J. TODHUNTER.
Członek Tow. Królewskiego w Londynie.

ALGIEBRA

POCZĄTKOWA

Tłumaczył z angielskiego

WŁ. KWIETNIEWSKI,
b. Docent b. Szkoły Głównej.

Wydawnictwo „Przeglądu Pedagogicznego."

WARSZAWA
GEBETHNER i WOLFF.

1890.

Дозволено Цензурою.
Варшава, 18 Октября 1889.

Druk K. Kowalewskiego, Warszawa, Królewska 29.

Przedmowa tłumacza.

Dziełko, które podajemy w tłumaczeniu, wyszło po raz pierwszy w r. 1863, a po raz dwudziesty zostało odbite w r. 1888. To samo już dowodzi jego praktyczności i wielkiego rozpowszechnienia w szkołach angielskich. Autor téj książki wydał szereg podręczników, obejmujących prawie całość matematyki czystéj i zajmujących w świecie pedagogicznym angielskim takie miejsce, jakie niegdyś we Francyi zajmowały wyborne dzieła Lacroix.

Nie jest ono przedstawieniem systematyczném całkowitego kursu algiebry; — w szeregu podręczników tegoż samego autora, są dwa inne dzieła poświęcone temu przedmiotowi. Jest ono raczéj pierwszym przewodnikiem do rachunku algiebraicznego, wprowadzającym powoli i stopniowo na dobranych przykładach do zasad nauki; — autor pragnie na pierwszy początek zaznajomić ucznia z materyałem rachunkowym, i należy przyznać, robi to, z małymi wyjątkami, w sposób bardzo udatny. Czytelnik, który tę książkę początkową przejdzie, będzie mógł łatwo dopełnić, w razie potrzeby, swoich wiadomości teoretycznych; — bardziéj specyalne o algiebrze staną się dla niego dostępne.

Książka ta zawiéra w sobie zbiór wiadomości zupełnie wystarczający do pewnych celów jak np. zawiéra w sobie to wszystko, co jest potrzebne dla uczniów niższych szkół specyalnych i technicznych, wielu zakładów naukowych prywatnych i pensyj żeńskich. Dla takich zakładów jest ona całością, nie potrzebującą właściwie dopełnień. Może doskonale zastąpić wyborne, w zeszłym wieku napisane dzieło *L'Huilliera*, o algiebrze; u nas w szkołach używane do początkowego wykładu, ale oddawna już wyczerpane z handlu księgarskiego.

W tłumaczeniu zmian żadnych nie wprowadzono. Jeżeli czytelnik opuści wszystkie paragrafy i zadania opatrzone gwiazdkami lub znaczkami, którymi odróżniono wtrącone artykuły, wtedy miéć będzie zupełnie wierne tłumaczenie oryginału*). Wyjątek tylko przedstawiają niektóre zadania z tego mianowicie powodu, że autor używa w nich miar i monet wyłącznie angielskich; — otóż aby uczący się u nas mieli przed oczami rzeczy znane, miary te i monety zostały zastąpione albo miarami u nas używanemi, albo téż miarami metrycznemi, z któremi dobre zaznajomienie się jest dzisiaj rzeczą niezbędną. Również musiały uledz zmianie, lub zostały zastąpione innemi te zadania (zresztą w bardzo małéj liczbie), które się odnoszą w oryginale do obyczajów zbyt wyłącznie angielskich i u nas mało znanych. Dodatki, jakie zostały w zadaniach porobione, więcéj niż wynagradzają, co do liczby, zadania opuszczone. Wszystkie zadania dodane, są oznaczone gwiazdką (*).

*) Mianowicie paragrafy odznaczone małemi liczbami u spodu są dodane; tak np. 236_1 , 236_2 1 t. p.

Jakkolwiek, jak powiedziałem wyżéj, dzieło stanowi samo w sobie całość zupełną i dodatków nie potrzebuje, z tém wszystkiém ze względu na potrzeby naszéj młodzieży uczącéj się, i brak podręczników, zadosyć czyniących różnym wymaganiom, sądziłem że należy cokolwiek plan samego wykładu rozszerzyć, nie zmieniając oryginału. Dla tego téż materyał rachunkowy znacznie powiększyłem, przez dodanie pewnéj liczby zadań, i wtrącenie w sam wykład paragrafów, zawiérających niektóre wskazówki i objaśnienia, bądź to rozszerzające zakres rozwiązywanych zadań, bądź téż potrzebne do uzupełnienia wiadomości teoretycznych. Ponieważ oryginał pozostał nietknięty, przeto nie można było uniknąć z tego powodu w niektórych miejscach powtarzań;—zdaniem mojém nie szkodzą one, gdyż przy początkowém uczeniu jest rzeczą prawie niemożliwą za wiele razy powtarzać. Nadto, ze względu na wymagania egzaminowe wielu naszych zakładów naukowych, na końcu książki dodałem cztery rozdziały traktujące o przedmiotach nie objętych w samém dziele, a potrzebnych u nas, są to rozdziały: I-szy o podzielności liczb, II-gi o ułamkach ciągłych, III-ci o równaniach nieoznaczonych, i IV-ty o logarytmach. Wszystkie te dodatki nie stanowią całości i nie traktują przedmiotów wyczerpująco; są dopełnieniami, obejmującemi mniéj więcéj to, co w naszych szkołach bywa wykładane. Gdy wyjdzie systematyczny kurs algiebry w bibliotece matema-

tycznéj prof. Baranieckiego, staną się one zbytecznemi i będą mogły być opuszczone; — tymczasem zaś sądzę, że pewien pożytek uczącym się przynieść mogą.

Do ułożenia ich przeważnie służyły mi dzieła:

Le jeune—Dirichlet. Vorlesungen über die Zahlen—Theorie.

Euler. Èléments d'Algebre.

Léfébure de Fourcy. Leçons d'Algébre.

Todhunter. Algebra for the use of Colleges and Schools. i niektóre inne. Do uzupełnienia zadań głównie, choć nie wyłącznie, posługiwałem się wybornym i uczonym zbiorem zadań: Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der algemeinen Arithmetik und Algebra.

Tłumacz.

Spis rozdziałów.

		str.
I.	Główne znaki (§ 1—12)	1
II.	Czynnik. Współczynnik. Potęga. Wyrazy (§ 13—23).	6
III.	Pozostałe znaki. Nawiasy (§ 24—32).	11
IV.	Zmiana porządku wyrazów. Wyrazy podobne (§ 33—42)	16
V.	Dodawanie (§ 43—47)	22
VI.	Odejmowanie (§ 48—51)	25
VII.	Nawiasy (§ 52—56).	30
VIII.	Mnożenie (§ 57—67).	34
IX.	Dzielenie (§ 68—78).	44
X.	Szczególne przypadki mnożenia (§ 79—89). . . .	57
XI.	Rozkład na czynniki (§ 90—96).	66
XII.	Największy wspólny dzielnik (§ 97—114)	74
XIII.	Najmniejsza wspólna wielokrotna (§ 115—128) . .	84
XIV.	Ułamki (§ 129—135)	91
XV.	Skracanie ułamków i sprowadzanie ich do jednakowego mianownika (§ 136—139)	97
XVI.	Dodawanie i odejmowanie ułamków (§ 140—143) .	102
XVII.	Mnożenie ułamków (§ 144—147)	111
XVIII.	Dzielenie ułamków (§ 148—152)	116
XIX.	Równania stopnia pierwszego (§ 153—169). . . .	123
XX.	Równania stopnia pierwszego (ciąg dalszy) (§ 170—181).	127
XXI.	Zagadnienia (§ 182—191).	130
XXII.	Zagadnienia (ciąg dalszy) (§ 192—204)	163
XXIII.	Równania jednoczesne stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi (§ 205—214)	194
XXIV.	Równania jednoczesne stopnia pierwszego, zawierające więcéj niż dwie niewiadome (§ 215—219) . .	216
XXV.	Zagadnienia, prowadzące do równań jednoczesnych stopnia pierwszego, zawierających więcéj niż jedną niewiadomą (§ 220—225).	225

XXVI. Podnoszenie do potęg, a w szczególności podnoszenie do kwadratu i sześcianu (§ 226—236) . . 245
XXVII. Wyciąganie pierwiastku (§ 237—265) 266
XXVIII. Wykładniki (§ 266—279) 290
XXIX. Ilości pierwiastkowe (§ 280—295) 301
XXX. Równania stopnia drugiego (§ 296—317) . . . 319
XXXI. Równania dające się sprowadzić do równań stopnia drugiego (§ 318—326) 353
XXXII. Zagadnienia prowadzące do równań stopnia drugiego (§ 328—333) 370
XXXIII. Równania jednoczesne stopnia drugiego (§ 334—343) 392
XXXIV. Zagadnienia prowadzące do równań stopnia drugiego zawierających więcéj niż jedną niewiadomą (§ 344—345) 404
XXXV. Stosunek (§ 346—356) 415
XXXVI. Proporcya (§ 357—374) 421
XXXVII. Proporcyonalność (§ 375—390) 430
XXXVIII. Postęp różnicowy (§ 391—399) 437
XXXIX. Postęp ilorazowy (§ 400—410) 444
XL. Postęp harmonijny (§ 417—414) 452
XLI. Przemiany, przestawienia i połączenia (§ 415—423). 455
XLII. Dwumian Newtona (§ 424—431). 465
XLIII. Systematy liczenia (§ 432—437). 477
XLIV. Procenty (§ 438—448) 483
Zadania rozmaite. 489
Rozwiązania zadań 533

Dodatek.

I. Podzielność liczb 583
II. Ułamki ciągłe 610
III. Równania nieoznaczone stopnia pierwszego. . . 673
IV. Logarytmy 734

OMYŁKI DOSTRZEŻONE:

str.	*wiersz*	*zamiast*	*powinno być*
1	2 od dołu	z pomocą	za pomocą
2	4 od dołu	$a - b = c$	$a - b - c$
7	2 od dołu	a	a
8	2 od dołu	a^z	a^2
10	3 od dołu	$e^4 + b\,e^2\,b^2 +$	$e^4 + 6\,e^2\,b^2$
11	zadanie 12	(w liczniku) $+ b\,a^2\,b^2$	$+ 6a^2b^2$
18	2 od góry	*dodatnémi;*	*dodatniémi*
21	zadanie 4	$\frac{4a + 3b}{b - c}$	$\frac{4a + 3b}{b + c}$
21	zadanie 7	(w mian). $a^2+2ab+b^2$	$a^2 - 2ab + b^2$
21	zadanie 12	$+ \frac{b^2 + 2bc + c^2}{b + c}$	$- \frac{b^2 + 2bc + c^2}{b + c}$
25	zadanie 18 p. wiersz	$+ x^2 z$	$- x^2 z$
34	zadanie 22	$- (3b - c - 26)$	$- (3b - c - 2b)$
34	zadanie 24	$\{ bx^2 - (4-1) \}$	$\{6x^2 - (4x-1)\}$
36	8 od dołu	$c(a - cb$	$ca - cb$
36	7 od dołu	$b(c + d$	$b(c + d)$
43	6 od góry	być.	być
43	zadanie 12	przez $3x - 1$	$3x - 6$
43	zadanie 13	$x^3 + x^2 + x - 1$	$x^3 + x^2 + x - 1$
44	zadanie 36	$a^2\,2ab + b^2 + c^2$	$a^2 - 2ab + b^2 + c^2$
47	10 od góry	$a^5 = a \times a \times a \times a \times a \times a$	$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$
47	11 od góry	$a^3 = a \times a \times a \times a$	$a^3 = a \times a \times a$
47	13 od góry	$a \times a \times a \times a$	$a \times a \times a$
48	5 od góry	$\frac{4b}{3c\,b^3}$	$\frac{4a}{3c\,b^3}$
56	zadanie 18	przez $a\,b$	przez $a - b$
56	zadanie 28	$x^4 - 13x + 3b^2$	$x^4 - 13x^2 + 36$
56	zadanie 37	$x^5 + 2x^6 + ..$ przez $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x - 1$	$x^8 + 2x^6 + ...$ przez $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$
56	zadanie 41	przez $x^3 + xy + y^2$	przez $x^2 + xy + y^2$
56	zadanie 42	$x^3 - 3xy\ y^3 - 1$	$x^3 - 3xy - y^3 - 1$
66	15 od góry	$a^8 - b^3$	$a^8 - b^8$

str.	wiersz	zamiast	powinno być
67	12 od góry	$\frac{x^4\,y^4}{x-y}$	$\frac{x^4-y^4}{x-y}$
67	13 od góry	I tak daléj:	I tak daléj.
74	3 od góry	Czytelnik,	Czytelnik
78	3 od dołu	$C\ D$	C przez D
83	zadanie 16	$x^5 - 41x - 30$	$x^3 - 41x - 30$
88	1 od dołu	$(3x^2 - 2x + 4$	$(3x^2 - 2x + 4)$
89	6 od góry	tyehż	*tychże*
90	18 od góry	XII	XIII
98	9 od dołu	$a - b\ c$	$a - b - c$
97	4 od dołu	$\frac{6a^4b^2c}{20a^2b^3d}$	$\frac{16a^4b^2c}{20a^3b^3d}$
100	zadanie 5	$\frac{4(a+b)^2}{5(a^2-b)^2}$	$\frac{4(a+b)^2}{5(a^2-b^2)}$
100	zadanie 9	(w mian). $2x-19x+35$	$2x^2 - 19x + 35$
108	zadanie 28	$\frac{x-3}{x^3-4x+16}$	$\frac{x-3}{x^2-4x+16}$
110	zadanie 36	$\frac{1}{(a-b)\ (a-c)\ (xa)}$	$\frac{1}{(a-b)\ (a-c)(x-a)}$
115	zadanie 8	$\times\ \frac{a(a+x)}{a^2-2ax+a^2}$	$\times\ \frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$
115	zadanie 15	$\times\ \frac{x^2-4a+4}{x^2-4x+3}$	$\times\ \frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}$
118	7 od góry	$x = \frac{ab}{a+b}$	$x = \frac{ab}{a+q}$.
119	9 od góry	. przeto	, przeto
120	zadanie 2	$\frac{3a^2b^2c^4}{4x^2y^3z^4}$	$\frac{3a^2b^3c^4}{4x^2y^3z^4}$
120	zadanie 11	przez $\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-1}$	przez $\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1}$
121	zadanie 19	$\left(\frac{ax}{a+x}\right)^2$	$\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$
123	zadanie 39	i:	opuścić
123	zadanie 40	$y = \frac{ab+a}{ab+1}$	opuścić
123	3 od góry	XIV	XIX
135	zadanie 41	$+\ \frac{x-2}{5} = 4$	$+\ \frac{x-5}{6} = 4$

str.	wiersz	zamiast	powinno być
140	7 od dołu	równie:	równanie:
147	zadanie 20	$-\ \frac{2x-38}{x+12}$	$-\ \frac{2x+33}{x+12}$
147	zadanie 26	$= x^2 - 25\frac{2}{15}$	$= x^2 - \frac{2}{15}$
148	zadanie 40	$\frac{0{,}135x-0{,}225}{06}$	$\frac{0{,}135x-0{,}225}{0{,}6}$
154	1 od dołu	u	tu
186	7 od góry k. wiersza	do prawéj	do lewéj
210	15 od góry	mogącéj	mogącéj.
210	1 od dołu	$9x + 15y = 40$	$9x + 15y = 48$
211	8 od dołu	$x = \frac{13.6-392}{7.6-21.2}$	$x = \frac{13.6-39.2}{7.6-21.2}$
218	2 od dołu	$20 - \frac{2}{y} = 17,$	$26 - \frac{2}{y} = 17,$
225	10 od dołu	XXIII	XXV
250	4 od góry	136_1	236_1
282	1 od góry	560.	260.
217	10 od dołu	w równanie (4)	w równanie (4),
222	2 od góry	$28\times\frac{1}{13}+15\times\frac{8}{13}+1,$	$28\times\frac{8}{13}+15\times\frac{1}{13}+1,$
238	9 od dołu	9 : 14?	9 : 14.
248	8 od dołu	i wyrażenie	wyrażenie
250	11 od dołu	zer	zerami
251	3 od góry	90	900
259	11 od góry	zwyczaj	zazwyczaj
262	12 od góry	pod A 80^2	80^2 pod A
267	10 od góry	$\sqrt{4^2a^2b^4}$	$\sqrt{4^2a^2b^4}$
272	8 od góry	$\dot{4}35\dot{6}$	$\dot{4}35\dot{6}$
278	11 od dołu	a^2	a^3
282	4 od góry	kwadratowego	sześciennego
282	16 od góry	$1\dot{2}8\dot{1}2\dot{9}0\dot{4}$	$1\dot{2}8\dot{1}2\dot{9}0\dot{4}$
306	5 od góry	$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$	$(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$
310	10 od góry	$(1-2\sqrt{15}$	$(1-2\sqrt{15})$

str.	wiersz	zamiast	powinno być
319	1 od góry	$\sqrt[3]{(2a^26)x}$	$\sqrt[3]{(2a^2b)^n}$
324	6 od dołu	$\sqrt{a^2(-1}$	$\sqrt{a^2(-1)}$
326	10 od góry	*przy x*	*przy* x^2
340	3 od góry	$x^3 - \frac{1}{3}x + 0 =$,	$x^2 - \frac{1}{3}x + 0 = 0$,
343	3 od góry	6 i 4	6 i 4.
353	1 od dołu	po 2	po 2 ;
358	13 od dołu	pierwiastki:	pierwiastki.
363	1 od dołu	podług male	podług potęg malejących
366	3 od dołu	$x^2 - 2$	$y^2 - 2$
366	1 od dołu	$+ c - o$.	$+ c = o$.
367	6 od dołu	$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a-o$,	$ax^4+bx^2+cx^2+bx+a=o$
370	2 od dołu	przyrównywamy	przyrównamy
383	6 od dołu	— 120.	i — 120.
385	1 od dołu	o 4 cale	o 4 cale kwadratowe
388	11 od góry	ile	ilu
390	9 od góry	poruszające	poruszające się
397	6 od dołu	$\frac{x^2+y^2}{x+y}$	$\frac{x^3+y^3}{x+y}$
403	6 od góry	$x + y = 3$	$x + y = 9$
406	9 od góry	$x\left((2y - \frac{1}{2}\right)$	$x\left(2y - \frac{1}{2}\right)$
417	13 od dołu	*ad*	*od*
418	2 od dołu	*k*	k^n
426	5 od góry	równemi;	równemi.
428	12 od dołu	od jedności	od jedności,
421	9 od góry	$a : b : c : d$	$a : b : : c : d$
429	2 od dołu	$a : b = b : d$	$a : b = b : c$
430	zadanie 20	$\sqrt[p]{mb_p + nd_p}$	$\sqrt[p]{mb^p + nd^p}$
434	9 od góry	A^u	A^n
442	1 od dołu	A	A?
447	7 od góry	r^n	r^n
450	10 od góry	13,	63,

str.	wiersz	zamiast	powinno być
452	7 od dołu	$A : c = A - B : A - c$	$A : C = A - B : B - C$
456	4 od dołu	miejscu,	miejscu.
458	15 od dołu	mniejsze	miejsce
458	6 od dołu	$(n-2$	$(n-2)$
458	1 od dołu	n	$\underline{\lfloor n}$
459	2 od dołu	$\lfloor n$	$\underline{\lfloor n}$
469	11 od dołu	$20\,(cy)^3(b^2)^5$	$20\,(cy)^3(b^2)^3$
471	6 od dołu	$r - 1$	$\underline{\lfloor r-1}$
471	2 od dołu	$(1 + x)$,	$(1 + x)^n$,
472	3 od góry	2_n	2^n
472	6 od góry	$(x + a)_n$	$(x + a)^n$
472	4 od dołu	$(x+a)=x^n + n\,a\,x^{u-1}$	$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1}$
473	1 od góry	dodatną	dodatnią
479	1 od góry	arn	ar^n
480	6 od góry	74144	74194
484	10 od dołu	Kr	Kn
487	9 od dołu	$FR^n + PR^{n-1} + PR^{n-2}KR^n + KR^{n-1} + \ldots + PR$	$KR^{n-2} + \ldots + KR$
495	1 od dołu	$3x - \frac{3}{y}$	$3x - \frac{2}{y}$
501	5 od dołu	a^2-b^3	a^3-b^3
511	10 od góry	$3x^2\,x^2$	$3a^2\,x^2$
516	6 od dołu	$\frac{1}{2+3^x}$	$\frac{1}{2+3x}$
521	2 od góry	$3\,\frac{1}{2}$	$3\,\frac{1}{3}$
525	9 od dołu	powiększona o	powiększona o 4,
528	5 od dołu	$\frac{1}{v^2}$	$\frac{1}{x^2}$
530	5 od góry	ró nania	równania
537	11 od dołu	$x^2 - ax + x^2$	$x^2 - ax + a^2$
541	4 od dołu	$\frac{2x^2}{x^2-1}$	$\frac{3x^2}{x^2-1}$

str.	wiersz	zamiast	powinno być
542	8 od góry	$\frac{x}{(x-a)\ (a-b)}$	$\frac{x}{(x-a)\ (x-b)}$
542	1 od dołu	na początku ostatniego	wiersza opuszczono 5)
543	2 od góry	$\frac{(x+y)^2}{a^2+y^2}$	$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$
543	2 od dołu	$x^4-3x^3a+3a^4x+x^4$	$x^4-3x^3a+3a^3x+a^4$
549	1 od dołu	12,23	12,3
551	7 od dołu	70, 42, 35 . 27	70, 42, 35.
552	5 od dołu	$\frac{64x^3}{27y^6}$	$\frac{64x^3}{27y^6}$
555	5 od góry	$2x^2+4cx+3c^2$	$2x^2+4cx-3c^2$
555	3 od dołu	$x^4+1+x^{\frac{4}{3}}$	$x^4+1+x^{-\frac{4}{3}}$
556	1 od góry	$+xy^{\frac{3}{2}}$	$-xy^{\frac{3}{2}}$
558	6 od góry	$(2ab)x$	$(2ab)^n$
560	3 od dołu	$\frac{4\ a+b)\ (a^2+b^2)}{(x-b)^2}$	$\frac{4\,(a+b)\ (a^2+b^2)}{(a-b)^2}$
563	5 od góry	$2_1-\frac{29}{24}$; $4-\frac{53}{6}$	$2_1-\frac{29}{24}$; $4,-\frac{53}{6}$.
567	2 od dołu	$62\,(\sqrt{2}+1)$	$63\,(\sqrt{2}+1)$.
568	7 od góry	36—54, 81	36,—54, 81
569	po 13-tym	dodać 14*)	
570	5 od góry	$(3x)^{-\frac{3}{4}}-5y5$	$(3x)^{-\frac{3}{4}}-5_y5$.
570	3 od dołu	$9-30x+37x^2-20x^3-4x^4$	$9-30x+37x^2-20x^3+4x^4$
571	9 od dołu	28) . 6)	28) . 6
573	1 od góry	45 gallonów	45 garncy
573	1 od dołu	$3(3n-1)$	$3(3^n-1)$
574	2 od dołu	3) $\pm11, \pm13, \pm13; \pm11$	2) $\pm11, +13, \pm13, \pm11$
575	9 od dołu	187) . 29 mil.	187) . 29 wiorst.
576	5 od dołu	3) 12 . — 24, 36	3) 12, — 24, 36
577	10 od dołu	249) 5,678 , 1,234	249) 5,678 ; 1,234
578	3 od dołu	3) $1, \frac{53}{19}, -2\frac{47}{19}$	3) $1, \frac{53}{19}, -2, \frac{47}{19}$
588	15 od dołu	$r_1k=q_3\,kr\,r_2+kr_3$	$r_1k=q_3\,kr_2+kr_3$
590	7 od dołu	liczbę	liczbą

str.	wiersz	zamiast	powinno być
603	16 od góry	$D=a^{m'}b^{n'}c'$	$D=a^{m'}b^{n'}c^{p'}$
605	12 od dołu	za m	za m'
606	15 od góry	$\frac{a^{+1}-1}{a-1}$	$\frac{a^{m+1}-1}{a-1}$
618	12 od góry	(dodatek §)	(dodatek § 2^4)
624	9 od góry	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x_1}$
627	9 od góry	$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}-m}$	$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}-m}$
636	4 od dołu	$\frac{P}{Q_4}$	$\frac{P_4}{Q_4}$
638	15 od góry	$\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_{n-1}}$	$\frac{1}{a_{n-2}}+\frac{1}{a_{n-1}}$
640	4 od góry	$Q_{n-1}\,a_n+Q_{n-2}=Q_{n-1}$	$Q_{n-1}\,a_n+Q_{n-2}=Q_n$
644	4 od góry	$P_3\,Q_3-P_2\,Q_3$	$P_3\,Q_2-P_2\,Q_3$
644	6 i 7 od g.	$P_3\,Q_2-P_2\,Q_2$	$P_3\,Q_2-P_2\,Q_3$
645	9 od dołu	(w mianow.) $Q_{n-1}\,nQ$	$Q_{n-1}\,Q_n$
646	6 od góry	$(P_n\ Q_{n-1}\ P_{n-1}\ Q_n)$	$(F_n\ Q_{n-1}-P_{n-1}\ Q_n)$
647	8 od dołu	$P_{1+1}\,Q_n$	$P_{n+1}\,Q_n$
648	10 od dołu	większe	mniejsze
652	1 od dołu	(w liczniku) $(-)^n\,y$	$(-1)_n\,y$
665	7 od dołu	a_4 , a_2 , a_3	a_1 , a_2 ,
670	6 od dołu	$(Q''-Q)\,P'$	$(Q''-Q)\,P'$
722	11 od dołu	najczęstszym	najważniejszym
723	1 od góry	§ 50*	§ 47*,
723	10 od góry	§ 41*	§ 45*.
724	5 od góry	§ opuścić	
730	3 i 4 od dołu	zadanie (h)	$89\,x-144\,y=1$.
730	2 od dołu	(j) $\frac{73\,x+17}{19}$	$\frac{73x+17}{19}=$
730	2 od dołu	(i) $11x=13y=36-3x=133$;	$11x-13y=36y-3x-133$
732	10 od dołu	rodzaju	rodzaju:
732	9 od dołu	kul,	kul
734	4 od dołu	Rozbierzmy też	Rozbierzmy
735	6 od góry	c	c

str.	*wiersz*	*zamiast*	*powinno być*
735	16 od góry	c równości	c w równości
735	16 od góry	doprowadzi	prowadzi
737	7 od dołu	$\frac{1}{a}$ 1	$\frac{1}{a}$, 1
738	15 od dołu	$(1+k)^x > 1+k$	$(1+k)^x > 1+kx$
743	9 od góry	wartości	wartość
743	61*	*Początek § 61* powinien być:* Pozostaje nam jeszcze odpowiedzieć na to pytanie, kiedy wartość na x, zadosyć czyniąca równaniu $a^x = c$ będzie wymierną w tém przypuszczeniu, że a i c są całkowite.	
743	9 od dołu	wyraz „pytanie“	opuścić
744	10 od góry	$\alpha\, p = x'q$	$\alpha\, p = \alpha' q$
747	13 od góry	$ax_2 = N_2$	$a^{x_2} = N_2$
747	14 od dołu	$a^{x+1}\, x+x_2+...$	$a^{x++x}x_1+...$
749	1 od dołu	$a\ \frac{x}{q}$	$a^{\frac{x}{q}}$
757	14 od góry	mantysy	mantysy;
758	12 od góry	liczb	liczby
761	5 od dołu	mantysy.	mantysy;
762	6 od góry	licznika:	licznika.
757	1 od dołu	*Log* 10^{m-1})	*Log* (10^{m-1})
762	9 od góry	—1,6979700	—1,6989700
775	8 od dołu	stają się	staje się
765	8 od góry	$\bar{3}$,4127964,	$\bar{3}$,4127964
767	9 od dołu	oczu	oczu,
778	3 i 6 od dołu	nie i tym logarytmem możemy znalsść na pamięć, wypisując	i tym logarytmem możemy znaleść na pamięć, nie wypisując
781	13 od góry	liczby 3,5786;	liczby 3,5786,
789	4 od góry	wyżéj,	wyżéj (§ 70*),
791	5 od góry	*Log* 79,3	*Log* 793
793	2 od dołu	(tutaj przez 1,53);	(tutaj przez 1,53),
794	3 od dołu	obu części	obu stron
796	3 od góry	*Log* $\overset{k}{K}$	*Log* K
796	6 od dołu	obecnéj;	obecnéj,

ALGIEBRA POCZĄTKOWA.

I

Główne znaki.

1. Algiebra jest nauką, w któréj rozumujemy nad liczbami, zapomocą głosek, użytych do oznaczenia liczb i pewnych znaków, użytych do oznaczenia tak działań wykonywanych nad témi liczbami, jako też i związków zachodzących pomiędzy niemi.

2. Liczby mogą być albo *znanemi*, albo téż takiemi, których znaczenie należy dopiéro znaleść, i które z tego powodu nazywają się *nieznanemi* lub *niewiadomemi*. Zazwyczaj pierwsze, t. j. *znane* lub *wiadome*, oznaczają się początkowemi głoskami alfabetu *a, b, c* i t. d , *niewiadome* zaś *ostatniemi* głoskami *x, y, z*. Nie jest to jednak prawidło niewzruszone i dla tego téż nie potrzebuje być ściśle zachowywane. Liczby mogą być *całkowite* i *ułamkowe*. Wyraz *ilość* nie jednokrotnie używa się w tém samém znaczeniu, co i wyraz *liczba*; wyraz *całkowita* jest często używany zamiast *liczba całkowita*.

3. Uczący się powinien się przyzwyczaić do używania głosek, oznaczających liczby i nauczyć się znaczenia znaków; dla tego téż zaczynamy od wytłumaczenia najważniejszych znaków i objaśnienia ich użycia. Przystępujący do uczenia się algiebry, powi-

nie już umieć zasady arytmetyki i rozumieć użycie najogólniejszych prawd, z któremi spotykamy się we wszystkich częściach matematyki, takich jak: *jeżeli równe ilości dodamy do równych, otrzymamy summy równe* i t. p.

Prawdy takie, jak powyższe, widoczne same przez się, bez żadnego rozumowania, nazywamy *pewnikami* (axioma); prawdy i zdania zaś takie, o istnieniu których nabiéramy przekonania dopiéro po pewnym szeregu rozumowań, nazywamy *twierdzeniami* (theorema).

4. Znak + położony przed liczbą oznacza, że ta liczba ma być *dodaną*. Tak np. $a + b$ pokazuje, że liczba oznaczona przez b ma być dodaną do liczby oznaczonéj przez a. Jeżeli a oznacza 9 a b oznacza 3, wtedy $a + b$ oznacza 12. Znak + czyta się *więcéj*; tym sposobem $a + b$ przeczytamy: *a więcéj b*.

5. Znak — położony przed liczbą pokazuje, że liczba ta ma być *odjętą*. Tak więc $a - b$ oznacza, że liczba oznaczona przez b ma być odjętą od liczby oznaczonéj przez a. Jeżeli a oznacza 9, b zaś oznacza 3, wtedy $a - b$ oznacza 6. Znak — nazywa się znakiem *mniéj*, i $a - b$ wymawia się tak: *a mniéj b*.

6. Podobnież $a + b + c$ oznacza, że mamy dodać b do a i następnie dodać c do tego co wypadnie; $a + b - c$ oznacza, że mamy dodać b do a i następnie odjąć c od wypadku; $a - b + c$ oznacza, że należy b odjąć od a i następnie do wypadku dodać c; nakoniec $a - b - c$ oznacza, że należy b odjąć od a, i następnie od tego co wypadnie odjąć c.

7. Znak = oznacza, że liczby, pomiędzy któremi on znajduje się, są *równe*. Tak więc $a = b$ oznacza, że liczba przedstawiona przez a jest równą liczbie przedstawionéj przez b. $a + b = c$ oznacza, że summa liczb przedstawionych przez a i przez b jest równą liczbie, którą przedstawia c, tak, że jeżeli np. a oznacza 9, b oznacza 3, wtedy c musi oznaczać 12. Znak = nazywa się *znakiem równości*, i $a = b$ czyta się „*a równa się b*“ lub „*a jest równe b*“.

8. Znak $\times$ oznacza, że liczby, pomiędzy któremi on stoi, mają być przez siebie *pomnożone*. Tak np. $a \times b$ oznacza, że liczba, którą przedstawia a ma być pomnożoną przez liczbę, którą przedstawia b. Jeżeli a znaczy 9, b zaś 3, wtedy $a \times b$ oznacza 27. Znak $\times$ nazywa się *znakiem mnożenia* i $a \times b$ czyta się „*a pomnożone przez b*“, lub krócéj „*a przez b*“. Podobnież $a \times b \times c$ oznacza iloczyn liczb, które przedstawiają głoski a, b i c.

9. Jednakże znak mnożenia bardzo często opuszcza się dla krótkości; tym sposobem pisze się ab zamiast $a \times b$ i ma toż samo znaczenie; pisze się także abc w miejsce $a \times b \times c$ i t. d.

Znak mnożenia nie może być opuszczonym, gdy liczby są wyrażone zwyczajnym sposobem za pomocą cyfr. Tak np. 45 nie może przedstawiać iloczynu z 4 przez 5, ponieważ 45 ma już inne, poprzednio mu nadane znaczenie, mianowicie *czterdzieści pięć*. Musimy przeto przedstawić iloczyn 4 przez 5 w inny sposób i wybieramy do tego sposób pisania 4×5. Niekiedy jednak punkt jest używany w miejsce znaku $\times$; w uważanym poprzednio przypadku możemy napisać $4 . 5$ zamiast 4×5. Czasami także pisze się punkt pomiędzy dwiema głoskami zamiast znaku $\times$: tak, że $a . b$ używa się zamiast $a \times b$. Lecz tutaj punkt jest zu-

pełnie zbytecznym, gdyż $a\,b$ oznacza toż samo, co $a \times b$. Również ani punkt ani znak $\times$ nie jest potrzebny pomiędzy liczbą przedstawioną w zwykły sposób—cyframi i liczbą przedstawioną przez głoskę: tak *np.* $3a$ pisze się zamiast $3 \times a$ i ma toż samo znaczenie.

10. Znak : lub $\div$ oznacza, że liczba która przed nim się znajduje ma być *podzieloną* przez liczbę znajdującą się za nim. I tak $a : b$ lub $a \div b$ pokazuje, że liczba, oznaczona przez a, ma być podzieloną przez liczbę, oznaczoną przez b. Jeżeli a znaczy 8, a b znaczy 4, wtedy $a : b$ znaczy 2. Znak ten : nazywa się *znakiem dzielenia*, i $a : b$ czyta się tak: „*a podzielone przez b*“,

Jest jeszcze inny sposób oznaczania, że jedna liczba ma być podzieloną przez drugą; mianowicie: dzielna pisze się nad dzielnikiem i pomiędzy nimi kreśli się linijka. Tak np. $\frac{a}{b}$ używa się zamiast $a : b$ i ma zupełnie toż samo znaczenie.

11. Głoski alfabetu i znaki, których użycie już wytłumaczyliśmy lub które w dalszym ciągu spotkamy, nazywają się, razem wzięte, *symbolami algiebraicznemi*, ponieważ ich właśnie używamy do przedstawienia liczb, nad któremi rozumujemy, działań, które na nich wykonywamy i związków, jakie między niemi istnieją. Każdy zbiór symbolów algiebraicznych stanowi to, co nazywamy *wyrażeniem algiebraicznem*.

12. Podajemy tutaj kilka przykładów jako ćwiczenie na użycie tych symbolów, które były objaśnione. W przykładach tych należy znaleźć wartości liczebne niektórych wyrażeń algiebraicznych.

Przypuśćmy że $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 5$, $e = 6$, $f = 0$.

Wtedy:

$$7a + 3b - 2d + f = 7 + 6 - 10 + 0 = 13 - 10 = 3.$$

$$2ab + 8bc - ae + df = 4 + 48 - 6 + 0 = 52 - 6 = 46.$$

$$\frac{4ac}{b} + \frac{10be}{cd} - \frac{de}{ac} = \frac{12}{2} + \frac{120}{15} - \frac{30}{3} = 6 + 8 - 10 = 14 - 10 = 4.$$

$$\frac{4c + 5e}{d - b} = \frac{12 + 30}{5 - 2} = \frac{42}{3} = 14.$$

PRZYKŁADY I.

Znaleźć wartości liczebne następujących wyrażeń, jeżeli:

$a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$, $f = 0$:

1. $9a + 2b + 3c - 2f$
2. $4e - 3a - 3b + 5c$
3. $7ae + 3bc + 9d - af$
4. $8abc - bcd + 9cde - def$
5. $abcd + abce + abde + acde + bcde$
6. $\frac{4a}{b} + \frac{9b}{c} + \frac{8c}{d} - \frac{5d}{e}$.
7. $\frac{4ac}{b} + \frac{8bc}{d} - \frac{5cd}{e}$.
8. $\frac{12a}{bc} + \frac{6b}{cd} + \frac{20c}{de}$.
9. $\frac{cde}{ab} + \frac{5bcd}{ae} - \frac{6ade}{bc}$.

10. $7e + bcd \div \frac{3bde}{2ac}$.

11. $\frac{2a+5b}{c} + \frac{3b+2c}{d} - \frac{a+b+c+d}{2e}$.

12. $\frac{b+c+3e}{e+c-d}$.

13. $\frac{a+c}{c-a} + \frac{b+d}{d-b} + \frac{c+e}{e-c}$.

14. $\frac{a+b+c+d+e}{e-d+c-b+a}$.

II.

Czynnik. Współczynnik. Potęga. Wyrazy.

13. Gdy pewna liczba jest iloczynem dwóch lub ilukolwiek liczb, wtedy każda z tych ostatnich nazywa się *czynnikiem* tego iloczynu. Tak *np.* $2 \times 3 \times 5 = 30$; i każda z liczb 2, 3 i 5 jest *czynnikiem* iloczynu 30. Albo też możemy uważać 30 jako iloczyn z dwóch czynników 2 i 15, lub jako iloczyn z dwóch czynników 6 i 5, albo jeszcze jako iloczyn z czynników 3 i 10. Podobnież $4ab$ możemy uważać jako iloczyn z dwóch czynników 4 i ab, lub też jako iloczyn z czynników $4a$ i b, albo jako iloczyn z dwóch czynników $4b$ i a; albo jeszcze jako iloczyn z trzech czynników 4, a i b.

14, Gdy liczba pewna jest iloczynem z dwóch czynników, wtedy każdy z tych czynników nazywa się *współczynnikiem* względem drugiego. Tak *np.* uważając $4ab$ za iloczyn z 4 i ab, 4 nazywamy współczynnikiem dla ab, również jak i ab możemy nazwać współczynnikiem dla 4; uważając znowuż $4ab$ jako iloczyn z $4a$ i z b, nazywamy $4a$ współczynnikiem dla b, zaś b współczynnikiem $4a$. W praktyce używać będziemy wyrazu współczynnik najczęściéj w pierwszem tylko znaczeniu, t. j. uważając 4 jako współczynnik ab; w tym razie wszakże, dla tém dokładniejszego wyrażenia o czém mowa, nazywać będziemy 4 *współczynnikiem liczebnym*. W ogóle jeżeli jakikolwiek iloczyn składa się z jednego czynnika, wyrażonego *arytmetycznie* t. j, za pomocą cyfr, i z drugiego czynnika wyrażonego *algiebraicznie* t. j. za pomocą jednéj lub kilku głosek, wtedy pierwszy czynnik nazywa się *współczynnikiem liczebnym*.

15. Gdy wszystkie czynniki pewnego iloczynu są równe, wtedy iloczyn nazywa się *potęgą* tegoż czynnika. Tak *np.* 7×7 nazywa się *drugą potęgą* 7; $7 \times 7 \times 7$ nazywa się *trzecią potęgą* 7; $7 \times 7 \times 7 \times 7$ nazywa się *czwartą potęgą* 7 i t. d. Podobnież $a \times a$ nazywa się *drugą potęgą* a; $a \times a \times a$ nazywa się *trzecią potęgą* a; $a \times a \times a \times a$ nazywa się *czwartą potęgą* a; i t. d. Samo zaś a nazywa się *pierwszą potęgą* a.

16. Potęga króciéj oznacza się w następujący sposób: zamiast pisać wszystkie równe czynniki, pisze się ten czynnik raz jeden i nad nim liczba, pokazująca ile razy on miał być powtórzony. Tak *np.* a^2 oznacza $a \times a$; a^3 używa się dla oznaczenia $a \times a \times a$; a^4 ma toż samo znaczenie co i $a \times a \times a \times a$ i t. d. Zaś a^1 może być użyte do oznaczenia pierwszéj potęgi a; to jest tegoż samego a; tym sposobem a^1 ma toż samo znaczenie co i a.

17. Liczba znajdująca się nad drugą liczbą, i pokazująca ile razy ta ostatnia ma być wziętą za czynnik dla utworzenia potęgi, nazywa się *wykładnikiem potęgi* albo krócéj *wykładnikiem.*

Tak *np.* w a^3, wykładnikiem jest 3; w a^n, n jest wykładnikiem.

13. Uczący się winien bardzo starannie rozróżniać *współczynnik* od *wykładnika.* Tak *np.* $3c$ oznacza *trzy razy po c*, tutaj 3 jest *współczynnikiem.* Lecz c^3 oznacza *c razy c* i ten iloczyn jeszcze powtórzony *razy c.* To jest:

$$3c = c + c + c$$
$$c^3 = c \times c \times c.$$

18. Potęga druga *a*, to jest a^2, nazywa się często *kwadratem a*, lub *a podniesionem do kwadratu*, potęga trzecia *a*, to jest a^3, nazywa się *sześcianem a*, lub *a podniesionem do sześcianu.* Dla wyższych potęg nie ma podobnych osobnych wyrazów; a^4 czyta się: *a podniesione do potęgi czwartéj*, lub *a do potęgi czwartéj*, lub krócéj *a do czwartéj*, albo nakoniec niekiedy [choć nie zupełnie poprawnie] *a cztery.*

20. Jeżeli wyrażenie algiebraiczne, nie zawiera części połączonych z innémi częściami znakami + lub —, wtedy nazywa się ono wyrażeniem *pojedynczém* lub *jednomianem.* Jeżeli zaś wyrażenie algiebraiczne zawiera części połączone z sobą znakami + lub —, wtedy nazywa się ono *złożoném* lub *wielomianem*, a te części jego, które są połączone znakami + lub — nazywają się *wyrazami.*

I tak ax, $4bc$ i $5a^2c^2$ są jednomianami; $a^2+b^3-c^4$ jest wyrażeniem złożonem, i a^2, b^3 i c^4 są jego wyrazami.

21. Gdy wyrażenie składa się z dwóch wyrazów, wtedy nazywa się ono *dwumianem*,—gdy składa się z trzech wyrazów nazywa się *trójmianem*; każde wyrażenie złożone z kilku wyrazów nazywa się w ogóle *wielomianem.* Tak *np.* $2a+3b$ jest dwumianem; $a-2b+5c$ jest trójmianem; a zaś $a-b+c-d-e$ może być nazwane wielomianem.

22. Każda z głosek wchodzących do wyrazu nazywa się *wymiarem* wyrazu, a liczba tych głosek nazywa się *stopniem* wyrazu. Tak *np.* $a^2\,b^3\,c$ czyli $a \times a \times b \times b \times b \times c$ jest o sześciu wymiarach, czyli *szóstego stopnia.* Współczynnik liczebny przy tém nie rachuje się wcale; $9a^3\,b^4$ i $a^3\,b^4$ są jednakowego stopnia, mianowicie siódmego.

Tym sposobem wyraz *wymiary* odnosi się do liczby mnożeń algiebraicznych, które w wyrazie należy wykonać; *stopień wyrazu*, czyli *jego wymiar* jest *summą wykładników wszystkich jego czynników algiebraicznych*, przyczém należy pamiętać, że jeżeli nad głoską nie ma żadnego wykładnika, wtedy należy porachować wykładnik 1, jak to było wskazaném w artykule 16.

23. Wyrażenie nazywa się *jednorodném* gdy wszystkie jego wyrazy są jednego stopnia. Tak *np.* $7a^3+3a^2b+4abc$ jest wielomianem jednorodnym, gdyż każdy wyraz jest stopnia trzeciego.

Podajemy teraz kilka przykładów dalszych na wynalezienie wartości liczebnych wyrażeń algiebraicznych.

Przypuśćmy że: $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$, $f=0$,

Wtedy:

$b^2 = 4$; $b^3 = 8$; $b^4 = 16$; $b^5 = 32$.

$3b^2 = 3 \times 4 = 12$; $5b^3 = 5 \times 8 = 40$; $9b^5 = 9 \times 32 = 288$.

$e^a = 5^1 = 5$; $e^b = 5^2 = 25$; $e^c = 5^3 = 125$.

$a^2 b^3 = 1 \times 8 = 8$; $3b^2 c^2 = 3 \times 4 \times 9 = 108$.

$d^3 + c^2 - 7ab + f^2 = 64 + 9 - 14 + 0 = 59$.

$$\frac{3c^2 - 4c - 10}{c^3 - 2c^2 + 5c - 23} = \frac{27 - 12 - 10}{27 - 18 + 15 - 23} = \frac{5}{1} = 5.$$

$$\frac{e^3 + d^3}{e + d} - \frac{c^3 - a^3}{c - a} = \frac{125 + 64}{5 + 4} - \frac{27 - 1}{3 - 1} = \frac{189}{9} - \frac{26}{2} =$$

$$= 21 - 13 = 8.$$

PRZYKŁADY II.

Znaleść wartości liczbne następujących wyrażeń: jeżeli $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$; $d = 4$; $e = 5$; $f = 0$.

1. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$.
2. $e^3 - d^3 + c^3 - b^3 + a^3$.
3. $abc^2 + bcd^2 - dea^2 + f^3$.
4. $c^3 - 2c^2 + 4c - 13$.
5. $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.
6. $e^4 + 6e^2 b^2 + b^4 - 4e^3 b - 4eb^3$.
7. $\dfrac{b^2 c^2}{4a} + \dfrac{de}{b^2} - \dfrac{32}{b^4}$.
8. $\dfrac{2e + 2}{e - 3} + \dfrac{3e - 9}{e - 2} + \dfrac{e^2 - 1}{e + 3}$.

9. $\dfrac{a^2 + b^2}{e} + \dfrac{c^2 + e^2}{b} + \dfrac{e^2 - d^2}{c}$.
10. $\dfrac{8a^2 + 3b^2}{a^2 + b^2} + \dfrac{4c^2 + 6b^2}{c^2 - b^2} - \dfrac{c^2 + d^2}{e^2}$.
11. $\dfrac{28}{a^2 + b^2 + c^2} + \dfrac{12}{d^2 - e^2 - b^2} + \dfrac{4}{a^2 + e^2 - c^2 - d^2}$.
12. $\dfrac{a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4}{a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}$.
13. $\dfrac{d^c}{b^e}$.
14. $\dfrac{e^c + b^a}{c^b - b^c}$.
15. $\dfrac{b^c + d^c}{b^2 + d^2 - bd}$;
16. $\dfrac{e^c - d^c}{e^2 + ed + d^2}$.

III.

Pozostałe znaki. Nawiasy.

24. Niekiedy różnica pomiędzy dwiema liczbami oznacza się znakiem ∞; tak więc $a \infty b$ oznacza różnicę pomiędzy liczbami, jakie przedstawiają głoski a i b; różnica ta jest równą $a - b$ lub $b - a$, stosownie do tego czy a jest większe od b czy od niego mniejsze. Wszakże ten znak używa się bardzo rzadko.

25. Znak $>$ oznacza: *„większe od“*, znak zaś $<$ oznacza *„mniejsze od“*; tak np. $a > b$ wyraża, że liczba oznaczona przez a jest większą niż liczba oznaczona przez b; i znowuż $b < a$ wyraża, że liczba oznaczona przez b jest mniejszą od liczby oznaczonéj przez a. W obu przypadkach otwór kąta jest zwrócony ku liczbie większéj.

26. Znak $\therefore$ oznacza *następnie*; znak zaś $\because$ oznacza *stąd* (używane tylko w angielskich dziełach).

27. *Pierwiastkiem kwadratowym* danéj liczby nazywa się taka liczba, któréj *kwadrat* jest właśnie równy liczbie danéj. *Pierwiastek sześcienny* danéj liczby jest to taka liczba, któréj *sześcian* jest równy liczbie danéj. Podobnież *pierwiastkiem potęgi czwartéj* danéj liczby, jest to liczba, któréj czwarta potęga jest równą danéj liczbie i t. d.

Tak np. ponieważ $49 = 7^2$, więc pierwiastek kwadratowy 49 jest 7; i podobnie: jeżeli $a = b^2$, to b będzie pierwiastkiem kwadratowym a. Daléj: ponieważ $125 = 5^3$, przeto pierwiastek sześcienny 125 jest 5; i jeżeli $a = c^3$, wtedy c jest pierwiastkiem sześciennym a.

28. Pierwiastek kwadratowy z a oznacza się tak: $\sqrt{a}$, jakkolwiek może także być oznaczonym przez $\sqrt[2]{a}$. Pierwiastek sześcienny z a jest oznaczony tak: $\sqrt[3]{a}$. Pierwiastek potęgi czwartéj z a oznacza się w ten sposób: $\sqrt[4]{a}$. I tak daléj.

Więc: $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt[3]{8} = 2$.

Znak $\sqrt{\ }$ ma być pierwszą literą zmienioną wyrazu *radix*, oznaczającego *pierwiastek*.

29. Gdy dwie lub więcéj liczb mają być przy pewném działaniu uważane za jedną liczbę, wtedy zamykamy je w *nawias*. Tak np. przypuśćmy, że chcemy oznaczyć, iż summa dwóch liczb a i b ma być pomnożoną przez c: wtedy oznaczamy to w ten sposób:

$(a+b) \times c$, lub $\{a+b\} \times c$; lub prościéj $(a+b)c$ lub $\{a+b\}c$; w każdém z tych wyrażeń cała summa $a+b$ ma być pomnożoną przez c. Gdybyśmy opuścili nawias, mielibyśmy $a+bc$, i w tém wyrażeniu *tylko* b ma być pomnożone przez c i wypadek dodany do a. Podobnie $(a+b-c)d$ oznacza, że cały wypadek $a+b-c$ ma być pomnożony przez d; gdybyśmy zaś opuścili nawias wtedy mielibyśmy $a+b-cd$, i w tém wyrażeniu *tylko* c ma być pomnożone przez d i wypadek odjęty od $a+b$.

Również $(a-b+c) \times (d+e)$ oznacza, że wypadek $a-b+c$ ma być pomnożony przez wypadek z $d+e$. To działanie może być oznaczone prosto w ten sposób $(a-b+c)(d+e)$, podobnie jak $a \times b$ było skrócone na ab.

Podobnież $\sqrt{\ }(a+b+c)$ oznacza, że należy najprzód znaleść wypadek z działania wyrażonego przez $a+b+c$, i następnie znaleść pierwiastek kwadratowy z tego wypadku.

Podobnież $(ab)^2$ oznacza $ab \times ab$, równie jak $(ab)^3$ oznacza $ab \times ab \times ab$.

Podobnie jeszcze $(a+b-c) : (d+e)$ oznacza, że wypadek wyrażony przez $a+b-c$ ma być podzielonym przez wypadek wyrażony przez $d+e$.

30. Niekiedy zamiast nawiasu kreśli się liniia nad témi liczbami, które mają być uważane jako jedna liczba. Tak np. $\overline{a-b+c} \times \overline{d+e}$ używa się zamiast $(a-b+c) \times (d+e)$. Linija nakreślona i zastępująca nawias nazywa się *vinculum* [1]). Podobnie

[1]) Możnaby ją nazwać po polsku *kréską*, jak to robi Sniadecki, gdyby zaszła tego potrzeba. Tł.

wyrażenie $(a+b-c):(d+e)$ może być tak napisane $\frac{a+b-c}{d+e}$; tutaj linija nakreślona pomiędzy $a+b-c$ i $d+e$ zastępuje nawiasy.

31. W tém co poprzedza objaśniliśmy wszystkie znaki używane w algiebrze. Należy tu jeszcze zauważyć, że w wielu przypadkach wyraz *znak* używa się specyjalnie dla oznaczenia dwóch znaków + i —; tak np. w wyrażeniu prawidła na odejmowanie mówić będziemy o *zmianie znaków*, rozumiejąc pod tém znaki + i —; podobnież w mnożeniu i dzieleniu mówić będziemy o *prawidle znaków*, rozumiejąc pod tém prawidło odnoszące się do znaków + i —.

32. Podamy tutaj kilka nowych jeszcze przykładów na wynajdywanie wartości liczebnych wyrażeń:

Przypuśćmy, że $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=5$, $e=8$. Wtedy:

$$\sqrt{2b+4c}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4;$$

toż samo można inaczéj napisać tak:

$$\sqrt{\ }(2b+4c)=\sqrt{\ }(4+12)=\sqrt{\ }(16)=4.$$

$$\sqrt[3]{4c-2b}=\sqrt[3]{12-4}=\sqrt[3]{8}=2.$$

$$e\sqrt{2b+4c}-(2d-b)\sqrt[3]{4c-2b}=8\times4-8\times2=$$
$$=32-16=16.$$

$$\sqrt{(e-b(2e-5b)}=\sqrt{(8-2)(16-10)}=\sqrt{6\times6}=6.$$

$$\{(e-d)(b+c)-(d-c)(c+a)\}(a+d)=$$
$$=\{3\times5-2\times4\}6=(15-8)6=7\times6=42.$$

$$\sqrt[3]{c^3+3c^2b+3cb^2+b^3}:\sqrt{a^2+b^2-2ab}=$$
$$=\sqrt[3]{27+54+36+8}:\sqrt{1+4-4}=\sqrt[3]{125}:1=5.$$

PRZYKŁADY III.

Znaleść wartości liczebne następujących wyrażeń algiebraicznych, wiedząc że:

$a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=5$, $e=8$:

1. $a(b+c)$; 2. $b(c+d)$; 3. $c(e-d)$.
4. $b^2(a^2+e^2-c^2)$; 5. $c^2(e^2-b^2-c^2)$;
6. $\frac{a^2+c^2+d^2}{a^2+b^2}$; 7. $\frac{9a+3d^2+e^2}{2c^2-4b^2}$;
8. $\sqrt{3bce}$; 9. $\sqrt{2b+4d+5e}$.
10. $(a+2b+3c+5e-4d)(6e-5d-4c-3b+2a)$.
11. $(a^2+b^2+c^2)(e^2-d^2-c^2)$; 12. $(3d^2-7c^2)^2$;
13. $e\sqrt{d^2-3e}+d\sqrt{d^2+3e}$.
14. $e-\{\sqrt{e+1}+2\}+(e-\sqrt[3]{e})\sqrt{e-4}$.
15. $\sqrt{a^2+2ab+b^2}\times\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$
16. $\sqrt[3]{c^3-3c^2a+3ca^2-a^3}:\sqrt{b^2+c^2-2bc}$.

IV.

Zmiana porządku wyrazów. Wyrazy podobne.

33. Gdy wszystkie wyrazy jakiegokolwiek wyrażenia algiebraicznego są połączone znakiem +, wtedy obojętną jest rzeczą w jakim *porządku* są one napisane: tak np. $5+7$ i $7+5$ dają tenże sam wypadek, mianowicie 12. Również $a+b$ i $b+a$ dają tenże sam wypadek, mianowicie summę tych liczb, które są przedstawione głoskami a i b. Fakt ten możemy wyrazić algiebraicznie w ten sposób:

$$a+b=b+a.$$

I podobnie:

$$a+b+c=a+c+b=b+c+a.$$

34. Gdy wyrażenie składa się z pewnéj liczby wyrazów, poprzedzonych znakiem + i pewnéj liczby wyrazów, poprzedzonych znakiem −, wtedy możemy napisać najprzód pierwsze wyrazy w takim porządku, w jakim nam się spodoba i następnie drugie wyrazy, także w takim porządku, w jakim chcemy. Jest to widoczne z ogólnych zasad arytmetyki. Tak naprzykład:

$$7+8-2-3=8+7-2-3=7+8-3-2=$$
$$=8+7-3-2.$$

$$a+b-c-e=b+a-c-e=a+b-e-c=$$
$$=b+a-e-c.$$

35. W niektórych przypadkach możemy zmienić daléj jeszcze porządek wyrazów, mieszając wyrazy,

które są poprzedzone znakiem − z wyrazami, które są poprzedzone znakiem +. Tak np. przypuszczając, że a równa się 10, b jest równe 6, a c jest równe 5, mamy:

$$a+b-c=a-c+b=b-c+a;$$

gdyż w każdym razie otrzymujemy na wypadek 11.

Lecz przypuśćmy, że a jest równe 2, b jest równe 6, a c równa się 5; wtedy wyrażenie $a-c+b$ przedstawia pewną trudność, gdyż w niém wypada odjąć większą liczbę od mniejszéj, mianowicie 5 od 2. Przyjmiemy tutaj, że takie wyrażenie jak $a-c+b$, gdy c jest większe od a, ma toż samo znaczenie co i $a+b-c$. Na teraz nie będziemy jeszcze używać takiego wyrażenia jak $a+b-c$ w inném znaczeniu, jak tylko w takiém, gdy c jest mniejsze aniżeli $a+b$; tym sposobem $a+b-c$ nie przedstawia żadnéj trudności. Podobnież uważać będziemy $-b+a$ jako mające toż samo znaczenie, co i $a-b$.

36. Tym sposobem wartość liczebna wyrażenia algiebraicznego pozostaje bez zmiany, jakikolwiek byłby porządek wyrazów, które je składają. Wypływa to, jak widzieliśmy, w części z naszych pojęć o dodawaniu i odejmowaniu, w części zaś z *umowy*: jakie znaczenie należy przypisywać wyrażeniu algiebraicznemu, do którego, ściśle biorąc, nasze zwykłe pojęcia arytmetyczne zastosować się nie dadzą.

37. Często nam wypadnie, podobnie jak to miało miejsce w Art. 34, rozróżniać te wyrazy w wyrażeniu algiebraicznem, które są poprzedzone znakiem +, od tych wyrazów, które są poprzedzone znakiem −; i z tego powodu następujące określenie zostało przyjętém:

Te wyrazy, które w wyrażenie algiebraiczném są poprzedzone znakiem + nazywają się wyrazami *dodatniémi*; te zaś wyrazy, które są poprzedzone znakiem —, nazywają się wyrazami *odjemnémi*. To określenie jest tutaj podane tylko dla krótkości i tym wyrazom *dodatny* i *odjemny* nie należy przypisywać żadnego innego znaczenia nad to, które jest wyrażone w powyższém określeniu.

38. Oczywiście może się przytrafić w wyrażeniu algiebraiczném taki wyraz, który *nie jest poprzedzony żadnym znakiem*; takim jest mianowicie wyraz pierwszy. Taki wyraz *zalicza się zawsze do wyrazów dodatnych*, to jest uważa się tak, jak gdyby przed nim znajdował się znak +. Jeżeli by w porządku wyrazów wielomianu wprowadzono taką zmianę, że wyraz, który stał z początku na pierwszém miejscu i nie był poprzedzony żadnym znakiem, zajął następnie inne miejsce, w takim razie przed nim należy napisać znak +. Naprzykład:

$$a + b - c = b + a - c = b - c + a;$$

tutaj wyraz a nie ma żadnego znaku przed sobą w pierwszém wyrażeniu, lecz w innych, równoznacznych wyrażeniach jest on poprzedzony znakiem +. Stąd mamy następujący ważny dodatek do określenia w Art. 37: *jeżeli wyraz nie ma przed sobą żadnego znaku, wtedy należy się przed nim domyślać znaku* +.

39. Wyrazy nazywają się *podobnémi* wtedy, gdy albo niczém się nie różnią od siebie, albo też gdy się różnią tylko swojemi współczynnikami liczebnemi; w przeciwnym razie nazywają się *niepodobnémi*. I tak: a, $4a$, $7a$ są wyrazami podobnemi; a^2, $5a^2$ i $9a^2$ są wyrazami podobnemi ab, $3ab$, $8ab$ są również podobne; lecz a^2, ab i b^2 są wyrazami niepodobnemi.

40. Wyrażenie, które zawiera wyrazy podobne, może być uproszczone. Tak np. uważmy wyrażenie:

$$6a - a + 3b + 5c - b + 3c - 2a;$$

na zasadzie art. 35 to wyrażenie jest równoznaczne z wyrażeniem:

$$6a - a - 2a + 3b - b + 5c + 3c.$$

Lecz $6a - a - 2a = 3a$; gdyż jakąkolwiek by a oznaczało liczbę, zawsze jeżeli od $6a$ odejmiemy a pozostanie $5a$, jeżeli zaś od $5a$ odejmiemy $2a$, pozostanie $3a$. Podobnież $3b - b = 2b$; i $5c + 3c = 8c$. Tym sposobem powyższe wyrażenie może być przedstawione w prostszéj postaci:

$$3a + 2b + 8c.$$

Inny przykład: weźmy pod uwagę wyrażenie $a - 3b - 4b$. Jest ono równe $a - 7b$. Gdyż jeżeli od pewnéj liczby a mamy odjąć $3b$, a następnie od pozostałéj reszty odjąć jeszcze $4b$, wtedy oczywiście otrzymamy ten sam wypadek za pomocą jednego działania, odejmując $7b$ od a: wypływa to z pierwszych zasad arytmetyki. Więc:

$$a - 3b - 4b = a - 7b.$$

41. Możemy teraz objaśnić znaczenie takiego wyrażenia, jak następujące:

$$-3b - 4b = -7b.$$

Nie możemy odjąć $3b$ od niczego i następnie odjąć $4b$ od pozostałości, tak, że powyższe wyrażenie

nie jest zrozumiałém samo przez się, będąc oddzielone od reszty pewnego zdania algiebraicznego, w którém może się ono przytrafić. Lecz może być ono wytłumaczone w taki sposób: jeżeli w ciągu jakiegokolwiek działania algiebraicznego mamy odjąć $3b$ od pewnéj liczby, a następnie odjąć $4b$ od reszty. wtedy zamiast tych dwóch działań możemy odrazu odjąć $7b$.

Przy robieniu dalszych postępów w nauce algiebry, może przyjść uczącemu się na myśl, że możliwą jest rzeczą nadać pewne znaczenie powyższemu wyrażeniu samemu przez się, to jest niezależnie od jakiegokolwiek innego działania algiebraicznego: i ten domysł okaże się zupełnie słusznym, gdy nadejdzie czas czytania obszerniejszych dzieł o algiebrze. Tymczasem to objaśnienie, jakie powyżéj daliśmy, będzie na teraz dla nas wystarczającém.

42. Upraszczanie wyrażeń przez łączenie wyrazów podobnych, jest istotną częścią działań dodawania i odejmowania w algiebrze, jak zobaczymy to w dwóch następnych rozdziałach.

Uczący się powinien zapamiętać, że podług naszych określeń następujące wyrażenia są równoznaczne z prostym symbolem a:

$$a^1;\ 1\times a;\ a\times 1;\ \frac{a}{1};$$

$$+a^1;\ +1\times a;\ +a\times 1;\ +\frac{a}{1}.$$

PRZYKŁADY IV.

Znaleść wartości liczebne następujących wyrażeń: jeżeli $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$:

1. $a-3b+4c$;
2. $a-b^2+c^3+d^3$
3. $(a+b)\ (b+c)-(b+c)\ (c+d)+(c+d)\ (d+e)$.
4. $\dfrac{4a+3b}{b+c}-\dfrac{4c+3d}{b+d}+\dfrac{5d+4e}{a+d+e}$.
5. $(a-2b+3c)^2-(b-2c+3d)^2+(c-2d+3e)^2$.
6. $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.
7. $\dfrac{b^2-2bc+c^2}{a^2+2ab+b^2}$;
8. $\dfrac{a^4-4a^3c+6a^2c^2-4ac^3+c^4}{b^4-4b^3c+6b^2c^2-4bc^3+c^4}$.
9. $7a-2b-3c-4a+5b+4c+2a$.
10. $5a^2+3ab-2b^2-ab+9b^2-2ab-7b^2$.
11. $3a^3-2a^2+5a+a^3+a+9a^2-4a^3-6a$.
12. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+b}-\dfrac{b^2+2bc+c^2}{b+c}+\dfrac{c^2+2cd+d^2}{c+d}$.
13. $\sqrt{4c^2+5d^2+e}$;
14. $\sqrt{e^2+d^2+c^2-a^2}$
15. $\sqrt[3]{2e^2+7b}$;
16. $\sqrt[4]{2b^2+c^2-a}$.

V.

Dodawanie.

43. W dodawaniu mogą się przytrafić trzy przypadki: I. Gdy wszystkie wyrazy dane do dodania są podobne i mają ten sam znak; II. Gdy wyrazy wszystkie są podobne, lecz nie wszystkie mają ten sam znak: III. Gdy nie wszystkie wyrazy są podobnémi. Rozbierzemy trzy te przypadki kolejno.

44. I. *Aby dodać wyvazy podobne, mające ten sam znak, należy dodać ich współczynniki liczebne, napisać przed summą znak wspólny, a za nią głoski wchodzące do wszystkich wyrazów:*

Naprzykład:

$$6a + 3a + 7a = 16a,$$
$$-2bc - 7bc - 9bc = -18bc.$$

W pierwszym przykładzie $6a$ znaczy toż samo co i $+6a$, $16a$ zaś toż samo co $+16a$. Art. 38.

45. II. *Aby dodać wyrazy podobne, nie mające jednakowych znaków, należy dodać wszystkie współczynniki liczebne dodatne, następnie oddzielnie dodać wszystkie współczynniki liczebne odjemne; odjąć od większéj summy mniejszą i przed różnicą napisać znak summy większéj, a za nią napisać wszystkie głoski, wchodzące do wyrazów.*

Naprzykład:

$$7a - 3a + 11a + a - 5a - 2a = 19a - 10a = 9a$$
$$2bc - 7bc - 3bc + 4bc + 5bc - 6bc = 11bc - 16bc = -5bc.$$

46. III. Aby dodać wyrażenia, składające się nie z samych tylko wyrazów podobnych: *należy najprzód dodać wyrazy podobne na zasadzie prawideł podanych w poprzednich przypadkach i następnie dopisać pozostałe wyrazy każdy ze swoim właściwym znakiem.*

Naprzykład, dodać:

$4a+5b-7c+3d$; $3a-b+2c+5d$; $9a-2b-c-d$,
i $-a+3b+4c-3d+e$.

Dogodną jest rzeczą przy podobném dodawaniu ułożyć wyrazy w kolumny tak, że wyrazy podobne znajdują się w jednéj kolumnie. Czyniąc to w powyższym przykładzie, będzie:

$$\begin{array}{r} 4a + 5b - 7c + 3d \\ 3a - b + 2c + 5d \\ 9a - 2b - c - d \\ -a + 3b + 4c - 3d + e \\ \hline 15a + 5b - 2c + 4d + e. \end{array}$$

Tutaj wyrazy $4a$, $3a$, $9a$ i $-a$ są podobne, summa współczynników dodatnych jest 16; jeden wyraz jest odjemny, mianowicie $-a$, wartość jego współczynnika jest 1. Różnica pomiędzy 16 i 1 jest 15; tym sposobem otrzymujemy $+15a$ z tych wyrazów podobnych; znak $+$ może być opuszczonym, na zasadzie Art. 38 Podobnież otrzymujemy $5b - b - 2b + 3b = 5b$. I tak daléj.

47. W następujących przykładach wyrazy są już odpowiednio ustawione w kolumnach:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \\ 4x^3 + 7x^2 + x - 9 \\ -2x^3 + x^2 - 9x + 8 \\ -3x^3 - x^2 + 10x - 1 \\ \hline 9x^2 - x - 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2 + ab + b^2 - c \\ 3a^2 - 3ab - 7b^2 \\ 4a^2 + 5ab + 9b^2 \\ a^2 - 3ab - 3b^2 \\ \hline 9a^2 \qquad\qquad - c. \end{array}$$

W pierwszym przykładzie, w pierwszéj kolumnie mamy $x^3 + 4x^3 - 2x^3 - 3x^3$, to jest $5x^3 - 5x^3$, czyli zero; tego rodzaju wypadek wyrażamy zwykle mówiąc, że: *wyrazy które zawierają x^3 wzajemnie się znoszą.*

Podobnież w drugim przykładzie wyrazy, zawierające ab znoszą się wzajemnie, jak również i wyrazy, które zawierają b^2.

$$\begin{array}{rrrr} 7x^2 - 3xy & + & x & \\ 3x^2 & - y^2 + & 3x - & y \\ -2x^2 + 4xy & + 5y^2 - & x - & 2y \\ -7xy & - y^2 + & 9x - & 5y \\ 4x^2 & + 4y^2 - & 2x & \\ \hline 12x^2 - 6xy & + 7y^2 + & 10x - & 8y. \end{array}$$

PRZYKŁADY V.

Dodać następujące wyrażenia:

1. $3a - 2b$, $4a - 5b$, $7a - 11b$, $a + 9b$;
2. $4x^2 - 3y^2$, $2x^2 - 5y^2$, $-x^2 + y^2$, $-2x^2 + 4y^2$.
3. $5a + 3b + c$, $3a + 3b + 3c$, $a + 3b + 5c$.
4. $3x + 2y - z$, $2x - 2y + 2z$, $-x + 2y + 3z$,
5. $7a - 4b + c$, $6a + 3b - 5c$, $-12a + 4c$.
6. $x - 4a + b$, $3x + 2b$, $a - x - 5b$.
7. $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$, $a + b - c$.
8. $a + 2b + 3c$, $2a - b - 2c$, $b - a - c$, $c - a - b$.
9. $a - 2b + 3c - 4d$, $3b - 4c + 5d - 2a$,
   $5c - 6d + 3a - 4b$, $7d - 4a + 5b - 4c$.

10. $x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, $2x^3 - 7x^2 - 14x + 5$,
    $-x^3 + 9x^2 + x + 8$.
11. $x^4 - 2x^3 + 3x^2$, $x^3 + x^2 + x$, $4x^4 + 5x^3$,
    $2x^2 + 3x - 4$, $-3x^2 - 2x - 5$.
12. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, $2a^3 + 5a^2b - 6ab^2 - 7b^3$,
    $a^3 - ab^2 + 2b^3$.
13. $x^3 - 2ax^2 + a^2x + a^3$, $x^3 + 3ax^2$, $2a^3 - ax^2 - 2x^3$.
14. $2ab - 3ax^2 + 2a^2x$, $12ab + 10ax^2 - 6a^2x$,
    $-8ab + ax^3 - 5a^2x$.
15. $x^2 + y^4 + z^3$, $-4x^2 - 5z^3$, $8x^2 - 7y^4 + 10z^3$,
    $6y^4 - 6z^3$.
16. $3x^2 - 4xy + y^2 + 2x + 3y - 7$, $2x^2 - 4y^2 + 3x - 5y + 8$,
    $10xy + 8y^2 + 9y$, $5x^2 - 6xy + 3y^2 + 7x - 7y + 11$.
17. $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$,
    $4x^3y - 12x^2y^2 + 12xy^3 - 4y^4$,
    $6x^2y^2 - 12xy^3 + 6y^4$, $4xy^3 - 4y^4$, y^4.
18. $x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - x^2z$,
    $x^2y + y^3 + yz^2 - xy^2 - y^2z - xyz$,
    $x^2z + y^2z + z^3 - xyz - yz^2 - xz^2$.

VI.

Odejmowanie.

48. Przypuśćmy, że mamy odjąć $7 + 3$ od 12; wypadek będzie ten sam, jeżeli odejmiemy najprzód 7 od 12, a następnie od reszty odejmiemy 3; to jest otrzymany wypadek będzie: $12 - 7 - 3$.

Tym sposobem:

$$12 - (7 + 3) = 12 - 7 - 3,$$

Tutaj $7+3$ zamykamy w nawias, gdyż mamy odjąć *całą summę* $7+3$ od 12; patrz Art. 29.

Podobnież:

$$20-(5+4+2)=20-5-4-2.$$

Przypuśćmy daléj, że mamy odjąć $b+c$ od a; wypadek będzie ten sam, jak gdybyśmy najprzód odjęli b od a, a następnie c od reszty; to jest wypadek szukany będzie: $a-b-c$.

Tym sposobem:

$$a-(b+c)=a-b-c.$$

I tutaj $b+c$ zamykamy w nawias, w pierwszém wyrażeniu, gdyż mamy odjąć całkowitą summę $b+c$ od a.

Podobnież:

$$a-(b+c+d)=a-b-c-d.$$

Wyrazy *odjemna* i *odjemnik* używają się w algiebrze w témsamém znaczeniu, co i w arytmetyce.

49. Przypuśćmy teraz, że mamy odjąć $7-3$ od 12. Jeżeli 7 odejmiemy od 12, wtedy otrzymamy $12-7$; ale wtedy odjęliśmy zbyt wiele od 12, gdyż mieliśmy odjąć nie 7, lecz 7 zmniejszone o 3. A zatém otrzymany wypadek należy nam powiększyć o 3; i tym sposobem otrzymamy:

$$12-(7-3)=12-7+3.$$

Podobnież:

$$12-(7+3-2)=12-7-3+2.$$

Przypuśćmy daléj, że mamy odjąć $b-c$ od a. Jeżeli odejmiemy b od a, wtedy otrzymamy $a-b$; lecz wtedy odjęliśmy zbyt wiele od a, gdyż mieliśmy

odjąć nie b, ale b zmniejszone o c. Wypadek otrzymany należy zatém powiększyć o c, i tym sposobem otrzymamy:

$$a-(b-c)=a-b+c.$$

W podobny sposób:

$$a-(b+c-d)=a-b-c+d.$$

50. Ostatni przykład:

$$a-(b+c-d)=a-b-c+d$$

pokazuje nam, że jeżeli $b+c-d$ odejmiemy od a, wtedy na wypadek otrzymamy $a-b-c+d$. Widzimy tutaj, że w wyrażeniu, które należało odjąć, znajduje się wyraz $-d$, w otrzymanym zaś wypadku znajduje się odpowiedni wyraz $+d$; również w tym samym odjemniku znajduje się wyraz $+c$, a w wypadku odpowiedni mu wyraz $-c$; i nakoniec w odjemniku mamy wyraz b, a w otrzymanéj reszcie znajduje się wyraz $-b$.

Z tego i z innych przykładów, podanych w dwóch poprzednich Artykułach, wyciągamy następujące prawidło na odejmowanie: *należy zmienić znaki na przeciwne w wyrazach odjemnika i następnie wszystkie wyrazy tak odjémnéj jak i odjemnika dodać.*

Naprzykład: od $4x-3y+2z$ odjąć: $3x-y+z$. W tym celu należy we wszystkich wyrazach odjemnika, t. j. w $3x-y+z$ zmienić znaki na przeciwne; będzie: $-3x+y-z$, i następnie dodać do $4x-3y+2z$; otrzymamy:

$$4x-3y+2z-3x+y-z=x-2y+z.$$

Od $3x^4+5x^3-6x^2-7x+5$ odjąć $2x^4-2x^3+5x^2-6x-7$. Należy zmienić we wszystkich wyrazach odjemnika

znaki na przeciwne i następnie postępować jak przy dodawaniu; miéć będziemy:

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 5x^3 - 6x^2 - 7x + 5 \\ \pm 2x^4 \mp 2x^3 \pm 5x^2 \mp 6x \mp 7 \\ \hline x^4 + 7x^3 - 11x^2 - x + 12. \end{array}$$

Uczący się powinien z początku wykonywać wszystkie działania w zupełności, tak jak to pokazano wyżéj; lecz stopniowo powinien przyzwyczaić się do wynalezienia ostatecznego wypadku bez rzeczywistéj zmiany znaków, a dokonywając te zmiany w pamięci.

51. Widzieliśmy że:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

A zatém wyrazowi $-c$ odjemnika odpowiada wyraz $+c$ reszty. Z tego powodu można często spotkać się z zadaniem tego rodzaju: od a odjąć $-c$; na wypadek wtedy otrzymamy $a + c$. Objaśnić to możemy w podobny sposób jak w Artykule 41, uważając, że podobne działania mają znaczenie nie same przez się, ale tylko w związku z innémi częściami pewnego działania algiebraicznego.

Można tutaj jeszcze dodać kilka uwag, dopomagających do lepszego zapamiętania otrzymanych wypadków, i zarazem, być może, do zrozumienia przyczyn, dla których działania te w ten sposób się wykonywają.

I tak: możemy naprzykład powiedzieć, że: $a = a + c - c$; skąd wypada, że jeżeli $-c$ odejmiemy od a, pozostanie $a + c$.

Albo téż możemy powiedzieć, że znaki $+$ i $-$ oznaczają działania wprost sobie przeciwne; tym sposobem $-c$ oznacza ilość wprost przeciwną względem $+c$, a ilość $-(-c)$ oznacza ilość wprost przeciwną względem ilości wprost przeciwnéj dla $+c$, to jest: $-(-c)$ jest równoznaczną z $+c$.

Lecz, jak to już wyżéj wspomnieliśmy w Art. 41, należy zupełne objaśnienie znaczenia działań wykonywanych z *ilościami odjemnemi*, to jest z takiemi ilościami, które są oznaczone głoskami, przed któremi znajduje się znak $-$ odłożyć do obszerniejszego wykładu algiebry.

Musimy tu jeszcze zwrócić uwagę na to, że wyrazy *dodawanie* i *odejmowanie* nie zupełnie toż samo mają znaczenie w algiebrze, co i w arytmetyce. W arytmetyce dodawanie zawsze pociąga za sobą *powiększenie*, odejmowanie zaś — *zmniejszenie*; lecz w algiebrze po dodaniu -3 do 5 otrzymamy *summę algiebraiczną* 2; po odjęciu zaś -3 od 5 otrzymamy *różnicę algiebraiczną* 8.

PRZYKŁADY VI.

1. Od $7a + 14b$ odjąć $4a + 10b$.
2. Od $6a - 2b - c$ „ $2a - 2b - 3c$.
3. Od $3a - 2b + 3c$ „ $2a - 7b - c - d$.
4. Od $7x^2 - 8x - 1$ „ $5x^2 - 6x + 3$.
5. Od $4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 7x + 9$ odjąć $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 7x - 9$.
6. Od $2x^2 - 2ax + 3a^2$ odjąć $x^2 - ax + a^2$.

7. Od $x^2 - 3xy - y^2 + yz - 2z^2$ odjąć
$x^2 + 2xy + 5xz - 3y^2 - 2z^2$.

8. Od $5x^2 + 6xy - 12xz - 4y^2 - 7yz - 5z^2$
odjąć $2x^2 - 7xy + 4xz - 3y^2 + 6yz - 5z^2$.

9. Od $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ odjąć
$-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$.

10. Od $7x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ odjąć $4x^3 - 2x^2 - 2x - 14$
i od reszty odjąć $2x^3 - 8x^2 + 4x + 16$.

VII.

Nawiasy.

52. Z powodu wielkiego znaczenia i częstego użycia nawiasu w algiebrze, konieczną jest rzeczą aby uczący się znał dokładnie prawidła, odnoszące się do jego użycia, i dla tego też podajemy je poniżéj.

Gdy wyrażenie wzięte w nawias jest poprzedzone znakiem +, wtedy nawias może być bez żadnéj zmiany opuszczony.

Gdy przed nawiasem, zamykającym wyrażenie algiebraiczne, znajduje się znak —, wtedy nawias może być opuszczony, ale przy jednoczesnéj zmianie znaków na przeciwne przy wszystkich wyrazach, znajdujących się wewnątrz nawiasu.

Tak naprzykład:

$$a - b + (c - d + e) = a - b + c - d + e.$$
$$a - b - (c - d + e) = a - b - c + d - e.$$

Drugie prawidło już było objaśnione w art. 50; jest to właściwie *prawidło na odejmowanie.* Pierwsze prawidło może być objaśnione w podobnyż sposób.

53. W szczególności uczący się powinien zwrócić uwagę na następne wyrażenia:

$$+(-d) = -d; \quad -(-d) = +d;$$
$$+(+e) = +e; \quad -(+e) = -e.$$

Przyjmiemy je tutaj jako prawidła, które do pewnego stopnia mogą być objaśnione tak, jak w art. 41.

54. Mogą się przytrafić wyrażenia, zawierające więcéj niż jedną parę nawiasów; nawiasy te mogą być kolejno znoszone za pomocą prawideł poprzednich, *zaczynając od zniesienia nawiasu wewnętrznego.* Tak naprzykład:

$$a + \{b + (c-d)\} = a + \{b + c - d\} = a + b + c - d,$$
$$a + \{b - (c-d)\} = a + \{b - c + d\} = a + b - c + d,$$
$$a - \{b + (c-d)\} = a - \{b + c - d\} = a - b - c + d.$$
$$a - \{b - (c-d)\} = a - \{b - c + d\} = a - b + c - d.$$

Podobnież:

$$a - [b - \{c - (d - e)\}] = a - [b - \{c - d + e\}] =$$
$$= a - [b - c + d - e] = a - b + c - d + e.$$

Widzimy z tych przykładów, że dla uniknięcia zamięszania pomiędzy rozmaitemi parami nawiasów, dajemy każdéj parze inny *kształt.* Czasami w tym samym celu piszą się nawiasy tego samego kształtu, lecz różnéj *wielkości.*

Linijka, napisana nad wyrażeniem algiebraicznem, może zastąpić nawias, patrz Art. 30. Tak naprzykład:

$$a - [b - \{c - (d - e - f)\}] = a - [b - \{c - (d - e + f)\}] =$$
$$= a - [b - \{c - d + e - f\}] = a - [b - c + d - e + f] =$$
$$= a - b + c - d + e - f.$$

55. Zalecamy uczącemu się znosić nawiasy zawsze w porządku wskazanym w powyższym paragrafie; mianowicie przez usunięcie najprzód najbardziéj wewnętrznego nawiasu, następnie przez usunięcie najbardziéj wewnętrznego z pozostałych i t. d. Możemy jednak zmienić ten porządek: lecz jeżeli znosimy nawias, zawierający wewnątrz inne wyrażenie wzięte w nawias, wtedy *w tém ostatniém wyrażeniu nie należy robić żadnéj zmiany w znakach.* Wyrażenie to bowiem musi być uważane jako jeden wyraz. I tak:

$$a + \{b + (c - d)\} = a + b + (c - d) = a + b + c - d,$$
$$a + \{b - (c - d)\} = a + b - (c - d) = a + b - c + d,$$
$$a - \{b + (c - d)\} = a - b - (c - d) = a - b - c + d.$$
$$a - \{b - (c - d)\} = a - b + (c - d) = a - b + c - d.$$

Również:

$$a - [b - \{c - (d - e)\}] = a - b + \{c - (d - e)\} =$$
$$= a - b + c - (d - e) = a - b + c - d + e.$$

I w podoby sposób:

$$a - [b - \{c - (d - \overline{e - f})\}] = a - b + \{c - (d - \overline{e - f})\} =$$
$$= a - b + c - (d - \overline{e - f}) = a - b + c - d + \overline{e - f} =$$
$$= a - b + c - d + e - f.$$

56. Często dla dogodności w rachunku wypada dwa lub więcéj wyrazów zamknąć w nawias; prawidła na wprowadzenie nawiasów wypadają bezpośrednio z prawideł na zniesienie nawiasu.

Jakakolwiek liczba wyrazów w daném wyrażeniu może być zamkniętą w nawias, przed którym piszemy znak +.

Jakakolwiek liczba wyrazów w daném wyrażeniu może być wziętą w nawias, przed którym piszemy znak —, byleby znak każdego z wyrazów, zamkniętych w tym nawiasie został zmieniony.

Tak naprzykład:

$$a - b + c - d + e = a - b + (c - d + e),$$
$$\text{lub} = a - b + c + (-d + e),$$
$$\text{lub} = a - (b - c + d - e),$$
$$\text{lub też} = a - b - (-c + d - e).$$

W podobny sposób można wprowadzić w wyrażenie więcéj niż jedną parę nawiasów. Naprzykład:

$$a - b + c - d + e = a - \{b - c + d - e\} =$$
$$= a - \{b - (c - d + e)\}.$$

PRZYKŁADY VII.

Uprościć następujące wyrażenia przez zniesienie nawiasów i następnie zebranie wyrazów podobnych w jeden wyraz:

1. $3a - b - (2a - b)$; 2. $a - b + c - (a - b - c)$.
3. $1 - (1 - a) + (1 - a + a^2) - (1 - a + a^2 - a^3)$.
4. $a + b + (7a - b) - (2a - 3b) - (5a + 6b)$.
5. $a - b + c - (b - a + c) + (c - a + b) - (a - c + b)$.
6. $2x - 3y - 3z - (x - y + 2z) + (x + 4y + 5z) - (z - x - y)$.
7. $a - \{b - c - (d - e)\}$.
8. $2a - (2b - d) - \{a - b - (2c - 2d)\}$.
9. $a - \{2b - (3c + 2b - a)\}$;

10. $2a - \{ b - (a - 2b) \}$.
11. $3a - \{ b + (2a - b) - (a - b) \}$.
12. $7a - [3a - \{ 4a - (5a - 2a) \}]$.
13. $3a - [b - \{ a + (b - 3a) \}]$.
14. $6a - [4b - \{ 4a - (6a - 4b) \}]$
15. $2a - (3b + 2c) - [5b - (6c - 6b) + 5c - \{ 2a - (c + 2b) \}]$.
16. $a - [2b + \{ 3c - 3a - (a + b) \} + \{ 2a - (b + c) \}]$.
17. $16 - \{ 5 - 2x - [1 - (3 - x)] \}$.
18. $15x - \{ 4 - [3 - 5x - (3x - 7)] \}$.
19. $2a - [2a - \{ 2a - (2a - 2a - a) \}]$.
20. $16 - x - [7x - \{ 8x - (9x - 3x - 6x) \}]$.
21. $2x - [3y - \{ 4x - (5y - 6x - 7y) \}]$.
22. $2a - [3b + (2b - c) - 4c + \{ 2a - (3b - c - 2b) \}]$.
23. $a - [5b - \{ a - (5c - 2c - b - 4b) + 2a - (a - 2b + c) \}]$.
24. $x^4 - [4x^3 - \{ 6x^2 - (4x - 1) \}] - (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$.

VIII.

Mnożenie.

57. Przypuszczamy tutaj, że czytelnik zna już tę zasadniczą prawdę, że iloczyn ilukolwiek czynników zawsze pozostaje ten sam w jakimkolwiek porządku będą wzięte czynniki; tak np. $2 \times 3 \times 5 = 2 \times 5 \times 3 = 3 \times 5 \times 2$ i t.d. Podobnie $abc = acb = bca$ i t.d.

Podobnie jeszcze i $c\,(a+b)$ jest równe $(a + b)\,c$, gdyż każde z tych wyrażeń oznacza iloczyn, powstały z pomnożenia tych samych dwóch czynników: jeden z nich jest c, a drugi $a + b$.

Rozróżniamy trzy przypadki w mnożeniu, mianowicie: I. mnożenie jednomianów; II. mnożenie wielomianu przez jednomian; III. mnożenie wielomianów.— Rozbierzemy kolejno trzy te przypadki.

58. I. Przypuśćmy, że mamy do pomnożenia $3a$ przez $4b$. Iloczyn z tych dwóch ilości może być tak napisany: $3 \times a \times 4 \times b$, czyli: $3 \times 4 \times a \times b$; iloczyn ten więc jest równy: $12\,ab$. Stąd wyciągamy następujące prawidło na mnożenie jednomianów: *należy pomnożyć współczynniki liczebne i następnie dopisać głoski za tym iloczynem.*

Tak naprzykład:

$$7a \times 3bc = 21abc.$$
$$4a \times 5b \times 3c = 60abc.$$

59. *Aby pomnożyć potęgi jednéj i téj saméj liczby należy tylko dodać wykładniki.*

Naprzykład, przypuśćmy, że mamy pomnożyć a^3 przez a^2.

Na zasadzie paragrafu 16;

$$a^3 = a \times a \times a,$$

i:

$$a^2 = a \times a;$$

przeto:

$$a^3 \times a^2 = a \times a \times a \times a \times a = a^5 = a^{3+2}.$$

Podobnie:

$$c^4 \times c^3 = c \times c \times c \times c \times c \times c \times c = c^7 = c^{4+3}$$

W takiż sam sposób możemy się przekonać o prawdziwości tego w każdym innym przypadku.

60. II. Przypuśćmy, że mamy pomnożyć $a + b$ przez 3. Mieć będziemy:

$$(a + b) \times 3 = 3\,(a + b) = a + b + a + b + a + b$$
$$= 3a + 3b.$$

I podobnie:

$$(a + b) \times 7 = 7\,(a + b) = 7a + 7b.$$

Przypuśćmy dalej, że mamy pomnożyć $a + b$ przez c. Otrzymamy:

$$(a + b)\,c = c(a + b) = ca + cb.$$

W podobny sposób mieć będziemy:
$(a - b) \times 3 = 3\,(a - b) = 3a - 3b$; $7\,(a - b) = 7a - 7b$;
$(a - b)\,c = c\,(a - b) = c\,a - cb$.

Stąd wyciągamy następujące prawidło na mnożenie wielomianu przez jednomian: *należy pomnożyć każdy wyraz wielomianu przez ten jednomian, przed każdym z tych iloczynów napisać znak odpowiedniego wyrazu i następnie tak otrzymane iloczyny zebrać w jedną całość (dodać).*

61. III. Przypuśćmy, że mamy do pomnożenia $a + b$ przez $c + d$.

Tak jak w drugim przypadku mamy najprzód:

$$(a + b)\,(c + d) = a\,(c + d) + b\,(c + d);$$

lecz: $a\,(c + d) = ac + ad$; $b\,(c + d) = bc + bd$, przeto:

$$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Dalej przypuśćmy, że mamy pomnożyć $a - b$ przez $c + d$.

$$(a - b)\,(c + d) = a\,(c + d) - b\,(c + d);$$

lecz: $a\,(c + d) = ac + ad$; $b\,(c + d) = bc + bd$; przeto:

$$(a - b)\,(c + d) = ac + ad - (bc + bd) = ac + ad - bc - bd.$$

Podobnież, jeżeli chcemy pomnożyć $a + b$ przez $c - d$, będzie:

$$(a + b)\,(c - d) = (c - d)\,(a + b)$$

$$= c\,(a + b) - d(a + b)$$
$$= ca + cb - (da + db) = ca + cb - da - db.$$

Nakoniec przy mnożeniu $a - b$ przez $c - d$ otrzymamy: $(a - b)\,(c - d) = (c - d)\,a - (c - d)\,b$;
a że: $(c - d)\,a = ac - ad$; $(c - d)\,b = bc - bd$; przeto

$$(a - b)\,(c - d) = ac - ad - (bc - bd) = ac - ad - bc + bd.$$

Rozbierzmy teraz uważnie ten ostatni wypadek. Na zasadzie paragrafu 38 możemy powyższe wyrażenie napisać tak:

$$(+a - b)\,(+c - d) = +ac - ad - bc + bd.$$

Widzimy z tego, że wyrazom $+a$ w mnożnéj i $+c$ w mnożniku, odpowiada wyraz $+ac$ w iloczynie; wyrazom $+a$ i $-d$ odpowiada wyraz $-ad$ w iloczynie; wyrazom $-b$ i $+c$ odpowiada wyraz $-bc$ iloczynu i nakoniec wyrazom $-b$ i $-d$ odpowiada wyraz $+bd$ w iloczynie.

Podobne uwagi można zrobić odnośnie do innych trzech wypadków; wszystkie te uwagi streszczają się krótko w następującém ważném prawidle w mnożeniu: *jednakowe znaki dają znak +, różne znaki dają znak —.* Prawidło to nazywa się *prawidłem znaków*, i pod tą nazwą często do niego odwoływać się będziemy.

62. Możemy teraz dać prawidło ogólne na mnożenie wyrazów algebraicznych: *należy pomnożyć każdy wyraz mnożnéj przez każdy wyraz mnożnika; tam gdzie wyrazy mnożone mają znaki jednakowe należy przed iloczynem napisać znak +, gdzie zaś wyrazy mnożone mają znaki różne, należy przed iloczynem napisać znak —; i tak otrzymane iloczyny dodać dla utworzenia zupełnego iloczynu.*

Naprzykład: pomnożyć $2a + 3b - 4c$ przez $3a - 4b$. Będzie:

$(2a + 3b - 4c)(3a - 4b) = 3a(2a + 3b - 4c) -$
$4b(2a + 3b - 4c) = 6a^2 + 9ab - 12ac -$
$-(8ab + 12b^2 - 16bc) = 6a^2 + 9ab - 12ac - 8ab - 12b^2$
$+ 16bc.$

Jest to właśnie wypadek jaki otrzymamy stosując powyższe prawidło; możemy go uprościć i sprowadzić do takiego wyrażenia:

$$6a^2 + ab - 12ac - 12b^2 + 16bc.$$

Możemy toż prawidło sprawdzić jeszcze i objaśnić na mnożeniu, np. $6 - 3 + 2$ przez $7 + 3 - 4$; znajdziemy, że postępując podług prawidła i łącząc w jedno wypadki, otrzymamy 30; to jest 5×6, jak to możemy znaleźć inną drogą.

63. Można także spotkać się z przykładami, podobnemi do następnych: Pomnożyć $2a$ przez $-4b$, albo też pomnożyć $-4c$ przez $3a$, lub $-4c$ przez $-4b$.

Wypadki żądane będą następujące:

$$2a \times -4b = -8ab,$$
$$-4c \times 3a = -12ac$$
$$-4c \times -4b = 16bc.$$

Do tych działań można przywiązać znaczenie w taki sposób, jaki był wykazany w paragrafie 41.

Znaczenie wyrażenia $-4c \times -4b = 16bc$ można rozumieć w ten sposób, że jeżeli $-4c$ przytrafi się pomiędzy wyrazami mnożnéj, a $-4b$ znajdować się będzie pomiędzy wyrazami mnożnika, wtedy pomiędzy wyrazami iloczynu znajdować się będzie wyraz odpowiedni $16bc$.

Szczególne przypadki podobnych wyrażeń są:
$2a \times -4 = -8a$; $2 \times -4 = -8$; $2 \times -1 = -2$.

64. Ponieważ przykłady podobne do tych, jakie podaliśmy w poprzednim paragrafie, mogą często się przytrafić, przeto musimy je uwzględnić w naszych prawidłach; z tego powodu prawidło zupełne na mnożenie da się wyrazić w następujący sposób:

Aby pomnożyć jednomiany należy pomnożyć ich współczynniki liczebne, napisać za tym iloczynem wszystkie głoski, a znak oznaczyć na zasadzie prawidła znaków.

Aby pomnożyć przez siebie wielomiany należy pomnożyć każdy wyraz jednego wielomianu przez każdy wyraz drugiego wielomianu, na zasadzie prawidła na mnożenie jednomianów, i następnie połączyć te częściowe iloczyny dla utworzenia iloczynu zupełnego.

65. Podajemy poniżéj kilka przykładów mnożenia, w których dane wyrażenia są uporządkowane w odpowiedni sposób:

$a + b$
$a + b$
$a^2 + ab$
$+ ab + b^2$
$a^2 + 2ab + b^2$

$a + b$
$a - b$
$a^2 + ab$
$- ab - b^2$
$a^2 - b^2$

$x^2 + 3x$
$x - 1$
$x^3 + 3x^2$
$- x^2 - 3x$
$x^3 + 2x^2 - 3x$

$a^2 - ab + b^2$
$a + b$
$a^3 - a^2b + ab^2$
$+ a^2b - ab^2 + b^3$
$a^3 + b^3$

$3a^2 - 4ab + 5b^2$
$a^2 - 2ab + 3b^2$
$3a^4 - 4a^3b + 5a^2b^2$
$- 6a^3b + 8a^2b^2 - 10ab^3$
$+ 9a^2b^2 - 12ab^3 + 15b^4.$
$3a^4 - 10a^3b + 22a^2b^2 - 22ab^3 + 15b^4$

Dla objaśnienia działań rozbierzmy ostatni przykład: Wszystkie wyrazy mnożnéj mnożymy najprzód przez pierwszy wyraz mnożnika, mianowicie przez a^2,

zwracając uwagę na *prawidło znaków*; otrzymujemy tym sposobem: $3a^4 - 4a^3b + 5a^2b^2$. Następnie bierzemy drugi wyraz mnożnika, mianowicie: $-2ab$. i mnożymy przez niego wszystkie wyrazy mnożnéj, zachowując *prawidło na znaki*, tym sposobem miéć będziemy: $-6a^3b + 8a^2b^2 - 10ab^3$. Nakoniec przez ostatni wyraz mnożnika, mianowicie $3b^2$ mnożymy wszystkie wyrazy mnożnéj, pamiętając o *prawidle na znaki* i otrzymujemy $+9a^2b^2 - 12ab^3 + 15b^4$.

