m$ (fig. 27.), musi $AB \parallel CD$; skoro bowiem przesuniemy AB ku CD , wielkość kąta a tylko wtedy pozostanie niezmienną, jeżeli AB nie zmieni przy tem przesuwaniu swego kierunku, t. j. jeżeli AB pozostanie równoległą do swego pierwotnego położenia; więc także ostatnie jej położenie CD musi być równoległe do pierwotnego, jeżeli a ma być równe m .

Ponieważ przy przecięciu dwóch równoległych trzecią prostą, rzeczone trzy własności — że kąty odpowiednie są równe, że kąty naprzemianległe są równe, a kąty jednostronne są spełniające — oddzielnie istnieć nie mogą, lecz zawsze razem tak, że skoro jedna własność istnieje, koniecznie i drugie dwie istnieć muszą, przeto z ostatniego twierdzenia wypływają dwa następujące:

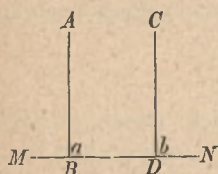
Jeżeli dwie proste przecina trzecia tak, że dwa kąty naprzemianległe są równe, muszą proste przecięte być równoległe.

Jeżeli dwie proste przecina trzecia tak, że dwa kąty jednostronne spełniają się do $2R$, muszą przecięte proste być równoległe.

Z równości dwóch kątów odpowiednich albo naprzemianległych, lub z tego, że suma dwóch kątów jednostronnych równa się $2R$, można już wnosić o równoległości przeciętych prostych.

Z tego, co się wyżej powiedziało, wyrozumieć można łatwo pożytek jaki mamy z kątów odpowiednich, naprzemianległych i jednostronnych. Chcąc bowiem niezbiecie dowieść równoległości dwu prostych, potrzebaby okazać, że nie przetną się, chociażbyśmy je-jak najdalej przedłużyli. Że zaś przedłużenia takiego w rzeczywistości uskutecznić nie można, przeto dowodzimy równoległości dwu prostych najczęściej z własności kątów, powstałych z przecięcia tych prostych trzecią prostą.

Fig. 28.



§. 41. Gdy (fig. 28.) $AB \perp MN$ i $CD \perp MN$, to z powodu, że $a = R$, $b = R$, a więc także $a = b$, musi być $AB \parallel CD$, albowiem proste te przecina trzecia prosta MN

tak, że kąty odpowiednie są równe.

Z tego wynika:

Proste prostopadłe do jednej i tej samej prostej są równoległe; i na odwrót:

Jeżeli z dwu równoległych prostych jest jedna prostopadła do trzeciej, to i druga musi być do niej prostopadła.

Gdy bowiem $AB \parallel CD$, a $AB \perp MN$, naówczas $a = b$ i $a = R$, zatem także $b = R$, a tem samem $CD \perp MN$.

Prosta między dwiema równoległymi do nich prostopadła podaje nam ich oddalenie (die Entfernung); tak n. p. BD (fig. 28). jest oddaleniem prostej AB od prostej CD.

§. 42. 1. Z punktu leżącego obok prostej, można wykreślić do niej tylko jedną prostopadłą.

Gdyby bowiem z danego punktu można wykreślić jeszcze drugą prostopadłą, otrzymalibyśmy dwie proste, prostopadłe do tej samej trzeciej, a więc według §. 41. do siebie równoległe, co być nie może, gdyż rzeczone dwie proste mają punkt wspólny, a więc przecinają się. Przypuszczenie, że do danej prostej można

z punktu obok niej leżącego wykreślić dwie prostopadłe, doprowadza nas do sprzeczności, t. j. do twierdzenia, sprzeciwiającego się prawdom, przedtem poznanym; przypuszczenie to jest więc błędne.

W podobny sposób można się przekonać o prawdziwości twierdzenia.

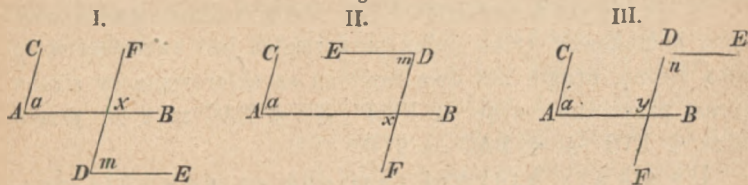
2. Z punktu na linii prostej można wykreślić do niej tylko jedną prostopadłą.

3 Kąty, mające ramiona parami równoległe albo prostopadłe.

§. 43. Niech będzie (fig. 29.) $AB \parallel DE$ i $AC \parallel DF$.

W I. są ramiona równoległe kątów α i m zwrócone w tę samą stronę; ponieważ $\alpha = x$ i $m = x$ jako odpowiednie, przeto także $\alpha = m$.

Fig. 29.



W II. są równoległe ramiona kątów α i m skierowane w strony wprost przeciwne; ponieważ $\alpha = x$ jako naprzemianległe, a $m = x$ jako odpowiednie, więc także i w tym razie $\alpha = m$.

W III. mają kąty α i n także ramiona parami równoległe, ale tylko jedna para równoległych ramion jest zwrócona w tę samą stronę, drugie zaś dwa równoległe ramiona są skierowane w strony wprost przeciwne. Ponieważ $\alpha + y = 2R$, a $n = y$, przeto także $\alpha + n = 2R$.

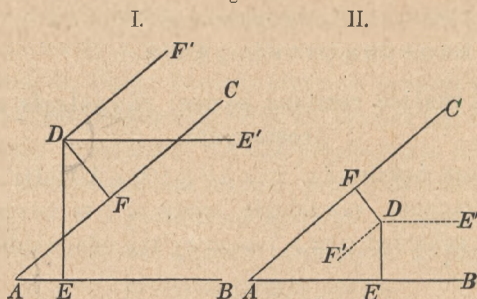
Dwa kąty, mające ramiona parami równoległe, są albo równe albo spełniające, stosownie do tego, czy obie pary ramion równoległych są skierowane w tę samą stronę, czy też tylko jedna para jest zwrócona w tę samą stronę, a druga w strony wprost przeciwne.

§. 44. Niech będzie (fig. 30.) $DE \perp AB$, a $DF \perp AC$. Obróćmy ramiona DE i DF (uważając je za stale ze sobą połączone, t. j. tak, że się ich rozchylenie nie zmienia) kąta EDF około wierz-

chołka D o 90° , by zajęły położenia DE' i DF' , to będzie $DE' \parallel AB$ a $DF' \parallel AC$.

W I. mają kąty $E'DF'$ i BAC ramiona parami równoległe i zwrócone w tę samą stronę, więc $\sphericalangle E'DF' = \sphericalangle BAC$, przeto także $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC$.

Fig. 30.



W II. są ramiona kątów $E'DF'$ i BAC także parami równoległe, jednakowoż tylko jedna para ramion jest zwrócona w tę samą stronę, drugie zaś dwa ramiona są skierowane w strony wprost przeciwne; więc $\sphericalangle E'DF' + \sphericalangle BAC = 2R$, przeto także $\sphericalangle EDF + \sphericalangle BAC = 2R$.

Dwa kąty, których ramiona są do siebie prostopadłe, są albo równe albo spełniające.

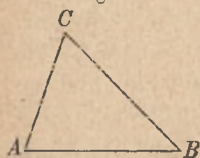
Kiedy zachodzi pierwszy związek a kiedy drugi?

V. O trójkątach.

1. Określenia.

§. 45. Figurę płaską, ograniczoną trzema odcinkami, nazywamy trójkątem (das Dreieck); owe trzy odcinki są bokami (die Seiten), ich suma obwodem, a wielkość pola nimi ograniczonego, powierzchnią (der Flächeninhalt) trójkąta. Trójkąt znaczymy znaczkiem: $\triangle$.

Fig. 31.



Trójkąt powstaje, jeżeli trzy punkty, nie leżące na jednej prostej, połączymy zapomocą prostych.

Każdy trójkąt ma trzy boki, trzy kąty i trzy wierzchołki. W trójkącie ABC (fig. 31.) są odcinki AB , BC , AC bo-

kami, A, B, C kątami, a wierzchołki tych kątów wierzchołkami trójkąta.

Każdemu bokowi dwa kąty są przyległe, a jeden jest przeciwległy; do boku AB przylegają n. p. kąty A i B, kąt zaś C jest mu przeciwległy.

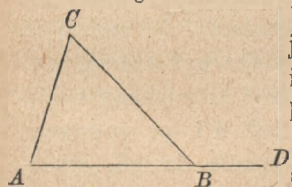
Które kąty przylegają do boku AC, a które do boku BC? Które kąty leżą naprzeciw tych boków?

Każdy kąt trójkąta jest zawarty między dwoma bokami, a trzeci bok jest mu przeciwległy; n. p. kąt A jest zawarty między AB i AC, a bok BC leży naprzeciw niego.

Miedzy którymi bokami leży kąt B, a między którymi kąt C? Które boki leżą naprzeciw kątów B i C?

§. 46. Przedłużwszy jeden bok trójkąta, otrzymamy pomiędzy tem przedłużeniem a przyległym boki trójkąta kąt, zwany zewnątrznym (der Aussenwinkel), w przeciwstawieniu do trzech kątów trójkąta, o których dotąd mówiliśmy, a które nazywamy kątami wewnętrznymi (innere Winkel).

Fig. 32.



Na fig. 32. jest kąt CBD kątem zewnętrznym trójkąta ABC; $\sphericalangle ABC$ jest jego kątem przyległym; $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ACB$ są kątami wewnętrznymi trójkąta ABC.

Przedłużcie każdy bok trójkąta w obie strony; ile kątów zewnętrznych otrzymacie? Jak wielkie są te z nich, które leżą przy tym samym wierzchołku? Wymieńcie do każdego kąta zewnętrznego przyległy mu wewnętrzny i oba nieprzyległe.

2. Boki trójkąta.

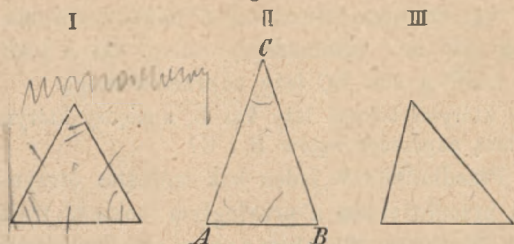
§. 47. Każdy bok trójkąta jest mniejszy od sumy dwóch innych boków.

Prawdziwość tego twierdzenia jest widoczna; bo idąc drogą wzdłuż AC i CB (fig. 31.), by z A dostać się do B, przebywamy oczywiście drogę dłuższą, niż idąc drogą prostą AB; więc $AB < AC + CB$.

Z nierówności $AB < AC + CB$ czyli $AC + CB > AB$, po odjęciu bądźto po obu stronach CB, bądź AC, otrzymamy $AC > AB - CB$ i $CB > AB - AC$, to znaczy, że każdy bok trójkąta jest większy od różnicy dwóch innych boków.

Ze względu na długość boków rozróżniamy trójaki trójkąty: równoboczne (*gleichseitige*) (fig. 33. I.), w których wszystkie trzy boki są równe; równoramienne (*gleichschenklige*) (fig. 33. II.), które mają tylko dwa równe boki, i różnoboczne (*ungleichseitige Dreiecke*) (fig. 33. III.), w których wszystkie trzy boki mają różną długość.

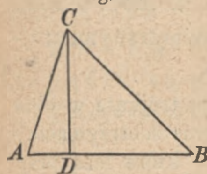
Fig. 33.



Narysujcie a) trójkąt równoboczny, b) równoramienny, c) różnoboczny (§. 23).

§. 48. Wyobraźmy sobie, żeśmy trójkąt wystawili na jednym z jego boków; bok ten nazywamy podstawą trójkąta (*die Grundlinie*), a prostą do podstawy, z przeciwległego wierzchołka wykreśloną, wysokością trójkąta. Jeżeli przyjmiemy w trójkącie ABC (fig. 34.) bok AB za podstawę, będzie linia CD, prostopadła do AB, wysokością trójkąta.

Fig. 34.



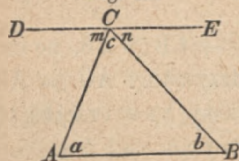
W trójkącie równoramiennym przyjmuje się zwykle bok nierówny za podstawę; boki równe trójkąta równoramiennego nazywamy ramionami trójkąta.

Odczytajcie na fig. 33. II. podstawę i ramiona trójkąta.

3. Kąty trójkąta.

§. 49. Chcąc poznać wielkość sumy kątów a , b , c jakiegobądź trójkąta ABC (fig. 35.), kreślimy przez punkt C prostą DE równoległą do AB; otrzymamy w ten sposób około wierzchołka C kąty m i n , tworzące z kątem c kąt półpełny; a że kąt m równa się kątowi a (jako naprzemianległe przy dwóch równoległych przeciętych trzecią), a z tego samego po-

Fig. 35.



wodu kąt n jest równy kątowi b , przeto suma kątów a, b, c jest równa sumie kątów m, c i n , równa się więc 180° .

W każdym trójkącie suma trzech kątów wewnętrznych równa się $2R$ czyli 180° .

§. 50. Z tego ważnego twierdzenia wynikają następujące:

a) Suma dwóch kątów w trójkącie jest zawsze mniejsza od $2R$.

Czy trójkąt może mieć dwa kąty proste, albo dwa rozwarte, albo jeden prosty, a jeden rozwarty? Ileż kątów ostrych (co najmniej) musi mieć każdy trójkąt?

b) Znając dwa kąty trójkąta, znajdziemy trzeci, odejmując sumę znanych kątów od 180° .

c) Jeżeli dwa kąty jakiegoś trójkąta równają się dwom kątom innego trójkąta, natenczas i trzeci kąt pierwszego trójkąta jest równy trzeciemu kątowi drugiego trójkąta.

d) Jeżeli w trójkącie jeden kąt jest prosty, suma obu kątów ostrych równa się 90° .

Znając więc jeden kąt ostry w takim trójkącie, można łatwo wyszukać drugi.

Ze względu na wielkość kątów rozróżniamy trójkąty: ostrokątne (spitzwinklige) (fig. 36. I.), w których wszy-

stkie trzy kąty są ostre; trójkąty prostokątne (rechtwinklige) (fig. 36. II.), w których jeden kąt jest prosty, a dwa ostre, i trójkąty rozwartokątne (stumpfwinklige Dreiecke) (fig. 36. III.), mające jeden kąt rozwarty, a dwa ostre.

W trójkącie prostokątnym nazywamy bok BC, przeciwległy

kątowi prostemu, przeciwprostokątnią (die Hypotenuse), a boki AB i AC, przyległe kątowi prostemu, przyprostokątniami (die Katheten).

Zadania. 1. Dane dwa kąty trójkąta:

a) 37° i 71° .

b) 82° i 48° ;

- c) $50^{\circ} 48'$ i $17^{\circ} 39'$;
 d) $15^{\circ} 32' 18''$ i $62^{\circ} 50' 57''$;
 e) $64^{\circ} 47' 33''$ i $77^{\circ} 18' 41''$;
 f) $108^{\circ} 5' 29''$ i $38^{\circ} 43' 31''$;

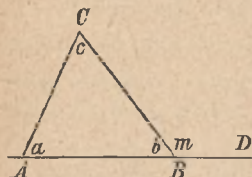
obliczyć kąt trzeci.

2. Jeden kąt ostry trójkąta prostokątnego równa się

- a) 63° ; b) 37° ; c) $27^{\circ} 15'$; d) $58^{\circ} 12' 48''$;

jak wielki jest drugi kąt ostry?

§. 51. Kąt zewnętrzny m (fig. 37.) z przyległym mu kątem wewnętrznym b tworzą kąt półpełny, zatem 180° ; tę samą sumę (t. j. 180°) otrzymamy także, jeżeli dodamy do kąta b oba pozostałe wewnętrzne kąty a i c . Kąt zewnętrzny m musi zatem być tak wielki, jak kąty a i c razem wzięte.