Przy tém wszystkie wyrazy, które otrzymujemy, porządkujemy w ten sposób, że *wyrazy podobne są ustawione w téj saméj kolumnie*; ten sposób porządkowania jest bardzo użytecznym, gdyż pozwala nam łączyć następnie wyrazy szybko i bez pomyłki dla otrzymania wypadku ostatecznego. W obecnym przykładzie ten wypadek ostateczny będzie:

$$3a^4 - 10a^3b + 22a^2b^2 - 22ab^3 + 15b^4.$$

66. Czytelnik powinien zwrócić tutaj uwagę na to, że aby odrazu ułożyć wyrazy podobne w téj saméj kolumnie, wyrazy mnożnéj i mnożnika należy ustawić w pewnym porządku. W tym celu obieramy pewną głoskę, wchodzącą do kilku wyrazów i następnie porządkujemy wyrazy *podług potęg tejże głoski*. I tak w ostatnim przykładzie obieramy głoskę a; na pierwszém miejscu mnożnéj piszemy wyraz $3a^2$, zawierający najwyższą potęgę a w całym wielomianie, mianowicie potęgę drugą; poczém piszemy wyraz $-4ab$, który zawiéra następną potęgę a, mianowicie pierwszą, i nakoniec piszemy wyraz $5b^2$, niezawierający a wcale. Gdy w ten sposób postąpiliśmy z mnożną, wtedy mówimy, że mnożną *uporządkowaliśmy podług potęg malejących głoski a.* Mnożnik porządkujemy w podobny sposób.

Moglibyśmy także ustawić wyrazy mnożnéj i mnożnika w odwrotnym porządku; — w tym razie powiedzielibyśmy, że one są uporządkowane *podług potęg rosnących głoski a.* Obojętną jest rzeczą jaki porządek przyjmiemy; — lecz należy pamiętać o tem, że mnożna i mnożnik muszą być uporządkowane w *jednakowy sposób.*

67. Dajemy tutaj jeszcze kilka przykładów:

Pomnożyć $1 + 2x - 3x^2 + x^4$ przez $x^3 - 2x - 2$. Uporządkujemy te wielomiany podług potęg malejących głoski x:

$$\begin{array}{l}
x^4 - 3x^2 + 2x + 1 \\
x^3 - 2x - 2 \\
\hline
x^7 - 3x^5 + 2x^4 + x^3 \\
\quad - 2x^5 + \quad + 6x^3 - 4x^2 - 2x \\
\quad\quad - 2x^4 \quad + 6x^2 - 4x - 2 \\
\hline
x^7 - 5x^5 \quad + 7x^3 + 2x^2 - 6x - 2
\end{array}$$

Pomnożyć: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ przez: $a + b + c$.

Porządkujemy mnożną i mnożnik podług potęg malejących głoski a.

$$\begin{array}{l}
a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2 \\
a + b + c \\
\hline
a^3 - a^2b - a^2c + ab^2 - abc + ac^2 \\
\quad + a^2b \quad - ab^2 - abc \quad + b^3 - b^2c + bc^2 \\
\quad\quad + a^2c \quad - abc - ac^2 \quad + b^2c - bc^2 + c^3 \\
\hline
a^3 \quad - 3abc \quad + b^3 \quad + c^3
\end{array}$$

Ten sam przykład może być także wykonany przez użycie nawiasów w podobny sposób:

$$\begin{array}{l} a^2 - a(b+c) + b^2 - bc + c^2 \\ a + (b+c) \\ \hline a^3 - a^2(b+c) + a(b^2 - bc + c^2) \\ \quad + a^2(b+c) - a(b+c)(b+c) + (b+c)(b^2 - bc + c^2) \end{array}$$

Lecz, mamy: $a(b^2 - bc + c^2) - a(b+c)(b+c) =$

$= a\{b^2 - bc + c^2 - (b+c)(b+c)\} =$

$= a\{b^2 - bc + c^2 - (b^2 + 2bc + c^2)\} =$

$= a\{b^2 - bc + c^2 - b^2 - 2bc - c^2\} = -3abc;$

i podobnie:

$$(b+c)(b^2 - bc + c^2) = b^3 + c^3.$$

Przeto, jak wyżéj znaleziono, ostateczny wypadek będzie:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Pomnożyć $x - a$. przez $x - b$ i przez $x - c$

$$\begin{array}{l} x - a \\ x - b \\ \hline x^2 - ax \\ \quad - bx + ab \\ \hline x^2 - (a+b)x + ab \\ x - c \\ \hline x^3 - (a+b)x^2 + abx \\ \quad - cx^2 + (a+b)cx - abc \\ \hline x^3 - (a+b+b)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc. \end{array}$$

Zwracamy tutaj uwagę uczącego się na to, że z każdego zadania na mnożenie, w którém mnożna jest różną od mnożnika, można zrobić dwa przykłady, biorąc początkowy mnożnik za nową mnożną, i początkową mnożną za nowy mnożnik.

Wypadek w drugim przykładzie powinien być tenże sam co i w pierwszym; i to może służyć za próbę dokładności roboty.

PRZYKŁADY VIII.

Pomnożyć:

1. $2x^3$ przez $4x^2$;
2. $3a^4$ przez $4a^5$.
3. $2a^2b$ przez $2ab^2$;
4. $3x^3y^2z$ przez $5x^4y^3z^2$
5. $7x^4y^2$ przez $7y^2z^4$.
6. $4a^2 - 3b$ przez $3ab$.
7. $8a^2 - 9ab$ przez $3a^2$.
8. $3x^2 - 4y^2 + 5z^2$ przez $2x^2y$.
9. $x^2y^3 - y^3z^4 + z^4x^2$ przez $x^2y^2z^2$.
10. $2xy^2z^3 + 3x^2y^3z - 5x^3yz^2$ przez $2xy^2z$.
11. $2x - y$ przez $2y + x$.
12. $2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$ przez $3x - 6$.
13. $x^3 + x^2 + x - 1$ przez $x - 1$.
14. $1 + 4x - 10x^2$ przez $1 - 6x + 3x^2$.
15. $x^3 - 4x^2 + 11x - 24$ przez $x^2 + 4x + 5$.
16. $x^3 + 4x^2 + 5x - 24$ przez $x^2 - 4x + 11$.
17. $x^3 - 7x^2 + 5x + 1$ przez $2x^2 - 4x + 1$.
18. $x^3 + 6x^2 + 24x + 60$ przez $x^3 - 6x^2 + 12x + 12$.
19. $x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ przez $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
20. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ przez $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

21. x^2-3ax przez $x+3a$.
22. $a^2+2ax-x^2$ przez $a^2+2ax+x^2$.
23. $2b^2+3ab-a^2$ przez $7a-5b$.
24. a^2-ab+b^2 przez a^2+ab-b^2.
25. $a^2-ab+2b^2$ przez $a^2+ab+2b^2$.
26. $4x^2-3xy-y^2$ przez $3x-2y$.
27. $x^5-x^4y+xy^4-y^5$ przez $x+y$.
28. $2x^2+3xy+4y^2$ przez $3x^2+4xy+y^2$.
29. $x^2+y^2-xy+x+y-1$ przez $x+y-1$.
30. $x^4+2x^3y+4x^2y^3+8xy^3+16y^4$ przez $x-2y$.
31. $81x^4+27x^3y+9x^2y^2+3xy^3+y^4$ przez $3x-y$.
32. $x+2y-3z$ przez $x-2y+3z$.
33. $a^2-ax+bx+b^2$ przez $a+b+x$.
34. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$ przez $a+b+c$.
35. $a^2+4bx+4b^2x^2$ przez $a^2-4bx+4b^2x^2$.
36. $a^2-2ab+b^2+c^2$ przez $a^2+2ab+b^2-c^2$.
37. $x-a$ przez $x+a$ i przez x^2+a^2.
38. $x+a$ przez $x+b$ i przez $x+c$.
39. x^2-ax+a^2 przez x^2+ax+a^2 i przez $x^4-a^2x^2+a^4$.
40. $x-2a$ przez $x-a$, przez $x+a$ i przez $x+2a$.

IX.

Dzielenie.

68. Dzielenie w algiebrze, równie jak i w arytmetyce, jest działaniem odwrotném mnożeniu. W mnożeniu znajdujemy iloczyn, mając dwa dane czynniki; w dzieleniu zaś mamy dany iloczyn i jeden z czynników, a chcemy znaleźć czynnik drugi. Ten czynnik, który chcemy oznaczyć nazywa się *ilorazem*.

Ten rozdział zatém jest ściśle związany z rozdziałem poprzednim, gdyż obecnie mamy niejako rozwikłać, *odrobić* te działania, które były tam wykonane. W dzieleniu rozróżnimy trzy przypadki, mianowicie: I. Dzielenie jednomianu przez jednomian; II. Dzielenie wielomianu przez jednomian; III. Dzielenie wielomianu przez wielomian.

69. I. Pokazaliśmy już wyżej w paragrafie 10 jak oznaczyć, że jedno wyrażenie ma być podzielone przez drugie. Naprzykład: jeżeli $5a$ ma być podzielone przez $2c$, wtedy iloraz wskazuje się tak $5a:2c$, lub $5a \div 2c$, lub najczęściéj $\frac{5a}{2c}$.

Może się przytrafić, że niektóre z czynników dzielnika znajdują się w dzielnéj; wówczas iloraz może być uproszczony za pomocą zasady już używanéj w arytmetyce. Przypuśćmy naprzykład, że $15a^2b$ ma być podzielone przez $6bc$; wtedy iloraz będzie $\frac{15a^2b}{6bc}$. Tutaj dzielna $15a^2b = 5a^2 \times 3b$; dzielnik zaś $6bc = 2c \times 3b$; czynnik więc $3b$ znajduje się zarazem w dzielnéj i w dzielniku. Przeto, tak jak w arytmetyce, możemy opuścić ten wspólny czynnik i iloraz oznaczyć przez $\frac{5a^2}{2c}$; tym sposobem $\frac{15a^2b}{6bc} = \frac{5a^2}{2c}$.

Może się również zdarzyć, że wszystkie czynniki, znajdujące się w dzielniku, mogą być w ten sposób usunięte. Tak naprzykład przypuśćmy, że mamy $24abx$ podzielić przez $8ax$:

$$\frac{24abx}{8ax} = \frac{3b \times 8ax}{8ax} = 3b.$$

70. Prawidło odnoszące się do *znaku* ilorazu może być wyprowadzone z prawideł podanych w mnożeniu.

I tak naprzykład, mamy:

$$4ab \times 3c = 12abc;$$

przeto:

$$\frac{12abc}{4ab} = 3c\,; \quad \frac{12abc}{3c} = 4ab\,.$$

$$4ab \times -3c = -12abc\,;$$

przeto:

$$\frac{-12abc}{4ab} = -3c\,, \quad \frac{-12abc}{-3c} = 4ab\,.$$

Dalej:

$$-4ab \times 3c = -12abc;$$

przeto:

$$\frac{-12abc}{-4ab} = 3c\,; \quad \frac{-12abc}{3c} = -4ab\,.$$

I nakoniec:

$$-4ab \times -3c = 12abc\,;$$

więc:

$$\frac{12abc}{-4ab} = -3c\,; \quad \frac{12abc}{-3c} = -4ab\,.$$

Stąd widzimy, że toż samo *prawidło* znaków, które znaleźliśmy dla mnożenia, ma miejsce także i w dzieleniu.

71. Z tego wszystkiego wyprowadzamy następujące prawidło na dzielenie jednomianów: Należy napisać dzielną nad dzielnikiem oddzieliwszy je linijką poziomą; jeżeli te wyrażenia mają wspólne czynniki, wtedy należy je znieść, i napisać przed całym ilorazem znak +, jeżeli jednomiany miały znaki jednakowe a znak — jeżeli one miały znaki różne.

72. *Aby daną potęgę pewnéj liczby podzielić przez inną potęgę téjże saméj liczby, należy od wykładnika pierwszéj, odjąć wykładnik drugiéj.*

Przypuśćmy naprzykład, że mamy podzielić a^5 przez a^3,

Na zasadzie paragrafu 16:

$$a^5 = a \times a \times a \times a \times a.$$

$$a^3 = a \times a \times a\,;$$

więc:

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a \times a = a^2 = a^{5-3}.$$

Podobnież:

$$\frac{c^7}{c^4} = \frac{c \times c \times c \times c \times c \times c \times c}{c \times c \times c \times c} = c \times c \times c = c^3 = c^{7-4}\,.$$

W podobny sposób prawidło to może być dowiedzione i w każdym innym przypadku.

Lub też możemy pokazać prawdziwość tego prawidła w następny sposób:

Na zasadzie § 59;

$$c^4 \,.\, c^3 = c^7,$$

przeto:

$$\frac{c^7}{c^4} = c^3\,; \quad \frac{c^7}{c^3} = c^4\,,$$

73. Jeżeli w dzielnéj znajduje się pewna potęga danéj liczby, a w dzielniku wyższa potęga téjże saméj liczby, wtedy iloraz może być uproszczony na

zasadzie paragrafów 71 i 72. Tak np., jeżeli było $4ab^2$ do podzielenia przez $3cb^5$; wówczas iloraz byłby wyrażony przez $\frac{4ab^2}{3cb^5}$. Czynnik b^2 znajduje się w dzielnéj i w dzielniku, przeto może być opuszczony, i tym sposobem iloraz żądany byłby $\frac{4a}{3cb^3}$, czyli:

$$\frac{4ab^2}{3cb^5} = \frac{4a}{3cb^3}.$$

74. II. Prawidło na dzielenie wielomianu przez jednomian może być otrzymane przez rozbiór odpowiedniego przypadku w mnożeniu.
I tak mamy:

$$(a-b)c = ac-bc;$$

więc:

$$\frac{ac-bc}{c} = a-b$$

daléj:

$$(a-b) \times -c = -ac+bc;$$

przeto:

$$\frac{-ac+bc}{-c} = a-b.$$

A zatem przychodzimy do następnego prawidła na dzielenie wielomianu przez jednomian: każdy wyraz dzielnéj należy podzielić przez dzielnik, opierając się na prawidle podanym w pierwszym przypadku, i połączyć te wypadki dla utworzenia zupełnego ilorazu.

Naprzykład:

$$\frac{4a^3-3abc+a^2c}{a} = 4a^2-3bc+ac.$$

75. III. Aby podzielić jeden wielomian przez drugi, należy postępować w podobny sposób, jak przy dzieleniu w arytmetyce.

Prawidło na to działanie może być wyrażone w następujący sposób: *Dzielną i dzielnik należy uporządkować podług potęg rosnących lub malejących jednéj i téj saméj głoski. Następnie pierwszy wyraz dzielnéj należy podzielić przez pierwszy wyraz dzielnika, i ten wypadek będzie pierwszym wyrazem ilorazu. Potém należy pomnożyć cały dzielnik przez ten pierwszy wyraz ilorazu, i iloczyn odjąć od dzielnéj. Otrzymamy tym sposobem pierwszą resztę, z którą należy tak postępować jak z dzielną. Działanie to należy powtarzać dotąd, dopóki na resztę nie otrzymamy 0, lub też taką resztę, któréj bez użycia ułamków daléj dzielić nie można.*

76. Użycie tego prawidła, równie jak i objaśnienia, wykazujące zasady na których się ono opiera, pokaże się najlepiej na następujących przykładach:

$$\begin{array}{r|l} a^2+2ab+b^2 & a+b \\ \pm a^2 \pm ab & \overline{a+b} \\ \hline +ab+b^2 & \\ \pm ab \pm b^2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} a^2-b^2 & a-b \\ \pm a^2 \mp ab & \overline{a+b} \\ \hline ab-b^2 & \\ \pm ab \mp b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} a^2-b^2 & a+b \\ \pm a^2 \pm ab & a-b \\ \hline -ab-b^2 & \\ \mp ab \mp b^2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^3+2x^2-3x & x-1 \\ \pm x^3 \mp x^2 & x^2+3x \\ \hline 3x^2-3x & \\ \pm 3x^2 \mp 3x & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3a^4-10a^3b+22a^2b^2-22ab^3+15b^4 & 3a^2-4ab+5b^2 \\ \pm 3a^4 \mp 4a^3b \pm 5a^2b^2 & a^2-2ab+3b^2 \\ \hline -6a^3b+17a^2b^2-22ab^3+15b^4 & \\ \mp 6a^3b \pm 8a^2b^2 \mp 10ab^3 & \\ \hline 9a^2b^2-12ab^3+15b^4 & \\ \pm 9a^2b^2 \mp 12ab^3 \pm 15b^4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Rozbierzmy ostatni przykład. Cała dzielna jest iloczynem z dzielnika przez iloraz; ponieważ zaś oba te wielomiany są uporządkowane podług potęg malejących głoski a, przeto pierwszy wyraz dzielnéj jest iloczynem z pierwszego wyrazu dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu. Dzieląc więc ten pierwszy wyraz dzielnéj $3a^4$ przez pierwszy wyraz dzielnika $3a^2$, otrzymamy a^2, — pierwszy wyraz ilorazu. Mnożymy następnie cały dzielnik $3a^2-4ab+5b^2$ przez pierwszy wyraz ilorazu a^2. Otrzymamy: $3a^4-4a^3b+5a^2b^2$; tak znaleziony iloczyn odejmijmy od dzielnéj: otrzymamy resztę pierwszą, uporządkowaną także podług potęg malejących głoski a: $-6a^3b+17a^2b^2-22ab^3+15b^4$.

Ponieważ cała dzielna była iloczynem z całego dzielnika przez cały iloraz, a odjęliśmy od niéj iloczyn z dzielnika przez pierwszy wyraz ilorazu, przeto pozostałość: $-6a^3b+$ i t. d. będzie iloczynem z dzielnika przez wszystkie pozostałe wyrazy ilorazu.

O téj reszcie można więc toż samo powiedzieć, co i o całéj dzielnéj; mianowicie, że pierwszy jéj wyraz $-6a^3b$ jest iloczynem z pierwszego wyrazu dzielnika $3a^2$, przez pierwszy z pozostałych, czyli przez *drugi* wyraz ilorazu. Dzieląc więc ten wyraz $-6a^3b$ przez $3a^2$, znajdziemy $-2ab$, jako pierwszy z pozostałych wyrazów, czyli drugi wyraz ilorazu. Postępując tak daléj wynajdziemy kolejno wszystkie wyrazy ilorazu.

Bardzo ważną jest rzeczą uporządkowanie tak dzielnéj, jak i dzielnika podług potęg jednéj i téj samej głoski i pamiętanie, że tak samo mają być uporządkowane wszystkie reszty.

77. Może się przytrafić zarówno jak i w arytmetyce, że dzielenie *nie może być w zupełności wykonane.* Tak naprzykład, jeżeli dzielimy $a^2+2ab+2b^2$ przez $a+b$, wtedy otrzymamy na iloraz, tak jak w poprzednim paragrafie $a+b$, lecz jeszcze *pozostanie reszta* b^2.

Taki wypadek wyrażamy w podobny sposób, jak i w arytmetyce, mianowicie możemy napisać:

$$\frac{a^2+2ab+2b^2}{a+b} = a+b+\frac{b^2}{a+b},$$

to jest, że iloraz będzie $a+b$ wraz z częścią ułamkową $\frac{b^2}{a+b}$.

W ogóle, jeżeli A i B oznaczają dwa wyrażenia, i jeżeli przez dzielenie A przez B otrzymamy iloraz q i resztę R, wtedy ten wypadek wyraża się algiebraicznie jednym z następnych sposobów.

$$A = qB + R, \text{ lub } A - qB = R,$$

lub $$\frac{A}{B} = q + \frac{R}{B};$$

lub wreszcie: $$\frac{A}{B} - q = \frac{R}{B}.$$

Należy tutaj zwrócić uwagę na to, że każda głoska może oznaczać wyrażenie algiebraiczne (jednomian lub wielomian): często dogodną jest rzeczą dla jasności i krótkości oznaczyć w ten sposób jedną głoską całe wyrażenie algiebraicznie.

Ułamki algiebraiczne będą przedmiotem jednego z następnych rozdziałów; tutaj ograniczymy się temi przypadkami, w których dzielenie daje się wykonać dodać bez reszty.

78. Dalsze przykłady dla wprawy:

Podzielić: $x^7 - 5x^5 + 7x^3 + 2x^2 - 6x - 2$ przez $1 + 2x - 3x^2 + x^4$.

Uporządkujmy dzielną i dzielnik podług potęg malejących głoski x:

$$\begin{array}{l|l}
x^7 - 5x^5 + 7x^3 + 2x^2 - 6x - 2 & x^4 - 3x^2 + 2x + 1 \\
\mp x^7 \mp 3x^5 \pm 2x^4 \pm x^3 & \hline x^3 - 2x - 2 \\
\hline
-2x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 6x - 2 & \\
\mp 2x^2 \quad \pm 6x^3 \mp 4x^2 \quad \mp 2x & \\
\hline
-2x^4 + 6x^2 - 4x - 2 & \\
\pm 2x^4 \pm 6x^2 \mp 4x \mp 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Podzielić: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ przez $a + b + c$.

Porządkujemy dzielną i dzielnik podług potęg malejących głoski a:

$$\begin{array}{l|l}
a^3 - 3abc + b^3 + c^3 & a + b + c \\
\pm a^3 \pm a^2b \pm a^2c & \hline a^2 - ab - ac + b^2 - bc + c^2 \\
\hline
-a^2b - a^2c - abc + b^3 + c^3 & \\
\mp a^2b \mp ab^2 \mp abc & \\
\hline
-a^2c + ab^2 + 2abc + b^3 + c^3 & \\
\mp a^2c \quad \mp abc \mp ac^2 & \\
\hline
+ab^2 - abc + ac^2 + b^3 + c^3 & \\
\pm ab^2 \pm b^2c \quad \pm b^3 & \\
\hline
-abc + ac^2 - b^2c + c^3 & \\
\mp abc \mp bc^2 \mp b^2c & \\
\hline
ac^2 + bc^2 + c^3 & \\
\pm ac^2 \pm bc^2 \pm c^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Przy porządkowaniu dzielnéj i dzielnika podług potęg malejących głoski a, takie wyrazy, jak a^2b i a^2c, które mają ten sam wykładnik nad a, ustawiamy w ten sposób, że obieramy nową głoskę np. b, i ten wyraz,

który ją zawiera stawiamy przed tym wyrazem, który jéj nie ma; i w dalszym ciągu: z wyrazów ab^2 i abc, pierwszy piszemy przed drugim, gdyż on zawiera b z wyższym wykładnikiem.

Ten przykład można także wykonać z użyciem nawiasów w ten sposób:

$$\begin{array}{l|l} a^3 \quad -3abc+b^3+c^3 & a+b+c \\ a^3 \pm a^2(b+c) & \overline{a^2-a(b+c)+b^2-bc+c^2} \\ \hline -a^2(b+c)-3abc+b^3+c^3 & \\ \mp a^2(b+c) \mp a(b+c)^2 & \\ \hline a(b^2-bc+c^2)+b^3+c^3 & \\ \pm a(b^2-bc+c^2) \pm b^3 \pm c^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$(b+c)^2 = b^2+2bc+c^2$$

$$\begin{array}{l} b^2-bc+c^2 \\ b+c \\ \hline b^3-b^2c+bc^2 \\ \quad +b^2c-bc^2+c^3 \\ \hline b^3+c^3 \end{array}$$

Podzielić:

$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)\ x-abc$ przez $x-c$.

$$\begin{array}{l|l} x^3-(a+b+c)\ x^2+(ab+ac+bc)\ x-abc & x-c \\ \pm x^3 \mp cx^2 & \overline{x^2-(a+b)x+ab} \\ \hline -(a+b)\ x^2+(ab+ac+bc)\ x-abc & \\ \mp(a+b)\ x^2 \pm (a+b)cx & \\ \hline abx-abc & \\ \pm abx \mp abc & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Każde zadanie na mnożenie, w którém mnożna jest różną od mnożnika, daje powód do dwóch przykładów na dzielenie: gdyż jeżeli iloczyn podzielimy przez którykolwiek z czynników, otrzymamy czynnik drugi. Z tego powodu uczący się ze wszystkich przykładów danych w rozdziale o mnożeniu, może układać przykłady na dzielenie i tym sposobem probować dokładności swojéj roboty.

I również z każdego przykładu na dzielenie, w którym dzielnik i iloraz są różne, może być ułożony drugi przykład, w którym dzielna pozostanie taż sama co i poprzednio, nowym zaś dzielnikiem będzie iloraz wtedy na nowy iloraz powinien wypaść początkowy dzielnik.

PRZYKŁADY IX.

Podzielić:

1) $15x^5$ przez $3x^2$; 2) $24a^6$ przez $-8a^3$,
3) $18x^3y^2$ przez $6\ x^2y$; 4) $24a^4b^5c^6$ przez $-3a^2b^3c^4$.
5) $20a^4b^4x^3y^3$ przez $5b^2x^3y$.
6) $4x^3-8x^2+16x$ przez $4x$
7) $3a^4-12a^3+15a^2$ przez $-3a^2$
8) $x^3y-3x^2y^2+4xy^3$ przez xy.
9) $-15a^3b^3-3a^2b^2+12ab$ przez $-3ab$.
10) $60a^3b^3c^2-48a^2b^4c^2+36a^2b^2c^4-20abc^6$ przez $4abc^2$
11) $x^2-7x+12$ przez $x-3$; 12) x^2+x-72 przez $x+9$
13) $2x^3-x^2+3x-9$ przez $2x-3$.
14) $6x^3+14x^2-4x+24$ przez $2x+6$.
15) $9x^3+3x^2+x-1$ przez $3x-1$.
16) $7x^3-24x^2+58x-21$ przez $7x-3$.

17) x^6-1 przez $x-1$.
18) $a^3-2ab^2+b^3$ przez $a-b$.
19) x^4-81y^4 przez $x-3y$.
20) $x^4-2x^3y+2x^2y^2-xy^3$ przez $x-y$.
21) x^5-y^5 przez $x-y$. 22) a^5+32b^5 przez $a+2b$.
23) $2a^4+27ab^3-81b^4$ przez $a+3b$.
24) $x^6+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$ przez x^3+y^3.
25) $x^5+2x^4y+3x^3y^2-x^2y^3-2xy^4-3y^5$ przez x^3-y^3.
26) $x^4-5x^3+11x^2-12x+6$ przez x^2-3x+3.
27) $x^4+x^3-9x^2-16x-4$ przez x^2+4x+4.
28) x^4-13x^2+36 przez x^2+5x+6.
29) x^4+64 przez x^2+4x+8.
30) $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$ przez x^2+5x+4.
31) $x^4+x^3-24x^2-35x+57$ przez x^2+2x-3.
32) $1-x-3x^2-x^5$ przez $1+2x+x^2$.
33) x^6-2x^3+1 przez x^2-2x+1.
34) $a^4+2a^2b^2+9b^4$ przez $a^2-2ab+3b^2$.
35) a^6-b^6 przez $a^3-2a^2b+2ab^2-b^3$.
36) $x^6+2x^5-4x^4-2x^3+12x^2-2x-1$ przez x^2+2x-1.
37) $x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1$ przez $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.
38) $x^{12}+x^6-2$ przez x^4+x^2+1.
39) $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)\ x-abc$ przez $x^2-(a+b)x+ab$.
40) $a^2x^4+(2ac-b^2)x^2+c^2$ przez ax^2-bx+c.
41) $x^4-x^3y-xy^3+y^4$ przez x^2+xy+y^2
42) $x^3-3xy-y^3-1$ przez $x-y-1$.
43) $49x^2+21xy+12yz-16z^2$ przez $7x+3y-4z$.
44) $a^2+2ab+b^2-c^2$ przez $a+b-c$.
45) $a^3+8b^3+c^3-6abc$ przez $a^2+4b^2+c^2-ac-2ab-2bc$
46) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3$ przez $a+b+c$.
47) $a^2(b+c)+b^2(a-c)+c^2(a-b)+abc$ przez $a+b+c$.

48) $x^3-2ax^2+(a^2+ab-b^2)\ x-a^2b+ab^2$ przez $x-a+b$.
49) $(x+y)^2-2(x+y)z+z^2$ przez $x+y-z$.
50) $(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$ przez $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$.

X.

Szczególne przypadki mnożenia.

79. Niektóre szczególne przypadki mnożenia przytrafiają się tak często w rachunku algebraicznym, że zasługują tutaj na osobną wzmiankę.

Następujące trzy przykłady są wielkiéj wagi:

$a+b$	$a-b$	$a+b$
$a+b$	$a-b$	$a-b$
a^2+ab	a^2-ab	a^2+ab
$+ab+b^2$	$-ab+b^2$	$-ab-b^2$
$a^2+2ab+b^2$	$a^2-2ab+b^2$	$a^2\qquad -b^2$.

Pierwszy przykład daje wartość iloczynu $(a+b)(a+b)$, czyli $(a+b)^2$; z niego mamy:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

To jest: *kwadrat summy dwóch liczb jest równy summie kwadratów tychże liczb, więcéj podwójny ich iloczyn.*

Podobnie, z drugiego przykładu mamy:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

To jest: *kwadrat różnicy dwóch liczb jest równy summie kwadratów tychże liczb, mniéj podwójny ich iloczyn.*

Nakoniec ostatni przykład daje:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

To jest: *iloczyn z summy dwóch liczb przez ich różnicę, równa się różnicy kwadratów tychże liczb.*

80. Wypadki otrzymane w poprzednim paragrafie, przedstawiają przykład jednego z wielkich pożytków algebry: w saméj rzeczy algebra daje nam możność *dowodzenia ogólnych twierdzeń odnoszących się do liczb*, a także *wyrażanie tychże twierdzeń krótko.*

Naprzykład: wypadek $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ jest dowiedziony ogólnie dla wszystkich liczb i jest wyrażony w symbolach krócéj i zwięźléj, aniżeli wyrazami.

Wypadek ogólny w podobny sposób wyrażony symbolami nazywa się *wzorem algebraicznym* (formułą).

81. Tutaj jeszcze możemy pokazać i objaśnić znaczenie znaku $\pm$, który powstaje z połączenia znaków $+$ i $-$, i który jest zwany *znakiem podwójnym.*

Ponieważ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, a $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, przeto możemy przedstawić oba te wypadki w jednym wzorze tak:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$

gdzie $\pm$ pokazuje, że możemy wziąść albo znak $+$ albo też znak $-$, ale *zawsze biorąc jednocześnie albo znaki górne, albo téż znaki dolne*, $a\pm b$ należy czytać tak: *a więcéj* lub *mniéj b.*

82. Poświęcimy kilka następnych paragrafów dla wykazania użycia wzorów paragrafu 79. Ażeby łatwiéj było można do nich się odwołać, wypisujemy je razem i opatrujemy każdy osobnym numerem:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

83. Wzory te mogą się nieraz przydać i w obliczeniach arytmetycznych.

Tak naprzykład: przypuśćmy, że chcemy znaleźć różnicę kwadratów 127 i 123. Na zasadzie wzoru (3) będzie:

$$(127)^2-(123)^2=(127+123)(127-123)=$$
$$=250\times 4=1000.$$

Tym sposobem szukana liczba została znaleziona prędzéj i łatwiéj, aniżeli przez podniesienia do kwadratu liczb 127 i 123 i następne odjęcie drugiego kwadratu od pierwszego.

Daléj, na zasadzie wzoru (2):

$$(29)^2=(30-1)^2=900-60+1=841;$$

przez co znowuż kwadrat 29 został prędzéj wynaleziony, aniżeli przez bezpośrednie pomnożenie 29 przez 29.

Przypuśćmy jeszcze, że mamy pomnożyć 53 przez 47. Z wzoru (3) mamy:

$$53\times 47=(50+3)(50-3)=(50)^2-3^2=2500-9=$$
$$=2491.$$

84. Przypuśćmy teraz, że chcemy znaleźć kwadrat ilości $3x+2y$. Oczywiście możemy dojść do tego zwyczajną drogą, mnożąc $3x+2y$ przez $3x+2y$. Lecz możemy także otrzymać żądany wypadek i inaczéj, przez użycie wzoru (1). Wzór ten ma miejsce jakiekolwiek by były liczby a i b; możemy więc w nim podstawić $3x$ w miejsce a, i $2y$ w miejsce b. Tym sposobem będzie:

$$(3x+2y)^2=(3x)^2+2(3x\times 2y)+(2y)^2=$$
$$=9x^2+12xy+4y^2.$$

Uczący się może sądzić, że w tym przypadku nic nie wygrywa przez użycie wzoru, gdyż prawdopodobnie otrzymałby szukany wypadek tak prędko i pewnie zwykłém mnożeniem, jak przez użycie wzoru. Jakkolwiek w obecnym przypadku jest to prawdą, ale z czasem przekonamy się, że w bardziéj złożonych przypadkach użycie wzorów oddaje wielkie usługi.

85. Przypuśćmy, że chcemy znaleść kwadrat $x+y+z$. Oznaczmy $x+y$ przez a. Wtedy

$$x+y+z=a+z;$$

i na zasadzie wzoru (1) mieć będziemy:

$$(a+z)^2=a^2+2az+z^2=(x+y)^2+2(x+y)z+z^2=$$
$$=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2.$$

Stąd:

$$(x+y+z)^2=x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2$$
$$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx.$$

Przypuśćmy dalėj. że szukamy kwadratu $p-q+r-s$. Czyniąc $p-q$ równém a, i $r-s$ równém b, będzie:

$$p-q+r-s=a+b.$$

Na zasadzie wzoru (1) mamy:
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=(p-q)^2+2(p-q)(r-s)+(r-s)^2$.
Lecz, opierając się na wzorze (2), możemy znaleść $(p-q)^2$ i $(r-s)^2$.

Tym sposobem będzie:

$$(p-q+r-s)^2=p^2-2pq+q^2+2(pr-ps-qr+qs)$$
$$+r^2-2rs+s^2=$$
$$=p^2+q^2+r^2+s^2+2pr+2qs-2ps-2qr-$$
$$-2pq-2rs.$$

Przypuśćmy nakoniec, że mamy znaleść iloczyn $p-q+r-s$ przez $p-q-r+s$.

Uczyńmy znowuż: $p-q=a$, i $r-s=b$; wtedy:
$p-q+r-s=a+b$, a $p-q-r+s=a-b$.

Na zasadzie wzoru: (3) otrzymamy:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2=(p-q)^2-(r-s)^2;$$

a na zasadzie wzoru (2) mieć będziemy:

$$(p-q+r-s)(p-q-r+s)=p^2-2pq+q^2-(r^2-2rs+s^2)$$
$$=p^2+q^2-r^2-s^2-2pq+2rs.$$

86. Sposób użyty w poprzednim paragrafie jest łatwy, i pewną drogą prowadzi do celu, przeto zawsze takiego sposobu powinien się trzymać początkujący. Lecz po nabyciu większéj wprawy, i lepszém zaznajomieniu się z przedmiotem, może się uwolnić od niektórych części roboty. I tak np. w ostatnim przykładzie może opuścić wprowadzanie ilości a i b, i wprost postępować w ten sposób:

$$(p-q+r-s)(p-q-r+s)=\{p-q+(r-s)\}\{p-q-$$
$$-(r-s)\}=(p-q)^2-(r-s)^2=p^2-2pq+q^2-(r^2-2rs+s^2)$$
$$=p^2-2pq+q^2-r^2+2rs-s^2;$$

albo jeszcze krócéj:

$$(p-q+r-s)(p-q-r+s)=(p-q)^2-(r-s)^2=$$
$$=p^2-2pq+q^2-r^2+2rs-s^2.$$

Lecz w początkach radzimy uczącemu rozwijać działanie w zupełności, tak jak to było pokazane w paragrafie poprzednim.

87. W następującym przykładzie spotkamy użycie wszystkich trzech wzorów.

Znaleść iloczyn z czterech czynników $a+b+c$, $a+b-c$, $a-b+c$, $b+c-a$. Weźmy najprzód dwa pierwsze czynniki; z wzorów (3) i (1) otrzymamy:

$$(a+b+c)(a+b-c)=(a+b)^2-c^2=a^2+2ab+b^2-c^2.$$

Weźmy daléj dwa drugie czynniki; z wzorów (3) i (2) mieć będziemy:

$$(a-b+c)(b+c-a)=\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}=$$
$$=c^2-(a-b)^2=c^2-a^2+2ab-b^2.$$

Mamy teraz do pomnożenia:

$$a^2+2ab+b^2-c^2 \text{ przez } c^2-a^2+2ab-b^2.$$

Otrzymamy:

$$(a^2+2ab+b^2-c^2)(c^2-a^2+2ab-b^2)=$$
$$=\{2ab+(a^2+b^2-c^2)\}\{2ab-(a^2+b^2-c^2)\}=$$
$$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2=4a^2b^2-\{(a^2+b^2)^2-2(a^2+b^2)c^2+$$
$$+c^4\}=4a^2b^2-(a^2+b^2)^2+2(a^2+b^2)c^2-c^4=$$
$$=4a^2b^2-a^4-2a^2b^2-b^4+2a^2c^2+2b^2c^2-c^4$$
$$=2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2-a^4-b^4-c^4.$$

88. Są jeszcze inne ogólne wzory, odnoszące się do mnożenia, mniejszéj wagi, aniżeli trzy wzory podane w paragrafie 82, wszakże zasługujące na wzmiankę. Umieszczamy niektóre z nich w tym celu, aby czytelnik mógł je odnaleść łatwo, gdy zajdzie tego potrzeba; wszystkie one mogą być z łatwością wyprowadzone przez rzeczywiste wykonanie mnożenia:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3,$$
$$(a+b)^3=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$(a-b)^3=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$
$$(a-b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3=$$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+2bc+c^2)+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+$$
$$+3c^2(a+b)+6abc.$$

89. Bardzo pożyteczne ćwiczenia na mnożenie wypadają z zadań, w których chcemy dowieść równości dwóch wyrażeń, przez pokazanie, że wyrażenia te prowadzą do tych samych wypadków ostatecznych.

Naprzykład, chcemy pokazać że:

$$(a-b)(b-c)(c-a)=a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a).$$

Jeżeli pomnożymy $a-b$ przez $b-c$, otrzymamy:

$$ab-b^2-ac+bc;$$

mnożąc daléj ten wypadek przez $c-a$, znajdziemy:

$$cab-cb^2-ac^2+bc^2-a^2b+ab^2+a^2c-abc,$$

to jest:

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a).$$

Inne zadanie: dowieść, że:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$$
$$=2(c-b)(c-a)+2(b-a)(b-c)+2(a-b)(a-c).$$

Z wzoru (2) paragrafu 82, otrzymujemy:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=$$
$$=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2=$$
$$=2(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc).$$

Lecz skądinąd wiemy, że:

$$(c-b)(c-a) = c^2-ca-cb+ab$$
$$(b-a)(b-c) = b^2-ba-bc+ac$$
$$(a-b)(a-c) = a^2-ab-ac+bc,$$

przeto:

$$(c-b)(c-a)+(b-a)(b-c)+(a-b)(a-c) = a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc;$$

skąd nakoniec,

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(c-b)(c-a)+2(b-a)(b-c)+2(a-b)(a-c).$$

PRZYKŁADY X.

Zastosować wzory paragrafu 82 do następujących 16 przykładów na mnożenie:

1. $(15x+14y)^2$.
2. $(7x^2-5y^2)^2$.
3. $(x^2+2x-2)^2$.
4. $(x^2-5x+7)^2$.
5. $(2x^2-3x-4)^2$.
6. $(x+2y+3z)^2$.
7. $(x^2+xy+y^2)(x^2+xy-y^2)$.
8. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.
9. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy-y^2)$.
10. $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2)$.
11. $(x^3+2x^2+3x+1)(x^3-2x^2+3x-1)$.
12. $(x-3)^2(x^2+6x+9)$.
13. $(a+b)^2(a^2-2ab+b^2)$.
14. $(2x+3y)^2(4x^2+12xy-9y^2)$.
15. $(ax+by)(ax-by)(a^2x^2+b^2y^2)$.
16. $(ax+by)^2(ax-by)^2$.

Pokazać, że następujące wzory są prawdziwe:

17. $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$.

18. $(a+b+c)^2+a^2+b^2+c^2 = (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$.
19. $(a-b)(b-c)(c-a) = bc(c-b)+ca(a-c)+ab(b-a)$.
20. $(a-b)^3+b^3-a^3 = 3ab(b-a)$.
21. $(a+b+c)^2-a(b+c-a)-b(a+c-b)-c(a+b-c) = 2(a^2+b^2+c^2)$.
22. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2 = 4ab(a^2+b^2)$.
23. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$.
24. $(a+b+c)(ab+bc+ca) = (a+b)(b+c)(c+a)+abc$.
25. $(a+b)(b+c-a)(c+a-b) = a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)$.
26. $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3 = 24abc$.
27. $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(a-b+c)^2+(b+c-a)^2 = 4(a^2+b^2+c^2)$.
28. $(a+b)^2+2(a^2-b^2)+(a-b)^2 = (2a)^2$.
29. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$.
30. $(a-b)^3+(a+b)^3+3(a-b)^2(a+b)+3(a+b)^2(a-b) = (2a)^3$.
31. $(a+b)^2(b+c-a)(c+a-b)+(a-b)^2(a+b+c)(a+b-c) = 4abc^2$.
32. $a(b+c)(b^2+c^2-a^2)+b(c+a)(c^2+a^2-b^2)+c(a+b)(a^2+b^2-c^2) = 2abc(a+b+c)$.
33. $(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a) = (a-b)(b-c)(a-c)$.
34. $(a+b)^2+(a+c)^2+(a+d)^2+(b+c)^2+(b+d)^2+(c+d)^2 = (a+b+c+d)^2+2(a^2+b^2+c^2+d^2)$.
35. $\{(ax+by)^2+(ay-bx)^2\}\{(ax+by)^2-(ay+bx)^2\} = (a^4-b^4)(x^4-y^4)$.
36. $(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2+(ax+by+cz)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$.

XI.

Rozkład na czynniki.

90. W poprzednim rozdziale poznaliśmy niektóre ogólne wzory, wypadające z mnożenia; też same wzory mogą być uważane w związku z dzieleniem, gdyż każde zadanie na mnożenie daje jedno, lub kilka zadań na dzielenie. Zastosujemy teraz znalezione wzory ogólne, do rozwiązania pytania: jak znaleźć dla danego wyrażenia algiebraicznego te wyrażenia, przez które ono dzieli się bez reszty, czyli innemi słowy, *jak rozłożyć dane wyrażenie na czynniki, z których się ono składa.*

91. Tak naprzykład z wzoru (3), paragrafu 82, mamy:

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$$

$$a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^4-b^4)=$$

$$=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b).$$

Stąd widzimy, że a^8-b^8 jest iloczynem czterech czynników a^4+b^4, a^2+b^2, $a+b$ i $a-b$. Więc a^8-b^8 jest podzielne przez każdy z tych czynników, lub przez iloczyn którychkolwiek dwóch z nich, lub też przez iloczyn którychkolwiek trzech z nich.

Daléj jeszcze

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)=$$

$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=$$

$$=a^4+a^2b^2+b^4.$$

Tym sposobem $a^4+a^2b^2+b^4$ jest iloczynem dwóch czynników a^2+ab+b^2 i a^2-ab+b^2, jest więc podzielne przez każdy z tychże czynników.

Oprócz tych wzorów, które poprzednio podaliśmy, umieszczamy poniżéj jeszcze niektóre, częstego w algebrze użycia.

92. Następujące wypadki można łatwo sprawdzić przez dzielenie:

$$\frac{x-y}{x-y}=1,$$

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}=x+y,$$

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2,$$

$$\frac{x^4-y^4}{x-y}=x^3+x^2y+xy^2+y^3,$$

i tak daléj:

I również:

$$\frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y,$$

$$\frac{x^4-y^4}{x+y}=x^3-x^2y+xy^2-y^3,$$

$$\frac{x^6-y^6}{x+y}=x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5;$$

i tak daléj.

Jeszcze:

$$\frac{x+y}{x+y}=1,$$

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2-xy+y^2,$$

$$\frac{x^5+y^5}{x+y} = x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4,$$

i tak daléj.

Ponieważ te działania można posunąć tak daleko, jak się podoba, przeto można uważać za prawdziwe te twierdzenia, które z nich w téj chwili wyciągniemy. i które są ściśle dowiedzione w obszerniejszych dziełach algiebry. Twierdzenia te są następujące:

$x^n - y^n$ jest podzielne przez $x-y$, gdy n oznacza *jakąkolwiek* liczbę całkowitą.

$x^n - y^n$ jest podzielne przez $x+y$, gdy n jest liczbą *parzystą*,

$x^n + y^n$ jest podzielne przez $x+y$, gdy n jest liczbą *nieparzystą*.

Moglibyśmy też wyrazić słowami twierdzenia, wykazujące jaką postać ma iloraz w każdym z powyższych trzech przypadków; lecz czytelnik sam łatwo będzie w stanie zapamiętać tę postać, przez dokładne przyjrzenie się otrzymanym wypadkom, posuwając zresztą te działania daléj jeszcze, jeżeli uważać będzie to za potrzebne:

Dodamy tu jeszcze, że $x^n + y^n$ nie jest *nigdy* podzielne przez $x-y$, i nie jest podzielne przez $x+y$, gdy n jest liczbą *parzystą*. [1])

[1]) Dla uzupełnienia tego rozdziału podajemy krótki dowód wyrażonych w tekście twierdzeń.

93. Aby łatwo spamiętać powyższe twierdzenia należy w każdym z czterech przypadków wybrać najprostszy i do niego odnieść wszystkie pozostałe. Tak naprzykład przypuśćmy, że chcemy poznać czy x^7-y^7 jest podzielne przez $x-y$ lub przez $x+y$; wykładnik 7 jest liczbą *nieparzystą*, i najprostszy przypadek tego rodzaju jest $x-y$;— wyrażenie, które jest podzielne przez $x-y$, ale nie jest podzielne przez $x+y$; stąd wnosimy, że $x^7 - y^7$ dzieli się bez reszty przez $x - y$, ale nie przez $x+y$. Podobnież: gdyby dane wyrażenie było x^8-y^8; wykładnik 8 jest liczbą *parzystą*, najprostszy zaś przypadek tego rodzaju jest x^2-y^2, wyrażenie, które jest podzielne zarazem przez $x+y$ jak i przez

---

Podzielmy $x^n - y^n$ przez $x-y$:

$$\begin{array}{l|l} x^n - y^n & x-y \\ \hline -x^n \mp x^{n-1}y & x^{n-1} \mp x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1} \\ \hline x^{n-1}y - y^n & \\ -x^{n-1}y \mp x^{n-2}y^2 & \\ \hline x^{n-2}y^2 - y^n & \\ -x^{n-2}y^2 \mp x^{n-3}y^3 & \\ \hline x^{n-3}y^3 - y^n\,. & \end{array}$$

Z wykonanego dzielenia widzimy, że każda reszta składa się z dwóch wyrazów: jednym z nich jest stale $-y^n$; w drugim zaś, złożonym z dwóch czynników, wykładnik przy x po każdém dzieleniu zmniejsza się o 1, wykładnik przy y powiększa się o 1. Po wykonaniu więc n dzieleń, x zupełnie zniknie z tego wyrazu, a wykładnik przy y wzrośnie do n. Odpowiednia reszta po n-ém dzieleniu będzie przeto $y^n - y^n$ t. j. zero. Liczba wyrazów w ilorazie równać się będzie n. Podobnego rodzaju rozumowanie, zastosowanego do każdego z wymienionych przypadków dowiedzie nam prawdziwości twierdzeń wspomnianych. *P. T.*

$x-y$; stąd wypada, że $x^8 - y^8$ jest podzielne i przez $x-y$ i przez $x+y$.

94. Dalsze przykłady rozkładu wyrażeń algiebraicznych na czynniki:

$$x^6 - y^6 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) =$$
$$= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2);$$
$$8b^3 - 27c^3 = (2b)^3 - (3c)^3 =$$
$$= (2b-3c)\{(2b)^2 + 2b \times 3c + (3c)^2\} =$$
$$= (2b-3c)(4b^2 + 6bc + 9c^2).$$
$$4(ab+cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 =$$
$$= \{2(ab+cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\}$$
$$\{2(ab+cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\} =$$
$$= \{2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2\}$$
$$\{2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2\} =$$
$$= \{(a+b)^2 - (c-d)^2\}\{(c+d)^2 - (a-b)^2\} =$$
$$= (a+b+c-d)(a+b+d-c)(a-b+c+d)(b+c+d-a).$$

95. Przypuśćmy, że mamy do podzielenia

$(x^2 - 5xy + 6x^2)(x - 4y)$ przez $x^2 - 7xy + 12y^2$.

Moglibyśmy pomnożyć najprzód $x^2 - 5xy + 6y^2$ przez $x-4y$ i następnie iloczyn podzielić przez $x^2-7xy+12y^2$. Lecz rodzaj pytania nasuwa nam myśl sprobowania najprzód, czy $x-4y$ nie jest czynnikiem trójmianu $x^2 - 7xy + 12y^2$; i w saméj rzeczy znajdujemy, że $x^2 - 7xy + 12y^2 = (x-3y)(x-4y)$. Zatém:

$$\frac{(x^2-5xy+6y^2)(x-4y)}{(x-3y)(x-4y)} = \frac{x^2 - 5xy + 6y^2}{x - 3y};$$

i za pomocą dzielenia znajdujemy, że:

$$\frac{x^2 - 5xy + 6y^2}{x-3y} = x - 2y.$$

96. Czytelnik, przez odpowiednie ćwiczenia, może nabyć wprawy w rozkładanie pewnych trójmianów na dwa czynniki dwumienne za pomocą następnych uwag:

Mamy w ogólności:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab;$$

jeżeli więc chcemy poznać czy możliwą jest rzeczą aby np. $x^2+7x+12$ rozłożyć na dwa czynniki dwumienne, należy przekonać się czy można znaleść takie dwie liczby, których summa równa jest 7 a iloczyn jest równy 12. Takiemi dwiema liczbami są 3 i 4. Zatém:

$$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4).$$

Podobnież, za pomocą *wzoru*:

$$(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab,$$

możemy rozłożyć trójmian $x^2 - 7x + 12$ na czynniki $(x-3)(x-4)$. I nakoniec na zasadzie wzoru:

$$(x+a)(x-b) = x^2 + (a-b)x - ab,$$

można rozłożyć x^2+x-12 na czynniki $(x+4)(x-3)$.

Podamy teraz niektóre ćwiczenia na zastosowanie zasad, wyłożonych w poprzednich rozdziałach.

PRZYKŁADY XI.

Dodać do siebie następujące wyrażenia:

1. $a\,(a+b-c)$, $b\,(b+c-a)$, $c\,(a+c-b)$.
2. $a\,(a-b+c)$, $b\,(b-c+a)$, $c\,(c-a+b)$.
3. $a\,(a-b+c+d)$, $b\,(a+b-c+d)$, $c\,(a+b+c-d)$, $d\,(-a+b+c+d)$.
4. $3a-(4b-7c)$, $3b-(4c-7a)$, $3c-(4a-7b)$.
5. $9a-(5b+2c)$, $9b-(5c+2a)$, $9c-(5a+2b)$.
6. $(a+b)\,x+(a+c)\,y$, $(b-c)\,x+(b-c)\,y$, $(c-a)x+(b-a)\,y$.
7. $(z-x)\,(a+b)+(z-y)\,(a-b)$; $(x+y)\,a+(x+z)\,b$, $(y-z)\,a+(x-y)\,b$.
8. $(a-b)\,x+(b-c)\,y+(c-a)\,z$, $a\,(y+z)+b\,(z+x)+c\,(x+y)$; $ax+by+cz$.
9. $2\,(a+b-c)\,x+(a+b)\,y+2az$, $2\,(a+c-b)\,x+(a+c)\,y+2bz$, $2\,(b+c-a)\,x+(b+c)\,y+2cz$,
10. $a^2-(a-b+c)\,(a+b-c)$; $b^2-(b-a+c)\,(b+a-c)$, $c^2-(c-a+b)\,(c+a-b)$.

Uprościć następujące wyrażenia:

11. $a-2\,(b+3a)-3\,\{b+2\,(a-b)\}$.
12. $(a+b)\,(b+c)-(c+d)\,(d+a)-(a+c)\,(b-d)$.
13. $4a-[2a-\{2b\,(x+y)-2b\,(x-y)\}]$.
14. $(x+b)\,(x+c)-(a+b+c)\,(x+b)+a^2+ab+b^2+3ax$.
15. $a-[5b-\{a-3\,(c-b)+2c-(a-2b-c)\}]$.
16. $5a-7\,(b-c)-[6a-(3b+2c)+4c-\{2a-(b+c-a)\}]$.
17. $(x+3)^3-3\,(x+2)^3+3\,(x+1)^3-x^3$.

18. $(x+y)^3+(x+y)^2\,y+(x+y)y^2-\{3x^2y+5y^2x+2y^3\}$.
19. $(1+x)^3+(1+x)^2\,y+(1+x)\,y^2+y^3-\{3x\,(x+1)+y\,(y+1)+2xy+1\}$.
20. $a\,(b+c)^2+b(a+c)^2+c\,(a+b)^2+(a-b)\,(a+c)\,(b-c)-(a+b)\,(a-c)\,(b-c)-(a-b)\,(a-c)\,(b+c)$.
21. $\dfrac{(a+b)\,(a+c)-(b+d)\,(d+c)}{a-d}$.
22. $\dfrac{a^2-3ab+2b^2}{a-2b}-\dfrac{a^2-7ab+12b^2}{a-3b}$.
23. $\dfrac{3a^3-7a^2b-5ab^2+5b^3}{a+b}+\dfrac{6a^3-26a^2b+40ab^2-20b^3}{a-b}$.
24. $\dfrac{18\,(bc^2+ca^2+ab^2)-12\,(b^2c+c^2a+a^2b)-19abc}{2a-3b}$.

Podzielić:

25. $x^6+y^6-2x^3y^3$ przez $(x-y)^2$.
26. $x^6+y^6+2x^3y^3$ przez $(x+y)^2$.
27. $(a^3-3a^2b+5ab^2-3b^3)\,(a-2b)$ przez $a^2-3ab+2b^2$.
28. $(x^3-9x^2y+23xy^2-15y^3)\,(x-7y)$ przez $x^2-8xy+7y^2$.
29. $a^8+a^4b^4+b^8$ przez $(a^2-ab+b^2)\,(a^2+ab+b^2)$.
30. $a^8-b^8+a^2b^2\,(a^4-b^4)$ przez $(a^2-ab+b^2)\,(a^2+ab+b^2)$.
31. $4a^2b^2+2\,(3a^4-2b^4)-ab\,(5a^2-11b^2)$ przez $(3a-b)\,(a+b)$.
32. $(x^2-3x+2)\,(x-3)$ przez x^2-5x+6.
33. $(x^3-3x+2)\,(x+4)$ przez x^2+x-2.
34. $(a^2+ax+x^2)\,(a^3+x^3)$ przez $a^4+a^2x^2+x^4$.
35. $(a^4+a^2b^2+b^4)\,(a+b)$ przez a^2+ab+b^2.
36. $b\,(x^3+a^3)+ax\,(x^2-a^2)+a^3\,(x+a)$ przez $(a+b)\,(x+a)$,

Rozłożyć następujące wyrażenia na czynniki:

37. $x^2+9x+20$. 38. $x^2+11x+30$.
39. $x^2-15x+50$. 40. $x^2-20x+100$.
41. $x^2+x-132$. 42. $x^2-7x-44$.
43. x^4-81. 44. x^3+125.
45. x^8-256. 46. x^6-64.
47. $a^2+9ab+20b^2$. 48. $x^2-13xy+42y^2$.
49. $(a+b)^2-11c\,(a+b)+30c^2$.
50. $2\,(x+y)^2-7\,(x+y)\,(a+b)+3\,(a+b)^2$.

Dowieść, że następne wyrażenia są rzeczywiście równe:

51. $(a+2b)\,a^3-(b+2a)\,b^3=(a-b)\,(a+b)^3$.
52. $a\,(a-2b)^3-b\,(b-2a)^3=(a-b)\,(a+b)^3$.

XII.

Największy wspólny dzielnik.

97. W arytmetyce ta liczba całkowita, która dzieli bez reszty drugą liczbę całkowitą, nazywa się *dzielnikiem* téj ostatniéj; liczba całkowita, która dzieli dwie lub więcéj liczb całkowitych, nazywa się ich *wspólnym dzielnikiem*.

W algiebrze wyrażenie, które dzieli bez reszty inne wyrażenie algiebraiczne, nazywa się *dzielnikiem* tego ostatniego; wyrażenie zaś, przez które dzieli się bez reszty dwa lub więcéj wyrażeń algiebraicznych, nazywa się ich *wspólnym dzielnikiem* (lub wspólną miarą).

98. W arytmetyce *największym wspólnym dzielnikiem* (lub największą wspólną miarą) dwóch lub więcéj liczb, jest największa liczba całkowita, przez którą wszystkie dadzą się podzielić bez reszty.

Wyrażenie: największy wspólny dzielnik, jest także używane w algiebrze, lecz tutaj nie jest ono zupełnie stosowne, gdyż wyrazy: *większy* i *mniejszy* rzadko dadzą się zastosować do tych wyrażeń algiebraicznych, w których nie są dane pewne oznaczone wartości na rozmaite głoski, wchodzące do nich. Lepiéj byłoby mówić o *najwyższym wspólnym dzielniku*; lecz zgodnie z przyjętym zwyczajem zachowamy wyrażenie: *największy wspólny dzielnik* (lub *największa wspólna miara*).

Zamiast wyrazów: największy wspólny dzielnik, często używać będziemy dla krótkości głosek: *N. W. D.*

Objaśnimy teraz, w jakim znaczeniu wyrażenie *N. W. D.* jest używane w algiebrze.

99. Mówimy, że największy wspólny dzielnik dwóch lub więcéj jednomianów: jest to *największe wyrażenie algiebraiczne, przez które one wszystkie dadzą się podzielić*; określenie to stanie się zupełnie zrozumiałem po podaniu i objaśnieniu przykładami prawidła na wynajdywanie największego wspólnego dzielnika dla jednomianów.

Prawidło na wynalezienie *N. W. D.* jednomianów jest takie: *należy znaléść N. W. D. wszystkich współczynników liczebnych za pomocą prawideł arytmetyki; następnie, do tak znalezionéj liczby należy dopisać każdą głoskę, wspólną wszystkim wyrażeniom, i dać każdéj głosce najmniejszy odpowiedni wykładnik, jaki ona ma w tych wyrażeniach.*

100. Naprzykład: mamy znaleść *N. W. D.* dla $16a^4b^2c$ i $20a^3b^3d$. Tutaj współczynniki liczebne są

16 i 20, a ich *N. W. D.* jest 4. Głoski wspólne obu jednomianom są a i b, najmniejszy wykładnik przy a jest 3, a najmniejszy wykładnik przy b jest 2. Tym sposobem szukany *N. W. D.* będzie $4a^3b^2$.

Szukajmy jeszcze *N. W. D.* dla $8a^2b^3c^2x^5yz^3$, $12a^4bcx^2y^3$, i $16a^3c^3x^2y^4$. Współczynniki liczebne są 8, 12 i 16; ich *N. W. D.* jest 4. Głoski wspólne wszystkim wyrażeniom są: a, c, x i y; ich najmniejsze wykładniki są odpowiednio: 2, 1, 2 i 1. Tym sposobem szukany *N. W. D.* będzie $4a^2cx^2y$.

101. Następujące twierdzenie daje najlepsze praktyczne pojęcie o tém, co rozumiemy przez największy wspólny dzielnik w algiebrze, gdyż ono pokazuje znaczenia tutaj wyrazu *największy*. *Gdy dwa lub więcéj wyrażeń algiebraicznych podzielimy przez ich największy wspólny dzielnik, wtedy otrzymane ilorazy nie mają żadnego wspólnego dzielnika.*

Weźmy pierwszy przykład paragrafu 100, i podzielmy podane tam jednomiany przez ich *N. W. D.*, otrzymamy ilorazy $4ac$ i $5bd$, które nie mają żadnego wspólnego dzielnika.

Podobnież, jeżeli w drugim przykładzie paragrafu 100 podzielimy dane jednomiany przez ich *N. W. D.*, otrzymamy na ilorazy $2b^3cx^3z^3$, $3a^2by^2$, i $4ac^2y^3$, które również nie mają żadnego wspólnego dzielnika.

102. To, co było powiedzianém w poprzednim paragrafie, przy pomocy rozdziału o rozłożeniu na czynniki, daje nam w wielu razach możność oznaczenia *N. W. D. wielomianów*. Przypuśćmy np., że szukamy *N. W. D.* dla $4a^2\,(a+b)^2$ i $6ab\,(a^2-b^2)$. Tutaj $2a$ jest *N. W. D.* czynników $4a^2$ i $6ab$, a $a+b$ jest czynnikiem zarazem i $(a+b)^2$ i a^2-b^2, i to jedynym

czynnikiem wspólnym. Iloczyn więc $2a\,(a+b)$ jest *N. W. D.* danych wyrażeń.

Lecz ten sposób nie może być w ogólności zastosowanym do jakichkolwiek wielomianów, gdyż ogólna teoryja rozkładu wielomianów na czynniki o wiele przechodzi po za granicę tych wiadomości, jakie początkujący posiada. Musimy więc do tego wyszukać innego sposobu;—i następujące określenia i prawidła zawierają inne rozwiązanie tego zadania.

103. Największy wspólny dzielnik wielomianów możemy określić w następujący sposób. *Jeżeli dwa lub więcéj wielomianów zawiera potęgi pewnéj głoski wspólnéj, wtedy ten z czynników, dzielących wszystkie te wielomiany, w którym ta głoska wchodzi z najwyższym wykładnikiem, nazywa się ich największym wspólnym dzielnikiem.*

104. Na wynalezienie największego wspólnego dzielnika dla dwóch wielomianów mamy takie prawidło:

Niech A i B oznaczają dwa wielomiany; uporządkujmy je podług potęg malejących pewnéj wspólnéj głoski. Przypuśćmy, że wykładnik najwyższéj potęgi téj głoski w A nie jest mniejszy, aniżeli wykładnik najwyższéj potęgi tejże głoski w B. Podzielmy A przez B, następnie B przez resztę; potém tę resztę pierwszą przez resztę drugą, — i tak daléj postępujmy dotąd, dopóki nie pozostanie żadnéj reszty; — wtedy ostatni dzielnik będzie największym wspólnym dzielnikiem szukanym.

105. Naprzykład: szukajmy *N. W. D* dla x^2-4x+3 i $4x^3-9x^2-15x+18$.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 9x^2 - 15x + 18 & x^2 - 4x + 3 \\ -4x^3 \mp 16x^2 \pm 12x & \hline 4x + 7 \\ \hline 7x^2 - 27x + 18 & \\ -7x^2 \mp 28x \pm 21 & \\ \hline x - 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 4x + 3 & x - 3 \\ -x^2 \mp 3x & \hline x - 1 \\ \hline - x + 3 & \\ \mp x \pm 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Więc $x-3$ jest szukanym N. W. D.

106. Prawidło, podane w paragrafie 104, opiéra się na dwóch następnych zasadach:

(1) Jeżeli P jest dzielnikiem dla A, wtedy będzie ono dzielnikiem i dla mA. Gdyż: jeżeli a oznacza iloraz z podzielenia A przez P, to $A=aP$, a przeto $mA=maP$, więc P jest dzielnikiem dla mA.

(2) Jeżeli P jest dzielnikiem dla A i B, wtedy będzie ono dzielnikiem dla $mA \pm nB$. W saméj rzeczy: skoro P jest dzielnikiem dla A i dla B, to możemy przyjąć, że $A=aP$, i $B=bP$. Zatém $mA \pm nB = (ma \pm nb)P$, czyli P jest dzielnikiem dla $mA \pm nB$.

107. Teraz dopiéro możemy dowieść prawidło, podane w § 104.

Niech A i B oznaczają dwa wyrażenia dane. Podzielmy A przez B; i oznaczmy przez p iloraz a przez C resztę. Podzielmy B przez C, i oznaczony przez q iloraz a przez D resztę. Podzielmy daléj C przez D, i przypuśćmy, że nie pozostaje żadna reszta, a r jest ilorazem.

Wtedy mamy następujące wyrażenia:

$$A=pB+C, \quad B=qC+D, \quad C=rD.$$

Pokażemy najprzód, że D jest *wspólnym* dzielnikiem dla A i B. Ponieważ $C=rD$, przeto D jest dzielnikiem dla C, a zatém, podług § 106, jest także dzielnikiem dla qC, a przeto i dla $qC+D$, czyli dla B.

I daléj: ponieważ D jest dzielnikiem dla C i B, przeto i dla $pB+C$ czyli dla A. I tak D jest dzielnikiem dla A i B.

Poprzednie rozumowanie pokazuje nam, że D jest *wspólnym* dzielnikiem dla A i B; pozostaje teraz dowieść, że ono jest ich *największym* wspólnym dzielnikiem.

Na zasadzie § 106 każdy wspólny dzielnik dla A i B, jest dzielnikiem i dla $A-pB$, to jest dla C; a zatém każdy wspólny dzielnik dla A i B jest zarazem wspólnym dzielnikiem dla B i C. Podobnież: każdy wspólny dzielnik dla B i C, jest zarazem wspólnym dzielnikiem dla C i D. Tym sposobem każdy wspólny dzielnik dla A i B jest zarazem dzielnikiem i dla D. Lecz żadne wyrażenie wyższego wymiaru od wymiaru D nie może dzielić D bez reszty. A zatém D jest *największym* wspólnym dzielnikiem dla A i B.

108. Widoczną jest rzeczą, że: *każdy dzielnik wspólnego dzielnika dwóch lub więcéj wyrażeń, jest zarazem wspólnym dzielnikiem tychże wyrażeń.*

109. Dowiedziono w § 107, że każdy wspólny dzielnik dla A i B, jest zarazem dzielnikiem i dla D; to jest: *Każdy wspólny dzielnik dla dwóch wyrażeń jest*

zarazem dzielnikiem i największego wspólnego dzielnika tychże wyrażeń.

110. Podamy teraz i objaśnimy przykładami prawidło, za pomocą którego można uniknąć ułamków w ilorazach i wprowadzić uproszczenia w wykonywaniu roboty. Dowodzenie tego prawidła można znaleść w obszerniejszych dziełach o algiebrze.

Zanim napiszemy nowy wyraz w którymkolwiek ilorazie, *możemy podzielić dzielnik, lub dzielną przez jakiekolwiek wyrażenie, ale niemające żadnego czynnika wspólnego z wyrażeniami, dla których szukamy największego wspólnego dzielnika*; albo też *możemy pomnożyć dzielną w którémkolwiek miejscu roboty przez każde wyrażenie, które nie zawiéra w sobie czynnika wchodzącego i do dzielnika.*

111. Naprzykład: szukajmy *N. W. D.* dla $2x^2-7x+5$ i $3x^2-7x+4$. Weźmy tutaj $2x^2-7x+5$ jako dzielnik; dzieląc wszakże $3x^2$ przez $2x^2$ otrzymujemy na iloraz ułamek; aby tego uniknąć, mnożymy dzielną przez 2 i następnie dzielimy.

$$\begin{array}{r|l} 6x^2-14x+8 & 2x^2-7x+5 \\ \underline{-6x^2\mp 21x\mp 15} & \underline{3} \\ 7x-7 & \end{array}$$

Jeżeli teraz przyjmiemy $7x-7$ za dzielnik, a $2x^2-7x+5$ za dzielną, wtedy pierwszy wyraz ilorazu będzie ułamkowym; lecz czynnik 7 znajduje się we wszystkich wyrazach tego dzielnika, opuszczamy go i dopiero wtedy dzielimy.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-7x+5 & x-1 \\ \underline{-2x^2\mp 2x} & \underline{2x-5} \\ -5x+5 & \\ \underline{\mp 5x\mp 5} & \\ 0 & \end{array}$$

Tym sposobem otrzymamy $x-1$ jako szukamy *N. W. D.*

Tutaj należy zauważyć, że w początku działania użyliśmy drugiéj części prawidła, podanego w § 110, a w dalszym ciągu tegoż działania pierwszéj części prawidła. Należy używać zawsze pierwszéj części prawidła, jeżeli tylko to jest możliwém; w przeciwnym zaś razie drugiéj części. W wypowiedzeniu prawidła użyliśmy wyrazu *wyrażenie*, lecz w tych zadaniach jakie najczęściéj przytrafiają się w praktyce i jakie uczący się mieć tutaj będzie do rozwiązania, czynniki które mają być wprowadzone lub opuszczone będą prawie zawsze *czynnikami liczebnemi*, jak to miało miejsce i w poprzednim przykładzie.

Drugi przykład: chcemy znaleźć *N. W. D.* dla $2x^4-7x^3-4x^2+x-4$ i $3x^4-11x^3-2x^2-4x-16$.

Pomnóżmy drugi wielomian przez 2, i weźmy go za dzielną.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4-22x^3-4x^2-8x-32 & 2x^4-7x^3-4x^2+x-4 \\ \underline{-6x^4\mp 21x^3\mp 12x^2+3x\mp 12} & \underline{3} \\ -x^3+8x^2-11x-20 & \end{array}$$

Możemy pomnożyć każdy wyraz téj reszty przez -1, zanim przyjmiemy ją za nowy dzielnik, to jest możemy zmienić w niéj wszystkie znaki na przeciwne.

$$\begin{array}{r|l} 2x^4-7x^3-4x^2+x-4 & x^3-8x^2+11x+20 \\ \underline{-2x^4\mp 16x^3\pm 22x^2\pm 40x} & \hline 2x+9 \\ 9x^3-26x^2-39x-4 & \\ \underline{-9x^3\mp 72x^2\pm 99x\pm 180} & \\ 46x^2-138x-184 & \end{array}$$

Tutaj 46 jest czynnikiem każdego wyrazu reszty; możemy więc przez niego podzielić też resztę. zanim użyjemy jéj jako nowego dzielnika.

$$\begin{array}{r|l} x^3-8x^2+11x+20 & x^2-3x-4 \\ \underline{-x^3\mp 3x^2\mp 4x} & \hline x-5 \\ -5x^2+15x+20 & \\ \underline{\mp 5x^2\pm 15x\pm 20} & \\ 0 & \end{array}$$

Tym sposobem x^2-3x-4 jest N. W. D. szukanym.

112. Przypuśćmy, że dane wyrażenia zawierają wspólny czynnik F, widoczny na pierwszy rzut oka; wtedy można uczynić $A=aF$ i $B=bF$. W tym razie na zasadzie § 109, F będzie czynnikiem N. W. D. Należy zatém znaleźć N. W. D. dla a i b i pomnożyć go przez F; otrzymany iloczyn będzie N. W. D. dla A i B.

113. Przypuśćmy teraz, że mamy znaleźć N. W. D. *trzech* wyrażeń A, B i C. W tym celu znajdujemy N. W. D. którychkolwiek dwóch z tych wyrażeń, np. A i B; niech D oznacza ten N. W. D., następnie wynajdujemy N. W. D. dla D i C, i ten ostatni będzie N. W. D. dla A, B i C.

Gdyż, na zasadzie § 108, każdy wspólny dzielnik dla D i C, jest wspólnym dzielnikiem dla A, B i C;

a na zasadzie § 109 każdy wspólny dzielnik dla A, B i C jest wspólnym dzielnikiem dla D i C. Przeto N. W. D. dla D i C jest N. W. D. dla A. B i C.

114. W podobny sposób można wynaleść N. W. D. *czterech* wyrażeń. Albo też: możemy znaleźć N. W. D. dwóch którychkolwiek z danych wyrażeń, i także N. W. D. dwóch pozostałych wyrażeń; wtedy N. W. D. dwóch tak otrzymanych wypadków, będzie N. W. D. czterech danych wyrażeń.

PRZYKŁADY XII.

Znaleźć największy wspólny dzielnik następujących wyrażeń:

1. $15x^4$; $18x^2$;
2. $16a^2b^3$, $20a^3b^2$.
3. $36x^4y^5z^6$; $48x^6y^5z^4$.
4. $35a^2b^3x^3y^4$, $49a^2b^4x^4y^3$
5. $4(x+1)^2$, $6(x^2-1)$.
6. $6(x+1)^3$, $9(x^2-1)$.
7. $12(a^2+b^2)^2$, $8(a^4-b^4)$.
8. x^6-y^6, x^4-y^4.
9. $x^2+8x+15$, $x^2+9x+20$.
10. $x^2-9x+14$, $x^2-11x+28$.
11. $x^2+2x-120$, $x^2-2x-80$.
12. $x^2-15x+36$, $x^2-9x-36$.
13. $x^3+6x^2+13x+12$, $x^3+7x^2+16x+16$.
14. $x^3-9x^2+23x-12$, $x^3-10x^2+28x-15$.
15. x^3-29x^2+42, $x^3+x^2-35x+49$.
16. $x^3-41x-30$, $x^3-11x^2+25x+25$.
17. $x^3+7x^2+17x+15$, $x^3+8x^2+19x+12$.
18. $x^3-10x^2+26x-8$, $x^3-9x^2+23x-12$.
19. $4(x^2-x+1)$, $3(x^4+x^2+1)$.
20. $5(x^2-x+1)$, $4(x^6-1)$.

21. $6x^2+x-2$, $9x^3+48x^2+52x+16$.
22. x^3-4x^2+2x+3, $2x^4-9x^3+12x^2-7$.
23. x^4+x^2-6, x^4-3x^2+2.
24. x^3-2x^2+3x-6, $x^4-x^3-x^2-2x$.
25. x^4-1, $3x^5+2x^4+4x^3+2x^2+x$.
26. $x^4-9x^2-30x-25$, $x^5+x^4-7x^2+5x$.
27. $35x^3+47x^2+13x+1$, $42x^4+41x^3-9x^2-9x-1$.
28. $x^6-3x^5+6x^4-7x^3+6x^2-3x+1$,
$x^6-x^5+2x^4-x^3+2x^2-x+1$.
29. $2x^4-6x^3+3x^2-3x+1$, $x^7-3x^6+x^5-4x^2+12x-4$.
30. x^8-1, $x^{10}+x^9+x^8+2x^7+2x^4+2x^3+x^2+x+1$.
31. $x^2-3x-70$, $x^3-39x+70$, $x^3-48x+7$.
32. $x^2-xy-12y^2$, $x^2+5xy+6y^2$.
33. $2x^2+3ax+a^2$, $3x^2+2ax-a^2$.
34. $x^3-3a^2x-2a^3$, $x^3-ax^2-4a^3$.
35. $3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$, $4x^2y-5xy^2+y^3$.

XIII.

Najmniejsza wspólna wielokrotna.

115. W arytmetyce ta liczba całkowita, która się da podzielić bez reszty przez inną liczbę całkowitą, nazywa się wielokrotną téj ostatniej; ta liczba całkowita, która się da podzielić przez dwie lub kilka liczb całkowitych, nazywa się ich *wspólną wielokrotną*.

116. W arytmetyce *najmniejsza wspólna wielokrotna* dwóch lub więcéj liczb całkowitych, jest najmniejszą z liczb całkowitych, które się dają podzielić przez te ostatnie liczby wszystkie. Wyrażenie: najmniejsza wspólna wielokrotna, jest także używane i w algiebrze, lecz tutaj jest niezupełnie właściwe (patrz § 98). Głosek n. W. W. używać będziemy często dla krótkości, zamiast tego wyrażenia.

Objaśnimy teraz, w jakiem znaczeniu wyrażenie to jest używane w algiebrze.

117. Mówimy, że najmniejszą wspólną wielokrotną dwóch lub więcéj jednomianów nazywa się *najmniejsze* wyrażenie, które przez *wszystkie te jednomiany może być podzielone*; określenie to stanie się w zupełności zrozumiałem po podaniu prawidła i przykładów na wynajdywanie najmniejszéj wspólnéj wielokrotnéj jednomianów.

Prawidło na wynajdywania n. W. W. jednomianów jest następne.

Należy znaleść za pomocą zasad arytmetyki n. W. W. dla współczynników liczebnych; następnie za tą liczbą napisać każdą z głosek znajdujących się w danych jednomianach, i dać każdéj głosce odpowiednio najwyższy wykładnik, jaki ona ma w tych jednomianach.

118. Przypuśćmy naprzykład, że szukamy n. W. W. dla $16a^4bc$ i $20a^3b^3d$. Tutaj współczynnikami liczebnymi są 16 i 20, a ich n. W. W. jest 80. Głoski, które się znajdują w tych wyrażeniach są a, b, c i d; ich najwyższe wykładniki są odpowiednio 4, 3, 1 i 1. Tym sposobem otrzymujemy $80a^4b^3cd$ jako szukaną n. W. W.

Przypuśćmy dalej, że chcemy znaleść n. W. W. dla $8a^2b^3c^2x^3yz^3$, $12a^4bcx^2y^3$ i $16a^3c^3x^2y^4$. Tutaj n. W. W. współczynników liczebnych jest 48. Głoski, które

się znajdują w tych wyrażeniach, są a, b, c, x, y, z, a ich najwyższe wykładniki są odpowiednio 4, 3, 3, 5, 4 i 3. Tym sposobem n. W. W. szukana będzie: $48a^4b^3c^3x^5y^4z^5$.

119. Następujące twierdzenie daje najlepsze pojęcie o tém, co się rozumie w algiebrze pod wyrazem najmniejsza wspólna wielokrotna, i pokazuje zarazem znaczenie tutaj wyrazu *najmniejsza*.

Gdy najmniejsza wspólna wielokrotna dwóch lub więcéj wyrażeń będzie podzieloną przez też wyrażenia, wtedy otrzymane ilorazy nie będą miały żadnego wspólnego dzielnika.

I tak, jeżeli weźmiemy pod uwagę pierwszy przykład § 118 i podzielimy n. W. W. przez dane tam jednomiany, wtedy ilorazy będą $5b^2d$ i $4ac$, które nie mają żadnego wspólnego dzielnika.

Dalej, weźmy pod uwagę drugi przykład § 118 i podzielmy n. W. W. przez dane jednomiany; ilorazy będą $6a^2cy^3$, $4b^2c^2x^3yz^3$ i $3ab^3x^3z^3$, a one nie mają żadnego wspólnego dzielnika.

120. To, co było wyłożone w poprzednim paragrafie, z pomocą rozdziału o rozkładzie na czynniki daje w wielu razach możność znalezienia n. W. W. dla *wielomianów*. Naprzykład chcemy znaleźć n. W. W. dla $4a^2(a+b)^2$ i $6ab(a^2-b^2)$. Najmniejsza wspólna wielokrotna dla $4a^2$ i $6ab$ jest $12a^2b$. Daléj zauważmy, że $(a+b)^2$ i a^2-b^2 mają wspólny czynnik $a+b$; więc $(a+b)\ (a+b)\ (a-b)$ jest wielokrotne względem $(a+b)^2$ i a^2-b^2; dzieląc zaś to wyrażenie przez $(a+b)^2$ i a^2-b^2 otrzymujemy ilorazy $a-b$, i $a+b$, które nie mają żadnego wspólnego dzielnika. Tym sposobem szukana n. W. W. będzie $12a^2b(a+b)^2\ (a-b)$.

121. Najmniejszą wspólną wielokrotną dwóch lub więcéj wielomianów można określić w ten sposób: Przypuśćmy, że kilka wielomianów zawiéra rozmaite potęgi pewnéj wspólnéj głoski; wtedy wyrażenie najniższego wymiaru względem téj wspólnéj głoski, dające się podzielić przez każdy z danych wielomianów, nazywa się ich najmniejszą wspólną wielokrotną.

122. Pokażemy teraz jak znaleźć n. W. W. dla dwóch wielomianów. Wszakże zrozumienie zupełne dowodzenia poniżéj zamieszczonego przedstawia dla początkującego pewne trudności.

Oznaczmy przez A i B dane dwa wyrażenia, i przez D ich największy wspólny dzielnik. Wtedy $A=aD$ i $B=bD$, gdzie a i b nie mają żadnego czynnika wspólnego, jak to wypada z saméj natury największego wspólnego dzielnika. Przeto najmniejsza wspólna wielokrotna dla a i b jest ab. A zatém wyrażenie najniższego wymiaru, które jest podzielne przez aD bD jest abD. Lecz: $abD=Ab=Ba=\frac{AB}{D}$.

Stąd otrzymujemy następujące prawidło na wynalezienie n. W. W. dwóch wyrażeń: *Należy podzielić iloczyn tych dwóch wyrażeń przez ich N. W. D.* Lub téż, to samo prawidło możemy wyrazić tak: Należy podzielić jedno z danych wyrażeń przez ich N. W. D. i iloraz *pomnożyć przez wyrażenie drugie.*

123. Naprzykład, szukamy n. W. W. dla x^2-4x+3 i $4x^3-9x^2-15x+18$.

N. W. D. jest tutaj $x-3$ (§ 105). Podzielmy x^2-4x+3 przez $x-3$; iloraz jest $x-1$. A zatém n.

W. W. szukana jest $(x-1)(4x^3-9x^2-15x+18)$, co po wykonaniu mnożenia daje: $4x^4-13x^3-6x^2+33x-18$.

Dogodniejszą jest często rzeczą przedstawić n. W. W. pod postacią iloczynu wskazanego, złożonego z czynników, aniżeli jako ostateczny wypadek, powstały przez wykonane mnożenie. Wiemy że *N. W. D.*, w tym przypadku $x-3$, dzieli bez reszty $4x^3-9x^2-15x+18$; przez dzielenie znajdujemy na iloraz $4x^2+3x-6$. Stąd n. W. W. jest;

$$(x-3)(x-1)(4x^2+3x-6).$$

Jako inny przykład, przypuśćmy, że szukamy *n. W. W.* dla $2x^2-7x+5$ i $3x^2-7x+4$.

N. W. D. jest $x-1$, patrz § 111.

Przeto:

$$(2x^2-7x+5):(x-1)=2x-5,$$
$$(3x^2-7x+4):(x-1)=3x-4,$$

n W. W. będzie więc:

$$(x-1)(2x-5)(3x-4).$$

Daléj jeszcze szukajmy *n. W. W.* dla $2x^4-7x^3-4x^2+x-4$ i $3x^4-11x^3-2x^2-4x-16$. *N. W D.* jest tutaj: x^2-3x-4: (patrz § 111)

Będzie:

$$(2x^4-7x^3-4x^2+x-4):(x^2-3x-4)=2x^2-x+1,$$
$$(3x^4-11x^3-2x^2-4x-16):(x^2-3x-4)=3x^2-2x+4.$$

A zatém szukana n. W.W. jest:

$$(x^3-3x-4)(2x^2-x+1)(3x^2-2x+4)$$

124. Widoczną jest rzeczą, że *każda wielokrotna wspólnéj wielokrotnéj dla pewnéj liczby wyrażeń, jest także wspólną wielokrotną dla tychże wyrażeń.*

125. *Każda wspólna wielokrotna dla dwóch wyrażeń, jest wielokrotną najmniejszéj wspólnéj wielokrotnej tychż wyrażeń.*

Niech A i B będą dwa wyrażenia, których n. *W. W.* jest M, i niech N oznacza jakąkolwiek inną wspólną wielokrotną. Przypuśćmy, jeżeli to jest możliwém, że N, podzielone przez M, daje na iloraz q i na resztę R. Wtedy $R=N-qM$. Lecz A i B są dzielnikami dla M i N, a zatém muszą one dzielić bez reszty i R (§ 106). Ale z natury dzielenia wypada, że R jest *niższego* wymiaru aniżeli M; tym sposobem R byłoby wspólną wielokrotną dla A i B, niższego wymiaru, aniżeli ich *N. W. W.*, co podług określenia n. *W. W.*, być nie może. Przy dzieleniu więc N przez M nie może pozostać żadnéj reszty, czyli N jest wielokrotném względem M.

126. Przypuśćmy teraz, że chcemy znaleść *N. W. W.* względem *trzech* wielomianów A, B, C.. W tym celu wynajdźmy *N. W. W.* dwóch którychkolwiek z nich, np. A i B; niech M będzie tą *n. W. W.* wtedy *n. W. W*, względem M i C będzie żądaną *N. W. W.* względem A, B i C.

Gdyż każda wspólna wielokrotna dla M i C jest zarazem wspólną wielokrotną dla A, B i C na zasadzie § 124. Również: każda wspólna wielokrotna dla A i B jest wielokrotną względem M, na zasadzie

§ 125; stąd każda wspólna wielokrotna dla M i C jest wspólną wielokrotną dla A, B i C. Przeto najmniejsza wspólna wielokrotna dla M i C będzie najmniejszą wspólną wielokrotną dla A, B i C.

127. W podobny sposób możemy znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną i dla czterech wielomianów.

128. Teorye największego wspólnego dzielnika i najmniejszéj wspólnéj wielokrotnéj nie są niezbędnie potrzebne do następnych rozdziałów niniejszego dzieła; dla tego też jeżeli uczący się znajdzie w rozumieniu tych teoryj jakiekolwiek trudności, może je odłożyć do czasu, gdy studyować będzie teoryę równań. Za to zadania dołączone do poprzedniego i do niniejszego rozdziału muszą być starannie przerobione z powodu ćwiczeń, jakie podają we wszystkich zasadniczych działaniach algiebry.

PRZYKŁADY XII.

Znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną względem następujących wyrażeń:

1. $4a^2b$, $6ab^2$;
2. $12a^3b^2c$, $18ab^2c^3$.
3. $8a^2x^2y^3$, $12b^2x^3y^2$;
4. $(a-b)^2$, a^2-b^2.
5. $4a(a+b)$; $6b(a^3+b^3)$;
6. a^2-b^2, a^3-b^3.
7. x^2-3x-4, x^2-x-12.
8. x^3+5x^2+7x+2, x^2+6x+8.
9. $12x^2+5x-3$, $6x^3+x^2-x$.
10. $x^3-6x^2+11x-6$, $x^3-9x^2+26x-24$.
11. x^3-7x-6, $x^3+8x^2+17x+10$.

12. $x^4+x^3+2x^2+x+1$, x^4-1.
13. $x^4-2x^3-3x^2+8x-4$, $x^4-5x^3+20x-16$.
14. $x^4+a^2x^2+a^4$, $x^4-ax^3-a^3x+a^4$.
15. $4a^3b^2c$, $6ab^3c^2$, $18a^2bc^3$.
16. $8(a^2-b^2)$, $12(a+b)^2$, $20(a-b)^2$.
17. $4(a+b)$, $6(a^2-b^2)$, $8(a^3+b^3)$.
18. $15(a^2b-ab^2)$, $21(a^3-ab^2)$, $35(ab^2+b^3)$.
19. x^2-1, x^3+1, x^3-1.
20. x^3-1, x^2+1, x^4+1, x^8-1.
21. x^2-1, x^3+1, x^3-1, x^6+1.
22. x^2+3x+2, x^2+4x+3, x^2+5x+6.
23. x^2+2x-3, x^3+3x^2-x-3, x^3+4x^2+x-6.
24. $x^2+5x+10$, $x^3-19x-30$, $x^3-15x-50$.

XIV.

Ułamki.

129. W tym i następnych czterech rozdziałach mówić będziemy o ułamkach: przekonamy się z nich, że prawidła na działania z ułamkami w algiebrze zupełnie są podobne do tych prawideł, które już znamy z arytmetyki.

130. Przez wyrażenie $\frac{a}{b}$ oznaczamy, że pewna jedność jest podzielona na b części równych i że takich części bierzemy a. Tutaj $\frac{a}{b}$ nazywa się *ułamkiem*; a nazywa się *licznikiem*, b zaś *mianownikiem*. Tym sposobem mianownik pokazuje na ile części równych jedność została podzieloną, a licznik — ile takich części bierzemy.

Każda całkowita, lub wyrażenie całkowite może być uważane jako ułamek, mający za mianownik jedność; tak np.

$$a = \frac{a}{1}; \quad b + c = \frac{b+c}{1}.$$

131. Aby wyrazić ułamek w postaci liczby całkowitéj z ułamkiem, czyli ilości mieszanéj, używamy następującego prawidła zarówno w algiebrze, jak i w arytmetyce:

Należy podzielić licznik przez mianownik tak daleko jak tylko można, i dodać do ilorazu ułamek, mający za licznik resztę, a za mianownik dzielnik.

Przykłady:

$$\frac{24a}{7} = 3a + \frac{3a}{7}.$$

$$\frac{a^2+3ab}{a+b} = a + \frac{2ab}{a+b}.$$

$$\frac{x^3-6x+14}{x^2-3x+4} = x+3+\frac{-x+2}{x^2-3x+4} = x+3-\frac{x-2}{x^2-3x+4}.$$

Zwracamy tu uwagę uczącego się na przejście od przedostatniego do ostatniego wyrażenia; przejście to jest w rzeczywistości przykładem na użycie nawiasu, mianowicie:

$$+(-x+2) = -(x-2).$$

132. Prawidło na pomnożenie ułamku przez liczbę całkowitą:

Należy albo pomnożyć licznik albo też podzielić mianownik przez tęż całkowitą.

W rzeczy saméj: niech $\frac{a}{b}$ oznacza jakikolwiek

ułamek, a c jakąkolwiek liczbę całkowitą; wtedy będzie $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$. Gdyż w każdym z ułamków $\frac{a}{b}$ i $\frac{ac}{b}$ jedność jest podzielona na jednakową liczbę części b; lecz w ułamku $\frac{ac}{b}$, c razy więcéj tych części jest wziętych, aniżeli w $\frac{a}{b}$, stąd $\frac{ac}{b}$ jest c razy po $\frac{a}{b}$.

To jest dowodem pierwszego sposobu wyrażenia prawidła.

Daléj: niech $\frac{a}{bc}$ oznacza jakikolwiek ułamek, a c jakąkolwiek liczbę całkowitą; wtedy będzie $\frac{a}{bc} \times c = \frac{a}{b}$. Gdyż w każdym z ułamków $\frac{a}{bc}$ i $\frac{a}{b}$ taż sama liczba części jest wziętą, mianowicie a; lecz w ułamku $\frac{a}{b}$ każda część jest c razy większą od każdéj części w ułamku $\frac{a}{bc}$. albowiem w $\frac{a}{bc}$ jedność jest podzieloną na c razy więcéj części, aniżeli w $\frac{a}{b}$; stąd $\frac{a}{b}$ jest c razy większe od $\frac{a}{bc}$.

I to jest dowodem drugiego sposobu wyrażenia prawidła.

133. Prawidło na podzielenie ułamku przez liczbę całkowitą:

Należy albo pomnożyć mianownik przez te całkowitą, albo też licznik podzielić przez tęż całkowitą.

W saméj rzeczy: niech $\frac{a}{b}$ oznacza jakikolwiek ułamek, a c jakąkolwiek liczbę całkowitą; wtedy będzie $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$. Gdyż $\frac{a}{b}$ jest c razy większe od $\frac{a}{bc}$ na zasadzie § 132; zatém $\frac{a}{bc}$ jest $\frac{1}{c}$ częścią ułamku $\frac{a}{b}$.

To stanowi dowód pierwszego sposobu wyrażenia prawidła.

Daléj: niech znowu $\frac{ac}{b}$ oznacza pewien ułamek a c liczbę całkowitą; wtedy będzie $\frac{ac}{b} : c = \frac{a}{b}$. Gdyż $\frac{ac}{b}$ jest c razy większe od $\frac{a}{b}$ na zasadzie § 132; a przeto $\frac{a}{b}$ jest $\frac{1}{c}$ częścią ułamku $\frac{ac}{b}$.

I to jest dowodem drugiego sposobu wyrażenia powyższego prawidła.

134. *Jeżeli licznik i mianownik jakiegokolwiek ułamku pomnożymy przez jednę i tęż samą liczbę całkowitą, wtedy wartość ułamku nie zmieni się.*

Gdyż jeżeli licznik ułąmku pomnożymy przez pewną całkowitą, wtedy ułamek będzie *pomnożony* przez tęż całkowitą; wypadek ten zostanie *podzielony* przez tęż samą całkowitą, gdy mianownik będzie przez nią pomnożony. Lecz gdy jakąkolwiek liczbę

pomnożymy, a następnie wypadek podzielimy przez jednę i tęż samą liczbę całkowitą, wtedy wypadek ostateczny miéć będzie taką samą wartość, co i dana liczba.

Toż samo może być wyrażone jeszcze w ten sposób: jeżeli licznik i mianownik ułamku *podzielimy* przez jedną i tąż samą liczbę całkowitą, wtedy wartość ułamku się nie zmieni.

Oba te sposoby ustnego wyrażenia powyższéj własności ułamków, są zawarte w wyrażeniu algebraicznem: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Twierdzenie to jest bardzo wielkiéj wagi: — wiele działań z ułamkami na niem się opiéra, jak to zobaczymy w następujących rozdziałach.

135. Dowodzenia dopiéro co podane, mają znaczenie tylko wtedy, gdy każda głoska oznacza pewną *liczbę całkowitą dodatną*; z tém wszystkiem twierdzenia powyższe *przyjmiemy*, jako prawdziwe dla *jakiegokolwiek* znaczenia głosek. Przyczyny dla których tak przyjmujemy, uczący się może poznać późniéj z obszerniejszych dzieł o algiebrze. Twierdzenie zawarte w § 134 jest najważniejsze; czytelnik więc powinien pamiętać, że przyjmujemy, iż *zawsze* jest prawdziwem w algiebrze, że $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, jakiekolwiek by z resztą liczby oznaczały głoski a, b i c.

Naprzykład, jeżeli podstawiemy -1 zamiast c wtedy mieć będziemy $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$.

Również:

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}; \quad +\frac{a}{-b} = +\frac{-a}{b}; \quad -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Podobnież przyjmując, że $\frac{a}{b} \times c$ jest *zawsze* równe $\frac{ac}{b}$, otrzymamy następujące wypadki:

$$\frac{a}{b} \times -1 = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} \qquad \frac{a}{b} \times -2 = \frac{-2a}{b} = -\frac{2a}{b}$$

PRZYKŁADY XIV.

Następujące ułamki wyrazić w postaci ilości mieszanych:

1. $\frac{25x}{7}$.
2. $\frac{36ac+4c}{9}$,
3. $\frac{8a^2+3b}{4a}$,
4. $\frac{12x^2-5y}{6x}$,
5. $\frac{x^2+3x+2}{x+3}$.
6. $\frac{2x^2-6x-1}{x-3}$,
7. $\frac{x^3+ax^2-3a^2x-3a^3}{x-2a}$,
8. $\frac{x^3-2x^2}{x^2-x+1}$,
9. $\frac{x^4+1}{x-1}$,
10. $\frac{x^4-1}{x+1}$.

Pomnożyć:

11. $\frac{4a^2}{9b^2}$ przez $3b$.
12. $\frac{8(a^2+b^2)}{9(a^2-b^2)}$ przez $3(a-b)$.
13. $\frac{3(a-b)}{8(a^3+b^3)}$ przez $4(a^2-ab+b^2)$.

14. $\frac{x^2}{(x^2-1)^2}$ przez $x+1$.

Podzielić:

15. $\frac{8x^2}{3y}$ przez $2x$.
16. $\frac{9a^2-4b^2}{a+b}$ przez $3a-2b$.
17. $\frac{10(a^3-b^3)}{3(a+b)}$ przez $5(a^2+ab+b^2)$.
18. $\frac{x^6-1}{x^2+1}$ przez x^2-x+1.

XV.

Skracanie ułamków i sprowadzanie ich do jednakowego mianownika.

136. Zastosujemy teraz twierdzenie, wyrażone w § 134 do dwóch ważnych działań: do wyrażania ułamków w najprostszéj postaci czyli skracania ułamków, i do sprowadzania ułamków do jednakowego mianownika.

137. Prawidło na skracanie ułamków: *Należy podzielić licznik i mianownik ułamku przez ich największy wspólny dzielnik.*

Naprzykład: wyrazić ułamek $\frac{16a^4b^2c}{20a^3b^3d}$ w najprostszéj postaci. N. W. D. licznika i mianownika jest $4a^3b^2$; dzieląc tak licznik, jak i mianownik przez $4a^3b^2$, otrzymamy na żądany wypadek $\frac{4ac}{5bd}$. To jest:

nłamek $\frac{4ac}{5bd}$ jest równy $\frac{16a^4b^2c}{20a^3b^3c}$, lecz jest wyrażony w prostszéj postaci; a nawet mówimy, że jest wyrażonym w *najprostszéj postaci*, gdyż już uproszczonym daléj być nie może za pomocą zasad, wyłożonych w § 134.

Dalszy przykład: wyrazić ułamek $\frac{x^2-4a+3}{4x^3-9x^2-15x+18}$ w najprostszéj postaci. N. W. D. dla licznika i mianownika jest $x-3$; dzieląc i licznik i mianownik przez $x-3$, otrzymamy żądany wypadek: $\frac{x-1}{4x^2+3x-6}$.

W niektórych przypadkach możemy poznać, że licznik i mianownik mają wspólny czynnik, nie używajac prawidła na wynajdywanie największego wspólnego dzielnika. Tak np:

$$\frac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}=\frac{(a-b+c)\,(a-b-c)}{(a+b+c)\,(a-b-c)}=\frac{a-b+c}{a+b+c}.$$

138. Prawidło na sprowadzanie ułamków do jednakowego mianownika: *Należy pomnożyć licznik i mianownik każdego z ułamków, przez iloczyn mianowników pozostałych ułamków.*

Naprzykład: sprowadzić ułamki $\frac{a}{b}$, $\frac{e}{d}$ i $\frac{e}{f}$ do jednakowego mianownika.

$$\frac{a}{b}=\frac{adf}{bdf};\quad \frac{c}{d}=\frac{cbf}{dbf};\quad \frac{e}{f}=\frac{ebd}{fbd}.$$

Tym sposobem $\frac{bdf}{bdf}$, $\frac{cbf}{dbf}$ i $\frac{ebd}{fbd}$ są ułamkami

tych samych odpowiednich wartości, co i ułamki $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ i $\frac{e}{f}$, i mają tenże sam mianownik *bdf*.