Kąt zewnętrzny trójkąta równa się sumie obu kątów wewnętrznych jemu nieprzyległych.

Stąd wynika, że kąt zewnętrzny jest zawsze większy od każdego z kątów wewnętrznych, jemu nieprzyległych.

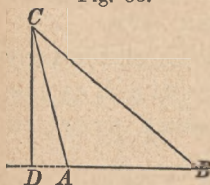
Zadania.

1. Jak wielki jest kąt zewnętrzny trójkąta, którego kąty wewnętrzne, nieprzyległe kątowi zewnętrznemu, mają $38^{\circ} 35' 28''$ i $59^{\circ} 18' 46''$?

2. Kąt zewnętrzny trójkąta ma 86° , a jeden z nieprzyległych mu kątów wewnętrznych $57^{\circ} 48'$; jak wielkie są pozostałe dwa kąty tego trójkąta?

3. W trójkącie prostokątnym ma jeden z kątów zewnętrznych a) 106° , b) $118^{\circ} 50'$, c) $141^{\circ} 37' 42''$; jak wielki jest drugi kąt zewnętrzny przy drugim końcu przeciwprostokątnej?

Fig. 38.



4. Jeżeli przy każdym wierzchołku trójkąta wykreślimy po jednym kącie zewnętrznym, jak wielka będzie suma tych kątów?

§. 52. Przyjmując w trójkącie rozwartokątnym (fig. 38.) jeden z boków przyległych kątowi rozwartemu, n. p. bok AB, za podstawę, wykreślimy z wierzchołka C prostopadłą do podstawy; prostopadła ta nie padnie wewnątrz trójkąta, bo w takim razie otrzymalibyśmy trójkąt mający jeden kąt prosty,

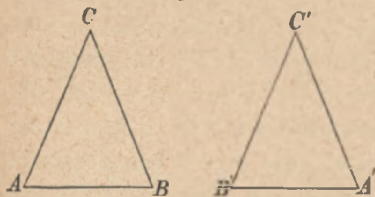
a jeden rozwarty, co być nie może; wysokość CD musi więc leżeć poza polem trójkąta i przecinać podstawę na jej przedłużeniu.

Wykreślcie trójkąt ostrokątny, trójkąt rozwartokątny i prostokątny i narysujcie w nich wszelkie możliwe wysokości. Jakie położenie mają wysokości w każdym z tych trójkątów?

4. Związek między bokami a kątami trójkąta.

§. 53. 1. Niech będzie w trójkącie ABC (fig. 39.) bok $AC = BC$.

Fig. 39.



A na B , a bok $B'A'$ na AB , zatem kąt $B' = A$; a że $B' = B$, więc także $B = A$.

Z tego wynika:

Naprzeciw równych boków trójkąta leżą równe kąty.

2. Jeżeli na odwrót w trójkącie ABC kąt $B = A$, to można w podobny sposób, nakrywając boki $B'A'$ bok AB , wykazać, że bok $AC = BC$, tj.:

Naprzeciw równych kątów trójkąta leżą równe boki.

Z pierwszego twierdzenia wynika że:

a) W trójkącie równoramiennym kąty leżące przy podstawie, są równe.

b) W trójkącie równobocznym wszystkie trzy kąty są równe.

Zadania.

1. Ile stopni ma każdy kąt trójkąta równobocznego?

2. Jak wielkie są kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego, jeżeli kąt u wierzchołka jest kątem prostym?

3. Kąt u wierzchołka trójkąta równoramiennego równa się a) $23^\circ 35'$ b) $65^\circ 10' 36''$, c) $118^\circ 48' 28''$; jak wielkie są kąty przy podstawie leżące?

4. Jak wielki jest kąt u wierzchołka w trójkącie równo-

ramiennym, jeżeli kąt przy podstawie równa się a) $15^{\circ} 12'$, b) $48^{\circ} 5' 49''$, c) $73^{\circ} 41' 17''$?

5. Kąt zewnętrzny trójkąta równoramiennego, leżący przy wierzchołku, równa się a) $82^{\circ} 13' 55''$, b) $113^{\circ} 51' 10''$, c) $136^{\circ} 17' 32''$; jak wielkie są kąty wewnętrzne?

6. Kąt zewnętrzny przy podstawie trójkąta równoramiennego równa się a) $120^{\circ} 53' 37''$, b) $144^{\circ} 31' 29''$, c) $151^{\circ} 47' 23''$; jak wielkie są kąty wewnętrzne?

§. 54. Jeżeli (fig. 40.) $AB = AD$, to trójkąt ABD jest równoramienny, więc kąty m i n , leżące przy jego podstawie, są sobie równe. Przedłużwszy AD do punktu C i wykreśliwszy BC, otrzymamy kąt ABC większy od m , kąt zaś ACB o tyleż mniejszy od kąta n , gdyż trzeci kąt A trójkąta pozostał niezmienny. W trójkącie ABC jest więc bok $AC < AB$, a zarazem kąt $ABC < ACB$. Z tego wynika:

1. W każdym trójkącie leży naprzeciw większego boku kąt większy; i na odwrót:

2. W każdym trójkącie leży naprzeciw większego kąta bok większy.

W trójkącie prostokątnym największym bokiem jest przeciwprostokątnia, a w trójkącie rozwartokątnym bok, który leży naprzeciw kąta rozwartego.

§. 55. Wykreśliwszy z punktu A do prostej BC (fig. 41.) prostopadłą AD i kilka pochyłych, jak AE, AF i AG, otrzymamy trójkąty prostokątne ADE, ADF i ADG, w których AD jest przyprostokątnią, AE, AF i AG są przeciwprostokątniami. Ponieważ przeciwprostokątnia jest większa od przyprostokątnej,

przeto każda z pochyłych AE, AF, AG jest dłuższa od prostopadłej AD.

Prostopadła jest najkrótsza ze wszystkich prostych, jakie z danego punktu do prostej wykreślić można.

Z tego powodu mierzymy oddalenie punktu od prostej prostopadłą, wykreśloną z owego punktu do prostej.

Fig. 40.

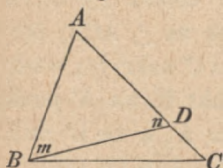
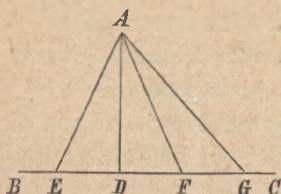
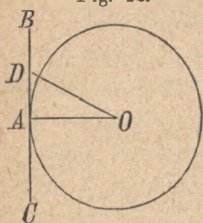


Fig. 41.



§. 56. Gdy do promienia OA (fig. 42.) wykreślimy w jego końcowym punkcie A prostopadłą BC i jakkolwiek jej punkt D

Fig. 42.



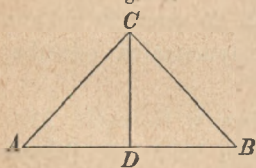
połączymy ze środkiem koła, będzie prosta łącząca DO , jako ukośna, dłuższa od prostopadłej, a więc od promienia AO . Punkt D leży więc poza kołem (§. 20.). Prosta BC ma zatem z linią kołową tylko punkt A wspólny, wszystkie zaś inne jej punkty leżą poza kołem.

Prostopadła do promienia, wykreślona w jego punkcie końcowym, jest styczną koła.

5. Położenie symetryczne.

§. 57. Dwa punkty leżą symetrycznie względem prostej, jeżeli odcinek, który je łączy, jest do tej prostej prostopadły i przez nią przepołowiony. Prosta tę nazywamy w takim

Fig. 43.



razie osią symetrii albo symetralną (Symmetrieachse albo Symmetrale). Jeżeli (fig. 43.) CD jest prostopadłe do AB i $AD = BD$, to punkty A i B leżą symetrycznie względem prostej CD , która jest ich symetralną.

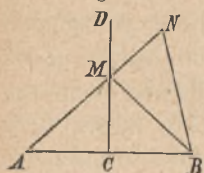
Dwa utwory płaskie leżą symetrycznie względem prostej, jeżeli każdemu punktowi jednego utworu odpowiada symetrycznie leżący punkt drugiego utworu. Dwa symetrycznie leżące utwory, jak n. p. ADC i BDC (fig. 43.), nakryją się, jeżeli jeden z nich obrócimy odpowiednio około symetralnej CD .

Utwór płaski, jak np. $\triangle ABC$, nazywa się symetrycznym, jeżeli zapomocą prostej (symetralnej) daje się podzielić na dwie części, leżące symetrycznie.

§. 58. Każdy odcinek prostej jest utworem symetrycznym. Symetralną odcinka jest prostopadła do niego, wykreślona w jego środku.

Niech będzie CD (fig. 44.) symetralną odcinka AB , więc $AC = BC$ i $CD \perp AB$.

Fig. 44



Połączmy dowolny punkt tej symetralnej, np. punkt M z A i B , i obróćmy trójkąt prostokątny ACM około symetralnej CM , to nakryje trójkąt BCM , zatem $AM = BM$, t. j. punkt M jest równo odległy od punktów A i B . Każdy punkt, nie leżący na symetralnej, jak np. N , ma od A i B nierówne odległości AN i BN ; bo kąt ABN jest większy od ABM , a więc także większy od kąta BAN , który się równa kątowi ABM ; zatem w $\triangle ABN$ także bok $AN > BN$. Z tego wynika:

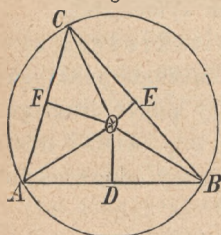
Każdy punkt symetralnej odcinka ma od obu końców tego odcinka równe odległości, każdy zaś inny punkt nierówne, i naodwrot:

Jeżeli punkt jakiś jest równo odległy od obu końców odcinka, w takim razie punkt ten leży na symetralnej tego odcinka; w przeciwnym razie leży poza symetralną.

Twierdzenie to można także tak wysłowić:

Miejscem geometrycznem (§. 23. 2) punktów, równo odległych od dwóch danych punktów, jest symetralna odcinka, łączącego te dwa punkty.

Fig. 45.



§. 59. Niech będzie w trójkącie ABC (fig. 45.) DO symetralną boku AB , FO zaś symetralną boku AC . Punkt przecięcia O obu tych symetralnych jest równo odległy od punktów A i B (bo leży na symetralnej odcinka AB) i od A i C (bo leży na symetralnej odcinka AC), zatem jest także równo oddalony od punktów B i C , i z tego powodu leży także na symetralnej boku BC .

Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest równo odalony od trzech wierzchołków trójkąta.

Koło zakreślone promieniem OA z punktu O , w którym się przecinają symetralne boków trójkąta, przechodzi przez wszystkie trzy wierzchołki trójkąta. Koło takie nazywamy kołem opisanem na trójkącie (ein umgeschriebener Kreis).

Na każdym trójkącie można opisać koło.

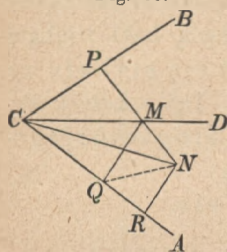
Wykreślcie trójkąt, w którym boki, 28 mm i 40 mm długie, tworzą kąt 60° , i opiszcie na nim koło.

§. 60. Każdy kąt jest utworem symetrycznym. Symetralną kąta jest prosta, która go połowi, czyli tak zwana dwusieczna kąta.

Niech będzie CD (fig. 46.) symetralną kąta ACB, a więc kąt $ACD = BCD$.

Jeżeli z dowolnie obranego punktu symetralnej, np. z punktu M, wykreślimy prostopadłe do ramion kąta ACB, otrzymamy trójkąty prostokątne MPC i MQC.

Fig. 46.



Obróćmy $\triangle MPC$ około symetralnej CD, a nakryje on $\triangle MQC$; zatem $MP = MQ$, tj. punkt M jest równo odległy od ramion kąta ACB. Każdy zaś punkt, nie leżący na symetralnej, np. punkt N, ma od ramion kąta ACB nierówne odległości NP i NR. Albowiem wykreśliwszy NQ, otrzymamy $NP = NM + MP = NM + MQ > NQ$; ale $NQ > NR$ (§. 55.), zatem tem bardziej $NP > NR$.

Z tego widzimy, że:

Każdy punkt symetralnej kąta jest równo oddalony od obu ramion; każdy zaś inny punkt, leżący na polu kąta, jest od ramion tego kąta nierówno oddalony; i naodwrot:

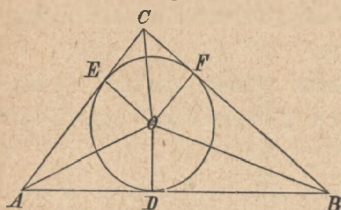
Jeżeli oddalenia jakiegoś punktu od ramion kąta są równe, natenczas punkt ten leży na symetralnej kąta; leży zaś poza symetralną, gdy te oddalenia są nierówne.

Twierdzenie to można także tak wysłowić:

Miejszem geometrycznem punktów, leżących na polu danego kąta i od jego ramion równo odległych, jest linia połowiąca ów kąt czyli jego dwusieczna (Halbierungslinie).

§. 61. Niech będzie w trójkącie ABC (fig. 47.) AO symetralną kąta BAC, a CO symetralną kąta ACB. Punkt O, w którym

Fig. 47.



się obie te symetralne przecinają, jest równo oddalony od AB i AC (ponieważ leży na symetralnej kąta BAC) i od ramion AC i BC (bo leży na symetralnej kąta ACB), zatem jest także równo odległy od ramion AB i BC i z tego powodu leży także na symetralnej kąta ABC.

Symetralne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest równo oddalony od wszystkich trzech boków tego trójkąta.

Jeżeli z punktu O, w którym przecinają się symetralne kątów trójkąta, zakreslimy koło promieniem OD, będą boki trójkąta stycznymi tego koła (§. 56.), a koło będzie się stykało ze wszystkimi trzema bokami trójkąta. Takie koło nazywamy kołem wpisanem w trójkąt (ein eingeschriebener Kreis).

W każdy trójkąt można wpisać koło.

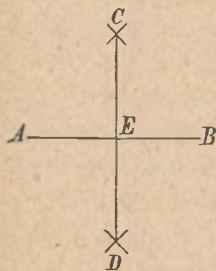
Zadanie.

Wpiszcie koło w trójkąt, którego bok równa się 42 mm, a kąty temu bokowi przyległe mają 60° i 45° .

6. Zadania konstrukcyjne.

§. 62. 1. Wykreślić symetralną danego odcinka AB (fig. 48.).

Fig. 48



Wyszukajmy (według §. 23. 3.) takie dwa punkty C i D, żeby każdy z nich był równo odległy od punktów końcowych A i B danego odcinka, to prosta CD będzie symetralną odcinka AB (§. 58.).

Rozwiązanie tego zadania jest więc następujące: Ażeby wykreślić symetralną odcinka, zakresła się z jego końców tym samym promieniem u góry i u dołu łuki kołowe, które przecinają się w dwóch punktach, i te punkty łączy się zapomocą prostej.

Ta sama konstrukcja rozwiązuje także zadania:

Wykreślić symetralną dwóch danych punktów.
Dany odcinek przepołowić.

2. Wykreście kilka odcinków i podzielcie każdy z nich najpierw na oko, a potem geometrycznie na dwie równe części.

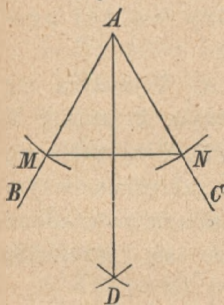
3. Podzielcie odcinek na 4, 8 równych części.

4. Połączcie środki boków trójkąta z przeciwległymi wierzchołkami czyli wykreście tak zwane dośrodkowe (Mittellinien) trójkąta. W ilu punktach przecinają się te trzy dośrodkowe?