Prawidło podane powyżéj w tym paragrafie, daje możność sprowadzenia zawsze ułamków do wspólnego mianownika, ale nie zawsze do *najmniejszego* wspólnego mianownika. Dla tego téż dogodniejszą jest często rzeczą używać innego prawidła, które w téj chwili podamy, i za pomocą którego możemy ułamki sprowadzić do najmniejszego wspólnego mianownika.

139 Prawidło na sprowadzanie ułamków do najmniejszego (najniższego, patrz § 98) wspólnego, mianownika.

Należy znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną względem mianowników, i przyjąć ją za mianownik wspólny; dla wynalezienia zaś nowego licznika każdego ułamku, należy pomnożyć każdy z liczników przez iloraz, powstały z podzielenia mianownika wspólnego przez mianownik, odpowiadający temuż licznikowi w danym ułamku.

Naprzykład: ułamki $\frac{a}{yz}$, $\frac{b}{zx}$, $\frac{c}{xy}$ sprowadzić do najmniejszego wspólnego mianownika. Najmniejsza wspólna wielokrotna względem mianowników jest *xyz*, i

$$\frac{a}{yz}=\frac{ax}{xyz};\quad \frac{b}{zx}=\frac{by}{xyz},\quad \frac{e}{xy}=\frac{cz}{xyz}.$$

PRZYKŁADY XV.

Następujące ułamki wyrazić w najprostszéj postaci:

1. $\frac{12a^4b^2x}{18a^2b^2y}$.
2. $\frac{a^2+ab}{2ab}$.
3. $\frac{a^2+ab}{a^2-ab}$.
4. $\frac{10a^2x}{5a^2x-15ay^2}$.
5. $\frac{4(a+b)^2}{5(a^2-b^2)}$.
6. $\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$.
7. $\frac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}$.
8. $\frac{x^2+10x+21}{x^2-2x-15}$.
9. $\frac{2x^2+x-15}{2x^2-19x+35}$.
10. $\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x^2+(a+c)x+ac}$.
11. $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+(c-a)x-ac}$.
12. $\frac{3x^2+23x-36}{4x^2+33x-27}$.
13. $\frac{(x+a)^2-(b+c)^2}{(x+b)^2-(a+c)^2}$.
14. $\frac{x^2+5x+6}{x^3+x+10}$.
15. $\frac{x^2-10x+21}{x^3-46x-21}$.
16. $\frac{x^2+9x+20}{x^3+7x^2+14x+8}$.
17. $\frac{x^2+x-42}{x^3-10x^2+21x+18}$.
18. $\frac{6x^2-11x+5}{3x^3-2x^2-1}$.
19. $\frac{20x^2+x-12}{12x^3-5x^2+5x-6}$.
20. $\frac{x^2-2ax+a^2}{x^3-2ax^2+2a^2x-a^3}$.
21. $\frac{2x^3-5x^2-8x-16}{2x^3+11x^2+16x+16}$.
22. $\frac{x^3-3a^2x+2a^3}{2x^3+ax^2+a^2x-4a^3}$.
23. $\frac{x^3-8x-3}{x^4-7x^2+1}$.
24. $\frac{x^3+a^3}{x^4+a^2x^2+a^4}$.

25. $\frac{x^3-x^2-7x+3}{x^4+2x^3+2x-1}$.
26. $\frac{3x^4-14x^3-9x+2}{2x^4-9x^3-14x+3}$.
27. $\frac{3x^5-75a^4x}{2x^4+13a^2x^2+15a^4}$.
28. $\frac{x^4-1}{x^6-1}$.
29. $\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5-1}$.
30. $\frac{x^6+a^2x^3y}{x^6-a^4y^2}$.
31. $\frac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^6-a^6}$.
32. $\frac{x^{m-1}y^{2n}}{x^{2m}y^{n+1}}$.

Następujące ułamki sprowadzić do najmniejszego wspólnego mianownika:

33. $\frac{3}{4x}, \frac{4}{6x^2}, \frac{5}{12x^3}$.
34. $\frac{1}{x+1}, \frac{3}{4x+4}, \frac{x}{x^2-1}$.
35. $\frac{a}{x-a}, \frac{x}{a-x}, \frac{a}{x^2-a^2}, \frac{ax}{a^2-x^2}$.
36. $\frac{a}{a-b}, \frac{b}{a+b}, \frac{ab}{a^2-b^2}, \frac{b^2}{a^2+b^2}$.
37. $\frac{1}{x-1}, \frac{x}{(x-1)^2}, \frac{3}{x+1}, \frac{4}{(x+1)^2}, \frac{5}{x^2-1}$.
38. $\frac{a}{x-a}, \frac{a+x}{x^2+ax+a^2}, \frac{ax}{x^3-a^3}$.
39. $\frac{1}{x^2-ax+a^2}, \frac{1}{x^2+ax+a^2}, \frac{a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}$.
40. $\frac{1}{x^2-(a+b)x+ab}, \frac{1}{x^2-(a+c)x+ac}, \frac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$.

XVI.

Dodawanie i odejmowanie ułamków:

140. Prawidło na dodawanie i odejmowanie ułamków: *Należy sprowadzić ułamki do jednakowego mianownika, i następnie dodać lub odjąć liczniki, i podpisać pod summą, lub różnicą mianownik wspólny.*

Przykłady. Dodać $\frac{a+c}{b}$ do $\frac{a-c}{b}$. Ponieważ te ułamki mają już jednakowy mianownik, przeto:

$$\frac{a+c}{b}+\frac{a-c}{b}=\frac{a+c+a-c}{b}=\frac{2a}{b}.$$

Od: $\frac{4a-3b}{c}$ odjąć $\frac{3a-4b}{c}$.

$$\frac{4a-3b}{c}-\frac{3a-4b}{c}=\frac{4a-3b-(3a-4b)}{c}=$$

$$=\frac{4a-3b-3a+4b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Wszystkie działania uczący się powinien wykonywać *w zupełności*, tak jak to jest pokazane w ostatnim przykładzie w celu uniknięcia pomyłek.

Dodać: $\frac{c}{a+b}$ do $\frac{c}{a-b}$.

Tutaj wspólnym mianownikiem będzie iloczyn z $a+b$ przez $a-b$, to jest a^2-b^2.

$$\frac{c}{a+b}=\frac{c(a-b)}{a^2-b^2}\ ;\ \frac{c}{a-b}=\frac{c(a+b)}{a^2-b^2}.$$

Przeto $\frac{c}{a+b}+\frac{c}{a-b}=\frac{c(a-b)+c(a+b)}{a^2-b^2}=$

$$=\frac{ca-cb+ca+cb}{a^2-b^2}=\frac{2ca}{a^2-b^2}.$$

Od: $\frac{a+b}{a-b}$ odjąć: $\frac{a-b}{a+b}$.

Mianownikiem wspólnym jest a^2-b^2.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}\ ;\ \frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}.$$

Przeto:

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

Od: $\frac{x+1}{x^2-4x+3}$ odjąć: $\frac{4x^2-3x+2}{4x^3-9x^2-15x+18}$.

Na zasadzie § 123, najmniejsza wspólna wielokrotna mianowników jest:

$$(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6);$$

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{(x+1)(4x^2+3x-6)}{(x-1(x-3)(4x^2+3x-6)},$$

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^3-9x^2-15x+18}=\frac{(4x^2-3x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}.$$

Przeto:

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}-\frac{4x^2-3x+2}{4x^3-9x^2-15x+18}=$$

$$=\frac{(x+1)(4x^2+3x-6)-(4x^3-3x+2)(x-1)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}=$$

$$=\frac{4x^3+7x^2-3x-6-(4x^3-7x^2+5x-2)}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}$$

$$=\frac{14x^2-8x-4}{(x-1)(x-3)(4x^2+3x-6)}.$$

141. Niekiedy wypada nam *zamienić ilość mięszaną na ułamek*; jest to po prostu jeden z przypadków dodawania lub odejmowania ułamków.

Przykłady:

$$a+\frac{b}{c}=\frac{a}{1}+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}.$$

$$a+\frac{2ab}{a+b}=\frac{a}{1}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{a(a+b)}{a+b}+\frac{2ab}{a+b}=$$

$$=\frac{a^2+3ab}{a+b}.$$

$$x+3-\frac{x-2}{x^2-3x+4}=\frac{x+3}{1}-\frac{x-2}{x^2-3x+4}=$$

$$=\frac{(x+3)(x^2-3x+4)}{x^2-3x+4}-\frac{x-2}{x^2-3x+4}=$$

$$=\frac{x^3-5x+12-(x-2)}{x^2-3x+4}=\frac{x^3-5x+12-x+2}{x^2-3x+4}=$$

$$=\frac{x^3-6x+14}{x^2-3x+4}.$$

142. Mogą się także przytrafić wyrażenia, w których należy wykonać i dodawanie i odejmowanie. Tak naprzykład: przypuśćmy, że mamy uprościć:

$$\frac{a}{a+b}+\frac{ab}{a^2-b^2}-\frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

najmniejsza wspólna wielokrotna dla mianowników będzie: $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$, to jest a^4-b^4.

$$\frac{a}{a+b}=\frac{a(a-b)(a^2+b^2)}{a^4-b^4}=\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3}{a^4-b^4},$$

$$\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{ab(a^2+b^2)}{a^4-b^4}=\frac{a^3b+ab^2}{a^4-b^4},$$

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2(a^2-b^2)}{a^4-b^4}=\frac{a^4-a^2b^2}{a^4-b^4}.$$

Przeto: $\frac{a}{a+b}+\frac{ab}{a^2-b^2}-\frac{a^2}{a^2+b^2}=$

$$=\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+a^3b+ab^3-(a^4-a^2b^2)}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+a^3b+ab^3-a^4+a^2b^2}{a^4-b^4}=$$

$$=\frac{2a^2b^2}{a^2-b^4}.$$

Uprościć: $\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+$

$$+\frac{c}{(c-a)(c-b)}.$$

Zwracamy szczególną uwagę uczących się na ten przykład. Prawdopodobnie każdemu początkującemu przyjdzie w pierwszéj chwili na myśl wziąść iloczyn z mianowników za mianownik wspólny; gdyby jednak tak uczynił, zrobiłby niepotrzebnie wszystkie rachunki niezmiernie pracowitemi.

Drugi ułamek zawiéra czynnik $b-a$ w mianowniku; czynnik ten różni się od czynnika $a-b$, znajdującego się w mianowniku ułamku pierwszego, tylko znakiem każdego wyrazu; na zasadzie zaś § 135 mamy: $\frac{b}{(b-c)(b-a)}=-\frac{b}{(b-c)(a-b)}$.

Również i mianownik trzeciego ułamku może być przedstawiony pod postacią, która jest dogodniejszą dla nas; gdyż na zasadzie *prawidła znaków* mamy:

$$(c-a)(c-b)=(a-c)(b-c).$$

Tym sposobem dane wyrażenie może być przedstawione pod postacią:

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} - \frac{b}{(b-c)(a-b)} + \frac{c}{(a-c)(b-c)};$$

i pod tą postacią widzimy odrazu, że n. W. W. względem mianowników jest: $(a-b)(a-c)(b-c)$.

Sprowadzając ułamki do najmniejszego wspólnego mianownika, zamienimy dane wyrażenie na następne:

$$\frac{a(b-c) - b(a-c) + c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)},$$

to jest: $\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}$, czyli 0.

143. W tym rozdziale pokazaliśmy, jakim sposobem można kilka ułamków połączyć w jeden.

Odwrotnie: można jeden ułamek rozłożyć na kilka ułamków, jeżeli to uważamy za potrzebne. Naprzykład:

$$\frac{3bc-4ac+5ab}{abc} = \frac{3bc}{abc} - \frac{4ac}{abc} + \frac{5ab}{abc} = \frac{3}{a} - \frac{4}{b} + \frac{5}{c}.$$

PRZYKŁADY XVI.

Znaleść wartości następujących wyrażeń:

1. $\frac{3a-5b}{4} + \frac{2a-b-c}{3} + \frac{a+b+c}{12}$.
2. $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b}$.
3. $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b}$.

4. $\frac{c}{a-b} - \frac{c}{a+b}$.
5. $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}$.
6. $\frac{1}{x+y} + \frac{2y}{x^2-y^2}$.
7. $\frac{1+3x}{1-3x} - \frac{1-3x}{1+3x}$.
8. $\frac{a}{x(a-x)} - \frac{x}{a(a-x)}$.
9. $\frac{a}{2a-2b} - \frac{b}{2b-2a}$.
10. $\frac{a}{a-x} + \frac{3a}{a+x} - \frac{2ax}{a^2-x^2}$.
11. $\frac{a-2b}{3c} - \frac{b-3c}{2a} + \frac{4ab+3bc}{6ac}$.
12. $\frac{a-b}{b} + \frac{2a}{a-b} - \frac{a^3+a^2b}{a^2b-b^3}$.
13. $\frac{2b-a}{x-b} + \frac{b-2a}{x+b} + \frac{3x(a-b)}{x^2-b^2}$.
14. $\frac{3}{x} - \frac{5}{2x-1} - \frac{2x-7}{4x^2-1}$.
15. $\frac{1}{x-2} - \frac{3}{x+2} + \frac{2x}{(x+2)^2}$.
16. $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} - \frac{a}{a^2-b^2}$.
17. $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x} - \frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$.

18. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+3}$.

19. $\frac{x}{x-1}-\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{x-2}$.

20. $\frac{4x}{y}-\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}$.

21. $x-\frac{x^2}{x-1}-\frac{x}{x+1}$,

22. $x-\frac{x^2}{x+1}+\frac{x}{x-1}$.

23. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}-\frac{2}{x}$.

24. $\frac{a}{a-b}+\frac{a}{a+b}+\frac{4a^2b^2}{a^4-b^4}$.

25. $\frac{x^2}{x^2-1}+\frac{x}{x-1}+\frac{x}{x+1}$.

26. $\frac{a}{a-x}+\frac{3a}{a+x}-\frac{2ax}{a^2+x^2}$.

27. $\frac{3}{2x-4}-\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2x^2+8}$.

28. $\frac{2}{x+4}-\frac{x-3}{x^2-4x+16}+\frac{x^2}{x^3+64}$.

29. $\frac{1}{x^2-a^2}+\frac{1}{(x+a)^2}-\frac{1}{(x-a)^2}$.

30. $\frac{x^2+ax+a^2}{x^3-a^3}-\frac{x^2-ax+a^2}{x^3+a^3}$.

31. $\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{x^2}{xy+y^2}-\frac{y^2}{x^2+xy}$.

32. $\frac{x^2-2x+3}{x^3+1}+\frac{x-2}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}$.

33. $\frac{1}{(x-3)(x-4)}-\frac{2}{(x-2)(x-4)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}$.

34. $\frac{1}{x(x+1)}-\frac{2x-3}{x(x+1)(x+2)}+\frac{1}{x(x+2)}$.

35. $\frac{1-2x}{3(x^2-x+1)}+\frac{x+1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{6(x+1)}$.

36. $\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}+\frac{1}{x+y}+\frac{xy}{x^3+y^3}$.

37. $\frac{1}{x-y}+\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}+\frac{xy-2x^2}{x^3-y^3}$.

38. $\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{x^4+x^2+1}$.

39. $\frac{a+b}{ax+by}+\frac{a-b}{ax-by}+\frac{2(a^2x+b^2y)}{a^2x^2+b^2y^2}$.

40. $\frac{2x}{x^4-x^2+1}-\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}$.

41. $\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{2}{x^2-4x+3}-\frac{3}{x^2-5x+4}$.

42. $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}+\frac{4a}{x^2-a^2}-\frac{2a}{x^2+a^2}$.

43. $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4+b^4}$.

44. $\frac{1}{x-3a}-\frac{1}{x+3a}+\frac{3}{x+a}-\frac{3}{x-a}$,

45. $\frac{1}{a-2b} - \frac{4}{a-b} + \frac{6}{a} - \frac{4}{a+b} + \frac{1}{a+2b}$.

46. $\frac{c}{(x-a)(a-b)} + \frac{c}{(x-b)(b-a)}$.

47. $\frac{a}{(x-a)(a-b)} + \frac{b}{(x-b)(b-a)}$.

48. $\frac{a^2}{(x-a)(a-b)} + \frac{b^2}{(x-b)(b-a)}$.

49. $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)}$.

50. $\frac{b}{(a-b)(a-c)} + \frac{a}{(b-a)(b-c)}$.

51. $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$.

52. $\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} - \frac{1}{abc}$.

53. $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

54. $\frac{1}{x^2-(a+b)x+ab} + \frac{1}{x^2-(a+c)x+ac} + \frac{1}{x^2-(b+c)x+bc}$.

55. $\frac{x+c}{x^2-(a+b)x+ab} + \frac{x+b}{x^2-(a+c)x+ac} + \frac{x+a}{x^2-(b+c)x+bc}$.

56. $\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$.

XVII.

Mnożenie ułamków.

144. Prawidło na mnożenie ułamków:

Należy pomnożyć licznik jednego ułamku przez licznik drugiego, i to będzie licznikiem iloczynu; i mianownik jednego ułamku przez mianownik drugiego, i to będzie mianownikiem iloczynu.

145. To prawidło dowieść można w ten sposób: Niech $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ będą dwa ułamki, które mają być przez siebie pomnożone; uczyńmy $\frac{a}{b} = x$, i $\frac{c}{d} = y$.

Przeto: $a = bx$,
i: $c = dy$,
Stąd: $ac = bdxy$,

podzieliwszy te ilości równe przez bd, otrzymamy:

$$\frac{ac}{bd} = xy.$$

Lecz: $xy = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$;

więc: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Ale ac jest iloczynem liczników, a bd jest iloczynem mianowników danych ułamków, przeto prawidło jest dowiedzioném.

W podobny sposób można wyprowadzić prawidło w tym przypadku, gdy będzie danych do pomnożenia więcej niż dwa ułamki.

146. Damy teraz kilka przykładów. Zanim wykonamy mnożenie tych czynników, których iloczyn będzie nowym licznikiem, jako też i tych czynników, których iloczyn będzie nowym mianownikiem, powinniśmy najprzód przekonać się, czy są jakiekolwiek czynniki wspólne w liczniku i mianowniku, a to w celu opuszczenia ich, przez co wypadek będzie uproszczony; patrz § 137.

Pomnożyć a przez $\frac{b}{c}$.

$$a=\frac{a}{1};\quad \frac{a}{1}\times\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}.$$

Stąd widzimy, że $a\,.\,\frac{b}{c}$ i $\frac{ab}{c}$ są równo znaczne, tak np.

$4\,.\,\frac{x}{5}=\frac{4x}{5}$; i równie: $\frac{1}{4}(2x-3)=\frac{2x-3}{4}$.

Pomnożyć: $\frac{x}{y}$ przez $\frac{x}{y}$.

$$\frac{x}{y}\times\frac{x}{y}=\frac{x\times x}{y\times y}=\frac{x^2}{y^2};$$

więc $\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}$.

Pomnożyć: $\frac{3a}{4b}$ przez $\frac{8c}{9a}$.

$$\frac{3a}{4b}\times\frac{8c}{9a}=\frac{3a\times 8c}{4b\times 9a}=\frac{2c\times 12a}{3b\times 12a}=\frac{2c}{3b}.$$

Pomnożyć: $\frac{3a^2}{(a+b)^2}$ przez $\frac{4(a^2-b^2)}{3ab}$.

$$\frac{3a^2}{(a+b)^2}\times\frac{4(a^2-b^2)}{3ab}=\frac{4a(a-b)\times 3a(a+b)}{b(a+b)\times 3a(a+b)}=\frac{4a(a-b)}{b(a+b)}.$$

Pomnożyć $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$ przez $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1$.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}+\frac{ab}{ab}=\frac{a^2+b^2+ab}{ab},$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}-\frac{ab}{ab}=\frac{a^2+b^2+ab}{ab};$$

$$\frac{a^2+b^2+ab}{ab}\times\frac{a^2+b^2-ab}{ab}=\frac{(a^2+b^2+ab)\,(a^2+b^2-ab)}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}{a^2b^2}=\frac{a^4+b^4+a^2b^2}{a^2b^2}.$$

Albo też możemy tak postąpić:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-1;$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2+2\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}.$$

a przeto:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)=\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}-1=$$

$$=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1.$$

Oba te wypadki są jednakowe, gdyż:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+1=\frac{a^4+b^4+a^2b^2}{a^2b^2}.$$

Pomnożyć: $\frac{1-a^2}{b+b^2}$ przez $\frac{1-b^2}{a^2+b^2}$ i przez $b+\frac{ab}{1-a}$.

Moglibyśmy pomnożyć przez siebie najprzód dwa pierwsze czynniki, a następnie iloczyn pomnożyć

oddzielnie przez b i przez $\frac{ab}{1-a}$, i te iloczyny dodać; lecz dogodniéj jest zamienić *ilość mieszaną*: $b+\frac{ab}{1-a}$ na ułamek.

Tym sposobem:

$$b+\frac{ab}{1-a}=\frac{b(1-a)+ab}{1-a}=\frac{b}{1-a}.$$

Więc:

$$\frac{b-a^2}{b+b^2}\times\frac{1-b^2}{a+a^2}\times\frac{b}{1-a}=\frac{(1-a^2)(1-b^2)b}{b(1+b)a(1+a)(1-a)}=\frac{1-b}{a}.$$

147. Jak w poprzednich rozdziałach, również i tutaj podajemy kilka ogólnych wyrażeń, które uczący się musi nateraz *przyjąć* za wyjaśnione, i używać w dalszym ciągu jako prawideł, przy przerabianiu danych zadań. Patrz §§ 63 i 135.

Pomnożyć $\frac{a}{b}$ przez $-\frac{c}{b}$.

$$\frac{a}{b}\times-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{-c}{d}=\frac{-ac}{bd}=-\frac{ac}{bd}.$$

Pomnożyć $-\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$.

$$-\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{-a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{-ac}{bd}=-\frac{ac}{bd}.$$

Pomnożyć $-\frac{a}{b}$ przez $-\frac{c}{d}$.

$$-\frac{a}{b}\times-\frac{c}{d}=\frac{-a}{b}\times\frac{-c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

PRZYKŁADY XVII.

Znaleść wartości następujących wyrażeń:

1. $\frac{2a}{3b}\times\frac{6bc}{5a^2}$.
2. $\frac{a^2}{bc}\times\frac{b^2}{ac}\times\frac{c^2}{ab}$.
3. $\frac{a^2b}{x^2y}\times\frac{b^2c}{y^2z}\times\frac{c^2a}{z^2x}$.
4. $\frac{x+1}{x-1}\times\frac{x+2}{x^2-1}\times\frac{x-1}{(x+2)^2}$.
5. $\left(\frac{xa}{x+a}\right)\times\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)$.
6. $\left(b+\frac{a^2}{b}\right)\left(a-\frac{b^2}{a}\right)$.
7. $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(b-\frac{ab}{a+b}\right)$.
8. $\frac{x(a-x)}{a^2+2ax+x^2}\times\frac{a(a+x)}{a^2-2ax+x^2}$.
9. $\frac{x^6-y^6}{x^4+2x^2y^2+y^4}\times\frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}\times\frac{x+y}{x^3-y^3}$.
10. $\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2-(a+c)x+ac}\times\frac{x^2-c^2}{x^2-b^2}$.
11. $\frac{x^2+xy}{x^2+y^2}\times\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$.
12. $\left(\frac{a}{bc}-\frac{b}{ac}-\frac{c}{ab}-\frac{2}{a}\right)\times\left(1-\frac{2c}{a+b+c}\right)$.
13. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-\frac{x}{a}-\frac{a}{x}+1\right)\times\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)$.
14. $\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}+\frac{y}{b}-\frac{b}{y}\right)\times\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}-\frac{y}{b}+\frac{b}{y}\right)$.
15. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-5x+6}\times\frac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}\times\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x+2}$.

XVIII.

Dzielenie ułamków.

148. Prawidło na dzielenie ułamków: *Należy dzielną pomnożyć przez odwrócony dzielnik.*

149. Można dowieść tego prawidła następującym sposobem.

Przypuśćmy, że mamy podzielić $\frac{a}{b}$ przez $\frac{c}{d}$;

uczyńmy $\frac{a}{b}=x$ i $\frac{c}{d}=y$; stąd:

$$a=bx, \text{ i } c=dy;$$

i daléj: $ad=bdx$, i $bc=bdy$;

a zatem: $\frac{ad}{bc}=\frac{bdx}{bdy}=\frac{x}{y}$.

Lecz: $\frac{x}{y}=x:y=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$;

przeto: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$.

150. Damy teraz kilka przykładów:

Podzielić: a przez $\frac{b}{c}$.

$$a=\frac{a}{1};\quad \frac{a}{1}:\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}.$$

Podzielić $\frac{3a}{4b}$ przez $\frac{9a}{8c}$.

$$\frac{3a}{4b}:\frac{9a}{8c}=\frac{3a}{4b}\times\frac{8c}{9a}=\frac{2c\times 12a}{3b\times 12a}=\frac{2c}{3b}.$$

Podzielić: $\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}$ przez $\frac{b^2}{a^2-b^2}$.

$$\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}:\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}\times\frac{a^2-b^2}{b^2}=$$

$$=\frac{b(a-b)(a+b)(a-b)}{b^2(a+b)^2}=\frac{(a-b)^2}{b(a+b)}.$$

151. Wyrażenia ułamkowe złożone, mogą być upraszczane przez zastosowanie prawideł poprzednio podanych, a odnoszących się do ułamków. Następne przykłady objaśnią użycie tych prawideł:

Uprościć: $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)$.

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b}=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2},$$

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{4ab}{a^2-b^2},$$

$$\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}:\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}.$$

W tym przykładzie z czynnikami $a-b$ i $a+b$ *zostało wykonane mnożenie*, i iloczyn a^2-b^2 był użytym zamiast $(a+b)(a-b)$. W ogólności jednak korzystniéj jest *nie wykonywać* mnożenia czynników w ciągu działania, może się bowiem przytrafić sposobność opuszczenia czynników wspólnych w liczniku i mianowniku. Mnożenie takie należy pozostawić na sam koniec w ostatecznym wypadku.

Uprościć: $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{1+\dfrac{a+1}{3-a}}}$

$$1+\frac{a+1}{3-a}=\frac{3-a}{3-a}+\frac{a+1}{3-a}=\frac{3-a+a+1}{3-a}=\frac{4}{3-a},$$

$$1:\frac{4}{3-a}=\frac{1}{1}\times\frac{3-a}{4}=\frac{3-a}{4},$$

$$a+\frac{3-a}{4}=\frac{4a}{4}+\frac{3-a}{4}=\frac{3+3a}{4},$$

$$1:\frac{3+3a}{4}=\frac{1}{1}\times\frac{4}{3+3a}=\frac{4}{3+3a}.$$

Znaleść wartość wyrażenia:

$\left(\dfrac{2x-a}{2x-b}\right)^2-\dfrac{a-x}{b-x}$, w którem $x=\dfrac{ab}{a+b}$

$$2x-a=\frac{2ab}{a+b}-\frac{a}{1}=\frac{2ab-a(a+b)}{a+b}=\frac{ab-b^2}{a+b};$$

$$2x-b=\frac{2ab}{a+b}-\frac{b}{1}=\frac{2ab-b(a+b)}{a+b}=\frac{ab-b^2}{a+b}.$$

Przeto:

$$\frac{2x-a}{2x-b}=\frac{ab-a^2}{a+b}:\frac{ab-b^2}{a+b}=$$

$$=\frac{ab-a^2}{a+b}\times\frac{a+b}{ab-b^2}=\frac{ab-a^2}{ab-b^2}=\frac{a(b-a)}{b(a-b)}=-\frac{a}{b};$$

a zatém: $\left(\dfrac{2x-a}{2x-b}\right)^2=\left(-\dfrac{a}{b}\right)^2=\dfrac{a^2}{b^2}$.

Daléj mamy:

$$a-x=\frac{a}{1}-\frac{ab}{a+b}=\frac{a(a+b)-ab}{a+b}=\frac{a^2}{a+b}.$$

$$b-x=\frac{b}{1}-\frac{ab}{a+b}=\frac{b(a+b-ab)}{a+b}=\frac{b^2}{a+b};$$

Stąd: $\dfrac{a-x}{b-x}=\dfrac{a^2}{a+b}:\dfrac{b^2}{a+b}=\dfrac{a^2}{a+b}\times\dfrac{a+b}{b^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$.

Przeto ostatecznie będzie:

$$\left(\frac{2x-a}{2x-b}\right)^2-\frac{a-x}{b-x}=\frac{a^2}{b^2}-\frac{a^2}{b^2}=0.$$

152. Wypadki, podane w § 147 prowadzą do odpowiednich twierdzeń, odnoszących się i do dzielenia ułamków.

Ponieważ: $\dfrac{a}{b}\times-\dfrac{c}{d}=-\dfrac{ac}{bd}$, i $\dfrac{a}{b}\times\dfrac{c}{d}=$

$=-\dfrac{ac}{bd}$. przeto miéć będziemy:

$$-\frac{ac}{bd}:-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}, \text{ i } -\frac{ac}{bd}:\frac{c}{d}=-\frac{a}{b}.$$

Również, ponieważ mamy:

$$-\frac{a}{b}\times-\frac{c}{d}=\frac{ac}{db},$$

przeto: $\dfrac{ac}{bd}:-\dfrac{c}{d}=-\dfrac{a}{b}$.

PRZYKŁADY XVIII.

Podzielić:

1. $\dfrac{4a^2b}{5x^2y}$ przez $\dfrac{2ab^2}{15xy^2}$.

2. $\frac{3a^2b^3c^4}{4x^2y^3z^4}$ przez $\frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^3z^2}$.

3. $\frac{1}{x^2-y^2}$ przez $\frac{1}{x-y}$.

4. $\frac{6(ab-b^2)}{a(a+b)^2}$ przez $\frac{2b^2}{a(a^2-b^2)}$.

5. $\frac{a^2-4x^2}{a^2+4ax}$ przez $\frac{a^2-2ax}{ax+4x^2}$.

6. $\frac{8x^3}{x^3-y^3}$ przez $\frac{4x^2}{x^2+xy+y^2}$.

7. $\frac{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3}{x^3+y^3}$ przez $\frac{(a+x)^2}{x^2-xy+y^2}$.

8. $\frac{x^2+(a+c)x+ac}{x^2+(b+c)x+bc}$ przez $\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}$.

9. $\frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{c^2-a^2-b^2+2ab}$ przez $\frac{a+b+c}{b+c-a}$.

10. $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3+y^3}$ przez $\frac{x^3-y^3}{x^2-xy+y^2}$.

11. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+9}$ przez $\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x+1}$.

12. $\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1-\frac{x}{y}\right)$ przez $\frac{y}{x^2+y^2}$.

13. $5x^2-\frac{1}{5}$ przez $x+\frac{1}{5}$.

14. $a^3-\frac{1}{a^3}$ przez $a-\frac{1}{a}$.

15. $\frac{x^4}{a^4}-\frac{a^4}{x^4}$ przez $\frac{x}{a}-\frac{a}{x}$.

16. $\frac{x^2}{a}-8a+\frac{12a^3}{x^2}$ przez $x-\frac{2a^2}{x}$.

17. $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{x}$ przez $\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$.

18. $\frac{x^2}{a^2}+1+\frac{a^2}{x^2}$ przez $\frac{x}{a}-1+\frac{a}{x}$.

19. $1+\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$ przez $1-\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$.

20. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{a^3}{x^3}-3\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}\right)+\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$ przez $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$.

Uprościć następujące wyrażenia:

21. $\frac{\frac{3x}{2}+\frac{x-1}{3}}{\frac{13}{6}(x+1)-\frac{x}{3}-2\frac{1}{2}}$.

22. $\frac{x-1+\frac{6}{x-6}}{x-2+\frac{3}{x-6}}$. 23. $\frac{3}{x+1}-\frac{2x-1}{x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}$.

24. $\frac{x-a}{x-\frac{(x-b)(x-c)}{x+a}}$ 25. $1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$.

26. $1+\frac{x}{1+x+\frac{2x^2}{1-x}}$ 27. $\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$.

28. $\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}}$.

29. $\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2-y^2}\right)$.

30. $\left(\dfrac{2x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}\right):\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{x}{x^2-y^2}\right)$.

31. $\dfrac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$.

32. $\left(\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{a+b}{a-b}\right):\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$.

Znaleść wartości następujących wyrażeń:

33. $\dfrac{a-x}{b-x}$, gdy $x=\dfrac{ab}{a+b}$.

34. $\dfrac{x-a}{b}-\dfrac{x-b}{a}$, gdy $x=\dfrac{a^2}{a-b}$.

35. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{b-a}-\dfrac{a}{a+b}$, gdy $x=\dfrac{a^2(b-a)}{b(b+a)}$.

36. $\dfrac{a^2x+b^2y}{x+y}$, gdy $a=\dfrac{2}{3}$ i $b=\dfrac{2}{3}$.

37. $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}$ gdy $y=\dfrac{3x}{4}$.

38. $\dfrac{x+2a}{2b-x}+\dfrac{x-2a}{2b+x}-\dfrac{4ab}{4b^2-x^2}$ gdy $x=\dfrac{ab}{a+b}$.

39. $\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^3-\dfrac{x-2a+b}{x+a-2b}$ gdy $x=\dfrac{a+b}{2}$.

40. $\dfrac{x+y-1}{x-y+1}$ gdy $x=\dfrac{a+1}{ab+1}$ i $y=\dfrac{ab+a}{ab+1}=\dfrac{ab+b}{ab+1}$.

XIV.

Równania stopnia pierwszego.

153. Gdy dwa wyrażenia algiebraiczne są połączone znakiem równości, wtedy całość taka nazywa się *równością*. Wyrażenia same, w ten sposób połączone, nazywają się *stronami* równości. Wyrażenie, znajdujące się z lewéj strony znaku równości, nazywa się *pierwszą*, wyrażenie zaś będące na prawéj stronie znaku równości, nazywa się *drugą* stroną równości.

154. *Równość* nazywa się *tożsamościową*, lub krócéj *tożsamością*, gdy obie jéj strony są równe, jakiekolwiek by wartości liczebne miały głoski, które do niéj wchodzą. Tak np. następujące równości są tożsamościami:

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2,$$
$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,$$
$$(x+a)(x^2-ax+a^2)=x^3+a^3;$$

to jest: twierdzenia powyższe algiebraiczne mają zawsze miejsce przy wszystkich znaczeniach głosek x i a. Czytelnik powinien zwrócić uwagę na to, że prawie wszystkie równości, z jakiemi miał dotąd do czynie-

nia, były wyłącznie tego właśnie rodzaju, to jest były tożsamościami.

155. *Równością warunkową* lub krócéj *równaniem* nazywa się taka równość, która ma miejsce nie przy wszystkich znaczeniach na głoski do niéj wchodzące, ale tylko wtedy, gdy téż głoski przedstawiają pewną szczególną liczbę, lub pewne szczególne liczby. Naprzykład: równość $x+1=7$ jest prawdziwą tylko wtedy, gdy $x=6$.

156. Ta głoska, na miejsce któréj ma być podstawiona pewna szczególna wartość, lub pewne szczególne wartości, aby równość miała istotnie miejsce, nazywa się *ilością nieznaną*, lub *niewiadomą*. Mówimy, że ta wartość, która podstawiona w miejsce niewiadomej, czyni w saméj rzeczy pierwszą stronę równania równą drugiéj, *zadosyć czyni równaniu*. Sama zaś ta wartość nazywa się *pierwiastkiem równania*. *Rozwiązać równanie*, jest to znaleść jego pierwiastek lub pierwiastki.

157. Równanie, zawierające jedną niewiadomą, nazywa się równaniem takiego stopnia, jaki jest najwyższy wykładnik przy niewiadomej. I tak, jeżeli x oznacza niewiadomą, równanie nazywa się równaniem *stopnia pierwszego*, gdy x wchodzi tylko w potędze *pierwszéj*. Jeżeli wchodzi do równania x^2, i wyższéj potęgi nad tę niema w równaniu, wtedy równanie nazywa się równaniem stopnia *drugiego*, lub *kwadratowém*. Jeżeli wchodzi do równania x^3, bez żadnéj wyższéj potęgi, wtedy nazywa się ono równaniem

stopnia *trzeciego*, lub *sześciennem* i t. d.

Należy tu zauważyć, że w powyższych określeniach przypuszcza się, że obie strony równania są *wyrażeniami całkowitémi co się tyczy x*.

158. W tym rozdziale pokażemy w jaki sposób rozwiązują się równania stopnia pierwszego. Zaczniemy najprzód od wykazania pewnych działań, które mogą być wykonane nad równaniem, bez nadwerężenia téj równości, jaką ono wyraża.

159. *Jeżeli wszystkie wyrazy na obu stronach równania będą pomnożone przez jednę i tęż samą ilość, wtedy wypadki stąd otrzymane będą równe.*

Wypada to z widocznéj samo przez się zasady, że jeżeli równe ilości będą pomnożone przez jednę i tęż samą ilość, wtedy otrzymane iloczyny będą równe; użycie téj zasady zaraz wykażemy.

Podobnież: *jeżeli wszystkie wyrazy po obu stronach równania będą podzielone przez jednę i tęż samą liczbę, wtedy otrzymane ilorazy będą równe.*

160. Zasada wyrażona w § 159 główne znajduje zastosowanie przy *znoszeniu mianowników w równaniu*. W tym celu należy pomnożyć wszystkie wyrazy obu stron równania przez iloczyn wszystkich mianowników, znajdujących się w równaniu, albo téż przez najmniejszą wspólną wielokrotną tychże mianowników. Naprzykład: przypuśćmy, że mamy równanie:

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=9.$$

Pomnóżmy każdy wyraz przez $3\times4\times6$; otrzymamy:

$$4\times6\times x+3\times6\times x+3\times4\times x=9\times3\times4\times6,$$

to jest: $$24x+18x+12x=648;$$

podzielmy wszystkie wyrazy przez 6, otrzymamy:

$$4x+3x+2x=108.$$

Zamiast mnożyć wszystkie wyrazy przez $3\times4\times6$, możemy je pomnożyć przez 12, które jest n. W. W. względem mianowników 3, 4 i 6. Tym sposobem otrzymalibyśmy odrazu:

$$4x+3x+2x=108;$$

Stąd: $$9x=108;$$

a dzieląc obie strony przez 9, będzie:

$$x=\frac{108}{9}=12.$$

12 więc jest *pierwiastkiem* danego równania. Możemy to sprawdzić podstawiając 12 zamiast x w to początkowe równanie. Pierwsza strona stanie się:

$\frac{12}{3}+\frac{12}{4}+\frac{12}{6}$, to jest $4+3+2$ czyli 9, a to jest zgodne z drugą stroną.

161. *Każdy wyraz w równaniu może być przeniesiony z jednéj strony równania na drugą, ale ze zmienionym znakiem.*

Przypuśćmy np., że:

$$x-a=b-y.$$

Dodajmy do obu stron równania po a, otrzymamy:

$$x-a+a=b-y+a,$$

to jest: $$x=b-y+a.$$

Odejmijmy po b od każdéj strony, będzie:

$$x-b=b+a-y-b=a-y.$$

Widzimy stąd, że najprzód $-a$ znikło na pierwszéj stronie równania, a wystąpiło jako $+a$ na drugiéj stronie; i daléj, że $+b$ znikło na jednéj stronie, a wystąpiło jako $-b$ na drugiéj stronie równania. [1])

---

[1]) Ściśle mówiąc, zasady wyrażone w tekście, w §§ 159 161, nie są widocznemi same przez się; — jakkolwiek bowiem jest widoczną prawdą, że do ilości równych można dodać równe, i sumy stąd wypadną równe, i t. d., z tém wszystkiem *rozumowanie* dopiero pokazuje nam, że przez wprowadzenie w postaci równania takich zmian, o jakich w tych dwóch §§ mowa, związek pomiędzy ilościami niewiadomemi i wiadomemi pozostaje bez zmiany.

Pierwsza zasada, na któréj polega przenoszenie wyrazów może być tak wyrażoną:

Jeżeli do obu stron równania, dodamy ilości równe, lub od obu stron równania odejmiemy ilości równe, równanie nie zmieni się, to jest jego pierwiastki pozostaną téż same.

W rzeczy saméj: oznaczmy przez A i B dwie strony pewnego równania, które tym sposobem będzie takie:

$$A=B \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Przypuśćmy nadto, że równanie zawiera tylko jedną niewiadomą x. Dodajmy do obu stron po téj saméj ilości m; będzie:

$$A+m=B+m \quad . \quad . \quad (2)$$

Oczywistą jest rzeczą, że jeżeli pewna wartość $x=a$, zadosyć czyni równaniu (1), to taż sama wartość czyni zadosyć i równaniu drugiemu, gdyż do ilości A i B, które, podług przypuszczenia, są równe przy $x=a$, dodana jest jedna i taż sama ilość m. Odwrotnie, jeżeli równaniu (2) zadosyć czyni pewna wartość $x=b$, to znaczy się, że przy téj wartości na x, $A+m$ jest równe $B+m$. Odejmując

162. *Można zmienić znaki we wszystkich wyrazach równania na przeciwne, i równanie się nie zmieni.*

---

wtedy od tych ilości równych jedną i tęż samą ilość m, otrzymamy reszty równe, t. j. będzie i $A = B$ przy $x = b$. Każdy więc pierwiastek równania $A=B$ jest zarazem pierwiastkiem równania $A+m = B+m$; i odwrotnie.

Jest to zasada, na której polega przenoszenie wyrazów z jednéj strony równania na drugą.

Drugą zasadę możemy w ten sposób wypowiedzieć:

Jeżeli obie strony równania pomnożymy, lub podzielimy, przez jednę i tęż samą ilość, nie zawierającą niewiadomej, wtedy równanie pozostanie bez zmiany.

Wystawmy sobie, że wszystkie wyrazy w równaniu są przeniesione na stronę pierwszą, tak, że równanie jest sprowadzone do postaci:

$$A = 0.$$

Pierwiastkiem równania będzie więc ta wartość na x, która czyni A równem 0. Przypuśćmy, że taką wartością będzie $x = a$.

Pomnóżmy obie strony równania przez pewną ilość m; otrzymamy równanie:

$$mA = 0,$$

którego pierwiastki będą też same, co i pierwiastki równania $A = 0$. W rzeczy saméj: przy każdéj wartości $x = a$ zadosyć czyniącéj danemu równaniu, czynnik A jest równy zero, więc i mA będzie także zerem. A zatém każdy pierwiastek równania $A = 0$ będzie zarazem i pierwiastkiem równania $mA = 0$. I odwrotnie: każda wartość na x, zadosyć czyniąca równaniu $mA = 0$, powinna jeden z czynników m lub A czynić równym zero. Lecz jeżeli m nie zawiéra x, wtedy stać się zerem nie może; przeto drugi czynnik A powinien być równym zero; czyli że pierwiastki równania $mA = 0$, są zarazem i pierwiastkami równania $A = 0$. Rozumowanie to jednak nie stosuje się do tego przypadku, gdy czynnik m zawiera x; może się

Wypada to z § 161 przez przeniesienie wszystkich wyrazów. Tak naprzykład, w równaniu:

$$x-a = b-y,$$

przenosząc wszystkie wyrazy z pierwszéj na drugą i z drugiéj na pierwszą stronę, będzie:

$$y-b = a-x,$$

czyli:

$$a-x = y-b;$$

do tegoż samego wypadku dochodzimy, zmieniając znaki na przeciwne we wszystkich wyrazach początkowego równania.

163. Możemy teraz podać prawidło na rozwiązywanie jakiegokolwiek równania stopnia pierwszego z jedną niewiadomą:

Należy najprzód znieść mianowniki, jeżeli to jest potrzebném; następnie przenieść wszystkie wyrazy, zawierające niewiadomą na jedną stronę równania, a wszystkie

---

bowiem wtedy przytrafić, że równaniu $mA = 0$ w skutek tego zadosyć się czyni, że czynnik m staje się zerem, że zatém przy téj wartości na x, A nie jest koniecznie równém zero. Np. gdybyśmy obie strony równania $A = 0$ pomnożyli przez $x - 5$, otrzymalibyśmy:

$$(x-5)A = 0.$$

To równanie sprawdza się wartością $x = 5$; a jednak $x = 5$ może nie być pierwiastkiem równania $A = 0$.

Rozumowanie to jest wszakże dla początkującego zbyt trudném, i dla tego, przy pierwszém uczeniu się o równaniach, należy wyłącznie trzymać się tekstu, odkładając cały ten rozbiór przynajmniéj do czasu nauki o równaniach stopnia drugiego.

T.

wyrazy wiadome na drugą, poczém należy podzielić obie strony równania przez współczynnik, lub przez summę współczynników przy ilości niewiadoméj, i tym sposobem otrzymamy szukany pierwiastek.

164. Podajemy teraz na zastosowanie powyższych prawideł przykłady.

Rozwiązać:

$$7x+25=35+5x.$$

W równaniu tém nie ma wcale ułamków; przez przeniesienie wyrazów mamy:

$$7x-5x=35-25,$$

to jest: $$2x=10;$$

dzielimy obie strony przez 2; otrzymamy:

$$x=\frac{10}{2}=5.$$

Dla sprawdzenia, należy podstawić 5 zamiast x w początkowe równanie; wtedy znajdziemy, że każda strona równania jest równą 60.

165. Rozwiązać:

$$4(3x-2)-2(4x-3)-3(4-x)=0.$$

Należy najprzód wykonać wskazane mnożenia; wtedy otrzymamy:

$$12x-8-(8x-6)-(12-3x)=0.$$

Znosząc nawiasy, będzie:

$$12x-8-8x+6-12+3x=0;$$

łącząc wyrazy podobne:

$$7x-14=0.$$

przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę:

$$7x=14;$$

dzieląc obie strony równania przez 7, otrzymamy:

$$x=\frac{14}{7}=2.$$

Czytelnik powinien zawsze sprawdzić otrzymane wypadki. W powyższym przykładzie podstawiając 2 zamiast x w równanie początkowe, znajdziemy: 16—10—6, to jest 0, jak być powinno.

166. Rozwiązać:

$$x-2-(2x-3)=\frac{3x+1}{2}.$$

Znosząc nawias, będzie:

$$x-2-2x+3=\frac{3x+1}{2},$$

to jest: $$1-x=\frac{3x+1}{2};$$

mnożąc obie strony równania przez 2,

$$2-2x=3x+1:$$

przenosząc wyrazy wiadome na pierwszą, a niewiadome na drugą stronę równania:

$$2-1=2x+3x;$$

czyli; $1=5x$, lub $5x=1$;

stąd: $$x=\frac{1}{5}.$$

167. Rozwiązać:

$$\frac{5x+4}{2}-\frac{7x+5}{10}=5\frac{3}{5}-\frac{x-1}{2}.$$

$5\frac{3}{5}=\frac{28}{5}$; najmniejsza wspólna wielokrotna względ-

dem mianowników jest 10; mnożąc całe równanie przez 10, będzie:

$$5(5x+4)-(7x+5)=28\times 2-5(x-1);$$

to jest: $25x+20-7x-5=56-5x+5,$

przenosząc: $25x-7x+5x=56+5-20+5,$

to jest: $23x=46;$

skąd: $x=\frac{46}{23}=2.$

Uczący się powinien z początku wykonywać całkowitą robotę w zupełności tak, jak to jest pokazane w obecnym przykładzie, nie używając uproszczeń. Bardzo często bywają popełniane omyłki w znakach, przy znoszeniu mianowników. W powyższem równaniu ułamek $-\frac{7x+5}{10}$ ma być pomnożonym przez 10; radzimy wypadek otrzymany przedstawić najprzód pod postacią $-(7x+5)$, a następnie pod postacią $-7x-5$ w tym celu, aby zwrócić należytą uwagę na znaki.

168. Rozwiązać:

$$\frac{1}{3}(5x+3)-\frac{1}{7}(16-5x)=37-4x.$$

Na zasadzie § 146, powyższe równanie może być tak napisane:

$$\frac{5x+3}{3}-\frac{16-5x}{7}=37-4x.$$

Pomnóżmy przez 21, będzie:

$$7(5x+3)-3(16-5x)=21(37-4x),$$

to jest: $35x+21-48+15x=777-84x;$

przez przeniesienie, otrzymamy:

$$35x+15x+84x=777-21+48;$$

to jest: $134x=804;$

skąd: $x=\frac{804}{134}=6.$

169. Rozwiązać równanie:

$$\frac{6x+15}{11}-\frac{8x-10}{7}=\frac{4x-7}{5}.$$

Należy najprzód pomnożyć obie strony równania przez iloczyn z 11, 7 i 5; tym sposobem będzie:

$$35(6x+15)-55(8x-10)=77(4x-7),$$

to jest.

$$210x+525-440x+550=308x-539;$$

przez przeniesienie wyrazów:

$$210x-440x-308x=-539-525-550.$$

Zmieniając wszystkie znaki na przeciwne:

$$440x+308x-210x=-539+525+550,$$

to jest: $538x=1614,$

skąd: $x=\frac{1614}{538}=3.$

PRZYKŁADY XIX.

1. $5x+50=4x+56;$
2. $16x-11=7x+70.$
3. $24x-49=19x-14;$
4. $3x+23=78-2x.$
5. $7(x-18)=3(x-14);$
6. $16x=38-3(4-x).$
7. $7(x-3)=9(x+1)-38.$

8. $5(x-7)+63=9x$.
9. $59(x-7)=61(9-x)-2$.
10. $72(x-5)=63(5-x)$.
11. $28(x+9)=27(46-x)$.
12. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11$.
13. $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{1}{6}=\frac{x}{8}+\frac{1}{12}$.
14. $\frac{4x}{3}+24=2x+6$.
15. $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}=x-7$.
16. $36-\frac{4x}{9}=8$.
17. $\frac{2x}{3}+4=\frac{7x}{12}+9$.
18. $\frac{3x}{4}+5=\frac{5x}{6}+2$.
19. $56-\frac{3x}{4}=48-\frac{5x}{8}$.
20. $\frac{x}{6}-4=24-\frac{x}{8}$.
21. $\frac{2x}{3}+12=\frac{4x}{5}+6$.
22. $\frac{2x}{3}=\frac{176-4x}{5}$.
23. $\frac{7x}{8}-5=\frac{9x}{10}-8$.
24. $\frac{5x}{9}-8=74-\frac{7x}{12}$.
25. $\frac{3x}{4}+\frac{180-5x}{6}=29$.
26. $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}=x-2$.
27. $4(x-3)-7(x-4)=6-x$.
28. $\frac{x}{3}-\frac{1}{3}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}=\frac{x}{5}-\frac{1}{5}-\frac{x}{6}+\frac{1}{6}$.
29. $1+\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}=\frac{3x}{4}-4\frac{1}{2}$.

30. $2x-\frac{19-2x}{2}=\frac{2x-11}{2}$.
31. $\frac{x+1}{3}-\frac{3x-1}{5}=x-2$.
32. $x+\frac{3x-9}{5}=4-\frac{5x-12}{3}$.
33. $\frac{10x+3}{3}-\frac{6x-7}{2}=10x-10$.
34. $\frac{5x-7}{2}-\frac{2x+7}{3}=3x-14$.
35. $x-1-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$.
36. $\frac{x+3}{2}+\frac{x+4}{3}+\frac{x+5}{4}=16$.
37. $\frac{7x+9}{4}=7+x-\frac{2x-1}{9}$.
38. $\frac{3x-4}{2}-\frac{6x-5}{8}=\frac{3x-1}{16}$.
39. $\frac{2x-5}{3}-\frac{5x-3}{4}+2\frac{2}{3}=0$.
40. $\frac{x-3}{4}=\frac{x-5}{6}+\frac{x-1}{9}$.
41. $\frac{x-1}{2}-\frac{x-3}{4}+\frac{x-5}{6}=4$.
42. $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\frac{x-2}{5}=3$.
43. $\frac{7x+5}{6}-\frac{5x+6}{4}=\frac{8-5x}{12}$.

44. $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}$

45. $\frac{x-1}{2} + \frac{2x+7}{3} - \frac{x+2}{9} = 9.$

46. $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{4} = \frac{2}{3}.$

47. $\frac{2x-5}{6} + \frac{6x+3}{4} = 5x - 17\frac{1}{2}.$

48. $\frac{x}{4} - \frac{5x+8}{6} = \frac{2x-9}{3}.$

49. $\frac{3x+5}{7} - \frac{2x+7}{3} + 10 - \frac{3x}{5} = 0.$

50. $\frac{1}{7}(3x-4) + \frac{1}{3}(5x+3) = 43 - 5x.$

51. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 7\frac{5}{6}.$

52. $\frac{x}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{x+3}{3} - \frac{2}{3}.$

53. $\frac{5-3x}{4} + \frac{5x}{3} = \frac{3}{2} - \frac{3-5x}{3}.$

54. $\frac{1}{2}(27 - 2x) = \frac{9}{2} - \frac{1}{10}(7x - 54).$

55. $5x - [8x - 3\{16 - 6x - (4 - 5x)\}] = 6.$

56. $\frac{1-2x}{3} - \frac{4-5x}{6} + \frac{13}{42} = 0.$

57. $\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{4} + 4x = 12 + \frac{2x-1}{6}.$

58. $\frac{4x-7}{8} + 2\frac{2}{3} + \frac{7-4x}{4} = x + \frac{13}{24}.$

59. $\frac{5x-1}{7} + \frac{9x-5}{11} = \frac{9x-7}{5}.$

60. $\frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{3x-5}{12} + \frac{1}{4}.$

61. $\frac{1}{6}(8-x) + x - 1\frac{2}{3} = \frac{1}{2}(x+6) - \frac{x}{3}.$

62. $\frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} = \frac{7x}{3} - \frac{11}{6}(x+3).$

63. $\frac{2x-1}{5} + \frac{6x-4}{7} = \frac{7x+12}{11}.$

64. $\frac{7x-4}{8} + 2\frac{2}{3} + \frac{4-7x}{4} = x - \frac{7}{12}.$

65. $\frac{2-x}{3} + \frac{3-x}{4} + \frac{4-x}{5} + \frac{5-x}{6} + \frac{3}{4} = 0.$

66. $\frac{5x-3}{7} - \frac{9-x}{3} = \frac{5x}{2} + \frac{19}{6}(x-4).$

XX.

Równania stopnia pierwszego (ciąg dalszy).

170. Podamy teraz niektóre przykłady rozwiązywania równań stopnia pierwszego, cokolwiek trudniejsze, aniżeli zadania poprzedniego rozdziału. Czytelnik przekona się, że niekiedy korzystną jest rzeczą uwalniać równanie od mianowników tylko w czę-

ści, i następnie zrobić pewne uproszczenia, zanim przystąpimy do zniesienia pozostałych mianowników.

171. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x+6}{11}-\frac{2x-18}{3}+\frac{2x+3}{4}=5\frac{1}{3}+\frac{3x+4}{12}.$$

Pomnożmy najprzód obie strony równania przez 12; będzie

$$\frac{12(x+6)}{11}-4(2x-18)+3(2x+3)=\frac{16}{3}\times 12+3x+4,$$

czyli:

$$\frac{12(x+6)}{11}-8x+72+6x+9=64+3x+4.$$

Przez stosowne przeniesienie wyrazów na drugą stronę i połączenie wyrazów podobnych otrzymamy:

$$\frac{12(x+6)}{11}=5x-13.$$

Mnożąc obie strony przez 11, wypadnie:

$$12(x+6)=11(5x-13),$$

czyli: $12x+72=55x-143;$

skąd, przez przeniesienie:

$$72+143=55x-12x,$$

to jest: $43x=215,$

skąd nakoniec:

$$x=\frac{215}{43}=5.$$

172. Rozwiązać równanie:

$$\frac{6x-13\frac{1}{3}}{15-2x}+2x+\frac{16x-15}{24}=6\frac{5}{12}-\frac{20\frac{5}{8}-8x}{3}.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez 24, będzie:

$$\frac{24\left(6x-\frac{40}{3}\right)}{15-2x}+48x+16x-15=24\times\frac{77}{12}-8\left(\frac{165}{8}-8x\right);$$

czyli:

$$\frac{144x-320}{15-2x}+48x+16x-15=154-165+64x.$$

Przez przeniesienie wszystkich wyrazów całkowitych z pierwszéj strony równania na drugą, i następnie uproszczenie:

$$\frac{144x-320}{15-2x}=4.$$

Mnożąc teraz przez $15-2x$ obie strony, wypadnie:

$$144x-320=4(15-2x)=60-8x,$$

przeto: $144x+8x=320+60,$

czyli: $152x=380$

skąd:

$$x=\frac{380}{152}=2\frac{76}{152}=2\frac{1}{2}.$$

173. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x-5}{x-7}=\frac{x+3}{x+9}.$$

Pomnóżmy obie strony tego równania przez

$$(x-7)\,(x+9).$$

będzie: $(x+9)\,(x-5)=(x-7)\,(x+3)$.

to jest: $x^2+4x-45=x^2-4x-21$;

odejmijmy po x^2 od każdej strony równania:

$$4x-45=-4x-21;$$

przenieśmy wyrazy niewiadome na pierwszą, wiadome na drugą stronę równania, otrzymamy:

$$4x+4x=45-21$$

czyli: $8x=24$;

skąd: $x=\frac{24}{8}=3$.

W tym przykładzie, po zniesieniu mianowników, x^2 znalazło się na *obu stronach* równania; przez odejmowanie można było uwolnić się od niego i otrzymać tym sposobem równanie *stopnia pierwszego*.

174. Rozwiązać równanie:

$$\frac{2x+3}{x+1}=\frac{4x+5}{4x+4}+\frac{3x+3}{3x+1}.$$

Tutaj najprzód pomnożymy obie strony równania przez $4x+4$, to jest przez $4(x+1)$, będzie:

$$4(2x+3)=4x+5+\frac{4(x+1)\,3(x+1)}{3x+1};$$

przeto: $8x+12-4x-5=\frac{12(x+1)^2}{3x+1}$;

czyli: $4x+7=\frac{12(x+1)^2}{3x+1}$.

Pomnóżmy teraz przez $3x+1$; otrzymamy:

$$(3x+1)\,(4x+7)=12(x+1)^2$$

czyli: $12x^2+25x+7=12x^2+24x+12$.

Odejmując po $12x^2$ od każdej strony równania i przenosząc wyrazy niewiadome na pierwszą, a wiadome na drugą stronę, wypadnie:

$$25x-24x=12-7,$$

to jest: $x=5$.

175. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}.$$

Mamy najprzód:

$$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{(x-1)(x-3)-(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\frac{x^2-4x+3-(x^2-4x+4)}{(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{(x-2)(x-3)}.$$

Daléj:

$$\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{(x-4)(x-6)-(x-5)^2}{(x-5)(x-6)}=$$

$$=-\frac{1}{(x-5)(x-6)}.$$

Więc równanie dane zamieni się na takie:

$$-\frac{1}{(x-2)(x-3)}=-\frac{1}{(x-5)(x-6)}.$$

Zmieniając znaki na przeciwne otrzymamy:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{(x-5)(x-6)};$$

znosząc zaś mianowniki. będzie:

$$(x-5)(x-6)=(x-2)(x-3)$$

czyli, wykonywając wskazane mnożenia:

$$x^2-11x+30=x^2-5x+6;$$

a przeto:

$$-11x+5x=6-30,$$

to jest: $$-6x=-24;$$

skąd: $$6x=24;$$

i nakoniec: $$x=4.$$

176. Rozwiązać równanie:

$$0{,}5x+\frac{0{,}45x-0{,}75}{0{,}6}=\frac{1{,}2}{0{,}2}-\frac{0{,}3x-0{,}6}{0{,}9}.$$

Aby uniknąć pomyłek wyrazimy tutaj wszystkie ułamki dziesiętne pod postacią ułamków zwyczajnych. Tym sposobem równanie powyższe przedstawi się tak:

$$\frac{5x}{10}+\frac{10}{6}\left(\frac{45x}{100}-\frac{75}{100}\right)=\frac{10}{2}\times\frac{12}{10}-\frac{10}{9}\left(\frac{3x}{10}-\frac{6}{10}\right),$$

czyli, upraszczając ułamki:

$$\frac{x}{2}+\frac{5}{3}\left(\frac{9x}{20}-\frac{3}{4}\right)=6-\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right);$$

to jest:

$$\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5}{4}=6-\frac{x}{3}+\frac{2}{3}.$$

Mnożąc obie strony równania przez 12, będzie:

$$6x+9x-15=73-4x+8;$$

przenosząc wyrazy niewiadome na pierwszą, a wiadome na drugą stronę:

$$19x=72+8+15=95,$$

skąd: $$x=\frac{95}{19}=5.$$

177. Mogą być równania dane do rozwiązania takie, że w nich *głoski* przedstawiają ilości wiadome; w takim razie ilość niewiadomą przedstawiać zawsze będziemy głoską x, a każda inna głoska przedstawiać będzie ilość wiadomą.

Rozwiążemy tutaj trzy takie równania.

178. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=c.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez ab; otrzymamy:

$$bx+ax=abc;$$

czyli, wyłączając x za nawias:

$$(a+b)x=abc;$$

dzieląc zaś obie strony równania przez $a+b$, będzie:

$$x=\frac{abc}{a+b}.$$

179. Rozwiązać równanie:

$$(a+x)(b+x)=a(b+c)+\frac{a^2c}{b}+x^2.$$

Wykonywając mnożenia wskazane, otrzymujemy:

$$ab+ax+bx+x^2=ab+ac+\frac{a^2c}{b}+x^2.$$

skąd:

$$ax+bx=ac+\frac{a^2c}{b};$$

czyli: $$(a+b)x=ac\left(1+\frac{a}{b}\right)=\frac{ac(a+b)}{b};$$

skąd, dzieląc obie strony równania przez $a+b$, wypada:

$$x=\frac{ac}{b}.$$

180. Rozwiązać:

$$\frac{x-a}{x-b}=\frac{(2x-a)^2}{(2x-b)^2}.$$

Znieśmy najprzód mianowniki; będzie:

$$(x-a)(2x-b)^2=(x-b)(2x-a)^2;$$

czyli:

$$(x-a)(4x^2-4bx+b^2)=(x-b)(4x^2-4ax+a^2)$$

Wykonywając mnożenie, otrzymamy:

$$4x^3-4x^2(a+b)+x(4ab+b^2)-ab^2=4x^3-4x^2(a+b)+ \\ +x(4ab+a^2)-a^2b.$$

Stąd: $$xb^2-ab^2=xa^2-a^2b;$$

czyli: $$x(a^2-b^2)=a^2b-ab^2=ab(a-b),$$

i dalej:

$$x=\frac{ab(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{ab}{a+b}.$$

181. Jakkolwiek następujące równanie, ściśle biorąc, nie należy do obecnego rozdziału, ztémwszystkiém podajemy je tutaj, gdyż czytelnik nie znajdzie trudności w zrozumieniu pojedynczych działań przy

rozwiązaniu, i może ono służyć za wzór postępowania w podobnych przypadkach. Jest ono podobne do równań poprzednio rozwiązanych w tém, że daje także tylko *jedną* wartość na niewiadomą.

Rozwiązać:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-16}=8.$$

Przenosząc pierwszy wyraz na drugą stronę, otrzymamy:

$$\sqrt{x-16}=8-\sqrt{x};$$

podnosząc obie strony do kwadratu:

$$x-16=(8-\sqrt{x})^2=64-16\sqrt{x}+x;$$

przez nowe przeniesienie wyrazów będzie:

$$16\sqrt{x}=64+16=80;$$

skąd: $$\sqrt{x}=5;$$

i nakoniec: $$x=25.$$

PRZYKŁADY XX.

1. $\frac{12}{x}+\frac{1}{12x}=\frac{29}{24}$.
2. $\frac{42}{x-2}=\frac{35}{x-3}$.
3. $\frac{128}{3x-4}=\frac{216}{5x-6}$.
4. $\frac{45}{2x+3}=\frac{57}{4x-5}$.
5. $\frac{3x-1}{2}-\frac{2x-5}{3}+\frac{x-3}{4}-\frac{x}{6}=x+1$.

6. $\frac{\frac{1}{2}x-3}{5}+\frac{\frac{3}{4}x-10}{2}+\frac{4-x}{4}=\frac{10-x}{6}$.

7. $\frac{5}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{7}{6}\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{7}\right)=4\frac{8}{9}$.

8. $x+\frac{5x-8}{3}=6-\frac{3x-8}{5}$.

9. $\frac{x-2}{4}+\frac{1}{3}=x-\frac{2x-1}{3}$.

10. $x+1-\frac{x^2+3}{x+2}=2$.

11. $\frac{x-1}{x-2}=\frac{7x-21}{7x-26}$.

12. $\frac{7x-4}{x-1}=\frac{7x-26}{x-3}$.

13. $\frac{x}{7}-\frac{3x}{2}+\frac{71}{7}=\frac{3x+1}{2}+1\frac{1}{14}$.

14. $\frac{2x-6}{3x-8}=\frac{2x-5}{3x-7}$.

15. $x-3-(3-x)(x+1)=x(x-3)+8$.

16. $3-x-2(x-1)(x+2)=(x-3)(5-2x)$.

17. $\frac{7+9x}{4}-1+\frac{2-x}{9}=7x$.

18. $(x+7)(x+1)=(x+3)^2$.

19. $\frac{1}{3}(2x-10)-\frac{1}{11}(3x-40)=15-$
$-\frac{1}{5}(57-x)$.

20. $\frac{6x+8}{2x+1}-\frac{2x+33}{x+12}=1$.

21. $\frac{x-1}{4}-\frac{x-5}{32}+\frac{15-2x}{40}=\frac{9-x}{2}-\frac{7}{8}$.

22. $\frac{4x+17}{x+3}+\frac{3x-10}{x-4}=7$.

23. $\frac{x+1}{7}+x(x-2)=(x-1)^2$.

24. $\frac{x-4}{3}+(x-1)(x-2)=x^2-2x-4$.

25. $\frac{3x^2-2x-8}{5}=\frac{(7x-2)(3x-6)}{35}$.

26. $\frac{x+10}{3}-\frac{2}{5}(3x-4)+\frac{(3x-2)(2x-3)}{6}=$
$=x^2-2\frac{2}{15}$.

27. $\frac{3x-1}{2x-1}-\frac{4x-2}{3x-2}=\frac{1}{6}$.

28. $\frac{2}{2x-3}+\frac{1}{x-2}=\frac{6}{3x+2}$.

29. $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$.

30. $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$.

31. $\frac{3-2x}{1-2x}-\frac{2x-5}{2x-7}=1-\frac{4x^2-1}{7-16x+4x^2}$.

32. $\frac{3+x}{3-x}-\frac{2+x}{2-x}-\frac{1+x}{1-x}=1$.

33. $\frac{x-5}{7}+\frac{x^2+6}{3}=\frac{x^2-2}{2}-\frac{x^2-x+1}{6}+3$.

34. $(x+1)(x+2)(x+3) = (x-1)(x-2)(x-3) + 3(4x-2)(x+1)$.

35. $(x-9)(x-7)(x-5)(x-1) = (x-2)(x-4)(x-6)(x-10)$.

36. $(8x-3)^2(x-1) = (4x-1)^2(4x-5)$.

37. $\frac{x^2-x+1}{x-1} + \frac{x^2+x+1}{x+1} = 2x$.

38. $0{,}5x-2 = 0{,}25x+0{,}2x-1$.

39. $0{,}5x+0{,}6x-0{,}8 = 0{,}75x+0{,}25$.

40. $0{,}15x + \frac{0{,}135x-0{,}225}{0{,}6} = \frac{0{,}36}{0{,}2} - \frac{0{,}09x-0{,}18}{0{,}9}$.

41. $a \cdot \frac{a-x}{b} - b \cdot \frac{b+x}{a} = x$.

42. $a \cdot \frac{x-a}{b} + b \cdot \frac{x-b}{b} = x$.

43. $\frac{x^2-a^2}{bx} - \frac{a-x}{b} = \frac{2x}{b} - \frac{a}{x}$.

44. $x(x-a)+x(x-b) = 2(x-a)(x-b)$.

45. $(x-a)(x-b)(x+2a+2b) = (x+2a)(x+2b)(x-a-b)$.

46. $(x-a)(x-b) = (x-a-b)^2$.

47. $\frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b} = \frac{a-b}{x-c}$.

48. $\frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b} = \frac{a+b}{x+c}$.

49. $\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{x^2-ab}$.

50. $\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-a+c} = \frac{1}{x-b-c} - \frac{1}{x-b}$.

51. $\frac{mx-a-b}{nx-c-d} = \frac{mx-a-c}{nx-b-d}$.

52. $(a-b)(x-c)-(b-c)(x-a)-(c-a)(x-b) = 0$.

53. $\frac{x-a}{a-b} - \frac{x+a}{a+b} = \frac{2ax}{a^2-b^2}$.

54. $(a-x)(b-x) = (p+x)(q+x)$.

55. $\frac{x-a}{x-a-1} - \frac{x-a-1}{x-a-2} = \frac{x-b}{x-b-1} - \frac{x-b-1}{x-b-2}$.

56. $(x+a)(2x+b+c)^2 = (x+b)(2x+a+c)^2$.

57. $(x+2a)(x-a)^2 = (x+2b)(x-b)^2$.

58. $(x-a)^3(x+a-2b) = (x-b)^3(x-2a+b)$.

59. $\sqrt{4x} + \sqrt{4x-7} = 7$.

60. $\sqrt{x+14} + \sqrt{x-14} = 14$.

61. $\sqrt{x+11} + \sqrt{x-9} = 10$.

62. $\sqrt{9x+4} + \sqrt{9x-1} = 3$.

63. $\sqrt{x+4ab} = 2a - \sqrt{x}$.

64. $\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} = \sqrt{a-b}$.

XXI.

Zagadnienia.

182. Zastosujemy teraz sposoby, wyłożone w dwóch poprzednich rozdziałach, do rozwiązania niektórych zagadnień, i tym sposobem przedstawimy czytelnikowi przykłady użycia zasad Algiebry.

W tych zadaniach pewne ilości są dane, — inne zaś, mające pewne oznaczone związki z temi danemi, należy wynaleźć; — ilość, którą należy wynaleźć, nazywa się *niewiadomą*, lub *nieznaną*. Związki wspomniane powyżej są zazwyczaj wyrażone nie umówionemi znakami, lecz zwykłemi sposobami mówienia, w samém wypowiedzeniu zagadnienia.

Sposób rozwiązania zagadnienia może być w najogólniejszych wyrazach tak opisany: *Należy oznaczyć ilość niewiadomą głoską x, i wyrazić następnie językiem algiebraicznym związki, jakie zachodzą pomiędzy tąż niewiadomą i ilościami danemi; w ten sposób otrzymamy pewne równanie, z którego można znaleźć ilość niewiadomą.*

183. Summa dwóch liczb jest 85, a ich różnica 27; — znaleść te liczby.

Niech x oznacza mniejszą liczbę, — wtedy, ponieważ różnica pomiędzy temi liczbami jest 27, liczba większa będzie $x+27$; a że summa obu liczb jest 85, przeto będzie:

$$x+x+27=85;$$

czyli: $$2x+27=85;$$

stąd: $$2x=85-27=58;$$

i nakoniec: $$x=\frac{58}{2}=29.$$

I tak więc liczba mniejsza jest 29: większa zaś $29+27$, czyli 56.

184. Podzielić 50 rubli pomiędzy trzy osoby A, B i C tak, aby B miała o 5 rs. więcéj niż A, a C aby otrzymała tyle, ile osoby A i B razem.

Niech x oznacza liczbę rubli, zawartych w dziale osoby A, wtedy $x+5$ oznaczać będzie to, co się dostało osobie B, a $2x+5$ to, co się dostało osobie C. Całkowita liczba rubli jest 50; przeto:

$$x+x+5+2x+5=50;$$

to jest: $$4x+10=50;$$

czyli: $$4x=50-10=40;$$

skąd: $$x=10.$$

Więc osoba A dostała 10 rubli, osoba B — 15 rubli, a osoba C — 25 rubli.

185. Pewną kwotę pieniędzy rozdzielono pomiędzy osoby A, B i C; osoby A i B dostały razem $17\frac{3}{4}$ rub., osoby C i A dostały razem $15\frac{3}{4}$ rs.; osoby zaś B i C dostały razem $12\frac{1}{2}$ rs.

Znaleść ile każda z tych osób dostała?

Niech x oznacza liczbę rubli, jaką otrzymała osoba A; wtedy B otrzymała $17\frac{3}{4}-x$ rubli, gdyż obie

one razem dostały $17\frac{3}{4}$ rubli; podobnież osoba C dostała $15\frac{3}{4}-x$ rubli; gdyż A i C razem otrzymały $15\frac{3}{4}$ rubli. A ponieważ B i C razem otrzymały $12\frac{1}{2}$ rubli, przeto miéć będziemy równanie:

$$12\frac{1}{2}=17\frac{3}{4}-x+15\frac{3}{4}-x\ ;$$

to jest: $$12\frac{1}{2}=33\frac{1}{2}-2x;$$

czyli: $$2x=33\frac{1}{2}-12\frac{1}{2}=21;$$

skąd: $$x=\frac{21}{2}=10\frac{1}{2}.$$

Stąd widzimy, że osoba A dostała $10\frac{1}{2}$ rs., B otrzymała $7\frac{1}{4}$ rs., C zaś $5\frac{1}{4}$.

186. Kupiec ma dwa gatunki herbaty; funt jednego gatunku kosztuje 2 rs., funt drugiego gatunku kosztuje $3\frac{1}{2}$ rs. Ile funtów powinien wziąść każdego gatunku, aby, po zmieszaniu, otrzymać 100 funtów herbaty po $2\frac{1}{2}$ rubli funt?

Niech x oznacza liczbę funtów pierwszego gatunku; — wtedy $100-x$ będzie liczbą funtów drugiego gatunku. Wartość x funtów pierwszego gatunku jest $2x$ rubli; wartość zaś $100-x$ funtów drugiego gatunku jest $\frac{7}{2}(100-x)$ rubli. Lecz całkowita wartość mieszaniny ma być $\frac{5}{2}\times 100$ rubli, przeto:

$$\frac{5}{2}\times 100=2x+\frac{7}{2}(100-x)\ .$$

Znosząc mianownik 2, będzie:

$$.500=4x+700-7x,$$

czyli: $$7x-4x=700-500;$$

to jest: $$3x=200,$$

skąd: $$x=\frac{200}{3}=66\frac{2}{3}\ .$$

Więc pierwszego gatunku powinien wziąć $66\frac{2}{3}$ funt., drugiego zaś $33\frac{1}{3}$ funtów.

187. Linię, długą na 2 stopy i 4 cale, podzielić na takie dwie części, aby jedna stanowiła trzy czwarte drugiéj części.

Niech x oznacza liczbę cali zawartych w części większéj; — wtedy $\frac{3x}{4}$ oznaczać będzie liczbę cali drugiéj części.

Ponieważ cała linia zawiéra 28 cali, przeto otrzymamy równanie:

$$x+\frac{3}{4}x=28;$$

skąd: $$4x+3x=112,$$

czyli: $7x = 112$,

i nakoniec: $x = 16$.

Jedna część miéć więc będzie 16 cali. druga zaś 12 cali.

188. Pewna osoba ma 1000 rs.; wypożyczywszy część tych pieniędzy po 4 od sta na rok, pozostałość zaś po 5 od sta na rok, otrzymała całkowitego procentu rocznego 44 rs.; ileż wypożyczyła na procent po 4%, a ile po 5%?

Niech x oznacza liczbę rubli wypożyczonych po 4 od sta, wtedy $1000-x$ oznaczać będzie liczbę rubli, wypożyczonych po 5 od sta. Procent roczny od pierwszéj summy będzie $\frac{4x}{100}$, od drugiéj zaś:

$\frac{5(1000-x)}{100}$;

przeto: $44 = \frac{4x}{100} + \frac{5(1000-x)}{100}$,

skąd: $4400 = 4x + 5(1000 - x)$;

czyli: $4400 = 4x + 5000 - 5x$;

a następnie: $x = 5000 - 4400 = 600$.

Więc po 4 od sta wypożyczyła 600 rs., pozostałe zaś 400, po 5 od sta.

189. Główna trudność przy rozwiązywaniu zagadnienia polega w przekształceniu warunków zagadnienia, wyrażonych językiem zwyczajnym, na język algiebraiczny;—początkujący nie powinien się zniechęcać, jeżeli nieraz znajdzie się pod tym względem w kłopocie, gdyż tylko przez wprawę i praktykę może nabrać w tém biegłości i pewności. Zrobimy tu jedną uwagę, bardzo ważną dla poczynających: to

co się nazywa *ilością* niewiadomą, jest właściwie *liczbą* niewiadomą; i to powinno być wyraźnie zaznaczone przy układaniu równania.

Tak np. w drugiém zadaniu, które rozwiązywaliśmy, zaczynamy w ten sposób: niech x oznacza *liczbę* rubli zawartych w dziale osoby A;—początkujący często mówi: niech x oznacza *pieniądze* osoby A, lub: to, co dostała osoba A; wyrażenie takie jest nieoznaczone, gdyż pieniądze osoby A mogą być wyrażone w rublach lub kopiejkach, lub téż w ułamku całkowitéj summy. Podobnież w piątém z tych zadań, które rozwiązaliśmy, zaczynamy od wyrażenia: niech x oznacza *liczbę cali* zawartych w części dłuższéj....; tymczasem początkujący często mówi: niech x oznacza dłuższą część, lub: niech $x =$ jednéj części; — tym sposobom wyrażania się można zrobić też same zarzuty, które były wyżéj zaznaczone.

190. Bardzo często początkujący znajdują dla tego trudność w przekształceniu zagadnienia z języka zwyczajnego na język algiebraiczny, że nie mogą zrozumiéć warunków, wyrażonych językiem zwyczajnym. Jeżeli wyrazom, użytym do wypowiedzenia zagadnienia, nie można nadać żadnego logicznego znaczenia, wtedy oczywiście nie można ich przekształcić; lecz często się przytrafia, że wyrazy nie są same przez się niezrozumiałe, ale zdaje się, że mają więcéj niż jedno znaczenie. Wtedy czytelnik powinien wybrać jedno z tych znaczeń, wyrazić je znakami algiebraicznemi, i wynaleźć odpowiedni wypadek. Jeżeli wypadek ten jest niemożliwy, lub niedorzeczny, wtedy należy sprobować innego znaczenia tychże wyrazów. Lecz jeżeli wypadek jest możliwy,

wtedy czytelnik może z tego wnieść, że zrozumiał prawdopodobnie wyrazy należycie; w każdym razie interesującą jest rzeczą sprobować jeszcze innych znaczeń wyrazów, w celu przekonania się, czy sposób, w jaki zadanie wyrażono, rzeczywiście pozwala na więcéj niż jedno rozwiązanie.

191. Czytelnik przy rozwiązywaniu zagadnień, podanych niżéj dla ćwiczenia, znajdzie bezwątpienia znaczną liczbę takich, które można łatwo rozwiązać za pomocą arytmetyki, lub téż przez proste odgadnięcie i następną próbę. To może go doprowadzić do lekceważenia siły i znaczenia algiebry; — a nawet do takiego sądu, że pomoc jéj jest zbyteczną i niepotrzebną. Lecz musimy tu na to odpowiedzieć, że za pomocą algiebry czytelnik będzie w możności rozwiązania *wszystkich* tych zagadnień, bez żadnego wahania się lub niepewności; a nadto przekona się w dalszym ciągu, że za pomocą algiebry będzie w stanie rozwiązywać takie zadania, które byłyby niezmiernie trudne, lub zupełnie niemożliwe do rozwiązania, gdyby uciekał się do pomocy tylko saméj arytmetyki.

PRZYKŁADY XXI.

1. Znaleść liczbę, która byłaby większą od swojéj piątéj części o 24?

2. Ojciec ma dziś 30 lat, a syn 2 lata; po ilu latach ojciec będzie 8 razy starszy od syna?

3. Różnica dwóch liczb równa się 7, a ich summa równa się 33; znaleźć te liczby.

4. Trzy osoby *A*, *B* i *C* złożyły razem 155 rs., osoba *B* dała o 15 rs. więcéj niż osoba *A*, osoba zaś *C* dała o 20 rs. więcéj, niż osoba *B*; ileż każda z tych osób dała?

5. Różnica dwóch liczb jest 14, a ich summa 48; znaleść te liczby.

6. Osoba *A* jest dzisiaj dwa razy starszą niż osoba *B*; przed siedmioma zaś laty, wiek osoby *A* dodany do wieku osoby *B*, stanowił summę, równą liczbie lat, jaką ma dzisiaj osoba *A*. Znaleźć dzisiejszy wiek każdéj z tych dwóch osób.

7. Jeżeli dodamy 56 do pewnéj liczby, wtedy otrzymamy summę trzy razy większą od téjże liczby. Znaleść tę liczbę.

8. Dziecko urodziło się w Listopadzie, i 10 Grudnia miało tyle dni wieku, ile dni Listopada przeszło od początku tegoż miesiąca, do dnia jego urodzenia. Któregoż dnia Listopada urodziło się?

9. Jeżeli do podwojonéj pewnéj liczby dodamy 24, to otrzymamy summę, która o tyle będzie większą od 80, o ile sama ta liczba jest mniejszą od 100. Znaleść tę liczbę?

10. Pewna ryba ma głowę długą na 9 cali, jéj ogon jest tak długi, jak głowa i połowa tułowia, tułów zaś tak długi, jak głowa i ogon razem wzięte. Jakaż jest długość tułowia i ogona?

11. Liczbę 84 podzielić na takie dwie części, ażeby potrojona jedna część, równała się drugiéj części, wziętéj 4 razy.

12. Trzy osoby *A*, *B* i *C* złożyły razem 76 rs.; osoba *B* dała o 10 rs. więcéj niż osobą A; osoba

zaś C tyle, ile osoby A i B razem. Ileż dała każda z tych osób?

13. Liczbę 60 podzielić na takie dwie części, aby siódma część jednéj, równała się ósméj części, drugiéj.

14. Z dwóch równych beczek piwa wytoczono: z pierwszéj 34 garnce a z drugiéj 80 garncy. Wtedy w pierwszej pozostało trzy razy tyle piwa, ile w drugiéj. Ileż każda z tych beczek zawiérała piwa, gdy była pełną?

15. Liczbę 75 podzielić na takie dwie części aby większa, wzięta trzy razy, przewyższała mniejszą, wziętą siedm razy, o 15?

16. Pewna osoba rozdała w dzień zaduszny 20 ubogim 2 rs. 40 kop.; przyczém pewnéj liczbie ubogich dała po 6 kopiejek, a pozostałym po 16 kopiejek. Iluż ubogim dała po 6, a ilu po 16 kopiejek?

17. Liczbę 20 podzielić na takie dwie części, aby summa otrzymana z dodania potrojonéj pierwszéj części, do pięć razy wziętéj drugiéj części, wynosiła 84.

18. Paka, zawierająca pewną liczbę jednakowych sztuk płótna, jest wartą $56\frac{2}{3}$ rs.; gdyby każda sztuka była o $1\frac{1}{12}$ rs. droższą, wtedy cała paka kosztowała by $67\frac{1}{2}$ rs. Ileż było w niéj sztuk płótna?

19. Liczbę 45 podzielić na takie dwie części, aby pierwsza, podzielona przez 2, była równą drugiéj, pomnożonéj przez 2.

20. Ojciec jest dziś trzy razy starszy od syna: przed czterema zaś laty, ojciec był cztery razy starszy od swego syna. Ileż lat ma dzisiaj ojciec, a ile syn?

21. Liczbę 188 podzielić na takie dwie części, ażeby czwarta część jednéj przewyższała ósmą część drugiéj, o 14?

22. Pewna osoba, wychodząc z kościoła, dała wszystkim żebrakom, ktorzy stali u drzwi, po 4 kop., poczém pozostało jéj 16 kopiejek. Gdyby miała w kieszeni jeszcze nadto 12 kopiejek, wtedy mogłaby każdemu żebrakowi dać po 6 kopiejek. Iluż żebraków stało pod kościołem?

23. Liczbę 100 podzielić na takie dwie części, aby po odjęciu trzeciéj części jednéj, od czwartéj części drugiéj, na resztę pozostało 11.

24. Dwie osoby A i B, grające z sobą, miały przy rozpoczęciu gry: A — 72 rs.; B zaś—52 rs. Po przegraniu pewnéj liczby partyj, okazało się, że osoba A ma trzy razy więcéj pieniędzy, aniżeli osoba B. Ileż wygrała osoba A?

25. Liczbę 60 rozdzielić na takie dwie części, aby różnica pomiędzy większą i 64, była równą dwa razy wziętéj różnicy pomiędzy mniejszą i 38.

26. Summę 276 rs. złożyły trzy osoby A, B i C. Osoba B złożyła dwa razy tyle co A i 12 rs.; osoba C trzy razy tyle co B i jeszcze 12 rs. Ileż złożyła każda osoba?

27. Znaleść taką liczbę, ażeby jéj piąta część, więcéj siódma część, przewyższała summę jéj ósméj i dwunastéj części, o 113.

28. Armia przegrała bitwę, i wskutek tego utraciła jedną szóstą część swoich żołnierzy w zabitych i rannych, i 4000 wziętych do niewoli. Została następnie wzmocnioną o 3000 ludzi; — lecz będąc zmuszoną do cofania się, znowuż przy tém straciła jedną czwartą część swego nowego składu. Po czém okazało się, że pozostało w niéj 18000 ludzi. Iluż żołnierzy było z początku?

29. Znaleść taką liczbę, aby summa jéj piątéj i jéj siódméj części przewyższała różnicę jéj czwartéj i siódméj części o 99.

30. Pewna partya robotników otrzymała zapłaty 5 rs. 28 kop.; połowa całkowitéj liczby robotników dostała po 18 kop., jedna trzecia część téjże całkowitéj liczby robotników dostała po 24 kop.; reszta zaś po 30 kop. Iluż było wszystkich robotników?

31. Pewna osoba miała 900 rs.: część téj summy wypożyczyła na procent po 4%, pozostałość zaś wypożyczyła po 5%. Po upływie roku otrzymała od obu części równe procenty. Ileż wypożyczyła po 4%, a ile po 5%?

32. Ojciec ma sześciu synów: każdy z nich jest o 4 lata starszy aniżeli następujący po nim brat młodszy, najstarszy ma trzy razy więcéj lat aniżeli najmłodszy. Ileż każdy z nich ma lat?

33. Liczbę 92 podzielić na cztery części takie, aby pierwsza przewyższała drugą o 10, trzecią o 18 i czwartą o 24.

34. Gospodarz umierając, pozostawił 550 rubli do rozdzielenia pomiędzy czterema służącymi A, B, C i D w ten sposób, aby B dostał dwa razy tyle co

A, — C tyle, co B i A razem, — a zaś D tyle, ile C i B razem. Ileż każdy z nich dostał?

35. Znaleźć dwie po sobie następujące liczby całkowite, takie: aby połówa pierwszéj liczby dodana do piątéj części téj pierwszéj liczby, dała summę równą summie trzeciéj i czwartéj części drugiéj liczby?

36. Pewna summa pieniędzy ma być rozdzieloną pomiędzy trzy osoby A, B i C w ten sposób, że osoby A i B razem mają dostać 60 rs., osoby B i C razem 80 rs., a osoby B i C razem 92 rs. Ileż dostanie każda osoba?

37. Dwie osoby A i B wybrały się razem w podróż: pierwsza z nich wzięła na drogę 100 rs., druga zaś 48 rs. W drodze zostały napadnięte przez rabusiów, którzy zabrali osobie A dwa razy tyle, co osobie B, poczém osobie A pozostało trzy razy tyle, ile pozostało osobie B. Ileż zabrano każdéj?

38. Summa 500 rs. była rozdzieloną pomiędzy cztery osoby w ten sposób, że pierwsza i druga osoba dostały razem 280 rs., pierwsza i trzecia dostały razem 260 rs., a pierwsza i czwarta razem 220 Ileż dostała każda?

39. Osoby A i B mają razem 40 rs.; gdy B odda osobie A, 10 rs., wtedy osoba A miéć będzie o 6 rs. więcéj, aniżeli wówczas pozostanie osobie B. Znaleźć ile każda z tych osób miała z początku?

40. Kupiec ma dwa gatunki wina kaukazkiego: jeden gatunek po 48 kop. kwarta; drugi — po 80 kop. kwarta; z tych dwóch gatunków chce zrobić sto kwart

mieszaniny, po 56 kop. kwarta. Po ileż kwart ma wziąć każdego gatunku?

41. W mieszaninie wina i wody było wina 25 garncy więcéj, aniżeli wynosiła połowa całéj mieszaniny, — wody zaś było o 5 garncy mniéj, aniżeli trzecia część całéj mieszaniny. Ileż w téj mieszaninie było garncy wody, a ile wina?

42. W loteryi, złożonéj z 10000 biletów, połowa liczby biletów wygrywających dodana do jednéj trzeciéj części biletów niewygrywających, wynosi 3500; ileż jest biletów wygrywających w téj loteryi?

43. W pewnéj ilości prochu strzelniczego, saletry jest o 6 funtów więcéj, aniżeli wynosi połowa całéj ilości prochu, siarki o 5 funtów mniéj, aniżeli trzecia część, a węgla o 3 funty mniéj, aniżeli czwarta część całéj ilości prochu. Ileż funtów każdego z tych ciał znajduje się w tym prochu?

44. Dowodzący armią, po przegranéj bitwie przekonał się, że pozostało mu zdatnych do boju o 3600 ludzi więcéj, aniżeli było w połowie całéj armii; rannych było o 600 więcéj, aniżeli ósma część całéj armii, pozostałość zaś, stanowiąca piątą część armii, była zabitych, wziętych do niewoli lub zbiegłych. Iluż ludzi było w całéj armii?

45. Pewna summa pieniędzy została rozdzieloną pomiędzy pięć osób A, B, C, D i E; osoba B otrzymała o 10 rs. mniej, aniżeli A; C otrzymała 16 rs. więcéj aniżeli B; D otrzymała 5 rs. mniéj niż C, i osoba E otrzymała 15 rs. więcéj, aniżeli D. Po rozdziale okazało się, że osoba E otrzymała tyle, ile osoby A i B razem. Ileż otrzymała każda z osób?

46. Pewien człowiek wchodzi do traktyerni mając pewną liczbę kopiejek, a pożyczywszy tam tyle, ile miał, wydaje 24 kop. Z tém, co mu pozostało, idzie do drugiéj traktyerni, i dopożyczywszy tam znowuż tyle, ile miał wchodząc, wydaje nowe 24 kop. Nakoniec wstąpił jeszcze do trzeciéj traktyerni z tém co mu pozostało, i dopożyczywszy i wydawszy tak, jak w poprzedniéj pozostał z niczém w kieszeni. Ileż miał wchodząc do pierwszéj traktyerni?

XXII.

Zagadnienia (ciąg dalszy).

192. Podamy teraz kilka przykładów, w których przekształcenie z języka zwyczajnego na algiebraiczny jest cokolwiek trudniejsze, aniżeli w przykładach rozdziału poprzedniego.

193. Liczbę 80 podzielić na takie cztery części, aby pierwsza powiększona o 3, druga zmniejszona o 3, trzecia pomnożona przez 3, a czwarta podzielona przez 3, dały na wypadki ilości równe?

Niech x oznacza pierwszą część; wtedy, jeżeli ją powiększymy o 3, otrzymamy $x+3$, i to ma być równe drugiéj części, zmniejszonéj o 3; więc część druga musi być równą $x+6$. Daléj: część pierwsza powiększona o 3, czyli $x+3$, ma być równe części trzeciéj, pomnożonéj przez 3; przeto ta część trzecia musi być $\frac{x+3}{3}$. I nakoniec, ponieważ $x+3$ ma być równe części czwartéj, podzielonéj przez 3, przeto część

czwarta będzie $3(x+3)$. Summa tych wszystkich części ma być równą 80; zatém:

$$x+x+6+\frac{x+3}{3}+3(x+3)=80,$$

czyli: $$2x+6+\frac{x+3}{3}+3x+9=80,$$

to jest: $$5x+\frac{x+3}{3}=80-15=65.$$

Mnożąc przez 3:

$$15x+x+3=195,$$

czyli: $$16x=192;$$

skąd: $$x=\frac{192}{16}=12.$$

Przeto szukane części są:

12, 18, 5, 45.

194. Robotnik A może wykonać pewną robotę w 9 dniach pracując sam, robotnik zaś B mógłby ją wykonać w 12 dniach: w jakim przeciągu czasu mogliby wykonać tęż samą robotę, pracując razem?

Niech x oznacza szukaną liczbę dni. W jednym dniu A wykonywa $\frac{1}{9}$ tą część roboty, przeto w x dniach może wykonać $\frac{x}{9}$ części roboty. W jednym dniu B wykonywa $\frac{1}{12}$ część roboty, przeto w x dniach może wykonać $\frac{x}{12}$ części téjże roboty. A ponieważ w x dniach A i B razem wykonywają *całą* robotę, przeto summa tych *ułamków* roboty, musi być równą *jedności*; to jest:

$$\frac{x}{9}+\frac{x}{12}=1.$$

Mnożąc przez 36;

$$4x+3x=36,$$

czyli: $$7x=36.$$

skąd: $$x=\frac{36}{7}=5\frac{1}{7}.$$

195. Zbiornik wody może być napełniony wodą, wpływającą jedną tylko rurą, w ciągu 6 godzin; za pomocą zaś drugiéj rury może być napełniony w 8 godzinach, Lecz tenże sam wodozbiór, gdy jest pełny, a obie rury są zamknięte, może być wypróżniony przez klapę, umieszczoną w dnie, w ciągu 12 godzin. W iluż godzinach wodozbiór napełni się, gdy obie rury i klapa są otwarte jednocześnie?

Niech x oznacza szukaną liczbę godzin. W ciągu jednéj godziny przez pierwszą rurę napełni się $\frac{1}{6}$ część wodozbioru, więc w x godzinach zostanie napełnionych $\frac{x}{6}$ części zbiornika. Przez drugą rurę w jednéj godzinie napełnia się $\frac{1}{8}$ część zbiornika, więc w x godzin: $\frac{x}{8}$-mych części tegoż zbiornika. W ciągu jednej godziny przez klapę wypływa $\frac{1}{12}$ część zbiornika, przeto w x godzinach wypływa $\frac{x}{12}$ części tegoż wodozbioru. A że w x godzinach *cały* zbiornik będzie napełniony, przeto miéć będziemy:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{8}-\frac{x}{12}=1.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez 24, otrzymamy:

$$4x+3x-2x=24,$$

czyli: $$5x=24;$$

skąd: $$x=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}.$$

196. Niekiedy pożyteczną jest rzeczą oznaczyć przez x nie samą ilość niewiadomą, któréj bezpośrednio szukamy, ale inną ilość, z któréj wszakże ilość szukana łatwo daje się oznaczyć.

Przykład tego przedstawiają nam dwa następne zadania:

197. Dowódca pułku chce ustawić swoich ludzi w kwadrat pełny; lecz pokazuje się, że po ustawieniu ich w ten sposób, pozostaje mu jeszcze 31 żołnierzy zbywających; aby zaś ustawić ich tak, ażeby bok kwadratu zawierał o jednego człowieka więcéj, potrzebaby pułk powiększyć o 24 ludzi. Iluż ludzi jest w pułku?

Niech x oznacza liczbę żołnierzy w boku pierwszego kwadratu; wtedy liczba ludzi w całym kwadracie będzie x^2, a liczba ludzi w pułku będzie x^2+31. Gdyby w każdym boku kwadratu było $x+1$ ludzi, wtedy liczba żołnierzy w całym kwadracie byłaby $(x+1)^2$; przeto liczba ludzi w pułku może być i tak wyrażoną: $(x+1)^2-24$.

Więc:

$$(x+1)^2-24=x^2+31,$$

skąd: $$x^2+2x+1-24=x^2+31.$$

Od obu stron równania odejmijmy po x^2, będzie:

$$2x+1-24=31,$$

czyli: $$2x=31+24-1=54$$

skąd: $$x=\frac{54}{2}=27.$$

Przeto liczba żołnierzy w pułku jest $(27)^2+31$, czyli $729+31$, to jest 760.

198. Osoba A wyjeżdza z pewnego miasta, i jedzie z taką prędkością, że co 5 godzin ujeżdża 7 mil. W ośm godzin późniéj, z tego samego miasta, wyjeżdża osoba B w tym samym kierunku, i jedzie tak prędko, że co 3 godziny ujeżdża 5 mil. W jakiéj odległości od miasta osoba B dogoni osobę A?