5. Wykreście dowolny trójkąt i opiszcie na nim koło (§. 59.).

§. 63. 1. Wykreślić symetralną danego kąta BAC (fig. 49.).

Fig. 49.



Wyznacza się na ramionach dwa punkty M i N, któreby od wierzchołka A były równo odległe, a następnie szuka się na polu kąta takiego punktu D, któryby od M i N był równo odległy. Prosta AD jest wtedy symetralną odcinka MN, a także symetralną kąta BAC, jak się o tem przez nakrycie przekonać można.

Konstrukcyja: Ażeby otrzymać symetralną kąta, zakreśla się z wierzchołka łuk, który przecina oba ramiona; z punktów przecięcia zakreśla się tym samym promieniem dwa łuki, które się przecinają w jakimś punkcie, i ten punkt łączy się z wierzchołkiem danego kąta.

W ten sam sposób rozwiązuje się zadanie:

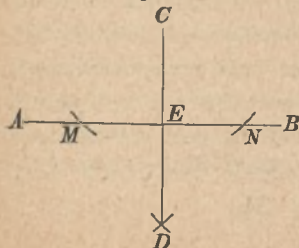
Dany kąt przepołowić.

2. Podzielcie dany kąt na 4, 8 równych części.

3. Wykreście dowolny trójkąt i wpiszcie wewnątrz koło (§. 61.).

§. 64. 1. do danej prostej AB (fig. 50.) wykreślić prostopadłą z punktu C, który obok niej leży.

Fig. 50.



Szuka się na danej prostej dwóch punktów M i N, któreby od danego punktu C były równo odległe, i wykreśla się symetralną CD punktów M i N. Symetralna ta jest prostopadłą do AB.

Mamy zatem następujące rozwiązanie:

Ażeby z punktu leżącego obok

§. 66. Geometryczne wykreślenie kątów danej wielkości.

1. Wykreślić kąt *a*) 60° , *b*) 30° .

a) Kreślimy trójkąt równoboczny.

b) Wykreślamy kąt 60° i dzielimy go na dwie równe części.

2. Wykreślić kąt *a*) 120° , *b*) 150° .

a) Wykreślamy kąt 60° , a potem do niego kąt przyległy.

b) Wykreślamy kąt przyległy do kąta 30° .

3. Wykreślić kąt *a*) 15° , *b*) 165° .

4. Wykreślić kąt *a*) 90° , *b*) 45° .

a) Kreślimy dwie proste prostopadłe do siebie (według §. 64 albo §. 65.), lub też dodajemy do 60° kąt 30° , jak na fig. 52.

b) Połowimy kąt 90° .

5. Wykreślić kąt 75° .

Dodajemy do 45° kąt 30° .

6. Narysować kąt *a*) 105° , *b*) 135° .

Wykreślamy kąty przyległe do *a*) 75° , *b*) 45° .

7. Podzielić kąt prosty na 3 równe części.

Na jednym ramieniu kąta prostego wykreślamy trójkąt równoboczny, n. p. ADE (fig. 52.), a następnie połowimy kąt DAE.

8. Kąt prosty podzielić na 6, 8 równych części.

9. Kąt półpełny podzielić na 3, 4, 6, 8 równych części.

§. 67. Przez punkt C (fig. 53.), leżący obok danej prostej AB, wykreślić do niej równoległą.

Fig. 53.

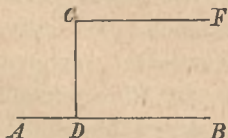
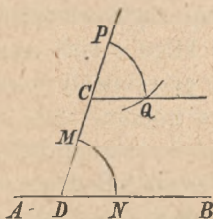


Fig. 54.



Poznamy tu dwa rozwiązania tego zadania:

a) Wykreśliwszy z danego punktu C prostopadłą CD do prostej AB, kreślimy w punkcie C prostą CF prostopadłą do CD; ponieważ CF i AB są prostopadłe do tej samej prostej CD, przeto są do siebie równoległe (§. 41.).

b) Wykreśliwszy przez punkt dany C (fig. 54.) dowolną prostą, przecinającą daną prostą w punkcie D, rysujemy przy punkcie C kąt PCQ równy kątowi CDB; z powodu równości odpowiednich kątów PCQ i CDB, proste CQ i AB muszą być równoległe.

VI. O przystawianiu trójkątów.

1. Wykreślanie trójkątów i ich przystawianie.

§. 68. Dwa trójkąty są przystające (congruent), jeżeli mają jednakową wielkość i kształt jednakowy, jeżeli więc dokładnie się nakrywają, gdy jeden na drugim odpowiednio położymy. Znakiem przystawiania jest: $\cong$

Aby się dwa trójkąty zupełnie nakryły, muszą wszystkie ich części składowe, t. j. trzy boki i trzy kąty, być odpowiednio równe. Zatem:

W przystających trójkątach leżą naprzeciw równych boków równe kąty, a naprzeciw równych kątów równe boki.

Ponieważ wielkość niektórych boków i kątów trójkąta wyznacza także wielkość innych części składowych tego trójkąta, np. wielkość dwóch kątów wyznacza kąt trzeci, przeto o przystawianiu dwóch trójkątów wnioskować możemy już z równości mniej niż sześciu części składowych trójkątów.

Cheąc się dowiedzieć, ile części składowych dwóch trójkątów i które z nich muszą być odpowiednio równe, ażeby owe trójkąty przystawały do siebie, potrzeba zbadać, ile i jakie części składowe trójkąta znać musimy, by narysować trójkąt pewnej wielkości i pewnego kształtu, ponieważ wszystkie trójkąty, mające te części składowe wspólne, muszą przystawać do siebie.

1. Jeżeli dana jest tylko jedna część składowa trójkąta, mianowicie jeden tylko bok lub jeden kąt, można nakreślić bardzo wiele różnych trójkątów, mających ów bok lub kąt wspólny. Jedna część składowa nie wyznacza zatem ani wielkości ani kształtu trójkąta.

2. Także dwie części składowe (t. j. dwa kąty, albo jeden bok i kąt przyległy temu bokowi, albo bok i kąt przeciwległy,

albo naryszenie dwa boki) nie wyznaczają dokładnie trójkąta, można bowiem wykreślić niezmiernie wiele trójkątów, mających te dwie części składowe równe, a inne nierówne. Dwie części składowe nie wyznaczają przeto dokładnie wielkości i kształtu trójkąta.

3. Gdy mamy dane trzy części składowe trójkąta, mogą to być:

- a) trzy kąty;
- b) bok i dwa kąty (oba przyległe danemu bokowi, albo jeden przyległy, a drugi przeciwległy;
- c) dwa boki i kąt między nimi zawarty;
- d) dwa boki i kąt jednemu z nich przeciwległy;
- e) trzy boki.

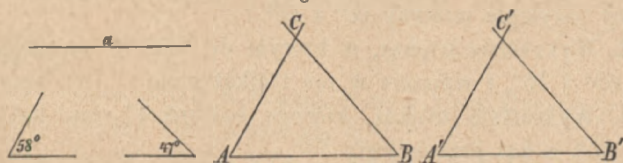
Ponieważ z wielkości dwóch kątów trójkąta łatwo wyszukać jego kąt trzeci, a dwa kąty nie wyznaczają dokładnie trójkąta, przeto także i trzy kąty trójkąta nie podają jego wielkości. Znajomość samych tylko kątów nie wystarcza do wykreślenia trójkąta. Pozostają nam zatem tylko cztery ostatnie przypadki.

§. 69. Wykreślić trójkąt, jeżeli znamy jeden bok i dwa kąty.

Dane dwa kąty albo oba są przyległe danemu bokowi, albo jeden jest przyległy, a drugi przeciwległy.

a) Niech będzie dany bok a (fig. 55.), dane zaś kąty 58° i 47° niech będą temu bokowi przyległe.

Fig. 55.



Kreśląc $AB = a$, mamy już wyznaczone dwa wierzchołki trójkąta, t. j. A i B. Gdy następnie wykreślimy przy A kąt 58° , a przy B kąt 47° , proste AC i BC, które z bokiem AB tworzą te kąty, wyznaczają położenie drugiego i trzeciego boku szukanego trójkąta; trzeci wierzchołek C musi przeto leżeć w punkcie, w którym się te proste przecinają. Z trzech więc danych części składowych otrzymaliśmy trójkąt ABC, który ma oznaczoną wielkość i kształt dokładnie oznaczony.

Jeżeli z tych samych danych trzech części składowych wykreślimy drugi trójkąt $A'B'C'$, to trójkąt ten musi mieć z trójkątem ABC równą wielkość i kształt jednakowy; gdy zatem jeden z tych trójkątów tak położymy na drugim, by ich równe części składowe przypadły na siebie, oba trójkąty dokładnie się nakryją; są więc przystające.

Z tego wynika:

1. Jeden bok i dwa przyległe mu kąty dokładnie wyznaczają trójkąt.

2. (I. przypadek przystawania). Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają jeden bok i dwa kąty, przyległe temu bokowi, odpowiednio równe.

b) Jeżeli mamy dany bok trójkąta, kąt temu bokowi przyległy i kąt przeciwległy, oznaczmy z łatwością kąt trzeci, a znając bok i dwa kąty przyległe, wykreślimy trójkąt jak w przypadku a). Dlatego możemy ogólnie powiedzieć: Jeden bok i dwa kąty dokładnie wyznaczają trójkąt.

Z powodu równości kątów prostych możemy twierdzić o trójkątach prostokątnych:

Dwa trójkąty prostokątne przystają do siebie, jeżeli mają 1. przeciwprostokątnię i jeden kąt ostry, lub 2. przyprostokątnię i jeden kąt ostry odpowiednio równe.

Zadania.

1. Wykreślcie trójkąt, którego bok równałby się $3\text{ cm } 9\text{ mm}$, a kąty przyległe miałyby 60° i 45° .

2. Wykreślcie trójkąt, w którym do boku 35 mm przylegają kąty 60° i 75° , i wpiszcie w ten trójkąt koło.

3. Wykreślcie trójkąt, którego bok ma 47 mm , kąt przyległy 45° , a kąt przeciwległy 75° .

4. Wykreślcie trójkąt prostokątny, jeżeli są dane:

a) przyprostokątnia (45 mm) i przyległy kąt (30°);

b) przyprostokątnia (3 cm.) i kąt przeciwległy (75°);

c) przeciwprostokątnia (4 cm) i kąt przyległy (45°).

5. Narysujcie trójkąt równoboczny, jeżeli dana jest jego wysokość (23 mm).

6. Wykreślcie trójkąt równoramienny, jeżeli są dane:

a) podstawa (38 mm) i kąt przyległy (75°).

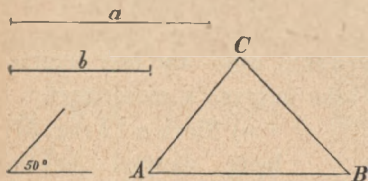
b) podstawa (3 *cm*) i kąt przeciwległy (150°);

c) ramię (26 *mm*) i kąt przy podstawie (30°).

§. 70. Wykreślić trójkąt, jeżeli dane są dwa boki i kąt między nimi zawarty.

Niech *a* i *b* (fig. 56.) będą danymi bokami, a kąt między nimi zawarty niech ma 50° .

Fig. 56.



Aby z tych trzech części składowych narysować trójkąt, wykreślamy najpierw kąt $A = 50^\circ$, a na ramionach tego kąta odcinamy dane boki *a* i *b*; wyznacza to położenie wierzchołków B i C, oraz długość

i położenie trzeciego boku. Trójkąt ABC jest więc żądanym trójkątem.

Jeżelibyśmy z tych samych trzech części składowych narysowali drugi trójkąt, musiałby ten drugi trójkąt równać się trójkątowi ABC tak co do wielkości, jak i co do kształtu.

Z tego wynika:

1. Dwa boki i kąt między nimi zawarty wyznaczają dokładnie trójkąt.

2. (II. przypadek przystawania). Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają dwa boki i kąt między tymi bokami zawarty, odpowiednio równe.

Dwa trójkąty prostokątne są zatem przystające, jeżeli mają obie przyprostokątne odpowiednio równe.

Zadania.

1. Wykreście trójkąt o bokach 2 *cm* i 3 *cm* długich, jeżeli kąt zawarty między nimi równa się 60° .

2. Dwa odcinki, 27 *mm* i 32 *mm* długie, mają być bokami trójkąta; narysujecie trójkąt, jeżeli kąt leżący między tymi bokami ma a) 45° , b) 75° , c) 90° .

3. Wykreście trójkąt, w którym boki, 48 *mm* i 30 *mm* długie, tworzą kąt 75° , i opiszcie na tym trójkącie koło.

4. Wykreście trójkąt równoramienny, którego ramię równa się 38 *mm*, a kąt u wierzchołka ma 150° .

5. Narysujcie trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne są $4\text{ cm } 2\text{ mm}$ i $3\text{ cm } 6\text{ mm}$ długie.

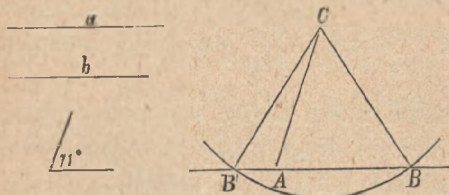
6. Wykreślcie trójkąt prostokątny równoramienny, którego przyprostokątnia równa się 3 cm .

7. Wykreślcie trójkąt równoramienny, jeżeli dana jest jego podstawa (32 mm) i wysokość (22 mm).

§. 71. Wykreślić trójkąt, jeżeli dane są dwa boki i kąt jednemu z nich przeciwległy.

Zachodzić tu mogą dwa przypadki: albo kąt leży naprzeciw większego z danych boków, albo naprzeciw mniejszego.

Fig. 57.



a) Niech a i b (fig. 57). będą danymi bokami i niech będzie $a > b$; kąt przeciwległy dłuższemu bokowi niech się równa 71° .

Wykreśliwszy kąt $A = 71^\circ$ i odmierzywszy

na jednym jego ramieniu $AC = b$, mamy już wyznaczone dwa wierzchołki szukanego trójkąta, t. j. A i C.

Trzeci wierzchołek B musi leżeć na drugim ramieniu AB, gdy jednak od wierzchołka C ma być oddalony o długość a , leży więc także na linii kołowej, zakreślonej z C promieniem a ; czyniąc zaś zadość obu warunkom, musi być punktem przecięcia się tej linii kołowej z prostą AB. Linia kołowa przecina prostą AB w punktach B i B', które połączone z C dają dwa trójkąty ABC i AB'C. Z tych trójkątów tylko pierwszy tj. ABC odpowiada warunkom zadania, gdyż drugi trójkąt AB'C ma wprawdzie także dane dwa boki, ale nie ma danego kąta, lecz kąt jemu przyległy.

Dane trzy części składowe wyznaczają więc trójkąt a gdy z nich narysujemy inny trójkąt, będzie miał tę samą wielkość i ten sam kształt, co trójkąt ABC.

1. Dwa boki i kąt większemu z nich przeciwległy wyznaczają dokładnie trójkąt.

2. (III. przypadek przystawania). Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają dwa boki i kąt, większemu bokowi przeciwległy, odpowiednio równe.

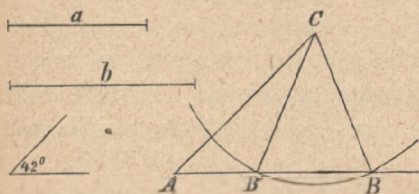
Ponieważ w trójkącie prostokątnym przeciwprostokątnia jest najdłuższym bokiem, a kąt jej przeciwległy, jako prosty, jest zawsze znany, przeto:

Dwa trójkąty prostokątne przystają do siebie, jeżeli mają przeciwprostokątnie i jedną przyprostokątnię odpowiednio równe.

b) Zastanówmy się teraz nad drugim przypadkiem, jaki zachodzić może w zadaniu, podanem w §. 71.

Niech będą a i b (fig. 58.) danymi bokami, ale niech będzie $a < b$, a kąt przeciwległy mniejszemu bokowi niech się równa 42° .

Fig. 58.



Postępując tak, jak pod a), otrzymamy dwa trójkąty ABC i $AB'C$; oba te trójkąty różnią się wielkością i kształtem, chociaż oba mają dwa dane boki i kąt dany. Dwa boki i kąt, mniejszemu z nich przeciwległy, nie wyzna-

czają zatem dokładnie trójkąta; nie można też z równości tych części składowych wnioskować o przystawaniu trójkątów.

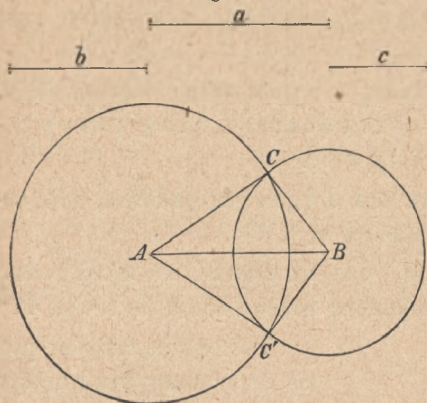
Zadania.

1. Wykreście trójkąt, jeżeli jeden jego bok równa się 2 cm , drugi $3\text{ cm } 5\text{ mm}$, a kąt drugiemu bokowi przeciwległy ma 75° .
2. Wykreście trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątnia jest 5 cm , a przyprostokątnia 3 cm długa.
3. Narysujcie trójkąt równoramienny, jeżeli dane jest jego ramię (38 mm) i wysokość (29 mm).

§. 72. Wykreślić trójkąt, jeżeli dane są wszystkie trzy boki.

Niech a , b , c (fig. 59.) będą bokami trójkąta. Wykreśliwszy $AB = a$, mamy dwa wierzchołki trójkąta, t. j. A i B wyznaczone. Ponieważ drugi bok trójkąta ma być równy odcinkowi b , przeto miejscem geometrycznym trzeciego wierzchołka jest linia kołowa, zakreślona z punktu A promieniem b . Miejscem geometrycznym tegoż wierzchołka jest także linia kołowa, zakreślona z punktu B promieniem c , ponieważ trzeci bok ma być tak długi, jak dany

Fig. 59.



odcinek c . Trzeci wierzchołek musi zatem leżeć w przecięciu się obu owych linii kołowych; a że obie linie kołowe przecinają się w dwóch punktach, mianowicie w C i C' , przeto mamy dwa trójkąty ABC i ABC' , odpowiadające warunkom zadania. Ale oba te trójkąty mają tę samą wielkość i ten sam kształt i w zupełności się nakryją, jeżeli jeden

z nich, np. ABC' obrócimy około boku AB i położymy na drugim.

Każdy inny trójkąt, narysowany z tych samych trzech części składowych, będzie miał tę samą wielkość i ten sam kształt, co trójkąt ABC .

Z tego wynika, że:

1. Trzy boki dokładnie wyznaczają trójkąt.
2. (IV. przypadek przystawania). Dwa trójkąty przystają do siebie, jeżeli mają wszystkie trzy boki odpowiednio równe.

Zadania.

1. Wykreście trójkąt o bokach, równających się $a)$ 28 mm, 30 mm i 41 mm; $b)$ 4 cm, 3 cm 6 mm i 3 cm 1 mm.
2. Wykreście trójkąt o bokach równych 38 mm, 31 mm i 27 mm a następnie $a)$ opiszcie na nim koło, $b)$ wpiszcie w niego koło.
3. Wykreście trójkąt równoramienny, którego podstawa ma 34 mm, a ramię 29 mm.
4. Wykreście trójkąt równoboczny o boku równym 2 cm 8 mm.

§. 73. Wykreślić trójkąt, przystający do danego trójkąta.

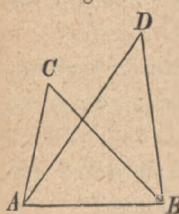
Wybierając z danego trójkąta trzy części składowe, które trójkąt dokładnie wyznaczają, można zadanie to rozwiązać czworakim sposobem; najprostsze jest jednak wykreślenie zapomocą trzech boków. Odmierzwszy w tym celu na linii prostej jeden bok danego trójkąta, z końców tak otrzymanego odcinka zakreślamy łuki

promieniami, równymi dwom innym bokom danego trójkąta. Punkt przecięcia się łuków jest trzecim wierzchołkiem szukanego trójkąta.

Wykreście do kilku różnych trójkątów trójkąty przystające.

§. 74. Jeżeli rozchylimy ramiona kąta ABC (fig. 60.), nie zmieniając ich długości, to przez to nie tylko kąt się powiększy, lecz także punkty końcowe ramion bardziej się oddalą. Kreśląc zatem AC i AD , otrzymamy dwa trójkąty ABC i ABD , mające dwa boki odpowiednio równe, mianowicie $AB = AB$ i $BC = BD$; trzeci zaś bok AD w trójkącie ABD jest tem większy od trzeciego boku AC w trójkącie ABC , im większy jest kąt ABD (leżący naprzeciw boku AD w trójkącie ABD), od kąta ABC (leżącego naprzeciw boku AC w trójkącie ABC).

Fig. 60.



Z tego wynika:

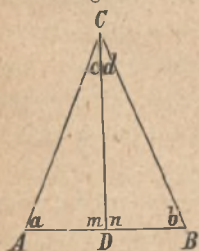
1. W dwóch trójkątach, mających dwa boki odpowiednio równe, a kąty między tymi bokami zawarte nierówne, leży naprzeciw większego kąta także bok większy.

2. W dwóch trójkątach, mających dwa boki odpowiednio równe, a trzecie boki nierówne, leży naprzeciw większego boku także kąt większy.

2. Trójkąt równoramienny.

§. 75. 1. Niech będzie (fig. 61.) $AC = BC$, a więc niech trójkąt ABC będzie równoramienny.

Fig. 61.



Przepołowmy podstawę tego trójkąta, a więc niech $AD = BD$, i połączmy środek podstawy z wierzchołkiem C , to $\triangle ABC \cong BDC$ (IV. przypadek przystawiania), zatem kąt $m = n$, t. j. $CD \perp AB$, i $c = d$. Z tego wynika:

Prosta, łącząca wierzchołek trójkąta równoramiennego ze środkiem jego podstawy, jest prostopadłą do podstawy i połowi kąt u wierzchołka.

2. Jeżeli $AC = BC$ i $CD \perp AB$, więc $m = n$, to według III. przypadku przystawania $\triangle ADC \cong \triangle BDC$, zatem także $AD = BD$ i kąt $c = d$; t. j.:

Prostopadła, wykreślona z wierzchołka trójkąta równoramiennego na jego podstawę, połówi podstawę i kąt u wierzchołka.

3. Jeżeli $AC = BC$ i kąt $c = d$, to według II. przypadku przystawania $\triangle ADC \cong \triangle BDC$, zatem także $AD = BD$ i kąt $m = n$, więc $CD \perp AB$. Z tego wynika:

Prosta, połowiąca w trójkącie równoramiennym kąt u wierzchołka, połówi także podstawę i jest do niej prostopadła.

Poprzedzające trzy twierdzenia można zebrać w jedno następujące:

W trójkącie równoramiennym symetralna podstawy, symetralna kąta u wierzchołka i wysokość tworzą jedną prostą.

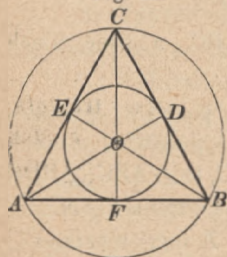
Z powyższych twierdzeń wynika także:

Każdy trójkąt równoramienny jest utworem symetrycznym; jego osią symetrii jest wysokość.

3. Trójkąt równoboczny.

§. 76. Niech będzie ABC (fig. 62.) trójkątem równobocznym, a AD , BE i CF niech będą jego wysokościami.

Fig. 62.



Z twierdzeń o położeniu symetrycznem i z przystawania trójkątów wynika:

1. W trójkącie równobocznym jest każda wysokość symetralną boku i symetralną kąta.

2. W trójkącie równobocznym wszystkie trzy symetralne boków i wszystkie trzy symetralne kątów przechodzą przez ten sam punkt, który jest środkiem koła

wpisanego i opisanego na tym trójkącie.

3. Każdy trójkąt równoboczny jest utworem symetrycznym; symetralną jego jest każda jego wysokość.

4. Niech będzie AFC trójkątem prostokątnym, w którym kąt

$ACF = 30^\circ$. Obróciwszy AFC około przyprostokątnej CF , otrzymamy drugi trójkąt BFC , który przystaje do trójkąta AFC . W takim razie ABC jest trójkątem, w którym każdy kąt $= 60^\circ$, a więc jest trójkątem równobocznym, zatem $AC = AB$; a że $AB = 2 AF$, przeto także $AC = 2 AF$. Z tego wynika:

Jeżeli w trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych ma 30° , to jego przeciwprostokątna jest dwa razy większa od krótszej przyprostokątnej.

5. Ponieważ w trójkącie prostokątnym AFO kąt $FAO = 30^\circ$, przeto według poprzedzającego twierdzenia $OA = 2 OF$; a że $OA = OC$, przeto także $OC = 2 OF$, tj. jeżeli podzielimy wysokość CF na trzy równe części, to OF ma jedną taką część, a OC dwie. Z tego wynika:

Promień koła, wpisanego w trójkąt równoboczny, równa się trzeciej części, a promień koła, opisanego na tym trójkącie, dwóm trzecim częściom jego wysokości.

VII. O szczególnych własnościach koła.

(Tu powtórzą uczniowie §§. 20., 21., i 22.).

1. Cięciwy i łuki.

§. 77. Połączmy końce równych cięciw AB i CD (fig. 63) ze środkiem koła, a otrzymamy trójkąty przystające ABO i CDO (IV.), w których także wysokości OG i OH , wykreślone do równych podstaw, muszą być równe; ale wysokości te oznaczają odległości równych cięciw AB i CD od środka koła, zatem:

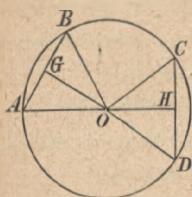


Fig. 63.

a) Równe cięciwy są równo odległe od środka koła.

b) Cięciwy, równo odległe od środka koła są sobie równe.

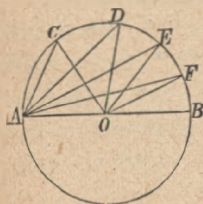


Fig. 64.

§. 78. Jeżeli w półkolu ADB (fig. 64.) od nieruchomego promienia OA odchylać będziemy drugi promień tak, że zajmie położenia OC , OD , OE , . . . , to punkty końcowe obu promieni będą tem więcej od siebie odległe, im większy będzie łuk; z cięciw AC , AD , AE , . . . jest zatem każda następująca

większa od poprzedzającej. Zarazem widzimy, że cięciwy tem więcej zbliżają się do środka koła, im bardziej się powiększają. Gdy nareszcie drugi promień zajmie położenie OB, wtedy cięciwa, przechodząc przez środek koła, staje się średnicą i ma możliwie największą długość. Widzimy więc, że

a) Do większego łuku należy także większa cięciwa.

b) Nierówne cięciwy są nierówno oddalone od środka koła, a mianowicie dłuższa leży bliżej środka.

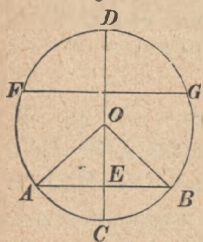
c) Średnica jest najdłuższą cięciwą.

d) Cięciwy w kole, nierówno oddalone od środka, są nierówne, a mianowicie ta jest dłuższa, która leży bliżej środka koła.

§. 79. Koło jest utworem symetrycznym, każda średnica jest jego osią symetrii.

Każdy wycinek koła jest również utworem symetrycznym; jego symetralną jest dwusieczna odpowiedniego kąta środkowego.

Fig. 65.



Z tego wynika:

1. Symetralna każdej cięciwy przechodzi przez środek koła (fig. 65.)

2. Równoległe cięciwy mają tę samą symetralną.

3. Łuki między równoległymi cięciwami są sobie równe.

4. Symetralna cięciwy jest zarazem symetralną odpowiedniego

kąta środkowego i odpowiedniego łuku.

§ 80. Trójkąt powstały przez połączenie końców jakiegokolwiek cięciwy ze środkiem koła, jest — z powodu równości dwóch promieni koła, będących jego bokami — równoramienny.

Trójkąt utworzony przez dwa promienie i cięciwę, odcinającą szóstą część okręgu, jest trójkątem równobocznym.

Kąt jego wierzchołkowy ma bowiem $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$; równe kąty przy podstawie mają razem $180^\circ - 60^\circ$, t. j. 120° , każdy z nich ma więc połowę z 120° , t. j. 60° ; wszystkie trzy kąty tego trójkąta są zatem równe (bo mają po 60°). A ponieważ w trójkącie naprzeciw równych kątów leżą boki równe (§. 53. 1.), także i boki tego trójkąta równe być muszą.

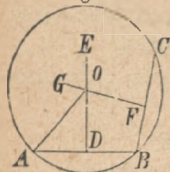
Cięciwa, odcinająca szóstą część okręgu koła, równa się więc promieniowi tego koła.

Zadania.

§. 81. 1. Przez trzy dane punkty A, B, C (fig. 66.), nie leżące na jednej linii prostej, zakreślić koło.

Łączymy punkt A z punktem B, a punkt B z punktem C; odcinki AB i BC są cięciwami szukanego koła. Wykreślimy symetralne tych cięciw (DE i FG).

Fig 66.



Ponieważ według §. 79. każda z tych symetralnych musi przechodzić przez środek koła, przeto środkiem koła jest punkt O, w którym się owe symetralne przecinają, a OA jest jego promieniem.

Trzy punkty, nie leżące na jednej prostej wyznaczają w zupełności koło.

Powyższe zadanie jest tylko innym wyrażeniem zadania:

Na danym trójkącie opisać koło.

2. Wyszukać środek koła, jeżeli dany jest cały okrąg albo jakaś jego część.

Wykreślamy dwie nierównoległe cięciwy, a potem postępujemy tak, jak przy rozwiązaniu zadania 1.

3. Wykreślić koło, jeżeli dany jest jego promień i dwa punkty obwodu.

§. 82. Przepołowić dany łuk.

Z końców danego łuku zakreślamy tym samym promieniem przecinające się łuki, a ich punkt przecięcia łączymy ze środkiem koła linią prostą; prosta ta, należycie przedłużona, dzieli łuk dany na dwie równe części.

§. 83. Obwód koła podzielić na kilka równych części.

Aby obwód koła podzielić na daną ilość równych części, potrzeba tylko kąt pełny w środku koła podzielić na tyleż równych części. Wielkość jednego kąta znajdziemy, dzieląc 360° przez liczbę, wyrażającą ilość żądanych części. Następnie rysujemy jeden taki kąt środkowy i łuk, który jego ramiona odcinają, odmierzamy na całym okręgu.

Szczególne przypadki.

1. Obwód koła podzielić na dwie równe części.

Wykreślamy średnicę.

2. Obwód koła podzielić na 4 równe części.

Wykreślamy dwie prostopadłe do siebie średnice.

Połówiąc łuki można potem podzielić koło na 8, 16..., równych części.

3. Obwód koła podzielić na 6 równych części.

Według §. 80. dzieli cięciwa, równa promieniowi koła, jego okrąg na 6 równych części.

Biorąc tylko parzyste lub tylko nieparzyste punkty podziału, będziemy mieli obwód koła podzielony na 3 równe części.