Oznaczmy przez x liczbę godzin, przez którą osoba A jedzie, zanim zostanie dognaną przez B; wtedy $x-8$ będzie liczbą godzin, przez którą jedzie osoba B; aż do chwili spotkania. Ponieważ A przejeżdża 7 mil w ciągu 5 godzin. przeto jedzie ona $\frac{7}{5}$ mili na godzinę, a w ciągu x godzin przejedzie $\frac{7x}{5}$. Podobnież: B przejeżdża $\frac{5}{3}$ mili na godzinę, więc w ciągu $x-8$ godzin przejedzie $\frac{5}{3}(x-8)$ mil. Gdy zaś B dogoni A, wtedy jeden i drugi przejedzie jednakową liczbę mil Przeto:

$$\frac{5}{3}(x-8)=\frac{7x}{5};$$

mnożąc przez 15, będzie:

$$25(x-8)=21x,$$

czyli: $$25x-200=21x;$$

skąd: $$25x-24x=200,$$

czyli: $4x = 200,$

i nakoniec: $x = \frac{200}{4} = 50.$

A że $\frac{7x}{5} = \frac{7}{5} \times 50 = 70$, przeto B dogonił A na odległości 70 mil od miejsca wyjazdu.

199. Niekiedy zadania są téj natury, że wymagają znajomości nauki o *proporcyi*, tak jest ona wykładaną w Arytmetyce; dwa następne przykłady są właśnie tego rodzaju. Po przerobieniu ich, zakończymy rozdział zadaniami cokolwiek trudniejszémi, aniżeli te, które były rozwiązane dotąd.

200. Liczbę 56 podzielić na takie dwie części, ażeby stosunek pierwszéj do drugiéj był równy stosunkowi 3 do 4.

Niech x oznacza pierwszą część, wtedy druga będzie $56-x$; a ponieważ x ma być w takim stosunku do $56-x$ w jakim jest 3 do 4, przeto będzie:

$$\frac{x}{56-x} = \frac{3}{4}.$$

Znosząc mianowniki, otrzymamy:

$$4x = 3(56-x),$$

czyli: $4x = 168-3x;$

skąd: $7x = 168,$

a następnie: $x = \frac{168}{7} = 24.$

Pierwsza część jest więc 24, a druga $56 - 24$, czyli 32.

Powyższy sposób rozwiązania jest najbardziéj naturalny; następujący jednak jest o wiele krótszy:

Oznaczmy część pierwszą przez $3x$; wtedy część druga będzie $4x$, gdyż pierwsza tak się ma do drugiéj, jak 3 do 4. Summa tych dwóch części jest równą 56, przeto:

$$3x+4x = 56,$$

czyli: $7x = 56;$

skąd: $x = \frac{56}{7} = 8.$

Zatém część pierwsza jest 3×8, czyli 24, druga zaś 4×8, czyli 32.

201. Jedna beczka, A, zawiéra 12 garncy wina i 18 garncy wody; druga beczka, B, zawiéra 9 garncy wina i 3 garnce wody; ileż należy wziąć garncy z każdéj beczki, ażeby utworzyć mieszaninę, złożoną z 7 garncy wina i 7 garncy wody?

Niech x oznacza liczbę garncy, jaką należy wziąć z A; wtedy, ponieważ mieszanina ma zawiérać 14 garncy, przeto $14-x$ oznaczać będzie liczbę garncy, jaką należy wziąć z B. Liczba wszystkich garncy, zawartych w A, jest 30; — z nich 12 jest winem; przeto wino w téj beczce stanowi $\frac{12}{30}$ całości. A zatem w x garncach, zaczerpniętych z A, znajdować się będzie $\frac{12x}{20}$ garncy wina. Podobnież w $14-x$ garncach, zaczerpniętych z B, znajduje się czystego wina $\frac{9(14-x)}{12}$ garncy. Lecz mieszanina ma zawierać 7 garncy wina; przeto:

$$\frac{12x}{30} + \frac{9(14-x)}{12} = 7,$$

czyli: $\frac{2x}{9}+\frac{3(14-x)}{4}=7$;

skąd: $8x+15(14-x)=140$;

i daléj: $8x+210-15x=140$;

następnie: $7x=70$,

i nakoniec, $x=10$

Przeto z A należy wziąć 10 garncy, a z B, — 4 garnce.

202. O jakim czasie, między godziną 2-gą i 3-ią, jedna skazówka zegarka dokładnie przykrywa drugą?

Niech x oznacza szukaną liczbę minut po 2-giej. W przeciągu x minut długa skazówka przesunie się przez x podziałek cyferblatu; a że długa skazówka porusza się 12 razy prędzéj niż krótka, przeto krótka przesunie się w tymże samym czasie o $\frac{x}{12}$ podziałek. O godzinie drugiéj, krótka skazówka jest o 10 podziałek przed długą; — ta ostatnia więc, w ciągu x minut, musi przejść o 10 podziałek więcéj aniżeli krótka; mieć będziemy przeto równanie:

$$x=\frac{x}{12}+10;$$

czyli: $12x=x+120,$

stąd: $11x=120$

i nakoniec $x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}$.

203. Zając robi cztery skoki w tym czasie, w którym chart robi ich trzy; lecz dwa skoki charta stanowią taką długość, jak trzy skoki zająca. Zając ten był oddalony na 50 swoich skoków od charta

w chwili, gdy ten ostatni zaczął go ścigać; ileż skoków zrobi chart zanim dogoni zająca?

Przypuśćmy, że $3x$ oznacza liczbę skoków charcich; wtedy $4x$ oznaczać będzie liczbę skoków, zrobionych przez zająca w tym samym czasie. Niech a oznacza w calach długość skoku zająca, wtedy $3a$ oznaczać będzie liczbę cali zawartą w trzech skokach zająca; — a zatém także i liczbę cali w dwóch skokach charta. Długość skoku charta w calach będzie więc $\frac{3a}{2}$. Daléj: liczba cali, zawartych w $3x$ skokach charta będzie: $3x\times\frac{3a}{2}$; liczba zaś cali, zawartych w $50+4x$ skokach zająca będzie $(50+4x)a$. Stąd otrzymujemy równanie:

$$\frac{9ax}{2}=(50+4x)a.$$

Dzieląc obie strony przez a, będzie:

$$\frac{9x}{2}=50+4x,$$

skąd: $9x=100+8x$,

i nakoniec: $x=100$.

Chart przeto musi zrobić 300 skoków.

Zwracamy tu uwagę czytelnika na to, żeśmy wprowadzili do zadania pomocniczy znak a, aby łatwiéj ułożyć równanie; znak ten znikł następnie przez dzielenie z równania.

204. Czterech graczy A, B, C i D zasiadło do gry, każdy z inną summą pieniędzy. Po skończonéj grze A wygrał połowę tego, co B miał z początku, zasiadając do gry; B wygrał trzecią część tego, co miał C; C wygrał czwartą część tego, co miał D, a D

wygrał piątą część tego, co miał A; poczém okazało się, że każdy z nich ma 23 ruble. Ileż każdy z nich miał, siadając do gry?

Niech x oznacza liczbę rubli, którą D wygrał od A, wtedy A miał z początku $5x$; a po przegraniu do D piątéj części pozostało mu $4x$. Ta ostatnia ilość, wraz z tém, co A wygrał od B stanowi 23; przeto $23-4x$ oznaczaś będzie liczbę rubli, którą A wygrał od B. A że A wygrał połowę tego, co miał B, więc $23-4x$ oznaczać także będzie to, co zostało B po przegraniu partyi.

I daléj: $23-4x$ razem z tém, co B wygrał od C, stanowi 23; przeto $4x$ oznacza liczbę rubli, jaką B wygrał od C. A ponieważ B wygrał trzecią część tego, co miał C, zatém C miał z początku $12x$, a po przegraniu $8x$.

Daléj jeszcze: $8x$ razem z tém, co C wygrał od D, powinno stanowić 23; przeto $23-8x$ oznacza liczbę rubli, jaką C wygrał od D. A że C wygrał czwartą część tego, co miał D, więc $4(23-8x)$ oznaczać będzie summę, jaką miał D z początku, a $3(23-8x)$, to, co mu po przegraniu do C pozostało.

Ostatecznie więc $3(23-8x)$ razem z x, to jest liczbą rubli, jaką D wygrał od A, stanowić będzie 23 rubli; otrzymany przeto równanie:

$$23 = 3(23-8x)+x,$$

skąd:

$$23x = 46,$$

$$x = 2.$$

Więc gracze z początku mieli 10, 30, 24 i 28 rubli.

204. Ojciec, umierając, pozostawia pewną liczbę dzieci i majątek, który testamentem poleca rozdzielić pomiędzy nie, w następujący sposób:

Najstarsze dostaje 100 rs. i dziesiątą część tego, co pozostanie, po wzięciu tych stu rubli;

Drugie dostaje 200 rubli i znowuż dziesiątą część tego, co pozostanie;

Trzecie dostaje 300 rubli i dziesiątą część tego, co pozostanie;

Czwarte podobnież dostaje 400 rubli i dziesiątą część tego, co pozostanie;

I tak daléj.

Po wykonaniu woli zmarłego, pokazało się, że cały majątek został równo podzielony pomiędzy wszystkie dzieci.

Ileż było dzieci i ile rubli wynosił majątek?

To zagadnienie jest całkiem szczególnéj natury, i przez to samo zasługuje na staranny rozbiór. Aby je łatwiej rozwiązać, przypuśćmy, że cały majątek wynosił z rubli; a ponieważ wszystkie dzieci otrzymują jednakową summę, oznaczmy dział każdego dziecka przez x. Tym sposobem liczba dzieci będzie $\frac{z}{x}$. Wprowadziwszy te oznaczenia, ułożymy następującą tablicę, w celu rozwiązania zadania:

Summa do podziału	Dziecko	Dział każdego dziecka	Różnice
z	1-sze	$x=100+\frac{z-100}{10}$	
$z-x$	2-gie	$x=200+\frac{z-x-200}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-2x$	3-cie	$x=300+\frac{z-2x-300}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-3x$	4-te	$x=400+\frac{z-3x-400}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$
$z-4x$	5-te	$x=500+\frac{z-4x-500}{10}$	$100-\frac{x+100}{10}=0$

i tak daléj.

W ostatniéj kolumnie pomieściliśmy różnice, otrzymane przez odjęcie każdego działu od następującego. Ponieważ wszystkie działy są równe, przeto różnice powinny być równe 0. A ponieważ nadto, szczęśliwym trafem, jedno i toż samo wyrażenie przedstawia wszystkie te różnice, więc dostateczną będzie rzeczą do oznaczenia x, przyrównać którąkolwiek z tychże różnic do zera. Tym sposobem otrzymamy równanie:

$$100-\frac{x+100}{10}=0;$$

mnożąc obie strony przez 10, znajdziemy:

$$1000-x-100=0;$$

czyli: $900-x=0,$

skąd: $x=900.$

Dział więc każdego dziecka wynosił 900 rubli.

Podstawiając tę wartość znalezioną na x w którekolwiek z równań trzeciéj kolumny, naprzykład w pierwsze, otrzymamy:

$$900=100+\frac{z-100}{10},$$

skąd odrazu znajdziemy wartość na z, gdyż:

$$9000=1000+z-100$$

czyli; $9000-1000+100=z$

albo: $z=8100.$

Nakoniec liczba dzieci otrzyma się z wyrażenia $\frac{z}{x}$; liczba ta będzie więc równą 9.

Znaleźliśmy zatém odpowiedź zupełną na zadane pytanie taką: dzieci było 9, majątek pozostawiony był 8100 rs., a dział każdego z dzieci wynosił 900 rs.

PRZYKŁADY XXII.

1. Statek korsarski, płynący z prędkością 10 wiorst na godzinę, spostrzega okręt w oddaleniu 18 wiorst, i płynący z prędkością 8 wiorst na godzinę. Ileż wiorst okręt przepłynie, zanim zostanie dognany przez korsarza?

2. Liczbę 50 rozdzielić na takie dwie części, aby summa trzech czwartych jednéj części i pięciu szóstych drugiéj części stanowiła 40?

3. Z dwóch miast A i B, odległych na 360 wiorst, wyjeżdżają w jednym i tym samym czasie dwa podróżni naprzeciwko siebie; pierwszy przejeżdza po 10 wiorst na godzinę a drugi po 8 wiorst na godzinę. W którém miejscu drogi spotkają się?

4. Znaleść dwie liczby, których różnica wynosi 4, a różnica kwadratów tych liczb wynosi 112.

5. 24 osoby złożyły summę 24 rubli; niektóre z tych osób składały po $\frac{3}{4}$ rs., pozostałe zaś po $1\frac{1}{8}$ rs. Ileż było osób, które dały po $\frac{3}{4}$, a ile, które dały po $1\frac{1}{8}$ rs.?

6. Liczbę 48 podzielić na takie dwie części, aby przewyżka pierwszéj części nad 20, była trzy razy większą od przewyżki 20 nad drugą częścią?

7. Pewna osoba ma 98 rs.; część tych pieniędzy pożycza po 5% na rok, a pozostałość po 6% na rok w jednym i drugim razie procent prosty. Od obu summ procent w ciągu lat 15 wynosił razem rs. 81. Ileż było pożyczone po 5%?

8. Pożyczył ktoś pewną summę pieniędzy po 6% na procent prosty; po upływie 10 lat procent wynosił o 12 rs. mniéj, aniżeli wypożyczona summa. Jakaż była summa wypożyczona?

9. Właściciel ziemski wydzierżawił 25 morgów gruntu za 77 rs.; ponieważ grunt był dwojaki, przeto za lepszy gatunek gruntu umówił się brać po 4 rs. od morgi, a za gorszy po $2\frac{1}{2}$ rs. od morgi. Ileż było morgów każdego gatunku?

10. Wodozbiór może być napełniony w 12 minutach wodą, wpływającą przez 2 rury; jedną rurą woda wpływającą, może go napełnić w 20 minut; — w iluż minutach może on być napełniony przez samą drugą rurę?

11. Liczbę 90 podzielić na takie cztery części, aby pierwsza powiększona o 2, druga zmniejszona o 2, trzecia pomnożona przez 2, a czwarta podzielona przez 2, dały wypadki równe?

12. Kupił ktoś 30 funtów kawy dwóch gatunków i zapłacił za wszystko 19 rs.; kawa lepszego gatunku była po $\frac{5}{6}$ rs. za funt, a kawa gorszego gatunku była po $\frac{7}{12}$ rs. za funt. Ileż funtów każdego gatunku kupił?

13. Liczbę 88 rozdzielić na takie cztery części, aby pierwsza — powiększona o 2, druga — zmniejszona o 3, trzecia — pomnożona przez 4, i czwarta — podzielona przez 5, dały wypadki równe.

14. 20 mężczyznom, 40 kobietom i 50 dzieciom zapłacono na fabryce tygodniowego zarobku 300 rs. Jeżeli 2 mężczyzn tyle dostało, ile 3 kobiety lub 5 dzieci, ileż dostała każda kobieta za tygodniową pracę?

15. Liczbę 100 podzielić na takie dwie części, aby różnica kwadratów tychże części wynosiła 1000?

16. Z dwóch miast, znajdujących się w odległości 154 wiorst, wychodzą dwie osoby w jednym i tym samym czasie, i idą naprzeciwko siebie. Pierwsza przechodzi 9 wiorst w 2 godziny; druga zaś 15 wiorst w 4 godz.; kiedy one się spotkają?

17. Liczbę 44 podzielić na takie dwie części, aby większa, powiększona o 5, była w takim stosunku do mniejszéj, powiększonéj o 7, w jakim jest 4 do 3.

18. Robotnik A może zrobić w tym samym czasie połowę tego, co robotnik B, a robotnik B, również w tym samym czasie, może zrobić połowę tego, co robotnik C. Razem wszyscy trzej mogą wykonać pewną robotę w 24 dniach. W iluż dniach mógłby wykonać tęż samą robotę każdy z nich pojedynczo?

19. Liczbę 90 podzielić na takie cztery części, że jeżeli pierwszą powiększymy o 5, drugą zmniejszymy o 4, trzecią pomnożymy przez 3, a czwartą podzielimy przez 2, to otrzymamy wypadki równe.

20. Trzy osoby wykonały pewną robotę w 60 dniach, przy czém okazało się, że pierwsza robiła w tym samym czasie trzy czwarte tego, co druga, a druga — cztery piąte tego co trzecia; w jakimże czasie mogła by każda z nich wykonać tęż samą robotę, pracując pojedynczo?

21. Liczbę 36 podzielić na takie dwie części, aby jedna z nich stanowiła pięć siódmych drugiej części?

22. Dowódca pułku, probując ustawić swój oddział w pełny kwadrat, przekonał się, że ma zbywających 60-ciu ludzi, a brakuje mu jeszcze 41 ludzi, aby mógł powiększyć bok kwadratu o jednego żołnierza. Iluż ma żołnierzy w pułku?

23. Liczbę 90 podzielić na takie dwie części, aby jedna z nich stanowiła dwie trzecie drugiéj?

24. Kupił ktoś pewną liczbę jajek; połowę tych jajek kupował po 2 jajka za dziesiątkę, a drugą połowę po 3 jajka za dziesiątkę; sprzedał je następnie w ten sposób, że dawał po 5 jajek za dwie dziesiątki i stracił na tym handlu jedną dziesiątkę. Ileż jajek kupił?

25. Osoby A i B są dzisiaj w jednym wieku. Lecz jeżeli wiek osoby A powiększy się o 36 lat, a wiek osoby B o 52 lata, wtedy lata ich wieku będą do siebie w stosunku 3 do 4. W jakim wieku są one dzisiaj?

26. Summę 2000 rs. rodzielono pomiędzy dwie osoby tak, że części otrzymane przez też osoby tak się miały do siebie, jak 7 do 9; ileż otrzymała każda z tych osób?

27. Robotnik był najęty na 40 dni po $1\frac{2}{3}$ rs. na dzień, ale z tym warunkiem, że za każdy dzień, przez który robić nie będzie, nie tylko nie dostanie zapłaty, ale jeszcze sam zapłaci kary $\frac{2}{3}$ rs. Po upływie 40-tu dni otrzymał ostatecznie zapłaty $31\frac{2}{3}$ rs. Ileż z tych 40-tu dni rzeczywiście pracował?

28. Dwie osoby A i B grają z sobą. Pierwszą partyą wygrała osoba A; i wygrawszy od B 5 rs. miała tyle rubli ile B; drugą partyą wygrała B, i wygrawszy poprzednio przegrane pieniądze i jeszcze 5 rs., miała pięć razy tyle co osoba A. Ileż pieniędzy miała każda z tych osób z początku?

29. Liczbę 100 podzielić na takie dwie części, aby kwadrat ich różnicy przewyższał kwadrat podwojonéj mniejszéj części o 2000?

30. Do wodozbioru prowadzą dwie rury; pierwszą z nich wodozbiór może być napełniony w $4\frac{1}{2}$ godzinach, drugą — w 6-ciu godzinach; u spodu wodozbioru znajduje się klapa, która może go wypróżnić w 5-ciu godzinach. W iluż godzinach będzie napełniony wodozbiór, jeżeli otworzymy obie rury i klapę?

31. Ziemianin ma pszenicę dwóch gatunków po 5 rs. 40 kop. i po 6 rs. 12 kop. korzec. Z tych dwóch gatunków robi 90 korcy mieszaniny w ten sposób, że sprzedawszy ją po 5 rs. 80 kop. korzec, nie ma ani zysku ani straty. Ileż korcy wziął każdego gatunku, dla utworzenia mieszaniny?

32. Kupiec chce zmieszać 56 funtów herbaty na 5 rubli funt, z gorszym gatunkiem po $3\frac{1}{2}$ rs. funt, w ten sposób, aby otrzymaną mieszaninę mógł sprzedawać bez straty i zysku po $4\frac{1}{2}$ rs. funt. Ileż herbaty drugiego gatunku ma wziąć?

33. Najął ktoś robotnika do wykonania pewnéj roboty na takich warunkach: za każdy dzień rzeczywistej pracy robotnik otrzymywać będzie 2 rs., lecz za każdy dzień, w którym nie stawi się do roboty, zapłaci kary 75 kop. Po skończonéj robocie pokazało się, że liczba dni, w których robotnik ten pracował była dwa razy większą od liczby dni jego nieobecności przyczém po obliczeniu otrzymał on 39 rs. ostatecznéj zapłaty. Ileż było dni rzeczywistéj pracy?

34. Pułk zawierał w sobie tylu żołnierzy, że można ich było ustawić dokładnie w pełny kwadrat

Gdy następnie uwolniono z tegoż pułku na urlop 295 ludzi, pozostałych można było ustawić także w kwadrat pełny, ale zawierający w każdym boku o 5 żołnierzy mniéj, aniżeli z początku. Iluż ludzi zawierał pułk z początku?

35. Pewna summa pieniędzy była rozdzielona pomiędzy dwie osoby A i B w ten sposób, że stosunek działu osoby A, do działu osoby B, był równy stosunkowi 5 do 3; a nadto: dział osoby A przewyższał pięć dziewiątych części działu osoby B o 50 rs. Ileż otrzymała każda z tych osób?

36. Ojciec umierając, rozdzielił cały swój majątek pomiędzy czterech synów w następujący sposób: najstarszy syn otrzymał o 800 rs. mniéj, aniżeli wynosiła połowa całego majątku, drugi dostał o 120 rs. więcej, aniżeli czwarta część całego majątku, trzeci dostał połowę tego, co najstarszy, a najmłodszy otrzymał dwie trzecie tego, co otrzymał drugi. Ileż otrzymał każdy?

37. Dwie osoby A i B zaczęły grać z sobą, mając jednakowe summy pieniędzy. A z początku wygrał 20 rs., lecz następnie przegrał połowę tego, co miał po pierwszéj wygranéj, i wówczas to wszystko, co mu pozostało, stanowiło połowę tego, co miał B. Ileż każdy z nich miał z początku?

38. Pewna osoba rozdzieliła na kolendę 21 rs. pomiędzy pewną liczbę mężczyzn, kobiet i dzieci: każdy mężczyzna dostał 1 rs., każda kobieta 50 kop. a każde dziecko 25. Liczba kobiet była o 2 mniejszą od podwojonéj liczby mężczyzn, a liczba dzieci o 4 mniejszą od potrojonéj liczby kobiet. Iluż było mężczyzn, ile kobiet i ile dzieci?

39. Kupiec zakupił sztukę sukna po $3\frac{1}{6}$ rs. za łokieć. Trzecią część téjże sztuki sprzedał po 4 rs. łokieć; czwartą część po $3\frac{2}{3}$ rs. łokieć, a resztę po $3\frac{1}{3}$ rs. łokieć, i na wszystkiem zyskał tym sposobem $14\frac{1}{6}$ rs. Ileż łokci zawierała sztuka?

40. Przekupka kupiła pewną liczbę jajek po 4 grosze; sprzedała zaś połowę tych jajek po 5 groszy sztuka, a pozostałą połowę po 3 sztuki za 10 groszy i na wszystkiem zyskała 40 groszy. Ileż było jajek? *)

41. Dwie osoby A i B mają ten sam dochód roczny. Osoba A co rok odkłada jedną piątą część tegoż dochodu, jako zaoszczędzony kapitał; lecz osoba B, wydając rocznie o 600 rs. więcéj, aniżeli A, robi po upływie trzech lat 900 rs. długu. Jakiż jest dochód roczny każdéj z tych osób?

42. Dwie osoby A i B strzelają kolejno do celu. Na każde 12 danych strzałów, osoba A trafia w sam środek 7 razy, osoba zaś B, na tęż samą liczbę strzałów — 9 razy. Strzelając tak przez pewien przeciąg czasu, dały razem 32 celne strzały. Ileż razy każda z nich dała ognia?

43. Dwie beczki A i B zawierają mieszaniny wina i wody; w A ilość wina jest w takim stosunku do ilości wody, w jakim jest 4 do 3; w B ten sam stosunek jest 2 do 3. Beczka A zawiera 84 garnce;

*) Zagadnienie 24.

ileż B musi zawierać, aby, po zlaniu zawartości obu beczek w trzecią beczkę, w téj ostatniéj mieszanina była złożoną z równych ilości wina i wody?

44. Właściciel wsi zapisuje jedną setną część swojego majątku na odnowienie kościoła w swojej parafii; o 200 rs. mniéj, niż powyższą summę na szkołę parafialną, i znowuż o 200 rs. mniéj, niż ta ostatnia summa, na szpital. Po odjęciu tych zapisów, pozostaje dla spadkobiercy $\frac{39}{40}$ części całego majątku. Jakaż była wartość majątku?

45. Ileż minut brakuje do czwartéj, jeżeli przed trzema kwadransami było dwa razy tyleż minut po drugiéj?

46. Każda z dwóch beczek A i B jest napełniona mieszaniną, złożoną z dwóch gatunków wina; — w beczce A są one zmieszane w stosunku 2 do 7, a w beczce B stosunku 2 do 5. Ileż należy wziąć z każdéj beczki, aby utworzyć mieszaninę, złożoną z 2 garncy pierwszego gatunku i 6 garncy drugiego gatunku?

47. Kupuje ktoś kawałek gruntu po 60 rs. morga; i sprzedając następnie ten grunt małemi cząstkami, otrzymuje za morgę trzy razy więcéj, aniżeli sam za nią płacił. Tym sposobem, zachowawszy dla siebie 25 morgów, a sprzedawszy resztę, nie tylko otrzymał za nią to, co sam wydał na całe kupno ale nadto jeszcze zyskał 300 rs. Ileż morgów kupił?

48. A i B grają z sobą w pewną grę przy takiéj umowie, że przegrywający partyę płaci wygrywającemu o jednego rubla mniéj, aniżeli wynosi połowa

tych pieniędzy jaką ma tenże przegrywający. Na początku gry obaj mieli jednakowe summy; następnie B przegrał pierwszą partyą a wygrał drugą, i wtedy pokazało się, że ma o dwa ruble więcéj, aniżeli A. Ileż każdy z nich miał w początku?

49. O któréj godzinie między 3-cią i 4-tą jedna skazówka zegarka będzie ściśle na przedłużeniu drugiéj skazówki?

50. Skazówki zegara tworzą kąt prosty o godzinie 3-ciéj; o jakim czasie będą następnie znowuż tworzyć kąt prosty?

51. Pewien kapitał, wypożyczony na procent prosty, zamienił się na summę 297 rs. 60 kop. w ciągu 8 miesięcy, a po upływie nowych 7-miu miesięcy, na summę 306 rs. Jakiż to był kapitał?

52. Zegarek kieszonkowy śpieszy się o tyle, o ile się spóźnia zegar ścienny. Czas, wyrażony przez 1799 godzin na zegarze, jest równy 1801 godzinom zegarkowym. Znaleść o ile zegarek się śpieszy i o ile zegar się spóźnia na godzinę.

53. W pewnéj chwili pomiędzy godziną 11 i 12, liczba podziałek minutowych, zawartych pomiędzy skazówkami, wynosi $\frac{2}{3}$ téj liczby tychże podziałek, jaka była pomiędzy temi skazówkami przed dziesięciu minutami. Któraż jest w uważanéj chwili godzina i minuta?

54. A i B złożyli razem na pewne przedsiębiorstwo 5000 rs.; mieli zysku do podziału 1600 rs., z któréj to summy A otrzymał dla siebie o 320 rs. więcéj, aniżeli B. Ileż każdy z nich dał?

55. Kupiec ma 51 garncy wina francuzkiego, które go kosztuje po 8 rs. garniec; — chce go zmieszać z winem kaukazkiém po 3 rs. garniec i sprzedawać mieszaninę po 9 rs. garniec. Ileż garncy wina kaukazkiego musi domieszać, aby w ten sposób sprzedając mieszaninę, miał na całéj summie, którą wydał na oba gatunki wina, 30% zysku?

56*. Ma ktoś dwa kubki srebrne i jedną do nich pokrywkę. Pierwszy kubek waży 12 łutów; a jeżeli na niego nałożyć pokrywkę, wtedy razem z nią ważyć będzie dwa razy więcéj, aniżeli drugi kubek. Jeżeli zaś nakryć drugi kubek, wtedy on razem z pokrywką ważyć będzie trzy razy tyle, co pierwszy. Znaleźć wagę drugiego kubka i pokrywki.

57*. $\frac{1}{4}$ część pala wbitego w dno rzeki, znajduje się w ziemi; $\frac{1}{3}$ część tegoż samego pala jest w wodzie, a nad wodą wystaję $2\frac{1}{2}$ metra. Znaleść długość całego pala?

58*. Powietrze atmosferyczne składa się z 2-ch gazów: tlenu i azotu, pomieszanych z sobą w takim stosunku, że na 21 części, co do objętości, tlenu, idzie 79 części azotu. Ileż każdego z tych gazów znajduje się w pokoju długim na 4,39 metra, szerokim na 3,77 metra i wysokim na 2,35 metra?

59*. Mamy trzy beczki: dwie małe i jednę dużą. Objętość pierwszéj z mniejszych wynosi $\frac{3}{16}$ części dużéj, a objętość drugiéj z mniejszych stanowi

$\frac{5}{24}$ części dużéj beczki. Jeżeli zawartość napełnionéj drugiéj beczułki, przelać do pierwszéj, wtedy ta ostatnia będzie w zupełności napełnioną i jeszcze pozostanie w drugiéj 10 kwart. Ileż kwart zawiera każda z beczek?

60*. W prawéj kieszeni mam o 6 rubli więcéj, aniżeli w lewéj. Jeżeli z prawéj przełożę do lewéj tyle, ile jest teraz w téj ostatniéj; następnie z lewéj przełożę do prawéj tyle, ile jest teraz w téj ostatniéj; i nakoniec znowuż z prawéj do lewéj tyle, ile było teraz w tejże lewéj, wtedy w obu kieszeniach będzie równo. Ileż było z początku w każdéj kieszeni?

61*. Gospodarz wiejski ma gęsi i owce—razem 432 sztuki. Ponieważ nie chce się dalej zajmować hodowlą gęsi, przeto wymienia wszystkie swoje gęsi na owce, i dostaje przy téj wymianie 3 owce za każde 32 gęsi. Po téj wymianie okazało się, że jest posiadaczem stada owiec, liczącego 200 sztuk. Ileż gęsi on wymienił na owce?

62*. Pewien próżniak od 18 roku życia aż do śmierci przespał $\frac{3}{8}$ czasu, $\frac{1}{16}$ część zużył na jedzenie i picie, $\frac{1}{4}$ przepędził na przechadzkach, $\frac{3}{16}$ stracił na grę w karty, $\frac{1}{16}$ spędził siedząc w fotelu i nie myśląc o niczem, a przez cały ten czas tylko dwa lata pracował. Ileż lat on żył?

63*. Gracz przegrał z początku $\frac{1}{6}$ część swoich pieniędzy, a potem 247 rubli, i pozostało mu

tyle kopiejek, ile przed grą miał rubli. Ileż miał pieniędzy siadając do gry?

64*. Gospodyni chciała z pewnéj liczby funtów lnu zrobić sztukę płótna. Jedna z jéj służących podejmowała się wykończyć tę robotę w ciągu 36 dni, druga zaś oświadczyła, że może ją wykonać dopiero w 48 dni. Ponieważ gospodyni chciała się z tém daleko prędzéj załatwić, przeto razem z obiema służącemi i sama wzięła się do roboty, tkając dziennie o $\frac{1}{8}$ część funta lnu więcéj, aniżeli druga służąca. Tym sposobem we trzy zrobiły całą robotę w ośm dni. Ileż było funtów lnu?

65*. Wieśniaczka przyniosła na targ pewną liczbę jajek. Pierwszemu kupującemu sprzedała połowę wszystkich jajek i jeszcze połowę jednego jajka (nie tłukąc i nie dzieląc wszakże żadnego); drugiemu kupującemu — połowę tego co jéj zostało i jeszcze połowę jajka; trzeciemu — znowuż połowę tego, co jéj zostało i pół jajka, i tak samo czwartemu i piątemu. Po tém wszystkiém pozostało jéj jedno jajko. Ileż jajek przyniosła na targ?

66*. Na grobie sławnego matematyka greckiego *Diophantes'a* (jednego z twórców algiebry) znajduje się napis, oznaczający w następny sposób liczbę lat, jaką on żył:

Diophantes był dzieckiem $\frac{1}{6}$ część swego życia, $\frac{1}{12}$ część był młodzieńcem, następnie ożenił się, i przeżył w związku małżeńskim $\frac{1}{7}$ część swego życia, po-

większoną o 5 lat, zanim narodził mu się syn, który wszakże o 4 lat wcześniéj umarł, aniżeli Diophantes, i żył tylko połowę téj liczby lat, jaką żył ojciec. Ileż lat żył Diophantes?

67*. Rok śmierci króla Jana Sobieskiego wyraża się liczbą czterocyfrową, w któréj pierwszą cyfrą z lewéj strony jest 1. Jeżeli tę jedność przeniesiemy z pierwszego miejsca na ostatnie miejsce, wtedy otrzymamy nową liczbę, która będzie o 177 większą, od cztery razy wziętéj liczby, wyrażającéj rok śmierci Jana III-go. W którym roku umarł król Jan Sobieski?

68*. W dawnych książkach znajdujemy takie zadanie:

Pewna Greczynka weszła do świątyni Zeusa i prosiła go, ażeby podwoił tę summę pieniędzy; jaką miała przy sobie. Zeus uczynił to. Wtedy na znak podziękowania, złożyła w świątyni dwie drachmy. Z tém co jéj pozostało weszła do świątyni Apollina i prosiła o toż samo. I Apollo przychylił się do jéj prośby, za co znowuż w jego świątyni ofiarowała dwie drachmy. Porachowała teraz pieniądze, — i okazało się, że ma ściśle dwa razy tyle, ile miała z początku. Ileż miała, wchodząc do świątyni Zeusa?

69*. Okręt żaglowy płynął od pewnego miejsca A do miejsca B, leżącego na zachód. Gdy już się znajdował oddalony tylko na 4 mile od miejsca swego przeznaczenia, został cofnięty przez wiatr przeciwny o $\frac{1}{19}$ część téj drogi, jaką przebył. Następnie, po ustaniu wiatru, daléj płynął ku zachodowi; lecz

przebywszy $\frac{1}{24}$ część téj odległości, w jakiéj się znajdował od A, wskutek działania nowego wiatru przeciwnego, znowu został cofnięty o $\frac{1}{20}$ część teraźniejszéj odległości od A. Gdy wiatr powtórnie ustał, okręt, przepłynąwszy $\frac{1}{9}$ część ostatniéj odległości od A przybył do portu. Jakaż jest odległość miasta A od B, i ile mil okręt przepłynął?

70*. Z czterech miasteczek A, B, C i D, leżących na jednéj drodze, wyjeżdżają dyliżansem pocztowym cztery osoby, i jadą do jednego miasta E. Odległość A od B wynosi 19 mil; B od C wynosi 3 mile, a C od D 5 mil. Przy opłacie należności pocztowéj okazało się, że osoba, wyjeżdżająca z A zapłaciła za drogę tyle, ile trzy pozostałe osoby razem. Jak z tego obliczyć odległość miasta D od E?

71*. Jeżeli do pustego zbiornika wlewać się będzie po 20 kwarty wody co 3 minuty, wtedy, po upływie pewnego czasu, brakować będzie do napełnienia zbiornika jeszcze 40 kwart; jeżeli zaś do tegoż zbiornika wpływać będzie po 52 kwarty co 5 minut, wtedy, w tym samym czasie, nietylko zbiornik będzie napełniony, ale jeszcze przeleje się z niego 72 kwarty. Ileż kwart zawiéra zbiornik, i po ile kwart powinno się wlewać do niego na minutę, aby w tymże samym czasie był on napełniony po brzegi?

72*. Posłaniec wychodzi z pewnego miejsca A w stronę ku M, i idzie dziennie po 5 mil. W tym samym czasie inny posłaniec wychodzi z miejsca B oddalonego od A o 12 mil, w stronę przeciwną M,

i przechodzi po 7 mil dziennie. Po ilu dniach i w jakiéj odległości od B drugi posłaniec dogoni pierwszego?

73*. Dwa ciała poruszają się, zaczynając od dwóch punktów A i B, których odległość wynosi d metrów, *w tym samym kierunku*. Jedno z tych ciał przebywa w każdéj jednostce czasu (np. sekundzie) c metrów, drugie zaś c' metrów. Kiedy i gdzie te dwa ciała spotkają się? W jakim przypadku rozwiązanie zadania jest niemożliwe?

74*. Dwa ciała wyruszają w jednéj i téj samej chwili z dwóch punktów A i B, których odległość wynosi d metrów, i idą w *kierunkach przeciwnych*. Pierwsze przechodzi c metrów, drugie zaś c' metrów w każdéj jednostce czasu. W jakim czasie, i w jakiej odległości od punktów A i B te dwa ciała spotkają się?

75*. Dwa ciała wychodzą z tego samego punktu S, i oba poruszają się *w tym samym kierunku*. Pierwsze przebiega w każdéj jednostce czasu c metrów; drugie zaś, które wyszło w n jednostek czasu później z S, przebiega w każdéj jednostce czasu, c' metrów. Po upływie jakiego czasu, licząc od wyjścia drugiego ciała z punktu S, oba te ciała spotkają się? Jaki związek powinien istnieć pomiędzy ilościami c, c' i n, aby rozwiązanie zadania było możliwém?

76*. W jaki sposób rozwiązanie zadania zmieni się, jeżeli w powyższém zadaniu dwa ciała wyjdą nie z jednego punktu, ale z dwóch różnych punktów, odległych na d metrów, i poruszać się będą *w strony przeciwne*?

77*. Dwa ciała, poruszające się w tym samym kierunku, wychodzą z tegoż samego punktu; ale drugie o t jednostek czasu później, aniżeli pierwsze. Stosunek prędkości pierwszego do prędkości drugiego jest równy $m : n$. Po jakim przeciągu czasu te dwa ciała spotkają się?

78*. O 6-ej godzinie zrana wychodzi statek parowy z Płocka do Warszawy, a o 12-éj w południe inny statek z Warszawy do Płocka. Pierwszy przybywa do Warszawy o godzinie 6-éj wieczorem, drugi zaś do Płocka o godz. 5-éj. O której godzinie i w jakiéj odległości od Warszawy dwa te statki spotkają się, jeżeli odległość Płocka od Warszawy wynosi $12\frac{1}{2}$ mil?

79*. Dwa ciała wyruszają w jednym czasie z dwóch punktów, odległych na 243 metrów w *kierunkach przeciwnych*; pierwsze przebiega na minutę 5, drugie zaś 7 metrów. Po upływie jakiego czasu odległość pomiędzy niemi wynosić będzie 39 metrów?

80*. Rozwiązać toż samo zagadnienie, jeżeli w niém zamiast liczb 243, 5, 7 i 39 podstawimy głoski d, c, c' i l?

81*. Dwa ciała, poruszające się ruchem jednostajnym, wychodzą jednocześnie z dwóch punktów, odległych od siebie na 18 metrów, i idą w jednym kierunku. Pierwsze przebiega 5 metrów co 6 minut. drugie — 7 metrów co 8 minut. Po ilu minutach odległość pomiędzy niémi wynosić będzie 15 metrów?

82*. Dwa ciała, biegnące ruchem jednostajnym, wychodzą jednocześnie z dwóch punktów A i B, odległych od siebie na d metrów, i poruszają się w jednym kierunku: jedno z prędkością c metrów, drugie

z prędkością c' metrów na sekundę. Po jakim czasie odległość pomiędzy niemi wynosić będzie l metrów?

83*. Dwa punkta poruszają się ruchem jednostajnym po okręgu koła w jedną stronę. W pewnéj chwili odległość pomiędzy niémi, liczona po łuku koła, wynosi 9 metrów; po upływie 2 minut od téj chwili spotykają się po raz drugi. Znaleść długość okręgu koła?

84*. Na samym środku stawu kwadratowego, mającego długości i szerokości 10 stóp, wyrasta trzcina, wznosząca się na jedną stopę nad wodę. Jeżeli tę trzcinę przyciągniemy do środka jednego z boków stawu, wtedy ona swoim wierzchołkiem dosięgnie samego brzegu. Jak głęboki jest staw?

85*. Młoda topola, wysoka na 10 stóp, została przez wiatr złamaną w takiéj wysokości, że jéj wierzchołek, oparty teraz na ziemi, znajduje się w odległości 3 stóp od podstawy pnia. W jakiéj że wysokości została ona złamaną? (*)

86*. Ojciec dzieli majątek pomiędzy dzieci swoje w sposób następujący: najstarszemu wyznacza 1000 rs. i $\frac{1}{5}$ część resztującego majątku, drugiemu wyznacza 2000 rs. i $\frac{1}{5}$ część pozostałego jeszcze bez rozrządzenia majątku; trzeciemu wyznacza 3000 rs. i $\frac{1}{5}$ część reszty: i t. d., powiększając zawsze o 1000 rs.

(*) Do dwóch ostatnich zagadnień trzeba użyć twierdzenia Pythagoresa.

część pierwszą, mającą się dostać co raz młodszemu dziecku. Tym sposobem cały majątek został równo pomiędzy wszystkie dzieci podzielony. Jakiż był? ile się każdemu dziecku dostało? i ile było dzieci?

Jak wyrazić toż samo zadanie w sposób ogólny?

87*. Ogrodnik posadził pewną liczbę drzewek w kwadrat pełny, i pozostało mu drzewek 8. Chciałby jeszcze posadzić jedno drzewko w każdym rzędzie, i przydać rząd jeden dla zachowania kwadratu, ale mu brakuje do tego drzewek 11. Ileż było drzewek w każdym rzędzie, ile rzędów i ile wszystkich drzewek?

88*. Ma ktoś talią kart z 32 sztuk złożoną; trzy z nich wyciąga, i na każdą z tych trzech kart tyle innych kładzie, ile téj karcie ók brakuje do dopełnienia liczby 15. Zostaje mu kart 8; jakaż jest summa ók w trzech kartach na spodzie położonych?

89*. Trzéj koloniści wynajęli wspólne pastwisko dla swojego bydła za 180 rs. A utrzymywał tam pewną liczbę sztuk bydła przez 12 tygodni, B o 11 sztuk więcéj, aniżeli A, przez 10 tygodni, i C nakoniec 50 sztuk przez 13 tygodni. Skoro C zapłacił $97\frac{1}{2}$ rs. po ileż musieli zapłacić oddzielnie A i B?

90*. Łąkę mającą 40 morgów, 8 koni objadły w ciągu 7-iu tygodni, tak, że została zjedzoną nie tylko trawa, jaka się z początku na niéj znajdowała, ale także i ta, która w ciągu tego czasu przyrosła. Inną łąkę, mającą 50 morgów, téj saméj wartości gruntu, 9 koni objadło w podobny sposób w ciągu 8 tygodni. Ileż koni może być utrzymywanych na takiéj że saméj łą-

ce, liczącéj 60 morgów, przez przeciąg 12 tygodni? Jak wyrazić i rozwiązać podobne zadanie w sposób ogólny?

XXIII.

Równania jednoczesne stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi.

205. Przypuśćmy, że mamy równanie zawierające dwie ilości niewiadome x i y; np. $3x-7y=8$. Nadając jakąkolwiek wartość dowolną na jedną z tych niewiadomych, możemy znaleść z tegoż równania odpowiednią wartość na drugą. Tym sposobem możemy znaleść tyle par wartości, zadosyć czyniących danemu równaniu, ile tylko chcemy. Tak naprzykład, jeżeli $y=1$ będzie $3x=15$, a przeto $x=5$; również jeżeli $y=2$, będzie $3x=22$, skąd $x=7\frac{1}{3}$; — i tak daléj.

Podobnież, jeżeli byśmy mieli inne równanie tego samego rodzaju, np. $2x+5y=44$, i z niego możemy oznaczyć tyle wartości, ile nam się spodoba, zadosyć mu czyniących.

Lecz jeżelibyśmy chcieli wynaleść te wartości, które zadosyć czynią jednocześnie *obu równaniom*, wtedy znaleźlibyśmy, że tylko jedna jest taka wartość na x i jedna na y. Gdyż: pomnóżmy pierwsze równanie przez 5, będzie:

$$15x-35y=40;$$

drugie zaś równanie przez 7, otrzymamy:

$$14x+35y=308.$$

Zatém, przez dodanie odpowiedniemi stronami tych równań:

$$15x-35y+14x+35y=40+308.$$

to jest: $$29x=348,$$

skąd: $$x=\frac{348}{29}=12.$$

Widzimy stąd, że jeżeli wartość na x ma zadosyć uczynić *obu równaniom*, wtedy *musi* być ona równą 12. Podstawmy tę wartość w którekolwiek z danych równań, np. w drugie, wtedy otrzymamy:

$$24+5y=44,$$

czyli: $$5y=20,$$

skąd: $$y=4.$$

206. Dwa, lub więcéj równań, którym mają zadosyć czynić *też same wartości* na niewiadome, nazywają się *równaniami jednoczesnemi*. W obecnym rozdziale zajmiemy się równaniami jednoczesnemi, zawierającemi tylko dwie ilości niewiadome, i w których każda niewiadoma wchodzi tylko w stopniu pierwszym, i nadto jedna niewiadoma nie jest mnożoną przez drugą niewiadomą.

207. Do rozwiązywania tych równań używa się zwykle jednego z trzech sposobów, które zaraz wyłożymy. Wszystkie te trzy sposoby, mają jedną zasadę wspólną — mianowicie: z *dwóch równań danych* zawiérających *dwie niewiadome*, wyprowadza się *jedno* równanie, zawierające tylko *jedną* niewiadomą. Gdy tak postępujemy, wtedy mówimy że z tych dwóch równań *rugujemy* jedną niewiadomą; tę mianowicie, która do ostatecznego, jednego równania *nie wchodzi*.

To ostateczne równanie, zawierające tylko jednę niewiadomą, może być rozwiązane sposobem podanym w rozdziale XIX; i gdy wartość na tę niewiadomą została tym sposobem oznaczoną, wtedy możemy ją podstawić w którekolwiek z równań danych, i oznaczyć w końcu wartość drugiéj niewiadoméj.

208. *Sposób pierwszy**). *Należy pomnożyć każde z danych równań przez liczbę tak wybraną, aby, po pomnożeniu, współczynniki przy jednéj z niewiadomych stały się równemi; — wtedy przez dodanie lub odjęcie tychże równań, otrzymamy równanie zawierające tylko jedną niewiadomą.*

Tego właśnie sposobu użyliśmy w Artykule 205; jako inny przykład weźmy równania:

$$8x+7y=100,$$
$$12x-5y=88.$$

Aby wyrugować y pomnóżmy pierwsze równanie przez 5, t. j. przez współczynnik przy y w drugiem równaniu; drugie zaś równanie przez 7, t. j. przez współczynnik przy y w równaniu pierwszém. Tym sposobem otrzymamy:

$$40x+35y=500,$$
$$84x-35y=616,$$

Dodając te równania, będzie:

$$40x+84x=500+616,$$

czyli: $$124x=1116,$$

skąd: $$x=9.$$

*) Sposób ten nazywają niekiedy „*angielskim*“. *Tł.*

Podstawiając tę wartość w którekolwiek z danych równań, naprzykład w drugie, otrzymamy:

$$108-5y=88,$$

to jest: $$20=5y,$$

skąd: $$y=4.$$

Przypuśćmy teraz, że dla rozwiązania tych równań chcemy z początku wyrugować z nich x. Jeżeli pomnożymy pierwsze równanie przez 12, a drugie przez 8, otrzymamy:

$$96x+84y=1200,$$
$$96x-40y=704.$$

Odejmując następnie od pierwszego równania drugie miéć będziemy:

$$84y+40y=1200-704;$$

czyli: $$124y=496,$$

skąd: $$y=4.$$

Do tegoż samego wypadku moglibyśmy dojść prościéj, mnożąc pierwsze równanie przez 3, a drugie przez 2; wtedy:

$$24x+21y=300,$$
$$24x-10y=176.$$

Po odjęciu:

$$21y+10y=300-176;$$

czyli: $$31y=124,$$

skąd: $$y=4.$$

209. Drugi sposób (przez podstawienie).

Należy wyrazić jedną niewiadomą z jednego z dwóch równań za pomocą drugiéj niewiadoméj, i tak znalezioną wartość podstawić w drugie równanie.

Tak naprzykład, biorąc też same równania, co w poprzednim artykule, mamy z pierwszego równania:

$$8x = 100 - 7y,$$

skąd: $$x = \frac{100 - 7y}{8}.$$

Podstawiając tę wartość na x w równanie drugie otrzymamy:

$$\frac{12(100 - 7y)}{8} - 5y = 88,$$

czyli: $$\frac{3(100 - 7y)}{2} - 5y = 88;$$

znosząc mianownik:

$$3(100 - 7y) - 10y = 176;$$

czyli: $$300 - 21y - 10y = 176;$$

skąd: $$300 - 176 = 21y + 10y;$$

daléj: $$31y = 124,$$

i nakoniec: $$y = 4.$$

Podstawiając następnie tęż wartość na y w którekolwiek z danych równań, otrzymamy:

$$x = 9.$$

Albo jeszcze możemy tak postępować: z pierwszego równania mamy:

$$7y = 100 - 8x,$$

skąd: $$y = \frac{100 - 8x}{7}.$$

Podstawiając tę wartość w równanie drugie, otrzymamy:

$$12x - \frac{5(100 - 8x)}{7} = 88;$$

i daléj: $$84x - 5(100 - 8x) = 616;$$

czyli: $$84x - 500 + 40x = 616,$$

skąd: $$124x = 500 + 616 = 1116,$$

i nakoniec: $$x = 9.$$

210. Trzeci sposób (przez porównanie niewiadomych):

Należy jednę i tęż samę niewiadomą, wyrazić za pomocą drugiéj niewiadoméj z każdego z danych równań i tak otrzymane wyrażenia uczynić równemi.

Weźmy, jako przykład, też same dwa równania. Z pierwszego równania otrzymujemy:

$$x = \frac{100 - 7y}{8},$$

z drugiego zaś:

$$x = \frac{88 + 5y}{12}.$$

Więc: $$\frac{100 - 7y}{8} = \frac{88 + 5y}{12}.$$

Znieśmy mianowniki, przez pomnożenie obu stron równania przez 24, otrzymamy:

$$3(100 - 7y) = 2(88 + 5y),$$

skąd: $$300 - 21y = 176 + 10y,$$

i dalej; $$300 - 176 = 21y + 10y,$$

to jest: $$31y = 124;$$

i nakoniec: $$y = 4.$$

Następnie, w podobny sposób jak pokazano poprzednio, możemy wyprowadzić, że $x = 9$.

Albo też można postępować w ten sposób: z pierwszego równania wynajdujemy:

$$y = \frac{100-8x}{7};$$

z drugiego zaś:

$$y = \frac{12x-88}{5};$$

stąd: $$\frac{100-8x}{7} = \frac{12x-88}{5}.$$

Z tego równania znajdziemy, że: $x = 9$, a następnie tak samo jak wyżéj: $y = 4$.

211. Rozwiązać równania:

$$19x-21y = 100;$$
$$21x-19y = 140.$$

Równania te mogą być rozwiązane sposobami podanemi wyżéj; lecz umyślnie wybraliśmy je tutaj, aby pokazać, że sposoby te mogą być niekiedy uproszczone.

Dodając te równania, otrzymujemy:

$$19x-21y+21x-19y = 100+140,$$

czyli: $$40x-40y = 240,$$

skąd: $$x-y = 6.$$

I znowuż, przez odjęcie początkowych równań, miéć będziemy:

$$21x-19y-19x+21y = 140-100,$$

to jest: $$2x+2y = 40,$$

skąd: $$x+y = 20.$$

Ponieważ więc: $x-y = 6$, i $x+y = 20$, przeto, przez dodanie tych ostatnich równań, będzie:

$$2x = 26,$$

a przez odjęcie: $$2y = 14;$$

skąd: $$x = 13, \quad y = 7.$$

212. We wszystkich częściach algebry można znaleść szczególne przykłady, które mogą być traktowane sposobami krótszemi, aniżeli sposoby podane przez prawidła ogólne, lecz do tych skróceń uczący się może dojść tylko przez wprawę i długie ćwiczenia; i z tego powodu w samych początkach nauki nie powinien napróżno tracić wiele czasu na ich wynajdywanie.

213. Rozwiązać równania:

$$\frac{12}{x}+\frac{8}{y} = 8;$$
$$\frac{27}{x}-\frac{12}{y} = 3.$$

Gdybyśmy znieśli mianowniki w powyższych równaniach, wtedy wystąpił by w nich iloczyn xy ilości niewiadomych. Równania takie, ściśle biorąc, nie należą do obecnego rozdziału. Lecz mogą one być rozwiązane podanemi sposobami, jak to zobaczymy zaraz. Pomnóżmy bowiem pierwsze równanie przez 3 a drugie przez 2 i dodajmy tak otrzymane równania; znajdziemy:

$$\frac{36}{x}+\frac{24}{y}+\frac{54}{x}-\frac{24}{y} = 24+6;$$

czyli: $$\frac{36}{x}+\frac{54}{x} = 30,$$

to jest: $$\frac{90}{x} = 30;$$

skąd: $$90 = 30x;$$

a następnie: $x=3.$

Podstawmy tę wartość w równanie pierwsze, będzie:

$$\frac{12}{3}+\frac{8}{y}=8,$$

skąd: $$\frac{8}{y}=8-4=4,$$

a następnie: $$8=4y,$$

i nakoniec: $$y=2.$$

214. Rozwiązać równania:

$$a^2x+b^2y=c^2,$$
$$ax+by=c.$$

Tutaj x i y oznaczają ilości *niewiadome*, inne zaś głoski oznaczają ilości *wiadome*.

Pomnóżmy drugie równanie przez b i odejmijmy je następnie od pierwszego. Otrzymamy:

$$a^2x+b^2y-abx-b^2y=c^2-bc,$$

czyli: $$a(a-b)x=c(c-b);$$

skąd: $$x=\frac{c(c-b)}{a(a-b)}.$$

Podstawmy tę wartość na x w równanie drugie; będzie:

$$\frac{ac(c-b)}{a(a-b)}+by=c;$$

skąd: $$by=c-\frac{c(c-b)}{a-b}=\frac{c(a-b)-c(c-b)}{a-b}=\frac{c(a-c)}{a-b};$$

i nakoniec:

$$y=\frac{c(a-c)}{b(a-b)}=\frac{c(c-a)}{b(b-a)}.$$

Albo też wartość na y może być znalezioną w podobny sposób, jak była znalezioną wartość na x. (*)

(*) Sposoby rugowania niewiadomych z dwóch równań, podane w tekście i następnie rozwiązanie tychże równań opierają się na następującém twierdzeniu:

Gdy dwa równania mają też same pierwiastki, wtedy równanie otrzymane przez dodanie lub odjęcie ich, może zastąpić jedno, którekolwiek z danych równań.

W saméj rzeczy: uważmy dwa równania:

$$A=B;$$
i $$C=D;$$

zawierające też same niewiadome x i y. Te pary wartości na x i y, które czynią jednocześnie $A=B$ i $C=D$, uczynią również i $A+C=B+D$. I odwrotnie: te pary wartości na x i y, które zadosyć czynią równaniu:

$$A+C=B+D,$$

i *jednemu* z równań $A=B$, lub $C=D$, zadosyć muszą czynić i drugiemu równaniu.

Równania dane, mogą być podług tego zastąpione innemi parami równań, dogodniejszemi do rozwiązania. Mianowicie: zamiast pary równań:

$$A=B \quad \text{i} \quad C=D,$$

możemy użyć do rozwiązania takie pary:

$$A=B \quad \text{i} \quad A+C=B+D$$

lub: $$C=D \quad \text{i} \quad A+C=B+D$$

lub: $$A=B \quad \text{i} \quad A-C=B-D$$ i t. d.

Oczywiście obie strony każdego z równań przed dodaniem lub odjęciem mogą być pomnożone lub podzielone przez jednę i tęż samą ilość, skąd możemy otrzymać skombinowane równania przekształcone w taki sposób, jaki w danym przypadku uważać będziemy za najdogodniejsze do rozwiązania. Toż samo daje się zastosować i do większéj liczby równań: trzy równania mogą być zastąpione dwoma któremikolwiek z nich i trzeciém, powstałém z dodania lub odjęcia danych równań i t. d. T.

214$_1$. Oprócz powyżéj wyłożonych trzech sposobów rozwiązywania równań z dwiema niewiadomemi, jest jeszcze czwarty sposób, zwany *sposobem Bezout*, lub *francuskim*. Sposób ten polega na wprowadzeniu w równania mnożnika dowolnego, nieoznaczonego, to jest mogącego przyjmować *wszelkie wartości*, jakie tylko nadać mu zechcemy. Pokażemy na jednym z rozwiązanych wyżéj równań użycie tegoż sposobu.

Niech więc będą dane równania do rozwiązania:

$$8x+7y=100,$$
$$12x-5y=88.$$

Pomnóżmy jedno z tych równań, np. pierwsze, przez ilość dowolną m, to jest taką, jakiéj możemy nadawać takie wartości, jakie tylko chcemy. Otrzymamy:

$$8mx+7my=100m,$$
$$12x-5y=88.$$

Dodajmy tak otrzymane równania odpowiedniemi stronami; będzie:

$$8mx+12x+7my-5y=100m+88.$$

Wyłączając z pierwszych dwóch wyrazów pierwszéj strony x, a z drugich dwóch wyrazów y, za nawias, otrzymamy:

$$(8m+12)x+(7m-5)y=100m+88.$$

Równanie to bezwątpienia jest więcéj złożone, jak każde z równań danych; lecz ponieważ do niego wchodzi ilość dowolna m, przeto możemy ją tak wybrać, aby po podstawieniu odpowiedniéj na nią wartości, jedna z niewiadomych znikła z równania, czyli została wyrugowaną. W tym celu należy tylko na m wybrać

taką wartość, aby współczynnik przy téj niewiadoméj, którą chcemy wyrugować, stał się równym zero. Przypuśćmy np. że chcemy znaleść wartość na x; wtedy należy z równania wyrugować y. Podstawmy na m taką wartość aby współczynnik $7m-5$ stał się zerem. Jeżeli: $7m-5=0$, to

$$7m=5,$$

a:

$$m=\frac{5}{7}.$$

Podstawiając tę wartość na m w powyższe równanie otrzymamy:

$$\left(8.\frac{5}{7}+12\right)x+\left(7.\frac{5}{7}-5\right)y=100.\frac{5}{7}+88,$$

czyli;

$$\left(\frac{40}{7}+12\right)x+0.y=\frac{500}{7}+88.$$

A że:

$$0.y=0,$$

przeto:

$$\left(\frac{40}{7}+12\right)x=\frac{500}{7}+88.$$

Znosząc tutaj mianownik, będzie:

$$(40+84)x=500+616,$$

czyli:

$$124x=1116,$$

skąd:

$$x=9.$$

Chcąc znaleść y, należy w równaniu:

$$(8m+12)x+(7m-5)y=100m+88,$$

podstawić zamiast m taką wartość, któraby uczyniła współczynnik przy x równym zero. Taką wartość znajdziemy, rozwiązując równanie:

$$8m+12=0,$$

skąd: $$m=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}.$$

Podstawiając tę wartość w powyższe równanie, będzie:

$$\left(-\frac{21}{2}-5\right)y=-150+88,$$

czyli: $$-\left(\frac{21}{2}+5\right)y=-62;$$

albo, znosząc mianownik i wykonywając dodawanie:

$$-31y=-124.$$

Lecz w tém równaniu możemy znaki w obu stronach zmienić na przeciwne, gdyż to jest równoznaczne z przeniesieniem wyrazu $-31y$ z pierwszéj strony na drugą, a wyrazu -124 z drugiéj strony na pierwszą i zmienieniem następnie porządku stron równania; będzie:

$$31y=124;$$

skąd, $$y=4.$$

214$_2$. Moglibyśmy jeszcze każde szczególne zadanie rozwiązać za pomocą ogólnych wzorów, pokazujących wartości na niewiadome z dwóch równań takich, w których współczynniki tychże niewiadomych i ilości wiadome są oznaczone głoskami. Równania dwa, z dwiema niewiadomemi mogą być w ogólności przedstawione w téj postaci:

$$ax+by=k,$$
$$a_1x+b_1y=k_1;$$

gdzie a, a_1, b, b_1, k i k_1 oznaczają pewne dane liczby, różne w każdym szczególnym przypadku. Aby z tych równań znaleść wartość na x, wyrugujemy z nich y.

W tym celu pomnóżmy pierwsze przez b_1, drugie zaś przez b; otrzymamy:

$$ab_1x+bb_1y=kb_1,$$
$$a_1bx+b_1by=k_1b;$$

Odjąwszy odpowiednie strony tych dwóch równań, wypadnie:

$$ab_1x-a_1bx=kb_1-k_1b;$$

wyłączając na pierwszéj stronie x za nawias, będzie:

$$(ab_1-a_1b)x=kb_1-k_1b;$$

skąd: $$x=\frac{kb_1-k_1b}{ab_1-a_1b}.$$

Podobnież: rugując z tych równań x, otrzymamy wartość na y, która będzie taką.

$$y=\frac{ak_1-a_1k}{ab_1-a_1b}.$$

Jakkolwiek, na pierwszy rzut oka, te wartości na x i y wydają się dosyć złożonémi, wszakże nietrudno ich sobie w każdym przypadku przypomnieć, przyjrzawszy się tylko sposobowi, w jaki są one z współczynników i ilości wiadomych utworzone. W saméj rzeczy: zwróćmy uwagę najprzód na to, że obie wartości przedstawiają się w postaci ułamków, mających mianownik wspólny i łatwy do zapamiętania ab_1-a_1b, złożony tylko z współczynników przy x i y. Powtóre: licznik wartości na x otrzyma się z mianownika wspólnego, przez podstawienie w niém zamiast współczynników a i a_1 przy x w dwóch danych równaniach, odpowiednio drugich stron tychże równań k i k_1. Podobnież i licznik wartości na y jest w ten sam sposób utworzony z mianownika, to jest

przez podstawienie w nim zamiast współczynników przy y w obu równaniach b i b_1, odpowiednio drugich stron k i k_1.

Skoro są znalezione ogólne wzory, wyrażające wartości na niewiadome z dwóch równań ogólnych stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi, wtedy możemy każdy szczególny przypadek tychże równań, rozwiązać przez proste podstawienie odpowiednich wartości w powyższe wzory. Tak np. weźmy przykład już rozwiązywany poprzednio kilkakrotnie. Dane równania są:

$$8x+7y=100,$$
$$12x-5y=88.$$

Tutaj: $a=8$; $b=7$, $k=100$; $a_1=12$, $b_1=-5$; $k_1=88$, Podstawiając te wartości w znalezione wyżéj wzory, będzie:

$$x=\frac{100\times-5-88\times7}{8\times-5-12\times7};$$
$$y=\frac{8\times88-12\times100}{8\times-5-12\times7};$$

skąd:

$$x=\frac{-500-616}{-40-84}=\frac{-1116}{-124};$$
$$x=9,$$

i:
$$y=\frac{704-1200}{-40-84}=\frac{-496}{-124};$$
$$y=4.$$

214_3. Lecz przy rozwiązywaniu w ten sposób równań, przez podstawienie współczynników we wzory ogólne; mogą się przytrafić dwa szczególne przypadki, zasługujące na osobną wzmiankę.

I tak, po pierwsze, przypuśćmy, że chcemy rozwiązać równania:

$$3x+5y=16,$$
$$9x+15y=20.$$

Używając wzorów ogólnych:

$$x=\frac{kb_1-k_1b}{ab_1-a_1b},$$
$$y=\frac{ak_1-a_1k}{ab_1-a_1b},$$

otrzymamy na x i y z danych równań następne wartości:

$$x=\frac{16.15-20.5}{3.15-9.5}=\frac{240-100}{45-45},$$
$$x=\frac{140}{0}.$$

I daléj:

$$y=\frac{3.20-9.16}{3.15-9.5}=\frac{60-144}{45-45},$$
$$y=\frac{-84}{0}.$$

Te wartości przedstawiają się pod postacią takich ułamków, jakie po raz pierwszy spotykamy w algiebrze. Znaczenie ułamku, którego mianownik jest zerem, musi być oddzielne objaśnione. Pozostawiając obszerniejszy rozbiór tego rodzaju wartości dalszemu wykładowi algiebry, możemy tutaj w ten sposób zdać sobie sprawę z tego, jakie znaczenie ma ułamek, którego mianownik jest zerem, a licznik różny od zera:

Przypuśćmy, że w ułamku:

$$\frac{m}{n},$$

pozostawiamy licznik stały i niezmienny, a mianownik zmniejszamy ustawicznie; wtedy na zasadzie znanych nam własności ułamków, wartość całego ułamku będzie ustawicznie powiększać się. Tak naprzykład, czyniąc kolejno:

n równém; 0,1; 0,01; 0,001 ....

.... 0,000001 .... i t. d.

wartości ułamku, odpowiednie powyższym wartościom mianownika będą:

$10m$; $100\ m$; $1000\ m$; $1000000\ m$ i t. d.

Przy nieograniczoném więc zmniejszaniu się mianownika n, wartość całego ułamku nieograniczenie powiększać się będzie. Jeżeli więc mianownik stanie się 0, wtedy ułamek przyjmie wartość większą od wszelkiéj ilości pomyśleć się mogącéj. Taką ilość nazywamy *nieskończenie wielką*, i oznaczamy ją znakiem ∞.

Mamy więc:

$$\frac{m}{0} = \infty.$$

W rozwiązanym zatém powyżéj zadaniu, wartości na x i na y przedstawiają się pod postacią ilości nieskończenie wielkich.

Zwracając się teraz do samych równań:

$$3x + 5y = 16,$$
$$9x + 15y = 20,$$

łatwo się przekonać można, że one jednocześnie nie są *możliwemi*. W saméj rzeczy: gdybyśmy chcieli w nich wyrugować np. y zwykłym sposobem, i pomnożyli w tym celu pierwsze przez 3, wtedy otrzymalibyśmy:

$$9x + 15y = 48 \quad (48)$$

Ponieważ zaś drugie jest:

$$9x + 15y = 20,$$

przeto jedno z nich jest sprzeczne z drugiém, gdyż nie ma takich wartości x i y przy których jednocześnie byłoby: $9x + 15y$ równe raz 48, drugi raz 20. Właściwie więc równania dane są niemożliwe do rozwiązania; czyli inaczéj mówiąc: nie ma takich wartości na x i na y, któreby jednocześnie zadosyć im czyniły. Wszakże dla ujednostajnienia sposobów mówienia, i dla innych jeszcze powodów, które uczący się z czasem pozna, i w tym przypadku mówić będziemy, że równania dają się rozwiązać, tylko że wartości na niewiadome są *nieskończenie wielkie*.

Weźmy jeszcze inny przykład. Przypuśćmy, że mamy do rozwiązania równania:

$$7x + 2y = 13,$$
$$21x + 6y = 39$$

Używając do rozwiązania tych równań wzorów ogólnych, otrzymamy:

$$x = \frac{13.6 - 39,2}{7.6 - 21.2} = \frac{78 - 78}{42 - 42} = \frac{0}{0}.$$

$$y = \frac{7.39 - 21.13}{7.6 - 21.2} = \frac{273 - 273}{42 - 42} = \frac{0}{0}.$$

I tutaj znowuż otrzymaliśmy nowe, szczególnego rodzaju wartości na x i y, które należy objaśnić.

Objaśnienie to nie trudno nam znaleźć z następującego rozważania: Jeżeli wartość jakiegokolwiek ułamku $\frac{m}{n}$ oznaczymy głoską q, wtedy:

$$m = n \,.\, q.$$

gdyż dzielna jest równą iloczynowi z dzielnika przez iloraz. Wartość więc ułamku q w *każdym przypadku* powinna zadosyć czynić powyższéj równości. Gdy licznik i mianownik ułamku stają się zerami, wówczas znaczenie ułamku q powinno być takie, aby:

$$0 = 0.q.$$

Lecz równości takiéj czyni zadosyć każda wartość na q; — gdyż 0 pomnożone przez jakąkolwiek ilość, daje na wypadek 0; przeto q może oznaczać *jakąkolwiek ilość*. Wyrażenie zatém $\frac{0}{0}$ jest znakiem jakiéjkolwiek ilości. Taka ilość, która może przyjąć jakąkolwiek wartość nazywa się ilością *nieoznaczoną*. Znak $\frac{0}{0}$ jest znakiem *ilości nieoznaczonéj*.

Zwracając się teraz do danych równań, łatwo się przekonać, że w uważanym przypadku równania te nie mogą dać oznaczonych wartości na niewiadome. W rzeczy saméj: jeżelibyśmy w równaniach:

$$7x+2y = 13,$$
$$21x+6y = 39;$$

probowali wyrugować jedną z niewiadomych, np. y, sposobem porównania współczynników, otrzymalibyśmy:

$$21x+6y = 39,$$
$$21x+6y = 39;$$

co pokazuje, że w gruncie rzeczy dane dwa równania do rozwiązania, są jedném tylko równaniem, a zatem są niedostateczne do zupełnego oznaczenia wartości na x i na y. (paragraf 205).

PRZYKŁADY XXIII.

1. $3x-4y=2$, $7x-9y=7$.
2. $7x-5y=24$, $4x-3y=11$.
3. $3x+2y=32$, $20x-3y=1$.
4. $11x-7y=37$, $8x+9y=41$.
5. $7x+5y=60$, $13x-11y$ 10.
6. $6x-7y=42$, $7x-6y=75$.
7. $10x+9y=290$, $12x-11y=130$.
8. $3x-4y=18$, $3x+2y=0$.
9. $4x-\frac{y}{2}=11$, $2x-3y=0$.
10. $\frac{x}{3}+3y=7$, $\frac{4x-2}{5}=3y-4$.
11. $6x-5y=1$, $7x-4y=8\frac{1}{2}$.
12. $2x+\frac{y-2}{5}=21$, $4y+\frac{x-4}{6}=29$.
13. $\frac{3x}{19}+5y=13$, $2x+\frac{4-7y}{2}$ 33.
14. $\frac{x}{7}+\frac{y}{14}=10\frac{1}{2}$, $2x-y=7$.
15. $\frac{x+y}{3}+\frac{y-x}{2}=9$, $\frac{x}{2}+\frac{x+y}{9}=5$.
16. $\frac{3x}{4}-\frac{2y}{3}=1$, $\frac{7x}{3}+\frac{5y}{6}=6$.
17. $\frac{x+y}{3}+x=15$, $\frac{x-y}{5}+y=6$.
18. $\frac{7x}{6}+\frac{5y}{3}=34$, $\frac{7x}{8}+\frac{3y}{4}=\frac{5y}{8}+12$.

19. $\frac{x+y}{8}+\frac{x-y}{6}=5$, $\frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{3}=10$.

20. $\frac{2x}{3}+\frac{3y}{2}=16\frac{1}{6}$, $\frac{3x}{2}-\frac{2y}{3}=16\frac{1}{6}$.

21. $\frac{x-1}{8}+\frac{y-2}{5}=2$, $2x+\frac{2y-5}{3}=21$.

22. $\frac{7x}{4}+\frac{5y}{8}=20$. $\frac{3x}{5}+\frac{7y}{4}=2x-7$.

23. $\frac{2x+3y}{5}=10-\frac{y}{3}$, $\frac{4y-3x}{6}=\frac{3x}{4}+1$.

24. $\frac{1-3x}{7}+\frac{3y-1}{5}=2$. $\frac{3x+y}{11}+y=9$.

25. $2(2x+3y)=3(2x-3y)+10$,
$4x-3y=4(6y-2x)+3$.

26. $3x+9y=2{,}4$. $0{,}21x-0{,}06y=0{,}03$.

27. $0{,}3x+0{,}125y=x-6$, $3x-0{,}5y=28-0{,}25y$.

28. $0{,}08x-0{,}21y=0{,}33$. $0{,}12x+0{,}7y=3{,}54$.

29. $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=1$, $\frac{18}{x}+\frac{20}{y}=16$.

30. $x-4y=7$, $\frac{x}{3y}+\frac{11}{10}=\frac{4x-5y}{5y}$.

31. $\frac{x+1}{y-1}-\frac{x-1}{y}=\frac{6}{y}$, $x-y=1$.

32. $4x+y=11$, $\frac{y}{5x}=\frac{7x-y}{3x}-\frac{23}{15}$.

33. $\frac{x+\frac{y}{2}-3}{x-5}+7=0$,
$\frac{3y-10(x-1)}{6}+\frac{x-y}{4}+1=0$.

34. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $bx-ay=0$.

35. $x+y=a+b$, $bx+ay=2ab$.

36. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$.

37. $(a+c)x-by=bc$, $x+y=a+b$.

38. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=c$, $\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0$.

39. $x+y=c$, $ax-by=c(a-b)$.

40. $a(x+y)+b(x-y)=1$, $a(x-y)+b(x+y)=1$.

41. $\frac{x-a}{b}+\frac{y-b}{a}=0$, $\frac{x+y-b}{a}+\frac{x-y-a}{b}=0$.

42. $(a+b)x-(a-b)y=4ab$,
$(a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2$.

43. $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a$, $\frac{x-y}{2ab}=\frac{x+y}{a^2+b^2}$.

44. $(a+h)x+(b-h)y=c$, $(b+k)x+(a-k)y=c$.

45*. $\frac{13}{x+2y+3}=-\frac{3}{4x-5y+6}$,
$\frac{3}{6x-5y+4}=\frac{19}{3x+2y+1}$.

46*. $ax=by+\frac{a^2+b^2}{2}$, $(a-b)x=(a+b)y$.

47*. $\frac{x+y-1}{x-y+1}=a$, $\frac{y-x+1}{x-y+1}=ab$.

XXIV.

Równania jednoczesne stopnia pierwszego, zawierające więcéj niż dwie niewiadome.

215. Gdy są dane trzy równania, zawierające trzy niewiadome, wtedy z dwóch z tych równań możemy wyprowadzić jedno, zawierające tylko dwie niewiadome, za pomocą sposobów, podanych w poprzednim rozdziale. Następnie z trzeciego z danych równań i jednego z dwóch pierwszych, możemy otrzymać nowe równanie, zawierające tylko dwie też same niewiadome. Tym sposobem miéć będziemy dwa równania zawierające tylko dwie niewiadome, których wartości mogą być oznaczone sposobami podanemi w poprzednim rozdziale. Podstawiając tak znalezione wartości w jedno z danych równań, znajdziemy wartość i trzeciéj niewiadoméj.

216. Rozwiązać równania:

$$7x+3y-2z=16 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$2x+5y+3z=39 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$5x-\ y+5z=31 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aby można było łatwo wskazywać te równania o których mowa, oznaczamy je liczbami (1), (2), (3); i równania w dalszym ciągu otrzymywane oznaczać będziemy w podobny sposób.

Pomnóżmy (1) równanie przez 3, (2) przez 2; otrzymamy:

$$21x+9y-6z=48,$$
$$4x+10y+6z=78;$$

dodając te równania, będzie;

$$25x+19y=126 \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Pomnóżmy następnie (1) przez 5, i (3) przez 2, będzie:

$$35x+15y-10z=80,$$
$$10x-\ 2y+10z=62;$$

przez dodanie zaś:

$$45x+13y=142 \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Należy nam teraz znaleść wartości x i y z równań (4) i (5).

Pomnóżmy (4) przez 9, a (5) przez 5; będzie:

$$225x+171y=1134,$$
$$225x+\ 65y=\ 710;$$

odejmując te dwa równania, otrzymamy:

$$106y=424;$$

skąd: $$y=4.$$

Podstawmy znalezioną wartość na y w równanie (4) miéć będziemy:

$$25x+76=126;$$

skąd: $$25x=126-76=50,$$

a następnie: $$x=2.$$

Podstawiając nakoniec wartości na x i na y w równanie (1), będzie:

$$14+12-2z=16,$$

skąd: $$10=2z,$$

i następnie: $$z=5.$$

217. Rozwiązać:

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1 \quad . \ . \ . \quad (1)$$

$$\frac{5}{x}+\frac{4}{y}+\frac{6}{z}=24 \quad . \ . \ . \quad (2)$$

$$\frac{7}{x}-\frac{8}{y}+\frac{9}{z}=14 \quad . \ . \ . \quad (3).$$

Pomnóżmy równanie (1) przez 2, i dodajmy wypadek otrzymany do równania (2); — znajdziemy:

$$\frac{2}{x}+\frac{4}{y}-\frac{6}{z}+\frac{5}{x}+\frac{4}{y}+\frac{6}{z}=2+24$$

czyli: $$\frac{7}{x}+\frac{8}{y}=26 \quad . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Pomnóżmy równanie (1) przez 3 i dodajmy otrzymany iloczyn do równania (3) będzie:

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{9}{z}+\frac{7}{x}-\frac{8}{y}+\frac{9}{z}=3+14,$$

czyli: $$\frac{10}{x}-\frac{2}{y}=17 \quad . \ . \quad (5).$$

Pomnóżmy (5) przez 4; i dodajmy otrzymane równanie do równania (4); — będzie:

$$\frac{40}{x}-\frac{8}{y}+\frac{7}{x}+\frac{8}{y}=68+26;$$

czyli: $$\frac{47}{x}=94;$$

skąd: $$47=94x,$$

i nakoniec: $$x=\frac{47}{94}=\frac{1}{2}.$$

Podstawiając tak znalezioną wartość na x w równanie (5), będzie: $$20-\frac{2}{y}=17,$$

skąd: $$\frac{2}{y}=20-17=3,$$

a samo: $$y=\frac{2}{3}.$$

Podstawmy nareszcie te wartości na x i y w równanie (1); — otrzymamy: $2+3-\frac{3}{z}=1,$

czyli: $$\frac{3}{z}=4,$$

skąd: $$z=\frac{3}{4}.$$

218. Rozwiązać równania:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=3 \quad . \ . \ . \quad (1),$$

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=5 \quad . \ . \ . \quad (2),$$

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=4 \quad . \ . \ . \quad (3).$$

Odejmijmy równanie (1) od (2); — będzie:

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=5-3,$$

czyli: $$\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=2 \quad . \ . \ . \ . \quad (4).$$

Odejmując (4) od (3), otrzymamy:

$$\frac{2x}{a}=2;$$

czyli: $$\frac{x}{a}=1; \qquad \text{skąd:} \quad x=a.$$

Dodając równanie (4) do równania (3), otrzymamy:

$$\frac{2z}{c}=6,$$

skąd: $$\frac{z}{c}=3,$$

a następnie: $$z=3c.$$

Przez podstawienie wartości na x w równanie (1) znajdziemy nakoniec: $y=2b$.

219. W podobny sposób możemy postępować, jeżeli liczba równań i ilości niewiadomych jest większą od trzech.

219_1. Gdybyśmy chcieli rozwiązać trzy równania z *trzema* niewiadomemi *sposobem Bézout*, (§ 214_1) wtedy należałoby wprowadzić do danych równań *dwa* mnożniki nieoznaczone. Następujący przykład najlepiéj objaśni sposób postępowania:

Przypuśćmy, że chcemy rozwiązać równania:

$$5x+2y+3z=28,$$
$$8x-3y+2z=15,$$
$$6x-y-2z=1.$$

W tym celu pomnóżmy pierwsze z nich przez czynnik nieoznaczony m, — drugie przez drugi czynnik nieoznaczony n, a trzecie zostawmy bez zmiany. Będzie:

$$5mx+2my+3mz=28m,$$
$$8nx-3ny+2nz=15n,$$
$$6x-y-2z=1.$$

Dodajmy teraz te trzy równania, wyłączając jednocześnie x, y i z za nawiasy z tych wyrazów, do których one wchodzą jako wspólne czynniki. Otrzymamy równanie:

$$(5m+8n+6)x+(2m-3n-1)y+$$
$$+(3m+2n-2)z=28m+15n+1 \quad . \quad . \quad (1)$$

Do równania tego wchodzą oprócz wszystkich trzech niewiadomych, jeszcze dwie ilości dowolne m, n. Ponieważ te ostatnie mogą przyjmować wszystkie wartości, jakie tylko uważamy za stosowne im nadać,

przeto możemy w ich miejsce podstawić takie wartości, przy których *dwa* współczynniki przy *dwóch* niewiadomych w równaniu (1) stałyby się zerami. Podstawiając więc zamiast m i n stosownie dobrane wartości w równanie (1), otrzymamy z tegoż równania, równanie zawierające tylko jedną niewiadomą, z którego taż niewiadoma może być następnie oznaczoną. I tak przypuśćmy, że chcemy najprzód znaleść wartość na x. Wtedy za m i n podstawiamy w równaniu (1) takie wartości, przy których współczynniki przy y i z stałyby się zerami, to jest przy których byłoby:

$$2m-3n-1=0,$$
$$3m+2n-2=0.$$

Te wartości otrzymują się przez rozwiązania równań:

$$2m-3n=1,$$
$$3m+2n=2.$$

Mnożąc pierwsze z nich przez 2 a drugie przez 3, wypada:

$$4m-6n=2,$$
$$9m+6n=6;$$

dodając je, otrzymamy:

$$13m=8,$$

skąd:
$$m=\frac{8}{13}$$

Podobnie znajdziemy, że:

$$n=\frac{1}{13}.$$

Podstawiając te wartości na m i na n w równanie (1) znajdziemy:

$$\left(5\times\frac{8}{13}+8\times\frac{1}{13}+6\right)x+0\,.\,y+0\,.\,z=$$
$$=28\times\frac{8}{13}+15\times\frac{1}{13}+1,$$

czyli: $$\left(\frac{40}{13}+\frac{8}{13}+6\right)x=\frac{224}{13}+\frac{15}{13}+1.$$

Znosząc tutaj mianownik 13 będzie:

$$(40+8+78)x=224+15+13,$$

czyli: $$126x=252;$$

skąd nakoniec: $$x=\frac{252}{126}=2.$$

Chcąc znaleźć wartość na y, należy zamiast m i n podstawić w równanie (1) takie wartości, przy których byłoby:

$$5m+8n+6=0.$$
$$3m+2n-2=0.$$

Postępując podobnie jak to było pokazane przy wynajdywaniu wartości na x, znajdziemy, że:

$$y=3.$$

Nakoniec na z znajdziemy wartość następną:

$$z=4.$$

Gdyby było danych do rozwiązania cztery równania z czterema niewiadomemi, wtedy należałoby wprowadzić do tychże równań trzy ilości dowolne; i t. d.

PRZYKŁADY XXIV.

1. $x+3y+2z=11,$
   $2x+y+3z=14,$
   $3x+2y+z=11.$

2. $5x-6y+4z=15$
   $7x+4y-3z=19$
   $2x+y+6z=46.$

3. $4x-5y+z=6,$
   $7x-11y+2z=9,$
   $x+y+3z=12.$

4. $7x-3y=30,$
   $9y-5z=34,$
   $x+y+z=33.$

5. $3x-y+z=17,$
   $5x+3y-2z=10,$
   $7x+4y-5z=3.$

6. $x+y+z=5,$
   $3x-5y+7z=75,$
   $9x-11z+10=0.$

7. $x+2y+3z=6,$
   $2x+4y+2z=8,$
   $3x+2y+8z=101,$

8. $\frac{6y-4x}{3z-7}=1,$
   $\frac{5z-x}{2y-3z}=1,$
   $\frac{y-2z}{3y-2x}=1.$

9. $\frac{x+2y}{7}=\frac{3y+4z}{8}=\frac{5x+6z}{9},$
   $x+y-z=126.$

10. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6},$
    $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3\frac{5}{6},$
    $\frac{4}{x}+\frac{3}{y}=\frac{4}{z}.$

11. $y+z=a$*)
    $z+x=b$
    $x+y=c$

(*) Równania te i *podobne* do nich najprościéj rozwiązują się przez dodanie ich wszystkich, podzielenie summy przez współczynnik wspólny przy wszystkich niewiadomych i następnie odjęcie kolejne każdego z danych równań od równania otrzymanego z poprzednich działań. W uważanych równaniach np. będzie z dodania ich: $2x+2y+2z=a+b+c,$

następnie: $x+y+z=\frac{a+b+c}{2},$

12. $x+y+z=a+b+c,$
$x+a=y+b=z+c.$

13. $y+z-x=a,$
$z+x-y=b,$
$x+y-z=c.$

14. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$
$\frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{b}=1.$
$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1.$

15. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=3,$
$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}=1,$
$\frac{2a}{x}-\frac{b}{y}-\frac{c}{z}=0.$

16. $v+x+y+z=14,$
$2v+x=2y+z-2;$
$3v-x+2y+2z=19.$
$\frac{v}{3}+\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=14.$

17*. $x+y=16,$
$y+z=28,$
$z+x=22.$

18*. $x+2y=23,$
$3x+4z=57,$
$5y+6z=94.$

19*. $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{b-c}+\frac{z}{c+a}=2c,$
$\frac{x}{a-b}-\frac{y}{b-c}+\frac{z}{c-a}=2a,$
$\frac{x}{a-b}-\frac{y}{b-c}-\frac{z}{c+a}=2a-2c.$

Odejmując pierwsze równanie:

$$y+z=a$$

od powyższego, otrzymamy:

$$x=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}.$$

i t. d.

T.

20*. $\frac{x}{b+c}+\frac{y}{c-a}=a+b.$
$\frac{y}{c+a}-\frac{z}{a-b}=b+c,$
$\frac{z}{a+b}+\frac{x}{b-c}=c+a.$

21*. $xy+yz+zx=9xyz,$ (*)
$yz+2zx-3xy=-4xyz,$
$3yz-2zx+xy=4xyz.$

22*. $x+y+z=3a+b+c,$
$x+y+t=a+3b+c,$
$x-z-t=a+b-c,$
$y+z-t=3a+b-c.$

XXIII.

Zagadnienia, prowadzące do równań jednoczesnych stopnia pierwszego, zawierających więcéj niż jedną niewiadomą.

220. Rozwiążemy teraz kilka zagadnień, prowadzących do równań jednoczesnych stopnia pierwszego, o więcéj niż jednéj niewiadoméj:

Znaleść ułamek, który staje się równym $\frac{2}{3}$, gdy licz-

---

(*) Należy najprzód każde z tych równań podzielić przez xyz i t. d.

nik zostanie powiększonym o 2, a równym $\frac{4}{7}$, gdy mianownik zostanie powiększonym o 4.

Niech x oznacza licznik, a y mianownik szukanego ułamku; wtedy z założenia mamy:

$$\frac{x+2}{y}=\frac{2}{3}\ ;\ \frac{x}{y+4}=\frac{4}{7}\ .$$

Znosząc mianowniki, będzie:

$$3x-2y=-6 \quad . \ . \ (1)$$
$$7x-4y=16 \quad . \ . \ (2).$$

Mnożąc (1) przez 2 i odejmując następnie od (2), otrzymamy:

$$7x-4y-6x+4y=16+12,$$

czyli: $x=28.$

Podstawiając wartość na x w (1) znajdziemy:

$$84-2y=-6,$$

skąd: $2y=90,$

i nakoniec: $y=45.$

Szukany zatem ułamek jest: $\frac{28}{45}$.

221. Pewna summa pieniędzy była podzielona równo pomiędzy pewną liczbę osób: gdyby osób było o sześć więcéj, wtedy każda otrzymałaby o dwa ruble mniéj, aniżeli teraz rzeczywiście dostała; — gdyby znowuż osób było o trzy mniéj, wtedy każda otrzymałaby o dwa ruble więcéj. Znaleść ile było osób i ile każda otrzymała?

Niech x oznacza liczbę osób, a y liczbę rubli, jaką każda otrzymała. Wtedy xy będzie liczbą rubli,

która została podzieloną. Z warunków zadania wypada, że:

$$(x+6)(y-2)=xy \quad . \ . \ . \quad (1),$$
$$(x-3)(y+2)=xy \quad . \ . \ . \quad (2).$$

Z równania (1) otrzymujemy:

$$xy+6y-2x-12=xy$$

skąd: $6y-2x=12 \quad . \ . \ . \quad (3).$

Z równania (2) będzie:

$$xy+2x-3y-6=xy;$$

zatém: $2x-3y=6 \quad . \ . \ . \ . \quad (4).$

Z równań (3) i (4) otrzymamy przez dodanie:

$$3y=18,$$

skąd: $y=6.$

Podstawiając wartość na y w (4), będzie:

$$2x-18=6,$$

przeto: $2x=24$

i nakoniec: $x=12.$

Więc było 12 osób i każda dostała po 6 rubli.

222. Pewna liczba dwucyfrowa jest równa pięć razy wziętéj summie jéj cyfr; dodając do téj liczby 9 otrzymamy nową liczbę dwucyfrową, złożoną z tych samych cyfr, ale napisanych w odwrotnym porządku. Znaleść tę liczbę.

Niech x oznacza cyfrę, stojącą na miejscu dziesiątków, a y cyfrę, stojącą na miejscu jedności. Wtedy sama liczba będzie $10x+y$; i podług założenia jest ona pięć razy większą od summy jéj cyfr, przeto:

$$10x+y=5(x+y) \quad . \ . \ . \quad (1).$$

Jeżeli, daléj, do téjże liczby dodamy 9, wtedy otrzy-

mamy liczbę, złożoną z tychże samych cyfr, ale napisanych w odwrotnym porządku, to jest $10y+x$, więc:

$$10x+y+9=10y+x \quad . \quad (2).$$

Z równania (1) znajdujemy:

$$5x=4y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Z równania zaś (2) otrzymamy:

$$9x+9=9y,$$

czyli: $x+1=y.$

Podstawiając to znaczenie na y w równanie (3), znajdziemy:

$$5x=4x+4,$$

skąd: $x=4.$

Z równania zaś (3) otrzymamy:

$$y=5.$$

Szukana zatém liczba jest 45.

223. Pociąg kolei żelaznéj, po godzinnéj podróży, został w drodze wskutek wypadku, zatrzymany przez 24 minuty, poczém wyruszywszy z prędkością o $\frac{1}{5}$ większą od poprzedniéj, przybył na miejsce przeznaczenia o 15 minut za późno. Gdyby wypadek zdarzył się o 5 wiorst daléj, wtedy pociąg opóźnił by się tylko o 2 minuty. Znaleść początkową prędkość pociągu i odległość, jaką pociąg przejechał.

Oznaczmy przez $5x$ liczbę wiorst jaką pociąg początkowo przejeżdżał na godzinę, a przez y oznaczmy liczbę mil, zawartą w całéj odległości jaką całkowicie przebył. Wtedy $y-5x$ oznaczać będzie tę odległość, w wiorstach, jaką pociąg jeszcze ma przejechać po zatrzymaniu. Tę odległość pociąg przebył by

w $\frac{y-5x}{5x}$ godzin, jadąc z prędkością początkową; z prędkością zaś powiększoną, pociąg przebędzie ją w $\frac{y-5x}{6x}$ godzin. Ponieważ pociąg stał przez minut 24, a spóźnił się tylko o 15 minut, przeto pozostała część drogi została przebytą w czasie o 9 minut krótszym od tego w jakim byłaby przebytą, gdyby pociąg prędkości nie powiększył. A że 9 minut stanowi $\frac{9}{60}$ godziny, przeto:

$$\frac{y-5x}{6x}=\frac{y-5x}{5x}-\frac{9}{60} \quad . \quad . \quad (1)$$

Gdyby wypadek zaszedł o 5 wiorst daléj, wtedy pociąg miałby do przebycia jeszcze $y-5x-5$ wiorst. Wtedy mielibyśmy:

$$\frac{y-5x-5}{6x}=\frac{y-5x-5}{5x}-\frac{7}{60}. \quad . \quad (2)$$

Odejmijmy równanie (2) od (1); będzie:

$$\frac{5}{6x}=\frac{5}{5x}-\frac{2}{60},$$

skąd: $50=60-2x;$

a następnie: $2x=10,$ i samo $x=5.$

Podstawiając tę wartość na x w równanie (1) znajdziemy, przez rozwiązanie tegoż równania:

$$y=47\frac{1}{2}.$$

224. Trzy osoby A, B i C mogą razem wykonać pewną robotę w 30 dniach; A i B wykonaliby razem też robotę w 32 dniach. zaś B i C wykonaliby ją. ra-

zem pracując, w 120 dniach. Znaleść w jakim czasie mogłaby wykonać tęż samą robotę każda z tych osób, pracując oddzielnie?

Oznaczmy głoską x liczbę dni, przez którą sama osoba A wykonałaby tę robotę, głoską y liczbę dni, przez którą wykonałaby ją osoba B, i głoską z, liczbę dni, przez którą sama osoba C mogłaby ją wykonać.

Wtedy będzie:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{30} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{32} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{120} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Odejmując równanie (2) od równania (1), otrzymamy:

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{30}-\frac{1}{32}=\frac{1}{480},$$

Odejmując daléj równanie (3) od (1), otrzymamy:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{30}-\frac{1}{120}=\frac{1}{40}.$$

Przeto $x=40$, a $z=480$; przez podstawienie zaś tych wartości w którekolwiek z danych równań, znajdziemy, że $y=160$.

225. Należy tu zwrócić uwagę, że dane zadanie może być często rozwiązane rozmaitemi sposobami, z użyciem większéj lub mniejszéj liczby głosek, służących do przedstawienia ilości niewiadomych. Aby to objaśnić przykładem, weźmy bardzo proste zagadnienie: Znaleść takie dwie liczby, aby ich summa była równą 100, i aby jedna z nich stanowiła dwie trzecie części drugiéj.

Aby je rozwiązać możemy tak rozumować: Niech x oznacza większą a y mniejszą liczbę; wtedy mieć będziemy:

$$y=\frac{2x}{3}; \quad x+y=100.$$

Albo też możemy postępować w taki sposób: Jeżeli przez x oznaczymy większą liczbę, wtedy $100-x$ oznaczać będzie mniejszą; zatém:

$$100-x=\frac{2x}{3}.$$

Albo wreszcie możemy rozumować i w ten sposób: Oznaczmy przez $3x$ liczbę większą; wtedy $2x$ oznaczać będzie liczbę mniejszą, i równanie do rozwiązania będzie:

$$3x+2x=100.$$

Rozwiązując w zupełności zadanie którymkolwiek z tych sposobów, znajdziemy, że szukane liczby są 60 i 40.

Z tego powodu czytelnik będzie prawdopodobnie w stanie rozwiązać niektóre z zadań, podanych na końcu tego rozdziału, używając tylko jednéj głoski do oznaczenia ilości niewiadoméj; jak również z drugiéj strony, może mu się wydać naturalniejszém, użycie do rozwiązania niektórych zadań rozdziału XXII dwóch głosek, zamiast jednéj. Jako ogólne prawidło można powiedzieć że użycie większéj liczby niewiadomych, czyni rachunki dłuższemi, lecz za to ułatwia ułożenie równań i daje możność łatwiejszego śledzenia biegu roboty. Z tego to właśnie powodu jest dla początkujących korzystniejszém i odpowiedniejszém.

Dla uczącego się zalecamy, jako dobre ćwiczenie, rozwiązanie zagadnienia § 204 za pomocą użycia czterech głosek do oznaczenia czterech niewiadomych, tam wchodzących.

PRZYKŁADY XXV.

1. Jeżelibyśmy tę summę pieniędzy, jaką ma osoba A powiększyli o 36 rs., wtedy miałaby ona trzy razy tyle, ile ma osoba B; jeżelibyśmy tę summę pieniędzy, jaką ma osoba B zmniejszyli o 5 rs., wtedy miałaby ona połowę tego, co ma osoba A. Ileż każda z tych osób ma pieniędzy?

2. Znaleść takie dwie liczby, że summa pierwszéj z nich i połowy drugiéj wynosi 20, i summa drugiéj i trzeciej części pierwszéj stanowi także 20?

3. Gdyby osoba B oddała 25 rs. osobie A, wtedy obie osoby miałyby jednakowe kwoty pieniędzy; gdyby zaś osoba A oddała 22 rs. osobie B, wtedy ta ostatnia miałaby dwa razy więcéj niż osoba A. Ileż każda z tych osób ma pieniędzy?

4. Znaleść dwie liczby, mające takie własności: połowa pierwszéj liczby dodana do trzeciéj części drugiéj liczby stanowi summę równą 32; i nadto: czwarta część pierwszéj liczby dodana do piątéj części drugiéj stanowi 18.

5. Kupił ktoś raz 8 funtów herbaty i 3 funty cukru za 16 rs. 42 kop., i drugi raz po téj saméj cenie 5 funtów herbaty i 4 funty cukru za 10 rs. 56 kop.

Znaleść cenę jednego funta herbaty i jednego funta cukru.

6. Przed siedmioma laty osoba A miała trzy razy więcéj lat wieku, niż osoba B; za siedm zaś lat osoba A mieć będzie 2 razy więcéj lat niż osoba B. Ileż każda z nich ma lat obecnie?

7. Znaleść ułamek, który się stanie równym $\frac{1}{3}$, gdy jego licznik powiększymy o 1, i równym $\frac{1}{4}$ gdy jego mianownik powiększymy o 1.

8. Kij od wędki składa się z dwóch części: stosunek długości górnéj części do długości dolnéj części jest równy stosunkowi 5:7; 9 razy zaś wzięta górna część, wraz z 13 razy wziętą dolną częścią, przewyższa 11 razy wziętą długość całego kija o 36 cali. Znaleść długości obu części kija?