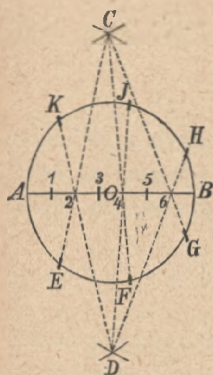
Połówiąc zaś łuki między punktami podziału zawarte, podzielimy okrąg koła na 12, 24, . . . równych części

4. Obwód koła podzielić na 5 równych części.

Zapomocą kątomierza kreślimy kąt środkowy $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, a następnie odmierzamy łuk, odcięty ramionami tego kąta, 5 razy na obwodzie koła.

Przez przepołowienie otrzymanych łuków podzielimy okrąg koła na 10, 20, . . . równych części.

Fig. 67.



Mechanicznie, bez pomocy kątomierza, można podzielić obwód koła na kilka równych części w następujący sposób:

Wykreśliwszy w danem kole (fig. 67.) średnicę AB, zakreślamy z punktów A i B, promieniem równym średnicy, łuki kołowe, które przecinają się w punktach C i D. Podzieliwszy średnicę AB na tyle równych części na ile cały obwód koła ma być podzielony (n. p. na 7 równych części), łączymy nareszcie punkty C i D z parzystymi punktami podziału (t. j. z punktami 2, 4, 6 zapomocą prostych C_2 , C_4 , C_6 i D_2 , D_4 , D_6 i przedłużamy je aż do powtórnego ich przecięcia się z linią kołową. Punkty przecięcia A, E, F, G, H, I, K są żądanymi punktami podziału danego okręgu.

Sposób ten, podany przez Renaldi'ego, nazwano konstrukcją Renaldi'ego.

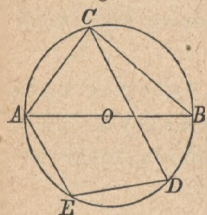
2. Kąty obwodowe.

§. 84. Kąt ACD (fig. 68.), którego wierzchołek leży na obwodzie koła, a którego ramionami są cięciwy tego koła, nazywamy kątem obwodowym albo okręgowym (*Peripheriewinkel*).

O kątach środkowych i obwodowych mówimy, że wspierają się na łuku, odciętym przez ich ramiona.

Kąt obwodowy ACB , wspierający się na półkołu, którego więc ramiona przechodzą przez końce średnicy, nazywamy kątem w półkołu (*ein Winkel im Halbkreise*).

Fig. 68.



Odczytajcie wszystkie kąty obwodowe na fig. 68.

Na którym łuku wspiera się każdy z tych kątów.

Każda cięciwa, różna od średnicy, dzieli koło na dwa nierówne odcinki; jeżeli na łukach, należących do tej cięciwy, wypadnie nam wykreślić po przeciwnych jej stronach kąty obwodowe, rozróżniać je będziemy, mówiąc o jednych, że leżą w większym, a o drugich, że leżą w mniejszym odcinku koła; na fig. 68. kąt ACD jest kątem w większym, a AED w mniejszym odcinku.

§. 85. Gdy kąt środkowy i obwodowy wspierają się na tym samym łuku, położenie ich może być trojaki:

Fig. 69.

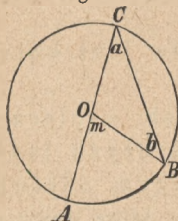


Fig. 70

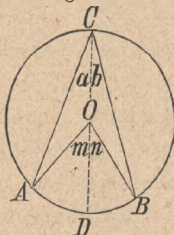
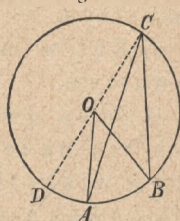


Fig. 71.



a) Wierzchołek kąta środkowego leży na ramieniu kąta obwodowego (fig. 69.), albo

b) Wierzchołek kąta środkowego leży pomiędzy ramionami kąta obwodowego (fig. 70.), albo nareszcie

c) Wierzchołek kąta środkowego leży poza polem kąta obwodowego (fig. 71.).

a) Kąt m (fig. 69.) jest kątem zewnętrznym trójkąta BOC, a zatem równa się sumie dwóch kątów wewnętrznych, jemu nieprzyległych, t. j. sumie kątów a i b ; a że kąty a i b jako kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są sobie równe, przeto każdy z nich jest połową kąta m . Mamy więc $a = \frac{1}{2} m$.

b) Wykreśliwszy średnicę CD (fig. 70.), otrzymamy kąt a równy połowie kąta m podług a) i kąt b równy połowie kąta n ; zatem także suma kątów a i b , t. j. kąt ACB jest połową sumy kątów m i n czyli kąta AOB.

c) Wykreśliwszy podobnie w fig. 71. średnicę CD, obaczmy, że podług a) kąt BCD jest połową kąta BOD, a kąt ACD połową kąta AOD, zatem także różnica kątów BCD i ACD, t. j. kąt ACB jest połową różnicy kątów BOD i AOD czyli połową kąta AOB.

Zawsze więc

Kąt obwodowy w kole równa się połowie kąta środkowego, wspierającego się na tym samym łuku.

§. 86. Z poprzedzającego twierdzenia wynikają także następujące:

a) Kąty obwodowe, wspierające się na tym samym łuku, są równe; albowiem każdy z nich jest połową tego samego kąta środkowego.

b) Każdy kąt w półkolu jest prosty; albowiem kąt środkowy, wspierający się na tym samym łuku, jest kątem półpełnym, a połowa kąta półpełnego równa się R czyli 90° .

c) Każdy kąt w większym odcinku koła jest kątem ostrym.

d) Kąt w mniejszym odcinku koła jest kątem rozwartym.

e) Suma dwóch kątów obwodowych, wspierających się na tej samej cięciwie, z których jeden leży w większym, a drugi w mniejszym odcinku koła, równa się $2R$; gdyż kąty środkowe, które wspierają się na tym samym łuku, tworzą razem kąt pełny.

Do tych pięciu twierdzeń wykreślą uczniowie odpowiednie rysunki.

§. 87. Zadania.

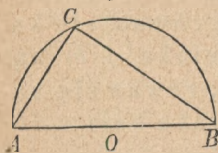
1. Jak wielkie są kąty obwodowe, wspierające się na tych samych łukach, co kąty środkowe a) 64° , b) $84^\circ 55'$, c) $128^\circ 13' 50''$?

2 Kąt obwodowy w kole równa się a) 56° , b) $41^\circ 37'$, c) $108^\circ 12' 12''$; jak wielki jest kąt środkowy, który wspiera się na tym samym łuku?

3. Kąt obwodowy w większym odcinku koła równa się a) 25° , b) $49^\circ 55'$, c) $86^\circ 5' 39''$; jak wielki jest kąt obwodowy w mniejszym odcinku, należący do tej samej cięciwy?

4. Na danej przeciwprostokątnej wykreślić trójkąt prostokątny.

Fig. 72.



Niech będzie AB (fig. 72.) daną przeciwprostokątną, a O jej środkiem. Zakreślamy z O promieniem AO półkole i wykreślamy z dowolnie obranego punktu C, leżącego na tem półkole, odcinki AC i CB. Powstanie trójkąt ACB, który przy C jest prostokątny.

Ponieważ punkt C wybraliśmy dowolnie, przeto jest bardzo wiele trójkątów, czyniących zadość zadaniu; zadanie jest więc nieoznaczone.

3. Styczne.

§. 88. Prawdziwość twierdzenia, że

Prostopadła do promienia, w jego końcu wykreślona, jest styczną koła
wykazaliśmy już w §. 56.

Także odwrócenia powyższego twierdzenia są prawdziwe, mianowicie:

Prostopadła do stycznej, wykreślona ze środka koła, przechodzi przez punkt styczności; i

Prostopadła do stycznej, wykreślona w punkcie styczności, przechodzi przez środek koła.

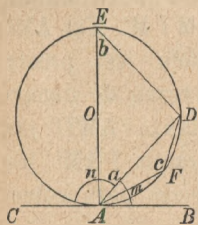
§. 89. Wykreślmy w kole (fig. 73.) promień OA, a następnie w A prostą $BC \perp AO$, to BC będzie styczną koła.

Wykreślmy cięciwę AD, przedłużmy AO do punktu E i połączmy punkt E z punktem D, a otrzymamy trójkąt AED przy D prostokątny, przeto $a + b = R$; ale także $m + a = R$, zatem $m + a = a + b$, a więc także

$$m = b \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Kreśląc w mniejszym odcinku, należącym do cięciwy AD, z dowolnie wybranego punktu F proste AF i DF, otrzymamy

Fig 73



kąt c , który wraz z kątem b równa się $2R$, albowiem oba są kątami obwodowymi, wspierającymi się na tej samej cięciwie, a jeden z nich leży w większym, a drugi w mniejszym odcinku koła, przeto $c + b = 2R$; ale także $n + m = 2R$, zatem $n + m = c + b$, a że $m = b$, więc także

$$n = c \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Jeżeli przez jakiś punkt na linii kołowej wykreślimy styczną i cięciwę, natenczas *a*) kąt ostry, zawarty między styczną a cięciwą, równa się kątowi obwodowemu w większym odcinku, i *b*) kąt rozwarty między styczną, a cięciwą, równa się kątowi obwodowemu w mniejszym odcinku koła.

§. 90. Zadania.

1. W punkcie A (fig. 42.), leżącym na obwodzie koła, wykreślić styczną do tego koła.

Kreślimy promień OA i w punkcie A prostą BC prostopadłą do AO ; BC jest żadaną styczną (§. 56).

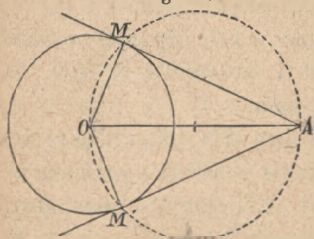
2. Dany jest środek koła; zakreslić z niego koło, któreby stykało się z daną prostą.

3. Danym promieniem zakreslić koło, któreby stykało się z daną prostą w danym punkcie.

4. Wykreślić styczną koła, któraby była równoległa do danej prostej.

§. 91. 1. Z danego punktu A (fig. 74.), leżącego poza kołem, wykreślić styczną.

Fig. 74.



Wykreśliwszy odcinek OA , łączący dany punkt A ze środkiem koła, zakreslamy na nim jako na średnicy koło, które przecina dane koło w punktach M i M' . Kąt AMO jako kąt w półkolu jest prosty, przeto AM jest styczną do danego koła. Ponieważ także $AM'O$ jest kątem prostym, zatem i AM' jest

styczną do danego koła. Z punktu więc, leżącego poza kołem, dwie styczne do tego koła można wykreślić.

Z przystawiania trójkątów AMO i $AM'O$ nie trudno wykazać, że

a) Obie styczne AM i AM' są równe.

b) Jeżeli dwie styczne do jednego i tego samego koła przecinają się, a ich punkt przecięcia połączymy ze środkiem koła linią prostą, natenczas prosta ta połowi kąt zawarty między stycznymi, połowi łuk przez obie styczne odcięty i kąt środkowy, wspierający się na tym łuku.

2. Zakreślić koło, jeżeli mamy dane :

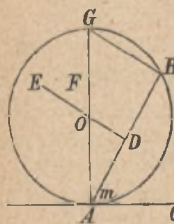
a) promień, styczną i punkt styczności ;

b) promień i dwie nierównoległe styczne.

Ile rozwiązań mamy w każdym z tych przypadków ?

§. 92. 1. Na danym odcinku AB (fig. 75.) jako na cięciwie zakreślić koło, w którymby kąty obwodowe, wspierające się na owej cięciwie, były równe danemu kątowi m .

Fig. 75.



Na jednym ramieniu danego kąta m odcinamy dany odcinek AB , połowimy go w punkcie D i wykreślamy $DE \perp AB$ i $AF \perp CA$. Punkt przecięcia obu tych prostopadłych, t. j. punkt O jest środkiem, a OA promieniemżądanego koła. Każdy bowiem kąt obwodowy w tem kole, wspierający się na AB , n. p. kąt AGB , jest równy kątowi m , ponieważ AC jest styczną, a AB cięciwą, wykreśloną z punktu styczności.

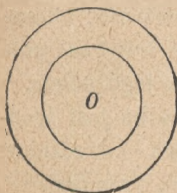
Jakie będzie rozwiązanie tego zadania, jeżeli dany kąt jest rozwarty ?

2. Wykreście na danej cięciwie odcinek kołowy, w którymby każdy kąt obwodowy, wspierający się na owej cięciwie, równał się a) 90° , b) 45° , c) 135° , d) 60° , e) 120° , f) 30° , g) 105° .

3. Zakreślić danym promieniem odcinek kołowy, w którymby wszystkie kąty obwodowe, wspierające się na łuku tego odcinka były równe kątom, podanym w zadaniu 2.

4. Położenie dwóch kół względem siebie.

Fig. 76.



§. 93. Położenie dwóch kół względem siebie zależy od położenia ich środków i od wielkości ich promieni.

Dwa koła (fig. 76.), mające środek wspólny, nazywamy współśrodkowymi (concentrische Kreise). Płaszczyzna, ograniczona ob-

wodami dwóch kół współśrodkowych nazywa się pierścieniem kołowym (Kreisring).

Dwa koła, nie mające wspólnego środka, nazywamy różnośrodkowymi (excentrische Kreise), a prostą łączącą środki takich kół, nazywać będziemy linią środkową, albo krótko środkową (Centrallinie albo Centrale).

§. 94. Dwa koła różnośrodkowe albo się stykają ze sobą, albo się przecinają, albo nie mają żadnego punktu wspólnego.

Dwa koła stykają się, jeżeli ich obwody mają tylko jeden punkt wspólny. Gdy jedno ze stykających się kół leży na polu drugiego (fig. 77.), wtedy o takich kołach mówimy, że stykają się wewnątrz; stykają się zaś zewnątrz, gdy jedno z nich leży poza polem drugiego (fig. 78.).

Fig. 77.

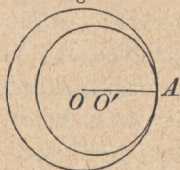
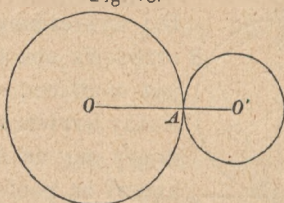


Fig. 78.

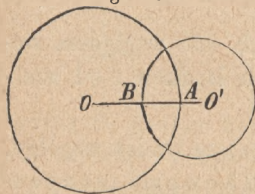


Środkowa dwóch kół, stykających się wewnątrz, równa się różnicy ich promieni ($OO' = AO - AO'$); równa się zaś sumie tych promieni, gdy koła stykają się zewnątrz ($OO' = AO + AO'$). W obu przypadkach leży punkt styczności na linii środkowej.

Dwa koła przecinają się, jeżeli ich obwody mają dwa punkty wspólne (fig. 79.).

Linia środkowa OO' kół przecinających się jest większa od różnicy ich promieni $AO - BO'$, ale mniejsza od ich sumy $AO + BO'$.

Fig. 79.



Dwa koła różnośrodkowe, które się ani nie stykają ani nie przecinają, mogą mieć jeszcze dwojakie położenie; mianowicie albo jedno z nich leży na polu drugiego koła, albo poza jego polem.

W pierwszym przypadku jest środkowa ich linia mniejsza od różnicy, w drugim przypadku większa od sumy obydwóch promieni.

Jakie położenie względem siebie mogą mieć trzy koła *a)* o nie równych, *b)* o równych promieniach?

§. 95. Zadania.

1. Wykreście koła, których środkowa i promienie mają następujące długości:

- | | | |
|----|-----------------|--------------------------|
| a) | środkowa 42 mm, | promienie 26 mm i 16 mm; |
| b) | " 20 mm, | " 50 mm i 25 mm; |
| c) | " 55 mm, | " 22 mm i 20 mm; |
| d) | " 34 mm, | " 48 mm i 35 mm; |
| e) | " 16 mm, | " 45 mm i 29 mm; |
| f) | " 0 mm, | " 36 mm i 25 mm. |

2. Narysujcie trzy współśrodkowe koła o promieniach różnych 15 mm, 25 mm i 35 mm.

3. Promieniem 18 mm długim zakreslcie trzy koła, stykające się zewnątrz.

4. Zakreście promieniami 35 mm i 20 mm dwa koła stykające się wewnątrz.

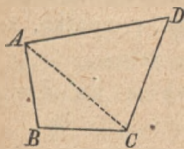
5. Wykreście promieniem 25 mm koło a następnie dwa inne koła, któreby przecinały pierwsze koło, a same stykały się w środku pierwszego koła.

VIII. O czworobokach.

1. Określenia.

§. 96. Figurę płaską ograniczoną czterema odcinkami, nazywamy czworobokiem (ein Viereck).

Fig. 80.



Każdy czworobok ABCD (fig. 80.) ma cztery boki, cztery kąty i cztery wierzchołki. Sumę długości wszystkich boków czworoboku nazywamy jego obwodem.

Prosta AC, łącząca dwa przeciwległe wierzchołki czworoboku, jest jego przekątnią (die Diagonale).

Ile przekątni można wykreślić w czworoboku?

Na ile trójkątów dzieli czworobok każda z tych przekątni?

2. Kąty czworoboku.

§. 97. Czworobok ABCD (fig. 80.) dzieli przekątnia AC na dwa trójkąty, których wszystkie kąty razem wzięte równają się

sumie wszystkich czterech kątów czworoboku; a ponieważ kąty obu trójkątów równają się razem $4R$, przeto:

Suma wszystkich kątów czworoboku równa się $4R$ czyli 360° .

Jeżeli w czworoboku wszystkie cztery kąty są równe, jak wielki jest każdy z nich?

3. Rodzaje czworoboków.

§. 98. Ze względu na położenie przeciwległych boków rozróżniamy trzy rodzaje czworoboków.

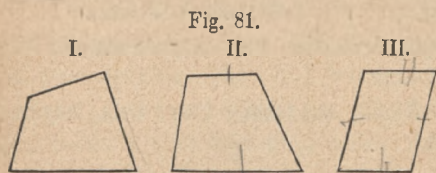


Fig. 81.

a) Czworobok, w którym niema równoległych boków, nazywamy trapezoidem (ein Trapezoid) (fig. 81. I.).

b) Czworobok, w którym tylko jedna para boków jest równoległa, nazywa się trapezem (ein Trapez) (fig. 81. II.).

c) Czworobok, mający dwie pary boków równoległych, nazywamy równoległobokiem (ein Parallelogramm) (fig. 81. III.).

4. Własności równoległoboków.

§. 99. Niech będzie (fig. 82.) $AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC$, więc ABCD równoległobokiem. Wykreśliwszy przekątną BD, otrzymamy $m = n$ i $p = q$ (jako kąty naprzemianległe przy dwóch równoległych, przeciętych trzecią prostą); zatem trójkąt ADB $\cong$ CBD (I. przypadek przystawania).

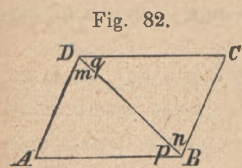


Fig. 82.

Z przystawania tych trójkątów wynika, że $AB = CD$ i $AD = CB$; przeto:

1. Przekątnia dzieli równoległobok na dwa przystające trójkąty.

2. W każdym równoległoboku przeciwległe boki są równe, czyli:

Równoległe proste między równoległymi są sobie równe.

Z tego ostatniego twierdzenia wynika także:

Prostopadłe między równoległymi są równe.

Prostopadłą między dwiema równoległymi mierzy się ich odległość.

Gdy w równoległoboku dwa przyległe boki są równe, natenczas wszystkie boki tego równoległoboku są równe.

Ze względu na długość boków rozróżniamy równoległoboki równoboczne (gleichseitige) i różnoboczne (ungleichseitige Parallelelogramme).

Wybrawszy jeden z boków równoległoboku za podstawę nazywamy jej oddalenie od przeciwległego boku wysokością równoległoboku. Wysokością trapezu jest oddalenie jego boków równoległych.

§. 100. Niech będzie w czworoboku ABCD (fig. 82.) bok $AD = CB$, a $AB = DC$.

Wykreśliwszy przekątnię BD, otrzymamy trójkąt $ABD \cong BCD$ (IV. przypadek przystawania); ponieważ $AB = CD$, przeto $m = n$, a że te kąty są kątami naprzemianległymi, zatem $AD \parallel BC$. Z równości boków AD i BC wynika, że kąt $p = q$, czyli że $AB \parallel DC$. Ponieważ $AB \parallel DC$, a $AD \parallel BC$, przeto czworobok ABCD jest równoległobokiem.

Czworobok, w którym przeciwległe boki są równe, jest równoległobokiem.

§. 101. Niech będzie (fig. 82.) $AB = CD$ i $AB \parallel CD$.

Ponieważ $DB = DB$, $AB = CD$, a kąt $p = q$, przeto trójkąt $ABD \cong BCD$. Z przystawania wynika, że $AD = BC$; a ponieważ założyliśmy, że $AB = CD$, przeto według poprzedzającego twierdzenia czworobok ABCD jest równoległobokiem.

Czworobok, którego dwa przeciwległe boki są równe i równoległe, jest równoległobokiem.

§. 102. Ponieważ w równoległoboku (fig. 82) $p = q$, a $n = m$, przeto także $p + n = q + m$, czyli kąt $B = D$. W ten sam sposób można wykazać, że $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.

W równoległoboku przeciwległe kąty są równe.

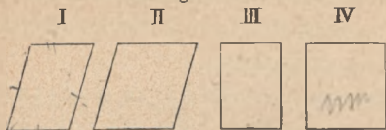
Jeżeli jeden z kątów równoległoboku jest prosty, natenczas i pozostałe trzy kąty są proste; a jeżeli jeden jest ukośnym kątem, to i inne trzy są ukośne.

Ze względu na wielkość kątów rozróżniamy zatem równoległoboki prostokątne (rechtwinklige) i ukośnokątne (schiefwinklige Parallelelogramme).

Jeden z kątów równoległoboku równa się a) $48^{\circ} 18'$, b) $94^{\circ} 40' 35''$; jak wielkie są inne trzy kąty tego równoległoboku?

§. 103. Uwzględniając wielkość kątów i boków, różniamy cztery rodzaje równoległoboków:

Fig. 83.



a) rom'boid (das Rhomboid), t. j. równoległobok skośnokątny różnoboiczny (fig. 83. I);

b) romb (der Rhombus), t. j. równoległobok ukośnokątny równoboczny (fig. 83. II);

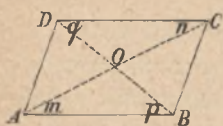
c) prostokąt (das Rechteck), t. j. równoległobok prostokątny i różnoboiczny (fig. 83. III.) i naresze

d) kwadrat (das Quadrat), t. j. równoległobok prostokątny i równoboczny (fig. 83. IV.).

W romboidzie tylko przeciwległe boki i kąty są równe, w rombie są równe wszystkie cztery boki, w prostokącie wszystkie cztery kąty, a w kwadracie wszystkie boki i wszystkie kąty są równe.

Jeden z kątów rombu równa się a) $58^{\circ} 12'$, b) $109^{\circ} 28' 15''$; jak wielkie są pozostałe trzy kąty tego rombu?

Fig. 84.



§. 104. 1. Jeżeli w równoległoboku ABCD (fig. 84.) wykreślimy przekątnie AC i BD, trójkąt $AOB \cong COD$ dlatego, że $AB = CD$, $m = n$, $p = q$ (I. przypadek przystawania).

W przystających trójkątach leżą naprzeciw równych kątów równe boki, zatem $AO = CO$, a $BO = DO$.

Z tego wynika:

Przekątnie równoległoboku połowią się.

Fig. 85.

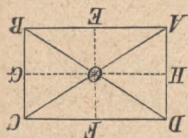


Fig. 86.

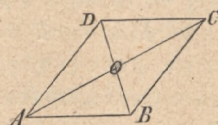
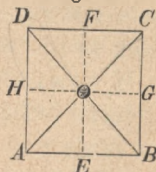


Fig. 87.



2. W prostokącie ABCD (fig. 85.) jest trójkąt $ABC \cong ABD$ (II. przypadek przystawania), przeto $AC = BD$; t. j.

Przekątnie prostokąta są równe.

3. W rombie (fig 86.) mamy po wykreśleniu obu przekątni $\triangle AOB \cong \triangle AOD$, z czego wynika, że $AC \perp BD$, t. j.:

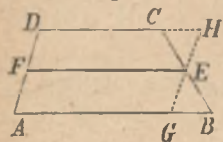
W rombie przekątne są do siebie prostopadłe.

4. Ponieważ kwadrat ma własności prostokąta i rombu, zatem: Przekątne kwadratu są sobie równe i do siebie prostopadłe.

5. Twierdzenia o trapezach, o deltoidzie i o prostych równoległych w trójkącie.

§. 105. 1. Kąty przyległe jednemu z nierównoległych boków trapezu równają się razem $2R$ (jako kąty jednostronne przy dwóch równoległych przeciętych trzecią prostą).

Fig. 88.



2. Jeżeli w trapezie ABCD (fig. 88) wykreślimy przez środek E jednego z nierównoległych boków prostą EF, równoległą do boków równoległych i przez ten sam punkt E równoległą do AD, otrzymamy trójkąt $BEG \cong \triangle CEH$ (I. przypadek przystawiania); z przystawiania wynika, że $EG = EH = \frac{1}{2} GH$, i że $BG = CH$. Po-

nieważ $EH = FD$, a $GH = AD$, przeto także $FD = \frac{1}{2} AD$.

Następnie mamy:

$$AB = AG + GB = FE + GB \text{ i}$$

$$DC = DH - CH = FE - GB;$$

dodawszy równe ilości do równych, otrzymamy równe sumy, t. j.

$$AB + DC = 2 FE, \text{ czyli } FE = \frac{AB + DC}{2}$$

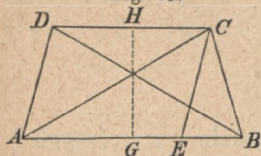
Możemy zatem wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Jeżeli przez środek jednego z nierównoległych boków trapezu wykreślimy równoległą do boków równoległych, to ona połowi drugi bok nierównoległy i równa się połowie sumy boków równoległych.

Odcinek FE nazywamy linią środkową (Mittellinie) w trapezie.

3. Jeżeli w trapezie ABCD (fig. 89.) wykreślimy $CE \parallel AD$, otrzymamy z trapezu równoległobok AECD i trójkąt ECB. Bokami tego trójkąta są nierównoległe boki trapezu i różnica boków równoległych.

Fig. 89.



Gdy w trapezie ABCD bok $AD = CB$, natenczas trójkąt ECB jest trójkątem równoramiennym, zatem $\angle B = \angle CEB = \angle A$. Także $\angle BCD = \angle D$, jako spełnienia równych kątów B i A.

Z tego wynika:

W trapezie, mającym boki nierównoległe równe, kąty leżące przy każdym z równoległych boków są sobie równe; i naodwrot:

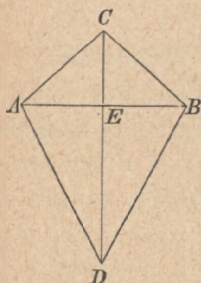
Jeżeli w trapezie kąty, przyległe jednemu z równoległych boków, są równe, także i boki nierównoległe są równe.

Trapez, w którym boki nierównoległe są równe, nazywa się trapezem równoramiennym (ein gleichschenkliges Trapez).

W trapezie równoramiennym jeden z kątów równa się a) 57° , b) $63^\circ 25'$, c) $106^\circ 6' 30''$; jak wielkie są inne kąty tego trapezu?

§. 106. Czworobok, który ma dwie pary przyległych boków równych, zowie się deltoidem (Deltoid). Jeżeli (fig. 90) $AC = BC$ i $AD = BD$, w takim razie ABCD jest deltoidem; składa się on z dwóch trójkątów równoramiennych, mających za wspólną podstawę przekątnię AB.

Fig. 90.



Szczególniejsze własności deltoidu:

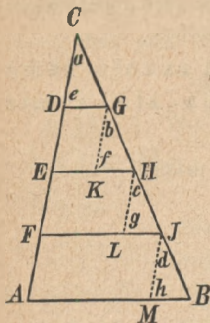
1. Przekątnie deltoidu są do siebie prostopadłe.

Ponieważ trójkąty ABC i ABD są równoramienne, przeto tak punkt C jak i punkt D są równo odległe od końców przekątnej AB; zatem CD jest symetralną przekątnej AB, czyli jest do niej prostopadłą.

2. Deltoid jest symetryczny; jego osią symetrii jest przekątnia, która łączy wierzchołki równych ramion.

§. 107. Podzielmy w trójkącie ABC (fig. 91.) bok AC na kilka równych części, n. p. na 4, a więc tak, aby $CD = DE = EF = FA$; wykreślmy następnie proste DG , EH i FJ równoległe do AB , a wykazemy, że przez to także bok CB podzieliśmy na 4 równe części.

Fig. 91.



W tym celu wykreślmy jeszcze proste GK , HL i JM równoległe do AC ; ponieważ równoległe między równoległymi są równe, przeto $GK = DE$, $HL = EF$ a $JM = FA$. Według założenia są odcinki CD , DE , EF i FA równe, zatem muszą być równe także odcinki CD , GK , HL i JM ; trójkąty CDG , GKH , HLJ i JMB mają zatem po jednym boku równym, a nadto kąty a , b , c i d równe jako odpowiednie, i kąty e , f , g , h równe, ponieważ ich ramiona są równoległe; są zatem przystające (I. przypadek przystawiania). W przystających trójkątach leżą naprzeciw równych kątów e , f , g i h równe boki CG , GH , HJ i JB ; bok BC jest więc rzeczywiście podzielony na 4 równe części.

Jeżeli w trójkącie jeden bok podzielimy na kilka równych części i przez punkty podziału wykreślimy równoległe do drugiego boku, to te równoległe podzielią także bok trzeci na tyleż równych części.

6. Czworoboki w koło wpisane i opisane na kole.

§. 108. Czworobok, którego boki są cięciwami koła, nazywamy wpisanym w koło (ein Sehnenviereck), jak n. p. $AEDC$ (fig. 68.); koło jest opisane na tym czworoboku.

W każdym czworoboku, wpisanym w koło, jest suma dwóch przeciwległych kątów równa $2 R$.

Przeciwległe bowiem kąty czworoboku, wpisanego w koło, są kątami obwodowymi, wspierającymi się na tej samej cięciwie; a że jeden z nich leży w odcinku mniejszym, a drugi we większym, przeto według §. 86. e) ich suma równa się $2 R$.

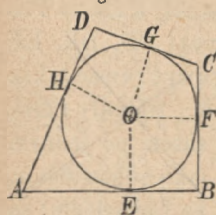
Na czworoboku można tylko wtedy opisać koło, gdy suma jego przeciwległych kątów równa się dwom prostym. Własność

tę mają zawsze kąty kwadratu, prostokąta i trapezu równoramiennego na tych czworobokach można zatem zawsze opisać koło.

§. 109. Czworobok, którego boki są stycznymi koła, nazywamy czworobokiem opisanym na kole (ein Tangenten-viereck); koło jest wtedy wpisane w czworobok.

W każdym czworoboku, opisanym na kole, suma dwóch przeciwległych boków równa się sumie dwóch drugich boków (fig. 92).

Fig. 92.



Według §. 91 a) mamy

$$AE = AH,$$

$$BE = BF,$$

$$CG = CF,$$

$$DG = DH;$$

równe ilości dodane do równych dają równe sumy, więc

$$AB + CD = BC + AD.$$

W taki tylko czworobok można wpisać koło, w którym suma dwóch przeciwległych boków równa się sumie dwóch drugich boków.