9*. Dwaj chłopcy mieli po pewnéj liczbie orzechów. Jeden z nich rzekł do drugiego: daj mi 5 twoich orzechów, to mieć będę trzy razy tyle co ty. Nie, odpowiedział drugi, daj mi ty raczéj 2 orzechy, to mieć będę pięć razy więcéj, niż ty. Ileż miał każdy? Toż samo zadanie wyrazić i rozwiązać w sposób ogólny.

10. Kupiec ma dwa gatunki wina: jeżeli je zmiesza w takim stosunku, że na 2 kwarty lepszego wina, weźmie trzy kwarty gorszego, wtedy mieszanina będzie po $1\frac{3}{4}$ rs. kwarta; jeżeli zaś zmiesza je w takim stosunku, że na siedm kwart lepszego, weźmie 8 kwart gorszego, wtedy mieszanina wypadnie

po $1\frac{5}{6}$ rs. kwarta. Znaleść cenę jednéj kwarty każdego gatunku wina?

11. Gospodarz wiejski sprzedał jednéj osobie 30 korcy pszenicy i 40 korcy owsa za 400 rs., — drugiéj zaś osobie 50 korcy pszenicy i 30 korcy owsa, po téj saméj cenie, za 520 rs. Znaleść cenę korca pszenicy i korca owsa?

12*. Ma ktoś dwa kubki i jedną pokrywkę do obu. Jeżeli położy pokrywkę na pierwszy kubek, wtedy jest on wart dwa razy tyle co drugi; — jeżeli zaś położy pokrywkę na drugim kubku, wtedy wartość jego będzie stanowić $1\frac{1}{3}$ część wartości pierwszego kubka. Ileż kosztuje każdy kubek, jeżeli wiemy, że kubek bez pokrywki jest wart o 30 rs. mniéj, aniżeli z pokrywką?

13. A i B zakładają się o 10 rs.; jeżeli A przegra, wtedy pozostanie mu tyle, ile wówczas miéć będzie B; jeżeli zaś B przegra, wtedy to co mu pozostanie, stanowić będzie połowę tego, co miéć wówczas będzie A. Ileż każda z tych osób miała pieniędzy, zakładając się?

14. Jeżeli licznik pewnego ułamku powiększymy o 1, a mianownik jednocześnie zmniejszymy o 1, wtedy wartość ułamku stanie się równą 1; jeżeli zaś powiększymy licznik o mianownik, i jednocześnie mianownik zmniejszymy o licznik, wtedy wartość ułamku stanie się równą 4. Znaleźć ten ułamek?

15. Pewna liczba słupów jest ustawiona na linii prostéj, w równych od siebie odległościach. Jeżeli do podwojonéj liczby słupów dodamy odległość dwóch po sobie następujących słupów, wyrażoną w stopach, otrzymamy na summę 68. Jeżeli od cztery razy wziętéj odległości pomiędzy dwoma po sobie następującemi słupami odejmiemy połowę liczby słupów, otrzymamy na resztę 68. Znaleść odległość pomiędzy skrajnemi słupami.

16. Pewien dobroczynny człowiek, rozdając wsparcie pomiędzy ubogich, przekonał się, że brakowałoby mu 10 rs. gdyby każdemu ubogiemu chciał dać po 5 rs.; postanowił przeto dać każdemu tylko po 4 rs.: wykonawszy to, znalazł, że zostało mu 5 rs. Iluż było ubogich i ile rubli do rozdzielenia?

17. Pewne towarzystwo, przy płaceniu rachunku w restauracyi znalazło, że gdyby w niém było o trzy osoby więcéj, a rachunek pozostał ten sam, wtedy, dla uregulowania go, każda osoba zapłaciłaby o 1 rs. mniéj; gdyby zaś było o dwie osoby mniéj, wtedy każda musiałaby zapłacić o 1 rs. więcéj. Znaleść ile było osób i ile każda zapłaciła.

18. Podłoga prostokątna jest takich wymiarów, że gdyby jéj szerokość powiększyć o dwie stopy a długość o trzy stopy, wtedy powierzchnia całéj podłogi powiększyłaby się o 64 stopy kwadratowe; gdyby zaś szerokość jéj powiększyła się o trzy stopy a długość o dwie, wtedy jéj powierzchnia powiększyła się o 68 stóp kwadratowych. Znaleść długość i szerokość podłogi?

19. Pewna liczba dwucyfrowa jest równa cztery razy wziętéj summie jéj cyfr; jeżeli dodamy do téj liczby 18, wtedy otrzymamy liczbę, złożoną z tych

samych cyfr, ale w odwrotnym porządku. Znaleść tę liczbę.

20. Dwie cyfry, stanowiące pewną liczbę zmieniają miejsce, przez dodanie do liczby 9; summa dwóch liczb tak otrzymanych jest równą 33. Znaleść te cyfry.

21. Gdy pewną liczbę dwucyfrową podwoimy i dodamy następnie 36, wtedy otrzymamy ten sam wypadek, jakibyśmy otrzymali odwracając porządek cyfr, podwajając tak otrzymaną liczbę i odejmując od wypadku 36; wiemy uadto, że sama liczba jest większą od cztery razy wziętéj summy jéj cyfr o 3. Znaleść tę liczbę.

22*. Dwie liczby dodane do siebie dają na summę s, podzielone przez siebie — dają na iloraz q i na resztę r. Znaleść te liczby.

23*. Kapitał, oddany na pewien procent, zamienił się po upływie 8 lat wraz z procentem na summę 6486 rs. Tenże sam kapitał, gdyby był oddany na procent, przy stopie procentu o 1 większéj, zamienił by się po upływie lat 5 na summę $6051\frac{1}{4}$ rs. Znaleść kapitał i stopę procentu?

24. Dwaj chłopcy A i B mają każdy pewną liczbę orzechów. Chłopiec A daje ze swoich orzechów chłopcu B tyle ile ma ten ostatni, poczém zaraz B oddaje A tyle, ile chłopcu A pozostało. Wtedy A daje znowuż B tyle, ile chłopcu B pozostało, a ten ostatni natychmiast mu oddaje tyle, ile chłopcu A pozostało. Okazało się, że po tém wszystkiém każdy z nich miał po 16 orzechów. Ileż miał każdy z początku?

25. Dwaj robotnicy A i B mogą razem wykonać pewną robotę w 30 dniach; lecz po 18 dniach robotnik B odchodzi, i A sam kończy robotę, pracując o 20 dni dłużéj. W jakim przeciągu czasu każdy z nich skończył by robotę, pracując sam?

26. Trzy osoby A, B i C mogą wypić beczkę piwa w 15 dni; A i B razem wypijają cztery trzecie tego, co wypija C; osoba C zaś wypija dwa razy tyle co A. Znaleść w jakim przeciągu czasu każda osoba sama mogłaby wypić tę beczkę piwa?

27. Zbiornik zawierający 1200 garncy zostaje napełniony wodą, wpływającą do niego trzema rurami razem A, B i C w ciągu 24 minut. Rura A potrzebowałaby sama o 30 minut więcéj do napełnienia zbiornika, aniżeli rura C; a przez rurę C wpływa o 10 garncy mniéj na minutę, aniżeli w tym samym czasie przez rury A i B razem. Znaleść w jakim czasie woda mogłaby napełnić zbiornik przez każdą rurę oddzielnie.

28*. Summa cyfr stanowiących pewną liczbę trzycyfrową równa się 9. Cyfra, stojąca na pierwszém miejscu z lewéj strony równa się ósméj części liczby, powstałéj z dwóch pozostałych cyfr; cyfra zaś stojąca na pierwszém miejscu z prawej strony, równa się także ósméj części liczby, powstałéj z dwóch pozostałych cyfr. Znaleść tę liczbę.

29. A i B są to dwa miasta, leżące nad brzegiem téj saméj rzeki, w odległości 24 wiorst od siebie. Podróżny który wyruszył z A, przebył odległość do B w 7 godzin, płynąc połowę drogi łódką w górę rzeki, i drugą połowę idąc pieszo. Z powrotem naj-

przód przeszedł pierwszą połowę drogi pieszo z prędkością, wynoszącą tylko trzy czwarte téj prędkości, z jaką szedł poprzednio ku B, a drugą połowę przepłynął łódką w dół rzeki z prędkością dwa razy większą od prędkości, z jaką płynął w górę rzeki, i tym sposobem przebył całą odległość w 6 godzin. Znaleść z jaką prędkością płynął i szedł początkowo od A do B.

30. Pociąg kolei żelaznéj po jednogodzinnéj jeździe, zostaje w skutek wypadku zatrzymany w drodze przez 15 minut, poczém wyruszywszy z prędkością, wynoszącą tylko $\frac{3}{4}$ prędkości poprzedniéj, przybywa na miejsce przeznaczenia o 24 minut zapóźno. Gdyby zatrzymanie nastąpiło o 5 wiorst daléj, wtedy pociąg przybył by na stacyę o 3 minuty wcześniej, aniżeli on w saméj rzeczy przybył. Znaleść z jaką prędkością jechał pociąg z początku i jaką odległość przebył?

31. Stosunek czasu, jakiego potrzebuje pociąg kuryerski do przebycia 120 wiorst, do czasu, jakiego potrzebuje pociąg zwyczajny do przebycia téj saméj odległości, jest równy 9 : 14? Pociąg zwyczajny traci tyle czasu na przystanki na stacyach, ileby potrzebował na przebycie 20 wiorst bez zatrzymywania się. Pociąg kuryerski zaś na przystanki traci tylko połowę tego czasu, co pociąg zwyczajny i jedzie o 15 wiorst na godzinę prędzéj. Znaleść prędkość każdego z tych pociągów?

32. Dwa pociągi kolei żelaznéj, jeden długi na 92 stopy, drugi zaś na 84 stopy, jadą po dwóch torach

równoległych. Jeżeli jadą w przeciwne strony, wtedy potrzebują $1\frac{1}{2}$ sekundy na to, aby się minąć; jeżeli zaś jadą w tym samym kierunku, wtedy prędszy potrzebuje 6 sekund na to, aby wyminąć wolniejszy. Znaleść z jakiémi prędkościami te pociągi jadą.

33. Droga żelazna prowadzi od miasta A do miasta C. O godzinie 12-éj w południe wychodzi z A pociąg towarowy, o godzinie zaś 1-éj po południu pociąg osobowy. Po przejściu $\frac{2}{3}$ odległości pociąg towarowy musi zwolnić swój bieg w skutek uszkodzenia lokomotywy, i jedzie z prędkością wynoszącą tylko $\frac{3}{4}$ prędkości pierwotnéj. O godzinie 2 minucie 40 następuje spotkanie się pociągów z powodu doścignięcia pociągu towarowego przez pociąg osobowy. Spotkanie to ma miejsce na 10 wiorst przed miastem C. Prędkość pociągu osobowego jest 2 razy większą od zmniejszonéj prędkości pociągu towarowego. Znaleść odległość miast A i C i prędkość każdego z pociągów?

34 Pewna summa pieniędzy została rozdzieloną pomiędzy osoby A, B i C w ten sposób, że dział osoby A przewyższał cztery siódme części summy działów osób B i C o 30 rs.; dział osoby B przewyższał trzy ósme części summy działów osób C i A także o 30 rs., i nakoniec dział osoby C przewyższał dwie dziewiąte części summy działów osób A i B również o 30 rs. Znaleść ile każda z tych osób dostała?

35. A i B pracując razem, mogą zarobić 40 rs. w ciągu dni 6; A i C pracując razem przez dni 9, zarabiają 54 rs.; i nakoniec B i C mogą razem zarobić 80 rs. w 15 dni. Znaleść ile każda z tych osób zarabia dziennie?

36. A i B mogą wykonać pewną robotę, pracując razem, w ciągu dni 48; A i C toż samo mogą wykonać w 30 dni; B zaś i C w $26\frac{2}{3}$ dnia. W ileż dni mogłaby wykonać tęż samą pracę każda z tych osób pracując sama?

37. Pewna liczba trzycyfrowa ma następujące własności: 1-sze jest ona równą 48 razy wziętéj summie cyfr; 2-re jeżeli od niéj odejmiemy 198, wtedy otrzymamy liczbę, złożoną z tychże samych cyfr, lecz w odwrotnym porządku; 3-cie summa skrajnych cyfr jest równą podwojonéj cyfrze średniéj. Znaleść tę liczbę.

38*. Summa odwrotnych wartości dwóch liczb jest równa 5. Połowa jednéj z tych liczb, dodana do trzeciéj części drugiéj liczby, daje na summę liczbę, równą iloczynowi liczb szukanych. Znaleść te dwie liczby.

39*. Majster i czeladnik otrzymali za wykonanie pewnéj roboty 80 rs. Majster pracował 7, czeladnik zaś 12 dni; za 3 dni roboty majster otrzymywał o $3\frac{3}{4}$ rs. mniéj zapłaty, aniżeli czeladnik za 5 dni roboty. Jakaż była dzienna płaca majstra a jaka czeladnika?

40*. Przyszedł ktoś do winiarni z dwoma dzbanami różnéj wielkości po wino, obliczywszy sobie, że jeżeli jeden dzban zostanie napełniony winem

po 1 rs. 20 kop. kwarta, a drugi winem po 1 rs. 60 kop. kwarta, wtedy za oba pełne dzbany zapłaci 11 rs. 80 kop.. i taką summę z sobą przyniósł. Lecz. przy napełnianiu dzbanów, przemieniono je przez pomyłkę, i w skutek tego z powyższéj summy oddano kupującemu 50 kop. reszty. Ileż kwart zawierał każdy dzban?

41*. Dwa ciała znajdują się w odległości d metrów. Jeżeli poruszać będą ruchem jednostajnym *ku* sobie, wtedy spotkają się po m sekundach. Jeżeli zaś poruszać się będą z témiż samémi prędkościami jedno za drugiem (w jedną stronę), wtedy spotkają się po n sekundach. Znaleść prędkości, z jakiémi się poruszają?

42*. Podług opowiadania Witruwiusza korona Hierona z Syrakuzy ważyła 20 funtów i, zanurzona w wodzie, traciła na swojéj wadze prawie $1\frac{1}{4}$ funta. Przypuszczając, że ona składała się tylko ze złota i srebra i wiedząc, że 19,64 funta złota. zanurzone w wodzie traci na wadze 1 funt, a 10,5 funtów srebra traci w wodzie także 1 funt, znaleść ile funtów złota a ile srebra zawierała korona?

43*. Stosunek różnicy dwóch liczb do ich summy jest równy 2:3; — stosunek zaś summy tychże samych liczb do ich iloczynu jest równy 3:5. Znaleść podług tych danych dwie te liczby?

44*. Ciało M wychodzi z pewnego punktu A i ruchem jednostajnym, przebiega odległość 323 metrów do punktu B, a następnie wraca natychmiast do A, niezatrzymując się w B. W 13 sekund późniéj wychodzi z B drugie ciało N w kierunku ku A także z jednostajną, ale *mniejszą* prędkością, i spotyka ciało

M po raz *pierwszy* w 10 sekund po swojém wyjściu, a poraz *drugi* w 45 sekund. Ileż metrów na sekundę przebiega każde ciało?

45*. Toż samo zagadnienie, w którem zamiast liczb 323, 13, 10 i 45 podstawimy ogólne znaki d, t, m i n.

46*. Dwóch posłańców A i B wysłano naprzeciwko siebie z dwóch miast, odległych na $11\frac{1}{2}$ mili. Jeżeli posłaniec A wyjdzie o $5\frac{3}{4}$ godziny wcześniéj aniżeli B, wtedy spotkają się oni w $6\frac{1}{8}$ godzin po wyjściu posłańca B. Jeżeli zaś posłaniec B wyjdzie $5\frac{3}{4}$ godz. wcześniéj, aniżeli A, wtedy spotkają się oni w $5\frac{5}{8}$ godzin po wyjściu posłańca A. Ileż mil każdy z tych posłańców przechodzi na godzinę?

47*. Ma ktoś dwa gatunki srebra: jeżeli zmiesza 10 kilogramów pierwszego gatunku z 5 kilogramami drugiego, wtedy otrzyma srebro próby $687\frac{1}{2}$(*) jeżeli zaś zmiesza $7\frac{1}{2}$ kilogramów pierwszego gatunku z $1\frac{1}{2}$ kilogramem drugiego gatunku, wtedy otrzyma srebro 625 próby. Jakiéj próby są te dwa gatunki srebra?

(*) Próba tak wyrażona odnosi się do układu metrycznego miar i oznacza, że w 1 kilogramie, czyli 1000 gramach aliażu znajduje się $687\frac{1}{2}$ gramów czystego srebra. T.

48*. Jubiler stopił dwie sztaby srebra, ważące razem 60 kilogramów, i otrzymał srebro $812\frac{1}{2}$ próby. Znaleść ile ważyła każda z tych sztab, jeżeli wiemy, że w pierwszej na każde 9 części srebra była 1 część miedzi, a w drugiéj na każde 3 części srebra była 1 część miedzi?

49*. Pewna liczba robotników, ugodzonych po jednakowéj zapłacie dziennej, zarobiła pewną summę. Gdyby było 7-miu robotników więcéj, a każdy otrzymywał o 25 kop. więcéj, wtedy wszyscy zarobiliby o 18 rs. 75 kop. więcéj. Gdyby zaś było 4-ch robotników mniéj i każdy dostawał o 15 kop. mniéj, wtedy wszyscy zarobili by o 9 rs. 20 kop. mniéj. Iluż było robotników i ile każdy otrzymywał dziennie?

50*. Pewna liczba robotników przeniosła stos kamieni w ciągu 6-ciu godzin z jednego miejsca na drugie. Gdyby było o dwóch robotników więcéj i gdyby każdy przy jedném przejściu brał o 4-ry funty więcéj, wtedy cały stos byłby przeniesiony w 5-ciu godzinach; gdyby zaś było o trzech robotników mniéj i gdyby każdy brał przy jedném przejściu o 5 funtów mniéj, wtedy stos byłby przeniesiony w ciągu 8-miu godzin. Iluż robotników pracowało i ile każdy niósł przy jedném przejściu?

51*. Trzy miasta A, B i C leżą w trzech wierzchołkach trójkąta. Z miasta A do miasta C przez miasto B jest 82 wiorsty; — z B do A przez C — 97 wiorst, i z miasta C do B przez A — 89 wiorst. Znaleść odległości od siebie tych trzech miast?

52*. Na pociąg osobowy od stacyi A do stacyi B do wagonów drugiéj i trzeciéj klassy zakupiło bi-

lety o 402 osób więcéj aniżeli do klassy pierwszéj. Za wszystkie bilety sprzedane do trzech klass, kassa kolei żelaznéj pobrała razem summę 898 rs. 30 kop.; za same bilety do drugiéj klassy kassa otrzymała o 136 rs. 50 kop. więcéj, aniżeli za bilety pierwszéj klassy, a o 122 rs. 20 kop. mniéj, aniżeli za bilety trzeciéj klassy. Każdy bilet do pierwszéj klassy kosztuje półtora raza tyle, co bilet do drugiéj klassy i trzy razy tyle, co bilet do trzeciéj klassy. Ileż osób jechało w każdéj klassie?

53*. W aliażu, złożonym z czterech metali, metale te są zmieszane w stosunku 1:3:5:7. Jeżeli pewną ilość tegoż aliażu stopimy z $2\frac{2}{3}$ razy większą ilością aliażu innego, złożonego z tychże samych metali, wtedy w mieszaninie stosunek tychże metali zmieni się na następny: 3:4:5:6. W jakim że stosunku znajdowały się metale w drugim aliażu?

54*. Czteréj gracze A, B, C i D grali z sobą cztery partye wista. Po pierwszéj partyi wygrali A, B i C — każdy tyle ile miał przy sobie; po drugiéj partyi wygrali A, B i D znowuż tyle, ile każdy z nich teraz miał przy sobie. Tak samo po trzeciéj partyi wygrali A, C i D; a po czwartéj B, C i D. Okazało się, że po tém wszystkiém każdy z nich miał po 6 rs. 40 kop. Ileż każdy z nich miał, siadając do gry?

55*. W każdym z siedmiu koszyków znajduje się pewna liczba jabłek. Jeżeli z pierwszego kosza przełożę do każdego z pozostałych tyle jabłek, ile w każdym z tych pozostałych się znajduje, a następnie z drugiego do każdego z pozostałych tyle, ile w nich się już znajduje, i t. d. do ostatniego, wtedy w każdym koszyku okaże taż sama liczba jabłek, mianowicie 128. Ileż było jabłek w każdym koszu przed przełożeniem?

XXVI.

Podnoszenie do potęg, a w szczególności podnoszenie do kwadratu i sześcianu.

226. Określiliśmy już wyżéj *potęgę* jako iloczyn dwóch lub więcéj *czynników równych*, i pokazaliśmy jakiego sposobu używamy do oznaczenia potęg (paragrafy 15, 16 i 17). Działanie, za pomocą którego otrzymujemy potęgi, nazywa się *podnoszeniem do potęg*. Podnoszenie do potęg jest więc szczególnym przypadkiem mnożenia; lecz tak często mamy z nim do czynienia, że wypada poświęcić mu rozdział oddzielny. Czytelnik spotka w nim zasady, z któremi już po części zapoznał się dawniéj.

227. *Każda potęga parzysta ilości odjemnéj jest dodatną, każda zaś potęga nieparzysta jest odjemną:*

Jest to bezpośredniém następstwem *prawidła znaków*. Tak np. $-a \times -a = a^2$,

$$-a \times -a \times a = a^2 \times -a = -a^3;$$

$$-a \times -a \times -a \times -a = -a^3 \times -a = a^4;$$

i tak daléj. W następnych paragrafach, skoro mówić będziemy: *dać znak właściwy*, rozumieć będziemy pod

tym wyrażeniem znak wypadający z zastosowania prawidła, podanego w tym §. (patrz § 38).

228. Prawidło na podniesienie potęgi do potęgi. *Wykładnik potęgi, do któréj już jest podniesiona dana ilość, należy pomnożyć przez wykładnik nowéj potęgi, i ten iloczyn wziąć za wykładnik ostatecznego wypadku. Całemu zaś wypadkowi należy dać znak właściwy.*

Tak naprzykład:

$$(a^2)^3 = a^5; \qquad (-a^3)^3 = -a^9;$$
$$(a^4)^3 = a^{12}; \qquad (-a^4)^3 = -a^{12}.$$

Prawidło to jest bezpośrednim wynikiem prawidła na wykładnik, dowiedzionego w § 59. Naprzykład:

$$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\times 3} = a^6.$$

Prawidło dopiéro co podane, bezpośrednio prowadzi do następnego:

229. Prawidło na podniesienie do jakiéjkolwiek potęgi jednomianu całkowitego: *Wykładnik każdego czynnika należy pomnożyć przez wykładnik potęgi i wypadkowi dać znak właściwy.*

Tak naprzykład:

$$(a^2b^3)^2 = a^4b^6; \qquad (-a^2b^3)^3 = -a^6b^9;$$
$$(ab^2c^3)^4 = a^4b^8c^{12}; \qquad (-a^2b^3c^4)^5 = -a^{10}b^{15}c^{20};$$
$$(2ab^2c^3)^6 = 2^6a^6b^{12}c^{18} = 64a^6b^{12}c^{18}.$$

230. Prawidło na podniesienie do jakiéjkolwiek potęgi ułamku: *Należy licznik i mianownik podnieść do téj potęgi, i dać wypadkowi znak właściwy.*

Wypada to z paragr. 145. Naprzykład:

$$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2 = \frac{a^4}{b^6}; \qquad \left(-\frac{a^2}{b^3}\right)^3 = -\frac{a^6}{b^9};$$

$$\left(\frac{2a^2}{3b}\right)^4 = \frac{2^4a^8}{3^4b^4} = \frac{16a^8}{81b^4}.$$

231. Niektóre przykłady na podnoszenie do potęg *dwumianów* były już podane: patrz paragr. 82 i 88. Tak np.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Uczący się powinien, jako ćwiczenie znaleść czwartą, piątą i szóstą potęgę dwumianu $a+b$. Wypadki będą następujące:

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

W podobny sposób znajdziemy:

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2,$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$
$$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4,$$
$$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5,$$
$$(a-b)^6 = a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6.$$

Widzimy, że w powyższym szeregu równości, przed każdym wyrazem w którym b wchodzi w potędze *nieparzystéj* znajduje się znak *mniéj*; tym sposobem możemy każdą potęgę dwumianu $(a-b)$ bezpośrednio wynaleść z odpowiedniéj potęgi dwumianu $(a+b)$, zmieniając znaki na przeciwne w tych wyrazach, do których wchodzi b w potędze nieparzystéj.

232. Uczący przekona się późniéj, że za pomocą twierdzenia, zwanego *dwumianem Newton'a* można

otrzymać każdą potęgę dwumianu, nie wykonywając roboty mnożenia.

233. Wzory podane w § 231 mogą być użyte w ten sposób, jaki wyłożyliśmy w § 84. Przypuśćmy np., że chcemy znaleść czwartą potęgę dwumianu $2x-3y$. We wzorze na $(a-b)^4$ podstawmy $2x$ zamiast a i $3y$ zamiast b; tym sposobem będzie:

$$(2x-3y)^4=(2x)^4-4(2x)^3(3y)+6(2x)^2(3y)^2-$$
$$-4(2x)(3y)^3+(3y)^4=16x^4-96x^3y+216x^2y^2-$$
$$-216xy^3+81y^4.$$

234. Łatwo się przekonać, że można podniesienie do potęgi wykonać w rozmaity sposób. Tak naprzykład: przypuśćmy, że chcemy znaleść szóstą potęgę $(a+b)$. Możemy ją znaleść przez wykonanie kilkakrotne mnożenia przez $(a+b)$. Albo też możemy najprzód znaleść sześcian $(a+b)$ i następnie sześcian ten podnieść do kwadratu, gdyż kwadrat wyrażenia $(a+b)^3$ jest $(a+x)^6$. Albo nakoniec możemy najprzód znaleść kwadrat $(a+b)$, i następnie otrzymany wypadek podnieść do sześcianu, gdyż sześcian wyrażenia $(a+b)^2$ jest $(a+b)^6$. Podobnież ósmą potęgę $(a+b)$ można znaleść podnosząc do kwadratu wyrażenie $(a+b)^4$, lub podnosząc do potęgi czwartéj $(a+b)^2$. I t. d.

235. Niektóre przykłady podnoszenia do potęg *trójmianów* już były dane przedtém; patrz §§ 85 i 88. Tak np.:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca;$$
$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+$$
$$\times 3c^2(a+b)+6abc.$$

Wzory te mogą być użyte w taki sposób, jaki był wytłumaczony w § 84. Tak np. przypuśćmy, że chcemy znaleść $(1-2x+3x^2)^2$. We wzorze na $(a+b+c)^2$ podstawmy 1 zamiast a, $-2x$ zamiast b, i $3x^2$ zamiast c, otrzymamy:

$$(1-2x+3x^2)^2=(1)^2+(-2x)^2+(3x^2)^2+2(1)(-2x)+$$
$$+2(-2x)(3x^2)+2(1)(3x^2)=1+4x^2+9x^4-4x-$$
$$-12x^3+6x^2=1-4x+10x^2-12x^3+9x^4.$$

Podobnież miéć będziemy:

$$(1-2x+3x^2)^3=(1)^3+(-2x)^3+(3x^2)^3+$$
$$+3(1)^2(-2x+3x^2)+3(-2x)^2(1+3x^2)+3(x^2)^2(1-2x)+$$
$$+6(1)(-2x)(3x^2)=$$
$$=1-8x^3+27x^6+3(-2x+3x^2)+12x^2(1+3x^2)+$$
$$+27x^4(1-2x)-36x^5=$$
$$=1-6x+21x^2-44x^3+63x^4-54x^5+27x^6.$$

236. Widoczną jest rzeczą, że kwadrat jakiegokolwiek wielomianu można znaleść za pomocą jednego z dwóch następnych prawideł:

1-sze. Ponieważ np.

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+$$
$$+2bc+2bd+2cd$$

przeto możemy powiedzieć, że: *kwadrat jakiegokolwiek wielomianu jest równy summie kwadratów pojedynczych wyrazów, więcéj summie podwójnych iloczynów tychże wyrazów branych po dwa.*

2-re. Ten sam wypadek możemy wyrazić w téj postaci:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2a(b+c+d)+b^2+2b(c+d)+$$
$$c^2+2cd+d^2,$$

co prowadzi do następnego prawidła: *kwadrat jakie-*

gokolwiek wielomianu jest równy summie kwadratów pojedynczych wyrazów, więcéj podwojny iloczyn każdego wyrazu, przez summę tych wyrazów, które po nim następują).*

236$_1$. Zastosujemy teraz wyłożone powyżéj zasady do podnoszenia do kwadratu i do sześcianu liczb, wyrażonych arytmetycznie za pomocą cyfr.

A Podnoszenie do kwadratu.

Kwadraty liczb jednocyfrowych są podane w tabliczce mnożenia.

Są one:

$1^2=1$, $5^2=25$.
$2^2=4$, $6^2=36$,
$3^2=9$, $7^2=48$,
$4^2=16$, $8^2=64$,
$9^2=81$.

Kwadrat liczby złożonéj z jednéj cyfry znaczącéj z ilukolwiek zer znajdziemy, podnosząc do kwadratu liczbę wyrażoną cyfrą znaczącą i dopisując do wy-

*) Również widoczną jest rzeczą, że można ten sam kwadrat:

$$(a+b+c+d)^2$$

wyrazić i w ten sposób.

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(d+b)c+c^2+\\+2(a+b+c)d+d^2;$$

czyli: *kwadrat wielomianu, jest równy summie kwadratów pojedynczych wyrazów, więcéj podwójny iloczyn każdego wyrazu przez summę tych wyrazów, które go w wielomianie poprzedzają.* T.

padku dwa razy więcéj zer, aniżeli było w danéj liczbie. Tak np.

$(30)^2=30\times30=900$,
$(400)^2=400\times400=160000$,
$(8000)^2=8000\times8000=64000000$.

I w ogólności liczbę złożoną z jednéj cyfry znaczącéj z ilukolwiek zerami, możemy napisać tak:

$$a.10^n,$$

gdzie a oznacza wartość téj cyfry, a n liczbę zer. Podnosząc do kwadratu, otrzymamy:

$$a^2.10^{2n},$$

co wyraża nam ogólnie zasadę podaną wyżéj. Tąż samą zasadę oczywiście można zastosować i do każdéj liczby, złożonéj z ilukolwiek cyfr znaczących, po których następuje pewna liczba zer. W celu podniesienia do kwadratu takiéj liczby, należy podnieść do kwadratu tę liczbę, jaka z niéj będzie otrzymaną przez opuszczenie zer, i do znalezionego wypadku, dopisać dwa razy większą liczbę zer, aniżeli było w danéj liczbie.

236$_2$. Podnoszenie do kwadratu liczb wielocyfrowych najdogodniéj odbywa się na zasadzie wzoru służącego za podstawę do podnoszenia do kwadratu i wielomianów, mianowicie wzoru na podnoszenie do kwadratu dwumianu. Wiemy że:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \quad . \quad . \quad (1)$$

lub, wyłączając z dwóch ostatnich wyrazów b za nawias:

$$(a+b)^2=a^2+(2a+b)b \quad . \quad . \quad (2)$$

Wzór ten w obu postaciach zarówno często się używa.

Weźmy najprzód pod uwagę liczbę dwucyfrową, np. 57, i podnieśmy ją do kwadratu; będzie;

$$(57)^2=(50+7)^2=50^2+2.50.7+7^2,$$

lub, podług wzoru (2):

$$(57)^2=(50+7)^2=50^2+(2.50+7).7.$$

Działanie w praktyce rozkładamy w ten sposób:

Podług pierwszego wzoru:

$$\begin{array}{r} 50^2=2500 \\ 2.50.7=\ 700 \\ 7^2=\ \ 49 \\ \hline (57)^2=3249. \end{array}$$

Podług drugiego zaś:

$$\begin{array}{r} 50^2=2500 \\ 107.7=\ 749 \\ \hline (57)^2=3249. \end{array}$$

Widzimy, że drugi sposób rachowania prowadzi prędzéj do celu. Toż samo stosuje się i do podnoszenia do kwadratu liczb wielocyfrowych.

236_3. Weźmy daléj jako przykład: $(386)^2$. I tutaj możemy uważać tę liczbę jako trójmian $300+80+6$, który należy podnieść do kwadratu. Podług przypisku do § 236, będzie:

$$(386)^2=(300+80+6)^2=300^2+2.300.80+80^2+ +2.380.6+6^2.$$

Wypadek ten wyrazić można słowami w następny sposób. Kwadrat liczby trzycyfrowéj jest równy: *kwadratowi setek, więcéj podwójnemu iloczynowi z setek przez dziesiątki, więcéj kwadratowi dziesiątków; więcéj*

podwójnemu iloczynowi z setek i dziesiątków przez jednostki, więcéj kwadratowi jedności.

Działanie w praktyce rozkłada się w następny sposób:

$$\begin{array}{r} 300^2=\ 90000 \\ 2.300.80=\ 48000 \\ 80^2=\ \ 6400 \\ 2.380.\ 6=\ \ 4560 \\ 6^2=\ \ \ \ 36 \\ \hline (386)^2=148996. \end{array}$$

Lecz możemy także znaleść z czego się składa kwadrat liczby trzy cyfrowéj, stosując do téj liczby bezpośrednio wzór (2). W rzeczy saméj mamy:

$$(386)^2=(300+6)^2=(380)^2+(2.380+6).6.$$

A że:

$$(380)^2=(300+80)^2=300^2+(2.300+80).80,$$

przeto, podstawiając tę wartość w poprzednią równość, znajdziemy:

$$(386)^2=300^2+(2.300+80).80+(2.380+6).6.$$

Wyrażenie to nie trudno daje się wyrazić słowami; przy obliczeniach zaś praktycznych, czyni rachunki znacznie prostszemi, i nie wymagającemi żadnych robót na boku. Obliczenie tego wyrażenia, wykonywa się w następny sposób:

$$\begin{array}{r} 300^2=\ 90000 \\ 680.80=\ 54400 \\ 766.\ 6=\ \ 4536 \\ \hline (386)^2=148996. \end{array}$$

Podobnież możemy postępować i z cztero — pięcio — i t. d. cyfrowemi liczbami. Naprzykład:

przypuśćmy że mamy podnieść do kwadratu 8279. W tym celu stosujemy kilkakrotnie wzór (2); będzie najprzód:

$$(8279)^2 = (8270+9)^2 = (8270)^2 + (2 . 8270+9) . 9.$$

Lecz daléj mamy:

$$(8270)^2 = (8200+70)^2 = (8200)^2 + (2 . 8200)+70)70;$$

i znowuż:

$$(8200)^2 = (8000+200)^2 = 8000^2 + (2 . 8000+200) . 200.$$

Podstawiając ostatnio znalezione wyrażenie w poprzednie, a tę zaś wartość na $(8270)^2$, jaką z tego podstawienia otrzymamy w wyrażenie pierwsze, miéć będziemy:

$$(8279)^2 = 8000^2 + (2.8000+200)200 + (2.8200+70)70 + \\ + (2.8270+9) . 9.$$

W wyrażeniu tém widzimy już jasno ogólne prawidło, podług którego tworzą się kwadraty liczb ilukolwiek cyfrowych. Obliczenie dokonywa się w ten sposób:

$$\begin{array}{r} 8000^2 = 64000000 \\ 16200 . 200 = 3240000 \\ 16470 . 70 = 1152900 \\ 16549 . 9 = 148941 \\ \hline (8279)^2 = 68541841. \end{array}$$

Tak samo postępując znajdziemy, że:

$$(43786)^2 = 40000^2 + (2 . 40000+3000) . 3000 + \\ + (2 . 43000+700)700 + \\ + (2 . 43700+80)80 + (2 . 43780+6) . 6;$$

i rachunek układa się w podobnyż sposób:

$$\begin{array}{r} 40000^2 = 1600000000 \\ 83000 . 3000 = 249000000 \\ 86700 . 700 = 60690000 \\ 87480 . 80 = 6998400 \\ 87566 . 6 = 525396 \\ \hline (43786)^2 = 1917213796. \end{array}$$

Często przy wykonywaniu tego rachunku opuszczają zera na końcu otrzymywanych kwadratów i iloczynów, tak jak to ma miejsce i przy mnożeniu liczb. Tak np. w ostatnim przykładzie rachunek może być ułożony w ten sposób:

$$\begin{array}{r} 40000^2 = 16 ..... \\ 83000 . 3000 = 249 ..... \\ 86700 . 700 = 6069 .... \\ 87480 . 80 = 69984 .. \\ 87566 . 6 = 525396 \\ \hline (43786)^2 = 1917213796. \end{array}$$

Dla uniknięcia wszakże łatwych pomyłek przy tym sposobie prowadzenia rachunku, początkujący lepiéj zrobi wypisując wszystkie zera.

236. Ułamki zwyczajne, podług prawidła podanego w § 230 podnoszą się do kwadratu, przez podniesienie do kwadratu osobno licznika i osobno mianownika. Przy podnoszeniu do kwadratu całkowitéj z ułamkiem, należy najprzód też całkowitą włączyć w ułamek i następnie stąd otrzymany ułamek, podnieść do kwadratu. Naprzykład:

$$\left(5\frac{8}{15}\right)^2 = \left(\frac{83}{15}\right)^2 = \frac{(83)^2}{(15)^2}$$

$$(83)^2 = 80^2 + (2 . 80+3) . 3,$$

$$(15)^2 = 10^2 + (2 \cdot 10 + 5) \cdot 5.$$

$80^2 = 6400$	$10^2 = 100$
$163 \cdot 3 = 489$	$25 \cdot 5 = 125$
$(83)^2 = 6889,$	$(15)^2 = 225,$

stąd:

$$\left(5\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{6889}{225} = 30\frac{139}{225}.$$

236_5. Aby ułamek dziesiętny podnieść do kwadratu należy albo zamienić go na zwyczajny i następnie znaleść kwadrat otrzymanego ułamku zwyczajnego: albo też podnieść do kwadratu *liczbę otrzymaną przez opuszczenie w nim przecinka, i w znalezionym kwadracie odciąć na dziesiętne dwa razy więcéj cyfr, aniżeli było w danym ułamku.*

W rzeczy saméj: przypuśćmy, że mamy podnieść do kwadratu 0,006; będzie:

$$(0{,}006)^2 = 0{,}006 \times 0{,}006 = 0{,}000036.$$

Podobnież:

$$(2{,}5)^2 = 2{,}5 \times 2{,}5 = 6{,}25.$$

236_6. Do téj nauki o podnoszeniu do kwadratu można dołączyć jeszcze następujące uwagi:

1-sze. Ponieważ wszystkie części, z których się składa kwadrat liczby całkowitéj są zakończone zerami, z wyjątkiem kwadratu jedności, przeto ostatnia cyfra kwadratu jakiéjkolwiek całkowitéj, będzie zawsze taką, jaką jest ostatnia cyfra kwadratu jedności téjże liczby. A że kwadraty liczb jednocyfrowych są zakończone na cyfry 1, 4, 5, 6 i 9, przeto kwadraty liczb jakichkolwiek mogą być zakończone tylko temi cyframi. Kwadrat więc, nie może być zakończony

na żadną z tych cyfr: 2, 3, 7 i 8. Podobnież: jeżeli kwadrat jest zakończony zerami, to liczba tych zer musi być parzystą.

2-re kwadrat liczby większéj od jedności, jest większy od téjże liczby; kwadrat zaś liczby mniejszéj od jedności, jest mniejszy od liczby podnoszonéj do kwadratu.

3-cie. Ponieważ:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

przeto, mając już wiadomy kwadrat jakiéjkolwiek liczby a, łatwo można znaleść kwadrat liczby o jedność od niéj większéj, przez dodanie do tegoż kwadratu podwojonéj téj liczby i jedności.

Tak np. skoro wiemy, że:

$$(15)^2 = 225,$$

to $(16)^2 = 225 + 2 \cdot 15 + 1 = 225 + 30 + 1 = 256;$

i daléj: $(17)^2 = 256 + 32 + 1 = 289,$ i t. d.

Podobnież może być użytecznym i wzór:

$$(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1.$$

Np., wiedząc że: $1000^2 = 10000000$, znajdziemy:

$$(999)^2 = (1000-1)^2 = 1000000 - 2000 + 1 = 998001.$$

B. Podnoszenie do sześcianu.

236_7. Podług określenia sześcianem danéj liczby nazywamy iloczyn, który otrzymamy, biorąc tę liczbę za czynnik trzy razy.

Sześciany liczb jednocyfrowych, są następne:

$1^3 = 1,$	$3^3 = 27,$
$2^3 = 8,$	$4^3 = 64,$

$5^3=125$, $7^3=343$,
$6^3=216$, $8^3=512$,
$9^3=729$.

Sześciany te wypada zatrzymać nam w pamięci.

Sześcian każdej liczby, złożonéj z jednéj cyfry znaczącéj i ilukolwiek zer znajdujemy, podnosząc do sześcianu liczbę, wyrażoną tą cyfrą znaczącą i dopisując do tego sześcianu trzy razy więcéj zer, aniżeli ich było w danéj liczbie. Np.:

$$(60)^3=60\times60\times60=216000,$$
$$(400)^3=400\times400\times400=64000000.$$

I w ogóle: oznaczając przez a jakąkolwiek liczbę jedno cyfrową, — liczbę, złożoną z jednéj cyfry znaczącéj i ilukolwiek zer możemy wyrazić tak:

$$a\,.\,10^n,$$

gdzie n oznacza liczbę zer po téj cyfrze znaczącéj. Podnosząc to wyrażenie do sześcianu, otrzymamy:

$$(a\,.\,10^n)^3=a^3\,.\,10^{3n};$$

a równość ta zawiéra zasadę podaną wyżéj.

Oczywiście, że taż sama zasada daje się zastosować i do tego przypadku, gdy liczba jest złożoną z kilku cyfr znaczących i ilukolwiek zer. Wtedy w celu podniesienia tejże liczby do sześcianu, należy podnieść do sześcianu liczbę otrzymaną przez opuszczenie zer, i do tego wypadku dopisać trzy razy więcéj zer, aniżeli ich było w danéj liczbie.

236_8. Podnoszenie do sześcianu liczb, złożonych z ilukolwiek cyfr, opiéra się na wzorze, dającym nam sześcian dwumianu $a+b$. Znaleźliśmy wyżéj, że:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad . \quad . \quad (1)$$

Wzoru tego możemy bezpośrednio użyć do podnoszenia do sześcianu jakiéjkolwiek liczby dwucyfrowéj. Np. przypuśćmy, że chcemy znaleść $(37)^3$. Będzie:

$$(37)^3=(30+7)^3=30^3+3\,.\,30^2.\,7+3\,.\,30\,.\,7^2+7^3.$$

Działanie wykonywa się w następny sposób:

$$\begin{aligned} 30^3&=27000\\ 3\,.\,30^2.\,7&=18900\\ 3\,.\,30\,.\,7^2&=\ 4410\\ 7^3&=\ \ 343\\ \hline (37)^3&=50653. \end{aligned}$$

Lecz zwyczaj, w celu dogodniejszego wykonania rachunków nie używamy wzoru na $(a+b)^3$, ale przerabiamy go daléj, na dogodniejszą do obliczeń postać, w następny sposób:

Z trzech wyrazów ostatnich wyłączmy najprzód b za nawias, otrzymamy:

$$(a+b)^3=a^3+\{3a^2+3ab+b^2\}b;$$

następnie z dwóch ostatnich wyrazów, zawartych w nawiasie, wyłączmy także b za nawias; będzie:

$$(a+b)^3=a^3+\{3a^2+(3a+b)b\}b \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

I pod tą postacią najdogodniéj jest używać wzoru na podnoszenie do sześcianu liczb, wyrażonych cyframi.

Pokażemy na przykładach jego użycie. Weźmy najprzód tęż samą liczbę dwucyfrową, i podnieśmy ją do sześcianu. Stosując wzór (2), mamy:

$$(37)^3=30^3+\{3\,.\,30^2+(3\,.\,30+7)\,.\,7\}\,.\,7.$$

Oznaczmy dla krótkości współczynnik $3\,.\,30^2+(3\,.\,30+7)\,.\,7$ przez A; wtedy będzie:

$$(37)^3=30^3+A\,.\,7.$$

Działania rozkładają się w trzy kolumny w taki sposób:

Obliczenie współczynnika A.

I) $3 . 30 = 90$ II) $3 . 30^2 = 2700$

7 $97 . 7 = 679$

$3 . 30 + 7 = 97$ $A = 3379$

III) $30^3 = 27000$

$A . 7 = 23653$

$37^3 = 50653.$

Zadajmy sobie daléj podnieść do sześcianu liczbę trzycyfrową, np.: 483. W tym celu rozkładamy ją najprzód na 480 i 3, i stosujemy do tak otrzymanego dwumianu wzór (2). Będzie:

$$(483)^3 = (480+3)^3 = 480^3 + \\ + \{3 . 480^2 + (3 . 480 + 3) . 3\} . 3.$$

Lecz: $480 = 400 + 80;$ więc:

$$(480)^3 = (400+80)^3 = 400^3 + \\ + \{3 . 400^2 + (3 . 400 + 80) 80\} . 80.$$

Podstawiając tak znalezioną wartość we wzór poprzedni będzie:

$$(483)^3 = 400^3 + \{3 . 400^2 + (3 . 400 + 80) . 80\} . 80 + \\ + \{3 . 480^2 + (3 . 480 + 3) . 3\} . 3.$$

Oznaczając tak jak poprzednio:

$3 . 400^2 + (3 . 400 + 80) . 80$, przez A,

$3 . 480^2 + (3 . 480 + 3) . 3$, przez B.

możemy napisać;

$$(483)^3 = 400^3 + A . 80 + B . 3.$$

Rachunek rozkładamy w ten sposób:

Obliczenie współczynników A i B.

I) $3 . 400 = 1200$ II) $3 . 400^2 = 480000$

80 $1280 . 80 = 102400$

$3 . 400 + 80 = 1280$ $A = 582400$

$2 . 80 = 160$ $80^2 = 6400$

$3 . 480 = 1440$ $3 . 480^2 = 691200$

3 $1443 . 3 = 4329$

$3 . 480 + 3 = 1443$ $B = 695529$

Ostateczne wypadki:

III) $400^3 = 64000000$

$A . 80 = 46592000$

$B . 3 = 2086587$

$(483)^3 = 112678587$

W pierwszéj kolumnie sposób tworzenia rozmaitych części jest widoczny: gdy do $3 . 400 + 80$ dodamy podwojone ośmdziesiąt, otrzymamy

$$3 . 400 + 3 . 80 = 3 . (400 + 80) = 3 . 480.$$

W drugiéj kolumnie sposób utworzenia $3 . 480^2$ z części poprzednio już znalezionych, wymaga objaśnienia. Ponieważ 480 możemy rozłożyć na 400 i 80, przeto $3 . 480^2 = 3 . (400+80)^2$. W celu znalezienia, jakim sposobem użyć poprzednio już otrzymanych części do obrachowania powyższéj ilości, weźmy pod uwagę ogólne wyrażenie $3(a+b)^2$.

Ponieważ: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$

przeto: $3(a+b)^2 = 3a^2 + 6ab + 3b^2,$

czyli: $3(a+b)^2 = 3a^2 + 3ab + b^2$

$+ 3ab + b^2$

$+ b^2,$

albo: $$3(a+b)^2 = 3a^2 + (3a+b)b + (3a+b)b + b^2.$$

Stosując to wyrażenie do danego przypadku, widzimy, że:

$$3 \cdot 480^2 = 3 \cdot 400^2 + (3 \cdot 400 + 80)\ 80 + (3 \cdot 400 + 80) \cdot 80 + 80^2.$$

A że: $3 \cdot 400^2 + (3 \cdot 400 + 80)80$ jest to ilość, którą oznaczyliśmy przez A; $(3 \cdot 400 + 80)80$ jest znowuż ilością napisaną powyżéj A w drugiéj kolumnie, przeto jeżeli podpiszemy pod A 80^2 i następnie dodamy liczby, zawarte w trzech ostatnich wierszach, tym sposobem otrzymanych, znajdziemy $3 \cdot 480^2$. Te trzy wiersze, które należy dodać w celu znalezienia $3 \cdot 480^2$, są w drugiéj kolumnie zakreślone klamrą.

Inne części rachunku objaśniają się same przez się.

Gdybyśmy jeszcze mieli podnieść do sześcianu liczbę 5284, wtedy rozumowanie podobne do tego, jakiego użyliśmy w poprzednim przykładzie, pokazało by nam, że:

$$(5284)^3 = 5000^3 + [3 \cdot 5000^2 + (3 \cdot 5000 + 200)200]200 + [3 \cdot 5200^2 + (3 \cdot 5200 + 80)\ 80]\ 80 + [3 \cdot 5280^2 + (3 \cdot 5280 + 4)\ 4]\ 4.$$

Oznaczając dla skrócenia współczynniki przy 200, 80 i 4 głoskami A B i C, będzie:

$$(5284)^3 = 5000^3 + A \cdot 200 + B \cdot 80 + C \cdot 4.$$

Rachunek znowuż rozkłada się w trzy następujące kolumny:

Obliczenie współcz. A, B i C,

I)	II)
$3 \cdot 5000 = 15000$	$3 \cdot 5000^2 = 75000000$
200	$15200 \cdot 200 = 3040000$
$3 \cdot 5000 + 200 = 15200$	$A = 78040000$
$2 \cdot 200 = 400$	$200^2 = 40000$
$3 \cdot 5200 = 15600$	$3 \cdot 5200^2 = 81120000$
80	$15680 \cdot 80 = 1254400$
$3 \cdot 5200 + 80 = 15680$	$B = 82374400$
$2 \cdot 80 = 160$	$80^2 = 6400$
$3 \cdot 5280 = 15840$	$3 \cdot 5280^2 = 8365200$
4	$15844 \cdot 4 = 63376$
$3 \cdot 5280 + 4 = 15844$	$C = 83698576.$

Obliczenie ostateczne:

III) $5000^3 = 125000000000$
$A \cdot 200 = 15608000000$
$B \cdot 80 = 6589952000$
$C \cdot 4 = 334794304$
$(5284)^3 = 147532746304$

Rachunki w ten sposób wykonywane nie prowadzą bez wątpienia prędszą drogą do podniesienia do sześcianu liczby danéj, aniżeli zwyczajne mnożenie; stémwszystkiem należy nam się dobrze z niemi zaznajomić, gdyż odgrywają one ważną rolę przy działaniu odwrotnym: wyciągania pierwiastku.

Aby podnieść do sześcianu ułamek, należy oddzielnie podnieść licznik i oddzielnie mianownik, paragraf 230. Przy podnoszeniu całkowitéj z ułamkiem należy też całkowitą włączyć w ułamek i po-

stępować podobnie, jak to było wskazane przy podnoszeniu do kwadratu.

Nakoniec ułamek dziesiętny podnosi się w ten sposób, że podnosi się do sześcianu liczba, otrzymana przez opuszczenie przecinka w ułamku, i w znalezionym sześcianie odcina się trzy razy więcéj cyfr na dziesiętne, aniżeli ich było w danym ułamku. W rzeczy samej:

$$(0{,}08)^3 = 0{,}08 \times 0{,}08 \times 0{,}08 = 0{,}000512$$
$$(3{,}7)^3 = 3{,}7 \times 3{,}7 \times 3{,}7 = 50{,}653.$$

PRZYKŁADY XXVI.

Znaleść:

1. $(2x^2y^3z^4)^2$;
2. $(-2x^2y^2z^3)^3$.
3. $(-3ab^2c^3)^4$;
4. $\left(\frac{2x^2}{3y^2}\right)^2$
5. $\left(-\frac{4x}{3y^2}\right)^3$;
6. $\left(-\frac{x^3}{y^2z^2}\right)^4$.
7. $(a+b)^7$;
8. $(a-b)^7$.
9. $(a+b)^3(a-b)^3$;
10. $(1-x)^3$.
11. $(2+x)^3$:
12. $(3-2x)^3$.
13. $(1+x)^4$;
14. $(x-2)^4$.
15. $(2x+3)^4$;
16. $(ax+by)^3+(ax-by)^3$,
17. $(ax+by)^4+(ax-by)^4$.
18. $(1+x)^5-(1-x)^5$.
19. $(1+x)^4(1-x)^4$.
20. $(1+x+x^3)^2$.
21. $(1-x+x^2)^2$.
22. $(1+x-x^2)^2$.
23. $(1+3x-2x^2)^2$.
24. $(1-3x+3x^2)^2$,

25. $(2+3x+4x^2)^2+(2-3x+4x^2)^2$.
26. $(1+x+x^2)^3$.
27. $(1-x+x^2)^3$.
28. $(1+x-x^2)^3$.
29. $(1+3x+2x^2)^3$.
30. $(1-3x+3x^2)^3$.
31. $(2+3x+4x^2)^3-(2-3x+4x^2)^3$.
32. $(1-x+x^2+x^3)^2$.
33. $(1+2x+3x^3+4x^3)^2$.
34. $(a+b+c+d)^2-(a-b+c-d)^2$.
35. $(a+b+c+d)^2+(a-b+c-d)^2$,
36. $(1+3x+3x^2+x^3)^2$.
37. $(1-6x+12x^2-8x^3)^2$;
38. $(1+4x+6x^2+4x^3+x^4)^2$.
39. $(1-x)^3(1+x+x^2)^3$.
40. $(1-x+x^2)^3(1+x+x^2)^3$.

Podnieść do kwadratu następujące liczby:

41*. 48, 99, 301, 425, 999, 8354, 8355, 9999, 13579.

42*. $\frac{7}{12}$, $4\frac{3}{5}$, $23\frac{11}{13}$, 0,145; 0,00729; 8,9387; 89,387; 893,87.

43*. Wiedząc że: $5248^2 = 27541404$ znaleść 5243^2 i 5252^2.

Podnieść do sześcianu następujące liczby:

44*. 59; 99; 512; 748; 999; 5298; $\frac{13}{24}$; $7\frac{1}{15}$; 0,087; 0,00315; 9,3594.

XXVII.

Wyciąganie pierwiastku.

237. Wyciąganie pierwiastku jest działaniem odwrotném podnoszeniu do potęgi; mianowicie nauka o wyciąganiu pierwiastku podaje sposoby znalezienia jakiegokolwiek pierwiastku z danéj liczby, lub z danego wyrażenia.

Zaczniemy obecny rozdział od podania trzech twierdzeń, będących prostym wnioskiem z *prawidła znaków*; następnie rozbierzemy kolejno wyciąganie pierwiastków z jednomianów, wyciąganie pierwiastków kwadratowych z wielomianów i z liczb, i wyciąganie pierwiastku sześciennego z wielomianów i z liczb.

238. *Pierwiastek parzystéj potęgi z liczby dodatnéj, może być dodatny lub odjemny.*

Tak np. $a \times a = a^2$ i $-a \times -a = a^2$; przeto pierwiastek kwadratowy z a^2 jest albo a albo $-a$, czyli albo $+a$, albo $-a$.

239. *Pierwiastek potęgi nieparzystéj z jakiejkolwiek ilości, ma ten sam znak co i dana ilość.*

Tak np. pierwiastek sześcienny z a^3 jest a, pierwiastek zaś sześcienny z $-a^3$ jest $-a$.

240. *Ilość odjemna nie może mieć pierwiastku potęgi parzystéj.*

Tak np. ilość $-a^2$ nie ma pierwiastku kwadratowego, gdyż jeżeli jakąkolwiek ilość pomnożymy przez nią samą, otrzymamy zawsze na wypadek ilość *dodatną*.

Fakt ten, że ilość odjemna nie ma pierwiastku potęgi parzystéj wyraża się samém nazwiskiem takiéj ilości. Pierwiastek potęgi parzystéj z ilości odjemnéj nazywa się *ilości niemożliwą*, lub częściéj *ilością urojoną*.

241. Prawidło na znalezienie pierwiastku jakiegokolwiek stopnia z jakiegokolwiek jednomianu całkowitego: *Należy podzielić wykładnik każdego czynnika przez wykładnik pierwiastku i przed wypadkiem napisać znak właściwy.* Tak np.

$$\sqrt{16a^2b^4} = \sqrt{4^2a^2b^4} = \pm 4ab^2;$$

$$\sqrt[3]{-8a^6b^9c^{12}} = \sqrt[3]{-2^3a^6b^9c^{12}} = -2a^2b^3c^4.$$

$$\sqrt[4]{256x^4y^8} = \sqrt[4]{4^4x^4y^8} = \pm 4xy^2.$$

242. Prawidło na wyciąganie pierwiastku z ułamku: *Należy znaleść pierwiastek licznika i pierwiastek mianownika osobno, i napisać znak właściwy przed wypadkiem.*

Tak np. $\sqrt{\frac{4a^2}{9b^4}} = \sqrt{\frac{2^2a^2}{3^2b^4}} = \pm\frac{2a}{3b^2}.$

$$\sqrt[3]{-\frac{27a^6}{64b^3}} = \sqrt[3]{-\frac{3^3a^3}{4^3b^3}} = -\frac{3a^2}{4b}.$$

243. Przypuśćmy teraz że chcemy znaleźć pierwiastek sześcienny z a^2. W tym wypadku wykładnik 2 nie jest podzielny przez wykładnik pierwiastku 3; i nie mamy innego sposobu wyrażenia wypadku, jak tylko pisząc $\sqrt[3]{a^2}$. Podobnież $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[4]{a^5}$ nie mogą być obecnie inaczéj wyrażonémi. Takie ilości nazywają się *pierwiastkowémi*; stanowić one będą przedmiot dwóch następnych rozdziałów.

244. Przystępujemy teraz do wyłożenia sposobu wyciągania pierwiastku kwadratowego z wielomianów.

Pierwiastek kwadratowy z $a^2+2ab+b^2$ jest $a+b$; i rozważanie sposobu, w jaki $a+b$ pochodzi z $a^2+2ab+b^2$ doprowadzi nas do ogólnego prawidła na wyciąganie pierwiastku kwadratowego z jakiegokolwiek wielomianu.

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2} = a+b.$$

$$\begin{array}{l|l} a^2 & \\ \hline 2a+b & 2ab+b^2 \\ & \underline{2ab+b^2} \end{array}$$

Uporządkujmy najprzód wyrazy podług potęg jednéj głoski np. a; wtedy pierwszym wyrazem będzie a^2: jego pierwiastek kwadratowy jest a i to będzie pierwszym wyrazem szukanego pierwiastku.

Odejmijmy jego kwadrat, to jest a^2, od danego wyrażenia, i podpiszmy resztę $2ab+b^2$. Podzielmy $2ab$ przez $2a$; iloraz będzie b, i to będzie drugim wyrazem pierwiastku. Do podwojonego wyrazu pierwszego dodajmy wyraz drugi: otrzymamy $2a+b$; pomnóżmy to ostatnie wyrażenie przez wyraz drugi, to jest $2ab+b^2$ od reszty. I to w obecnym przypadku kończy całe działanie.

Gdyby było więcéj wyrazów, wtedy należałoby z $a+b$ tak samo postępować, jak przedtém postępowaliśmy z a; kwadrat tego wyrażenia, to jest: $a^2+2ab+b^2$ już został odjęty od wielomianu danego, tym sposobem należy tylko resztę podzielić przez $2(a+b)$ dla otrzymania nowego wyrazu pierwiastku. Aby otrzymać nowy odjemnik, należy pomnożyć summę z $2(a+b)$ i nowego wyrazu, przez ten nowy wyraz.

Cały ten sposób postępowania powinien być prowadzony i powtarzany dotąd, dopóki pierwiastek szukany nie będzie znaleziony.

245. Przykłady:

1.
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{4x^2+12xy+9y^2} = 2x+3y & \\ \underline{-4x^2} & \\ 4x+3y & 12xy+9y^2 \\ & \underline{-12xy-9y^2} \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{4x^4-20x^3+37x^2-30x+9} = 2x^2-5x+3 & \\ \underline{-4x^4} & \\ 4x-5 & -20x^3+37x^2-30x+9 \\ & \underline{+20x^3-25x^2} \\ 4x^2-10x+3 & 12x^2-30x+9 \\ & \underline{+12x^2-30x+9} \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{x^4-4x^3y+10x^2y^2-12xy^3+9y^4} = x^2-2xy+3y^2 & \\ \underline{-x^4} & \\ 2x^2-2xy & -4x^3y+10x^2y^2-12xy^3+9y^4 \\ & \underline{+4x^3y-4x^2y^2} \\ 2x^2-4xy+3y^2 & 6x^2y^2-12xy^3+9y^4 \\ & \underline{-6x^2y^2+12xy^3-9y^4} \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{l|l} \sqrt{x^6+4x^5-10x^3+4x+1} = x^3+2x^2-2x-1 & \\ \underline{-x^6} & \\ 2x^3+2x^2 & 4x^5-10x^3+4x+1 \\ & \underline{-4x^5+4x^4} \\ 2x^3+4x^2-2x & -4x^4-10x^3+4x+1 \\ & \underline{+4x^4+8x^3+4x^2} \\ 2x^3+4x^2-4x-1 & -2x^3-4x^2+4x+1 \\ & \underline{+2x^3+4x^2+4x+1} \end{array}$$

246. Wyżej była zrobiona uwaga, że każdy pierwiastek, którego wykładnik jest parzysty, ma znak podwójny; patrz § 238. Tak np. pierwiastek kwadratowy z $a^2+2ab+b^2$ jest $a+b$, lub $-a-b$. W rzeczy saméj przy wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z $a^2+2ab+b^2$, zaczynamy działanie od znalezienia pierwiastku z a^2. Lecz ten pierwiastek może być a lub $-a$. Jeżeli weźmiemy to ostatnie, i prowadzimy działanie, jak było pokazane przedtém, wtedy dojdziemy do wypadku $-a-b$. Taż sama uwaga może być zrobioną w każdym podobnym przypadku. Weźmy np. ostatnie zadanie z § 245. Tutaj zaczynamy działanie od wyciągnięcia pierwiastku kwadratowego z x^6; — pierwiastek ten może być x^3, lub $-x^3$. Jeżeli przyjmiemy ostatnią wartość i prowadzić będziemy działanie jak wyżéj, otrzymamy wypadek ostateczny: $-x^3-2x^2+2x+1$.

247. Pierwiastek potęgi *czwartéj* jakiegokolwiek wyrażenia, może być znaleziony przez wyciągnięcie pierwiastku kwadratowego z pierwiastku kwadratowego. Podobnież: pierwiastek potęgi *ósméj* może być znaleziony, przez wyciągnięcie pierwiastku kwadratowego z pierwiastku potęgi czwartéj, i tak daléj.

248. Z arytmetyki wiemy, że nie z każdéj liczby można wyciągnąć pierwiastek kwadratowy *dokładnie*; naprzykład: nie możemy *dokładnie* oznaczyć pierwiastku kwadratowego z 2. W algiebrze także nie z każdego danego wyrażenia można wyciągnąć pierwiastek kwadratowy *dokładnie*. Niekiedy wypada nam rozwiązać zadanie tego rodzaju: Znaleść cztery wyrazy pierwiastku kwadratowego z $1-2x$.

$$\sqrt{1-2x} = 1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & \\ 2-x & -2x \\ \hline & +2x+x^2 \\ \hline 2-2x-\frac{x^2}{2} & -x^2 \\ \hline & \mp x^2 \pm x^3 \pm \frac{x^4}{4} \\ \hline 2-2x-x^2-\frac{x^3}{2} & -x^3-\frac{x^4}{4} \\ \hline & \mp x^3 \pm x^4 \pm \frac{x^5}{2} \pm \frac{x^6}{4} \\ \hline & -\frac{5x^4}{4}-\frac{x^5}{2}-\frac{x^6}{4} \end{array}.$$

Tym sposobem otrzymaliśmy jeszcze na resztę $-\frac{5x^4}{4}-\frac{x^5}{2}-\frac{x^6}{4}$, po znalezieniu czterech wyrazów pierwiastku kwadratowego z $1-2x$.

Z tego wypada, że

$$\left(1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}\right)^2 = 1-2x+\frac{5x^4}{4}+\frac{x^5}{2}+\frac{x^6}{4}.$$

249. Poprzednie zbadanie sposobu wyciągania pierwiastku kwadratowego z wielomianów algiebraicznych da nam możność wytłumaczenia prawidła na wyciąganie pierwiastku kwadratowego z liczb.

Pierwiastek kwadratowy ze 100 jest 10; pierwiastek kwadratowy z 10000 jest 100; pierwiastek kwadratowy z 1000000 jest 1000; i t. d. Stąd wypada, że pierwiastek kwadratowy z liczby mniejszéj od 100, musi się składać tylko z jednéj cyfry, pierwiastek kwadratowy z liczby, zawartéj pomiędzy 100

i 10000 — z dwóch cyfr; pierwiastek kwadratowy z liczby zawartéj pomiędzy 10000 i 1000000—z trzech cyfr, i tak daléj. Jeżeli więc nad każdą drugą cyfrą danéj liczby, zaczynając od miejsca, na którym stoją jedności, napiszemy punkt, wtedy liczba punktów pokaże nam liczbę cyfr w pierwiastku kwadratowym z tejże danéj liczby. Tak np. pierwiastek kwadratowy z $\dot{4}35\dot{6}$ składa się z dwóch cyfr; — pierwiastek kwadratowy z $6\dot{1}1\dot{5}2\dot{4}$ jest złożony z trzech cyfr.

250. Przypuśćmy, że chcemy znaleść pierwiastek kwadratowy z 3249.

Najprzód oznaczmy właściwe cyfry punktami podług podanego prawidła; okazuje się, że szukany pierwiastek składać się będzie z dwóch cyfr. Niech $a+b$ oznacza ten pierwiastek, gdzie a jest wartością cyfry, stojącéj na miejscu dziesiątek, a b wartością cyfry stojącéj na miejscu jedności. Stąd widać, że a musi być największą liczbą dziesiątek, któréj kwadrat jest mniejszy od 3200; taką liczbą jest 50. Odejmijmy a^2, to jest kwadrat 50, od danéj liczby; — wtedy resztą będzie 749. Podzielmy tę resztę przez $2a$, to jest przez 100; iloraz będzie 7; i to jest wartością b. Wtedy $(2a+b)b$, czyli 107×7, to jest 749, jest liczbą, którą należy odjąć od reszty; a ponieważ teraz nie pozostaje żadna reszta, przeto wnosimy stąd, że $50+7$, czyli 57, jest szukanym pierwiastkiem kwadratowym.

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{3\dot{2}4\dot{9}} = 50+7 \\ & 2500 \\ \hline 100+7 & 749 \\ & 749 \\ \hline \end{array}$$

Powiedzieliśmy wyżéj, że a jest *największą* liczbą dziesiątek (czyli *największą* wielokrotną względem dziesięciu), któréj kwadrat jest mniejszy od 3200.

W rzeczy saméj: bezpośrednio widoczną jest rzeczą że a nie może być *większą* wielokrotną względem dziesięciu. Ale nie może być także i *mniejszą*; — gdyż, jeżeli by to było możliwém, aby liczba dziesiątek była mniejszą, np. gdyby była x, wtedy $x+b$ byłoby mniejsze od a, (ponieważ x są dziesiątkami, a b jednościami), zatém i kwadrat z $x+b$ byłby mniejszy od a^2, więc $x+b$ jest mniejsze od prawdziwego pierwiastku kwadratowego.

Gdyby pierwiastek składał się z trzech cyfr, wtedy niech a oznacza setki, a b — dziesiątki. Znalazłszy a i b jak wyżéj, uważajmy daléj setki razem z dziesiątkami jako nową wartość a, i wynajdźmy nową wartość na b jedności.

251. Zera mogą być przy wykonywaniu powyższego działania, opuszczone dla krótkości i całe działanie można wyrazić za pomocą następnego prawidła:

Nad każdą drugą cyfrą, zaczynając od cyfry, stojącéj na miejscu jedności napiszmy kropkę; tym sposobem cała liczba zostanie podzieloną na kolumny. Następnie znajdźmy największą liczbę, któréj kwadrat jest zawarty w pierwszéj kolumnie: będzie to pierwsza cyfra pierwiastku. Kwadrat jéj odejmijmy od pierwszéj kolumny, i do reszty dopiszmy kolumnę drugą. Podzielmy tak otrzymaną ilość, opuszczając w niéj ostatnią cyfrę, przez podwojoną, znalezioną dotąd część pierwiastku i dopiszmy iloraz i do pierwiastku i do dzielnika. Pomnóżmy następnie dzielnik wraz z tém, co było dopisane, przez część pierwiastku ostatnio znalezioną, i odejmijmy znowuż iloczyn od całéj reszty. Jeżeli w liczbie da-

$$\begin{array}{r|l} & \sqrt{3\dot{2}4\dot{9}} = 57 \\ & 25 \\ \hline 107 & 749 \\ & 749 \\ \hline \end{array}$$

nëj będzie jeszcze więcëj kolumn do złożenia, wtedy całe działanie musi być daléj w ten sposób prowadzone.

252. Przykłady:
Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczb: 132496 i 5322249.

$$\sqrt{132496} = 364,$$

9
66 424
396
724 2896
2896

$$\sqrt{5322249} = 2307.$$

4
43 132
129
4607 32249
32249

W pierwszym przykładzie, po znalezieniu pierwszéj cyfry pierwiastku i dopisaniu do reszty drugiej kolumny, otrzymujemy 424; podług prawidła dzielimy 42 przez 6, dla otrzymania następnéj cyfry pierwiastku; z podzielenia wypada 7, i to byłoby drugą cyfrą. Lecz mnożąc 67 przez 7, otrzymujemy na iloczyn 469, co jest większą liczbą, aniżeli 424. To pokazuje, że druga cyfra nie może być 7, ale jest mniejszą. Probujemy 6 — ponieważ próba się udaje, przeto 6 jest właściwą cyfrą. Ten przykład pokazuje, że niekiedy wypada probować kilka liczb przy oznaczaniu pewnéj cyfry.

W drugim przykładzie czytelnik powinien zwrócić uwagę na to, że jedna cyfra pierwiastku wypadła zero.

253. Prawidło na wyciąganie pierwiastku kwadratowego z ułamku dziesiętnego, wypada z prawidła powyższego. Należy tu jednak zauważyć, że przy podnoszeniu do kwadratu ułamku dziesiętnego otrzymujemy zawsze *parzystą* liczbę cyfr dziesiętnych w kwadracie, że zatém nie można dokładnie wyciągnąć pierwiastku kwadratowego z żadnego ułamku dziesiętnego, który, w najprostszéj swojéj postaci, ma *nieparzystą* liczbę cyfr dziesiętnych.

Pierwiastek kwadratowy z 32, 49 jest jedną dziesiątą częścią pierwiastku kwadratowego z $100 \times 32{,}49$, — czyli z 3249. Podobnież: pierwiastek kwadratowy z 0,003249 jest jedną - tysiączną częścią pierwiastku kwadratowego z $1000000 \times 0{,}003249$, czyli z 3249. Stąd możemy wyprowadzić następne prawidło na wyciąganie pierwiastku kwadratowego z ułamku dziesiętnego:

Należy oznaczyć kropką każdą drugą cyfrę danéj liczby poczynając od cyfry, stojącéj na miejscu jedności i idąc tak na lewo, jak i na prawo od niéj. Następnie wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z całéj liczby, jakby z całkowitéj i oddzielić na dziesiętne w otrzymanym wypadku tyle cyfr, ile było odznaczonych kolumn w części dziesiętnéj danéj liczby.

Zwracamy, tutaj szczególną uwagę uczącego się na znaczenie słów: *poczynając od cyfry, stojącéj na miejscu jedności.*

254. Przy wyciąganiu pierwiastku kwadratowego z liczby całkowitéj, jeżeli otrzymamy jeszcze resztę, doszedłszy do cyfry stojącéj na miejscu jedności, to reszta ta jest znakiem, że dana liczba nie ma pierwiastku, dającego się dokładnie wyrazić. Możemy jednak oznaczyć go z takim stopniem przybliżenia, jak tylko chcemy, przypuszczając, że na końcu danéj liczby znajduje się przecinek, dopisując za nim jakąkolwiek parzystą liczbę zer i prowadząc daléj działanie. Tym sposobem otrzymaną część dziesiętną pierwiastku należy dodać do znalezionéj już poprzednio części całkowitéj.

Podobnież, jeżeli ułamek dziesiętny nie ma pierwiastku kwadratowego, dającego się dokładnie oznaczyć, wtedy możemy do niego dopisać zera, i daléj prowadzić działanie, posuwając przybliżenie tak daleko, jak chcemy.

255. W podanym niżéj przykładzie, wyciąganie pierwiastku kwadratowego z 0,4 jest doprowadzone do siedmiu cyfr dziesiętnych.

$$\sqrt{0.4000\ldots} = 0{,}6324555$$

	36						
123	400						
	369						
1262	3100						
	2524						
12644	57600						
	50576						
126485	702400						
	632425						
1264905	6997500						
	6324525						
12649105	67297500						
	63245525						
	4051975						

256. Przechodzimy teraz do sposobu wyciągania pierwiastku sześciennego z wielomianów.

Pierwiastek sześcienny z $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ jest $a+b$; zastanawiając się tutaj nad sposobem, w jaki $a+b$ zostaje utworzone z $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, dojdziemy do ogólnego prawidła na wyciąganie pierwiastku kwadratowego z każdego wielomianu.

Uporządkujmy najprzód wyrazy, podług potęg jednéj i téj saméj głoski a; wtedy pierwszym wyrazem będzie a^3, a jego pierwiastkiem sześciennym będzie a: — i to jest pierwszy wyraz szukanego pierwiastku. Odejmijmy następnie sześcian tego wyrazu pierwszego, czyli a^3, od całego wyrażenia i dopiszmy

$$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} = a+b$$

$-a^3$	
$3a^2$	$3a^2b+3ab^2+b^3$
	$-3a^2b+3ab^2+b^3$

resztę: $3a^2b+3ab^2+b^3$. Podzielmy $3a^2b$ przez $3a^2$: — ilorazem będzie b, i ono stanowi drugi wyraz szukanego pierwiastku. Odejmijmy daléj $3a^2b+3ab^2+b^3$ od reszty, i tym sposobem cały sześcian $a+b$ zostanie odjęty. To właśnie kończy działanie w obecnym przypadku.

Gdyby było więcéj wyrazów, wtedy należałoby postępować z $a+b$ tak, jak postępowaliśmy poprzednio z a; sześcian tego wyrażenia, to jest $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, był już odjęty od danego wielomianu, należy więc podzielić resztę przez $3(a+b)^2$ dla wynalezienia nowego wyrazu, i tak daléj.

257. Przy wyciąganiu pierwiastku sześciennego z bardziej złożonych wielomianów, a równie i z liczb, dogodną jest rzeczą rozłożyć rachunki działania, pokazanego w poprzednim paragrafie, w trzy kolumny, jak następuje:

$$\begin{array}{l|l|l} 3a+b; & \begin{array}{l} 3a^2 \\ \quad (3a+b)b \\ \hline 3a^2+3ab+b^2 \end{array} & \sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=a+b \\ & & \begin{array}{l} a^3 \\ \hline 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ 3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array} \end{array}$$

Objaśnienie: Znajdujemy najprzód pierwszy wyraz pierwiastku, to jest a; następnie piszemy a^3 pod daném wyrażeniem w trzeciéj kolumnie i odejmujemy je. Piszemy potém $3a$ w pierwszéj kolumnie, a $3a^2$ w drugiéj; — dzielemy $3a^2b$ przez $3a^2$, i otrzymujemy iloraz b. Dodajemy b do wyrażenia pierwszéj kolumny; mnożymy następnie to, co otrzymamy w téj pierwszéj kolumnie, przez b, iloczyn piszemy w drugiéj kolumnie, i dodajemy go do tego, co już w téjże kolumnie się znajduje, otrzymujemy $3a^2b+3ab+b^2$. Mnożymy to ostatnie wyrażenie przez b: otrzymujemy $3a^2b+3ab^2+b^3$, który to iloczyn należy umieścić w trzeciéj kolumnie i odjąć. Tym sposobem dokończyliśmy działanie odejmowania $(a+b)^3$ od wyrażenia danego. Gdyby było więcéj wyrazów, wtedy należałoby toż samo działanie prowadzić daléj.

258. Przy wykonywaniu tego działania w dalszym ciągu, należy dodawać do liczby pierwszéj kolumny taką liczbę, aby po dodaniu otrzymać *potrojoną część pierwiastku, już znalezioną*. W tym celu postępujemy tak: mamy już w pierwszéj kolumnie $3a+b$; umieszczamy $2b$ pod b i dodajemy; — wtedy otrzymamy $3a+3b$, czyli potrojoną część już znalezioną. Nadto, do liczb drugiéj kolumny wypada nam dodać taką liczbę, aby otrzymać *potrojony kwadrat téj części pierwiastku, która już jest znalezioną*. To znowuż wynajdujemy w ten sposób: w drugiéj kolumnie mamy już $(3a+b)b$ a pod tą liczbą $3a^2+3ab+b^2$; — umieśćmy jeszcze b^2 poniżéj i dodajmy liczby zawarte w trzech ostatnich wierszach, wtedy otrzymamy $3a^2+6ab+3b^2$, co jest właśnie trzy razy wziętym $(a+b)^2$, czyli potrojonym kwadratem znalezionéj już części pierwiastku.

$$\begin{array}{l} 3a+b \\ \quad +2b \\ \hline 3a+3b \end{array} \qquad \begin{array}{l} (3a+b)b \\ 3a^2+3ab+b^2 \\ \quad +b^2 \\ \hline 3a^2+6ab+3b^2 \end{array}$$

259. Przykład: Wyciągnąć pierwiastek z wyrażenia:

$$8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64.$$

Działanie:

I) $6x^2-3x$
$\quad -6x$
$\overline{\quad 6x^2-9x+4}$

II) $12x^4$
$\quad -3x(6x^2-3x)$
$\overline{\quad 12x^4-18x^3+9x^2}$
$\quad 9x^2$
$\overline{12x^4-36x^3+27x^2}$
$\quad 4(6x^2-9x+4)$
$\overline{12x^4-36x^3+51x^2-36x+16}$

III)

$$\sqrt[3]{8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64}=2x^2-3x+4$$
$$-8x^6$$
$$-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64$$
$$+36x^5+\ 54x^4+\ 27x^3$$
$$48x^4-144x^3+204x^2-144x+64$$
$$-48x^4+144x^3-204x^2+144x-64.$$

Pierwiastek sześcienny z $8x^6$ jest $2x^2$; i to będzie pierwszym wyrazem szukanego pierwiastku: podpisujemy $8x^6$ pod daném wyrażeniem w trzeciéj kolumnie i odejmujemy ten wyraz.

Następnie umieszczamy potrojone $2x^2$ w kolumnie pierwszéj, a potrojony kwadrat $2x^2$ w kolumnie drugiéj; to jest piszemy $6x^2$ w pierwszej, a $12x^4$ w drugiéj kolumnie. Daléj dzielimy $-36x^5$ przez $12x^4$, i otrzymujemy tym sposobem iloraz $-3x$, który będzie drugim wyrazem pierwiastku.

Następnie dopisujemy tenże wyraz do pierwszéj kolumny, i to wyrażenie, które teraz znajdować się będzie w pierwszéj kolumnie, czyli $6x^2-3x$, mnożymy przez $-3x$, tak znaleziony iloczyn umieszczamy pod wyrażeniem, będącém w drugiej kolumnie i dodajemy go do tegoż wyrażenia: — otrzymamy tym sposobem

$12x^4-18x^3+9x^2$. Mnożymy daléj to ostatnie wyrażenie przez $-3x$, podpisujemy je pod resztą w trzeciéj kolumnie i odejmujemy. Otrzymamy wtedy w trzeciéj kolumnie resztę; a część pierwiastku już znaleziona będzie $2x^2-3x$. Teraz należy w kolumnie pierwszéj i drugiéj wykonać rachunki, pokazane w § 258. W tym celu podpisujemy podwojone $-3x$ to jest $-6x$, w pierwszéj kolumnie, i dodajemy te dwa wiersze; — otrzymujemy przez to $6x^2-9x$, i to stanowi potrojoną część pierwiastku już znalezioną. Podobnież podpisujemy kwadrat $-3x$, czyli $9x^2$, w drugiéj kolumnie, i dodajemy trzy ostatnie wiersze w téjże kolumnie; — otrzymujemy $12x^4-36x^3+27x^2$, i to jest potrojonym kwadratem téj części pierwiastku, która już jest znalezioną.

Po wykonaniu tych działań dzielimy resztę, znajdującą się w pierwszéj kolumnie, przez wyrażenie poprzednio otrzymane, i w ten sposób znajdujemy 4, jako ostatni wyraz pierwiastku; z nim znowuż postępujemy tak jak z poprzednimi. Mianowicie: dołączamy ten wyraz do pierwszéj kolumny, i mnożymy tak otrzymane wyrażenie w téjże kolumnie, to jest: $6x^2-9x+4$, przez 4; iloczyn umieszczamy pod wyrażeniem będącém w drugiéj kolumnie, i dodajemy go do tegoż wyrażenia: otrzymujemy w ten sposób: $12x^4-36x^3+51x^2-36x+16$; mnożymy to ostatnie przez 4, podpisujemy iloczyn pod resztą w trzeciéj kolumnie i odejmijmy go. Ponieważ teraz nie pozostaje żadnéj reszty, przeto wnosimy stąd, że $2x^2-3x+4$ jest szukanym pierwiastkiem sześciennym.

260. Wyłożony poprzednio sposób wyciągania pierwiastku sześciennego z wyrażeń algebraicznych prowadzi nas do podania sposobu wyciągania pierwiastku ~~kwadratowego~~ sześciennego z jakiéjkolwiek liczby.

Pierwiastek sześcienny z 1000 jest 10, pierwiastek sześcienny z 1000000 jest 100; stąd wypada, że pierwiastek sześcienny z liczby mniejszéj od 1000 jest jednocyfrowy; pierwiastek sześcienny z liczby, zawartéj pomiędzy 1000 i 1000000 składa się z dwóch cyfr, i t. d. Jeżeli więc nad każdą trzecią cyfrą danéj liczby, napiszemy punkt, zaczynając od cyfry, stojącéj na miejscu jedności, wtedy liczba punktów pokaże liczbę cyfr w pierwiastku sześciennym.

Tak naprzykład: pierwiastek sześcienny z 405224 składa się z dwóch cyfr, a pierwiastek sześcienny z 12812904 składa się z trzech cyfr.

Przypuśćmy, że chcemy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 274625.

I-a kol.	II-a kol.	III-cia kol.
180+5	10800	$\sqrt[3]{274625} = 60+5$
	925	216000
	11725	58625
		58625

Oznaczmy najprzód punktami odpowiednie cyfry, podług prawidła; — pokazuje się z tego, że pierwiastek składać się z będzie z dwóch cyfr. Niech $a+b$ będzie szukanym pierwiastkiem, gdzie a oznacza wartość cyfry, stojącéj na miejscu dziesiątków, a b wartość cyfry, stojącéj na miejscu jedności. Wtedy a musi być największą wielokrotnością dziesięciu, któréj sześcian jest mniejszy od 27400; — jest to 60. Podpisujemy sześcian 60, to jest 216000, w trzeciéj kolumnie pod daną liczbą, i odejmujemy go od téjże liczby. Umieszczamy potrojone 60, to jest 180, w pierwszéj kolumnie, i potrojony kwadrat 60, to jest 10800, w drugiéj kolumnie. Resztę, otrzymaną w trzeciéj kolumnie, dzielimy przez liczbę, będącą w drugiéj kolumnie, to jest dzielimy 58625 przez 10800; otrzymujemy stąd 5, i to jest wartością b. Dodajemy 5 do pierwszéj kolumny i mnożymy tę sumę przez 5, to jest mnożymy 185 przez 5; otrzymujemy z tego 925, co umieszczczamy w drugiéj kolumnie i dodajemy do liczby, która już się tam znajduje. Tym sposobem znajdujemy 11725; co mnożymy przez 5, umieszczamy iloczyn w trzeciéj kolumnie i odejmujemy. Reszta jest 0, zatem 65 jest szukanym pierwiastkiem sześciennym.

Zera na końcu mogą być dla krótkości poopuszczane, i całe działanie ostatecznie przedstawiać się będzie w ten sposób:

185	108	$\sqrt[3]{274625} = 65$
	925	216
	11725	58625
		58625

261. Przykład. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z liczby 109215352.

I-a kol.	2-ga kol.	3-cia kol.
127 |	48	$\sqrt{109215352} = 478$
14 |	889 |	64
1418	5689 |	45215
	49	39823
	6627	5392352
	11344	5392352
	674044	

Po otrzymaniu dwóch pierwszych cyfr pierwiastku, mianowicie 47, obliczamy pierwszą i drugą kolumnę, sposobem, wyłożonym w § 258. Mianowicie umieszczamy podwojone 7 pod liczbą pierwszéj kolumny, i dodajemy oba wiersze, co nam daje 141; następnie podpisujemy kwadrat 7 pod liczbami drugiéj kolumny i dodajemy trzy ostatnie wiersze, co znowuż daje 6627. Daléj działanie jest prowadzone jak poprzednio. Pierwiastek sześcienny jest 478.

Przy wykonywaniu działania, odnoszącego się do tego przykładu, mogło się wydawać, że drugą cyfrą pierwiastku jest 8 lub nawet 9; lecz przez probowanie każdéj z nich, okazuje się, że one są zbyt wielkie. Podobnie jak i przy wyciąganiu pierwiastku kwadratowego może się czasami przytrafić, że wypada nam probować zbyt wielkich cyfr, szczególniéj przy oznaczaniu pierwszych cyfr pierwiastku.

262. Przykład. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 8653002877.

605 |	1200	$\sqrt[3]{8653002877} = 2053.$
10 |	3025 |	8
6153	123025 |	653002
	25 |	615125
	126075	37877877
	18459	37877877
	12625959	

W tym przykładzie uczący się powinien zwrócić uwagę na zero, które się otrzymuje jako jedną z cyfr pierwiastku.

263. Jeżeli pierwiastek ma pewną liczbę cyfr dziesiętnych, wtedy sześcian miéć będzie trzy razy więcéj tychże cyfr; z tego powodu w liczbie, mającéj cyfry dziesiętne, i wyrażonéj w najprostszéj postaci, liczba tychże cyfr dziesiętnych powinna być wielokrotną względem *trzech*, jeżeli dana liczba jest dokładnym sześcianem. W pierwiastku, zatém, sześciennym z takiéj liczby, liczba cyfr dziesiętnych będzie trzy razy mniejszą, aniżeli w danéj liczbie. Stąd, jeżeli liczba dana, z któréj chcemy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy, zawiéra ułamek dziesiętny, wtedy oznaczamy punktem *cyfrę, stojącą na miejscu jedności*, i każdą trzecią cyfrę licząc w prawą i lewą stronę od téjże cyfry jedności, i następnie postępujemy tak, jak przy wyciąganiu pierwiastku z liczby całkowitéj. Liczba punktów, napisanych nad częścią dziesiętną danéj liczby, pokaże nam liczbę cyfr dziesiętnych w pierwiastku sześciennym.

264. Przykład. Wyciągnąć pierwiastek sześcienny z 14102,327296.

$$
\begin{array}{l|l}
64 & 12 \\
8 & 256 \\
\hline
721 & 1456 \\
2 & 16 \\
\hline
7236 & 1728 \\
 & 721 \\
 & 173521 \\
 & 1 \\
\hline
 & 174243 \\
 & 43416 \\
\hline
 & 17467716
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\sqrt[3]{14102{,}327296} = 24{,}16. \\
8 \\
\hline
6102 \\
5824 \\
\hline
278327 \\
173521 \\
\hline
104806296 \\
104806296 \\
\hline
\end{array}
$$

265. Jeżeli dana liczba czy to będzie całkowitą, czy też ułamkiem dziesiętnym, nie ma dokładnego pierwiastku sześciennego, wtedy możemy do niéj dopisać zera i oznaczyć pierwiastek sześcienny z przybliżeniem do jakiegokolwiek stopnia.

W następującym przykładzie jest wykonane wyciąganie pierwiastku sześciennego z 0.4 do czterech cyfr dziesiętnych:

$$
\begin{array}{l|l}
213 & 147 \\
6 & 639 \\
\hline
2196 & 15339 \\
12 & 9 \\
\hline
22088 & 159876 \\
 & 13176 \\
 & 1611876 \\
 & 36 \\
\hline
 & 1625088 \\
 & 176704 \\
\hline
 & 162685504
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\sqrt[3]{0.400\ldots} = 0.7368 \\
343 \\
\hline
57000 \\
46017 \\
\hline
10983000 \\
9671256 \\
\hline
1311744000 \\
1301484032 \\
\hline
10259968
\end{array}
$$

PRZYKŁADY XXVII.

Znaleść wartość następujących wyrażeń:

1. $\sqrt{9a^4b^4}$. 2. $\sqrt[3]{8a^3b^3}$. 3. $\sqrt[3]{-64a^3b^6}$.
4. $\sqrt[4]{16a^4b^8c^{12}}$. 5. $\sqrt[5]{-a^5b^{10}c^{15}}$.
6. $\sqrt{\frac{25a^2b^2}{49c^4}}$. 7. $\sqrt[3]{-\frac{216a^3b^9}{125c^6}}$.
8. $\sqrt[4]{\frac{81a^4}{b^4c^4}}$. 9. $\sqrt[5]{\frac{a^5}{32b^{10}}}$.
10. $\sqrt[5]{\frac{64a^6b^{12}}{c^{24}}}$.

Znaleść pierwiastki kwadratowe następujących wyrażeń:

11. $16a^2+40ab+25b^2$. 12. $49a^4-84a^2b+36b^2$.
13. $36x^6+12x^3+1$. 14. $64a^2+48abc+9b^2c^2$.
15. $\frac{25a^2+20ab+4b^2}{25a^2+20ac+4c^2}$. 16. $\frac{9x^4-24x^3+16}{4x-12x+9}$.
17. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.
18. $1-2x+5x^2-4x^3+4x^4$.
19. $x^4+6x^3+25x^2+48x+64$.
20. x^4-4x^3+8x+4.
21. $1-4x+10x^2-12x^3+9x^4$.
22. $4x^8-4x^6-7x^4+4x^2+4$.

23. $x^4-2ax^3+5a^2x^2-4a^3x+4a^4$.

24. $x^4-2ax^3+(a^2+2b^2)x^2-2ab^2x+b^4$.

25. $x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$.

26. $x^6+4ax^5-10a^3x^3+4a^5x+a^6$.

27. $1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-4x^5+3x^6-2x^7+x^8$.

28. $\frac{4x^2}{9y^2}-\frac{x}{z}-\frac{16x^2}{15yz}+\frac{9y^2}{16z^2}+\frac{6xy}{5z^2}+\frac{16x^2}{25z^2}$.

Znaleść pierwiastki stopnia czwartego z następujących wyrażeń:

29. $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$.

30. $16x^4-96x^3y+216x^2y^2-216xy^3+81y^4$.

31. $1-4x+10x^2-16x^3+19x^4-16x^5+10x^6-4x^7+x^8$.

32. $\{x^4-2(a+b)x^3+(a^2+4ab+b^2)x^2-$
$-2ab(a+b)x+a^2b^2\}^2$.

Znaleść pierwiastki stopnia ósmego, z następujących wyrażeń:

33. $x^8+8x^7+28x^6+56x^5+70x^4+56x^3+28x^2+8x+1$.

34. $\{x^4-2x^3y+3x^2y^2-2xy^3+y^4\}^4$.

Znaleść pierwiastki kwadratowe następujących liczb:

35.	1156.	36.	2025.	37.	3721.
38.	5184.	39.	7569.	40.	9801.
41.	15129.	42.	103041.	43.	165649.
44.	3080,25.	45.	41,2164.	46.	0,835396.
47.	1522756.	48.	29376400.	49.	384524,01.
50.	4981,5364.	51.	64,128064.	52.	0,24373969.

53.	144168049.	54.	254076,4836.		
55.	3,25513764.	56.	4,54499761.		
57.	0,5687573056.	58.	196540602241.		

Wyciągnąć pierwiastki kwadratowe z każdéj z następnych liczb do pięciu cyfr dziesiętnych:

59.	0,9.	60.	6,21.	61.	0,43.
62.	0,00852.	63.	17,	64.	129.
65.	347,259.	66.	14295,387.		

Znaleść pierwiastki sześcienne następujących wyrażeń:

67. $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$.

68. $1728x^6+1728x^4y^3+576x^2y^6+64y^9$.

69. $x^3-3x^2(a+b)+3x(a+b)^2-(a+b)^3$.

70. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$.

71. $x^6-3ax^5+5a^3x^3-3a^5x-a^6$.

72. $8x^6+48cx^5+60c^2x^4-80c^3x^3-90c^4x^2+108c^5x-27c^6$.

73. $1-9x+39x^2-99x^3+156x^4-144x^5+64x^6$.

74. $1-3x+6x^2-10x^3+12x^4-12x^5+10x^6-6x^7+3x^8-x^9$.

Znaleść pierwiastki szóstego stopnia następujących wyrażeń.

75. $1+12x+60x^2+160x^3+240x^4+192x^5+64x^6$.

76. $729x^6-1458x^5+1215x^4-540x^3+135x^2-18x+1$.

Znaleść pierwiastki sześcienne z następujących liczb:

77.	19683.	78.	42875.	79.	157464.

80. 226981. 81. 681472. 82. 778688.
83. 2628072. 84. 3241792. 85. 54010152.
86. 60236,288. 87. 191,102976.
88. 0,220348864. 89. 1371330631.
90. 20910518875. 91. 91398648466125.
92. 5340104393239.

XXVIII.

Wykładniki.

266. W paragrafie 16 określiliśmy znaczenie *wykładnika*; i stosownie do tego określenia, wykładnik dotąd miał dla nas znaczenie zawsze liczby dodatnéj i całkowitéj. Rozszerzymy teraz określenie wykładnika, i pokażemy jakie ma znaczenie wykładnik ułamkowy i wykładnik odjemny.

267. *Jeżeli m i n oznaczają jakiekolwiek liczby całkowite i dodatne, wtedy*:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Prawdziwość tego twierdzenia była już pokazaną w paragrafie 59, lecz nie będzie zbytecznem powtórzyć tutaj to dowodzenie:

$a^m = a \times a \times a \times \ldots\ldots$ m razy, na zasadzie § 16;

$a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots$ n razy, na zasadzie § 16;

przeto:

$a^m \times a^n = a \times a \times a \times \ldots\ldots \times a \times a \times a \times \ldots\ldots$ $m+n$ razy,

czyli, na zasadzie paragrafu 16:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Podobnież, jeżeli p jest także liczbą całkowitą i dodatną:

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p};$$

i tak daléj.

268. Jeżeli m i n są liczbami całkowitemi i dodatnemi, a m jest większe od n, wtedy mamy, na zasadzie § 267:

$$a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m;$$

skąd:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

To również było już dowiedzione w paragrafie 72.

269. Ponieważ wykładniki ułamkowe i wykładniki odjemne nie były dotąd określone, przeto możemy je określić w taki sposób, w jaki tylko chcemy; i najdogodniejszą rzeczą będzie nadać tym wykładnikom takie określenie, że przy nich zasadniczy związek $a^m \times a^n = a^{m+n}$ *zawsze miéć będzie miejsce, jakiekolwiek by były* m i n.

Naprzykład: przypuśćmy, że chcemy poznać znaczenie $a^{\frac{1}{2}}$.

Podług przypuszczenia powinnno być:

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^1 = a.$$

Przeto $a^{\frac{1}{2}}$ musi być taką liczbą, która pomnożona przez siebie samą powinna dać na iloczyn a; lecz *pierwiastek kwadratowy* z a jest podług określenia taką liczbą; — zatem $a^{\frac{1}{2}}$ musi miéć toż samo znaczenie co

i pierwiastek kwadratowy z a, to jest $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Daléj: przypuśćmy, że chcemy poznać znaczenie $a^{\frac{1}{3}}$.

Podług przypuszczenia powinno być:

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^1 = a.$$

Stąd wypada, tak jak poprzednio, że $a^{\frac{1}{3}}$ musi miéć toż samo znaczenie, co i pierwiastek sześcienny z a, to jest: $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$.

Daléj jeszcze przypuśćmy, że chcemy poznać znaczenie $a^{\frac{3}{4}}$.

Podług przypuszczenia powinno być:

$$a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{3}{4}} = a^3;$$

przeto: $$a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}.$$

Te przykłady dają uczącemu się pojęcie o tém, co należy rozumiéć przez jakikolwiek wykładnik ułamkowy; ztémwszystkiem podamy w dwóch następnych paragrafach ogólne określenie tegoż wykładnika.