Tę własność ma każdy kwadrat, romb i deltoid.

7. Przystawianie i symetria czworoboków.

§. 110. Dwa czworoboki są przystające, jeżeli wszystkie boki i kąty jednego równają się bokom i kątom drugiego czworoboku, wziętym w tym samym porządku.

Z tego określenia wynika, że:

1. Dwa równoległoboki przystają do siebie, jeżeli mają po dwa przyległe boki i po kącie, między nimi zawartym, odpowiednio równym.

2. Dwa prostokąty przystają do siebie, jeżeli mają po dwa przyległe boki odpowiednio równe.

3. Dwa kwadraty przystają do siebie, jeżeli mają po jednym boku równym.

§. 111. Każdy trapez równoramienny jest symetryczny względem prostej, która połowi jego boki równoległe i jest do nich prostopadła; prosta ta jest symetralną trapezu równoramiennego.

Romb jest symetryczny względem każdej swojej przekątnej jako symetralnej.

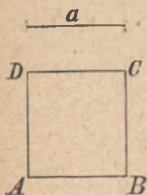
Prostokąt jest symetryczny względem każdej prostej, połówiącej dwa jego przeciwległe boki.

Kwadrat jest symetryczny nie tylko względem każdej prostej, swojej przekątnej, lecz także względem każdej prostej, która połówi dwa jego przeciwległe boki; ma zatem 4 osie symetrii.

8. Zadania do wykreślenia.

§. 112. 1. Wykreślić kwadrat, mając dany jego bok a (fig. 93).

Fig. 93.



Kreślimy najpierw kąt prosty A i odmierzymy na jego ramionach $AB = AD = a$; następnie zakreślamy z punktów B i D łuki kołowe promieniem a . Łuki te przecinają się w punkcie C , który połączony z punktami B i D daje żądany kwadrat $ABCD$.

Które części składowe kwadratu wyznaczają go w zupełności?

2. Wykreście kwadrat, którego bok równa się 34 mm i a) wpiszcie w niego koło, b) opiszcie na nim koło.

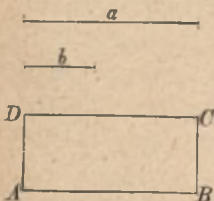
3. Narysujcie kwadrat, którego obwód równa się 1 dm .

4. Wykreście kwadrat, którego obwód równałby się obwodowi danego prostokąta.

5. Wykreście kwadrat, jeżeli dana jest jego przekątna (36 mm).

§. 113. 1. Wykreślić prostokąt, jeżeli dane są jego dwa przyległe boki a i b (fig. 94).

Fig. 94.



Jakie części składowe prostokąta muszą być dane, by był w zupełności wyznaczony?

2. Wykreście prostokąt, którego boki równają się 26 mm i 36 mm .

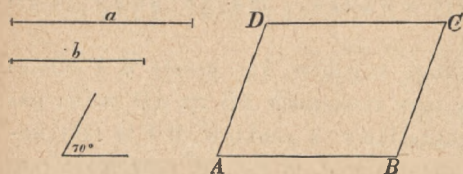
3. Narysujcie prostokąt, jeżeli dany jest bok (22 mm) i przekątna (31 mm).

4. Wykreście prostokąt, którego przekątna równa się 32 mm , a w którym obie przekątne tworzą ze sobą kąt 60° .

§. 114. 1. Wykreślić równoległobok, jeżeli dane są dwa boki a i b (fig. 95,) i kąt między nimi zawarty, n. p. 70° .

Wykreśliwszy najpierw kąt $A = 70^\circ$, odmierzymy na jego ramionach $AB = a$ i $AD = b$; następnie zakresłamy z B i D

Fig. 95.



promieniami b i a łuki kołowe, które przecinają się w punkcie C ; $ABCD$ jest żądanym równoległobokiem,

Ile części składowych i które wyznaczają w zupełności a) romb, b) romboid?

2. Wykreślić romb, jeżeli są dane :

a) jeden bok (34 mm) i jeden kąt (30°);

b) bok (24 mm) i przekątnia (32 mm);

c) obie przekątnie (18 mm i 28 mm).

3. Wykreście romboid, jeżeli są dane:

a) dwa boki (25 mm i 43 mm) i kąt między nimi zawarty (60°);

b) dwa przyległe boki (22 mm i 29 mm) i przekątnia (35 mm).

c) obie przekątnie (21 mm i 34 mm) i jeden bok (25 mm);

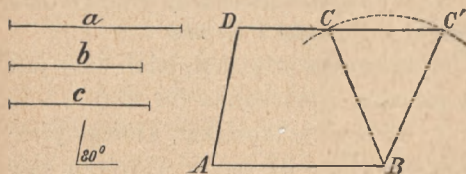
d) obie przekątnie (36 mm i 43 mm) i kąt między nimi zawarty (60°).

§. 115. 1. Wykreślić trapez, jeżeli dany jest jeden z równoległych boków a , dwa nierównoległe boki b i c i kąt 80° , zawarty między a i b (fig. 96)

Na ramionach kąta $A = 80^\circ$ odmierzymy $AB = a$ i $AD = b$

Następnie wykreśliwszy z D równoległą do AB , zakresłamy z punktu

Fig. 96.



B promieniem c łuk kołowy, który ją przecina w punkcie C . Łącząc wreszcie punkt C z punktem B , otrzymamy trapez $ABCD$, który posiada dane cztery części składowe

Ponieważ łuk, zakreślony z B, przecina równoległą DC także w drugim punkcie C', przeto mamy jeszcze drugi trapez ABC'D, odpowiadający warunkom zadania. Zadanie to ma więc w ogólności dwa rozwiązania. Kiedy otrzymamy tylko jedno rozwiązanie, a kiedy nie będziemy mieli żadnego rozwiązania?

Ile części składowych, i które wyznaczają w zupełności a) trapez jakiegokolwiek, b) trapez równoramienny?

Jeżeli pomiędzy częściami składowymi znajdują się oba równoległe boki, natenczas wykreślamy żądany trapez, rysując najpierw trójkąt, którego podstawa równa się różnicy równoległych boków trapezu.

2. Wykreście trapez, którego boki równoległe równają się 38 mm i 32 mm, a jeden z nierównoległych boków ma 27 mm, jeżeli ten bok z pierwszym równoległym bokiem tworzy kąt 60° .

3. Wykreście trapez, jeżeli są dane:

a) oba boki równoległe i oba nierównoległe (42 mm, 30 mm, 36 mm, 28 mm);

b) oba boki równoległe i kąty przyległe jednemu z boków równoległych (45 mm, 28 mm, 45° , 60°);

c) oba boki równoległe, jeden kąt i wysokość;

d) oba boki równoległe, jeden bok nierównoległy i jeden kąt;

e) oba boki nierównoległe, jeden z równoległych boków i jeden kąt;

4. Wykreście trapez równoramienny, jeżeli są dane:

a) boki równoległe (38 mm i 3 cm) i wysokość (26 mm);

b) boki równoległe (32 mm i 24 mm) i kąt (120°);

c) oba boki równoległe (36 mm i 32 mm) i jeden z nierównoległych boków (28 mm).

§. 116. 1. Wykreślić deltoid, jeżeli są dane dwa boki i symetralna (30 mm, 36 mm, 45 mm) i wpisać w niego koło.

2. Wykreście deltoid, jeżeli są dane:

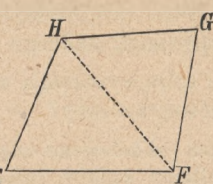
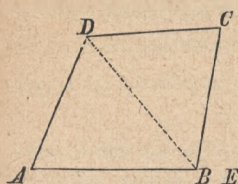
a) dwa nierówne boki i jedna przekątnia (42 mm, 31 mm, 37 mm);

b) obie przekątne i jeden bok (45 mm, 28 mm, 32 mm).

§. 117. Wykreślić czworobok, przystający do danego czworoboku ABCD (fig. 97.).

Kreślimy w danym czworoboku przekątnię BD, wskutek czego rozpadnie się on na dwa trójkąty ABD i DBC; narysowawszy następnie trójkąt $\triangle EFH \cong \triangle ABD$,

Fig. 97.



kat $\triangle EFH \cong \triangle ABD$, a na prostej FH trójkąt $\triangle FGH \cong \triangle BCD$, otrzymamy czworobok EFGH $\cong$ ABCD. Zresztą nie jest konieczną rzeczą

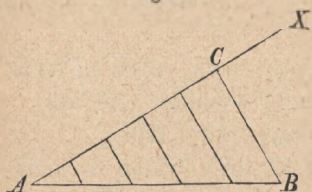
kreślić przekątnię i rysować trójkąty, mamy tu bowiem tylko wyznaczyć położenie 4 wierzchołków E, F, G i H szukanego czworoboku, co możemy uskutecznić w sposób następujący:

Odmierzamy $EF = AB$, i z punktów E i F zakreślamy promieniami AD i BD łuki, które przecinają się w punkcie H; następnie zakreślamy z F i H promieniami BC i DC łuki, które przecinają się w G, a nareszcie kreślimy EH, HG i GF.

§. 118. Dany odcinek AB (fig. 98.) podzielić na kilka (n. p. na 5) równych części.

Wykreślamy z końca danego odcinka AB promień AX, nachylony do niego pod jakimkolwiek kątem; na tym promieniu poczynając od punktu A odmierzamy żadaną ilość części, do-

Fig. 98.



wolnie długich byle równych, i łączymy punkt końcowy ostatniej części (C) z drugim końcem danego odcinka AB. Wskutek tego otrzymamy trójkąt ABC, którego bok AC jest na 5 równych części podzielony; aby podzielić także bok AB na 5 równych części, po-

trzeba tylko jeszcze przez punkty podziału na linii AC wykreślić równoległe do CB.

Podzielcie odcinek na 3, 6, 7, 9, 10, 12 równych części.

§. 119. Rozwiążemy tu teraz następujące zadanie:

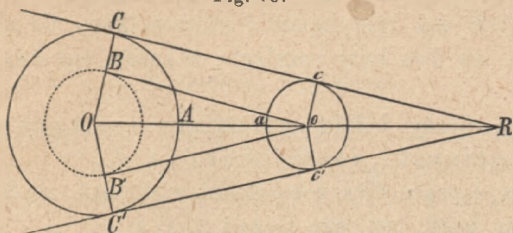
Do dwóch danych kół wykreślić wspólną styczną.

Niech będą O i o środkami, a OA i o a promieniami danych kół.

a) Zakreśliwszy z punktu O (fig. 99.) promieniem OB, równym różnicy danych promieni (OA — oa) koło, wykreślamy do niego

styczne oB i oB' . Przedłużywszy następnie promienie OB i OB' aż do przecięcia się z okręgiem danego koła w C i C' , kreślimy $oc \parallel OC$ i $oc' \parallel OC'$. Proste Cc i $C'e'$ są wspólnymi zewnętrznymi stycznymi obu danych kół.

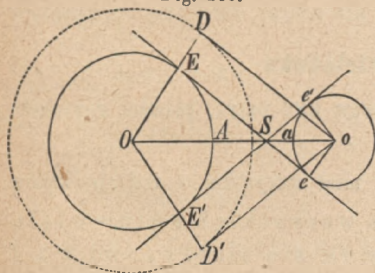
Fig. 99.



Ponieważ w czworoboku $BCco$ boki BC i oc są równe i równoległe, przeto jest czworobok ten równoległobokiem (§. 101); a że w nim kąt CCo jest prosty, przeto i inne jego kąty są proste; zatem kąt $BCc = R$ i $ocC = R$, a więc Cc jest wspólną styczną obu danych kół. W ten sam sposób wykazemy, że także $C'e'$ jest styczną obu kół.

Zewnętrzne styczne dwóch kół przecinają się w punkcie R , leżącym na przedłużeniu linii środkowej.

Fig. 100.



b) Zakreśliwszy z punktu O (fig. 100) koło promieniem OD , równym sumie promieni obu danych kół, wykreślamy do niego z punktu o styczne oD i oD' . Jeżeli wykreślimy promienie OD i OD' , przecinające dane koło w E i E' , a potem $oe \parallel OE$ i $oe' \parallel OE'$, otrzymamy po połączeniu punktu

E z e , a punktu E' z e' dwie proste Ee i $E'e'$, które są również stycznymi obu danych kół, i to stycznymi wewnętrznymi.

O rzetelności tego rozwiązania można przekonać się w ten sam sposób, jak pod a).

Wewnętrzne styczne dwóch kół przecinają się w punkcie S , leżącym na linii środkowej.

IX. O wielobokach.

1. Określenia.

§. 120. Figurę płaską, ograniczoną kilku odcinkami, nazywamy wielobokiem (ein Vieleck oder Polygon).

Wielobok ma tyle kątów i wierzchołków, ile ma boków; każdy bok ma dwa kąty przyległe, a każdy kąt dwa przyległe boki.

Podług liczby boków rozróżniamy trójkąty, czworoboki, pięcioboki, sześcioboki i t. d.

Prosta, łącząca dwa wierzchołki wieloboku, nie leżące przy tym samym boku, jest jego przekątnią.

Zadania.

1. Czy można w trójkącie wykreślić przekątnię?

2. Ile przekątni można wykreślić z jednego wierzchołka czworoboku, pięcioboku, sześcioboku, siedmioboku, ośmioboku, dziewięcioboku i dziesięcioboku?

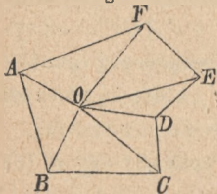
Liczba przekątni, które można wykreślić w jakimś wieloboku z jednego wierzchołka jest zawsze o 3 mniejsza od liczby boków; a liczba trójkątów, na które rozpada się wielobok wskutek wykreślenia przekątni z jednego wierzchołka, jest o 2 mniejsza od liczby boków tego wieloboku.

2. Kąty wieloboku.

§. 121. Kąty wieloboku mogą być ostre, proste, rozwarte, a nawet wypukłe.

Narysujcie wielobok, któryby miał wszystkie te rodzaje kątów.

Fig. 101.



Suma wszystkich kątów wieloboku równa się iloczynowi z $2R$ przez liczbę boków, pomniejszonemu o 4 R .

Wykreśliwszy bowiem z punktu O , leżącego na polu wieloboku $ABCDEF$ (fig. 101.), proste do wszystkich wierzchołków, otrzymamy tyle trójkątów, ile wielobok ma boków; suma kątów każdego trójkąta równa się $2R$, zatem kąty wszystkich trójkątów są razem równe iloczynowi z $2R$ przez liczbę boków wieloboku. W tych kątach trójkątów zawarte są wszystkie kąty wieloboku, a nadto

także kąty naokoło punktu O , które nie są kątami wieloboku, a razem równają się $4 R$. Chcąc zatem otrzymać sumę kątów wieloboku, należy od sumy kątów wszystkich trójkątów odjąć $4 R$.

Jak wielką jest suma wszystkich kątów pięcioboku, sześcioboku, siedmioboku, ośmioboku, dziewięcioboku, dziesięcioboku i dwunastoboku?

3. Umiarowe wieloboki.

§. 122. Wielobok, którego wszystkie boki są równe, nazywamy równobocznym (*gleichseitig*); wielobok, którego wszystkie kąty są równe, nazywamy równokątnym (*gleichwinklig*); wielobok zaś, w którym wszystkie boki i wszystkie kąty są równe, nazywa się umiarowym (*regelmässig*). Tak n. p. romb jest równobocznym, prostokąt jest równokątnym, a kwadrat umiarowym czworobokiem. -

Ponieważ w wieloboku umiarowym wszystkie kąty są równe, przeto nie trudno wyszukać wielkość jednego kąta takiego wieloboku; potrzeba bowiem wyszukać tylko sumę wszystkich kątów i podzielić ją przez liczbę, wyrażającą ilość jego kątów.