270. *Znaleść jakie ma znaczenie* $a^{\frac{1}{n}}$, *gdzie* n *jest jakąkolwiek liczbą całkowitą i dodatną.*

Na zasadzie przypuszczenia:

$$a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \text{ } n \text{ czynników} =$$

$$= a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots \text{ } n \text{ wyrazów}} = a^1 = a;$$

przeto $a^{\frac{1}{n}}$ musi miéć toż samo znaczenie, co i pierwiastek potęgi n-téj z a, to jest:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

271. *Znaleść, jakie ma znaczenie* $a^{\frac{m}{n}}$, *gdzie* m *i* n *są jakiemikolwiek liczbami całkowitemi i dodatnemi.*

Na zasadzie przypuszczenia:

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times \ldots \text{ } n \text{ czynników} =$$

$$= a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots \text{ } n \text{ wyrazów}} = a^m;$$

przeto $a^{\frac{m}{n}}$ musi być pierwiastkiem potęgi n z a^m

czyli: $$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Stąd widzimy, że $a^{\frac{m}{n}}$ oznacza pierwiastek potęgi n^{tej} z a podniesionego do potęgi m^{tej}; to jest w wykładniku ułamkowym licznik oznacza wykładnik potęgi, a mianownik wykładnik pierwiastku.

272. Podług powyższego znamy znaczenie każdego wykładnika dodatnego czy to całkowitego, czy też ułamkowego; pozostaje nam teraz znaleść znaczenie wykładnika odjemnego.

Naprzykład: chcemy poznać jakie ma znaczenie a^{-2}.

Podług założenia:

$$a^3 \times a^{-2} = a^{3-2} = a^1 = a,$$

przeto: $$a^{-2} = \frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2}.$$

Podamy teraz określenie w ogólności.

273. *Znaleść znaczenie a^{-n}, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą dodatną całkowitą lub ułamkową.*

Podług założenia, jakiekolwiek by było m, powinniśmy mieć.

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}.$$

Przypuśćmy, że m jest dodatne i większe od n; wtedy będzie:

$$a^{m-n} \times a^n = a^m,$$

skąd: $$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

A zatém:

$$a^m \times a^{-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

a stąd: $$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Aby wypadek ten dogodnie wyrazić słowami, określimy najprzód znaczenie wyrazu *odwrotny*. Pewna ilość nazywa się *odwrotnością* drugiéj, gdy iloczyn tych dwóch ilości jest równy jedności. Tak np. x jest *odwrotnością* $\frac{1}{x}$, lub ilością *odwrotną* względem $\frac{1}{x}$.

Podług tego a^{-n} jest *odwrotnością* lub *ilością odwrotną* względem $\frac{1}{a^n}$. Wypadek ten możemy przedstawić pod jedną z trzech następujących postaci:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad a^n \times a^{-n} = 1.$$

274. Z tego znaczenia, jakie nadaliśmy wykładnikowi ujemnemu wypada, że $a^m : a^n = a^{m-n}$ i w tym przypadku gdy m jest mniejsze od n, równie jak i w tym, gdy m jest większe od n. W rzeczy saméj: przypuśćmy że m jest mniejsze od n; wtedy:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}.$$

Przypuśćmy teraz, że $m = n$, wówczas $a^m : a^n$ jest oczywiście $= 1$, a $a^{m-n} = a^0$. Ten ostatni symbol nie był jeszcze rozważany i nie otrzymał żadnego określenia; tym sposobem możemy mu nadać takie znaczenie, jakie najnaturalniéj przedstawia się samo. Dla tego możemy powiedzieć, że $a^0 = 1$.

275. Aby ustanowić zupełną teoryą wykładników, należałoby podać dowodzenia niektórych twierdzeń, wychodzących poza obręb niniejszego dziełka. Lecz te twierdzenia są tak prostemi wnioskami z określeń i własności ułamków, że czytelnik nie znajdzie żadnych trudności w zastosowaniu ich w tych przypadkach, które mogą mu się przytrafić. Z tego powodu pozostawiamy zupełny wykład obszerniejszym dziełom o algiebrze, a tutaj podamy tylko niektóre przykłady.

276. Jeżeli m i n są liczbami całkowitemi dodatnemi, wtedy wiemy, że: $(a^m)^n = a^{mn}$. (patrz § 229)

Toż samo mieć będzie miejsce, gdy m i n nie będą liczbami całkowitemi dodatnemi. Naprzykład:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{12}}.$$

W rzeczy saméj: niech $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = x$. Wtedy podnosząc obie strony do potęgi 4-téj będzie: $a^{\frac{1}{3}} = x^4$; następnie zaś podnosząc obie strony téj równości do potęgi trzeciéj, otrzymamy: $a = x^{12}$; przeto $x = a^{\frac{1}{12}}$, co właśnie było do pokazania.

277. Jeżeli n nie jest liczbą całkowitą i dodatną, wiemy, że: $a^n \times b^n = (ab)^n$. Toż samo mieć będzie miejsce, gdy n nie jest liczbą całkowitą i dodatną.

Naprzykład: $a^{\frac{1}{3}} \times b^{\frac{1}{3}} = (ab)^{\frac{1}{3}}$. Gdyż jeżelibyśmy obie strony podnieśli do potęgi trzeciéj: wtedy z jednéj i drugiéj otrzymalibyśmy ab; tym sposobem każda z nich jest pierwiastkiem sześciennym z ab.

W podobny sposób mieć będziemy:

$$a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}} \times c^{\frac{1}{n}} \times \ldots = (abc\ldots.)^{\frac{1}{n}}.$$

Przypuśćmy teraz, że tych ilości a, b, c .... jest m, i że wszystkie one są równe a; wtedy z powyższéj równości będzie:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{czyli:}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Stąd wypada, że aby pierwiastek potęgi n-téj z a podnieść do potęgi m, należy tylko ilość podpierwiastkową podnieść do potęgi m, pozostawiając resztę bez zmiany.

278. Ponieważ ułamek może przyjąć rozmaite postaci, nie zmieniając wszakże swojéj wartości, przeto łatwo przedstawić pod rozmaitémi postaciami i ilość z wykładnikiem ułamkowym nie zmieniając jéj wartości. Tak naprzykład: ponieważ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ przeto możemy wnieść, że $a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{6}}$ i tak jest w rzeczy saméj. Gdyż podnosząc obie te ilości do potęgi szóstéj, znajdziemy z jednéj i z drugiéj a^4, czyli każda z nich jest pierwiastkiem potęgi szóstéj z a^4.

279. Dajemy teraz kilka przykładów działań algebraicznych, do których wchodzą wykładniki ułamkowe i odjemne.

Pomnożyć: $a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{3}}$ przez $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{3}}$.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}; \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12}; \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,$$

przeto:

$$a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}} b^{\frac{13}{12}} c.$$

Podzielić: $x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{2}{3}}$ przez: $x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}}$.

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2};$$

przeto: $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}$.

Pomnożyć: $x + x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$, przez: $x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} - x^{-1}$

$$\begin{array}{l} x + x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} \\ \underline{x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} - x^{-1}} \\ x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}} + 1 \\ \quad + x^{\frac{2}{3}} + 1 + x^{-\frac{2}{3}} \\ \underline{\quad - 1 - x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{4}{3}}} \\ x^{\frac{4}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} + 1 - x^{-\frac{4}{3}}. \end{array}$$

Tutaj mamy najprzód: $x^{\frac{1}{3}} \times x = x^{\frac{1}{3}+1} = x^{\frac{4}{3}}$; następnie: $x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$; $x^{\frac{1}{3}} \times x^{-\frac{1}{3}} = x^0 = 1$ i tak daléj.

Podzielić:

$x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}} - y^{-\frac{1}{2}}$, przez:

$x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}} + y^{-\frac{1}{3}}$.

$$\begin{array}{l|l} x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}} - y^{-\frac{1}{2}} & x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}} + y^{-\frac{1}{3}} \\ \underline{-x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} \pm x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}} & \overline{x^{\frac{1}{6}} - y^{-\frac{1}{6}}} \\ \quad - x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} + 2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}} - y^{-\frac{1}{2}} & \\ \quad \underline{\mp x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}} \pm 2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}} \mp y^{-\frac{1}{2}}} & \\ \quad 0 & \end{array}$$

PRZYKŁADY XXVIII.

Znaleść wartości następujących wyrażeń:

1. $9^{-\frac{1}{2}}$; 2. $4^{-\frac{3}{2}}$; 3. $(100)^{-\frac{1}{2}}$;

4. $(1000)^{\frac{2}{3}}$; 5. $(81)^{-\frac{3}{4}}$.

Uprościć:

6. $(a^2)^{-3}$; 7. $(a^{-2})^{-3}$, 8. $\sqrt{a^{-4}}$;

9. $\sqrt[3]{a^{-3}}$; $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{1}{4}}$.

Pomnożyć:

11. $x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{4}}$ przez $x^{\frac{3}{4}} - y^{\frac{3}{4}}$.

12. $a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}$ przez $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$.

13. $x + x^{\frac{1}{2}} + 2$ przez $x + x^{\frac{1}{2}} - 2$.

14. x^4+x^2+1 przez $x^{-4}-x^{-2}+1$.

15. $a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}+1$ przez $a^{-\frac{1}{3}}-1$,

16. $a^{\frac{4}{3}}-2+a^{-\frac{4}{3}}$ przez $a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}$.

17. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ przez $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

18. $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$ przez $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$.

Podzielić:

19. $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ przez $x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}$.

20. $a-b$ przez $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$;

21. $64x^{-1}+27y^{-2}$ przez $4x^{-\frac{1}{3}}+3y^{-\frac{2}{3}}$.

22. $x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}}$ przez $x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$.

23. $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ przez $a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}$.

24. $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$ przez $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$.

25. $x^{\frac{3}{4}}-2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{8}}+a^3$ przez $x^{\frac{1}{4}}-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{8}}+a$.

26. $x^{\frac{1}{2}}-4x^{\frac{3}{8}}y^{\frac{1}{8}}+6x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-4x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{3}{8}}+y^{\frac{1}{2}}$ przez $x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$.

Znaleść pierwiastki kwadratowe następujących wyrażeń:

27. $x^{\frac{4}{2}}-4+4x^{-\frac{4}{2}}$. 28. $(x+x^{-1})^2-4(x-x^{-1})$.

29. $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$.

30. $4x^{\frac{3}{2}}-12x^{\frac{3}{4}}+25-24x^{-\frac{3}{4}}+16x^{-\frac{3}{2}}$.

XXIX.

Ilości pierwiastkowe.

280. Gdy pierwiastek pewnéj liczby nie może być dokładnie oznaczony, wtedy nazywa się on *ilością pierwiastkową* i przedstawia szczególny przypadek tego, co w matematyce nazywamy w ogólności *ilością niewymierną*.*)

Tak np. następujące ilości są pierwiastkowémi:

$$\sqrt{5},\quad \sqrt{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[3]{4},\quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\quad \sqrt[4]{7}$$

---

*) Ilości rozróżniamy jako *wymierne* (rationales) i *niewymierne* (irrationales).

Pod pierwszém nazwiskiem rozumiemy te, które mogą być za pomocą jedności dokładnie wyrażone: takiemi są liczby całkowite i ułamki. Wszelkie inne ilości, których dokładnie wyrazić za pomocą jedności nie można, nazywają się *niewymiernemi*. Np. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ i t. p. przedstawiają przykłady ilości niewymiernych.

T.

Podobnież jeżeli pierwiastek wyrażenia algiebraicznego nie może być oznaczony bez użycia wykładników ułamkowych, wtedy i on także nazywa się *ilością pierwiastkową*.

Tak naprzykład następujące ilości są pierwiastkowémi:

$$\sqrt{a},\quad \sqrt{\frac{a}{b}},\quad \sqrt{a^2+ab+b^2},\quad \sqrt[3]{a^2},\quad \sqrt[3]{a^3+b^3}.$$

Prawidła na działania z ilościami pierwiastkowémi, wypływają bezpośrednio z zasad, wyłożonych w poprzednim rozdziale; rozdział niniejszy jest prawie całkowicie zastosowaniem tych zasad do przykładów liczebnych.

281. Liczby lub wyrażenia algebraiczne mogą się przedstawić pod formą pierwiastkową, nie będąc w *rzeczywistości* pierwiastkowemi. Tak naprzykład: $\sqrt{9}$ jest wyrażone pod postacią pierwiastkową, lecz nie jest w rzeczywistości ilością pierwiastkową, gdyż $\sqrt{9}=3$. Podobnież $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ jest tylko pod postacią pierwiastkową, nie będąc w rzeczywistości ilością pierwiastkową, gdyż $\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b$.

282. Często wypada ilość wymierną przedstawić pod postacią ilości pierwiastkowéj oznaczonego stopnia: w takim razie należy daną ilość podnieść do potęgi takiéj, jaki jest wykładnik ilości pierwiastkowéj i nad tąż potęgą napisać znak pierwiastku.

Naprzykład:

$$3=\sqrt{3^2}=\sqrt{9};\quad 4=\sqrt[3]{4^3}=\sqrt[2]{64};\quad a=\sqrt[4]{a^4};$$
$$a+b=\sqrt[3]{(a+b)^3}$$

283. Iloczyn z ilości wymiernéj przez ilość pierwiastkową może być wyrażony pod postacią ilości całkowicie pierwiastkowéj w ten sposób: należy najprzód ilość wymierną wyrazić pod postacią pierwiastkową, i następnie pomnożyć przez daną ilość pierwiastkową (patrz § 277). Naprzykład:

$$3\sqrt{2}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=\sqrt{18};$$
$$2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{32};$$
$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\times\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}.$$

284. I odwrotnie: ilość całkowicie pierwiastkowa może być wyrażoną w postaci iloczynu z ilości wymiernéj przez pierwiastkową, jeżeli można wyciągnąć pierwiastek z jednego z czynników ilości podpierwiastkowéj:

Tak np.

$$\sqrt{32}=\sqrt{16\times 2}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2};$$
$$\sqrt[3]{48}=\sqrt[3]{8\times 6}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{6}=2\sqrt[3]{6};$$
$$\sqrt[3]{a^3b^2}=\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b^2}=a\sqrt[3]{b^2}.$$

285. Ilość pierwiastkowa ułamkowa może być zamienioną na równoważne jéj wyrażenie, w którém mianownik będzie wymierny. Tak naprzykład:

$$\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3\times 2}{8\times 2}}=\sqrt{\frac{6}{16}}=\frac{\sqrt{6}}{4};$$
$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{2\times 9}{3\times 9}}=\sqrt[3]{\frac{18}{27}}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}.$$

286. Ilości pierwiastkowe, nie mające tego samego wykładnika pierwiastku, mogą być przekształcone na równoznaczne ilości takie, w których wykładniki pierwiastków będą jednakowe (patrz § 277). Na przykład, weźmy pod uwagę $\sqrt{5}$ i $\sqrt[3]{11}$.

$$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[3]{11}=(11)^{\frac{1}{3}};$$

$$5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125};$$

$$(11)^{\frac{1}{3}}=(11)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(11)^2}=\sqrt[6]{121}.$$

287. Możemy tutaj wskazać jedno z zastosowań poprzedniego paragrafu. Przypuśćmy, że chcemy poznać co jest większe $\sqrt{5}$ czy $\sqrt[3]{11}$? Jeżeli sprowadzimy obie te ilości do jednakowego wykładnika pierwiastku, przekonamy się że pierwsza jest większą, gdyż 125 jest większe od 121.

288. Ilości pierwiastkowe nazywają się *podobnemi* wtedy, gdy mają też same czynniki pierwiastkowe, albo też gdy mogą być sprowadzone do takiéj postaci, że do nich wchodzić będą też same czynniki pierwiastkowe.

Tak np. $4\sqrt{7}$ i $5\sqrt{7}$ są ilościami pierwiastkowémi podobnémi; $5\sqrt[3]{2}$ i $4\sqrt[3]{16}$ są także ilościami pierwiastkowemi podobnemi, gdyż:

$$4\sqrt[3]{16}=8\sqrt[3]{2}.$$

289. Aby dodać lub odjąć ilości pierwiastkowe podobne, należy dodać lub odjąć ich współczynniki i przypisać do wypadku współczynnik pierwiastkowy.

Naprzykład:

$$\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-4\sqrt{3}=$$
$$(2+5-4)\sqrt{3}=3\sqrt{3};$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{256}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{12}{8}}+$$

$$+\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{64\times 12}{27}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{12}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4\sqrt[3]{12}}{3}=\frac{\sqrt[3]{12}}{3}.$$

290. Aby pomnożyć jednomiany pierwiastkowe takie, które mają tenże sam wykładnik pierwiastku; należy pomnożyć oddzielnie czynniki wymierne i czyniki pierwiastkowe.

Tak naprzykład:

$$3\sqrt{2}\times\sqrt{3}=3\sqrt{6}; \qquad 4\sqrt{5}\times 7\sqrt{6}=28\sqrt{30};$$

$$2\sqrt[3]{4}\times 3\sqrt[3]{2}=6\sqrt[3]{8}=6\times 2=12.$$

291. Aby pomnożyć jednomiany pierwiastkowe, w których wykładniki pierwiastków nie są jednakowe, należy je najprzód sprowadzić do jednakowego wykładnika i potém postępować jak wyżéj.

Naprzykład: pomnożyć $4\sqrt{5}$ przez $2\sqrt[3]{11}$. Na zasadzie § 286 mamy:

$$\sqrt{5}=\sqrt[6]{125}; \qquad \sqrt[3]{11}=\sqrt[6]{121};$$

przeto żądany iloczyn będzie:

$$8\sqrt[6]{125\times 121}=8\sqrt[6]{15125}.$$

292. Mnożenie wielomianów pierwiastkowych wykonywa się w podobny sposób, jak każde mnożenie wielomianów algebraicznych.

Naprzykład:

$$(6\sqrt{3}-5\sqrt{2})\times(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})=36+18\sqrt{6}-$$
$$-10\sqrt{6}-30=6+8\sqrt{6}.$$

293. Dzielenie przez jednomian pierwiastkowy wykonywa się w podobny sposób jak mnożenie przez jednomian pierwiastkowy. Wypadek z takiego dzielenia może być uproszczony na zasadzie § 285.

Naprzykład:

$$3\sqrt{2}:4\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$4\sqrt{5}:2\sqrt[3]{11}=\frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt[3]{11}}=\frac{2\sqrt[6]{125}}{2\sqrt[6]{121}}=2\sqrt[6]{\frac{125}{121}}=$$

$$=2\sqrt[6]{\frac{125\times(11)^4}{121\times(11)^4}}=\frac{2\sqrt[6]{1830125}}{11}.$$

Zwracamy uwagę uczącego się, że powyższe przekształcenia, dokonane na zasadzie § 285, dają nam ostateczne wypadki pod postacią najdogodniejszą do liczebnych zastosowań; tak naprzykład jeżeli chcemy znaleść przybliżoną wartość liczebną wyrażenia

$$3\sqrt{2}:4\sqrt{3}$$

wtedy najprościéj dochodzimy do wypadku wyciągając pierwiastek kwadratowy z 6 i dzieląc otrzymany wypadek przez 4.

294. Dzielenie przez wielomian pierwiastkowy w jednym tylko przypadku ma znaczenie praktyczne, w tym mianowicie: gdy dzielnik jest summą lub różnicą dwóch ilości pierwiastkowyzh *stopnia drugiego*, czyli zawierających pierwiastki kwadratowe. Takie dzielenie ostatecznie wykonywa się za pomocą ważnego działania, które polega na przeks ztałceniu ilorazu, mającego mianownik pierwiastkowy, na takie wyrażenie, w którem mianownik jest *wymiernym*. Weźmy jako przykład ułamek:

$$\frac{4}{5\sqrt{2}+2\sqrt{3}};$$

jeżeli licznik i mianownik tego ułamku pomnożymy przez $5\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, wtedy wartość ułamku nie zmieni się a mianownik stanie się *wymiernym*. W rzeczy saméj:

$$\frac{4}{5\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\frac{4(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{(5\sqrt{2}+2\sqrt{3})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{4(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{50-12}=\frac{10\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{19}.$$

Podobnież:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}=$$
$$=\frac{8+3\sqrt{6}}{12-2}=\frac{8+3\sqrt{6}}{10}.$$

294_1. W ogólności gdybyśmy mieli ułamek którego licznik jest jakikolwiek m, a mianownik summą dwóch ilości pierwiastkowych stopnia drugiego:

$$\frac{m}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}},$$

wtedy w celu zamiany tego ułamku na taki, w którym mianownik byłby wymierny, należy jego licznik i mianownik pomnożyć przez różnicę tychże samych ilości pierwiastkowych, których summa stanowi mianownik.

W rzeczy saméj, postępując tak otrzymamy:

$$\frac{m}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}}=\frac{m(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}=$$
$$=\frac{m(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d}.$$

Nowy mianownik a^2b-c^2d znajdziemy albo wykonywając wprost mnożenie $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})$, albo też możemy odrazu napisać wypadek na téj zasadzie, że iloczyn z summy dwóch ilości przez ich różnicę, równa się różnicy kwadratów tychże samych ilości (patrz § 79).

Gdyby w mianowniku była różnica dwóch ilości pierwiastkowych stopnia drugiego, wtedy należy pomnożyć licznik i mianownik ułamku przez summę tych ilości, których różnica stanowi mianownik. Np.

$$\frac{m}{a\sqrt{b}-c\sqrt{d}}=\frac{m(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}=$$
$$=\frac{m(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})}{a^2b-c^2d}.$$

294_2. W przypadku gdyby w mianowniku był trójmian pierwiastkowy, możnaby również ułamek

taki zamienić na ułamek z mianownikiem wymiernym, tylko działanie byłoby dłuższe. Następny przykład pokazuje, jak w podobnych przypadkach należy postępować, aby uwolnić mianownik od ilości pierwiastkowych.

Niech będzie dany ułamek:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}},$$

który chcemy przekształcić na ułamek z mianownikiem wymiernym. Oznaczmy na chwilę $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ jedną głoskę s; wtedy dany ułamek przedstawi się pod postacią:

$$\frac{1}{s+\sqrt{7}}$$

Aby tutaj uwolnić się od ilości pierwiastkowéj w mianowniku należy licznik i mianownik pomnożyć przez $s-\sqrt{7}$; czyniąc to będzie:

$$\frac{1}{s+\sqrt{7}}=\frac{s-\sqrt{7}}{(s+\sqrt{7})(s-\sqrt{7})}=\frac{s-\sqrt{7}}{s^2-7}.$$

Podstawmy teraz zamiast s jego wartość, to jest $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; wtedy ułamek ten zamieni się na następny:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-7},$$

a że:

$$(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2=3+2\sqrt{15}+5=2+2\sqrt{15},$$

(podług wzoru na $(a+b)^2$), przeto powyższy ułamek będzie:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{8+2\sqrt{15}-7}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}}.$$

Zamiast więc ułamku danego, w którym mianownik był trójmianem pierwiastkowym, otrzymaliśmy ułamek, którego mianownik jest dwumianem; możemy przeto uwolnić się od ilości pierwiastkowych sposobem podanym wyżej, i ostatecznie otrzymać ułamek z mianownikiem wymiernym. Mnożąc mianowicie licznik i mianownik ostatniego ułamku przez $1-2\sqrt{15}$, będzie:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(1-2\sqrt{15})}{(1+2\sqrt{15})(1-2\sqrt{15})}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-6\sqrt{5}-10\sqrt{3}+2\sqrt{105}}{1-60}=$$

$$=\frac{-9\sqrt{3}-5\sqrt{5}-\sqrt{7}+2\sqrt{105}}{-59}=$$

$$=\frac{9\sqrt{3}+5\sqrt{5}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}}{59}.$$

Temu więc ostatniemu ułamkowi równa się ułamek dany:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}.$$

W podobny sposób, przez dwukrotne powtórzenie działania mnożenia licznika i mianownika przez jedną i tęż samą ilość możemy każdy ułamek. którego mianownik jest trójmianem pierwiastkowym, zamienić na ułamek z mianownikiem wymiernym.

295. Pokażemy teraz jak znaleść pierwiastek kwadratowy z dwumianu, którego jeden wyraz jest ilością pierwiastkową stopnia drugiego. Przypuśćmy naprzykład, że chcemy znaleść pierwiastek kwadratowy z $7+4\sqrt{3}$. Ponieważ:

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy},$$

przeto widoczną jest rzeczą, że jeżeli znajdziemy na x i y takie wartości, któreby zadosyć czyniły warunkom:

$$x+y=7,$$

i:

$$2\sqrt{xy}=4\sqrt{3},$$

wtedy pierwiastek kwadratowy z $7+4\sqrt{3}$ będzie równy $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Całe działanie możemy ułożyć w ten sposób:

Przypuśćmy, że:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

podnieśmy obie strony téj równości do kwadratu, będzie:

$$7+4\sqrt{3}=x+y+2\sqrt{xy}.$$

Przyjmijmy, że

$$x+y=7.$$

wtedy będzie:

$$2\sqrt{xy}=4\sqrt{3}.$$

Podnieśmy znowuż do kwadratu obie strony każdego z tych dwóch ostatnich równań, i odejmijmy je następnie; otrzymamy:

$$(x+y)^2-4xy=49-48=1,$$

czyli:

$$(x+y)^2=1,$$

skąd:

$$x-y=1.$$

Ponieważ $x+y=7$, i $x-y=1$, przeto będzie:

$$x=4,$$
$$y=3.$$

Otrzymamy więc:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}.$$

Podobnież znaleźlibyśmy:

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

295. Rachunkiem podobnym do powyżéj pokazanego moglibyśmy znaleść i ogólne wyrażenie na

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}};$$

pokażemy jednak tutaj jeszcze inny sposób wyprowadzenia tych wyrażeń ogólnych.

Jeżeli jakąkolwiek ilość podniesiemy do kwadratu i następnie z tego ostatniego wyciągniemy pierwiastek kwadratowy, wtedy otrzymamy początkową ilość;—dwa te działania wzajemnie się zniosą. Na téj zasadzie mamy:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}$$

czyli:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}} \quad \ldots \quad (1)$$

Podobnież:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{(\sqrt{x}-\sqrt{x})^2}$$

czyli:

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{x+y-2\sqrt{xy}} \quad \ldots \quad (2)$$

Dwie te równości są tożsamościowe, to jest mają miejsce przy wszelkich znaczeniach na x i y; — miéć więc będą miejsce i wtedy gdy uczynimy:

$$x=a+\sqrt{b}, \qquad y=a-\sqrt{b}.$$

Dodając odpowiedniemi stronami te ostatnie dwie równości, będzie:

$$x+y=2a;$$

mnożąc zaś je: $xy=a^2-b$.

Podstawiając teraz te wartości na x, y, $x+y$ i xy w równości (1) i (2), otrzymamy:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}},$$
$$\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

Przez dodanie odpowiedniemi stronami tych dwóch równości znajdziemy:

$$2\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}+\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}};$$

przez odjęcie zaś drugiéj równości od pierwszéj będzie

$$2\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}-\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}.$$

Dzieląc tak pierwszą, jak i drugą równość przez 2 otrzymamy:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}}{2}+\frac{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}}{2},$$
$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}}{2}-\frac{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b}}}{2},$$

Podprowadzając zaś mianowniki 2 pod znaki pierwiastku:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{2a+2\sqrt{a^2-b}}{4}}+\sqrt{\frac{2a-2\sqrt{a^2-b}}{4}};$$

i skracając następnie każdy z ułamków znajdujących się na drugich stronach równości, otrzymamy ostatecznie dwa wzory:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Równości te są tożsamościami, to jest mają miejsce przy wszystkich znaczeniach na a i b. Chcąc ich zastosować, należy w każdym szczególnym przypadku podstawić zamiast a i b odpowiednie wartości. Tak np. jeżeli dane wyrażenie będzie:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}},$$

które już wyżéj rozważaliśmy, wtedy należy najprzód 4 podciągnąć pod znak pierwiastku: otrzymamy:

$$\sqrt{7+\sqrt{48}},$$

i następnie w pierwszym z ostatnich wzorów podstawić 7 zamiast a i 48 zamiast b. Znajdziemy:

$$\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-48}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-48}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{7+1}{2}}+\sqrt{\frac{7-1}{2}},$$

i nakoniec:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$$

Lecz jakkolwiek te wzory zawsze dają się zastosować jakiekolwiek by a i b miały znaczenia, stém wszystkiem nie zawsze dogodną jest rzeczą używać ich,

gdyż wyrażenia na drugich stronach tychże równości są w ogóle bardziéj złożonemi, aniżeli na pierwszych stronach. W jednym tylko przypadku korzystném jest ich użycie, wtedy mianowicie, gdy na drugich stronach zginą znaki pierwiastkowe pod pierwiastkiem. Ten wypadek mieć będzie miejsce wtedy, gdy ilości a i b będą takie, że a^2-b będzie *zupełnym kwadratem*. Wtedy bowiem $\sqrt{a^2-b}$ będzie mógł być znaleziony dokładnie, i ilości pierwiastkowej pod znakiem pierwiastku nie będzie.

Weźmy jeszcze jako przykład:

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}$$

Najprzód podprowadzamy współczynnik 2 pod znak pierwiastkowy; będzie:

$$\sqrt{8-\sqrt{60}}.$$

Tutaj: $a^2-b=8^2-60=64-60=4$, jest zupełnym kwadratem, dogodną jest więc rzeczą użyć wzoru na $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, Stosując ten wzór otrzymamy:

$$\sqrt{8-\sqrt{60}}=\sqrt{\frac{8+\sqrt{8^2-60}}{2}}-\sqrt{\frac{8-\sqrt{8^2-60}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{8+\sqrt{4}}{2}}-\sqrt{\frac{8-\sqrt{4}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{10}{2}}-\sqrt{\frac{6}{2}},$$

i nakoniec:

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}=\sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

PRZYKŁADY XIX.

Uprościć:

1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}$;

2) $2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{108}$;

3) $2\sqrt{3}+3\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}$;

4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$.

Pomnożyć:

5) $\sqrt{5}+\sqrt{1\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ przez $\sqrt{3}$.

6) $\sqrt[3]{4}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ przez $\sqrt[3]{4}$.

7) $1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ przez $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

8) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ przez: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Uczynić wymiernemi mianowniki następujących ułamków:

9) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. 10) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

11) $\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$; 12) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$.

Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z następujących wyrażeń

13) $14+6\sqrt{5}$. 14) $16-6\sqrt{7}$.

15) $8+4\sqrt{3}$, 16) $4-\sqrt{15}$,

Uprościć:

17) $\dfrac{1}{\sqrt{5+\sqrt{24}}}$, 18) $\dfrac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$.

19) $\dfrac{\sqrt{12+6\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}}$; 20) $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

21*) $\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[4]{b^4}+\left(\sqrt[n]{m}\right)^n+\dfrac{a}{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}$.

Wykonać działania:

22*) $(\sqrt{m}-\sqrt{m-n})(\sqrt{m}+\sqrt{m-n})$.

23*) $(\sqrt{x+y-z}+\sqrt{x-y+z})(\sqrt{x+y-z}-\sqrt{x-y+z})$.

24*) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$.

25*) $\sqrt{xy}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$.

26*) $\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}-\sqrt[3]{\frac{1}{8}\sqrt{17}-1\frac{1}{8}}\right)\sqrt[3]{3+\frac{1}{3}\sqrt{17}}$.

27*) $\sqrt[3]{\sqrt{12}-2}\times\sqrt[4]{\sqrt{12}+2}+\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\times\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$.

28*) $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}\,.\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$.

W następujących wyrażeniach wprowadzić współczynnik pod znak pierwiastkowy.

29*) $a\sqrt[m]{b}$; 30*) $a\sqrt{\frac{b}{a}}$; 31*) $ab\sqrt{\frac{1}{ab}}$;

32*) $(a+b)\sqrt{\frac{ab}{a^2+2ab+b^2}}$;

33*) $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$. 34*) $5\sqrt[3]{4}$;

35*) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$.

Uczynić wymiernémi mianowniki w następujących ułamkach:

36*) $\frac{7}{\sqrt{2}}$; 37*) $\frac{3+\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$; 38*) $\frac{9}{\sqrt{19}+4}$;

39*) $\frac{66}{13-7\sqrt{3}}$ 40*) $\frac{1+2\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}}$;

41*) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; 42*) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

43*) $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}-a}$; 44*) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;

45*) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; 46*) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}}$;

47*) $\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{y}}}$;

Znaleść czemu się równa:

48*) $\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[r]{a^s}$; 49*) $\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[5]{a^7}$;

50*) $\sqrt[4]{a^7}\cdot\sqrt[9]{a^4}\cdot\sqrt[7]{a^3}$;

51*) $\sqrt[3]{(4ab^2)^n}\cdot\sqrt[3]{(2a^2b)^n}$;

52*) $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)^3}+\sqrt{(a^2-2ab+b^2)^3}$;

53*) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{8a^3}}\right)^7$; 54*) $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{8a^3}}\right)^5$;

55*) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3$; 56*) $(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b})^2$;

57*) $2\sqrt[12]{\sqrt[5]{7}}+3\sqrt[6]{\sqrt[10]{7}}-3\sqrt[5]{\sqrt[12]{7}}-\sqrt[10]{\sqrt[6]{7}}$.

58*) $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}$; 59*) $\sqrt[7]{\frac{r}{a^2\sqrt[3]{a}}}$;

60*) $\sqrt[3]{5\sqrt[4]{7}}$.

XXX.

Równania stopnia drugiego.

296. Równaniem stopnia drugiego nazywamy takie równanie, które zawiera *kwadrat* ilości niewiadoméj, ale nie zawiéra wyższéj potęgi téjże ilości.

297. Równanie stopnia drugiego nazywa się *czystém* wtedy, gdy zawiéra *tylko* kwadrat ilości niewiadoméj. Równanie stopnia drugiego nazywa się wtedy *zupełném*, gdy, oprócz kwadratu niewiadoméj, zawiéra także niewiadomą w stopniu pierwszym. Tak naprzykład: równanie $2x^2=50$ jest *czystém* równaniem stopnia drugiego; równanie zaś $2x^2-7x+3=0$ jest *zupełném*.

298. Na rozwiązanie czystego równania stopnia drugiego można podać następujące prawidło:

Należy najprzód znaleść wartość na kwadrat niewiadomej sposobem podanym na rozwiązywanie równań stopnia pierwszego, następnie przez wyciągnięcie pierwiastku kwadratowego znajdą się wartości na niewiadomą.

Naprzykład: rozwiązać równanie:

$$\frac{x^2-13}{3}+\frac{x^2-5}{10}=6.$$

Znieśmy najprzód mianowniki przez pomnożenie obu stron równania przez 30; będzie:

$$10(x^2-13)+3(x^2-5)=180;$$

skąd: $$13x^2=180+130+15=325;$$

i następnie: $$x^2=\frac{325}{13}=25.$$

Wyciągając z obu stron pierwiastki kwadratowe, otrzymamy:

$$x=\pm 5.$$

W tym przykładzie postępując najprzód tak, jak przy rozwiązaniu równań stopnia pierwszego znaleźliśmy, że x^2 jest równe 25. Stąd wypada, że samo x jest taką liczbą, która podniesiona do kwadratu, daje na wypadek 25; czyli x jest pierwiastkiem kwadratowym z 25.

W arytmetyce takiem pierwiastkiem jest 5, lecz w algiebrze pierwiastek ten ma dwa znaczenia $+5$ i -5, (patrz § 238). Zatém x może miéć wartość $+5$ lub -5; każda z tych ilości zadosyć czyni równaniu, i to wyrażamy pisząc:

$$x=\pm 5.$$

298$_1$. Stąd widzimy, że równanie czyste stopnia drugiego ma dwa pierwiastki, jednakowe co do liczebnéj wartości, ale różniące się znakiem. Jeżeli chcemy dwa te pierwiastki oddzielnie i wyraźnie napisać, wtedy rozróżniamy je w ten sposób, że jeden z nich oznaczamy przez x_1, drugi zaś przez x_2; tym sposobem będzie:

$$x_1=+5;\quad x_2=-5.$$

W ogóle, gdyby było do rozwiązania równanie:

$$ax^2+c=0,$$

wtedy, przez przeniesienie c na drugą stronę, byłoby najprzód:

$$ax^2=-c,$$

następnie:

$$x^2=-\frac{c}{a},$$

a przez wyciągnięcie z obu stron pierwiastku kwadratowego:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

czyli, pisząc oddzielnie oba pierwiastki:

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

$$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Natura tych pierwiastków zależy od ilości znajdującéj się pod znakiem pierwiastku, to jest od $-\frac{c}{a}$. Najprzód należy tu zwrócić uwagę na to, że nie zawsze ta ilość jest odjemną, jakkolwiek w ogólnym wzorze

znajduje się znak —. Znak ten powstał z przeniesienia c na drugą stronę równania, i wyraża tylko to, że na téj drugiéj stronie c ma znak przeciwny temu, jaki miało, gdy było na piérwszéj stronie. Zatém $-c$ oznaczać będzie tylko wtedy ilość odjemną, gdy c na pierwszéj stronie było dodatne, *) i ułamek $-\frac{c}{a}$ będzie dodatnym wtedy, gdy c na pierwszéj stronie jest odjemne; w przeciwnym zaś razie ułamek ten jest odjemnym. Gdy $-\frac{c}{a}$ jest ilością dodatną, wtedy $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, a zatém i wartości na x_1 i x_2, albo mogą być dokładnie wyrażone za pomocą liczby całkowitéj lub ułamku, (co miéć będzie miejsce wówczas, gdy $-\frac{c}{a}$ będzie zupełnym kwadratem), albo téż obie te wartości pozostaną niewymierne.

Gdy $-\frac{c}{a}$ będzie ujemne, wtedy wartości na x będą niemożliwe, czyli *urojone*. (§ 240).

Objaśnimy to, co było powiedziane wyżéj, kilkoma przykładami:

Z równania: $5x^2-45=0$, otrzymujemy,

$$5x^2=45,$$

$$x^2=9,$$

skąd: $x=\pm 3$; czyli pisząc oddzielnie oba pierwiastki:

*) Gdyż w przeciwnym przypadku przez zmianę wszystkich znaków w całém równaniu, otrzymalibyśmy równanie, w którem pierwszy wyraz byłby dodatny.

$$x_1=3;\ x_2=-3.$$

Drugie równanie: $4x^2-25=0$. Wtedy

$$4x^2=25,$$

skąd: $$x^2=\frac{25}{4},$$

i nakoniec: $$x=\pm\frac{5}{2},$$

to jest: $$x_1=\frac{5}{2},\ x_2=-\frac{5}{2}.$$

Gdyby było równanie: $7x^2-21=0$; wtedy pierwiastki jego byłyby niewymierne:

$$x_1=\sqrt{3},\quad x_2=-\sqrt{3}.$$

Przypuśćmy jeszcze, że mamy równanie:

$$3x^2+12=0.$$

Chcąc je rozwiązać, mamy najprzód:

$$3x^2=-12,$$

następnie: $$x^2=-4,$$

a stąd: $$x=\pm\sqrt{-4}$$

A że niema takiéj ilości dodatnéj lub odjemnéj, któraby podniesiona do kwadratu dała na wypadek ilość odjemną -4, przeto w tym przypadku x niemoże być oznaczone w liczbach dodatnych lub ujemnych: i to wyrażamy mówiąc, że x jest *urojone*. Przeciwnie zaś w pierwszym przypadku wartości na x nazywamy *rzeczywistémi*. Często w matematyce ilości urojone wyrażamy symbolicznie następującym sposobem:

Ponieważ: $-4=4\times-1$, przeto:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1},$$ czyli:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \times \sqrt{-1},$$

to jest: $$\sqrt{-4} = 2\sqrt{-1}.$$

Tutaj $\sqrt{-1}$ jest właśnie znakiem lub symbolem ilości urojonéj: zwykle oznaczamy go w rachunkach głoską i. Wprowadzając to oznaczenie mieć będziemy następujące wartości na x:

$$x_1 = 2i; \quad x_2 = -2i.$$

W rozbieranym przypadku równanie niema rozwiązania w liczbach dodatnych i odjemnych. Lecz uważając $2i$ jako ilość nowego rodzaju, i nadając głosce i znaczenie takie, że $i^2 = -1$, możemy się przekonać łatwo, że przy tych warunkach $2i$ zadosyć czynić będzie danemu równaniu: $3x^2 + 12 = 0$. Przez wprowadzenie zatém znaku ilości urojonéj, rozwiązanie czystego równania stopnia drugiego, staje się zawsze możliwém; — tylko w pewnych przypadkach rozwiązanie to będzie rzeczywistém, w innych zaś urojonem.

W ogólności ilość urojona $\sqrt{-a^2}$ może być w ten sposób wyrażona:

Ponieważ: $$-a^2 = a^2(-1)$$

więc: $$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2 . (-1)}$$

czyli: $$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2} . \sqrt{-1},$$

albo: $$\sqrt{-a^2} = a\sqrt{-1}.$$

Wprowadzając i zamiast $\sqrt{-1}$, będzie $\sqrt{-a^2} = ai$.

299. Przechodzimy teraz do rozwiązania równań zupełnych stopnia drugiego.

Jeżeli $x + \frac{a}{2}$ pomnożymy przez tęż samą ilość, otrzymamy:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right) = x^2 + 2\frac{ax}{2} + \frac{a^2}{4} = x^2 + ax + \frac{a^2}{4}.$$

Widzimy więc, że $x^2 + ax + \frac{a^2}{4}$ jest zupełnym kwadratem, gdyż jest to kwadrat ilości $x + \frac{a}{2}$. Stąd wypada, że dwumian $x^2 + ax$ staje się kwadratem zupełnym przez dodanie do niego $\frac{a^2}{4}$, to jest przez *dodanie kwadratu połowy współczynnika przy x*. Fakt ten stanowi główną podstawę rozwiązania równania zupełnego stopnia drugiego. Objaśnimy to kilkoma przykładami.

Weźmy np. $x^2 + 6x$; tutaj połową współczynnika przy x jest 3; dodając do tego dwumianu 3^2, otrzymamy $x^2 + 6x + 3^2$. a to jest $(x+3)^2$.

$x^2 - 5x$; tutaj połową współczynnika przy x jest $-\frac{5}{2}$, dodając $\left(-\frac{5}{2}\right)^2$, czyli $\left(\frac{5}{2}\right)^2$, otrzymamy $x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2$, a to jest $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$.

$x^2 - \frac{4x}{5}$; tutaj połową współczynnika przy x jest $\frac{2}{5}$; dodając $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ otrzymamy $x^2 - \frac{4x}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2$, a to jest $\left(x - \frac{2}{5}\right)^2$.

$x^2-\frac{3x}{4}$; tutaj połową współczynnika przy x jest $-\frac{3}{8}$; dodając $\left(-\frac{3}{8}\right)^2$, czyli $\left(\frac{3}{8}\right)^2$, otrzymamy $x^2-\frac{3x}{4}+\left(\frac{3}{8}\right)^2$, co znowuż jest równe $\left(x-\frac{3}{8}\right)^2$.

Działanie objaśnione temi przykładami, nazywa się *dopełnieniem do kwadratu.*

300. Prawidło na rozwiązanie równania zupełnego stopnia drugiego jest następne:

Należy najprzód równanie przyprowadzić do takiéj postaci, aby na pierwszéj stronie były tylko wyrazy zawierające niewiadome, i aby współczynnik przy x^2 był równy 1; następnie dodać do każdéj strony równania kwadrat połowy współczynnika przy x i wyciągnąć z obu stron pierwiastek kwadratowy.

Przekonamy się z przykładów następujących, że prawidło to prowadzi nas do takiego punktu, z którego bezpośrednio już możemy otrzymać wartości na niewiadomą.

301. Rozwiązać równanie:

$$x^2-10x+24=0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy 24 na drugą stronę, będzie:

$$x^2-10x=-24;$$

dodając do obu stron równania po $\left(\frac{10}{2}\right)^2$, otrzymamy:

$$x^2-10x+5^2=-24+25=1.$$

Wyciągnijmy teraz pierwiastek kwadratowy z obu stron równania; znajdziemy:

$$x-5=\pm 1,$$

a następnie: $x=5\pm 1$, czyli:

$x=$ albo $5+1$, albo $5-1$;

skąd. $x=6$, lub $x=4$.

Łatwo się przekonać, że każda z tych wartości zadosyć czyni danemu równaniu, i zalecamy uczącemu się sprawdzać zawsze otrzymane wartości przez podstawienie ich w dane równanie.

302. Rozwiązać:

$$3x^2-4x-55=0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę:

$$3x^2-4x=55,$$

dzieląc przez 3 obie strony równania, otrzymamy:

$$x^2-\frac{4x}{3}=\frac{55}{3};$$

dodając do obu stron po $\left(\frac{2}{3}\right)^2$:

$$x^2-\frac{4x}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{55}{3}+\frac{4}{9}=\frac{169}{9};$$

wyciągając pierwiastki kwadratowe:

$$x-\frac{2}{3}=\pm\frac{13}{3};$$

skąd: $x=\frac{2}{3}\pm\frac{13}{3}$;

czyli: $x=5$, lub: $x=-\frac{11}{3}$.

303. Rozwiązać:

$$2x^2+3x-35=0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę:

$$2x^2+3x=35,$$

dzieląc następnie przez 2:

$$x^2+\frac{3x}{2}=\frac{35}{2};$$

i dodając $\left(\frac{3}{4}\right)^2$, otrzymamy:

$$x^2+\frac{3x}{2}+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{35}{2}+\frac{9}{16}=\frac{289}{16}.$$

Wyciągając teraz pierwiastek kwadratowy z obu stron, będzie:

$$x+\frac{3}{4}=\pm\frac{17}{4};$$

skąd:

$$x=-\frac{3}{4}\pm\frac{17}{4};$$

czyli $x=\frac{7}{2}$, lub $x=-5$.

304. Rozwiązać:

$$x^2-4x-1=0.$$

Przez przeniesienie wyrazu wiadomego, będzie:

$$x^2-4x=1;$$

dodajemy teraz do obu stron równania 2^2; otrzymamy

$$x^2-4x+2^2=1+4=5,$$

skąd, po wyciągnięciu pierwiastku kwadratowego znajdziemy:

$$x-2=\pm\sqrt{5};$$

a następnie:

$$x=2\pm\sqrt{5}.$$

Tutaj pierwiastek kwadratowy z 5 nie może być znaleziony dokładnie; — w każdym razie za pomocą sposobu podanego w §§ 254 i 255 możemy oznaczyć wartość przybliżoną tegoż pierwiastku do takiego stopnia, do jakiego chcemy, a tém samém i wartość na x może być oznaczoną z takiem stopniem przybliżenia, z jakim chcemy.

305. W przykładach dotąd rozwiązanych znajdywaliśmy zawsze dwa różne pierwiastki równania stopnia drugiego; są jednak pewne przypadki, w których otrzymujemy w rzeczywistości jeden tylko pierwiastek. Weźmy jako przykład równanie: $x^2-14x+49=0$; przez wyciągnięcie pierwiastku kwadratowego z obu stron równania będzie $x-7=0$ skąd $x=7$. Jednak dla wielu powodów uznano za stosowne mówić i w tym przypadku, że równanie stopnia drugiego ma *dwa pierwiastki równe*.

306. Rozwiązać:

$$x^2-6x+13=0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę, będzie:

$$x^2-6x=-13;$$

dodając po 3^2 do obu stron:

$$x^2-6x+3^2=-13+9=-4.$$

Wyciągając z obu stron pierwiastek kwadratowy, otrzymamy:

$$x-3=\pm\sqrt{-4}.$$

Lecz -4 nie może mieć żadnego pierwiastku kwadratowego dokładnego lub przybliżonego, gdyż każda liczba, czy to dodatna czy też odjemna będąc pomnożoną samą przez się, daje na wypadek liczbę dodatną. W tym przypadku równanie stopnia drugiego niema żadnego pierwiastku rzeczywistego, i wyrażamy to, mówiąc, że pierwiastki są *urojone* lub *niemożliwe*.*)

307. Rozwiązać równanie:

$$\frac{1}{2(x-1)}+\frac{3}{x^2-1}=\frac{1}{4}.$$

Znieśmy tu najprzód mianowniki, przez pomnożenie obu stron rownania przez $4(x^2-1)$, to jest przez najmniejszą wspólną wielokrotność względem mianowników. Otrzymamy:

$$2(x+1)+12=x^2-1.$$

Przenosząc wyrazy zawierające niewiadomą na pierwszą, a wyrazy wiadome na drugą stronę:

$$x^2-2x=15;$$

dodając po 1^2 do obu stron:

$$x^2-2x+1=15+1=16;$$

---

*) Pierwiastki te mogą być przedstawione pod taką postacią, jak pierwiastki § 298_1; mianowicie, ponieważ:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\,.\,(-1)}=2\sqrt{-1}=2i,$$

przeto;

$$x=3\pm 2i,$$

lub, pisząc oddzielnie oba pierwiastki:

$$x_1=3+2i,$$
$$x_2=3-2i.$$

a wyciągając pierwiastek kwadratowy z obu stron będzie:

$$x-1=\pm 4,$$

skąd: $x=1\pm 4;$ czyli:

$$x=5, \text{ lub: } x=-3.$$

308. Rozwiązać równanie:

$$\frac{2x}{15}+\frac{3x-50}{3(10+x)}=\frac{12x+70}{190}.$$

Pomnóżmy obie strony równania przez 570, to jest przez najmniejszą wspólną wielokrotną liczb 15 i 190; będzie:

$$76x+\frac{190(3x-50)}{10+x}=3(12x+70);$$

skąd:

$$\frac{190(3x-50)}{10+x}=210-40x,$$

a następnie:

$$190(3x-50)=(210-40x)(10+x),$$

czyli:

$$570x-9500=2100-190x-40x^2,$$

i dalej:

$$40x^2+760x=11600;$$

dzieląc zaś obie strony równania przez 40:

$$x^2+19x=290.$$

Dodajmy teraz do obu stron po $\left(\frac{19}{2}\right)^2$, otrzymamy:

$$x^2+19x+\left(\frac{19}{2}\right)^2=290+\frac{361}{4}=\frac{1521}{4},$$

a wyciągając z obu stron pierwiastki kwadratowe, będzie:

$$x+\frac{19}{2}=\pm\frac{39}{2},$$

skąd: $$x=-\frac{19}{2}\pm\frac{39}{2},$$

i nakoniec: $x=10$, lub $x=-29$.

309. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}.$$

Znosząc mianowniki otrzymamy:

$$(x+3)(x-2)(x-1)+(x-3)(x+2)(x-1)=$$
$$=(2x-3)(x+2)(x-2).$$

skąd przez wykonanie wskazanych mnożeń:

$$x^3-7x+6+x^3-2x^2-5x+6=2x^3-3x^2-8x+12;$$

a następnie:

$$x^2-4x=0.$$

Dodając do obu stron równania po 2^2, będzie:

$$x^2-4x+2^2=4.$$

wyciągając zaś pierwiastki kwadratowe, znajdziemy:

$$x-2=\pm 2.$$

Stąd nakoniec:

$$x=2\pm 2,$$ czyli:

$x=4$, lub: $x=0$.

Działanie zawarte w ostatnich wierszach podaliśmy dla tego, aby przedstawić rozwiązanie równania w ten sam sposób, w jaki rozwiązywaliśmy poprzednie przykłady; — lecz rozwiązanie w tym przypadku może być znalezione prościéj. W rzeczy saméj: równanie $x^2-4x=0$ może być tak napisane: $x(x-4)=0$; i ponieważ pierwsza strona jest iloczynem z dwóch czynników, który ma być równym zero, przeto widoczném jest, że musi być albo $x-4=0$, lub $x=0$; czyli albo $x=4$, albo téż $x=0$.

Zwracamy jeszcze uwagę uczącego się na to, że po zniesieniu mianowników w powyższym przykładzie $2x^3$ znalazło się na obu stronach równania, i z tego powodu mogło ono być usnnięte z równania przez odejmowanie, przez co równanie wypadło stopnia drugiego.

310. *Każde równanie stopnia drugiego może być sprowadzone do postaci* $x^2+px+q=0$, *gdzie* p *i* q *są liczbami wiadomemi, całkowitemi lub ułamkowemi, dodatnemi lub odjemnémi.*

Gdyż równanie stopnia drugiego, podług określenia, nie zawiera wyższych potęg ilości niewiadoméj nad drugą. Przenieśmy wszystkie wyrazy równania na pierwszą stronę i jeżeli potrzeba, zmieńmy wszystkie znaki na przeciwne, tak, aby wyraz zawierający kwadrat niewiadoméj był dodatny: — wtedy dzieląc wszystkie wyrazy równania przez współczynnik przy niewiadoméj w stopniu drugim otrzymamy równanie powyższéj postaci.

Naprzykład: przypuśćmy, że mamy równanie:

$$7x-4x^2=5.$$

Będzie najprzód:

$$7x-4x^2-5=0,$$

następnie:

$$4x^2-7x+5=0;$$

dzieląc obie strony równania przez 4:

$$x^2-\frac{7}{4}x+\frac{5}{4}=0\,.$$

W tym więc przykładzie $p=-\frac{7}{4}$, $q=\frac{5}{4}$.

311. Rozwiązać równanie:

$$x^2+px+q=0.$$

Przez przeniesienie wyrazu wiadomego mamy:

$$x^2+px=-q.$$

Dodajmy po $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ do obu stron otrzymamy:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2-4q}{4}.$$

Wyciągnijmy z obu stron pierwiastki kwadratowe; będzie:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

skąd: $x=-\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

312. Tym sposobem otrzymaliśmy *wzór ogólny* na pierwiastki równania stopnia drugiego $x^2+px+q=0$, mianowicie x musi być równe:

$$\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\text{ lub }\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Z tych wzorów ogólnych wyprowadzimy teraz kilka bardzo ważnych wniosków, które na zasadzie § 310 odnosić się będą do każdego równania stopnia drugiego.

313. *Równanie stopnia drugiego nie może mieć więcéj niż dwa pierwiastki.*

Widzieliśmy bowiem, że pierwiastek *musi być* równym jednéj z dwóch znalezionych powyżéj wartości.

314. *W równaniu stopnia drugiego, w którem wszystkie wyrazy są przeniesione na jedną stronę, a współczynnik przy niewiadomej w stopniu drugim jest równy jedności, summa pierwiastków jest równą współczynnikowi przy drugim wyrazie ze znakiem przeciwnym, iloczyn zaś tychże pierwiastków jest równy wyrazowi ostatniemu.*

Gdyż niech będzie dane równanie:

$$x^2+px+q=0;$$

wtedy *summa* pierwiastków będz

$$\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}+\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\text{ to jest }-p.$$

Iloczyn zaś tychże pierwiastków jest:

$$\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\times\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

co jest równe: $\frac{p^2-(p^2-4q)}{4}$

czyli: q.

315. Paragraf poprzedni zasługuje na szczególną uwagę; przedstawia on bowiem bardzo dobry przykład i natury ogólnych wypadków algiebry i zarazem sposobów, jakiemi do tych ogólnych wypadków dochodzimy. Uczący się powinien sprawdzić te twierdzenia na wszystkich przykładach równań stopnia drugiego dotąd rozwiązanych.

Tak np. weźmy zadanie § 302; równanie tam podane może być przedstawione pod postacią:

$$x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{55}{3} = 0,$$

pierwiastki jego są: 5 i $-\frac{11}{3}$; summa ich wynosi $\frac{4}{3}$ iloczyn zaś $-\frac{55}{3}$.

316. Rozwiązać równanie:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Przenosząc wyraz wiadomy na drugą stronę, mamy:

$$ax^2 + bx = -c;$$

dzieląc cało równanie przez a, będzie:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a};$$

dodając do obu stron równania po $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Wyciągnijmy teraz pierwiastek kwadratowy z obu stron równania, będzie:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

przeto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

317. Wzory ogólne, podane w §§ 311 i 316 mogą być użyte do rozwiązania jakiegokolwiek równania stopnia drugiego. Weźmy jako przykład równanie: $3x^2 - 4x - 55 = 0$; podzielmy obie jego strony przez 3, będzie,

$$x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{55}{3} = 0.$$

Uczyńmy teraz we wzorze § 311, który daje wartości pierwiastków równania $x^2 + px + q = 0$, $p = -\frac{4}{3}$ i $q = -\frac{55}{3}$, otrzymamy po wykonaniu działań pierwiastki danego równania.

Lecz dogodniejszą jest rzeczą użyć wprost wzoru § 316: tym sposobem bowiem unikamy ułamków. Ponieważ dane równanie jest: $3x^2 - 4x - 55 = 0$, przeto we wzorze, dającym wartości pierwiastków równania $ax^2 + bx + c = 0$, należy uczynić $a = 3$, $b = -4$, i $c = -55$. Wykonywając te podstawienia w wyrażeniu:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

miéć będziemy takie wartości na x:

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 + 660}}{6}, \text{ czyli: } \frac{4 \pm \sqrt{676}}{6}$$

to jest $\frac{4 \pm 26}{6}$, albo: 5 i $-\frac{11}{3}$.

317_1. Używając oznaczeń, wskazanych w § 298, do rozróżnienia wyraźnego obu pierwiastków równania: $x^2 + px + q = 0$, możemy napisać:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Podobnie jak w równaniu czystém i tutaj natura tych pierwiastków zależy od ilości, znajdującéj się pod znakiem pierwiastku w obu tych wyrażeniach. I tak jeżeli ilość: $\frac{p^2}{4} - q$ jest dodatną, wtedy oba pierwiastki mieć będą wartości *rzeczywiste*, i ponieważ jeden z nich jest summą, a drugi różnicą tych samych ilości, przeto w tym przypadku będą one zawsze *nierówne*. Jeżeli znowuż ilość $\frac{p^2}{4} - q$ jest odjemną, wtedy obie wartości na x_1 i x_2 będą *urojone*; wyrazić je można za pomocą $\sqrt{-1}$, lub i, sposobem podanym w § 298, i w przypisku do § 306. A że w obu wartościach na x_1 i x_2 pod znakiem pierwiastku znajduje się jedna i taż sama ilość, przeto zawsze jednocześnie te wartości będą albo obie rzeczywiste, albo obie urojone: przypadku, w którym jeden pierwiastek równania $x^2 + px + q = 0$ byłby rzeczywistym a drugi urojonym, być nie może (przy p i q rzeczywistych).

317₂. Przy zachowaniu tychże samych oznaczeń własności pierwiastków równania stopnia drugiego, dowiedzione w § 314, mogą być tak wyrażone:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q.$$

Własności te mają częste i ważne zastosowania.

Pokażemy dwa z nich:

Najprzód na zasadzie tych własności można ułożyć równanie stopnia drugiego, którego pierwiastki są dane. Tak np. przypuśćmy, że chcemy napisać

takie równanie stopnia drugiego, którego pierwiastkami byłyby liczby 5 i 3. Równanie to będzie miało taką postać: $x^2 + px + q = 0$, gdzie zamiast p i q należy podstawić odpowiednie liczby. Ponieważ, podług własności przytoczonéj wyżéj, summa pierwiastków równania jest równą współczynnikowi przy x, wziętemu ze znakiem przeciwnym, przeto p powinno być takie, aby było:

$$5 + 3 = -p,$$

skąd:

$$p = -8.$$

I daléj: ponieważ trzeci wyraz q pierwszéj strony, powinien być równym iloczynowi pierwiastków, przeto będzie:

$$q = 5 \cdot 3 = 15.$$

Jeżeli więc utworzymy równanie takie:

$$x^2 - 8x + 15 = 0,$$

to jeden jego pierwiastek będzie 5 drugi zaś 3. Uczący się powinien się o tém przekonać przez bezpośrednie rozwiązanie równania.

Gdybyśmy chcieli ułożyć równanie takie, którego pierwiastkami byłyby 3 i -3, wtedy mielibyśmy:

$$p = 3 - 3 = 0; \quad q = 3 \cdot -3 = -9,$$

i żądane równanie byłoby:

$$x^2 + 0 \cdot x - 9 = 0,$$

czyli:

$$x^2 - 9 = 0.$$

Gdyby pierwiastki równania miały być równe $\frac{1}{3}$ i 0, wtedy byłoby:

$$p = -\left(\frac{1}{3} + 0\right) = -\frac{1}{3};$$

$$q = \frac{1}{3} \times 0 = 0,$$

i równanie szukane przedstawiłoby się tak:

$$x^2 - \frac{1}{3}x + 0 = 0,$$

czyli:

$$3x^2 - x = 0.$$

W podobny sposób należałoby postępować w każdym innym przypadku.

Powtóre: wymienione własności służą do prostego rozwiązania zadania następującego, które często przytrafia się w algiebrze: *Mając daną summę i iloczyn dwóch liczb, znaleść te liczby.*

Przypuśćmy np. że chcemy znaleść dwie liczby, których summa równałaby się 10, a iloczyn 21. Gdybyśmy ułożyli takie równanie, w którém współczynnik przy x byłby równy -10, a ilość wiadoma q byłaby równą 21, to jest równanie takie:

$$x^2 - 10x + 21 = 0,$$

wtedy, na zasadzie własności pierwiastków równania stopnia drugiego, summa pierwiastków tegoż równania równałaby się 10, iloczyn zaś byłby równym 21. Pierwiastki zatém jego byłyby szukanémi liczbami. Rozwiązując to równanie, znajdziemy:

$$x_1 = 7; \quad x_2 = 3.$$

Szukane liczby są więc 7 i 3.

I w ogólności: chcąc rozwiązać takie zadanie: znaleść dwie liczby, których summa byłaby równą m, a iloczyn n, należałoby ułożyć równanie:

$$x^2 - mx + n = 0,$$

i równanie to rozwiązać; wtedy jeden z jego pierwiastków byłby równym jednéj z liczb szukanych, drugi zaś stanowił by drugą liczbę. Pierwiastki tego równania są:

$$x_1 = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2 - 4n}{4}},$$

$$x_2 = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2 - 4n}{4}},$$

czyli:

$$x_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4n}}{2},$$

$$x_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4n}}{2}.$$

Powyższe wzory nie tylko dają nam rozwiązanie uważanego zadania we wszystkich przypadkach, ale nadto zawierają w sobie i rozwiązanie takiego zadania. *Daną liczbę m podzielić na takie dwie części, aby iloczyn ich był równy n.* Widoczną jest rzeczą, że zadanie to sprowadza się bezpośrednio do poprzedniego, gdyż summa tych dwóch szukanych części jest równą danéj liczbie m, i iloczyn ich jest wiadomy n. Części te zatém są dane jako wartości x_1 i x_2 wyżéj znalezione.

Do tegoż samego wypadku dojdziemy, rozumując w ten sposób: Oznaczmy jedną z szukanych części głoską x; — wtedy druga część będzie: $m - x$. A że podług warunków zadania, iloczyn tych części ma być równy n, przeto otrzymamy równanie:

$$x(m - x) = n,$$

czyli:

$$mx - x^2 = n;$$

albo, zmieniając znaki na przeciwne,

$$x^2 - mx = -n.$$

Równanie to daje też same wartości na x jakie znaleźliśmy poprzednio, mianowicie:

$$x_1 = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$$

$$x_2 = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$$

Biorąc x_1 jako pierwszą część, znajdziemy, że druga $m-x$ będzie równą $\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$, to jest x_2; biorąc znowuż x_2 za pierwszą część, znajdziemy, że druga będzie równą: $\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}$, to jest x_1. W ogóle więc można odpowiedzieć na dane pytanie, że x_1 i x_2 przedstawiać będą dwie szukane części liczby m, których iloczyn jest n.

Użycie powyższych wzorów objaśnią następne przykłady:

Liczbę 10 podzielić na takie dwie części, aby iloczyn ich był równy 16.

Rozwiązując równanie: $x^2-10x+16=0$, znajdziemy:

$$x_1 = 5 + \sqrt{25-16} = 8,$$

$$x_2 = 5 - 3 = 2.$$

Więc jedna z szukanych części jest 8 druga zaś 2.

Tęż samą liczbę 10 podzielić na takie dwie części aby iloczyn ich był 24.

Równanie do rozwiązania będzie:

$$x^2-10x+24=0,$$

które rozwiązując znajdziemy szukane części 6 i 4.

Gdybyśmy jeszcze tęż samą liczbę 10 chcieli podzielić na takie dwie części, których iloczyn byłby 25, wtedy rozwiązując równanie:

$$x^2-10x+25=0,$$

znaleźlibyśmy, że szukane części są 5 i 5. Lecz gdybyśmy chcieli tęż samą liczbę 10 podzielić na takie dwie części, których iloczyn byłby większym od 25, np. 26, wtedy rozwiązując równanie: $x^2-10x+26=0$ znaleźlibyśmy na x_1 i x_2 wartości urojone:

$$5+i \text{ i } 5-i,$$

co pokazuje, że nie można liczby 10 podzielić na takie części, któreby zadosyć czyniły temu warunkowi, aby iloczyn ich tworzył 26. Z tego widzimy, że jakąkolwiek liczbę 10 można podzielić na takie dwie części, których iloczyn może być bardzo rozmaity, ztém wszystkiém iloczyn ten nie może być większym od pewnéj granicy: — taką granicą jest tutaj 25.

Do tegoż samego wypadku dochodzimy, rozbierając ogólne równanie, rozwiązujące nam to zadanie we wszystkich przypadkach, mianowicie: $x^2-mx+n=0$. Pierwiastki tego równania, jako to widzieliśmy, są;

$$x_1 = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n},$$

$$x_2 = \frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}.$$

Są one rzeczywiste, a zatém i zadanie jest możliwe do rozwiązania dotąd, dopóki ilość pod znakiem pierwiastkowym $\frac{m^2}{4} - n$ nie jest odjemną, czyli dopóki n nie jest większe od $\frac{m^2}{4} = \left(\frac{m}{2}\right)^2$. Największą więc wartością na n może być $\left(\frac{m}{2}\right)^2$. Stąd wyprowadzamy taki wniosek: największy iloczyn z dwóch części stanowiących daną liczbę, jest wtedy, gdy obie te części są równe, to jest gdy każda jest połową danéj liczby.

317$_3$. Jeżeli wyrażenie tego rodzaju jak: $3x^2-15x+18$ przyrównamy do zera, wtedy otrzymamy równanie, w którém x może miéć tylko dwa znaczenia, będące pierwiastkami tegoż równania. Lecz jeżeli uważamy wyrażenie powyższe $3x^2-15x+18$ samo w sobie, wtedy x może w niém przyjmować wszelkie znaczenia, jakie tylko chcemy mu nadać, i wtedy wyrażenie takie nazywamy *trójmianem stopnia drugiego*. W ogóle wyrażenie téj postaci ax^2+bx+c, w którém a, b i c oznaczają pewne dane liczby stałe, a x liczbę mogącą się dowolnie zmieniać, nazywa się trójmianem stopnia drugiego. Trójmian ten ma ważną własność, którą tutaj poznamy (porównaj § 96).

Wyrażenie ax^2+bx+c można przedstawić w téj postaci: $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$. Oznaczywszy tutaj dla krótkości $\frac{b}{a}$ jedną głoską p, a $\frac{c}{a}$ jedną głoską q

będzie: $ax^2+bx+c = a(x^2+px+q)$.

Ponieważ a jest liczbą stałą, przeto wszystkie własności rozważanego trójmianu ax^2+bx+c, zależyć będą od wyrażenia x^2+px+q. To ostatnie zatém bierzemy pod uwagę,

Wyrażenie x^2+px+q nie zmieni się, jeżeli do niego dodamy i odejmiemy po $\frac{p^2}{4}$; otrzymamy tym sposobem:

$$x^2+px+q = x^2+px+q+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}.$$

Lecz trójmian $x^2+px+\frac{p^2}{4}$ stanowi zupełny kwadrat dwumianu $x+\frac{p}{2}$. Będzie więc:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q \qquad \text{czyli:}$$

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p^2}{4}-q\right).$$

Jeżeli zaś zwrócimy uwagę na to, że wyciąganie pierwiastku kwadratowego i podnoszenie do kwadratu są działaniami odwrotnemi, wtedy zamiast $\frac{p^2}{4}-q$ będziemy mogli napisać $\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2$. Wprowadzając tę zmianę w wyrażenie powyższe otrzymamy:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{2}-q}\right)^2.$$

Stąd widzimy, że trójmian x^2+px+q może być przedstawiony pod postacią różnicy dwóch kwadratów.

Lecz na zasadzie § 79 wiemy, że różnica kwadratów dwóch ilości jest równą iloczynowi z summy tychże ilości przez ich różnicę; to jest oznaczając dwie ilości głoskami v i u mamy:

$$v^2-u^2=(v-u)(v+u).$$

Wyrażenie więc $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2$ możemy w podobny sposób zamienić na iloczyn, biorąc $x+\frac{p}{2}$ zamiast v i $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ zamiast u. Czyniąc to znajdziemy że:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)^2=$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(x+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right).$$

Lecz jeżeli trójmian x^2+px+q przyrównamy do zera, otrzymamy równanie stopnia drugiego:

$$x^2+px+q=0,$$

którego pierwiastki są:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Porównywając te pierwiastki z ilościami znajdującemi się w powyższych nawiasach widzimy, że:

$$-x_1=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$-x_2=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Podstawiając te wartości zamiast ilości zawartych w nawiasach, otrzymamy:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).$$

Równość ta jest tożsamością, to jest ma miejsce przy wszystkich wartościach na x. Wyrazić ją można słowami tak: *Trójmian stopnia drugiego x^2+px+q jest równy iloczynowi dwóch czynników stopnia pierwszego: jednym z tych czynników jest x mniéj jeden pierwiastek równania otrzymanego przez przyrównanie danego trójmianu do zera; drugi zaś — jest toż samo x mniéj drugi pierwiastek tego samego równania.* Podług tego trójmian ax^2+bx+c może być tak wyrażony:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Np. trójmian $3x^2-15x+18$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego.

Będzie:

$$3x^2-15x+18=3(x-x_1)(x-x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 będą pierwiastkami równania:

$$3x^2-15x+18=0,$$

lub:

$$x^2-5x+6=0.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy:

$$x_1=3;\quad x_2=2,$$

zatém: $3x^2-15x+18=3(x-3)(x-2)$,

o czém łatwo się można przekonać, przez bezpośrednie mnożenie, co uczący się powinien zrobić.

2-gi przykład: Trójmian $6x^2-5x-6$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego.

Będzie:

$$6x^2-5x-6=6(x-x_1)(x-x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami równania:

$$6x^2-5x-6=0.$$

Rozwiązując je znajdziemy:

$$x_1=-\frac{2}{3};\quad x_2=\frac{3}{2},$$

więc: $6x^2-5x-6=6\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)$, czyli:

$$6x^2-5x-6=(3x+2)(2x-3).$$

3-ci przykład: Trójmian: $x^2-8x+16$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego.

Będzie:

$$x^2-8x+16=(x-x_1)(x-x_2)$$

gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami równania:

$$x^2-8x+16=0.$$

Z rozwiązania tegoż równania miéć będziemy:

$$x_1=4 \quad \text{i} \quad x_2=4;$$

zatém:

$$x^2-8x+16=(x-4)(x-4)=(x-4)^2,$$

co i bezpośrednio jest widoczném.

4-ty przykład: Trójmian: $x^2+10x+34$ rozłożyć na dwa czynniki stopnia pierwszego.

Będzie:

$$x^2+10x+34=(x-x_1)(x-x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 znajdziemy rozwiązując równanie:

$$x^2+10x+34=0.$$

Stąd $x_1=-5+\sqrt{25-34}=-5+\sqrt{-9}$,

$$x_2=-5-\sqrt{-9}.$$

A że: $\sqrt{-9}=3\sqrt{-1}=3i$,

przeto: $x_1=-5+3i$,

$x_2=-5-3i$.

Trójmian więc dany nie może być rozłożony na czynniki rzeczywiste stopnia pierwszego. Jednak możemy i w tym razie napisać:

$$x^2+10x+34=(x+5-3i)(x+5+3i)$$

uważając $-5+4i$ i $-5-3i$ jako nowe ilości, nad któremi działania podobne i w podobny sposób mogą być wykonywane, jak nad ilościami rzeczywistemi, przyjmując tylko, że $i^2=-1$. Przez wykonanie działań wskazanych i z uwzględnieniem ostatniego warunku, t. j., że $i^2=-1$: znajdziemy w saméj rzeczy, że wypadek na drugiéj stronie, jest równy pierwszéj stronie równości. W rozbiór bliższy wszakże działań z ilościami urojonemi wchodzić tutaj nie będziemy, pozostawiając to obszerniejszym dziełom o algiebrze.

PRZYKŁADY XXX.

1. $2(x^2-7)+3(x^2-11)=33.$
2. $(x-15)(x+15)=400.$
3. $\frac{x^2-24}{5}+\frac{x^2-37}{4}=8.$

4. $\frac{3(x^2-11)}{5}-\frac{2(x^2-60)}{7}=36.$

5. $\frac{4}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{1}{3}.$ 6. $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}=\frac{x}{9}+\frac{9}{x}.$

7. $x^2-3x+2=0.$ 8. $x^2-5x+6=0.$

9. $x^2+10x=24.$ 10. $2x^2-1=5x+2.$

11. $3x^2-4x=39.$

12. $x^2+10x+3=2x^2-5x+53.$

13. $(x+1)(2x+3)=4x^2-22.$

14. $(x-1)(x-2)=20.$ 15. $4(x^2-1)=4x-1.$

16. $(2x-3)^2=8x.$ 17. $3x^2-17x+10=0.$

18. $\frac{9}{x}-\frac{x}{3}=2.$ 19. $x=2+\frac{5}{4x}.$

20. $x^2-3=\frac{x-3}{6}.$

21. $\frac{2+x^2}{3}-\frac{x-x^2}{2}=1-x+x^2,$

22. $x+\frac{1}{x-3}=5.$ 23. $4x-\frac{12-x}{x-3}=22.$

24. $\frac{2x+11}{x}=5-\frac{x-5}{3}.$ 25. $\frac{x-1}{x-3}+2x=12.$

26. $\frac{x}{7}+\frac{21}{x+5}=6\frac{5}{7}.$

27. $8x+11+\frac{7}{x}=\frac{68x}{7}.$ 28. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{13}{6}.$

29. $\frac{2}{x+3}+\frac{x+3}{2}=\frac{10}{3}.$

30. $\frac{3(x-1)}{x+1}-\frac{2(x+1)}{x-1}=5.$

31. $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2.$ 32. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}.$

33. $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+4}=1.$ 34. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{13}{6}.$

35. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{9}{5}.$ 36. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x+2}{x-2}=7.$

37. $\frac{x-2}{x-3}-\frac{x-4}{x-1}=\frac{14}{15}.$ 38. $\frac{x-3}{x-2}-\frac{x-1}{x-4}=-\frac{6}{5}.$

39. $\frac{x-1}{x-4}-\frac{x-3}{x-2}=\frac{11}{12}.$ 40. $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+2}=\frac{3}{5}.$

41. $\frac{3}{2(x^2-1)}-\frac{1}{4(x+1)}=\frac{1}{8}.$ 42. $\frac{x}{x^2-1}=\frac{15-7x}{8(1-x)},$

43. $\frac{2x+1}{x-1}+\frac{3x-2}{3x+2}=\frac{11}{2}.$

44. $\frac{2x-1}{x-1}-\frac{2x-3}{x-2}+\frac{1}{6}=0.$

45. $\frac{3x+1}{3(x-5)}-\frac{2x-7}{2x-8}-\frac{5}{2}=0.$

46. $\frac{2x-3}{3x-5}+\frac{3x-5}{2x-3}=\frac{5}{2}.$ 47. $\frac{3x-2}{2x-5}+\frac{2x-5}{3x-2}=\frac{10}{3}.$

48. $\frac{x+2}{x-1}-\frac{4-x}{2x}=\frac{7}{3}.$ 49. $(x-3)^2=2(x^2-9).$

50. $(x+10)^2=144(100-x^2).$

51. $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{14}{x+4}.$ 52. $\frac{4}{x+1}+\frac{5}{x+2}=\frac{12}{x+3}.$

53. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x-1}.$

54. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=2.\frac{x+3}{x-3}.$

55. $\frac{x-1}{x+1}-\frac{5}{6}=\frac{2}{7(x-1)}$.

56. $\frac{4}{x+2}+\frac{5}{x+4}=\frac{12}{x+6}$.

57. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{2x+13}{x+16}$.

58. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$.

59. $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{5x-11}{x-1}$.

60. $x-\frac{14x-9}{8x-3}=\frac{x^2-3}{x+1}$.

61. $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0$.

62. $4a^2x=(a^2-b^2+x)^2$.

63. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{x}{b}+\frac{b}{x}$. 64. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}$.

65*. $(x+a+b)(x-a+b)+(x+a-b)(x-a-b)=0$.

66*. $(a+bx)(b-ax)+(b+cx)(c-bx)+$
$+(c+ax)(a-cx)=0$.

67*. $\frac{ab}{a^2-b^2x^2}+\frac{cd}{c^2-d^2x^2}=0$.

68*. $\frac{x-a}{x+1}+\frac{x+a}{x-1}=2c$.

69*. $\frac{(a-x)^2+(x-b)^2}{(a+b-2x)^2}=\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$.

70*. $\frac{(a-x)^2+(x-b)^2}{(a-x)^2-(x-b)^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

71*. $(2a-b-x)+9(a-b)^2=(a+b-2x)^2$.

72*. Wyrażenia: $x^2-1\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$; x^3+16x^2+21x rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego.

XXXI.

Równania dające się sprowadzić do równań stopnia drugiego.

318. Są pewne równania, które nie będąc właściwie równaniami stopnia drugiego, dają się jednak rozwiązać sposobem *dopełnienia do kwadratu*.

Podamy tutaj dwa przykłady takich równań.

319. Rozwiązać równanie: $x^6-7x^3=8$.

Dodajmy do obu stron równania po $\left(\frac{7}{2}\right)^2$, będzie:

$$x^6-7x^3+\left(\frac{7}{2}\right)^2=8+\frac{49}{4}=\frac{81}{4};$$

wyciągając z obu stron pierwiastki kwadratowe otrzymamy:

$$x^3-\frac{7}{2}=\pm\frac{9}{2},$$

skąd:

$$x^3=\frac{7}{2}\pm\frac{9}{2},\text{ to jest: } x^3=8,\text{ lub: } x^3=-1.$$

Nakoniec przez wyciągnięcie pierwiastku sześciennego znajdziemy: $x=2$, lub $x=-1$.

320. Rozwiązać równanie:

$$x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x-2}=6.$$

Odejmijmy od obu stron równania po 2; będzie:

$$x^2+3x-2+3\sqrt{x^2+3x-2}=4.$$

Wtedy na pierwszéj stronie równania otrzymaliśmy dwa wyrażenia: $\sqrt{x^2+3x-2}$ i x^2+3x-2, z których ostatnie jest kwadratem pierwszego.

Możemy teraz pierwszą stronę *dopełnić do kwadratu*. W tym celu dodajmy do obu stron po $\left(\frac{3}{2}\right)^2$:

miéć będziemy:

$$x^2+3x-2+3\sqrt{x^2+3x-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}.$$

Wyciągając pierwiastki kwadratowe z obu stron, będzie:

$$\sqrt{x^2+3x-2}+\frac{3}{2}=\pm\frac{5}{2};$$

skąd:

$$\sqrt{x^2+3x-2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2},$$ czyli:

$$\sqrt{x^2+3x-2}=1 \text{ lub } =-4.$$

Przyjmijmy najprzód, że:

$$\sqrt{x^2+3x-2}=1.$$

Podnieśmy obie strony do kwadratu; będzie:

$$x^2+3x-2=1.$$

Lecz to jest zwyczajne równanie stopnia drugiego, które rozwiązując znajdziemy:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Przyjmijmy powtóre, że:

$$\sqrt{x^2+3x-2}=-4.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu, miéć będziemy:

$$x^2+3x-2=16.$$

To jest znowuż równanie stopnia drugiego, które rozwiązując znajdziemy:

$$x=3, \text{ lub } x=-6.$$

Tym sposobem otrzymaliśmy ostatecznie cztery wartości na x, a mianowicie:

$$3, \quad -6, \quad \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}.$$

Musimy tutaj zrobić ważną uwagę, odnoszącą się do tych wartości. Przypuśćmy, że chcemy rozwiązania sprawdzić. Jeżeli zamiast x podstawimy 3, wtedy znajdujemy, że $x^2+3x-2=16$, a więc: $\sqrt{x^2+3x-2}=\pm4$. Jeżeli weźmiemy wartość $+4$, wtedy dane początkowo równanie nie będzie sprawdzone; — jeżeli zaś weźmiemy wartość -4, wtedy będzie ono sprawdzone. Podobnież jeżeli daléj podstawimy $x=-6$, wtedy przyjdziemy do tegoż samego wypadku. Można było przewidzieć oba te wypadki gdyż wartości $x=3$, lub $x=-6$ były znalezione z równania $\sqrt{x^2+3x-2}=-4$, które to równanie było znowuż otrzymane z równania początkowego. Gdybyśmy teraz uczynili $x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$, wtedy mielibyśmy $x^2+3x-2=1$, i początkowe równanie będzie sprawdzone, gdy weźmiemy $\sqrt{x^2+3x-2}=+1$. Rozwiązując którekolwiek z dwóch równań:

$$x^2+3x-3\sqrt{x^2+3x-2}=6,$$

lub: $$x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x-2}=6,$$

przyjdziemy do tychże samych czterech wartości na x, lecz wartości 3 i -6 należą tylko do pierwszego równania, wartości zaś $\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ należą tylko do drugiego równania.

321. Mogą się przytrafić takie równania, które należy, po odpowiedniém przeniesieniu wyrazów, raz lub kilka razy podnieść do kwadratu, zanim zostaną one sprowadzone do równania stopnia drugiego. Podamy na takie działania dwa przykłady.

322. Rozwiązać równanie:

$$2x-\sqrt{x^2-3x-3}=9.$$

Przenieśmy wyraz zawierający pierwiastek na drugą, a 9 na pierwszą stronę równania; — będzie:

$$2x-9=\sqrt{x^2-3x-3};$$

podnieśmy obie strony do kwadratu, otrzymamy:

$$4x^2-36x+81=x^2-3x-3;$$

przenieśmy wszystkie wyrazy na pierwszą stronę:

$$3x^2-33x+84=0,$$

czyli, po podzieleniu wszystkich wyrazów przez 3:

$$x^2-11x+28=0.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy: $x=7$ lub $x=4$.

Wartość 7 zadosyć czyni danemu równaniu; wartość 4 należy do równania $2x+\sqrt{x^2-3x-3}=9$.

323. Rozwiązać równanie:

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=\sqrt{8x+9}.$$

Podnieśmy obie strony do kwadratu, będzie:

$$x+4+2x+6+2\sqrt{(x+4)(2x+6)}=8x+9;$$

przenieśmy następnie wyrazy równania tak, aby na jednéj stronie została tylko ilość pierwiastkowa sama, na drugiéj zaś reszta wyrazów; — po zrobieniu uproszczeń będzie:

$$2\sqrt{(x+4)(2x+6)}=5x-1.$$

Podnieśmy znowuż obie strony do kwadratu, otrzymamy:

$$4(x+4)(2x+6)=25x^2-10x+1,$$

to jest: $$8x^2+56x+96=25x^2-10x+1.$$

Przenosząc zaś wszystkie wyrazy na pierwszą stronę będzie:

$$17x^2-66x-95=0.$$

Rozwiązując to równanie znajdziemy, że $x=5$, lub $x=-\frac{19}{17}$. Wartość pierwsza, t. j. 5, zadosyć czyni danemu równaniu; — druga zaś $-\frac{19}{17}$ należy do równania:

$$\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=\sqrt{8x+9}.$$*)

---

*) Rozwiązując równanie:

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{4x+6}=\sqrt{8x+9} \quad . \quad . \quad (1)$$

324. Z poprzednich przykładów widać, że w tych przypadkach, w których należy podnosić do kwadratu, aby równanie sprowadzić do zwykłéj postaci, — nigdy nie jesteśmy bez próby pewni, czy znalezione wartości na niewiadome są w saméj rzeczy pierwiastkami danego równania.

---

sposobem podanym w tekście, otrzymaliśmy dwa pierwiastki, z których tylko jeden zadosyć czyni danemu równaniu. Pochodzi to stąd, że w celu rozwiązania tego równania, podnieśliśmy obie jego strony dwa razy do kwadratu, przez co otrzymaliśmy równanie:

$$4(x+1)(2x+6)=25x^2-10x+1 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

które dało nam te dwa pierwiastki:

Lecz gdybyśmy w podobny sposób chcieli rozwiązać i równanie:

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+6}=\sqrt{8x+9}, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wtedy otrzymalibyśmy najprzód:

$$-2\sqrt{(x+4)(2x+6)}=5x-1,$$

a następnie przez nowe podniesienie obu stron do kwadratu równanie (2). To ostatnie więc równanie obejmuje oba równania (1) i (3) i jest od każdego z nich ogólniejsze. Przez rozwiązanie równania (2) otrzymujemy nie tylko rozwiązanie równania (1), ale także i równanie (3).

Taż sama uwaga daje się zastosować i do równania rozwiązanego w § 320.

Tł.

325. Niekiedy się przytrafia, że rozwiązanie równania danego, może być ułatwione przez wprowadzenie pewnego uproszczenia, dającego się dostrzedz na pierwszy rzut oka.

Następne dwa przykłady objaśnią jakiego rodzaju są te uproszczenia.

326. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}=\frac{9+x}{9-x}-\frac{9-x}{9+x}.$$

Sprowadźmy ułamki na każdéj stronie równania do jednakowego mianownika, otrzymamy:

$$\frac{(x+4)^2-(x-4)^2}{x^2-16}=\frac{(9+x)^2-(9-x)^2}{81-x^2}$$

czyli:
$$\frac{16x}{x^2-16}=\frac{36x}{81-x^2}.$$

Widoczną jest rzeczą teraz, że $x=0$ jest pierwiastkiem równania. Aby wynaleźć inne pierwiastki dzielimy obie strony przez $4x$; będzie:

$$\frac{4}{x^2-16}=\frac{9}{81-x^2},$$

skąd: $4(81-x^2)=9(x^2-16),$

i daléj: $13x^2=324+144=468,$

to jest: $x^2=36,$

i nakoniec: $x=\pm 6.$

Tym sposobem widzimy, że równanie dane ma trzy pierwiastki: $0, 6$ i -6.

327. Rozwiązać równanie:

$$x^3-7xa^2+6a^3=0.$$

Tutaj także jest widocznem, że $x = a$ jest pierwiastkiem równania. Równanie to możemy przedstawić w téj postaci:

$$x^3 - a^3 = 7a^2(x - a).$$

Aby wynaleść inne pierwiastki podzielmy obie jego strony przez $x-a$. Znajdziemy:

$$x^2 + ax + a^2 = 7a^2.$$

Rozwiązując to równanie, które jest stopnia drugiego, otrzymamy $x = 2a$, lub $x = -3a$. Stąd widzimy, że równanie dane ma trzy pierwiastki, a mianowicie: a, $2a$, $-3a$.

326_1. W dopełnieniu do tego, co było powiedzianém wyżéj podamy tu jeszcze najgłówniejsze przypadki, w których równania innych stopni mogą być bezpośrednio sprowadzone do równań stopnia drugiego.

326_2. Do równań stopnia drugiego mogą być najprzód sprowadzone wszystkie równania tak zwane *trójwyrazowe*.

Pod tym wyrazem rozumiemy równania stopnia parzystego takie, w których po przeniesieniu wszystkich wyrazów na pierwszą stronę i zrobieniu wszelkich redukcyj, znajdować się będą tylko trojakiego rodzaju wyrazy: wyraz zawierający niewiadomą w stopniu parzystym, wyraz zawierający niewiadomą w stopniu dwa razy mniejszym od poprzedniego i wyraz wiadomy. Przykład takiego równania mamy w § 319. Inne przykłady: $3x^4 - 2x^2 + 9 = 0$ jest równaniem trójwyrazowém stopnia 4-go; $x^8 + 5x^4 - 3 = 0$, jest równaniem trójwyrazowem stopnia 8-go, w § 319 znajduje się przykład równania trójwyrazowego stopnia 6-go i t. d. Ogólna postać takiego równania jest:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0.$$

Rozwiązanie takich równań odrazu sprowadza się do rozwiązania równania stopnia 2-go przez uczynienie $x^n = y$. Wtedy: $x^{2n} = y^2$, i równanie dane zamieni się na następne:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Rozwiązując to równanie znajdziemy wiadomym sposobem dwa pierwiastki y_1 i y_2. A że $x^n = y$; więc $x = \sqrt[n]{y}$. Stąd widzimy, że po rozwiązaniu równania $ay^2 + by + c = 0$, należy tylko z wartości znalezionéj na y wyciągnąć pierwiastek stopnia n. A ponieważ na y otrzymaliśmy dwie wartości, przeto: $x =$ albo $\sqrt[n]{y_1}$, albo też $x = \sqrt[n]{y_2}$. Jeżeli więc jesteśmy w stanie wynaleść pierwiastek potęgi n z y_1 i y_2, wtedy możemy otrzymać i wartości na x.

Jako przykład tego rodzaju równań weźmiemy równanie trójwyrazowe stopnia 4-go.

Rozwiązać równanie:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Czyniąc: $x^2 = y$, skąd: $x^4 = y^2$, otrzymamy z powyższego równania:

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Rozwiązując to równanie znajdziemy:

$$y_1 = 9; \quad y_2 = 4.$$

Stąd: $x^2 = 9$, lub: $x^2 = 4$;

a zatem: $x = \pm\sqrt{9}$. lub: $x = \pm\sqrt{4}$,

Otrzymamy więc na x następne cztery wartości:

$$x_1=3,\quad x_2=-3,\quad x_3=2.\quad x_4=-2.$$

Rozwiązać równanie:

$$x^4-12x^2+16=0.$$

Uczyńmy $x^2=y$, wtedy: $x^4=y^2$, i równanie powyższe zamieni się na:

$$y^2-12y+16=0,$$

skąd:

$$y_1=6+\sqrt{20},$$
$$y_2=6-\sqrt{20}.$$

A zatem:

$$x^2=6+\sqrt{20}$$

lub:

$$x^2=6-\sqrt{20}.$$

Wartości więc na x otrzymamy wyciągając pierwiastki kwadratowe z powyższych wyrażeń, i tym sposobem znajdziemy następujące cztery wartości na x:

$$x_1=\sqrt{6+\sqrt{20}},$$
$$x_2=-\sqrt{6+\sqrt{20}},$$
$$x_3=\sqrt{6-\sqrt{20}},$$
$$x_4=-\sqrt{6-\sqrt{20}}.$$

Wartości te przedstawiają się pod postacią wyrażeń rozbieranych w § 295, i mogą być przekształcone za pomocą wzorów tam podanych. Używając wzoru:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

do przekształcenia wartości na x_1, otrzymamy:

$$x_1=\sqrt{5}+1.$$

Podobnież znajdziemy:

$$x_2=-\sqrt{5}-1,$$
$$x_3=\sqrt{5}-1,$$
$$x_4=-\sqrt{5}+1.$$

326$_3$. Przez podobne podstawienie, jakiego użyliśmy do rozwiązania równania trójwyrazowego można niejednokrotnie rozwiązywać i równania innego rodzaju, do których wchodzą wyrażenia pierwiastkowe, lub wykładniki ułamkowe. Tak np. przypuśćmy, że dane jest równanie:

$$\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+2=0.$$

Uczyńmy: $\sqrt[6]{x}=y$; wtedy: $\sqrt[3]{x}=y^2$; podstawiając te wartości w równanie dane, będzie:

$$y^2-3y+2=0,$$

skąd:

$$y_1=2;\quad y_2=1.$$

A że $\sqrt[6]{x}=y$, przeto na x otrzymamy dwie następne wartości:

$$x_1=y_1^{\,6}=64;\quad x_2=y_2^{\,6}=1.$$

326$_4$. Powtóre: do równań stopnia drugiego mogą być sprowadzone równania tak zwane *symetryczne* stopnia trzeciego, czwartego lub piątego.

Pod wyrazem równanie *symetryczne* rozumiemy równanie takie, w którem, po przeniesieniu wszystkich wyrazów na pierwszą stronę, zrobieniu wszelkich uproszczeń, i uporządkowaniu wyrazów podług male-

jących głoski x, otrzymamy na pierwszéj stronie wielomian całkowity taki, że współczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazów skrajnych są równe i ze znakami jednakowemi lub przeciwnemi, gdy wielomian jest stopnia nieparzystego; gdy zaś wielomian jest stopnia parzystego, wtedy współczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazów skrajnych są równe i z jednakowemi znakami*).

Tak np. równanie:

$$3x^2+2x+3=0,$$

lub:

$$3x^2-2x+3=0,$$

jest symetrycznem stopnia drugiego; równanie:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

jest równaniem symetryczném stopnia czwartego i t. d.

326_5. Weźmy najprzód pod uwagę równanie symetryczne stopnia trzeciego:

$$ax^3+bx^2+bx+a=0.$$

Z pierwszego i ostatniego wyrazu możemy w niém wyłączyć za nawias a, z drugiego i trzeciego bx; będzie:

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0.$$

Ponieważ:

$$(x^3+1):(x+1)=x^2-x+1,$$

*) Wszakże gdy wielomian jest stopnia parzystego i w nim brak średniego wyrazu, będzie on symetrycznym i wtedy, gdy współczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazów skrajnych będą równe i ze znakami przeciwnemi; np.

$$ax^4+bx^3-bx-a=0.$$

(patrz § 92), przeto, wyłączając na pierwszéj stronie $(x+1)$ za nawias, otrzymamy:

$$(x+1)[a(x^2-x+1)+bx]=0.$$

To ostatnie równanie pokazuje nam, że x powinno miéć taką wartość, aby iloczyn z dwóch czynników $x+1$ i $a(x^2-x+1)+bx$ był równym zero. Lecz aby iloczyn z dwóch czynników stał się zerem, dostatecznem jest aby jeden z czynników był zerem. Wartości więc na x, zadosyć czyniące powyższemu równaniu będą takie, przy których albo:

$$x+1=0,$$

albo:

$$a(x^2-x+1)+bx=0.$$

Pierwsze równanie daje nam pierwszą wartość na x, mianowicie:

$$x_1=-1;$$

z rozwiązania zaś drugiego równania, które można napisać tak:

$$ax^2-(a-b)x+a=0,$$

otrzymamy dwa inne pierwiastki:

$$x_2=\frac{a-b+\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a},$$

$$x_3=\frac{a-b-\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a},$$

W podobny sposób można rozwiązać równanie:

$$ax^3+bx^2-bx-a=0,$$

wyłączając $x-1$ za nawias ze strony pierwszéj.

Przez pomnożenie licznika i mianownika wartości na x_3 przez $a-b+\sqrt{b^2-2ab-3a^2}$, uczący się może się przekonać, że pomiędzy x_2 i x_3 istnieje taki związek: $x_2=\frac{1}{x_3}$.

326_6. Pokażemy teraz jak można rozwiązać równania symetryczne stopnia czwartego przez sprowadzenie ich do równań stopnia drugiego.

Ogólna postać takich równań jest:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0.$$

Podzielmy obie strony tego równania przez x^2 i z wyrazów, mających jednakowe współczynniki, wyłączmy te współczynniki za nawias: Będzie:

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

Uczyńmy teraz:

$$x+\frac{1}{x}=y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wtedy podnosząc obie strony równania (1) do kwadratu otrzymamy:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2,$$

skąd: $$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2 \quad . \quad . \quad (2)$$

W równaniu więc daném możemy podstawić y^2-2 zamiast $x^2+\frac{1}{x^2}$, i y zamiast $x+\frac{1}{x}$ przez co miéć będziemy:

$$a(y^2-2)+by+c=0.$$

Równanie to jest stopnia drugiego; — rozwiązując je znajdziemy dwie wartości na y, mianowicie y_1 i y_2. Biorąc zamiast y w równaniu (1) kolejno y_1 i y_2, otrzymamy z tego równania dwa równania następne:

$$x+\frac{1}{x}=y_1,$$

i $$x+\frac{1}{x}=y_2.$$

Każde z nich jest równaniem stopnia drugiego, i da dwie wartości na x. Tym sposobem otrzymamy cztery wartości na x zadosyć czyniących danemu równaniu.

O tych pierwiastkach, jakkolwiek ostatecznie nie oznaczyliśmy ich, możemy zrobić tęż samą uwagę, jaką zrobiliśmy o pierwiastkach równania symetrycznego stopnia trzeciego. Mianowicie nie trudno się przekonać, że jeżeli pewna ilość m zadosyć czyni temu równaniu, wtedy i $\frac{1}{m}$ także zadosyć czynić będzie temuż równaniu, czyli innemi słowy: jeżeli m jest pierwiastkiem równania:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,$$

wtedy i $\frac{1}{m}$ będzie także pierwiastkiem tegoż samego równania. W rzeczy saméj: jeżeli m jest pierwiastkiem powyższego równania, to:

$$am^4+bm^3+cm^2+bm+a=0.$$

Lecz podstawiając $\frac{1}{m}$ zamiast x w wielomian:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a,$$

znajdziemy, że wartość tego wielomianu będzie:

$$\frac{a+bm+cm^2+bm^3+am^4}{m^4},$$

co jest równe zero z téj przyczyny, że licznik tego ułamku jest zerem podług przypuszczenia.

326_7. Nakoniec weźmy pod uwagę równanie symetryczne stopnia piątego:

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0,$$

lub: $$ax^5-bx^4+cx^3-cx^2+bx-a=0,$$

Równania te można rozwiązać w ten sposób: Najprzód należy wyłączyć z wyrazu pierwszego i ostatniego a, z drugiego i piątego b, z trzeciego i czwartego c za nawias; będzie:

$$a(x^5+1)+b(x^4+x)+c(x^3+x^2)=0,$$

lub: $$a(x^5-1)-b(x^4-x)+c(x^3-x^2)=0.$$

Następnie w równaniu pierwszéj postaci można wyłączyć $(x+1)$ za nawias, a w równaniu drugiéj postaci $(x-1)$ za nawias. Przyrównywając ten czynnik do zera otrzymamy jeden pierwiastek równania. Pierwiastek ten będzie w pierwszym przypadku równym -1, w drugim zaś 1. Pozostanie z każdego równania, równanie symetryczne stopnia czwartego, które należy rozwiązać sposobem podanym wyżéj.

326_8. Jeszcze jednéj postaci równania stopnia czwartego dają się łatwo rozwiązać za pomocą równań stopnia drugiego.

Są to równania, które można sprowadzić do takiej postaci:

$$(x^2+ax)^2+p(x^2+ax)+q=0.$$

Czyniąc wtedy $y=x^2+ax$, otrzymamy równanie:

$$y^2+py+q=0,$$

z którego oznaczymy dwie wartości na y; następnie zaś z równania $y=x^2+ax$ znajdziemy i wartości na x: wartości tych będzie cztery.

W praktyce aby poznać czy równanie stopnia czwartego da się sprowadzić do powyższéj postaci, należy dwa pierwsze jego wyrazy dopełnić do kwadratu (§ 299). Np. przypuśćmy że mamy równanie:

$$x^4-12x^3+49x^2-78x+40=0.$$

Dwa pierwsze wyrazy: x^4-12x^3 uważamy jako dwa pierwsze wyrazy kwadratu dwumianu, i dopełniamy je do kwadratu zupełnego przez dodanie $(6x)^2$; — oczywiście tenże sam kwadrat należy od wielomianu odjąć. Czyniąc to, otrzymamy:

$$x^4-12x^3+(6x)^2-36x^2+49x^2-78x+40=0.$$

czyli:

$$(x^2-6x)^2+13(x^2-6x)+40=0.$$

Czyniąc teraz:

$$y=x^2-6x$$

otrzymamy:

$$y^2+13y+40=0,$$

skąd: $$y_1=-5,$$

$$y_2=-8.$$

Następnie rozwiązując każde z dwóch równań:

$$x^2-6x=-5,$$

i: $$x^2-6x=-8,$$

znajdziemy wartości na x, które będą takie:

$$x_1=5;\quad x_2=1;\quad x_3=4;\quad x_4=2.$$

326_9. Podamy tu jeszcze parę przykładów rozwiązania takich równań, które nie należą do żadnéj z powyższych kategoryi, a jednak przez szczególne podstawienie, lub przekształcenie dadzą się sprowadzić do równań stopnia drugiego.

Na nieszczęście nie można dać ogólnych zasad takich podstawień i przekształceń w przypadkach więcéj złożonych: wprawa jedynie, nabyta przez przerabianie znacznéj liczby zadań, może nasuwać odpowiednie sposoby i przekształcenia prowadzące do celu.

Rozwiązać równanie:

$$(a+x)^{\frac{2}{3}}+6(a-x)^{\frac{2}{3}}=5(a^2-x^2)^{\frac{1}{6}}$$

Przenieśmy drugą stronę na pierwszą i wyłączmy ze wszystkich wyrazów $(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$ za nawias. Otrzymamy:

$$(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{(a+x)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}}+6\frac{(a-x)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}}-5\right]=0.$$

Lecz aby iloczyn z dwóch czynników był równym zero potrzeba, aby jeden z tychże czynników stał się zerem.

Czynnik pierwszy: $(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$ przyrównywamy do zera daje wartość na x równą $\pm a$; lecz widoczną

jest rzeczą. że ta wartość nie sprawdza danego równania, gdyż podstawienie a zamiast x nie czyni pierwszéj strony równą drugiéj. Pierwiastki zatém równania danego mogą być otrzymane tylko z przyrównania drugiego czynnika do zera, to jest z równania:

$$\frac{(a+x)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}}+6\frac{(a-x)^{\frac{2}{3}}}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}}-5=0;$$

A ponieważ $a^2-x^2=(a+x)(a-x)$, przeto powyższe równanie może być tak napisane:

$$\frac{(a+x)^{\frac{2}{3}}}{(a+x)^{\frac{1}{3}}(a-x)^{\frac{1}{3}}}+6.\frac{(a-x)^{\frac{2}{3}}}{(a+x)^{\frac{1}{3}}(a-x)^{\frac{1}{3}}}-5=0$$

czyli skracając pierwszy ułamek przez $(a+x)^{\frac{1}{3}}$, a drugi przez $(a-x)^{\frac{1}{3}}$, otrzymamy:

$$\frac{(a+x)^{\frac{1}{3}}}{(a-x)^{\frac{1}{3}}}+6\frac{(a-x)^{\frac{1}{3}}}{(a+x)^{\frac{1}{3}}}-5=0,$$

co można i tak napisać:

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}+6\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{\frac{1}{3}}-5=0.$$

Czyniąc tutaj:

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}=y,\quad\ldots\quad(1)$$

otrzymamy: $y+\frac{6}{y}-5=0,$

skąd: $y^2-5y+6=0.$

Rozwiązując to równanie stopnia drugiego, miéć będziemy:

$$y_1=2;\quad y_2=3.$$

Podstawiając teraz kolejno każdą z tych wartości w równanie (1), otrzymamy:

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}=2, \text{ lub: } \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{3}}=3\ .$$

Aby rozwiązać pierwsze z tych równań, podnieśmy obie jego strony najprzód do sześcianu; znajdziemy:

$$\frac{a+x}{a-x}=8;\quad \text{skąd } x_1=\frac{7}{9}a.$$

Podobnie podnosząc obie strony drugiego równania do sześcianu i rozwiązując otrzymane stąd równanie, miéć będziemy drugą wartość na x a mianowicie:

$$x_2=\frac{13}{14}a,$$

Inny przykład: Rozwiązać równanie:

$$x+2(a+b)\sqrt{2(a^2+b^2)+x}+10ab=0.$$

Uczyńmy:

$$\sqrt{3(a^2+b^2)+x}=y,\ \text{wtedy: } x=y^2-3(a^2+b^2),$$

i podstawmy te wartości w dane równanie. Będzie:

$$y^2+2(a+b)y+10ab-3(a^2+b^2)=0.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy:

$$y_1=-(a+b)+\sqrt{(a+b)^2-10ab+3a^2+3b^2},$$

czyli: $y_1=-a-b+2a-2b=a-3b.$

Podobnie: $y_2=b-3a.$

Podstawiając te wartości kolejno w równość:

$$x=y^2-3(a^2+b^2),$$

znajdziemy: $x_1=y_1{}^2-3(a^2+b^2),$

czyli: $x_1=(a-3b)^2-3a^2-3b^2,$

albo: $x_1=-2a^2-6ab+6b^2$

I podobnie: $x_2=(b-3a)^2-3(a^2+b^2)$

skąd: $x_2=-2b^2-6ab+6a^2.$

Trzeci przykład. Rozwiązać równanie:

$$\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}=m.$$

Podnieśmy obie strony tego równania do potęgi trzeciéj. Na zasadzie wzoru:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

czyli:

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b),$$

otrzymamy:

$$(x+a)-(x-a)-3\sqrt[3]{x^2-a^2}\left[\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a}\right]=m^3,$$

czyli, upraszczając i podstawiając m zamiast

$$\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{x-a},$$

będzie: $2a-3m\sqrt[3]{x^2-a^2}=m^3,$

skąd:

$$3m\sqrt[3]{x^2-a^2}=2a-m^3,$$

i:
$$\sqrt[3]{x^2-a^2}=\frac{2a-m^3}{3m}.$$

Podnosząc teraz obie strony do potęgi trzeciéj i przenosząc a^2 na drugą stronę, znajdziemy:

$$x^2=a^2+\left(\frac{2a-m^3}{3m}\right)^3,$$

skąd nakoniec:

$$x=\pm\sqrt{a^2+\left(\frac{2a-m^3}{3m}\right)^3}.$$

Następujące zadanie, jako wymagające wykonania pewnych działań z ilościami urojonemi, właściwie przechodzi zakres téj książki. Ponieważ jednak działania te są bardzo proste, i ilości urojone występują tylko przechodnio, znikając z ostatecznych wypadków, przeto dla przykładu rozwiążemy i to zadanie.

Rozwiązać równanie.

$$\sqrt{x}.\sqrt[4]{x^2-1}-2x\sqrt{x^2-1}=0{,}25.$$

W tym celu uczyńmy:

$$\sqrt{x}.\sqrt[4]{x^2-1}=y,$$

skąd:
$$x\sqrt{x^2-1}=y^2.$$

Podstawiając te wartości w równanie dane miéć będziemy:

$$y-2y^2=0{,}25,$$

czyli:
$$2y^2-y=-\frac{1}{4}.$$

Przez rozwiązanie tego równania otrzymamy:

$$y_1=\frac{1}{4}\pm\sqrt{-\frac{1}{16}},$$

to jest:

$$y_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{-1},$$

$$y_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{-1};$$

co można i tak napisać, pamiętając o uwadze zrobionéj w § 298$_1$ i § 317$_2$.

$$y_1=\frac{1}{4}(1+i),$$

$$y_2=\frac{1}{4}(1-i).$$

Z równania warunkowego:

$$\sqrt{x}.\sqrt[4]{x^2-1}=y$$

przez podniesienie do potęgi czwartéj, otrzymamy:

$$x^4-x^2=y^2;$$

A że y ma dwie wartości y_1 i y_2, przeto dla znalezienia x miéć będziemy dwa równania

$$x^4-x^2=\left[\frac{1}{4}(1+i)\right]^4,$$

i:
$$x^4-x^2=\left[\frac{1}{4}(1-i)\right]^4$$

Lecz $\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$; aby zaś podnieść $1+i$ do potęgi czwartéj podnieśmy je najprzód do kwadratu i na-

stępnie kwadrat znaleziony znowuż podnieśmy do kwadratu. Będzie:

$$(1+i)^2=1+2i+i^2$$

Lecz ponieważ podług uwagi zrobionéj w § 298, : $i^2=-1$; przeto:

$$(1+i)^2=2i;$$

a następnie:

$$(1+i)^4=4i^2=-4.$$

W podobny sposób znajdziemy:

$$(1-i)^4=-4.$$

Oba więc powyższe równania zamienią się na następne:

$$x^4-x^2=-\frac{1}{64}.$$

Czyniąc tutaj $x^2=u$, będzie:

$$u^2-u=-\frac{1}{64},$$

skąd: $u=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{15}{64}}$, czyli:

$$u=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{8}\sqrt{15}.$$

Następnie zaś:

$$x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{8}\sqrt{15}},$$

czyli: $$x=\pm\frac{1}{4}\sqrt{8\pm\sqrt{60}}.$$

Każdy z tych czterech pierwiastków może być przekształcony za pomocą wzoru na $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, gdyż a^2-b, równe tutaj 8^2-60, jest zupełnym kwadratem. To przekształcenie jednak pozostawiamy czytelnikowi.

PRZYKŁADY XXXI.

1. $x^4-13x^2+36=0$.
2. $x-5\sqrt{x}-14=0$.
3. $x+\sqrt{x+5}=7$.
4. $x^2+\sqrt{x^2+9}=21$.
5. $2\sqrt{x^2-2x+1}+x^2=23+2x$.
6. $x^4-2x^3+x^2=36$.
7. $\sqrt{x^2-6x+16}+(x-3)^2=13$.
8. $9\sqrt{x^2-9x+28}+9x=x^2+36$.
9. $2x^2+6x=226-\sqrt{x^2+3x-8}$.
10. $x^4-4x^2-2\sqrt{x^4-4x^2+4}=31$.
11. $x+2\sqrt{x^2+5x+2}=10$.
12. $3x+\sqrt{x^2+7x+5}=19$.
13. $x=7\sqrt{2-x^2}$.
14. $\sqrt{x+9}=2\sqrt{x}-3$.
15. $\sqrt{x+8}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x}$.
16. $5\sqrt{1-x^2}+5x=7$.
17. $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{2x+8}$.
18. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{7x-27}=\sqrt{3x+4}$;
19. $\sqrt{b^2+ax}-\sqrt{a^2+bx}=a+b$.
20. $2x\sqrt{a+x^2}+2x^2=a^2-a$.

21. $\dfrac{x+\sqrt{12a^2-x}}{x-\sqrt{12a^2-x}}=\dfrac{a+1}{a-1}$.

22. $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{3x}{1+x^2}$.

23. $\dfrac{1}{x+7}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-7}=0$.

24. $\dfrac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{2-x^2}}=x$.

25. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8\sqrt{x^2-1}$.

26. $\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}=\dfrac{b+x}{b-x}-\dfrac{b-x}{b+x}$.

27. $x^3+3ax^2=4a^3$.

28. $5x^2(a-x)=(a^2-x^2)(x+3a)$.

29*. $\dfrac{a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}=\dfrac{c}{x}$.

30*. $\dfrac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}}+\dfrac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=2\frac{1}{2}$.

31*. $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\dfrac{4}{x^2-x}$. 32*. $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=20$.

33*. $\sqrt[3]{x}+7\sqrt[3]{x^2}=350$.

34*. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{-x}=n(n+1)$.

35*. $\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a-b}$;

36*. $x^3-x^2+x-1=0$. 37*. $4x^3-21x^2+21x-4=0$.

38*. $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$.

39*. $x^2-4ax^3+4a^2x^2-c^4=0$.

40*. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$.

41*. $2x^4-3x^3-x^2-3x+2=0$.

42*. $12x^4+11x^3-146x^2+11x+12=0$.

43*. $90x^4-399x^3+622x^2-369x+90=0$.

XXXII.

Zagadnienia prowadzące do równań stopnia drugiego.

328. Znaleść dwie liczby, których summa jest równą 15, i których iloczyn jest równy 54.

Niech x oznacza jedną liczbę; — wtedy $15-x$ będzie drugą liczbą: — podług drugiego warunku ma być:

$$x(15-x)=54.$$

Stąd, po odpowiedniém przeniesieniu:

$$x^2-15x=-54;$$

i daléj: $$x^2-15x+\left(\frac{15}{2}\right)^2=-54+\frac{225}{4}=\frac{9}{4}.$$

Wyciągając pierwiastki kwadratowe:

$$x-\frac{15}{2}=\pm\frac{3}{2},$$

skąd: $$x=\frac{15}{2}\pm\frac{3}{2},$$

czyli: $x=9$, lub $x=6$.

Biorąc $x=9$, otrzymujemy $15-x=6$; jeżeli znowuż weźmiemy $x=6$, otrzymamy $15-x=9$. Dwie te więc liczby szukane są 6 i 9. I jakkolwiek równanie stopnia drugiego daje dwie wartości na x, tutaj jest tylko w rzeczywistości jedno tylko rozwiązanie.*)

329. Wydał ktoś pewną liczbę rubli na zakupienie towaru, który następnie sprzedał ze stratą za 24 ruble. Przy sprzedaży stracił tyle rubli *od sta*, ile go kosztował towar. Ileż kosztował ten towar?

Niech x oznacza liczbę rubli wydanych na towar; wtedy $x-24$ oznaczać będzie liczba rubli straconych. Podług warunków zadania strata od sta wynosi tyle rubli, ile kosztował towar, zatem x od sta; — więc wyraża się ułamkiem $\frac{x}{100}$ ceny towaru. Równanie przeto będzie takie:

$$x \times \frac{x}{100} = x-24,$$

skąd: $$x^2-100x = -2400.$$

Rozwiązując je znajdziemy, że $x=40$ lub $x=60$. Stąd wypada, że wydana liczba rubli była albo 40, albo też 60; — i każda z tych liczb zadosyć czyni wszystkim warunkom zagadnienia.

330. Summę 144 rs. rozdzielono pomiędzy pewną liczbę osób tak, że każda z tych osób otrzymała też samą liczbę rubli. Gdyby było o dwie osoby mniéj wtedy przy takim że podziale, każda dostałaby o jednego rubla więcéj. Znaleść ile było osób.

*) Porównaj § 317.

Oznaczmy przez x liczbę osób; wtedy to co otrzymała każda z nich wyrazi się przez $\frac{144}{x}$ rubli. Gdy było $x-2$ osoby, wtedy każda z nich dostałaby $\frac{144}{x-2}$ ruble. Zatém, podług warunków zadania będzie:

$$\frac{144}{x-2} = \frac{144}{x} + 1.$$

Znosząc mianowniki:

$$144x = 144(x-2) + x(x-2);$$

skąd: $$x^2-2x = 288.$$

Rozwiązując to równanie stopnia drugiego znajdziemy, że $x=18$, lub $x=-16$. Stąd wypada, że osób było 18, gdyż to jest jedyna liczba, która zadosyć czyni warunkom zadania.

Czytelnik bezwątpienia zapyta się, czy można jakiekolwiek znaczenie nadać drugiemu pierwiastkowi, mianowicie -16; aby na to pytanie odpowiedzieć, rozwiążemy inne zagadnienie, ściśle związane z tém, które dopiéro co rozwiązaliśmy.

331. Summa 144 rs. była rozdzieloną równo pomiędzy pewną liczbę osób; gdyby było o dwie osoby *więcéj*, wtedy każda otrzymała by o jednego rubla *mniéj*. Ileż było osób?

Oznaczmy przez x liczbę osób. Wtedy, rozumując tak jak wyżéj, otrzymamy równanie:

$$\frac{144}{x+2} = \frac{144}{x} - 1;$$

skąd: $$x^2+2x = 288.$$

a rozwiązując je, znajdziemy:

$$x=16, \quad \text{lub} \quad x=-18.$$

W poprzedniém zagadnieniu otrzymaliśmy jeden pierwiastek, dający odpowiedź na pytanie mianowicie 18, i jeden pierwiastek, nie należący do zagadnienia, mianowicie —16; i w teraźniejszém zagadnieniu otrzymaliśmy także jeden pierwiastek należący do zadania, mianowicie 16, i drugi nie należący do niego, mianowicie — 18.

332. Przy rozwiązywaniu zagadnień przytrafia się często, jak to miało miejsce w § 330, że otrzymujemy wypadki, które nie dadzą się zastosować do zagadnienia. Pochodzi to stąd, że algiebraiczne wyrażenie ma znaczenie ogólniejsze, aniżeli język zwykły, i tym sposobem równanie, będące właściwie przedstawieniem warunków zagadnienia, może być zastosowaném i do innych warunków. Zresztą uczący się z doświadczenia przekona się, że zawsze można wybrać ten pierwiastek, który należy do zagadnienia rozwiązywanego. Nadto w wielu przypadkach możliwą jest rzeczą, przez stosowną zmianę warunków zagadnienia, ułożyć nowe zagadnienie, odpowiadające temu pierwiastkowi, który nie należał do zagadnienia początkowego.

Przykład tego mieliśmy w § 331; podamy tutaj jeszcze inne zadanie tego samego rodzaju.

333. Kupił ktoś za 24 ruble pewną liczbę kóp jajek. Gdyby za tęż summę dostał o 4 kopy wiecéj, wtedy cena jednéj kopy byłaby o 30 kop. niższą. Znaleść cenę jednéj kopy?

Niech x oznacza liczbę kopiejek, wyrażającą cenę jednéj kopy. Wtedy $\frac{2400}{x}$ będzie liczbą kupionych kóp. Gdyby cena jednéj kopy była o 30 kopiejek niższą, wtedy za tęż samą summę pieniędzy 24 rs. możnaby kupić $\frac{2400}{x-30}$ kóp. Lecz, podług warunków zagadnienia, liczba kupionych kóp w tym drugim razie byłaby o 4 większą od pierwszéj. zatém otrzymamy równanie:

$$\frac{2400}{x-30}=\frac{2400}{x}+4.$$

stąd:

$$2400x=2400(x-30)+4x(x-30).$$

czyli:

$$2400x=2400x-72000+4x^2-120x.$$

Przenosząc wyrazy niewiadome na pierwszą stronę, zmieniając znaki i robiąc wszystkie uproszczenia, otrzymamy:

$$x^2-30x=18000.$$

Z tego równania znajdujemy na x dwie wartości 150 i —120. Zatém jedna kopa kosztuje 150 kop. Moglibyśmy daléj znaleść że 120 kop. jest odpowiedzią na następne zagadnienie: kupiono za 24 rs. pewną liczbę kóp jajek; gdyby za tęż samą summę otrzymano o 4 *mniéj*; wtedy cena jednéj kopy byłaby o 30 kop. *wyższą*. Znaleść ile kosztuje kopa.

PRZYKŁADY XXXII.

1. Liczbę 60 podzielić na takie dwie części, aby iloczyn ich był 864.

2. Summa dwóch liczb jest 60, summa zaś ich kwadratów jest 1872 — znaleść dwie te liczby.

3. Znaleść dwie liczby, których różnica jest równą 6, i których iloczyn jest 720.

4. Summa kwadratów trzech liczb jest równą 549; druga z tych liczb stanowi dwie trzecie części pierwszéj, a trzecia jest połową pierwszéj. Znaleść te trzy liczby.

5. Różnica dwóch liczb jest równą 2, summa zaś ich kwadratów jest równą 244; znaleść dwie te liczby.

6. Liczbę 10 podzielić na takie dwie części, aby iloczyn tychże części dodany do summy ich kwadratów stanowił 76.

7. Znaleść liczbę, która dodana do swojego pierwiastku kwadratowego, dała by na summę 210.

8. Iloczyn dwóch liczb jest 144; jedna zaś z tych liczb jest 16 razy większą od drugiéj; — znaleść dwie te liczby.

9. Sto dziesięc korcy węgla zostało rozdzielonych równo pomiędy pewną liczbę ubogich; gdyby każdy ubogi dostał o jeden korzec więcéj, wtedy liczba korcy, jakąby otrzymał byłaby równą liczbie ubogich. Pytanie: iluż było ubogich?

10. W składkowéj uczcie dwóch zaproszonych nie płaciło: --- reszta zapłaciła razem rs. 175. Gdyby i dwaj zaproszeni także płacili, wtedy każdy z biesiadników zapłaciłby o dziesięć rubli mniéj. Ileż było osób przyjmujących udział w biesiadzie?

11. Zbiornik może być napełniony wodą, wpływającą dwiema rurami w ciągu 4 godzin: znaleść w ilu godzinach mógłby być zbiornik napełniony przez każdą z tych rur oddzielnie, jeżeli jedna rura napełniłaby go o 6 godzin prędzéj aniżeli druga.

12. Kupił ktoś pewną liczbę sztuk płótna za 675 rs.; następnie sprzedał to płótno po 48 rs. sztuka i na całéj sprzedaży zyskał tyle rubli, ile go kosztowała jedna sztuka. Znaleść ile sztuk płótna kupił?

13. Robotnicy A i B mogą skończyć pewną robotę w $14\frac{2}{5}$ dnia pracując razem; sam robotnik A mógłby ją skończyć o 12 dni prędzéj, aniżeli sam robotnik B. Znaleść w jakim przeciągu czasu sam robotnik A jest w stanie skończyć robotę.

14. Kupiono pewną ilość kawy za 18 rubli. Gdyby funt tejże kawy był droższym o $\frac{1}{12}$ rs., wtedy za tęż samą summę pieniędzy otrzymano by o 3 funty mniéj. Ileż funtów kawy kupiono?

15. Wydał ktoś pewną summę pieniędzy na zakupienie towaru, który następnie sprzedał za 24 rs. i przytém miał zysku tyle od sta, ile go kosztował towar. Znaleść cenę towaru?

16. Bok kwadratu ma 110 cali długości; znaleść długość i szerokość prostokąta, którego obwód jest o 4 cale dłuższy od powierzchni kwadratu a powierzchnia o 4 cale^2 mniejszą od powierzchni kwadratu.

17. Dwóch posłańców A i B wysłano w téj saméj chwili do miejsca odległego o 90 wiorst; pierwszy przebywał o jedną wiorstę więcéj na godzinę aniżeli drugi i w skutek tego przejechał cała odległość o godzinę prędzéj aniżeli drugi. Znaleść po ile wiorst na godzinę przebywał każdy.

18. Pewna osoba wydzierżawia od właściciela wsi pastwisko na lato za 70 rs.; 8 morgów zatrzymuje dla siebie, a pozostałość odnajmuje, biorąc o 25 kop. za morgę więcéj, aniżeli sama płaci. Tym sposobem nietylko ma na zapłacenie całéj dzierżawy, ale jeszcze zyskuje 2 rs. Ileż morgów zawiera całe pastwisko?

19. Z dwóch miast, odległych na 320 wiorst, wyruszyły w tym samym czasie dwie osoby A i B w celu spotkania się. A przejeżdżał dziennie 8 wiorst więcéj, aniżeli B, a liczba dni, po upływie któréj spotkali się, wynosiła połowę liczby wiorst, jaką B przejeżdżał na dzień. Znaleść ile wiorst każdy przebył od chwili wyjazdu do chwili spotkania się.

20. Z naczynia, napełnionego czystym winem i zawierającego 81 garncy, wzięto pewną ilość wina i dolano wody tak, że w naczyniu znowuż było 81 garncy. Następnie po raz drugi wylano tyleż mieszaniny ile pierwszy raz wzięto czystego wina. Okazało się, że w naczyniu pozostało 64 garnce czystego wina. Znaleść ile garncy wzięto z naczynia za każdym razem.

21. Mamy trzy równe naczynia A, B i C; pierwsze zawiera wodę, drugie wódkę a trzecie mieszaninę wody z wódką. Jeżeli zawartości naczyń B i C będą zmieszane razem, wtedy ułamek, który otrzymalibyśmy dzieląc ilość wódki w téj nowéj mieszaninie przez ilość wody, będzie dziewięć razy większy od tego ułamku, jakibyśmy otrzymali postępując tak samo z zawartościami naczyń A i C. Znaleść stosunek wódki do wody w naczyniu C.

22. Kapitalista wypożyczył 5000 rs.: po upływie roku odebrał całkowity, należny mu procent i wydawszy z niego 25 rs., resztę dołożył do kapitału. Nowy ten kapitał wypożyczył na drugi rok, przy téj saméj stopie procentu. Przy końcu drugiego roku okazało się, że ma razem 5382 rs. Znaleść jaka była stopa procentu?

23*. Sznurem pewnéj długości można otoczyć po obwodzie kwadrat. Jeżeliby sznur ten skrócić o 8 metrów, wtedy możnaby nim otoczyć kwadrat, którego powierzchnia stanowi tylko $\frac{16}{25}$ części kwadratu pierwszego. Znaleść długość sznura.

24*. W wielkim sadzie w jednem miejscu oddzielono część kwadratową na szkółkę drzew, które rozsadzono w ten sposób, że każde drzewko stało w środku małego kwadratu, a odległość pomiędzy dwoma najbliższemi drzewkami wynosiła $1\frac{1}{3}$ metra, (tak że na każde drzewko przypadało $1\frac{7}{9}$ metra kwadratowego gruntu). W drugiém miejscu w tymże sadzie na takiéj że saméj powierzchni wypadło posadzić o 8240 drzewek więcéj, w skutek czego każde dwa drzewka były oddalone od siebie tylko o $1\frac{1}{6}$ metra, (a na każde drzewko przypadło $1\frac{13}{16}$ metra kwadrato-

wego). Ile metrów miała długość boku téj przestrzeni kwadratowéj, jaką przeznaczono na szkółkę?

(Przy rozwiązywaniu tego zagadnienia należy sobie wystawić, że każdy ogród jest podzielony na kwadraty równe, których bok w pierwszym razie jest $1\frac{1}{3}$ m. w drugim $1\frac{1}{6}$ m. i że w środku każdego kwadratu znajduje się drzewko).

25*. Dwaj podróżni wychodzą jednocześnie z tego samego punktu i jeden idzie ku północy z prędkością $4\frac{1}{2}$ wiorst na godzinę, a drugi ku wschodowi z prędkością 6 wiorst na godzinę. Po ilu godzinach odległość pomiędzy nimi będzie 30 wiorst?

26*. Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym po ramionach kąta prostego: jedno z prędkością c metrów, drugie zaś z prędkością c^1 metrów na sekundę, przyczém oba wyszły jednocześnie z wierzchołka kąta prostego. Po ilu sekundach odległość pomiędzy niemi będzie d metrów?

27*. Linię prostą a podzielić na takie dwie części aby prostokąt wystawiony na tych dwóch częściach był równy co do powierzchni danemu prostokątowi, mającemu n metrów kwadratowych. Znaleść nadto w jakim przypadku zagadnienie jest niemożliwe do rozwiązania?

28*. Zwierciadło wysokie na 99 centymetrów a szerokie na 66 centymetrów, ma być oprawione w ramę jednakowéj wszędzie szerokości i taką, że cała jéj powierzchnia ma być równą powierzchni zwierciadła. Ileż centymetrów ma wynosić szerokość ramy? Toż samo zagadnienie w ogólności, przypuszczając, że powierzchnia ramy jest p razy większą od powierzchni zwierciadła.

29*. Za domem znajduje się plac ogrodzony, mający długości 70 metrów i szerokości $52\frac{1}{2}$ metra. Właściciel domu chciałby plac ten zasadzić kwiatami, żona jego zaś wolałaby zamienić go na trawnik. Aby życzeniom obojgu w równéj mierze zadosyć uczynić, polecono ogrodnikowi założyć na środku placu trawnik prostokątny, którego obwód jest wszędzie jednakowo oddalony od ogrodzenia, i którego powierzchnia byłaby równą powierzchni pozostałéj części ogrodu. Jakaż będzie długość i jaka szerokość trawnika?

30*. 60 funtów pewnego towaru kosztuje o 4 ruble mniéj, aniżeli 60 funtów innego towaru. Jeżeli kupimy każdego towaru za $8\frac{2}{5}$ rubli, wtedy dostaniemy pierwszego towaru o 8 funtów więcej, aniżeli drugiego. Ileż kosztuje funt każdego towaru?

31*. Przednie koło powozu robi o 6 obrotów więcéj, aniżeli tylne, gdy powóz przejeżdża 120 metrów. Gdyby obwód każdego z czterech kół powiększono o 1 metr, wtedy na téj saméj przestrzeni przednie koło zrobiłoby tylko o 4 obroty więcéj, aniżeli tylne. Jakiż jest obwód przedniego, a jaki tylnego koła?

32*. Dwie osoby A i B złożyły do prowadzenia wspólnie pewnego interesu 3400 rs.; kapitał osoby A pozostawał w obrocie 12, a osoby B 16 miesięcy. Przy podziale osoba A otrzymała 2070 rs. kapitału wraz z zyskiem, osoba zaś B 1920 rs. kapitału także z zyskiem. Ileż każda z nich złożyła?

33*. Uczniowie trzech pierwszych klass pewnéj szkoły zbierają składkę na cel dobroczynny: uczniowie każdéj klassy składają się po jednakowéj summie,

ale każdy z trzeciéj klassy daje tyle, ile każdy z pierwszéj i drugiéj klassy razem. Trzecia klassa, mająca o 6-ciu uczniów mniej, aniżeli 2-ga, złożyła 11 rs. 90 kop.; druga klassa. mająca o 5-ciu uczniów mniéj, aniżeli pierwsza, złożyła 9 rs. 20 kop.; nakoniec pierwsza klassa złożyła 8 rs. 40 kop. Iluż uczniów było w każdéj klassie?

34*. Z dwóch punktów, których odległość wynosi 1800 metrów wychodzą dwa ciała, poruszające ruchem jednostajnym, naprzeciwko siebie, — jedno o 5 sekund późniéj aniżeli drugie i spotykają się w samym środki drogi. Ileż metrów na sekundę przebywa każde, jeżeli wiemy, że pierwsze przebywa o 6 metrów na sekundę więcéj aniżeli drugie?

35*. Dwie osoby A i B wychodzą z miasta M do miasta R z tą samą prędkością, ale osoba A wcześniéj wyszła aniżeli B. Przy trzecim słupie milowym *przed miastem* R, osoba A mija stado gęsi, które szło przed nią z prędkością $\frac{1}{6}$ mili na godzinę. W pół godziny późniéj taż sama osoba A spotyka stado owiec, idących w tym samym kierunku z prędkością $\frac{1}{5}$ mili na godzinę. Osoba B dogania gęsi w miejscu położoném na $2\frac{1}{2}$ mili przed miastem R; owce zaś na 10 minut przed dojściem do drugiego słupa milowego przed miastem R. Pytanie z jaką szli prędkością podróżni A i B?

35*. Z wierzchołka kąta prostego wychodzą dwa punkta, i poruszają się po jego ramionach ruchem jednostajnym. Pierwszy przebiega na sekundę 8 metrów, drugi przebiega na sekundę 7 metrów i wychodzi z wierzchołka we 22 sekundy po pierwszym. Pytanie: po ilu sekundach odległość tych punktów będzie wynosić 275 metrów?

37*. Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym na dwóch liniach prostych, przecinających się pod kątem prostym. Pierwsze przebiega na sekundę c metrów, i przechodzi przez punkt przecięcia się tych tych linii w t sekund późniéj, aniżeli drugie ciało: — to ostatnie przebiega c_1 metrów na sekundę. W ile sekund po przejściu pierwszego ciała przez punkt przecięcia, odległość pomiędzy temiż ciałami wynosić będzie d metrów?

38*. Dwa ciała poruszają się ruchem jednostajnym na dwóch liniach prostych, przecinających się pod kątem prostym i w kierunku ku punktowi przecięcia się tychże linij. z prędkościami c i c_1. W pewnéj chwili odległości ich od punktu przecięcia są a i b. Pytanie: kiedy (to jest po upływie ilu jednostek czasu) odległość pomiędzy temi ciałami wynosić będzie d? Jaki związek powinien istnieć pomiędzy ilościami a, b, c i c_1 ażeby rozwiązanie zagadnienia było możliwém?

39*. W zagadnieniu poprzedzającém znaleść, kiedy odległość pomiędzy dwoma punktami będzie najkrótsza?

40*. Na linii prostéj, łączącéj dwa punkta swiecące, znaleść punkt jednakowo przez te dwa światła oświecony.*)

*) Do rozwiązania tego zagadnienia należy wiedzieć z fizyki, że natężenie światła zmienia się w stosunku odwrotnym kwadratów z odległości.

41*. Mamy sześcian, wewnątrz pusty, zrobiony z blachy żelaznéj, grubéj na 9 milimetrów. Jeżeli wszystkie sześć ścian tego sześcianu pokryjemy taflami ołowianemi, grubemi na 5 milimetrów, wtedy waga nowéj bryły będzie dwa razy większą od wagi początkowego sześcianu żelaznego. Na zasadzie tych danych obliczyć wysokość początkowego sześcianu z blachy żelaznéj, skoro wiemy, że stosunek wagi równych objętości żelaza i ołowiu jest równy 7, 8 do 11,4.

XXXIII.

Równania jednoczesne stopnia drugiego.

334. Przedstawimy tutaj kilka przykładów rozwiązania równań jednoczesnych stopnia drugiego. Rozbierzemy szczególniéj dwa przypadki, najczęściej przytrafiające się w praktyce i podamy prawidło na ich rozwiązanie. W obu tych przypadkach są dane dwa równania z dwiema niewiadomemi. Ilości niewiadome zawsze oznaczone będą głoskami x i y.

335. *Przypadek pierwszy.* Przypuśćmy że jedno z równań danych jest stopnia pierwszego, a drugie jest stopnia drugiego.

Prawidło: *Z równania stopnia pierwszego należy wynaleść wartość na jedną z niewiadomych. Wartość tę, która będzie wyrażoną za pomocą drugiéj niewiadoméj, podstawić w równanie stopnia drugiego.*

Naprzykład: Rozwiązać równania:

$$3x+4y=18;\quad 5x^2-3xy=2.$$

Z pierwszego równania będzie:

$$y=\frac{18-3x}{4};$$

podstawmy tę wartość w równanie drugie; otrzymamy:

$$5x^2-\frac{3x(18-3x)}{4}=2,$$

skąd: $$20x^2-54x+9x^2=8,$$

i następnie: $$29x^2-54x=8.$$

Z tego równania stopnia drugiego znajdujemy: $x=2$, lub $-\frac{4}{29}$; a podstawiając te wartości w wyrażenie na y, otrzymamy $y=3$, lub $\frac{267}{58}$.

336. Rozwiązać równania:

$$3x^2+5x-8y=36,\quad 2x^2-3x-4y=3.$$

Jakkolwiek tutaj żadne z danych równań nie jest stopnia pierwszego, ztém wszystkiem możemy z nich wyprowadzić równanie stopnia pierwszego.

Gdyż pomnożywszy pierwsze równanie przez 2 a drugie przez 3, otrzymamy:

$$6x^2+10x-16y=72,$$
$$6x^2-9x-12y=9.$$

Odejmijmy równanie drugie od pierwszego, będzie:

$$10x-16y+9x+12y=72-9,$$

czyli: $19x-4y=63.$

Z tego równania mamy:

$$y=\frac{19x-63}{4},$$

co podstawiwszy w pierwsze z danych równań otrzymamy:

$$3x^2+5x-2(19x-63)=36.$$

Przerabiając to równanie otrzymamy w dalszym ciągu:

$$3x^2-33x+90=0,$$

skąd: $$x^2-11x+30=0.$$

Z tego równania znajdziemy, że $x=5$ lub 6; a następnie przez podstawienie kolejne tych wartości w wyrażenie na y znajdziemy, że $y=8$, lub $y=12\frac{3}{4}$.

337. *Przypadek drugi.* Gdy wyrazy zawierające ilości niewiadome w każdém równaniu stanowią wyrażenie jednorodne stopnia drugiego (patrz § 23).

Prawidło: *Należy uczynić $y=vx$ i następnie podstawić tę wartość w oba równania; wtedy przez podzielenie ich odpowiedniemi stronami, otrzymamy równanie, z którego można oznaczyć v.*

Naprzykład: Rozwiązać równania:

$$x^2+xy+2y^2=44;\quad 2x^2-xy+y^2=16.$$

Uczyńmy $y=vx$ i podstawmy tę wartość na y w oba równania; otrzymamy:

$$x^2(1+v+2v^2)=44,\quad x^2(2-v+v^2)=16.$$

Dzieląc odpowiedniemi stronami te równania, będzie:

$$\frac{1+v+2v^2}{2-v+v^2}=\frac{44}{16}=\frac{11}{4}.$$

Stąd: $$4(1+v+2v^2)=11(2-v+v^2),$$

i następnie: $$3v^2-15v+18=0;$$

dzieląc zaś całe równanie przez 3, wypadnie:

$$v^2-5v+6=0.$$

Z tego równania otrzymamy $v=2$, lub $v=3$. W równanie $x^2(1+v+2v^2)=44$, podstawmy 2 zamiast v, znajdziemy $x=\pm 2$; a że $y=vx$, przeto otrzymamy: $y=\pm 4$. Podstawmy daléj w tém samém równaniu 3 zamiast v; miéć będziemy z niego: $x=\pm\sqrt{2}$. A że: $y=vx$, zatem $y=\pm 3\sqrt{2}$.

Lub też moglibyśmy postępować i tak:

Pomnóżmy pierwsze z danych równań przez 2, będzie: $$2x^2+2xy+4y^2=88;$$

drugie zaś równanie jest:

$$2x^2-xy+y^2=16.$$

Przez odjęcie tych równań znajdziemy:

$$3xy+3y^2=72,$$

czyli. $$y^2=24-xy.$$

I daléj pomnóżmy drugie równanie przez 2 i odejmijmy od niego równanie pierwsze; będzie:

$$3x^2-3xy=-12,$$

skąd: $$x^2=xy-4.$$

Stąd, przez mnożenie:

$$x^2y^2=(24-xy)(xy-4),$$

czyli: $$2x^2y^2-28xy=-96.$$

Rozwiązując to równanie otrzymamy: $xy=8$, lub $xy=6$. Podstawiając pierwszą wartość w dane równanie, otrzymamy:

$$x^2+2y^2=36, \quad 2x^2+y^2=24.$$

Stąd znajdziemy x^2 i y^2. W podobny sposób można wziąć drugą wartość na xy i następnie wynaleść x^2 i y^2.

338. Rozwiązać równania:

$$2x^2+3xy+y^2=70, \quad 6x^2+xy-y^2=50.$$

Uczyńmy: $y=vx$, i podstawmy zamiast y tę wartość w oba równania, będzie:

$$x^2(2+3v+v^2)=70; \quad x^2(6+v-v^2)=50.$$

Dzieląc odpowiedniemi stronami te dwa równania, otrzymamy:

$$\frac{2+3v+v^2}{6+v-v^2}=\frac{70}{50}=\frac{7}{5},$$

skąd: $$5(2+3v+v^2)=7(6+v-v^2),$$

i następnie: $$12v^2+8v-32=0.$$

czyli: $$3v^2+2v-8=0.$$

Z tego równania znajdziemy $v=\frac{4}{3}$ lub $v=-2$.

Podstawmy w równanie $x^2(2+3v+v^2)=70$, $\frac{4}{3}$ zamiast v, wtedy otrzymamy $x=\pm 3$. A ponieważ $y=vx$, więc $y=\pm 4$. Wartość $v=-2$ nie może

tutaj być zastosowaną, gdyż prowadzi do niemożliwego wypadku $x^2\times 0=70$. W rzeczy saméj: równania, z których wartość na v była wynalezioną, mogą być tak napisane:

$$x^2(2+v)(1+v)=70, \quad x^2(2+v)(3-v)=50.$$

Z nich widzimy, że wartość na v, znaleziona z równania $2+v=0$, nie daje się tutaj zastosować, może być tylko:

$$\frac{1+v}{3-v}=\frac{70}{50}=\frac{7}{5}, \text{ skąd: } v=\frac{4}{3}.$$

339. Oprócz równań należących do tych przypadków, które dopiéro co rozważaliśmy, mogą się przytrafić równania, które jakkolwiek nie dadzą się pod żaden z nich podciągnąć, wszakże mogą być rozwiązane sposobami szczególnemi. Jakiego użyć w tym celu sposobu w każdym przypadku, może nas nauczyć tylko wprawa i doświadczenie. Podamy tutaj kilka tego rodzaju przykładów.

340. Rozwiązać równania:

$$x+y=5; \quad x^3+y^3=65,$$

Przez dzielenie otrzymamy:

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}=\frac{65}{5},$$

czyli: $$x^2-xy+y^2=13.$$

Z tego równania, połączonego z równaniem $x+y=5$ możemy znaleść x i y tak jak w pierwszym przypadku. Albo też możemy uzupełnić rozwiązanie w ten sposób:

$$x+y=5,$$

podnieśmy obie strony do kwadratu:

$$x^2+2xy+y^2=25 \quad . \quad . \quad , \quad (1)$$

A że nadto:

$$x^2-xy+y^2=13, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

przeto odejmując (2) od (1), będzie:

$$3xy=12,$$

a następnie: $$xy=4,$$

skąd: $$4xy=16 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Odejmijmy (3) od (1); otrzymamy:

$$x^2-2xy+y^2=9;$$

wyciągnijmy z obu stron tego ostatniego równania pierwiastki kwadratowe, będzie:

$$x-y=\pm 3.$$

Należy teraz znaleźć x i y z równań stopnia pierwszego:

$$x+y=5, \quad \text{i} \quad x-y=\pm 3.$$

Równania te dają takie wartości na x i y:

$$x=1, \quad \text{lub:} \quad x=4,$$

$$y=4, \quad \text{lub:} \quad y=1.*)$$

---

*) Gdy już otrzymaliśmy wartość na xy, można także dokończyć rozwiązania z dwóch równań:

$$x+y=5, \quad \text{i} \quad xy=4,$$

opierając się na zadaniu § 317$_2$. Mianowicie: równania te dają

341. Rozwiązać równania:

$$x^2+y^2=41; \quad xy=20.$$

Równania te mogą być rozwiązane tak, jak równania w drugim przypadku (§ 337), albo też można ich rozwiązać w sposób dopiero co pokazany. Gdyż z nich możemy odrazu wyprowadzić:

$$x^2+y^2+2xy=41+40=81,$$

$$x^2+y^2-2xy=41-40=1;$$

wyciągając więc pierwiastki kwadratowe otrzymamy:

$$x+y=\pm 9, \quad \text{i} \quad x-y=\pm 1,$$

stąd ostatecznie znajdziemy:

$$x=\pm 5, \quad \text{lub:} \quad x=\pm 4,$$

i $$y=\pm 4, \quad \text{lub:} \quad y=\pm 5.$$

342. Rozwiązać równania:

$$x^2+xy+y^2=19, \quad x^4+x^2y^2+y^4=133.$$

Z podzielenia jednego równania przez drugie mamy:

$$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2+xy+y^2}=\frac{133}{19},$$

czyli: $$x^2-xy+y^2=7,$$

Tym sposobem mamy teraz do rozwiązania dwa równania:

---

nam summę i iloczyn ilości szukanych; pierwiastki więc równania:

$$u^2-5u+4=0$$

będą szukanemi ilościami. Tł.

$$x^2+xy+y^2=19, \quad x^2-xy+y^2=7.$$

Dodając i odejmując kolejno dwa te równania otrzymamy:

$$x^2+y^2=13, \quad xy=6$$

Postępując daléj tak, jak w § 341 znajdziemy że:

$$x=\pm 3, \text{ lub: } x=\pm 2,$$

i $$y=\pm 2; \text{ lub: } y=\pm 3.$$

343. Rozwiązać równania:

$$x-y=2; \quad x^5-y^5=242.$$

Dzieląc drugie równanie przez pierwsze, otrzymamy:

$$\frac{x^5-y^5}{x-y}=\frac{242}{2},$$

czyli: $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=121,$

to jest:

$$x^4+y^4+xy(x^2+y^2)+x^2y^2=121 \quad . \; . \; (1)$$

Lecz: $$x-y=2;$$

przeto, podnosząc obie strony do kwadratu; mieć będziemy:

$$x^2-2xy+y^2=4,$$

skąd: $$x^2+y^2=2xy+4 \quad . \; . \; . \; (2)$$

Podnosząc obie strony tego ostatniego równania do kwadratu, otzymamy:

$$x^4+2x^2y^2+y^4=4x^2y^2+16xy+16,$$

przeto: $$x^4+y^4=2x^2y^2+16xy+16 \quad . \; . \; . \; (3)$$

Podstawiając wartości na x^2+y^2 i x^4+y^4, wzięte z równań (2) i (3), w równanie (1), mieć będziemy:

$$2x^2y^2+16xy+16+xy(2xy+4)+x^2y^2=121,$$

skąd: $$5x^2y^2+20xy=105,$$

czyli: $$x^2y^2+4xy=21.$$

Z tego równania otrzymamy:

$$xy=3, \text{ lub: } xy=-7.$$

Weźmy $xy=3$; z tego równania, połączonego z równaniem $x-y=2$, znajdziemy $x=3$, lub: $x=-1$, a następnie: $y=1$, lub $y=-3$. Gdybyśmy wzięli: $xy=-7$, wtedy przekonalibyśmy, że wartości na x i y byłyby urojone (§ 306).

PRZYKŁADY XXXIII.

1. $x-y=1; \quad x^2-xy+y^2=21.$
2. $2x-5y=3; \quad x^2+xy=20.$
3. $x+y=7(x-y); \quad x^2+y^2=100.$
4. $5(x^2-y^2)=4(x^2+y^2); \quad x+y=8.$
5. $x-y=3; \quad x^2+y^2=65.$
6. $4x-5y=1; \quad 2x^2-xy+3y^2+3x-4y=47.$
7. $4x+9y=12; \quad 2x^2+xy=6y^2.$
8. $(x-6)^2+(y-5)^2+2xy=60; \quad 5y-4x=1.$
9. $4x^2+2xy+\frac{y^2}{4}+\frac{5}{12}(4x+y)=41; \quad 4x-y=4.$
10. $\frac{x}{12}+\frac{y}{10}=x-y; \quad \frac{7xy}{15}-\frac{2x}{3}-2y=0.$
11. $3x+2y=5xy; \quad 15x-4y=4xy.$

12. $xy+2=9y$; $xy+2=x$.

13. $8(xy+1)=33y$; $4(xy+1)=33x$.

14. $xy=x+y$; $ax=by$.

15. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$; $xy=ab$.

16. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$; $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=a+b$.

17. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $x^2+y^2=ax+by$.

18. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

19. $x^2+xy=28$; $xy-y^2=3$.

20. $x^2+xy=45$; $y^2+xy=36$.

21. $2x^2-xy=56$; $2xy-y^2=48$.

22. $x^2-2xy=15$; $xy-2y^2=7$.

23. $x^2+3xy=28$; $xy+4y^2=8$.

24. $x^2+xy-6y^2=21$; $xy-2y^2=4$.

25. $x^2+3xy=54$; $xy+4y^2=115$.

26. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2}$; $x^2+y^2=90$.

27. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{25}{7}$; $xy=48$.

28. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}$; $x^2-y^2=3$.

29. $x(x+y)+y(x-y)=158$; $7x(x+y)=72y(x-y)$.

30. $x^2y(x+y)=80$, $x^2y(2x-3y)=80$.

31. $2x^2-xy+y^3=2y$; $2x^2+4xy=5y$.

32. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{a^2+1}{a}$; $x^2+y^2=b^2$.

33. $x^2+xy=a(a+b)$; $x^2+y^2=a^2+b^2$.

34. $x^2+2xy-y^2=a^2+2a-1$;
$(a-1)x(x+y)=a(a+1)y(x-y)$.

35. $x-y=2$; $x^3-y^3=152$.

36. $x+y=9$; $x^3+y^3=189$.

37. $x^2+y^2=20$; $xy-x-y=2$.

38. $x-y=1$; $x^5-y^5=781$.

39. $x+y=3$; $x^5+y^5=33$.

40. $x^2+xy+y^2=37$; $x^4+x^2y^2+y^4=481$.

41. $\frac{x}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=1$; $2+3xy=3x$.

42. $x^2+y^2=34$; $x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=20$.

43. $x^2+y^2-1=2xy$, $xy(xy+1)=6$.

44. $4x^2+y^2+2(2x+y)=6$; $4xy(xy+1)=3$.

45. $x^2+xy=8x+3$; $y^2+xy=8y+6$.

46. $x^2-xy=2x+5$; $xy-y^2=2y+2$.

47. $2x+y+6\sqrt{2x+y+4}=23$; $4x^2-6x=y^2+3y$.

48. $18+9(x+y)=2(x+y)^2$: $6-(x-y)=(x-y)^2$.

49. $x^2-xy=a(x+1)+b+1$; $xy-y^2=ay+b$.

50. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{y^2}{b^2}=18$; $\frac{ab}{xy}=1$.

51. $\frac{a^2}{x^2}-\frac{y^2}{b^2}=12$; $\frac{ab}{xy}=2$.

52. $x^2=ax+by$; $y^2=ay+bx$.

53. $x^2yz=a$: $xy^2z=b$; $xyz^2=c$.

54. $(x+y)(x+z)=a^2$; $(y+z)(y+x)=b^2$;
$(z+x)(z+y)=c^2$.

55. $3yz+2zx-4xy=16$; $2yz-3zx+xy=5$;
$4yz-zx-3xy=15$.

56. $6(x^2+y^2+z^2)=13(x+y+z)=\frac{481}{6}$; $xy=z^2$.

57*. $x-y=a$; $x^3-y^3=b$.

XXXIV.

Zagadnienia prowadzące do równań stopnia drugiego zawierających więcéj niż jedną niewiadomą.

344. Znaleść liczbę dwucyfrową, mającą następujące własności: 1-sze, summa kwadratów dwóch cyfr z których składa się liczba, jest równą saméj téj liczbie powiększonéj o iloczyn tychże cyfr; 2-re jeżeli dodamy 36 do téj liczby, wtedy otrzymamy nową liczbę dwucyfrową, złożoną z tych samych cyfr, lecz napisanych w odwrotnym porządku.

Niech x oznacza cyfrę stojącą na miejscu dziesiątków, a y cyfrę, stojącą na miejscu jedności. Wtedy sama liczba wyrazi się tak: $10x+y$; jeżeli zaś cyfry odwrócimy, będzie liczba $10y+x$. Więc, podług warunków zagadnienia, mieć będziemy równania:

$$x^2+y^2=xy+10x+y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$10x+y+36=10y+x \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (2)$$

Z równania (2) mamy:

$$9y=9x+36,$$

przeto: $y=x+4$.

Podstawiając tę wartość w (1), otrzymamy:

$$x^2+(x+4)^2=x(x+4)+10x+x+4,$$

skąd: $x^2-7x+12=0$.

Z tego równania znajdziemy:

$$x=3, \text{ lub: } x=4;$$

a zatém: $y=7$, lub: $y=8$.

Szukana liczba musi więc być albo 37, albo téż 48. Każda z tych liczb zadosyć czyni wszystkim warunkom zagadnienia.

345. Pewna osoba wychodzi z miejsca położonego u samego spodka góry, z zamiarem dojścia do szczytu. Drugą połowę odległości do szczytu przechodzi z prędkością o pół wiorsty mniejszą na godzinę, aniżeli pierwszą połowę téjże odległości, i dosięga szczytu w $5\frac{1}{2}$ godzin. Ze szczytu schodzi na dół w ciągu $3\frac{3}{4}$ godz., przyczém idzie z prędkością jednakową, i o jedną wiorstę na godzinę większą, aniżeli w pierwszéj połowie wstępowania na górę. Znaleść: odległość od spodka góry do jéj szczytu — i różne prędkości, z jakiemi ta osoba szła?

Niech $2x$ oznacza liczbę wiorst do wierzchołka, y zaś liczbę wiorst, jaką ta osoba przechodzi na godzinę, podczas pierwszéj połowy wchodzenia na górę. Przeto pierwszą połowę drogi przebyła w godzin $\frac{x}{y}$, drugą zaś w godzin $\frac{x}{y-\frac{1}{2}}$. Z warunków zadania

będzie:

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y-\frac{1}{2}}=5\frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

i podobnież:

$$\frac{2x}{y+1}=3\frac{3}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Z równania (2) otrzymamy:

$$2x=\frac{15}{4}(y+1);$$

przeto: $$x=\frac{15}{8}(y+1).$$

Z równania (1) będzie:

$$x\left(2y-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{2}y\left(y-\frac{1}{2}\right);$$

skąd: $$15(y+1)(4y-1)=44y(2y-1),$$

czyli: $$28y^2-89y+15=0.$$

Z tego równania, otrzymujemy: $y=3$, lub $y=\frac{5}{28}$

Wartość $\frac{5}{28}$ nie ma tutaj zastosowania, gdyż y podług warunków zadania jest większe od $\frac{1}{2}$. Zatém: $y=3$, a następnie: $x=\frac{15}{2}$. Odległość przeto od spodka góry do szczytu jest 15 wiorst.

345. Zakończymy ten rozdział rozwiązaniem zagadnienia następującego:

Znaleść dwie takie liczby, aby ich summa, iloczyn i różnica ich kwadratów były równe.

Oznaczmy większą z tych liczb głoską x, mniejszą zaś głoską y. Wtedy podług warunków zagadnienia, powinno być:

$$x+y=xy=x^2-y^2.$$

Aby rozwiązać te równania, wyprowadzamy najprzód z równania $x+y=xy$ wartość na x, będzie:

$$x=\frac{y}{y-1}$$

skąd: $$x+y=\frac{y}{y-1}+y=\frac{y^2}{y-1},$$

i: $$xy=\frac{y^2}{y-1}.$$

Ponieważ różnica kwadratów tych liczb ma być równą temuż samemu, czemu się równa summa i iloczyn, przeto będzie z jednéj strony:

$$x^2-y^2=\frac{y^2}{y-1}.$$

Lecz ponieważ $x=\frac{y}{y-1}$, przeto $x^2=\frac{y^2}{y^2-2y+1}$,

zatém z drugiéj strony otrzymamy:

$$x^2-y^2=\frac{y^2}{y^2-2y+1}-y^2=\frac{-y^4+2y^3}{y^2-2y+1}.$$

Porównywając tę wartość na x^2-y^2 z napisaną powyżéj, otrzymamy:

$$\frac{y^2}{y-1}=\frac{-y^4+2y^3}{y^2-2y+1}.$$

Dzieląc przez y^2 (co możemy zrobić, gdyż y nie może być zerem), będzie:

$$\frac{1}{y-1}=\frac{-y^2+2y}{y^2-2y+1},$$

znosząc mianownik:

$$y-1=-y^2+2y, \text{ czyli: } y^2-y=1.$$

Stąd otrzymamy na y takie wartości:

$$y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

a ograniczając się na wartości dodatnéj:

$$y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Wartość zaś na x będzie na zasadzie równania:

$$x=\frac{y^2}{y-1},$$

taką:

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}.$$

Aby mianownik w tém ostatniém wyrażeniu uczynić wymiernym, pomnóżmy licznik i mianownik przez $\sqrt{5}+1$, otrzymamy ostatecznie:

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Większa zatém z szukanych liczb jest $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$,

mniejsza zaś $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Liczby te czynią zadosyć warunkom zagadnienia, gdyż:

$$x+y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5},$$

$$xy=2+\sqrt{5}.$$

$$x^2-y^2=2+\sqrt{5}.$$

Rozwiązanie tegoż samego zagadnienia można uczynić prostszem, wychodząc z równania: $x+y=x^2-y^2$, którego obie strony mogą być podzielone przez $x+y$. Wskazujemy tu tylko tę drogę, pozostawiając czytelnikowi rozwinięcie całego rozwiązania.

PRZYKŁADY XXXIV.

1. Summa kwadratów dwóch liczb jest 170 różnica zaś kwadratów tychże liczb jest 72. Znaleść te liczby.

2. Iloczyn dwóch liczb wynosi 108, a summa ich równa się podwojonéj ich różnicy. Znaleść dwie te liczby.

3. Iloczyn dwóch liczb jest 192, summa kwadratów tychże liczb wynosi 640; jakież są te liczby?

4. Iloczyn dwóch liczb jest 128, a różnica ich kwadratów jest 192; — jakież są te liczby?

5. Iloczyn dwóch liczb jest równy 6 razy wziętéj ich summie, summa zaś ich kwadratów jest 325; znaleść te liczby.

6. Iloczyn dwóch liczb jest równy 60 razy wziętéj ich różnicy, summa kwadratów tychże liczb jest 244; znaleźć te liczby.

7. Summa dwóch liczb jest równa 6 razy wziętéj ich różnicy, a iloczyn tychże liczb jest większy od ich summy o 23; znaleść te liczby.

8. Znaleść dwie liczby takie, aby podwojona pierwsza wraz z potrojoną drugą tworzyła summę równą 60, a podwojony kwadrat pierwszéj wraz z potrojonym kwadratem drugiéj tworzył 840.

9. Różnica dwóch liczb pomnożona przez różnicę ich kwadratów stanowi 32, summa zaś tychże liczb pomnożona przez summę ich kwadratów wynosi 272; znaleść te liczby.

10. Różnica dwóch liczb dodana do różnicy ich kwadratów stanowi summę równą 14, summa zaś tychże liczb wraz z summą ich kwadratów równa się 26; znaleść te liczby.

11. Iloczyn dwóch liczb jest równy ich summie; summa zaś tychże liczb dodana do summy ich kwadratów wynosi 12; — znaleść te liczby.

12. Summa dwóch liczb, powiększona o ich iloczyn wynosi 34, summa zaś kwadratów tychże liczb zmniejszona o ich summę stanowi 42. — Znaleźć te liczby.

13. Różnica dwóch liczb jest 3, a różnica ich sześcianów jest 279; — znaleść te liczby.

14. Summa dwóch liczb jest 20, summa zaś ich sześcianów jest 2240; — znaleść te liczby.

15. Powierzchnia pewnego prostokąta wynosi 300 stóp kwadratowych: drugi prostokąt, którego powierzchnia jest także 300 stóp kwadratowych, jest o 8 stóp krótszy a o 10 stóp szerszy aniżeli pierwszy. Znaleść długość i szerokość każdego z tych prostokątów.

16. Pewna osoba kupiła dwie sztuki sukna różnego gatunku: łokieć pierwszego gatunku był o 2 ruble droższy, aniżeli drugiego gatunku; w sztuce zaś całéj sukna gorszego było o 20 łokci więcéj, aniżeli w sztuce lepszego gatunku. Znaleść ile było łokci sukna w każdéj sztuce, jeżeli za pierwszę sztukę zapłacono 360 rs. a za drugą 320 rs.

17. Podróżny ma do przebycia pewną odległość. Po przejechaniu 40 wiorst chce przyśpieszyć chwilę przybycia do celu, i z tego powodu jedzie o 2 wiorsty więcéj na godzinę aniżeli przedtém. Gdyby jechał przez całą drogę z tą powiększoną prędkością wtedy przybyłby o 30 minut prędzéj; gdyby zaś jechał ciągle aż do końca z początkową prędkością, wtedy przybyłby na miejsce o 20 minut późniéj. Znaleść całą odległość jaką przebył i początkową prędkość.

18. Pewna liczba składa się z dwóch cyfr, jedna znajduje się na miejscu całkowitych, druga zaś na miejscu części dziesiątych. Różnica kwadratów tych cyfr wynosi 20; jeżeli zaś cyfry przestawimy, wtedy summa nowéj liczby i liczby początkowéj wynosić będzie 11. Znaleźć tę liczbę.

19. Handlujący zakupił pewną ilość pszenicy, którą następnie sprzedał z zyskiem 5%, i tym sposobem zarobił na wszystkiém 64 rs. Gdyby sprzedawał korzec téj pszenicy o 1,5 rs. drożéj, aniżeli sam kupował, wtedy zysk na całéj sprzedaży wynosiłby 30 razy wziętą cenę jednego korca pszenicy. Ileż korcy kupił i po ile rubli każdy korzec płacił?

20. Dwaj robotnicy A i B byli najęci do wykonania roboty za płacę dzienną, różną dla każdego

z nich. Po pewnéj liczbie dni robotnik A otrzymuje 48 rs.; robotnik zaś B, który w tym samym przeciągu czasu przez 6 dni nie przychodził do roboty, otrzymał tylko 27 rs. Gdyby robotnik B pracował przez cały ten czas, a robotnik A był nieobecnym przez 6 dni, wtedy otrzymaliby obaj jednakową liczbę rubli. Znaleść liczbę dni pracy i wynagrodzenie dzienne każdego z nich.

21. Dwa pociągi wyjeżdżają w jednéj i téj saméj chwili z dwóch miast i oba jadą ruchem jednostajnym naprzeciwko siebie. Gdy się spotkały, wtedy jeden z nich przejechał o 108 wiorst więcéj, aniżeli drugi. Jeżeli daléj jechać będą z temiż samemi prędkościami, wtedy pierwszy przebędzie pozostałą część drogi w 9 godzin, a drugi w 16 godzin. Znaleść odległość pomiędzy temi dwoma miastami i prędkości z jakiemi pociągi jadą.

22. A i B są to dwa miasta odległe od siebie na 18 wiorst i leżące na tym samym brzegu rzeki. Podróżny udaje się z A do B i przebywa tę odległość w czterech godzinach, płynąc łódką pierwszą połowę drogi, a idąc pieszo drugą połowę. Z powrotem pierwszą połowę drogi idzie pieszo z taką samą prędkością jak przedtém, drugą zaś płynie łódką; lecz ponieważ teraz płynie z wodą, przeto przepływa o $1\frac{1}{2}$ wiorsty na godzinę więcéj, aniżeli w przeciwną stronę i odbywa całą drogę w $3\frac{1}{2}$ godzinach. Znaleść z jakiemi prędkościami szedł i płynął.

23*. Dwa naczynia sześcienne mają razem objętości 407 centymetrów sześciennych. Wysokość jednego z nich dodana do wysokości drugiego, daje na summę 11 centymetrów. Znaleść objętość każdego z tych naczyń.

24. Dwaj podróżni A i B wyruszają z dwóch miast P i Q w téj saméj chwili: — A wychodzi z P z zamiarem przejścia przez Q. B zaś wychodzi z Q i idzie w też samą stronę co i A. Gdy A dogonił B okazało się, że obaj razem przebyli 30 wiorst drogi, dalej: że A przed czterema godzinami przeszedł przez Q, i że B idąc ciągle z tąż samą prędkością z jaką podróżuje, potrzebował by dziewięciu godzin dla dojścia od P do miejsca spotkania się. Znaleść odległość P od Q.

25*. Na przestrzeni 1732,5 metra przednie koło powozu robi o 165 obrotów więcéj aniżeli tylne. Gdybyśmy powiększyli obwód każdego koła o 0,75 metra, wtedy na téj saméj przestrzeni przednie koło zrobiło by o 112 obrotów więcéj, aniżeli tylne. Znaleść długość obwodu każdego z kół.

26*. Pewien gatunek sukna przez zmoczenie wodą kurczy się w długości na $\frac{1}{8}$ część a w szerokości na $\frac{1}{16}$ część. Jak wielka jest długość i szerokość kawałka takiego sukna, który po zmoczeniu skurczył się w ten sposób, że jego powierzchnia stała się mniejszą o 3,68 metra kwadratowego, a obwód zmniejszył się o 3,4 metra?

27*. Partya robotników przeniosła w ciągu 8 godzin stos kamieni z jednego miejsca na drugie. Gdyby było o 8-miu robotników więcéj i gdyby każdy za jednym razem brał o 5 funtów mniéj kamieni, wtedy cały stos byłby przeniesiony w 7-miu godzinach. Gdyby znowuż było o 8-miu robotników mniéj, a każ-

dy za jednym razem brał o 11 funtów więcéj kamieni, wtedy cały stos byłby przeniesiony w 9-iu godzinach. Z ilu robotników składała się partya i ile każdy przenosił?

28*. Procent za pewną liczbę lat od kapitału wypożyczonego na 8%, wynosi razem z kapitałem 2574 rs. Gdyby kapitał był mniejszy o 975 rs. i pozostawał na procencie o $12\frac{1}{2}$ lat dłużéj, aniżeli pierwszy również po 8%, wtedy wraz z procentem zamienił by się na summę także 2574 rs. Jakiż jest pierwszy kapitał i na jak długo był wypożyczony?

29*. Po obwodzie placu mającego kształt trójkąta prostokątnego biegną dwaj chłopcy. Wybiegli oni z wierzchołka kąta prostego *w przeciwnych kierunkach* wzdłuż boków trójkąta, i biegną z prędkościami, których stosunek równa 13:11. Po raz pierwszy spotykają się w samym środku przeciwprostokątnéj; poraz drugi zaś w odległości 20 metrów od wierzchołka kąta prostego. Znaleść podług tych danych długości trzech boków, ograniczających plac.

30*. Bachus znalazł Sylena śpiącego przy dzbanie wina; skorzystał z téj okoliczności i pił wino przez dwie trzecie części tego czasu, przez który Sylen wypróżniłby cały dzban. Gdy Sylen obudził się, wypił resztę, którą zostawił Bachus. Gdyby obaj razem pili od początku, wtedy wypiliby o 2 godziny prędzéj, ale Bachus wypiłby tylko połowę tego wina, które zostawił Sylenowi. W jakim czasie każdy z nich sam wypróżniłby dzban?

31*. Dwa punkta poruszają się ruchem jednostajnym po ramionach kąta prostego *ku* wierzchołkowi. W pewnéj chwili odległość jednego punktu od

wierzchołka wynosi 50 metrów, drugiego zaś $136\frac{1}{2}$ metr. Po 7-miu sekundach odległość tych dwóch punktów *od siebie* wynosi 85 metr., a po 9-iu sekundach — 68 metrów. Znaleść prędkości, z jakiemi poruszają się te dwa punkta.

32*. W proporcyi summa wyrazów średnich wynosi a, summa skrajnych wynosi b a summa kwadratów wszystkich wyrazów równa się c. Napisać tę proporcyą.

XXXV.

Stosunek.

346. Stosunkiem nazywamy wypadek porównania jednéj ilości z drugą pod względem ich wielkości. Do wypadku tego dochodzimy przez uważanie jaką wielokrotnością, lub jaką częścią pierwsza ilość jest względem drugiéj.

Tak naprzykład, porównywając 6 z 3, widzimy że 6 ma pewną wielkość w porównaniu z 3, zawierając je dwa razy: jeżeli toż samo 6 porównywamy z 2 widzimy że 6 ma teraz inną wielkość *względną*, gdyż zawiera 2 trzy razy, czyli 6 jest większe gdy jest porównane z 2, aniżeli gdy jest porównane z 3.

347. Stosunek pomiędzy a i b jest zwykle oznaczany przez dwie kropki, umieszczone pomiędzy niemi w ten sposób: $a:b$; pierwsza ilość nazywa się *poprzednikiem* druga zaś *następnikiem* stosunku.

348. Stosunek wyraża się ułamkiem, który ma za licznik poprzednik stosunku, a za mianownik na-

stępnik stosunku. Tak więc stosunek a do b wyraża się przez $\frac{a}{b}$; z tego powodu dla krótkości możemy powiedzieć, że stosunek a do b jest równym $\frac{a}{b}$, lub jeszcze krócéj, — jest $\frac{a}{b}$.

349. Dla tego możemy powiedzieć, że stosunek a do b jest równym stosunkowi c do d, gdy $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

350. *Stosunek nie zmieni się, jeżeli oba jego wyrazy pomnożymy lub podzielimy przez jednę i tęż samą ilość.*

Gdyż $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$ (§ 135).

351. Aby *porównać* dwa lub więcéj stosunków, należy sprowadzić te ułamki, które je wyrażają, do jednakowego mianownika. Tak naprzykład przypuśćmy, że jeden stosunek jest a do b a drugi c do d; wtedy pierwszy stosunek $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ a drugi $\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$.

Pierwszy stosunek jest większym od stosunku drugiego, lub równym stosunkowi drugiemu, lub mniejszym od niego, stosownie do tego, czy ad jest większe, równe, lub mniejsze od bc.

352. Stosunek nazywa się stosunkiem *większéj nierówności*, *mniejszéj nierówności* lub *równości*, stosownie do tego czy poprzednik jest *większy*, lub *mniejszy od* następnika lub téż *równy* następnikowi.*)

353. *Jeżeli do obu wyrazów stosunku dodamy po jednéj i téjże saméj liczbie, wtedy stosunek większy od jedności przez to zostanie zmniejszony, a stosunek mniejszy od jedności zostanie powiększony.*

Przypuśćmy, że dany stosunek jest $\frac{a}{b}$, utwórzmy nowy stosunek przez dodanie x do obu wyrazów tego stosunku: wtedy $\frac{a+x}{b+x}$ będzie większe lub mniejsze od $\frac{a}{b}$, stosownie do tego, czy $b(a+x)$ jest większe lub mniejsze od $a(b+x)$ czyli stosownie do tego, czy bx jest większe lub mniejsze od ax, lub nakoniec stosownie do tego czy b jest większe lub mniejsze od a.

354. *Jeżeli od obu wyrazów stosunku odejmiemy jednę i tęż samą ilość mniejszą od każdego wyrazu, wtedy stosunek większy od jedności zostanie przez to powiększony, a stosunek mniejszy od jedności zostanie zmniejszony.*

Przypuśćmy, że dany stosunek jest $\frac{a}{b}$; utwórzmy nowy stosunek przez odjęcie x od każdego z wyrazów tego stosunku: wtedy $\frac{a-x}{b-x}$ będzie większe lub mniejsze od $\frac{a}{b}$, stosownie do tego czy $b(a-x)$ jest większe lub mniejsze od $a(b-x)$, czyli stosownie do tego czy bx jest mniejsze lub większe od ax, czyli nakoniec, stosownie do tego czy b jest mniejsze lub większe od a.

355. Jeżeli poprzednik jednego stosunku pomnożymy przez poprzednik drugiego, i następnik

*) Zamiast tych wyrażeń, u nas nie używanych, można mówić: stosunek większy od jedności, równy jedności, lub mniejszy do jedności. T.

pierwszego pomnożymy przez następnik drugiego, wtedy otrzymamy nowy stosunek, który się nazywa *złożonym* ze stosunków danych. Tak naprzykład: stosunek $ac:bd$ nazywa się złożonym z dwóch stosunków $a:b$ i $c:d$.

Gdy, mając dany stosunek $a:b$, za drugi stosunek weźmiemy tenże sam $a:b$ i utworzymy z tych dwóch stosunek złożony, wtedy otrzymamy stosunek $a^2:b^2$; stosunek ten niekiedy nazywa się *dwumnożnym* względem $a:b$. Podobnież $a^3:b^3$ nazywa się niekiedy *trójmnożnym* względem $a:b$.

356. Następujące twierdzenie, odnoszące się do stosunków równych, jest bardzo ważne.

Przypuśćmy, że: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, wtedy każdy z tych stosunków równać się będzie stosunkowi:

$$\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}},$$

gdzie p, q, r są jakiemikolwiek liczbami.

Aby tego dowieść, przypuśćmy, że:

$$k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f},$$

wtedy $kb=a$, $kd=c$, $kf=e$,

przeto:

$$p(kb)^n+q(kd)^n+r(kf)^n=pa^n+qc^n+re^n,$$

skąd:

$$k^n=\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n},$$

a następnie:

$$k=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n}{pb^n+qd^n+rf^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ten sam sposób rozumowania może być zastosowany i wtedy, gdy będzie danych więcéj niż *trzy* stosunki równe, i prowadzi w tym razie do takiegoż samego wypadku.

Jako szczególny przypadek możemy przypuścić że $n=1$; z powyższego widzimy, że jeżeli $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ wtedy każdy z tych stosunków będzie równy $\frac{pa+qc+re}{pc+qd+rf}$ a jeżeli jeszcze przyjmiemy że $p=q=r$, wtedy każdy z danych stosunków będzie równy: $\frac{a+c+e}{b+d+f}$.

PRZYKŁADY XXXV.

1. Znaleść stosunek 14 kopiejek do 2 złotych i 6 groszy.

2. Następujące stosunki ułożyć porządkiem ich wielkości: 3:4; 7:12; 8:9; 2:3; 5:8.

3. Znaleść stosunek złożony z 4:15 i 25:36.

4. Dwie liczby są do siebie w stosunku 2 do 3, jeżeli zaś do każdéj z nich dodamy po 7, wtedy stosunek ten zamieni się na 3:4; znaleść dwie te liczby.

5. Dwie liczby są do siebie w stosunku 4 do 5, jeżeli zaś od każdéj z nich odejmiemy po 6, wtedy stosunek ten zamieni się na 3:4; znaleść te liczby.

6. Dwie liczby są do siebie w stosunku 5 do 8 jeżeli do mniejszéj liczby dodamy 8 a od większéj

odejmiemy 5, wtedy stosunek ten zamieni się na 28:27; znaleść te liczby.

7. Znaleść taką liczbę, którą dodawszy do każdego wyrazu stosunku 5:3 otrzymamy stosunek równy trzem czwartym tego stosunku, jaki otrzymalibyśmy, gdybyśmy tęż samą liczbę odjęli od każdego wyrazu.

8. Znaleść dwie liczby będące do siebie w stosunku 2 do 3, takie, że stosunek ich różnicy do różnicy ich kwadratów jest równy stosunkowi 1 do 25.

9. Znaleść dwie liczby, będące do siebie w stosunku 3 do 4 i takie. że stosunek ich summy do summy ich kwadratów jest równy stosunkowi 7 do 50.

10. Znaleść dwie liczby, będące do siebie w stosunku 5 do 6 i takie, że stosunek ich summy do różnicy ich kwadratów jest równy stosunkowi 1 do 7.

11. Znaleść x w ten sposób, aby stosunek $x:1$ był dwumnożnym względem stosunku $8:x$.

12. Znaleść x w ten sposób, aby stosunek $(a—x):(b—x)$ był dwumnożnym względem stosunku $a:b$.

13. Ma ktoś razem 200 papierków pomiędzy któremi są 25-cio rublowe, 10-cio rublowe i 5-cio rublowe; summy pieniędzy w papierkach 25-ciu rublowych, 10-cio rublowych, i 5-cio rublowych są do siebie w stosunku liczb 25:12.9. Znaleść liczby papierków każdego rodzaju.

14. Znaleść $a:b$. wiedząc, że $b—a:b+a = 4a—b:6a—b$.

XXXVI.

Proporcye.

357. Cztery liczby wtedy stanowią proporcyą, gdy pierwsza jest taką wielokrotnością, lub taką częścią drugiéj, jaką jest trzecia czwartéj. Czyli: gdy $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, wtedy cztery liczby a, b, c i d stanowią proporcyę. Wyrażamy to zwykle mówiąc: a tak się ma do b jak c do d; znakami zaś oznaczamy w ten sposób: $a:b = c:d$ lub $a:b:c:d$.

Wyrazy a i d nazywają się *skrajnemi*, wyrazy b i c *średniemi*.

358. Gdy więc dwa stosunki są równe, wtedy te cztery liczby, które je tworzą, stanowią proporcyę; obecny rozdział jest poświęcony uważaniu dwóch stosunków równych.

359. *W proporcyi iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów średnich.*

Niech będzie dana proporcya:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$

pomnóżmy obie strony téj równości przez bd, otrzymamy:

$$ad = bc.$$

Jeżeli w proporcyi trzy którekolwiek wyrazy są dane, wtedy czwarty możemy znaleść ze związku $ad = bc$.

Jeżeli $b = c$, wtedy będzie $ad = b^2$, to jest: jeżeli jedna liczba jest w takim stosunku do drugiéj,

w jakim druga do trzeciéj, wtedy iloczyn skrajnych jest równy kwadratowi średniéj.

Proporcya $a:b=b:d$ nazywa się *ciągłą*, a b — *średnią proporcyonalną* pomiędzy a i d.

360. *Jeżeli iloczyn dwóch liczb jest równy iloczynowi dwóch innych liczb, wtedy z tych czterech liczb można ułożyć proporcyą, biorąc czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, a czynniki drugiego iloczynu za wyrazy średnie.*

Gdyż jeżeli: $xy=ab$, wtedy, dzieląc te ilości równe przez ay, będzie: $\frac{x}{a}=\frac{b}{y}$,

czyli. $x:b=b:y$. (§ 357).

361. Jeżeli $a:b=c:d$; i $c:d=e:f$, wtedy: $a:b=e:f$.

Gdyż: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, i $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, przeto: $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$, czyli: $a:b=e:f$.

362. *Jeżeli w proporcyi poprzedniki przestawimy na miejsce następników a następniki na miejsce poprzedników wtedy otrzymamy nową proporcyę*, to jest, jeżeli $a:b=c:d$, wtedy będzie i: $b:a=d:c$.

Gdyż, podług założenia: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, podzielmy jedność przez każdą z tych ilości równych: będzie: $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, czyli: $b:a=d:c$.

363. *W proporcyi przestawiwszy wyrazy średnie otrzymamy nową proporcyą;* to jest, jeżeli: $a:b=c:d$, będzie: $a:c=b:d$.

Gdyż podług przypuszczenia $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; mnożąc obie te ilości równe przez $\frac{b}{c}$, otrzymamy: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, czyli: $a:c=b:d$.

364. *W proporcyi summa wyrazów pierwszego stosunku tak się ma do następnika pierwszego stosunku, jak summa wyrazów drugiego stosunku do następnika tegoż drugiego stosunku*; to jest, jeżeli: $a:b=c:d$, będzie i: $a+b:b=c+d:d$.

Gdyż, podług założenia: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; dodajmy po jedności do tych ilości równych, będzie:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1,$$

to jest: $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

czyli: $$a+b:b=c+d:d.$$

365. *W proporcyi: różnica wyrazów pierwszego stosunku tak się ma do następnika pierwszego stosunku jak różnica wyrazów drugiego stosunku do następnika tegoż drugiego stosunku.*

Gdyż: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, odejmijmy po jedności od tych ilości równych, będzie:

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

to jest: $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

czyli: $a-b:b=c-d:d.$

366. *W proporcyi: poprzednik stosunku pierwszego tak się ma do różnicy wyrazów stosunku pierwszego jak poprzednik stosunku drugiego do różnicy wyrazów tego stosunku drugiego.*

Na zasadzie poprzedniego § mamy:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

a że:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

przeto:

$$\frac{a-b}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{c-d}{d}\times\frac{d}{c},$$

czyli:

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c},$$

czyli jeszcze: $a-b:a=c-d:c,$

skąd nakoniec: $a:a-b=c:c-d.$

367. *W proporcyi: summa wyrazów stosunku pierwszego tak się ma do różnicy wyrazów stosunku pierwszego, jak summa wyrazów stosunku drugiego do różnicy wyrazów tegoż stosunku drugiego*, to jest jeżeli:

$$a:b=c:d,$$

wtedy będzie i:

$$a+b:a-b=c+d:c-d.$$

Na zasadzie §§ 364 i 365 jest:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{b},\ \text{i}\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d};$$

skąd:

$$\frac{a+b}{b}:\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}:\frac{c-d}{d},$$

to jest:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

czyli: $a+b:a-b=c+d:c-d.$

368. Poprzednie paragrafy pokazują nam, że jeżeli cztery liczby stanowią jedną proporcyą, wtedy z niéj możemy wyprowadzić jeszcze inne proporcye; patrz także § 356.

369. W określeniu proporcyi przypuściliśmy, że można oznaczyć jaką wielokrotnością, lub jaką częścią jedna ilość jest względem drugiéj tegoż samego gatunku. Lecz nie zawsze możemy to oznaczyć dokładnie. Naprzykład: jeżeli bok kwadratu ma długości jeden cal, wtedy długość przekątnéj tegoż kwadratu będzie wyrażona przez $\sqrt{2}$ cali; — lecz ponieważ $\sqrt{2}$ nie może być dokładnie wyrażony, przeto i stosunek długości przekątnéj kwadratu do boku tegoż kwadratu nie może być dokładnie wyrażony liczbami. Dwie ilości takie, których stosunek nie może być dokładnie wyrażony liczbami, nazywają się *niewspółmiernemi*.

Stosunek pomiędzy dwiema ilościami niewspółmiernemi, jakkolwiek nie może być wyrażony dokładnie, to wszakże może być oznaczony z takim stopniem przybliżenia, jak tylko chcemy. Naprzykład możemy znaleść dwie całkowite z ułamkami, jedną mniejszą od $\sqrt{2}$, drugą większą od $\sqrt{2}$, i różniące się od siebie tak mało jak tylko chcemy.

370. Podamy tu jeszcze jedno twierdzenie, służące do porównania dwóch ilości niewspółmiernych.

Przypuśćmy że x i y oznaczają dwie ilości tego rodzaju, że można znaleść dwie liczby całkowite q i p takie, iż *jakkolwiek wielkie byłoby* q, obie te ilości x i y będą zawsze zawarte pomiędzy: $\frac{p}{q}$ i $\frac{p+1}{q}$; wtedy x i y będą ilościami równemi;

W rzeczy saméj: różnica pomiędzy x i y musi być, podług założenia powyższego, mniejszą od $\frac{1}{q}$; ilość zaś $\frac{1}{q}$ może być uczynioną mniejszą od wszelkiéj ilości dającéj się pomyśléć przez wzięcie q dostatecznie wielkiego. Lecz gdyby x i y były ilościami nierównemi, wtedy różnica pomiędzy niemi nie mogłaby być mniejszą od wszelkiéj ilości dającéj się pomyśléć. Zatém x i y muszą być równémi.

371. Należy nam tu jeszcze porównać określenie proporcyi takie, jakiego użyliśmy w tym rozdziale, z określeniem podaném w 5-éj księdze geometryi Euklidesa. Określenie Euklidesa może być tak wyrażone: Cztery ilości stanowią proporcyą wówczas, gdy: jeżeli weźmiemy jakiekolwiek równe wielokrotne pierwszéj i trzeciéj, a także jakiekolwiek równe wielokrotne drugiéj i czwartéj, wtedy wielokrotna trzeciej jest większą, równą lub mniejszą od wielokrotnéj czwartéj, stosownie do tego, czy wielokrotna pierwszéj jest większa, równa lub mniejsza od wielokrotnéj drugiéj.*)

*) W tłumaczeniu polskiém „Początków Geometryi Euklidesa“ przez Józefa Czecha, wyd. 2-gie Wilno 1817 str. 156 i 157, znajdujemy w następujący sposób oddane określenie Euklidesa:

372. Pokażemy najprzód, że jeżeli cztery ilości zadosyć czynią określeniu algiebraicznemu proporcyi, to zadosyć one czynią także i określeniu Euklidesowemu.

Przypuśćmy bowiem, że $a:b=c:d$; wtedy i $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, skąd $\frac{pa}{qb}=\frac{pc}{qd}$ jakiekolwiek byłyby liczby p i q. Widać z tego, że pc będzie większe, równe lub mniejsze od qd, stosownie do tego czy pa jest większe, równe lub mniejsze od qb. A zatem cztery ilości a, b, c i d zadosyć czynią określeniu Euklidesa.

373. Pokażemy teraz że i odwrotnie, jeżeli cztery ilości zadosyć czynią określeniu Euklidesowemu proporcyi, wtedy zadosyć one czynią także i określeniu algiebraicznemu.

Gdyż przypuśćmy, że a, b, c i d są to cztery ilości takie, iż pc jest większe, równe lub mniejsze od qd, stosownie do tego czy pa jest większe, równe lub mniejsze od qb, *jakiekolwiek byłyby* p i q.

„5. Mówi się, że wielkości są w jednym i tymże samym stosunku, pierwsza do drugiéj i trzecia do czwartéj, kiedy wziąwszy pierwszéj i trzeciéj równie wielokrotne, drugiéj i czwartéj równie wielokrotne; w każdéj odmianie wielokrotnego wielokrotnych powtórzenia, każda z dwóch pierwszych wielokrotnych, każdą z dwóch drugich wielokrotnych, albo razem jedna drugą przewyższa, albo razem jedna drugiéj jest równa, albo razem jedna od drugiéj jest mniejsza, to jest gdy wielokrotna pierwszéj wielkości jest większa, równa lub mniejsza od wielokrotnéj trzeciéj wielkości, jest też wielokrotna drugiéj wielkości większa, równa lub mniejsza od wielokrotnéj czwartéj wielkości.“

„6. Wielkości, które mają jeden i tenże sam stosunek, zowią się proporcyonalne.“ Tł.

Najprzód weźmy pod uwagę ten przypadek, gdy c i d są *współmierne*; biorąc wtedy p i q takie, że $pc = qd$, otrzymamy, podług założenia i $pa = qb$; skąd: $\frac{pa}{qb} = 1$ i $\frac{pc}{qd} = 1$, czyli $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lub $a : b = c : d$.

Powtóre: weźmy pod uwagę ten przypadek, gdy c i d są *niewspółmierne*. Wtedy nie można znaleść takich dwóch liczb całkowitych p i q, aby było: $pc = qd$. Lecz możemy wówczas wziąć jakąkolwiek wielokrotną względem d, naprzykład qd i znaleść odpowiednią wartość całkowitą p taką, aby qd zawierało się pomiędzy dwiema następującémi po sobie wielokrotnościami względem c, mianowicie pc i $(p+1)c$. Tym sposobem $\frac{pc}{qd}$ jest mniejsze od jedności, zaś $\frac{(p+1)c}{qd}$ jest większe od jedności. Stąd więc podług przypuszczenia i $\frac{pa}{qb}$ jest mniejsze od jedności a $\frac{(p+1)a}{qb}$ jest większe od jedności. Zatém oba ułamki $\frac{c}{d}$ i $\frac{a}{b}$ są większe od $\frac{p}{q}$, i oba mniejsze od $\frac{p+1}{q}$. A ponieważ jest to prawdziwem, jakkolwiek wielkie byłyby p i q przeto stąd wnosimy, że $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ nie mogą być nie równe, to jest że muszą one być równe (patrz § 370). Z tego zaś wypada proporcya $a : b = c : d$; czyli, że cztery ilości a, b, c i d zadosyć czynią określeniu algebraicznemu proporcyi.

374. Określenie algiebraiczne proporcyi nie może być właściwie zastosowaném w jeometryi, gdyż niema żadnego sposobu przedstawienia jeometrycznie działania dzielenia. Linie proste mogą być przedstawione jeometrycznie; — lecz nie może być przedstawioną liczba oderwana, pokazująca ile razy jedna linia prosta mieści się w drugiéj. Należy tu zauważyć, że określenie Euklidesa jest zupełnie ścisłe i dające się zastosować zarówno do ilości *niewspółmiernych* jak i *współmiernych*, gdy tymczasem określenie algiebraiczne, ściśle mówiąc, odnosi się tylko do tych ostatnich. Ta jedna uwaga już wystarcza dla uzasadnienia określenia przyjętego przez Euklidesa.

PRZYKŁAD XXXVI.

Znaleść wartość na x z każdéj z następnych proporcyi:

1. $4 : 7 = 8 : x$; 2. $3 : 7 = x : 42$;
3. $5 : x = x : 45$; 4. $x : 9 = 16 : x$;
5. $x+4 : x+2 = x+8 : x+5$.
6. $x+4 : 2x+8 = 2x-1 : 3x+2$;
7. $3x+2 : x+7 = 9x-2 : 5x+8$;
8. $x^2+x+1 : 62(x+1) = x^2-x+1 : 63(x-1)$;
9. $ax+b : bx+a = mx+n : nx+m$;
10. Jeżeli: $pq = rs$, i $qt = su$, wtedy będzie: $p : r = t : u$;
11. Jeżeli $a : b = c : d$ i $a' : b' = c' : d'$, wtedy będzie $aa' : bb' = cc' : dd'$, a także i $ab' : a'b = cd' : c'd$.
12. Jeżeli $a : b = b : c$, wtedy będzie: $(a^2+b^2)(b^2+c^2) = (ab+bc)^2$.

13. Znaleść wyrazy skrajne w proporcyi ciągłej, w której średnim wyrazem jest 60, wiedząc że summa tych wyrazów skrajnych wynosi 125.

14. Znaleść trzy liczby stanowiące proporcyą ciągłą, wiedząc, że ich summa wynosi 19, a summa ich kwadratów równa się 133.

Jeżeli $a:b=c:d$, dowieść, że następujące związki istnieją pomiędzy ilościami a, b, c i d.

15. $a(c+d)=c(a+b)$.

16. $a\sqrt{c^2+d^2}=c\sqrt{a^2+b^2}$.

17. $\dfrac{(a+c)(a^2+c^2)}{(a-c)(a^2-c^2)}=\dfrac{(b+d)(b^2+d^2)}{(b-d)(b^2-d^2)}$.

18. $\dfrac{pa^2+qab+rb^2}{la^2+mab+nb^2}=\dfrac{pc^2+qcd+rd^2}{lc^2+mcd+nd^2}$.

19. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{2b}-\dfrac{1}{3c}+\dfrac{1}{4d}=\dfrac{1}{ad}\left|\dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{3}-\dfrac{c}{2}+d\right|$.

20. $a:b=\sqrt[p]{ma^p+nc^p}:\sqrt[p]{mb^p+nd^p}$.

XXVII.

Proporcyonalność.

375. Ten rozdział zawiera szereg twierdzeń, związanych z określeniami stosunku i proporcyi, wyrażonych w inny sposób, dogodniejszy w niektórych zastosowaniach.

376. Mówi się, że jedna ilość jest *wprost proporcyonalną* do drugiéj, gdy obie te ilości w ten sposób zależą od siebie, że gdy jedna zmienia się, wtedy i druga zmienia się w tym samym stosunku.

Często, dla krótkości, opuszczamy wyraz *wprost* i mówimy że jedna ilość jest proporcyonalną do drugiéj.

377. Tak naprzykład jeżeli wysokość trójkąta pozostanie bez zmiany, wtedy powierzchnia jego jest proporcyonalną do podstawy: gdyż jeżeli podstawa powiększa się lub zmniejsza, wtedy, jak to wiemy z geometryi, powierzchnia powiększa się lub zmniejsza w tym samym stosunku. Ten wypadek możemy wyrazić znakami algiebraicznemi w ten sposób: niech A i a oznaczają *liczby*, przedstawiające powierzchnie dwóch trójkątów, mających wysokość wspólną, i niech B i b oznaczają *liczby*, przedstawiające podstawy tychże trójkątów; wtedy $\dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b}$. Stąd zaś wyprowadzamy $\dfrac{A}{B}=\dfrac{a}{b}$, na zasadzie § 363. Gdybyśmy jeszcze wzięli pod uwagę trójkąt, mający też samą wysokość, co i dwa pierwsze, wtedy znowuż stosunek liczby, wyrażającéj jego powierzchnią, do liczby wyrażającéj jego podstawę będzie równy $\dfrac{a}{b}$. Jeżeli uczynimy $\dfrac{a}{b}=m$, wtedy $\dfrac{A}{B}=m$, i $A=mB$. Tutaj A może przedstawiać powierzchnią *któregokolwiek* z szeregu trójkątów, mających wspólną wysokość, B odpowiednią podstawę, a m ilość stałą. Stąd, to twierdzenie, że powierzchnia jest proporcyonalną do podstawy, może być także wyrażone w ten sposób: stosunek powierzchni do podstawy jest stały; pod którém to wyrażeniem rozumiemy, że stosunek

liczby, przedstawiającéj powierzchnią, do *liczby* przedstawiającéj podstawę jest jeden i ten sam.

Te uwagi mają na celu wyjaśnienie notacyi i sposobów mówienia, używanych w obecnym rozdziale. Gdy mówimy, że A jest proporcyonalne do B wtedy pod tém wyrażeniem rozumiemy, że A przedstawia liczebną wartość któréjkolwiek z szeregu ilości, a B liczebną wartość odpowiedniéj ilości z pewnego innego szeregu, i że $A=mB$, gdzie m jest liczbą stałą dla każdéj odpowiadającéj pary ilości.

Należy tu podać dowód zupełny związku $A=mB$, wyprowadzony z określenia w § 376.

378. *Jeżeli A jest proporcyonalne do B, wtedy A jest równe B pomnożonemu przez pewną liczbę stałą.*

W rzeczy saméj: niech a i b oznacza jedną parę odpowiadających wartości dwóch ilości i niech A i B oznacza inną jakąkolwiek parę; wtedy, podług określenia, będzie $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}$. Stąd: $A=\frac{a}{b}B=mB$,

gdzie m jest równe ilości stałéj $\frac{a}{b}$.

379. Do oznaczenia proporcyonalności używa się znaku ∞; tym sposobem $A\infty B$ wyraża, że *A jest proporcyonalne do B.*

380. Mówi się, że ilość jest *odwrotnie* proporcyonalną do drugiéj ilości, gdy pierwsza jest proporcyonalną do *odwrotności* drugiéj. Patrz § 273.

Albo: jeżeli $A=\frac{m}{B}$, gdzie m jest stałe, wtedy A jest odwrotnie proporcyonalne do B.

381. Mówi się, że jedna ilość jest proporcyonalną do dwóch innych gdy, skoro pierwsza zmieni się w pewien sposób, wtedy i iloczyn dwóch innych zmieni się w tymże samym stosunku.

Lub: jeżeli $A=mBC$, gdzie m jest ilością stałą, wtedy mówimy, że A jest proporcyonalne do B i C.

382. Mówi się, że jedna ilość jest *wprost* proporcyonalną do drugiéj i jednocześnie *odwrotnie* proporcyonalną do trzeciéj, gdy zmienia się ona proporcyonalnie do iloczynu z drugiéj przez odwrotność trzeciéj.

Albo: jeżeli $A=\frac{mB}{C}$, gdzie m jest stałe, wtedy mówimy, że A jest wprost proporcyonalne do B a odwrotnie proporcyonalne do C.

383. *Jeżeli*: $A\infty B$, i $B\infty C$, wtedy będzie i $A\infty C$.

Gdyż niech będzie $A=mB$, i $B=nC$, gdzie m i n są stałemi; wtedy $A=mnC$; a ponieważ mn jest stałem, przeto $A\infty C$.

384. *Jeżeli*: $A\infty C$ i $B\infty C$, *wtedy będzie*: $A\pm B\infty C$, i $\sqrt{AB}\infty C$.

Gdyż niech będzie $A=mC$ i $B=nC$, gdzie m i n są stałemi; wtedy $A\pm B=(m\pm n)C$, przeto $A\pm B\infty C$.

A także: $\sqrt{AB}=\sqrt{mnC^2}=C\sqrt{mn}$; zatém $\sqrt{AB}\infty C$.

385. *Jeżeli* $A\infty BC$, *wtedy*: $B\infty\frac{A}{C}$ i $C\infty\frac{A}{B}$.

Gdyż niech będzie: $A=mBC$; wtedy $B=\frac{1}{m}\cdot\frac{A}{C}$,

przeto $B\infty\frac{A}{C}$.

Podobnież: $C \propto \frac{A}{B}$.

386. *Jeżeli* $A \propto B$, i $C \propto D$, *wtedy*: $AC \propto BD$. Gdyż niech będzie $A = mB$ i $C = nD$; wtedy: $AC = mnBD$; a przeto $AC \propto BD$.

Podobnież: jeżeli $A \propto B$, $C \propto D$ i $E \propto F$, wtedy: $ACE \propto BDF$; i tak daléj.

387. *Jeżeli*: $A \propto B$, *wtedy* i: $A^n \propto B^n$.

Gdyż niech będzie: $A = mB$, wtedy i: $A^n = m^n B^n$, przeto $A^n \propto B^n$.