Tak n. p. każdy kąt

umiarowego trójkąta równa się $\frac{180}{3} = 60^\circ$,

„ czworoboku „ „ $\frac{360}{4} = 90^\circ$,

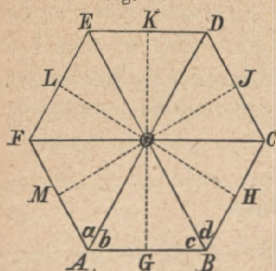
„ pięcioboku „ „ $\frac{540}{5} = 108^\circ$,

„ sześcioboku „ „ $\frac{720}{6} = 120^\circ$ i t. d.

§. 123. Niech będzie $ABCDEF$ (fig. 102.) wielobokiem umiarowym, a więc niech $AB = BC = CD = DE = EF = FA$ i kąt $A = B = C = D = E = F$.

Przepołówmy dwa kąty A i B , leżące przy boku AC , a otrzymamy równoramienny trójkąt ABO . Połączywszy wierzchołek O tego trójkąta ze wszystkimi innymi wierzchołkami wieloboku, podzielimy dany wielobok na same równoramiennie i przystające trójkąty; albowiem jeżeli trójkąt AOB obrócimy około boku OB , to nakryje on trójkąt BOC , trójkąt BOC nakryje po obrocie trójkąt COD , i t. d. Odcinki OA , OB , OC , ... są przeto sobie równe.

Fig. 102



Ponieważ w przystających trójkątach równoramiennych także i wysokości są równe, zatem i prostopadłe wykreślone z O do boków wieloboku, t. j. OG, OH, OJ, są równej długości. Z tego wynika:

1. Jeżeli w umiarowym wieloboku przepołowimy dwa kąty, bezpośrednio po sobie następujące, i punkt przecięcia dwusiecznych połączymy z pozostałymi wierzchołkami wieloboku, natenczas rozłoży się ten wielobok na przystające równoramienne trójkąty.

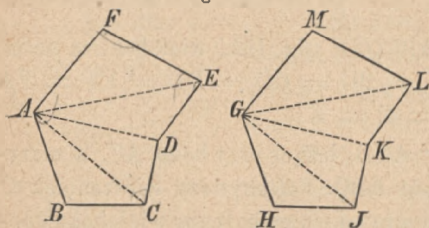
2. W każdym umiarowym wieloboku znajduje się punkt, równo odległy od wszystkich wierzchołków i od wszystkich boków.

Punkt ten nazywamy środkiem umiarowego wieloboku. Położenie środka umiarowego wieloboku wyznaczają symetralne którychkolwiek dwóch po sobie następujących jego kątów lub boków.

4. Przystawanie i symetria wieloboków.

§. 124. Dwa wieloboki przystają do siebie, jeżeli mają wszystkie boki i wszystkie kąty, wzięte w tym samym porządku odpowiednio równe.

Fig. 103.

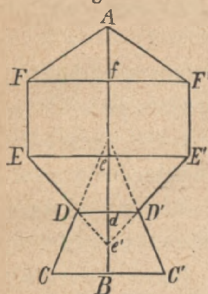


Dwa wieloboki ABCDEF i GHIKLM (fig. 103.), które składają się z jednakowej liczby kolejno przystających trójkątów, przystają do siebie.

Położmy bowiem jeden wielobok tak na drugim, żeby dwa odpowiednie przystające trójkąty, n. p. ABC i GHJ nakryły się, natenczas nakryją się także następujące dwa trójkąty, zatem także trzecie dwa, it. d.; ostatecznie więc całe wieloboki nakryją się, przeto są przystające.

§. 125. Jeżeli w wieloboku $ABCDEF$ (fig. 104) wykreślimy z wierzchołków do prostej AB prostopadłe Dd , Ee , Ff , i obrócimy cały wielobok około AB o 180° , otrzymamy wielobok $ABC'D'E'F'$, który oczywiście przystaje do wieloboku $ABCDEF$; cały więc utwór geometryczny $AFEDCBC'D'E'F'$ jest symetryczny względem prostej AB , jako osi symetrii (§. 57.).

Fig. 104.



Części utworu symetrycznego, które po obrocie około osi symetrii nakrywają się, są także symetrycznymi względem siebie, jak n. p. $ABCDEF$ i $ABC'D'E'F'$.

Dwa symetryczne utwory płaskie są zawsze przystające; ale ich równe części składowe następują po sobie ze względu na symetralną w odwrotnym porządku.

Dla wieloboków umiarowych mamy następujące twierdzenia o ich symetrii:

1. Symetralna każdego boku, oraz symetralna każdego kąta wieloboku umiarowego są osiami symetrii tego wieloboku (fig. 102.).

O prawdziwości tego twierdzenia przekonujemy się przez obrócenie części wieloboku około odpowiedniej symetralnej.

2. Wielobok umiarowy ma tyle osi symetrii, ile ma boków.

Jeżeli liczba boków wieloboku jest parzysta, to każde dwa przeciwległe boki i każde dwa przeciwległe kąty mają tę samą symetralną. Jeżeli zaś liczba boków wieloboku jest nieparzysta, to zawsze jedna symetralna boku nakrywa jedną symetralną kąta.

5. Wielobok i koło.

§. 126. Wielobok, którego wszystkie wierzchołki leżą na obwodzie koła, a więc wielobok, którego boki są cięciwami koła, nazywamy wielobokiem wpisanym w koło, a koło jest wtedy opisane na wieloboku.

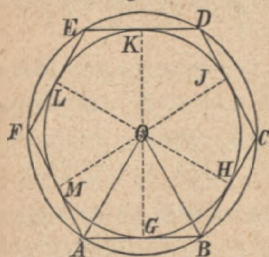
Wielobok, którego boki są stycznymi koła, nazywamy wielobokiem opisanym na kole, a koło jest wpisane w ten wielobok.

Wieloboki umiarowe wpisane w koło i opisane na kole.

§. 127. W każdy umiarowy wielobok można wpisać i na każdym umiarowym wieloboku można pisać koło.

Niech będzie ABCDEF (fig. 105.) umiarowym wielobokiem.

Fig. 105.



Jeżeli dwa bezpośrednio po sobie następujące kąty, n. p. A i B, przepołowimy, przetną się ich dwusieczne w punkcie O, który jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków i jednakowo oddalony od wszystkich boków tegoż wieloboku.

a) Jeżeli zatem z punktu O zakreślimy promieniem OA koło, musi ono przechodzić przez wszystkie wierzchołki A, B, C, D, E, F: jest więc kołem opisanym na wieloboku.

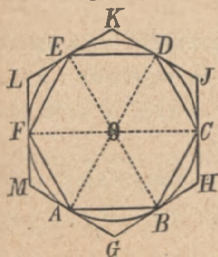
b) Jeżeli OG, OH, OJ, OK, OL i OM oznaczają odległości punktu O od boków wieloboków, a z punktu O zakreślimy promieniem OG koło, musi ono przechodzić przez punkty G, H, J, K, L i M; a że boki wieloboku są w tych punktach stycznymi koła, przeto jest to koło wpisane w wielobok.

§. 128. Jeżeli obwód koła podzielimy na kilka równych części, natenczas punkty podziału są a) wierzchołkami umiarowego wieloboku wpisanego, i b) punktami styczności umiarowego wieloboku opisanego.

Niech będzie O (fig. 106.) środkiem koła, zakreślonego promieniem OA i podzielonego na kilka, n. p. 6 równych części.

a) Jeżeli przez punkty podziału wykreślimy cięciwy AB, BC, CD, DE, . . . , otrzymamy wielobok ABCDEF, wpisany w koło.

Fig. 106.



Boki tego wieloboku są sobie równe, ponieważ są cięciwami w kole, należącymi do równych łuków; również i kąty wieloboku są równe, gdyż są kątami obwodowymi, wspierającymi się na równych łukach. Wielobok ten jest zatem równoboczny i równokątny czyli umiarowy.

b) Jeżeli w punktach podziału powykreślamy prostopadłe do promieni AO, BO, CO,

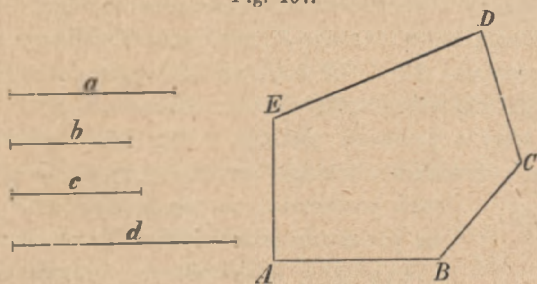
DO, ... otrzymamy wielobok GHJKLM, opisany na kole. Wielobok ten jest umiarowy, albowiem czworoboki AOBG, BOCH, CODJ, ... nakryją się dokładnie, jeżeli jeden z nich położymy na drugim (według wykreślenia bowiem są kąty środkowe w danem kole równe); zatem kąty G, H, J, ... są sobie równe, a nadto $GB = HC = JD = \dots$ i $BH = CJ = DK = \dots$, więc także ich sumy, czyli boki naszego wieloboku są równe.

6. Zadania do wykreślenia.

§. 129. 1. Wykreślić pięciobok, jeżeli dane są jego cztery boki a, b, c, d i kąty między tymi bokami zawarte $132^\circ, 125^\circ$ i 84° .

Odmierzamy $AB = a$ (fig. 107.) i przy B wykreślamy kąt 132° ; na drugim ramieniu tego kąta odmierzamy $BC = b$ i przy C rysujemy kąt 125° ; następnie odmierzamy $CD = c$, przy D

Fig. 107.



wykreślamy kąt 84° i na drugim jego ramieniu odcinamy $DE = d$; nareszcie kreślimy prostą AE. Wielobok ABCDE jest żądanym pięciobokiem.

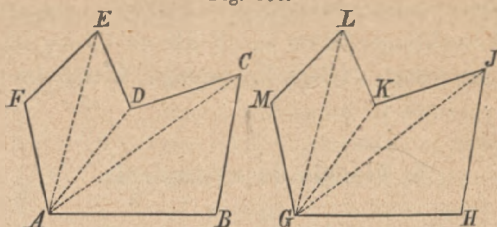
2. Wykreście sześciobok, w którym boki 22 mm, 37 mm, 18 mm, 25 mm i 40 mm tworzą kolejno kąty $120^\circ, 150^\circ, 105^\circ$ i 135° .

§. 130. Wykreślić wielobok, przystający do danego wieloboku.

a) Przez wyznaczenie wierzchołków zapomocą konstrukcyi trójkątów.

Podzielimy dany wielobok ABCDEF (fig. 103.) przekątnymi na trójkąty i wykreślmy trójkąt $\triangle GHJ \cong \triangle ABC$, następnie na GJ trójkąt $\triangle GJK \cong \triangle ACD$, na GK trójkąt $\triangle GKL \cong \triangle ADE$ i na GL

Fig. 108.



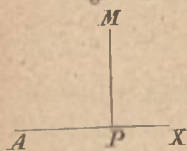
trójkąt $\triangle GLM \cong \triangle AEF$, a otrzymamy wielobok $\triangle GHJKLM \cong \triangle ABCDEF$. Zresztą nie jest konieczną rzeczą dzielić dany wielobok na trójkąty i wykreślać do nich przystające trójkąty; wystarczy tak wyznaczyć punkty G, H, J, K, L i M, by odpowiednio ze sobą połączone mogły dać owe trójkąty.

Celem wyznaczenia rzeczonych punktów odmierzymy $GH = AB$, zakreślamy z punktów G i H promieniami AC i BC łuki, które przecinają się w punkcie J; następnie kreślimy z punktów G i J promieniami AD i CD łuki, przecinające się w K i t. d.

b) Zapomocą współrzędnych wierzchołków.

Wykreślmy z pewnego punktu A (fig. 109.) promień AX, a następnie z dowolnie obranego punktu M prostopadłą MP do tego promienia; natenczas część AP, odcięta na promieniu prostopadłą MP, nazywamy odciętą (die Abscisse), a prostopadłą MP rzędną (die Ordinate); odcięta i rzędna są współrzędnymi (die Coordinaten) punktu M. Promień AX nazywamy osią odciętych (die Abscissenache), a punkt A początkiem (der Anfangspunkt) osi odciętych.

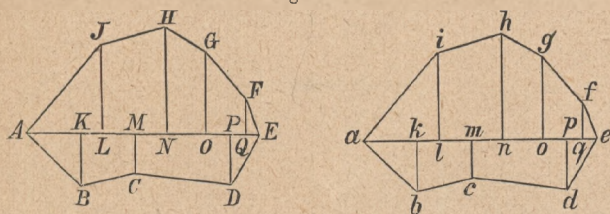
Fig. 109.



Jeżeli dany jest początek A i kierunek osi odciętych AX, położenie każdego punktu M jest dokładnie wyznaczone, gdy dane są jego współrzędne; albowiem potrzeba tylko na osi odciętych odmierzyć od punktu A, poczynając długość równą odciętej AP, a następnie wykreślić w P prostopadłą i odmierzyć na niej rzędną PM; punkt końcowy tej rzędnej jest szukany punkt M.

Ażeby za pomocą współrzędnych narysować wielobok, przystający do danego wieloboku ABCDEFGHJ (fig. 110.), wybiera się w danym wieloboku jakąś prostą n. p. AE za oś odciętych, punkt A za jej początek i wykreśla się współrzędne wszystkich wierzchołków danego wieloboku. Następnie wykreślamy inną oś odciętych $a e$ i odmierzamy na niej odcięte od a do $k, l, m, n, \dots$; wykreśliwszy w tych punktach prostopadłe, odmierzamy na nich odpowiednie rzędne; końce tych prostopadłych są wierzchołkami wieloboku przystającego, który zamierzaliśmy narysować.

Fig 110



§. 131. 1. Wyznaczyć punkt, któryby z danym punktem leżał symetrycznie względem danej symetralnej (§. 125.).

2. Wykreście wielobok, któryby był symetryczny do danego wieloboku względem danej symetralnej.

§. 132. 1. Na umiarowym a) trójkącie, b) czworoboku, c) sześcioboku opisać koło (§. 127.).

2. W umiarowy a) trójkąt, b) czworobok, c) sześciobok wpisać koło (§. 127.).

3. W dane koło wpisać i na danem kole opisać a) trójkąt równoboczny, b) umiarowy sześciobok (§. 128.).

4. W dane koło wpisać i na danem kole opisać a) kwadrat, b) umiarowy ośmiobok.

5. Zapomocą kątomierza wpisać i opisać na danem kole umiarowy a) pięciobok, b) dziesięciobok.

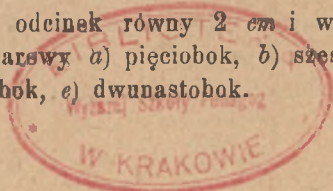
6. W koło jest wpisany jakiś umiarowy wielobok; wpisać w to koło wielobok umiarowy, któryby miał dwa razy tyle boków, co pierwszy.

§. 133. 1. Dany jest bok umiarowego wieloboku; wykreślić ten wielobok.

Przy rozwiązaniu tego zadania szukamy przedewszystkiem koła, w któreby żądany wielobok był wpisany. W tym celu

obliczamy najpierw wielkość jednego kąta wieloboku, następnie kreślimy prostą równą danemu bokowi i na obu jej końcach wykreślamy po połowie wyrachowanego kąta wieloboku. Z punktu przecięcia ramion tych kątów zakreślamy koło przez punkty końcowe prostej i na jego obwodzie odmierzamy dany bok jako cięciwę.

2. Nakreślcie odcinek równy 2 *cm* i wykreślcie na nim jako na boku umiarywy a) pięciobok, b) sześciobok, c) ośmiobok, d) dziesięciobok, e) dwunastobok.



27.77

M. GORSKI

INTRODUCTORY MEASUREMENTS