388. *Jeżeli* $A \propto B$, *wtedy* $AP \propto BP$, *gdzie* P *jest jakąkolwiek ilością stałą lub zmienną.*

Gdyż niech będzie $A = mB$, wtedy $AP = mPB$; przeto $AP \propto BP$.

389. *Jeżeli*: $A \propto B$, *gdy* C *jest niezmienne, i* $A \propto C$, *gdy* B *jest niezmienne, wtedy* $A \propto BC$, *gdy i* B *i* C *zmieniają się jednocześnie.*

Zmiana ilości A zależy od zmian dwóch ilości B i C; przypuśćmy, że odmiany tych ostatnich ilości mają miejsce oddzielnie i kolejno. Gdy B zmienia się na b, przypuśćmy, że A zmienia się na a'; wtedy, podług założenia: $\frac{A}{a'} = \frac{B}{b}$. Przypuśćmy teraz, że C zmieni się na c i wskutek tego a' zmienia się na a, wtedy znowuż, podług założenia będzie: $\frac{a'}{a} = \frac{C}{c}$. Przeto: $\frac{A}{a'} \times \frac{a'}{a} = \frac{B}{b} \times \frac{C}{c}$, czyli: $\frac{A}{a} = \frac{BC}{bc}$, skąd: $A \propto BC$.

Bardzo dobry przykład tego twierdzenia przedstawia nam jeometrya. Można dowieść, że powierzchnia trójkąta jest proporcyonalną do podstawy, gdy wysokość jego pozostaje niezmienną, i znowuż, że taż sama powierzchnia jest proporcyonalną do wysokości, gdy podstawa pozostaje niezmienną. Stąd wypada, że jeżeli i podstawa i wysokość zmieniają się, wtedy powierzchnia zmienia się proporcyonalnie do iloczynu z liczb, przedstawiających podstawę i wysokość.

Inne przykłady zastosowania tego twierdzenia przedstawiają nam zadania, przytrafiające się w Arytmetyce w rozdziale o regule trzech składanéj. Przypuśćmy naprzykład, że wielkość roboty wykonanéj jest proporcyonalną do liczby użytych robotników w danym czasie, i że jest znowuż proporcyonalną do czasu przy danéj liczbie robotników; wtedy wielkość roboty będzie proporcyonalną do iloczynu z liczby robotników przez czas, gdy obie te ilości ulegają zmianie.

390. Podobnież gdyby było ilekolwiek ilości B, C, D .... z których każda zmienia się proporcyonalnie do pewnéj ilości A wtedy gdy wszystkie inne pozostałe zatrzymują tęż samą wartość, wówczas w tym przypadku, gdy one wszystkie się zmieniają, A zmieniać się będzie proporcyonalnie do ich iloczynu.

PRZYKŁADY XXXVII.

1. A jest proporcyonalne do B; $A = 3$ wtedy, gdy $B = 1$, znaleść wartość A wtedy, gdy $B = 2$.

2. Gdy $A^2 + B^2$ jest proporcyonalne do $A^2 - B^2$ dowieść, że $A + B$ jest proporcyonalne do $A - B$.

3. $3A+5B$ jest proporcyonalne do $5A+3B$, i $A=5$ gdy $B=2$; znaleść stosunek $A:B$.

4. A jest proporcyonalne do $nB+C$, i $A=4$ wtedy, gdy $B=1$, a $C=2$; i daléj: $A=7$, gdy $B=2$ a $C=3$; znaleść n.

5. A jest proporcyonalne do B i C jednocześnie i $A=1$, gdy $B=1$ i $C=1$. Znaleść wartość A, gdy $B=2$, i $C=2$.

6. A jest proporcyonalne do B i C jednocześnie i $A=8$, gdy $B=2$ i $C=2$. Znaleść wartość BC, gdy $A=10$.

7. A jest proporcyonalne do B i C jednocześnie, i $A=12$, gdy $B=2$, a $C=3$. Znaleść wartość stosunku $A:B$, gdy $C=4$.

8. A jest proporcyonalne do A i C jednocześnie, i $A=a$, gdy $B=b$, i $C=c$. Znaleść wartość A, gdy $B=b^2$ i $C=c^2$.

9. A jest wprost proporcyonalne do B a odwrotnie proporcyonalne do C, i $A=a$, gdy $B=b$, a $C=c$. Znaleść wartość A gdy $B=c$, a $C=b$.

10. Wydatki pewnéj instytucyi dobroczynnéj są w części stałe, w części zaś proporcyonalne do liczby osób korzystających z wsparcia. Gdy z wsparcia korzystało osób 960, wtedy wydatki wynosiły 1120 rs., gdy zaś liczba korzystających z wsparcia była 3000, wtedy wydatki wynosiły 1800 rs. Znaleść jaki wydatek byłby, gdyby liczba osób była 1000.

11. Zapłata 5 robotnikom za 7 tygodni pracy wynosiła 175 rs.; iluż robotników można wynająć za 300 rs. na 4 tygodnie?

12. Koszt budowy muru jest proporcyonalny do długości tegoż muru, gdy jego wysokość i grubość pozostają niezmienne; jest proporcyonalny do wysokości muru, gdy długość i grubość jego pozostają niezmienne; i nakoniec jest proporcyonalny do grubości, gdy długość i wysokość jego pozostają też same. Przy tych warunkach, jaki będzie koszt wybudowania muru długiego na 62 stopy, wysokiego na 8 stóp i grubego na 3 stopy, jeżeli wiemy, że wybudowanie muru długiego na 50 stóp, wysokiego na 9 stóp i grubego na $2\frac{1}{2}$ stopy kosztowało 3185 rs.

XXXVIII.

Postęp różnicowy.

391. Szereg liczb tworzy wtedy postęp różnicowy, czyli arytmetyczny, gdy każda z nich jest równa poprzedniéj, powiększonéj lub zmniejszonéj o jedną i tęż samą ilość, zwaną *różnicą* lub *wykładnikiem* postępu.

Tak np. następujące szeregi tworzą postępy różnicowe:

2, 5, 8, 11, 14 . . . . .

20, 18, 16, 14, 12 . . . . .

a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, $a+4b$ . . . . .

Różnicę, czyli wykładnik w postępie znajdujemy, odejmując którykolwiek wyraz od następnego. W pier-

wszym szeregu wykładnikiem jest 3, w drugim —2, w trzecim b.

392. Niech a oznacza wyraz pierwszy postępu różnicowego, b zaś jego wykładnik. Wtedy drugim wyrazem będzie $a+b$, trzecim $a+2b$, czwartym $a+3b$ i tak daléj. Przeto w ogólności n-ty wyraz będzie $a+(n-1)b$.

393. *Mając dany wyraz pierwszy i wykładnik postępu arytmetycznego, znaleść summę danéj liczby wyrazów tegoż postępu.*

Niech a oznacza wyraz pierwszy, b wykładnik, n liczbę wyrazów, l wyraz ostatni i s summę wyrazów. Wtedy:

$$s=a+(a+b)+(a+2b)+\ldots+l$$

Oczywiście otrzymamy tęż samą summę pisząc szereg w odwrotnym porządku; będzie:

$$s=l+(l-b)+(l-2b)+\ldots+a.$$

Dodając tak znalezione wyrażenia, miéć będziemy:

$$2s=(l+a)+(l+a)+\ldots \text{ do } n \text{ wyrazów}$$

czyli: $$2s=n(l+a),$$

skąd: $$s=\frac{n}{2}(l+a) \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

A że: $$l=a+(n-1)b \quad . \quad . \quad (2).$$

przeto: $$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\} \quad . \quad . \quad (3).$$

Równanie (3) daje wartość na s, wyrażoną za pomocą ilości, które podług zagadnienia były dane. Równanie (1) daje dogodne wyrażenie na s; — z niego

otrzymujemy następujące twierdzenie: *summa wyrazów postępu arytmetycznego jest równą iloczynowi z liczby wyrazów przez połowę summy wyrazów skrajnych.*

Zastosujemy teraz równania, znalezione w tym rozdziale do rozwiązania niektórych zadań, dotyczących postępów różnicowych.

394. Znaleść summę 20 wyrazów postępu:

$$1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$$

Tutaj $a=1$, $b=1$, $n=20$; przeto:

$$s=\frac{20}{2}(2+19)=10\times 21=210.$$

395. Znaleść summę 20 wyrazów szeregu

$$1, 3. 5, 7 \ldots.$$

Tutaj $a=1$, $b=2$, $n=20$, zatém:

$$s=\frac{20}{2}(2+19\times 2)=\frac{20}{2}\times 40=20^2=400.$$

595_1. Toż samo zadanie w ogólności da się tak wyrazić: Znaleść summę n wyrazów postępu:

$$1, 3, 5, 7 \ldots\ldots l$$

stanowiącego szereg liczb nieparzystych, zaczynając od 1.

Na zasadzie wzoru (2) § 393 mamy:

$$l=1+2(n-1)=2n-1,$$

Będzie więc:

$$s=\frac{n}{2}[1+2n-1]=\frac{n}{2}\times 2n,$$

czyli: $$s=n^2.$$

396. Znaleść summę 12 wyrazów postępu:

$$20,\ 18,\ 16 \ldots\ldots$$

Tutaj: $a=20,\ b=-2,\ n=12,$ przeto:

$$s=\frac{12}{2}(40-2\times 11)=6(40-22)=6\times 18=108.$$

397. Znaleść summę 8 wyrazów postępu:

$$\frac{1}{12},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3} \ldots\ldots$$

Tutaj: $a=\frac{1}{12},\ b=\frac{1}{12},\ n=8,$

przeto: $s=\frac{8}{2}\left\{\frac{2}{12}+\frac{7}{12}\right\}=4\times\frac{9}{12}=3.$

398. Ile wyrazów postępu:

$$15,\ 12,\ 9 \ldots.$$

należy wziąć aby summa ich była równą 42?

Tutaj $s=42.\ a=15,\ b=-3;$ przeto:

$$42=\frac{n}{2}\{30-3(n-1)\}=\frac{n}{2}(33-3n).$$

Mamy więc n znaleść z tego równania stopnia drugiego: rozwiązując je otrzymamy: $n=4$, lub $n=7$. Postęp żądany jest 15, 12, 9, 6, 3, 0, —3., i z niego widzimy, że zarówno otrzymujemy summę 42 z czterech jego pierwszych wyrazów jak i z siedmiu wyrazów.

399. Pomiędzy dwie liczby, 11 i 23 wstawić pięć liczb średnich arytmetycznych,

Tutaj należy otrzymać postęp arytmetyczny, złożony z *siedmiu* wyrazów, zaczynający się od 11 a kończący się na 23. Będzie więc w tym przypadku: $a=11,\ l=23,\ n=7$; równanie przeto (2) § 393 da nam:

$$23=11+6b,$$

skąd: $b=2.$

Cały postęp będzie przeto: 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23.

PRZYKŁADY XXXVIII.

Znaleść summę następujących szeregów:

1. $100,\ 101,\ 102 \ldots\ldots$ 9 wyrazów.
2. $1,\ 2\frac{1}{2},\ 4 \ldots\ldots\ldots$ 10 wyrazów.
3. $1,\ 2\frac{2}{3},\ 4\frac{1}{3} \ldots\ldots\ldots$ 9 wyrazów.
4. $2,\ 3\frac{3}{4},\ 5\frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots$ 12 wyrazów.
5. $\frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ 1 \ldots\ldots\ldots$ 18 wyrazów.
6. $\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{11}{6} \ldots\ldots$ 15 wyrazów.

7. Pomiędzy 12 i 20 wstawić 3 średnie arytmetyczne.

8. Pomiędzy 14 i 16 wstawić 5 liczb średnich arytmetycznych.

9. Pomiędzy 8 i —4 wstawić 7 średnich arytmetycznych.

10. Pomiędzy -1 i 5 wstawić 8 średnich arytmetycznych.

11. Pierwszy wyraz postępu arytmetycznego jest 13, drugi 11, summa równa się 40: znaleść liczbę wyrazów.

12. Wyraz pierwszy postępu arytmetycznego jest 5, wyraz piąty zaś 11: znaleść summę 8 wyrazów.

13. Summa czterech wyrazów postępu arytmetycznego jest 44, ostatni z tych wyrazów jest 17: napisać ten postęp.

14. Summa trzech liczb, stanowiących postęp arytmetyczny jest 21, a summa kwadratów tychże liczb jest 155: znaleść te liczby.

15. Summa pięciu liczb, stanowiących postęp arytmetyczny, wynosi 15, a summa kwadratów tychże liczb jest 55. Znaleść te liczby.

16. Siódmy wyraz postępu arytmetycznego jest 12, dwunasty zaś wyraz jest 7; summa wyrazów tegoż postępu jest 171: znaleść liczbę wyrazów.

17. Podróżny ma przebyć drogę 140 wiorst. Pierwszego dnia przechodzi 26 wiorst, drugiego 24 wiorsty, trzeciego 22 wiorsty i t. d. W iluż dniach odbędzie całą drogę?

18. Osoba A wychodzi z pewnego miejsca i przechodzi po $2\frac{1}{2}$ wiorsty na godzinę. W trzy godziny późniéj z tegoż samego miejsca wychodzi druga osoba B, idzie w tym samym kierunku i przechodzi 3 wiorsty w ciągu pierwszéj godziny, $3\frac{1}{2}$ w ciągu drugiéj, 4 w ciągu trzeciéj i t. d. W ilu godzinach B dogoni A

19. Summa trzech liczb stanowiących postęp arytmetyczny jest 12, summa ich kwadratów 66; — znaleść te liczby.

20. Jeżeli summa n pierwszych wyrazów postępu arytmetycznego jest zawsze n^2 (jakiekolwiek byłoby n) znaleść wyraz pierwszy i wykładnik.

21*. Wyraz stojący na miejscu p w postępie różnicowym równa się n, wyraz stojący na miejscu q w tymże samym postępie jest równy u, liczba zaś wszystkich wyrazów jest n. Znaleść wykładnik, wyraz pierwszy, wyraz ostatni i summę wyrazów tegoż postępu.

22*. Mam tyle orzechów, że z nich mogę ułożyć trójkąt równoboczny pełny. Dostałem następnie jeszcze tyle orzechów ile już miałem, i z nowéj téj ilości orzechów ułożyłem kwadrat pełny, którego bok zawierał tyle orzechów, ile ich zawierał bok trójkąta. Po takiem ułożeniu wszystkich orzechów, okazało się, że pozostało mi jeszcze 20 orzechów. Ileż miałem orzechów z początku?

23*. Pewna osoba rozpoczyna grę na takich warunkach, że w razie wygrania partyi, odbiera z banku 14 razy wziętą stawkę. Na pierwszą partyę stawia 1 rs., którego przegrywa, na drugą 2 rs., które także przegrywa, na trzecią 3 rs., które również przegrywa, i t. d., na każdą następną partyę powiększa stawkę o jednego rubla. Po pewnéj liczbie partyj wygrywa w końcu, i to tyle, że to co wygrała wynosiło ściśle taką summę jaką we wszystkich partyach do banku wniosła. Ileż partyj grała?

XXXIX.

Postęp ilorazowy czyli gieometryczny.

400. Szereg liczb z których każda równa się poprzedniej pomnożonéj przez pewien czynnik stały, nazywa się postępem ilorazowym, czyli gieometrycznym. Ten czynnik stały nazywa się *wykładnikiem* postępu.

Podług tego określenia następujące szeregi liczb są postępami jeometrycznemi:

1, 3, 9, 27, 81 . . . . .

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ . . . . .

a, ar, ar^2, ar^3, ar^4 . . . . .

Wykładnik w postępie można znaleść przez podzielenie któregokolwiek wyrazu przez bezpośrednio poprzedzający go. W pierwszym przykładzie wykładnikiem jest 3, w drugim $\frac{1}{2}$, w trzecim r.

401. Niech a oznacza wyraz pierwszy postępu gieometrycznego, a r wykładnik; wtedy drugim wyrazem będzie ar, — trzecim ar^2, — czwartym ar^3 i tak daléj; n tym wyrazem będzie ar^{n-1}.

402. *Znaleść summę danéj liczby wyrazów postępu ilorazowego, gdy są wiadome wyraz pierwszy i wykładnik postępu.*

Niech a oznacza wyraz pierwszy, r wykładnik, n liczbę wyrazów, a s summę wyrazów. Wtedy:

$$s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{n-1}.$$

skąd:

$$sr = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Przez odjęcie pierwszéj równości od drugiéj otrzymamy:

$$sr - s = ar^n - a,$$

skąd:
$$s = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \ldots\ldots (1).$$

Jeżeli l oznacza wyraz ostatni, wtedy mieć będziemy:

$$l = ar^{n-1} \ldots\ldots (2),$$

i:
$$s = \frac{rl - a}{r-1} \ldots\ldots (3).$$

Równanie (1) daje wartość na s, wyrażoną za pomocą tych ilości, które podług wysłowienia zadania są wiadome. Równanie (3) daje téż samą wartość wyrażoną w dogodniejszej postaci do rachunku w niektórych przypadkach.

Zastosujemy teraz te równania do rozwiązania niektórych zadań odnoszących się do postępów ilorazowych.

403. Znaleść summę 6 wyrazów szeregu: 1, 3, 9, 27 . . . .

Tutaj $a = 1$, $r = 3$, $n = 6$, przeto:

$$s = \frac{3^6-1}{3-1} = \frac{729-1}{3-1} = 364.$$

404. Znaleść summę 6 wyrazów szeregu 1, —3, 9, —27 . . . . .

Tutaj; $a = 1$, $r = -3$, $n = 6$; przeto:

$$s=\frac{(-3)^6-1}{-3-1}=\frac{729-1}{-4}=-182.$$

405. Znaleść summę 8 wyrazów szeregu 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$....

Tutaj: $a=4$, $r=\frac{1}{2}$; $n=8$; przeto:

$$s=\frac{4\left(\frac{1}{2^8}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=\frac{4\left(1-\frac{1}{2^8}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{64}\times\frac{2}{1}=\frac{255}{32}.$$

406. Znaleść summę 7 wyrazów szeregu: 8, -4, 2, -1, $\frac{1}{2}$ . . . . .

Tutaj $a=8$, $r=-\frac{1}{2}$, $n=7$; przeto:

$$s=\frac{8\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^7-1\right]}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{8\left(-\frac{1}{128}-1\right)}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{129}{16}\times\frac{2}{3}=\frac{43}{8}.$$

407. Wstawić trzy liczby średnie gieometryczne pomiędzy 2 i 32.

Tutaj należy nam znaleść postęp ilorazowy, zawierający *pięć* wyrazów, zaczynający się od 2, a kończący się na 32. W zadaniu tém więc: $a=2$, $l=32$, $n=5$; na zasadzie równania (2) § 402:

$$32=2r^4,$$

czyli: $$r^4=16=2^4,$$

skąd: $$r=2.$$

Żądany szereg jest więc: 2, 4, 8, 16, 32.

408. Wartość na s, znalezioną w § 402 możemy napisać tak:

$$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Przypuśćmy że r jest *mniejsze od jedności*. Wtedy im większe będzie n, tém mniejsze będzie r^n: i, biorąc n dostatecznie wielkie, możemy uczynić r^n tak małém, jak tylko chcemy. Opuszczając r^n otrzymamy:

$$s=\frac{a}{1-r}.$$

Wypadek, otrzymany wyżéj, możemy wyrazić w ten sposób: *W postępie gieometrycznym, w którym wykładnik jest liczebnie mniejszy od jedności, możemy wziąć zawsze dostateczną liczbę wyrazów tak, że summa ich będzie się różnić tak mało, jak tylko chcemy od* $\frac{a}{1-r}$.

409. Naprzykład: weźmy szereg: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ ...

Tutaj $a=1$, $r=\frac{1}{2}$, przeto $\frac{a}{1-r}=2$. Biorąc dostateczną liczbę wyrazów tego szeregu, możemy summę ich uczynić tak mało różniącą się od 2, jak tylko chcemy. I w rzeczy saméj: jeżeli weźmiemy *cztery* wyrazy, otrzymamy na summę $2-\frac{1}{8}$, jeżeli weźmiemy *pięć* wyrazów, wtedy summa ich będzie: $2-\frac{1}{16}$; jeżeli *sześć* wyrazów, wtedy summa będzie $2-\frac{1}{32}$ i tak daléj.

Wypadek powyższy wyraża się niekiedy dla krótkości w następujący sposób: *summa nieskończonéj liczby wyrazów tego szeregu jest* 2, lub jeszcze krócéj *summa wyrazów do nieskończoności jest* 2.

410. Ułamki peryodyczne przedstawiają nam przekład tego, co nazywamy postępem gieometrycznym nieskończonym. Tak np. 0,3242424.... oznacza toż samo, co:

$$\frac{3}{10}+\frac{24}{10^3}+\frac{24}{10^5}+\frac{24}{10^7}+\ldots\ldots$$

Tutaj wyrazy po $\frac{3}{10}$ tworzą postęp gieometryczny, którego pierwszym wyrazem jest: $\frac{24}{10^3}$, a wykładnikiem $\frac{1}{10^2}$. Stąd możemy powiedzieć, że summa nieskończonéj liczby wyrazów tego szeregu jest: $\frac{24}{10^3} : \left(1-\frac{1}{10^2}\right)$, to jest: $\frac{24}{990}$. Przeto wartość całego ułamku peryodycznego będzie $\frac{3}{10}+\frac{24}{990}$.

W praktyce możemy najprościéj znaleść wartość ułamku peryodycznego w ten sposób:

Niech: $s = 0{,}32424\ldots\ldots$

wtedy: $10s = 3{,}2424\ldots\ldots$

i: $1000s = 324{,}2424\ldots\ldots$

stąd, przez odjęcie drugiéj równości od trzeciéj,

będzie: $(1000-10)s = 324-3 = 321$,

i następnie: $s = \frac{321}{990}$.

Każde inne zadanie może być rozwiązane w podobny sposób.

PRZYKŁADY XXXIX.

Zsumować następujące postępy:

1. 1, 4, 16 ..... do 6 wyrazów.
2. 9, 3, 1 ..... do 5 wyrazów.
3. 25, 10, 4 ..... do 4 wyrazów.
4. $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$ ..... do 12 wyrazów.
5. $\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ ..... do 6 wyrazów.
6. $\frac{2}{3}, -1, \frac{3}{2}$ ..... do 7 wyrazów.
7. $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$ ..... do nieskończoności.
8. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}$ ..... do nieskończoności.
9. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ..... do nieskończoności.
10. $6, -2, \frac{3}{2}$ ..... do nieskończoności.

Znaleść wartości następujących ułamków peryodycznych.

11. 0,151515 .....
12. 0,123123123 .....

13. 0,4282828 . . . . .

14. 0,28131313 . . . . .

15. Wstawić 3 średnie gieometryczne pomiędzy 1 i 256.

16. Wstawić 4 średnie gieometryczne pomiędzy $5\frac{1}{3}$ i $40\frac{1}{2}$.

17. Wstawić 4 średnie gieometryczne pomiędzy 3 i -729.

18. Summa trzech liczb, stanowiących postęp gieometryczny jest 63, różnica pierwszego i trzeciego wyrazu tego postępu jest 45; znaleźć te trzy liczby.

19. Summa czterech pierwszych wyrazów postępu gieometrycznego jest 40, a summa ośmiu pierwszych wyrazów tegoż postępu jest 3280; napisać ten postęp.

20. Summa trzech wyrazów postępu gieometrycznego jest 21, summa kwadratów tychże wyrazów jest 189; znaleść te wyrazy.

21*. W postępie ilorazowym wyraz pierwszy $a=\frac{1}{8}$, wyraz ostatni $l=1024$, liczba wyrazów $n=14$ znaleść summę wyrazów s i wykładnik r.

22*. Znaleść wykładnik r w postępie ilorazowym, gdy $a=20$, $n=3$, $s=95$.

23*. W postępie ilorazowym wyraz pierwszy jest p, wyraz drugi jest q; — znaleść wyraz, stojący na miejscu n, oraz summę n wyrazów. Czemu się równać będzie summa nieskończonéj liczby wyrazów tegoż postępu, w przypadku gdy $p>q$?

24*. Znaleść summę $x^9+x^8y+x^7y^2+\ldots\ldots+xy^8+y^9$.

25*. Znaleść summę:

$$p\sqrt{p^3}-p\sqrt{p}\cdot\sqrt[4]{q}+p\sqrt[4]{p}\cdot\sqrt{q}-p\sqrt[4]{q^3}+q\sqrt[4]{p^3}-$$
$$-q\sqrt[4]{q}\sqrt{p}+q\sqrt{q}\cdot\sqrt[4]{q}-q\sqrt[n]{q^3}.$$

26*. Pierwszy wyraz postępu ilorazowego, składającego się z 5 wyrazów jest x^2, drugi zaś $x\sqrt{xy}$; znaleść trzy pozostałe wyrazy, oraz summę tegoż postępu.

27*. Znaleść summę n wyrazów postępu:

$$(a^2-b^2)+(a+b)+\frac{a+b}{a-b}+\ldots\ldots$$

28*. Znaleść summę n wyrazów postępu:

$$\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}+\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2+\ldots\ldots$$

29*. Mając wiadomy stosunek średniéj arytmetycznéj i średniéj geometrycznéj dwóch liczb, znaleść stosunek samychże tych liczb.

30*. Opowiadają, że grę w szachy wynalazł Sessa Ebu Daher, dla zabawy pewnego króla w Indyach, nazwiskiem Shehram. Ten ostatni, chcąc wynagrodzić odpowiednio wynalazcę za grę, która mu się bardzo podobała, pozostawił jemu samemu wybór nagrody. Wynalazca za całą nagrodę prosił tyle pszenicy, ile wypadnie, jeżelibyśmy położyli na pierwszem polu szachownicy 1 ziarno, na drugiem 2 ziarna, na trzeciem 4 ziarna i tak daléj aż do ostatniego 64 pola, zawsze na każde następne pole kładąc dwa razy więcéj ziarn pszenicy aniżeli ich było na po-

przedniem. Królowi wydała się to zbyt mała nagroda. Z tém wszystkiem okazało się po obliczeniu, że taka nagroda o wiele przechodziła możność króla. Jakaż była ilość żądanéj pszenicy?

31*. Z punktu wziętego na jedném ramieniu kąta, mającego 60° spuszczono prostopadłą do drugiego ramienia kąta, ze spodka tej prostopadłéj znowuż poprowadzono prostopadłą do pierwszego ramienia, ze spodka téj drugiéj prostopadłéj spuszczono prostopadłą do drugiego ramienia kąta i tak daléj do nieskończoności. Znaleść czemu się równa summa tych wszystkich prostopadłych, jeżeli wiemy, że pierwsza ma m metrów.*)

XL.

Postęp harmonijny.

411. Trzy liczby A, B, C, są wtedy *w postępie harmonijnym*, gdy pomiędzy niemi zachodzi związek, wyrażony następną proporcyą:

$$A : C = A - B : A - C$$

Liczba B nazywa się *średnią harmonijną* pomiędzy A i C.

*) Do rozwiązania tego zagadnienia, potrzeba najprzód dowieść takie twierdzenie: W trójkącie prostokątnym, w którym jeden kąt ostry jest dwa razy większy od drugiego, przyprostokątna mniejsza jest równą połowie przeciwprostokątnéj. T.

Szereg liczb wtedy stanowi postęp harmonijny, gdy każde trzy liczby po sobie następujące, są w postępie harmonijnym.

412. *Ilości odwrotne* *) *względem liczb, stanowiących postęp harmonijny tworzą postęp arytmetyczny.*

Niech będą liczby A, B i C w postępie harmonijnym: wtedy podług określenia, pomiędzy niemi zachodzi taki związek: $A : C = A - B : B - C$. Stąd wypada, że $A(B - C) = C(A - B)$. Dzieląc obie strony równości przez ABC, otrzymamy:

$$\frac{1}{C} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B} - \frac{1}{A}.$$

Ta ostatnia równość jest dowodem powyższego twierdzenia.

413. Własność, dowiedziona w poprzednim §., daje nam możność rozwiązania niektórych zadań, odnoszących się do postępów harmonijnych. Naprzykład: pomiędzy $\frac{2}{3}$ i $\frac{8}{15}$ wstawić pięć liczb średnich harmonijnych. W celu rozwiązania zadania należy tylko wstawić pomiędzy $\frac{3}{2}$ i $\frac{15}{8}$ pięć liczb średnich *arytmetycznych*.

Na zasadzie więc równania (2), § 393, będzie:

$$\frac{15}{8} = \frac{3}{2} + 6b,$$

skąd:

$$6b = \frac{3}{8},$$

*) Patrz § 273.

a następnie: $b=\frac{1}{16}$.

Szukany więc postęp arytmetyczny będzie taki: $\frac{3}{2}, \frac{25}{16}, \frac{26}{16}, \frac{27}{16}, \frac{28}{16}, \frac{29}{16}, \frac{15}{8}$; stąd wypadnie postęp harmonijny żądany:

$$\frac{2}{3}, \frac{16}{25}, \frac{16}{26}, \frac{16}{27}, \frac{16}{28}, \frac{16}{29}, \frac{8}{15}.$$

414. Oznaczmy przez a i c dwie jakiekolwiek ilości, przez A ich średnią arytmetyczną, przez G ich średnią gieometryczną, a przez H ich średnią harmonijną. Wtedy będzie:

$$A-a=c-A; \quad \text{skąd: } A=\tfrac{1}{2}(a+c),$$

$$a:G=G:c, \quad \text{skąd: } G=\sqrt{ac},$$

$$a:c=a-H:H-c; \quad \text{skąd: } H=\frac{2ac}{a+c}.$$

PRZYKŁADY XL.

1. Postęp harmonijny: 6, 3, 2 przedłużyć jeszcze o trzy wyrazy.

2. Postęp harmonijny 8, 2, $1\frac{1}{7}$ przedłużyć jeszcze o trzy wyrazy.

3. Pomiędzy 4 i 2 wstawić 2 średnie harmonijne.

4. Pomiędzy $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{21}$ wstawić 3 średnie harmonijne.

5. Średnia arytmetyczna pomiędzy dwiema liczbami jest 9, a ich średnia harmonijna jest 8, — znaleść te liczby.

6. Średnia gieometryczna pomiędzy dwiema liczbami jest 48, a ich średnia harmonijna jest $46\frac{2}{25}$: znaleść te liczby.

7. Znaleść dwie liczby, wiedząc że summa ich średniéj arytmetycznéj, gieometrycznéj i harmonijnéj jest $9\frac{4}{5}$, a iloczyn tychże średnich jest 27.

8. Znaleść dwie liczby, wiedząc że iloczyn ich średniéj arytmetycznéj i średniej harmonijnéj jest 27, a przewyżka średniéj arytmetycznéj nad średnią harmonijną wynosi $1\frac{1}{2}$.

9. Jeżeli a, b i c są w postępie harmonijnym, dowieść, że:

$$a+c-2b:a-c=a-c:a+c.$$

10. Jeżeli trzy liczby stanowią postęp gieometryczny, i jeżeli każdą z nich powiększymy o wyraz średni, dowieść, że otrzymane trzy liczby stanowić będą postęp harmonijny.

XLI.

Przemiany, przestawienia i połączenia.

415. *Przemianami* (waryacyami) nazywamy różne sposoby, jakiemi może być ustawiany pewien zbiór przedmiotów.

Tak naprzykład przemianami z trzech głosek a, b, c, branych po dwie na raz, będą: ab, ba, ac, ca, bc, cb.

*. Połączenia tych samych przedmiotów, różniące się tylko porządkiem, w którym są one ustawione, nazywają się *przestawieniami* (permutacye).

Tak np. z trzech głosek a, b, c przestawienia będą: abc, acb, bac, bca, cba, cab.

416. *Połączeniami* w ściślejszém znaczeniu tego wyrazu (kombinacyami) są takie ustawienia pewnego zbioru przedmiotów, w których nie zwracamy uwagi na porządek, w jakim stoją obok siebie przedmioty.

Tak naprzykład z trzech głosek a, b, c (oznaczających pewne przedmioty), branych po dwie na raz, połączenia będą ab, ac, bc; zbiory ab i ba, będące różnemi *przestawieniami* dwóch przedmiotów a i b, tworzą jedno *połączenie* (*jedną kombinacyą*), podobnież zbiory ac i ca także tworzą jedno *połączenie*, również bc i cb.*)

417. *Liczba przemian (waryacyj) z n przedmiotów, branych po r na raz, jest równą*:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1).$$

Niech będzie n głosek a, b, c, d . . . . . przedstawiających tyleż przedmiotów. Znajdziemy najprzód liczbę przemian z tych głosek, branych po *dwie* na raz. W tym celu umieśćmy a przed każdą z pozostałych głosek; otrzymamy tym sposobem $n-1$ przemian, w których a znajduje się na pierwszym miejscu,

*) Głoski, służące do oznaczenia przedmiotów łączonych nazywają się w téj części algiebry, którą zajmuje się niniejszy rozdział, *elementami*. T.

Umieśćmy następnie b przed każdą z pozostałych głosek; otrzymamy tym sposobem $n-1$ przemian. zaczynających się od b. W podobny sposób znajdziemy $n-1$ przemian, z których każda zaczyna się od c. I tak daléj. Więc wszystkich przemian z n głosek, branych po *dwie* na raz, będzie: $n(n-1)$. Znajdziemy teraz liczbę przemian z tych n głosek, branych po *trzy* na raz. Pokazaliśmy dopiéro co, że z n głosek, możemy utworzyć $n(n-1)$ przemian, z których każda zawiéra po dwie głoski; zatém z $n-1$ głosek b, c, d . . . . . możemy utworzyć $(n-1)(n-2)$ przemian, biorąc te głoski po dwie na raz. Utworzywszy te $(n-1)(n-2)$ przemian z głosek b, c, d . . . . . umieśćmy następnie głoskę a przed każdą z tych przemian; otrzymamy tym sposobem $(n-1)(n-2)$ przemian, zawierających po trzy głoski i w których a znajduje się na pierwszém miejscu. Podobnież będzie $(n-1)(n-2)$ przemian, zawierających po trzy głoski i zaczynających się każda od b. Podobnież tyleż będzie takich przemian zaczynających się od c. I tak daléj. Ostatecznie więc wszystkich przemian z n głosek branych po trzy na raz, będzie: $n(n-1)(n-2)$. Z rozważania tych i tym podobnych przypadków, możnaby się domyślać, że liczba przemian z n głosek branych po r na raz, będzie:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1);$$

i pokażemy, że tak jest w rzeczy saméj. Przypuśćmy bowiem, że już jest wiadome, iż liczba przemian z n głosek, branych po $r-1$ na raz, jest:

$$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\{n-(r-1)+1\}$$

dowiedziemy, że podobny wzór wyrażać będzie i licz-

bę przemian z n głosek, branych po r na raz. Gdyż z $n-1$ głosek $b, c, d \ldots\ldots$ możemy podług założenia utworzyć: $(n-1)(n-2) \ldots\ldots \{n-1-(r-1)+1\}$ przemian każda po $r-1$ głosek; — umieśćmy a przed każdą z tych przemian, a otrzymamy tyleż przemian, zawierających po r głosek i zaczynających się od a. Podobnież taka sama będzie liczba przemian, zawierających po r głosek, i zaczynających się od b. I jeszcze takaż sama będzie liczba przemian, zawierających po r głosek, i zaczynających się każda od c. I tak daléj. Ostatecznie więc liczba przemian z n głosek, branych po r na raz, będzie:
$n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)$.

Jeżeli zatém wzór ten ma miejsce, gdy bierzemy po $r-1$ głosek na raz, to miéć on będzie miejsce i wtedy, gdy bierzemy po r głosek na raz. Lecz ponieważ widzieliśmy iż ma on miejsce wtedy, gdy bierzemy po *trzy* głoski na raz, przeto, wypada z powyższego dowodzenia, że ma on ~~mniejsze~~ większe i wtedy, gdy bierzemy po *cztery* głoski, a zatém ma miejsce i wtedy, gdy bierzemy po pięć głosek na raz, i tak daléj. Zatém jest on ogólnym.

418. Z tego wzoru wypada, że liczba *przestawień* z n głosek, to jest liczba przemian z n głosek, branych wszystkie na raz, jest równą
$n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3.2.1$.

419. Dla krótkości iloczyn $n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 1$ często oznacza się tak: $\lfloor\underline{n}$, lub też $n!$; (n z wykrzyknikiem) tym sposobem znak $\lfloor\underline{n}$, lub $n!$ oznacza iloczyn szeregu liczb naturalnych od 1 do n włącznie. Symbol n można czytać tak: *fakultet* n.

420. *Każde połączenie (kombinacya) z r przedmiotów daje $\lfloor\underline{r}$ lub $r!$ przestawień (permutacyj).*

Gdyż podług § 418 te r przedmiotów może być przestawionych w $\lfloor\underline{r}$ różnych sposobów.

421. *Liczba połączeń (kombinacyj) z n przedmiotów, branych po r na raz jest:*

$$\frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)}{\lfloor\underline{r}}$$

Gdyż liczba *przemian* z n przedmiotów, branych po r na raz jest $n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)$ na zasadzie § 417; każde zaś *połączenie* (kombinacya) tworzy $\lfloor\underline{r}$ przestawień podług § 420, przeto liczba połączeń musi być równą:

$$\frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)}{\lfloor\underline{r}}$$

Jeżeli licznik i mianownik tego wyrażenia pomnożymy przez $\lfloor\underline{n-r}$, wtedy przyjmie ono postać.

$$\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r} \cdot \lfloor\underline{n-r}}$$

nie zmieniając, rozumie się, swojej wartości.

422. *Znaleść liczbę przestawień (permutacyj) z n przedmiotów, które nie wszystkie są różne.*

Niech będzie danych n głosek: i przypuśćmy, że w tych n głoskach a wchodzi p razy, b wchodzi q razy, c wchodzi r razy, pozostałe zaś $d, e \ldots\ldots$ wchodzą każda raz tylko jeden. Wtedy liczba przestawień (permutacyj) z tych głosek będzie:

$$\frac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{p} \cdot \lfloor\underline{q} \cdot \lfloor\underline{r}}.$$

W rzeczy saméj: oznaczmy liczbę szukaną tych przestawień głoską N. Gdyby w którémkolwiek z tych przestawień p głosek a, zostało zmienionych na p nowych głosek, różnych od siebie, wtedy, *nie zmieniając położenia żadnéj z innych głosek*, moglibyśmy utworzyć z tego jednego przestawienia, $\underline{|p}$ przestawień różnych: gdyby więc p głosek a zostało zamienionych na p nowych i różnych głosek, wtedy liczba wszystkich przestawień byłaby: $N \times \underline{|p}$. Podobnież: gdyby q głosek b zostało zamienionych na q nowych i różnych od siebie głosek, wtedy całkowita liczba przestawień, jaką teraz moglibyśmy otrzymać, byłaby $N \times \underline{|p} \times \underline{|q}$. I jeżeliby r głosek c zostało również zamienionych na r nowych i różnych od siebie głosek, wtedy całkowita liczba przestawień byłaby: $N \times \underline{|p} \times \underline{|q} \times \underline{|r}$. Lecz ta liczba musi być równą liczbie przestawień z n głosek różnych (§ 418), to jest $\underline{|n}$.

Zatém: $N \times \underline{|p} \times \underline{|q} \times \underline{|r} = \underline{|n}$; a stąd:

$$N = \frac{\underline{|n}}{\underline{|p} \cdot \underline{|q} \cdot \underline{|r}}.$$

I w takiż sam sposób można postępować w każdym innym podobnym przypadku.

423. Zwracamy tutaj uwagę czytelnika na ten szczególny sposób dowodzenia, jakiego użyliśmy w § 417. Sposób tego rodzaju nazywa się *indukcyą matematyczną*; opisać go słowami możnaby tak: Dowodzimy, że jeżeli pewne twierdzenie jest prawdziwe w *jednym*, jakimkolwiek przypadku, wtedy ono jest także prawdziwe i w innym przypadku, w ten sposób związanym z przypadkiem pierwszym, że może być nazwanym *przypadkiem następnym*; dowodzimy daléj jakimkolwiek bądź sposobem, że twierdzenie to *jest prawdziwe* w pewnym, *oznaczonym* przypadku; z dowodzenia więc poprzedniego wypada, że jest ono prawdziwe i w następnym przypadku, a stąd daléj jest ono prawdziwe i dla następnego względem tego ostatniego przypadku, i tak daléj. Tym sposobem ostatecznie twierdzenie musi być prawdziwe w każdym przypadku: przynajmniéj licząc od tego, od któregośmy rozumowanie zaczęli.

Sposób indukcyi matematycznéj jest często używany w wyższych częściach matematyki.

PRZYKŁADY XLI.

1. Z oddziału, zawierającego 24 ludzi, ile można utworzyć oddziałów małych po 6 ludzi?

2. Znaleść ile można utworzyć przestawień (permutacyj) ze wszystkich liter, stanowiących wyraz *Sulejów*?

3. Znaleść ile można utworzyć połączeń (kombinacyj) z liter wyrazu: „*granitowy*“ branych po cztery na raz?

4. Znaleść ile można utworzyć przestawień (permutacyj) ze wszystkich liter, stanowiących wyraz: „*Krakowiak*“.

5. Liczba połączeń (kombinacyj) z pewnéj liczby przedmiotów, branych po *cztery* na raz, jest równą liczbie połączeń (kombinacyj) z téjże saméj liczby

przedmiotów, ale branych po *trzy* na raz. Pytanie jakaż jest liczba wszystkich przedmiotów?

6. Z dwudziestu spółgłosek i pięciu samogłosek ile można utworzyć wyrazów, z których każdy byłby złożony z dwóch spółgłosek i jednéj samogłoski w ten sposób, że samogłoska zajmuje w każdym z nich środkowe miejsce?

7. Z dwudziestu osób, pięć ma być wybranych losem. Iloma sposobami może być to dokonane? Znaleść także ile razy pewna oznaczona osoba będzie wybraną?

8. Osada łodzi, składająca się z ośmiu wioślarzy i jednego sternika, ma być wybraną z pomiędzy dwunastu osób, z których dziewięć może tylko wiosłować, a trzy mogą sterować ale nie mogą wiosłować. Znaleść iloma sposobami osada może być utworzoną z tych dwunastu osób. Znaleść także iloma sposobami osada mogłaby być utworzoną, gdyby jedna z tych dwunastu osób mogła zarazem i wiosłować i sterować?

9*. Utworzyć wszystkie przestawienia (permutacye) z liter stanowiących wyraz 1) *EVA*, 2) *ROMA*.

10*. Ile linij prostych można poprowadzić pomiędzy 12-ma punktami, pomiędzy któremi nie ma 3 leżących na jednéj linii prostéj? Toż samo zagadnienie w ogólności, to jest przyjmując, że liczba punktów danych jest n.

11*. W ilu punktach najwyżéj może się przeciąć 11 linij prostych? Toż samo zagadnienie w ogólności, to jest przyjmując, że liczba danych linij prostych jest n.

12*. Na płaszczyznie obieramy n punktów a, b, c . . . . . w ten sposób, że żadne trzy z nich nie leżą na jednéj linii prostéj, i łączymy je z sobą po dwa liniami prostemi ab, ac, bc . . . . . Linie te przecinają się z sobą w nowych punktach A, B, C . . . . . Znaleść liczbę N tych ostatnich punktów przecięcia.

13*. Ile może być liczb dziesięciocyfrowych takich, których wszystkie cyfry są różne?

* **Uwaga.** Biorąc pod uwagę jakikolwiek wyraz, zdanie, lub wiersz, w ogóle jakiekolwiek wyrażenie, i tworząc z głosek stanowiących to wyrażenie wszystkie przestawienia (permutacye), otrzymywać będziemy nowe układy głosek, z których jedne miéć będą w pewnym języku znaczenie, inne zaś będą bez żadnego znaczenia, a nawet nie będą mogły być wymówione. Zwykle pierwsze nazywają *anagrammami* względem początkowego wyrażenia. Niektóre anagrammy mają sławę historyczną. Tak np. z wyrazów „*Révolution française*“ po upadku Napoleona a za restauracyi, ułożono anagramm.... „*La France veut son roi*“. Z nazwiska: „*Frère Jacques Clément*“ (zabójcy Henryka III-go), ułożono: „*C'est l'enfer qui m'a créé*“. Jeden z najpiękniejszych przykładów takich anagramów, mający związek z naszą historyą, stanowi przedmiot zagadnienia następującego:

14*. Gdy młody Stanisław Leszczyński powrócił za życia ojca do Leszna z długiéj podróży za granicą, wówczas w tém mieście zgromadziła się cała rodzina Leszczyńskich w celu powitania przyszłej

głowy możnego domu. Ówczesny Rektor szkoły jezuickiéj w Lesznie, Jabłoński, chcąc przyczynić się do uświetnienia uroczystości, urządził dyalog, odegrany przez uczniów, po którym 13 uczniów, przebranych za bohaterów, odtańczyło balet. Każdy z nich miał na tarczy jedną z liter stanowiących wyrazy: „Domus Lescinia“ złotem wymalowaną. Po każdéj figurze baletu tańczący ustawiali się w ten sposób, że litery na tarczach tworzyły anagrammy z wyrazów powyższych. I tak po pierwszym balecie czytano na tarczach obok siebie ustawionych: Domus Lescinia; po drugim tarcze tak się ustawiły, że czytano: „ades incolumis“. Po trzecim: „omnia es lucida“; po czwartym: „lucida sis omen“; po piątym: „mane sidus loci“; po szóstym: „sis columna Dei“; i nakoniec po siódmym: „I! scande solium“ (idź, wstąp na tron). Ten ostatni anagramm był tém piękniejszy, że, po wstąpieniu na tron Leszczyńskiego, mógł uchodzić za proroctwo. Znaleść: 1-sze ile może być wszystkich przestawień (permutacyj) z liter: „Domus Lescinia“: 2-re przypuszczając, że na utworzenie każdéj nowéj permutacyj powyższych głosek, chłopcy potrzebowali tylko $\frac{1}{2}$ minuty, w jakim przeciągu czasu wyczerpali by te wszystkie permutacye; i po 3-ie ile papieru potrzebaby było na napisanie wszystkich tych permutacyj, gdyby w jednym wierszu można napisać cztery takie permutacye i gdyby na stronie całego arkusza zmieściło się 40 wierszy?

XLII.

Dwumian Newtona.

424. Widzieliśmy już, że $(x+a)^2 = x^2+2xa+a^2$ i że $(x+a)^3 = x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$; przedmiotem teraźniejszego rozdziału będzie wynalezienie ogólnego wyrażenia na $(x+a)^n$, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą całkowitą i dodatną.

425. Przez wykonanie mnożeń znajdziemy:

$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab,$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+bcd+cda+dab)x+abcd.$$

Rozważając otrzymane wypadki z tych mnożeń, dochodzimy do wniosku, że są one utworzone podług następujących prawideł:

I. Liczba wyrazów, znajdujących się z prawéj strony znaku równości, jest o jedność większą od liczby mnożonych dwumianów.

II. Wykładnik przy x w pierwszym wyrazie jest równy liczbie mnożonych dwumianów, a w każdym innym wyrazie wykładnik przy x jest o jedność mniejszy, aniżeli tenże wykładnik w wyrazie poprzedzającym.

III. Współczynnik wyrazu pierwszego jest równy jedności; współczynnik wyrazu drugiego jest summą drugich głosek mnożonych dwumianów; współczynnik wyrazu trzeciego jest summą iloczynów drugich głosek mnożonych dwumianów, branych po dwie na raz; współczynnik wyrazu czwartego jest summą iloczynów drugich głosek mnożonych dwumianów, branych po trzy na raz; i tak daléj; — ostatni wyraz jest iloczynem wszystkich drugich głosek mnożonych dwumianów.

Pokażemy teraz, że te prawidła są ogólne, to jest mają miejsce jakakolwiek byłaby liczba mnożonych dwumianów. W tym celu przypuśćmy, że one mają miejsce dla iloczynu, powstałego z pomnożenia $n-1$ dwumianów: to jest przypuśćmy, że mamy $n-1$ czynników $x+a$, $x+b$, $x+c$, ... $x+k$, i że:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+k)=x^{n-1}+px^{n-2}+qx^{n-3}+rx^{n-4}+\ldots\ldots+u,$$

gdzie: $p=$ summie głosek $a, b, c, \ldots\ldots k$

$q=$ summie iloczynów z tychże głosek, branych po dwie na raz;

$r=$ summie iloczynów z tychże głosek, branych po trzy na raz;

. . . . . .

$u=$ iloczynowi tych wszystkich głosek.

Pomnóżmy obie strony téj równości tożsamościowéj przez nowy czynnik $(x+l)$, i uporządkujmy iloczyn na drugiéj stronie podług potęg głoski x. Będzie:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+k)(x+l)=x^n+(p+l)x^{n-1}+(q+pl)x^{n-2}+(r+ql)x^{n-3}+\ldots\ldots+ul$$

Lecz: $p+l=a+b+c\ldots\ldots+k+l=$ summie wszystkich głosek $a, b, c, \ldots\ldots k, l$;

$q+pl=q+l(a+b+c+\ldots\ldots+k)=$ summie iloczynów wszystkich głosek $a, b, c, \ldots\ldots k, l$, branych po dwie na raz;

$r+ql=r+l(ab+ac+bc\ldots\ldots)=$ summie iloczynów wszystkich głosek $a, b, c\ldots\ldots k, l$, branych po trzy na raz;

. . . . . .

$ul=$ iloczynowi wszystkich głosek.

Stąd, jeżeli te prawidła mają miejsce gdy mnożymy $n-1$ czynników, wtedy to, co było wyżéj powiedziane pokazuje nam, że mają one miejsce i wówczas, gdy mnożymy n czynników. Lecz widzieliśmy, że one mają miejsce przy tworzeniu iloczynu z *czterech* czynników: przeto podług nich jest utworzony i iloczyn z *pięciu* czynników i tak daléj: mają one więc miejsce w ogólności.

Wypadek ogólny z pomnożenia n czynników dwumiennych napiszemy dla krótkości w ten sposób:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots\ldots(x+k)(x+l)=x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+Rx^{n-3}\ldots\ldots+V.$$

Na drugiéj stronie powyższéj równości P oznacza summę głosek $a, b, c, \ldots\ldots k, l$, których liczba jest n; Q oznacza summę iloczynów z tychże głosek bra-

nych po dwie na raz: — liczba tych iloczynów jest $\frac{n(n-1)}{1.2}$; R jest summą $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ podobnych iloczynów, i tak daléj. Patrz § 421.

Przypuśćmy teraz, że każda z głosek b, c, ... k, l, staje się równą a. Wtedy pierwsza strona powyższéj równości zamieni się na $(x+a)^n$. P zamieni się na na, Q zamieni się na $\frac{n(n-1)}{1.2}a^2$, R zamieni się na $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3$, i tak daléj. Będzie więc ostatecznie:

$$(x+a)^n = x^n + nax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^4x^{n-4} + \ldots\ldots + a^n.$$

426. Wzór, który teraz otrzymaliśmy nazywa się *dwumianem Newtona*, od nazwiska wielkiego matematyka angielskiego, który go pierwszy w téj postaci ogólnéj podał. Szereg na drugiéj stronie znaku równości nazywa się *rozwinięciem* dwumianu $(x+a)^n$, a gdy zamiast $(x+a)^n$ piszemy ten szereg, mówimy, że $(x+a)^n$ *rozwijamy*.

Zwracamy tutaj uwagę na to, że twierdzenie powyższe zostało dowiedzione w tym tylko przypadku, gdy n jest liczbą *całkowitą i dodatną*, a sposób, jakiego do dowiedzenia użyliśmy, przedstawia nam przykład *indukcyi matematycznéj*.

427. Weźmy jako przykład $(x+a)^6$. Tutaj $n=6$,

$$\frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{6.5}{1.2} = 15; \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20;$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15;$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} = \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} = 6;$$

przeto:

$$(x+a)^6 = x^6 + 6ax^5 + 15a^2x^4 + 20a^3x^3 + 15a^4x^2 + 6a^5x + a^6.$$

Przypuśćmy daléj, że chcemy znaleść rozwinięcie $(b^2+cy)^6$: w tym celu należy tylko podstawić b^2 zamiast x i cy zamiast a w poprzedniéj równości. Otrzymamy:

$$(b^2+cy)^6 = (b^2)^6 + 6cy(b^2)^5 + 15(cy)^2(b^2)^4 + 20(cy)^3(b^2)^3 + 15(cy)^4(b^2)^2 + 6(cy)^5b^2 + (cy)^6 =$$
$$= b^{12} + 6cyb^{10} + 15c^2y^2b^8 + 20c^3y^3b^6 + 15c^4y^4b^4 + 6c^5y^5b^2 + c^6y^6.$$

Jako dalszy przykład zadajmy sobie znaleść rozwinięcie $(x-c)^n$; należy w tym celu we wzorze § 425 podstawić $-c$ zamiast a; otrzymamy:

$$(x-c)^n = x^n - ncx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}c^2x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}c^3x^{n-3} + \ldots\ldots$$

Podstawmy teraz w rozwinięciu $(x+a)^n$ jedność (1) zamiast x, znajdziemy:

$$(1+a)^n = 1+na+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^2\ldots\ldots,$$

a ponieważ równość ta jest prawdziwą przy każdéj wartości na a, przeto możemy w niej napisać x zamiast a, i będzie:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\ldots.$$

428. Dwumian Newtona można zastosować także do rozwinięcia wyrażeń zawierających więcéj niż dwa wyrazy. Przypuśćmy naprzykład, że chcemy rozwinąć $(1+2x-x^2)^4$. Uczyńmy $y=2x-x^2$; wtedy miéć będziemy:

$$(1+2x-x^2)^4 = (1+y)^4 = 1+4y+6y^2+4y^3+y^4, \text{ czyli:}$$

$$(1+2x-x^2)^4 = 1+4(2x-x^2)+6(2x-x^2)^2+ 4(2x-x^2)^3+(2x-x^2)^4.$$

Lecz:

$$(2x-x^2)^2 = (2x)^2-2(2x)x^2+(x^2)^2 = 4x^2-4x^3+x^4;$$

$$(2x-x^2)^3 = (2x)^3-3(2x)^2.x^2+3(2x)(x^2)^2-(x^2)^3 = 8x^3-12x^4+6x^5-x^6;$$

$$(2x-x^2)^4 = (2x)^4-4(2x)^3x^2+6(2x)^2(x^2)^2-4(2x)(x^2)^3+ +(x^2)^4 = 16x^4-32x^5+24x^6-8x^7+x^8.$$

Podstawiając te wartości w powyższe wyrażenie i robiąc wszystkie uproszczenia, otrzymamy ostatecznie:

$$(1+2x-x^2)^4 = 1+8x+20x^2+8x^3-26x^4-8x^5+ +20x^6-8x^7+x^8.$$

429. *W rozwinięciu $(1+x)^n$ współczynniki wyrazów równooddalonych od wyrazu pierwszego i ostatniego są sobie równe.*

W saméj rzeczy: współczynnik wyrazu stojącego na miejscu r od początku rozwinięcia (t. j. takiego, przed którym znajduje się wyrazów $r-1$), jest: $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-r+2)}{\lfloor r-1}$; pomnożywszy licznik i mianownik tego wyrażenia przez $\lfloor n-r+1$, otrzymamy:

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \,.\, \lfloor n-r+1}$$

Wyraz, stojący na miejscu r od końca rozwinięcia, znajduje się na miejscu $(n-r+2)$-giém, licząc od wyrazu pierwszego; jego współczynnik jest więc:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.\{n-(n-r+2)+2\}}{\lfloor n-r+1}$$

to jest: $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.r}{\lfloor n-r+1}$;

pomnożywszy licznik i mianownik tego ułamku przez $r-1$, zamieni się on na:

$$\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \,.\, \lfloor n-r+1)}$$

a to jest wyrażenie współczynnika znalezionego poprzednio.

429_1. *Summa wszystkich współczynników w rozwinięciu dwumianu $(1+x)^n$ jest równa 2^n.*

Jeżeli bowiem we wzorze.

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3\ldots\ldots+x^n,$$

uczynimy $x=1$, otrzymamy:

$$2^n=1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}+\ldots\ldots+1.$$

430. Dotąd, mówiąc o rozwinięciu dwumianu $(x+a)_n$ przyjmowaliśmy, że n oznacza *jakąkolwiek liczbą całkowitą i dodatną*. Lecz wzór Newtona może być zastosowany do rozwinięcia $(x+a)^n$ i w tym przypadku, gdy n jest ułamkiem dodatnym, lub ilością odjemną, całkowitą lub ułamkową. Czytelnik w obszerniejszych dziełach o algiebrze znajdzie zupełny rozbiór dwumianu Newtona, w zastosowaniu do jakiegokolwiek wykładnika. Uważamy jednak za ćwiczenie pożyteczne, podać uczącemu się, sposoby otrzymania niektórych wypadków w razie wykładnika ułamkowego lub odjemnego z wzoru ogólnego. W tym celu przyjmiemy, jako rzecz wiadomą, że jakiekolwiek byłyby x, a i n, będzie zawsze:

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2(n-3)}{1.2.3.4}a^4x^{n-4}+\ldots\ldots$$

Lecz w tym przypadku, gdy n nie jest liczbą całkowitą i dodatną, szereg na drugiej stronie znaku równości staje się nieskończonym.

431. Jako przykład weźmy rozwinięcie $(1+y)^{\frac{1}{2}}$. W tym celu we wzorze § 430 podstawmy 1 zamiast x, y zamiast a, i $\frac{1}{2}$ zamiast n. Będzie:

$$\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}=-\frac{1}{8}.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}=\frac{1}{16}.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{1.2.3.4}=$$

$$=-\frac{5}{128},$$

i tak daléj. Zatém:

$$(1+y)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{16}y^3-\frac{5}{128}y^4+\ldots\ldots$$

Jako inny przykład weźmy $(1+y)^{-\frac{1}{2}}$. Tutaj we wzorze § 430 należy podstawić: 1 za x, y zamiast a, i $-\frac{1}{2}$ zamiast n, Otrzymamy:

$$n=-\frac{1}{2};\ \frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{3}{8};\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=-\frac{5}{16},$$

$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}=\frac{35}{128}$; i tak daléj. Przeto:

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \frac{35}{128}y^4 - \ldots\ldots$$

Jako dalszy przykład rozwińmy $(1+y)^{-m}$. Tutaj należy podstawić: 1 zamiast x, y zamiast a, i $-m$ zamiast n. Będzie:

$$n = -m; \quad \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{m(m+1)}{1.2};$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} = -\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3};$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4};$$

i tak daléj.

Tym sposobem otrzymamy:

$$(1+y)^{-m} = 1 - my + \frac{m(m+1)}{1.2}y^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}y^3 +$$

$$+ \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}y^4 \ldots\ldots$$

Jako szczególny przypadek uczyńmy $m = 1$, wtedy będzie:

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - \ldots\ldots$$

Ten sam wypadek otrzymamy, dzieląc 1 przez $1+y$.

Rozwińmy jeszcze $(1+2x-x^2)^{\frac{1}{2}}$ podług potęg rosnących głoski x. W tym celu uczyńmy $2x-x^2 = y$, otrzymamy:

$$(1+2x-x^2)^{\frac{1}{2}} = (1+y)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 + \ldots\ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(2x-x^2) - \frac{1}{8}(2x-x^2)^2 + \frac{1}{16}(2x-x^2)^3 -$$

$$- \frac{5}{128}(2x-x^2)^4 + \ldots\ldots$$

Wynajdźmy następnie wartości na $(2x-x^2)^2$ $(2x-x^2)^4, \ldots\ldots$ podstawmy w powyższe wyrażenie, i zróbmy wszelkie redukcye; otrzymamy ostatecznie:

$$(1+2x-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + x - x^2 + x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \ldots\ldots$$

PRZYKŁADY XLII.

1. Napisać trzy pierwsze i trzy ostatnie wyrazy rozwinięcia: $(a-x)^{13}$.

2. Napisać rozwinięcie: $(3-2x^2)^5$.

3. Rozwinąć: $(1-2y)^7$.

4. Znaleść cztery pierwsze wyrazy rozwinięcia: $(x+2y)^n$.

5. Rozwinąć: $(1+x-x^2)^4$.

6. Rozwinąć: $(1+x+x^2)^5$.

7. Rozwinąć: $(1-2x+x^2)^4$.

8. Znaleść współczynnik x^5 w rozwinięciu: $(1+2x+3x^2)^7$.

9. Znaleść współczynnik przy x^6 w rozwinięciu: $(1-2x+3x^2)^5$.

10. Drugi wyraz w rozwinięciu $(x+y)^n$ jest 240, trzeci 720 a czwarty 1080; znaleść czemu się równają x, y i n.

11. W rozwinięciu $(x+y)^n$ wyraz szósty równa się 112, wyraz siódmy równa się 7, wyraz zaś ósmy równy jest $\frac{1}{4}$; znaleść czemu się równają x, y i n.

12. Napisać pięć pierwszych wyrazów rozwinięcia: $(a-2x)^{\frac{1}{4}}$.

13. Rozwinąć do czterech wyrazów: $\left(1-\frac{5}{6}x\right)^{-\frac{3}{5}}$.

14. Rozwinąć: $(1-2x)^{-1}$.

15. Znaleść współczynnik przy x^r w rozwinięciu $(1-x)^{-2}$.

16. Napisać szósty wyraz w rozwinięciu: $(3x-y)^{-\frac{5}{4}}$.

17. Rozwinąć do pięciu wyrazów $(a-3b)^{\frac{-10}{3}}$: pokazać, że gdy $a=1$ i $b=\frac{1}{5}$, wtedy czwarty wyraz tego rozwinięcia jest większy aniżeli wyraz trzeci i wyraz piąty, osobno wzięte.

18. Napisać współczynnik przy x^r w rozwinięciu $(1-x)^{-4}$.

19. Znaleść cztery pierwsze wyrazy rozwinięcia $(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}$, uporządkowanego podług potęg głoski x.

20. Znaleść cztery pierwsze wyrazy rozwinięcia $(1-x+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, uporządkowanego podług potęg głoski x.

XLIII.

Systematy liczenia.

432. Wiadomo z arytmetyki, że w zwyczajnym sposobie wyrażania liczb całkowitych za pomocą znaków, liczba jaką przedstawia każdy znak, jest zawsze *pewną wielokrotnością pewnéj potęgi dziesięciu.* Tak naprzykład w 523: 5 przedstawia 5 setek, to jest 5 razy po 10^2; 2 przedstawia 2 dziesiątki, to jest 2 razy po 10^1, a o 3, które przedstawia 3 jedności, można powiedzieć, że ono przedstawia 3 razy po 10^0. Patrz § 274.

Ten sposób wyrażania liczb całkowitych nazywa się *systematem zwyczajnym liczenia piśmiennego* i *dziesięć* nazywa się jego *zasadą* lub podstawą.

433. Pokażemy, że każda liczba całkowita i dodatna, większa od jedności, może być przyjętą za zasadę zamiast 10; a następnie wyłożymy jakim sposobem dana liczba może być wyrażoną w jakimkolwiek systemacie.

Znaki za pomocą których wyrażamy liczby, jak wiadomo, nazywają się *cyframi.* Gdy w dalszym ciągu wykładu mówić będziemy o *jakiéjkolwiek zasadzie,* wtedy zawsze pod tym wyrazem rozumieć będziemy pewną liczbę dodatną i całkowitą, większą od jedności.

434. *Każdą liczbę całkowitą można wyrazić w ten sposób, że ta liczba przedstawi się pod postacią wielomianu, uporządkowanego podług potęg zasady.*

Niech N oznacza pewną liczbę całkowitą, r — zasadę. Przypuśćmy, że r^n jest najwyższą potęgą r, która nie jest większą od liczby N; podzielmy N przez r^n; niech będzie iloraz a, i reszta P; wtedy:

$$N = ar^n + P.$$

gdzie a jest mniejsze od r i P jest mniejsze od r^n. Podzielmy daléj P przez r^{n-1}; oznaczymy iloraz przez b, a resztę przez Q; będzie:

$$P = br^{n-1} + Q.$$

Postępujmy w tenże sam sposób daléj dotąd, dopóki ostatnio otrzymana reszta nie będzie mniejsza od r; wtedy znajdziemy, że N będzie ostatecznie wyrażone za pomocą następującéj tożsamości:

$$N = ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} + \ldots\ldots hr + k.$$

Każda z cyfr $a, b, c \ldots\ldots h, k$ jest mniejszą od r; i każda z nich, z wyjątkiem a, może być równa zero.

435. *Daną liczbę całkowitą wyrazić w jakimkolwiek danym systemacie liczenia.*

Pod wyrazem *liczba całkowita dana* rozumiemy liczbę całkowitą, wyrażoną słowami, lub też cyframi w jakimkolwiek systemacie oznaczonym. Gdy wyraźnie systemat nie jest nazwanym, wtedy domyślać się zawsze należy, że liczba jest wyrażoną w systemacie zwyczajnym.

Niech będzie N dana liczba całkowita, r zasada tego systematu, w którym należy liczbę napisać. Przypuśćmy, że cyfry szukane, za pomocą których wyrazimy ją, są $k, h, \ldots\ldots c, b, a$, licząc od ręki prawéj, i że liczba tych cyfr jest $n+1$; wtedy, podług poprzedniego §.:

$$N = ar^n + br^{n-1} + cr^{n-2} + \ldots\ldots hr + k.$$

Podzielmy liczbę N przez r: niech M będzie ilorazem; wtedy widoczną jest rzeczą, że

$$M = ar^{n-1} + br^{n-2} + \ldots\ldots + h;$$

resztą zaś przy tém dzieleniu będzie k. Stąd wypada, że pierwszą cyfrę znajdziemy za pomocą takiego prawidła: *podzielmy daną liczbę przez daną zasadę, a reszta będzie pierwszą z cyfr szukanych* (licząc od ręki prawéj).

Podzielmy daléj M przez r; wtedy widoczną jest rzeczą, że *reszta* będzie h, i tym sposobem druga z szukanych cyfr będzie znalezioną.

Postępując ciągle tym sposobem, wynajdziemy kolejno wszystkie cyfry szukane.

436. Rozwiążemy teraz kilka zadań, służących jako przykłady.

Liczbę 32884 napisać w systemacie, którego zasadą jest siedm.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 32884 \\ 7 & 4697 \ldots\ldots 5 \\ 7 & 671 \ldots\ldots 0 \\ 7 & 95 \ldots\ldots 6 \\ 7 & 13 \ldots\ldots 4 \\ & 1 \ldots\ldots 6 \end{array}$$

Tym sposobem:

$$32884 = 1.7^5 + 6.7^4 + 4.7^3 + 6.7^2 + 0.7^1 + 5,$$

czyli liczba 32884, napisana w systemacie, którego zasadą jest siedm (układ siódemkowy) jest 164605.

Liczbę 74194 napisać w systemacie, którego zasadą jest dwanaście, (układ dwunastkowy):

$$
\begin{array}{r|l}
12 & 74194 \\
12 & 6182 \ldots\ldots 10 \\
12 & 515 \ldots\ldots 2 \\
12 & 42 \ldots\ldots 11 \\
 & 3 \ldots\ldots 6
\end{array}
$$

Więc $74194 = 3 \cdot 12^4 + 6 \cdot 12^3 + 11 \cdot 12^2 + 2 \cdot 12 + 10$.

Aby liczbę daną napisać w zwykły sposób, w systemacie, którego zasadą jest dwanaście, potrzeba mieć jeszcze dwie cyfry nowe, jedną oznaczającą *dziesięć*, i drugą oznaczającą *jedenaście*: oznaczmy pierwszą znakiem *d*, a drugą głoską *j*. Wtedy liczba 74194, napisana w systemacie, którego zasadą jest dwanaście, wyrazi się tak: 36*j*2*d*.

Liczbę 645032, napisaną w systemacie, którego zasadą jest dziewięć (układ dziewiątkowy), napisać w systemacie, którego zasadą byłoby *ośm*.

$$
\begin{array}{r|l}
8 & 645032 \\
 & 72782 \ldots\ldots 4.
\end{array}
$$

Dzielenie przez ośm jest wykonane w następny sposób: Najprzód ośm nie mieści się w 6; należy znaleść ile razy ośm mieści się w 64; tutaj 6 oznacza sześć razy po dziewięć, to jest pięćdziesiąt cztery; pytanie więc teraz zachodzi takie, ile razy ośm mieści się w pięćdziesięciu ośmiu? Zatém ośm mieści się w 64 razy siedm i pozostaje reszta dwa. Następnie mamy znaleść ile razy ośm miesci się w 25, to jest ile razy ośm mieści się w dwudziestu trzech: znajdujemy na odpowiedź dwa, z resztą siedm. Daléj należy nam znaleść ile razy ośm mieści się w 70, to jest ile razy ośm mieści się w sześćdziesięciu trzech; w odpowiedzi wypada, że mieści się razy siedm i pozostaje reszta siedm. Następnie znowuż należy znaleść ile razy ośm mieści się w 73, to jest ile razy ośm mieści się w sześćdziesięciu sześciu; na odpowiedź wypada ośm z resztą dwa. Nakoniec należy znaleść ile razy ośm mieści się w 22, to jest ile razy ośm mieści się w dwudziestu; odpowiedź będzie, że ośm mieści się razy dwa i pozostaje reszta cztery. Tym sposobem 4 będzie pierwszą z szukanych cyfr.

Resztę działania wskazujemy tylko; czytelnik powinien je uważnie sam wykonać i porównać wypadek, jaki otrzyma, z tym jaki podajemy niżéj:

$$
\begin{array}{r|l}
8 & 72782 \\
8 & 8210 \ldots\ldots 2 \\
8 & 1023 \ldots\ldots 3 \\
8 & 113 \ldots\ldots 6 \\
8 & 12 \ldots\ldots 5 \\
 & 1 \ldots\ldots 3
\end{array}
$$

Tym sposobem dana liczba $=$

$= 1 \cdot 8^6 + 3 \cdot 8^5 + 5 \cdot 8^4 + 6 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 4$;

pisząc ją więc w systemacie, którego zasadą jest ośm otrzymamy:

1356324.

437. Nie trudno jest ułożyć nieograniczoną liczbę przykładów, w których wypadki są łatwe do sprawdzenia. Tak naprzykład, weźmy dwie liczby, wyrażone w systemacie zwyczajnym, i znajdźmy ich summę, ich różnicę i ich iloczyn: tę summę, różnicę i iloczyn wyraźmy w innym systemacie danym. Następnie napiszmy same liczby dane w tym nowym systemacie i znajdźmy ich summę, ich różnicę i ich ilo-

czyn w tymże systemacie: — oczywiście wypadki powinny być zgodne z wypadkami poprzednio otrzymanemi.

PRZYKŁADY XLIII.

1. Wyrazić liczbę 34042 w systemacie, którego zasadą jest pięć.

2. Wyrazić 45792 w systemacie, którego zasadą jest dwanaście.

3. Wyrazić 1866 w systemacie, którego zasadą jest dwa.

4. Wyrazić 2745 w systemacie którego zasadą jest jedenaście.

5. Pomnożyć *j4d* przez *dj*; liczby te są napisane w systemacie, którego zasadą jest dwanaście. Też same liczby wyrazić w systemacie zwyczajnym i następnie pomnożyć.

6. Znaleść w jakim systemacie liczba 4161 napisze się tak: 10101.

7. Znaleść w jakim systemacie liczba 5261 wyrazi się tak 40205.

8. Liczbę 17161 wyrazić w systemacie, którego zasadą jest dwanaście, i podzielić ją przez *dj* w tymże systemacie.

9. Znaleść zasadę takiego systematu, w którym liczby tak napisane: 13, 22 i 33 stanowiłyby postęp gieometryczny.

10. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby *jjd*001, napisanéj w układzie, którego zasadą jest dwanaście.

XLIV.

Procenty.

438. Sposoby rozwiązywania zadań, odnoszących się do procentów, są podane w dziełach, zajmujących się arytmetyką; lecz za pomocą znaków algiebraicznych można prawidła na rozwiązanie tych zadań przedstawić pod postacią łatwą do zrozumienia i spamiętania.

439. *Procentem* nazywamy wynagrodzenie, płacone za użycie wypożyczonych pieniędzy. Pieniądze wypożyczone nazywamy *kapitałem*. Summę kapitału wraz z procentem, należnym za pewien przeciąg czasu, nazywać będziemy summą, na którą zamienia się dany kapitał po upływie tegoż czasu, albo krócéj *summą*.

440. Procent może być dwojaki, *prosty* i *złożony*. Gdy procent rachuje się zawsze od samego kapitału początkowego, wtedy nazywamy go *prostym*; lecz jeżeli procent należny, w chwili gdy przypada jego wypłata, dołączamy do kapitału i w następstwie procent rachujemy od całéj summy, wtedy nazywamy go *złożonym*.

441. *Stopą procentu* nazywamy kwotę płaconą za użycie pewnéj oznaczonéj ilości pieniędzy przez pewien oznaczony czas. W *praktyce* tą ilością pie-

niędzy jest zwykle 100 rs., a czas jeden rok. Gdy więc mówimy, że stopa procentu jest 4 od sta, to to znaczy, że za użycie 100 rubli przez ciąg jednego roku płacimy 4 rs. W *teoryi* dogodną jest rzeczą, jak to zaraz zobaczymy, używać osobnego znaku, dla oznaczenia procentu od *jedneyo* rubla za jeden rok.

442. *Znaleść summę, na którą się zamieni dany kapitał, po upływie danego czasu, przy procencie prostym.*

Niech K oznacza liczbę rubli, zawartą w kapitale, n liczbę liczbę lat, r procent od jednego rubla za jeden rok, wyrażony w ułamku rubla, i M summę szukaną, wyrażoną w rublach. Ponieważ r jest procentem od jednego rubla za rok, przeto Kr jest procentem od K rubli za rok, a nKr jest procentem od K rubli za n lat; będzie więc:

$$M = K + nKr = K(1+nr).$$

443. Z równania $M = K(1+nr)$, można znaleść jedną z czterech ilości M, K, n, r, gdy trzy inne są dane. I mianowicie:

$$K = \frac{M}{1+nr}; \quad n = \frac{M-K}{Kr}; \quad r = \frac{M-K}{Kn}.$$

444. *Znaleść summę, na którą się zamieni dany kapitał, po upływie danego czasu przy procencie złożonym.*

Niech K oznacza liczbę rubli kapitału, n — liczbę lat, r — procent od jednego rubla za rok, wyrażony w ułamku rubla, i M — liczbę rubli, zawartą w szukanéj summie. Oznaczmy nadto przez R summę na którą się zamieni jeden rubel po upływie jednego roku; wtedy $R = 1+r$. Zatém KR będzie summą, na

którą się zamieni K rubli w ciągu jednego roku. Więc summa, na którą się zamieni KR rubli w ciągu także jednego roku, będzie KRR, czyli KR^2; to ostatnie zatém wyrażać będzie summę, na którą się zamieni K rubli w ciągu *dwóch* lat. Podobnież summa, na którą się zamieni KR^2 rubli w ciągu roku będzie: KR^2R, czyli KR^3; i to będzie summą, na którą się zamieni kapitał K rubli po upływie *trzech* lat.

Postępując daléj tym samym sposobem znajdziemy, że summa na którą się zamieni kapitał K rubli, po upływie n lat będzie KR^n; więc:

$$M = KR^n.$$

Sam procent za przeciąg tych n lat, wynosi:

$$KR^n - K = K(R^n - 1).$$

445. *Wartość teraźniejsza* czyli *obecna*, pewnéj summy, mającéj być wypłaconą na końcu danego czasu, jest to ten kapitał, który wraz ze swoim procentem za uważany przeciąg czasu zamieni się na tęż summę. Przy oznaczeniach powyżéj przyjętych, K jest wartością teraźniejszą summy M.

446. *Dyskontem* (potrącenie procentu) nazywamy wynagrodzenie za wypłacenie summy należnéj przed tym terminem, w którym ona miała być wypłaconą.

Z określenia *wartości teraźniejszéj* wypada, że dług mający być zapłaconym w pewnym oznaczonym terminie jest w zupełności pokryty przez wypłacenie wcześniej jego *wartości teraźniejszéj*, odpowiedniéj chwili, w któréj następuje wypłata. Stąd dyskonto jest równe

różnicy pomiędzy summą płatną w oznaczonym terminie, a jéj wartością teraźniejszą.

447. *Znaleść wartość obecną summy płatnéj na końcu danego czasu i dyskonto.*

Niech K będzie liczbą rubli, wyrażających wartość teraźniejszą, n liczbą lat, r procentem od jednego rubla za jeden rok, wyrażonym w ułamku rubla, M liczbą rubli, oznaczających summę należną, i D dyskontem. Nadto niech będzie:

$$R=1+r.$$

Wtedy: przy procencie prostym:

$$M=K(1+nr),\ \S\ 442;$$

skąd: $$K=\frac{M}{1+nr};\ D=M-K=\frac{Mnr}{1+nr}.$$

Przy procencie złożonym:

$$M=KR^n,\quad \S\ 444;$$

skąd: $$K=\frac{M}{R^n};\quad D=M-K=\frac{M(R^n-1)}{R^n}.$$

448. W praktyce zwykłą jest rzeczą zamiast *dyskonta* tak określonego, jak było tutaj wyżéj podane brać *procent* od całéj summy wypłaconéj przed terminem. Tak naprzykład, przy procencie prostym, zamiast $\frac{Mnr}{1+nr}$, płacący otrzyma Mnr jako wynagrodzenie za natychmiastową wypłatę.

448_1. *Na początku każdego roku do kassy wnosimy na procent K rs., znaleść na jaką summę zamienią się wszystkie wniesione raty po upływie n lat przy procencie złożonym.*

Oznaczmy przez M szukaną summę; r procent roczny od jednego rubla, wyrażony w ułamku rubla, i nakoniec uczyńmy $R=1+r$. Oczywistą jest rzeczą że rata K, oddana na początku pierwszego roku do kassy, pozostanie na procencie przez przeciąg n lat; podług wzoru § 444 zamieni się więc na summę KR^n; takaż sama rata, K oddana do kassy na początku drugiego roku, pozostanie na procencie $n-1$ lat, zamieni się więc na summę KR^{n-1}; podobnież trzecia rata K, oddana na początku trzeciego roku, pozostanie na procencie przez $n-2$ lata, zamieni się przeto na summę $K.R^{n-2}$; i tak daléj; — ostatnia rata K, oddana na początku n-tego roku, zamieni się na końcu tegoż roku na summę KR. Całkowita więc wartość złożonych rat po upływie n lat będzie summą wyrazów postępu ilorazowego:

$$KR_n,\ K.R^{n-1},\ KR^{n-2}\ldots\ldots KR;$$

czyli będzie:

$$M=PR^n+PR^{n-1}+PR^{n-2}+\ldots\ldots+PR.$$

Na zasadzie wzoru (1) § 402 otrzymamy ostatecznie:

$$M=\frac{KR^{n+1}-KR}{R-1},$$

czyli $$M=KR.\ \frac{KR^n-1}{R-1},$$

448_2. *Znaleść jaką ratę należy płacić rocznie, aby umorzyć w przeciągu n lat kapitał wypożyczony i jego procenty złożone.*

Przypuśćmy, że dzisiaj zaciągamy pożyczkę K rubli, którą chcemy umorzyć w ciągu n lat, przez wy-

płacenie równych rat na końcu każdego roku. Oznaczmy procent od jednego rubla na rok, wyrażony w ułamku rubla, przez r, przez a — ratę roczną, i uczyńmy $R=1+r$. Wtedy kapitał K oczywiście zamieni się po upływie n lat na summę: KR^n; summa wszystkich rat rocznych, wraz z ich procentami złożonemi powinna równać się KR^n. Stąd otrzymujemy równość:

$$KR^n = aR^{n-1} + aR^{n-2} + \ldots\ldots + aR + a,$$

czyli:
$$KR^n = a\,\frac{R^n - 1}{R-1}.$$

Z równości téj znajdziemy z łatwością a. Taż sama równość służyć będzie i do rozwiązania innych jeszcze zagadnień, odnoszących się do rocznych wypłat.

PRZYKŁAD XLIV.

1. Przy jakiéj stopie procentu kapitał a rs da ten sam procent w ciągu jednego roku, co i kapitał b rs. po c od sta, także w ciągu jednego roku?

2. Pokazać, że summa na którą się zamieni dany kapitał, przy danéj stopie procentu i przez daną liczbę lat, licząc procent złożony, będzie większą od téj summy, na którą się zamieni tenże sam kapitał przy stopie procentu dwa razy większéj lecz przez liczbę lat dwa razy mniejszą.

3. Znaleść w ile lat kapitał podwoi się przy danéj stopie procentu.

4. Pokazać, przez wzięcie trzech pierwszych wyrazów rozwinięcia dwumianu $(1+r)^n$, że kapitał

dany będzie więcéj niż podwojony po upływie piętnastu lat przy stopie procentu 5 i procencie złożonym.

Zadania rozmaite.

1. Znaleść wartości liczebne następujących wyrażeń:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;\quad a^2+10ab+9b^2;\quad (a-b)^3;$$

i $\quad (a+9b)(a-b)$, gdy $a=5$ i $b=4$.

2. Uprościć wyrażenie:

$$5x-3\big[2x+9y-2\{3x-4(y-x)\}\big].$$

3. Podnieść do kwadratu: $3-5x+2x^2$.

4. Znaleść pierwsze cztery wyrazy ilorazu, powstałego z podzielenia 1 przez $1-x+x^2$, a także ilorazu z $1-x$ przez $1-x^3$.

5. Uprościć: $\dfrac{4x^3-17x+12}{6x^2-17x+12}$.

6. Znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną dla $4x^2-9$, $6x^2-5x-6$ i $6x^2+5x-6$.

7. Uprościć $\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{a}{x}-2}{x-a}+\dfrac{\frac{x}{a}+\frac{a}{x}+2}{x+a}$.

8. Rozwiązać równanie: $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x+5}{6}=\dfrac{7x-6}{9}$.

9. Pierwsze wydanie pewnéj książki zawierało 600 stronic i było podzielone na dwie części.

W drugiém wydaniu jedna czwarta część drugiéj części została opuszczoną; do pierwszéj zaś części dodano 30 stronnic. W skutek téj zmiany obie części w drugiem wydaniu były równe. Znaleść liczbę stronnic każdéj części w pierwszém wydaniu.

10. Za dwie książki kupione w księgarni zapłacił ktoś 5 rs. i dostał reszty połowę różnicy pomiędzy ceną jednéj książki i drugiéj. Znaleść ile kosztowała każda książka, jeżeli wiadomo, że różnica pomiędzy ceną droższéj książki i tańszéj, wynosiła jedną trzecią część ceny téj ostatniéj.

11. Dodać następujące wielomiany:

$$y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{3}x;\quad z+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y;\quad x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z,$$

i od wypadku odjąć $\frac{1}{6}x-y-\frac{1}{3}z$.

12. Znaleść wartość liczebną wyrażenia:

$$\frac{2a^3+b^3+c^3+a^2(b-c)+b^2(2a-c)+c^2(2a+b)}{2a^3-b^3+c^3+a^2(b-c)-b^2(2a-c)+c^2(2a+b)},$$

jeżeli wiemy, że: $a=1$, $b=3$, $c=5$.

13. Uprościć wyrażenie:

$$(a+b)^2-(a+b)(a-b)-\{a(2b-2)-(b^2-2a)\}.$$

14. Podzielić:

$$2x^5-x^4y-4x^3y^2+5x^2y^3-4y^5 \text{ przez } x^3-xy^2+2y^3.$$

15. Ułamek: $\frac{x^4-2x^3+x^2-1}{x^4+x^2+1}$ wyrazić w najprostszéj postaci.

16. Znaleść najmniejszą wspólną wielokrotnę względem:

$$x^2-9x-10,\quad x^2-7x-30,\quad (x+1)(x+3)(x-10)$$

i

$$x^2+4x+3.$$

17. Uprościć wyrażenie:

$$\frac{2}{x^2-9x-10}+\frac{3}{x^2-7x-30}-\frac{5}{x^2+4x+3}.$$

18. Rozwiązać:

$$x-\frac{x-2}{3}=\frac{x+15}{4}-\frac{x}{5}.$$

19. Rozwiązać:

$$\frac{3}{2}(x-1)-\frac{2}{3}(x+2)+\frac{1}{4}(x-3)=4.$$

20*. W Szwecyi mają się znajdować rozpadliny w skałach tak głębokie, że gdy kamień w nie puścimy, słyszymy uderzenie o dno dopiéro po upływie 25 sekund. Jakąż głębokość ma taka rozpadlina, jeżeli przyjmiemy, że prędkość głosu wynosi około 350 metrów na sekundę? (*).

21. Dodać następujące wielomiany:

$a+2x-y+24b$; $3a-4x-2y-81b$; $x+y-2a+55b$,

i wypadek odjąć od $3a+b+3x+2y$.

(*) Aby rozwiązać to zagadnienie, należy wiedzieć, że wysokość, z jakiéj ciało swobodnie puszczone spada w ciągu pierwszéj sekundy jest prawie 5 metrów, w ciągu 2-ch sekund jest: $5\times4=20$ metrów; w ciągu 3-ch sekund jest: $5\times9=45$ metrów, i t. d., w ogóle wysokość, z jakiéj ciało spadnie w ciągu t sekund wynosi $5t^2$.

22. Znaleść wartość liczebną wyrażenia:

$$\frac{a^2b}{7}+\sqrt{7ab(2c^2-ab)}-(2a-3b)^3,$$

gdy: $a=3,\quad b=2\frac{1}{3},\quad c=2.$

23. Uprościć wyrażenie:

$$\{x(x+a)-a(x-a)\}\{x(x-a)-a(a-x)\}.$$

24. Podzielić: $\frac{x^3}{6}-\frac{x}{4}+\frac{1}{8}-\frac{5x^2}{36}$ przez $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$ i następnie mnożeniem sprawdzić otrzymany wypadek.

25. Znaleść największy wspólny dzielnik dla

$$x^4+3x^3-10 \text{ i } x^4-3x^2+2.$$

26. Uprościć: $\frac{2a^2}{b^2-4a^2}-\frac{b}{b+2a}+\frac{a}{2a-b}$.

27. Znaleść najmiejszą wspólną wielokrotną dla

$$x^2-4,\quad 4x^2-7x-2 \text{ i } 4x^2+7x-2.$$

28. Rozwiązać: $\frac{2x}{3}-\frac{x-1}{15}+\frac{\frac{1}{2}x-1}{6}=4.$

29. Kupił ktoś marynarkę, tużurek i paltot zimowy i zapłacił za wszystko razem $87\frac{1}{2}$ rs. Tużurek kosztował tyle co marynarka, więcéj połowę ceny marynarki; paltot zaś tyle, ile marynarka i tużurek razem, więcéj połowę téj summy cen. Znaleść ile kosztowało każde z tych ubrań oddzielnie.

30. Rolnik sprzedaje pewną liczbę korcy pszenicy po $7\frac{1}{2}$ rs. korzec i 200 korcy owsa po $4\frac{1}{2}$ rs. korzec, i dostaje za wszystko razem tyle rubli, ileby

wziął sprzedając pszenicę i owies po jednakowéj cenie, mianowicie po $5\frac{1}{2}$ rs. korzec. Ileż pszenicy on sprzedał?

31. Znaleść wartość liczebną wyrażenia:

$$\frac{a-b+c}{a-b-c}-\frac{ad-bc}{bd+ac}-\sqrt{\frac{b^3}{a^3}-\frac{a^3}{c^3}},$$

gdy: $a=1,\ b=2,\ c=-\frac{1}{2},\ d=0.$

32. Wykonać mnożenie:

$$(x-a)(x-b)(x+a)(x+b).$$

i podzielić iloczyn przez $x^2+x(a+b)+ab.$

33. Podzielić: $8x^5-x^2y^3+\frac{1}{2}y^5$ przez $2x+y.$

34. Znaleść największy wspólny dzielnik dla

$$4x(x^2+10)-25x-62 \text{ i } x^2-7x+10.$$

35. Ułamek: $\frac{12x^2-15xy+3y^2}{6x^3-6x^2y+2xy^2-2y^3}$ sprowadzić do najprostszéj postaci.

36. Uprościć wyrażenie:

$$\frac{1}{1+\frac{a}{b+\frac{c}{d}}}+\frac{a}{a+b+\frac{c}{d}}.$$

37. Rozwiązać:

$$\frac{x-1}{9}-\frac{2-x}{4}-\frac{2x-1}{14}+\frac{2-3x}{30}=0.$$

38. Rozwiązać: $\frac{2x-1}{3}-\frac{x+4}{9}=\frac{5x-1}{27}$.

39. Robotnik A może wykonać pewną robotę w ciągu jednéj godziny, każdy zaś z robotników B i C wykonałby tęż samą robotę w ciągu dwóch godzin; w ileż godzin A, B i C pracując razem, mogliby wykonać tęż samą robotę?

40. Osoba A ma trzy razy tyle pieniędzy, ile ma osoba B; gdy A odda osobie B 2 ruble, wtedy miéć będzie dwa razy tyle, ile miéć będzie teraz osoba B. Ileż miała każda z tych osób z początku?

41. Dodać wielomiany:

$2x+3y+4z$; $x-2y+5z$ i $7x-y+z$.

42. Znaleść sumę, różnicę i iloczyn wielomianów:

$3x^2-4xy+4y^2$ i $4x^2+2xy-3y^2$.

43. Uprościć wyrażenie:

$2a-3(b-c)+\{a-2(b-c)\}-2\{a-3(b-c)\}$.

44. Znaleść największy wspólny dzielnik dla:

x^4+67x^2+66 i $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$.

45. Uprościć wyrażenie:

$$\frac{x^4-1}{x^2-1}\times\frac{x+1}{x^4+2x^3+2x^2+2x+1}.$$

46. Znaleźć najmniejszą wspólną wielokrotną względem: x^2-4; x^2-5x+6 i x^2-9.

47. Ułamek: $\frac{3x^3-4x^2-x-14}{6x^3-11x^2-10x+7}$ sprowadzić do najprostszéj postaci.

48. Rozwiązać równanie:

$3(x-1)-4(x-2)=2(3-x)$.

49. Rozwiązać równanie: $\sqrt{9+4x}=5-2\sqrt{x}$.

50. Ile funtów herbaty, po $3\frac{3}{4}$ rubla funt, należy zmieszać z 45 funtami herbaty po $3\frac{1}{3}$ rs. funt, aby po zmieszaniu wypadła herbata po $3\frac{1}{2}$ rs. funt?

51. Pomnożyć $3a^2+ab-b^2$ przez $a^2-2ab-3b^2$, i iloczyn podzielić przez $a+b$.

52. Znaleść największy wspólny dzielnik dla:

$2x(x-3)+3\left((x-6\frac{2}{3}\right)+15$ i $2x^3-5x^2-6x+15$.

53. Uprościć:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+x}}+\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$$

54. Uprościć: $\frac{(a+b)^2}{a-b}+\frac{ab+b^2}{a^2-ab}$.

55. Rozwiązać równania:

$\frac{1}{y}+\frac{2}{x}=\frac{2x+3}{xy}$, $\frac{1-2x^2}{x}=\frac{y}{x}-(1+2x)$.

56. Rozwiązać równania:

$x+\frac{3}{y}=\frac{7}{2}$; $3x-\frac{2}{y}=\frac{26}{3}$.

57. Rozwiązać równania:

$$2(x-3)-\frac{1}{5}(y-3)=3,$$

$$3(y-5)+\frac{1}{3}(x-2)=10.$$

58. Rozwiązać równania:

$7yz=10(y+z)$; $3zx=4(z+x)$; $9xy=20(x+y)$.

59. Rozwiązać równania:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=m;\ \frac{b}{x}-\frac{a}{y}=n$$

60*. Jeżeli połowę pewnéj liczby pomnożymy przez jéj część trzecią i do iloczynu dodamy połowę téjże liczby, wtedy otrzymamy na wypadek 30. Znaleść tę liczbę.

61. Podzielić $x^5-\frac{1}{x^5}$ przez $x-\frac{1}{x}$.

62. Ułamek $\frac{33x^2-49x-10}{21x^3-14x^2-29x-10}$ sprowadzić do najprostszéj postaci.

63. Uprościć wyrażenie:

$$\left(a-\frac{2a}{x+\frac{1}{x}}\right):\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}-1\right)$$

64. Rozwiązać: $3(x-1)+2(x-2)=x-3$.

65. Rozwiązać równania:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{4};\ \frac{2x-3}{5}=\frac{13-2y}{7}.$$

66. Rozwiązać równania:

$$5x+2=3y;\ 6xy-10x^2+\frac{y-2x}{a}=8.$$

67. Rozwiązać równania:

$$\frac{x+y}{7}-\frac{2y-x}{3}=3,\ \frac{3y+2x}{4}+\frac{9(x-1)}{8}=\frac{x}{2}.$$

68. Rozwiązać równanie: $\sqrt{x^2+40}=x+4$.

69. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x^2+3x+2}{x+1}-\frac{x^2-x-6}{x+2}=\frac{5x}{2}.$$

70. Wiek ojca jest dzisiaj równy podwójnemu wiekowi syna; dziesięć lat temu wiek ojca był równy potrójnemu wiekowi syna. Znaleść, ile lat ma dzisiaj każdy.

71. Znaleść wartość liczebną następującego wyrażenia:

$$\sqrt{2x+1}-\left(x+\frac{6}{\sqrt{x}}\right)-\left(3-\frac{x^2}{4-\sqrt[3]{2x}}\right),$$

gdy $x=4$,

72. Ułamek: $\frac{3x^3-16x^2+23x-6}{2x^3-11x^2+17x-6}$ sprowadzić do najprostszéj postaci i znaleść jego wartość, gdy $x=3$.

73. Rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego następujące trójmiany:

x^2-3x+2 ; $x^2-7x+10$; x^2-6x+5.

74. Uprościć:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{3}{x^2-7x+10}-\frac{4}{x^2-6x+5}.$$

75. Rozwiązać:

$$\frac{1}{14}\left(3x+\frac{11}{3}\right)-\frac{1}{7}\left(4x-2\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}(5x-1).$$

76. Rozwiązać: $9x^2-63x+68=0$.

77. Majster i czeladnik odebrali zapłatę za pewną robotę, od której płaca była liczoną dziennie. Majster otrzymał 27 rs.; czeladnik zaś, który w tym samym przeciągu czasu nie był trzy dni przy robocie, otrzymał 12 rs. Gdyby naodwrót majster był nieobecny przez trzy dni, a czeladnik pracował przez cały przeciąg czasu, wtedy otrzymaliby jednakowe sumy pieniędzy. Ileż każdy dostawał dziennie?

78. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z

$$9x^4-6x^3+7x^2-2x+1,$$

i sprawdzić wypadek, przypuszczając że $x=10$.

79. Jeżeli $a:b=c:d$, pokazać, że będzie także:

$$a^2c+ac^2:b^2d+bd^2=(a+c)^3:(b+d)^3.$$

80. Jeżeli a, b, c, d, są w postępie gieometrycznym, pokazać że a^2+d^2 jest większe aniżeli b^2+c^2.

81. Jeżeli n jest liczbą całkowitą i dodatną, wtedy: $7^{2n+1}+1$ jest podzielne przez 8.

82. Znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną względem: x^2-4y^2; $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$,

i $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$.

83. Rozwiązać równania:

$$\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2};\quad \frac{4}{x}-\frac{3}{y}=2\frac{5}{6}$$

84. Rozwiązać równanie:

$$x^2+2x+2\sqrt{x^2+2x+1}=47.$$

85. Jeżeli do pewnéj liczby dwucyfrowéj dodamy liczbę złożoną z tych samych cyfr, lecz napisanych w odwrotnym porządku, wtedy otrzymamy na sumę 121; iloczyn zaś tych dwóch cyfr jest równy 28. Znaleść tę liczbę.

86. Z beczki napełnionéj winem utoczono 9 garncy i dolano następnie tyleż wody. Potém poraz drugi utoczono znowuż 9 garncy mięszaniny i dolano tyleż garncy wody. Jeżeli stosunek wina znajdującego się teraz w beczce, do wody dolanéj jest równy 16 : 9, to ileż było wina z początku w beczce?

87. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wielomianu:

$$16x^6+25y^6-30xy^5-24x^4y^2+9x^2y^4+40x^3y^3.$$

88. W postępie arytmetycznym wyraz pierwszy jest 81, czternasty zaś 159. W postępie gieometrycznym wyraz drugi jest 81, a szósty 16. Znaléźć liczbę średnią harmonijną pomiędzy czwartymi wyrazami tych dwóch postępów.

89. Znaleść wartość wyrażenia $\sqrt[6]{5}-1$ do pięciu cyfr dziesiętnych, wiedząc, że: $\sqrt{5}=2{,}23606$.

90. Pokazać, że dla x większego od 9, $\sqrt{x}$ będzie większy od $\sqrt[3]{x+18}$.

91. Podzielić: $(x-y)^3\quad 2y(x-y)^2+y^2(x-y)$ przez $(x-2y)^2$.

92. Znaléźć największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotną dla:

$$24(x^3+x^2y+xy^2+y^3) \text{ i } 16(x^3-x^2y+xy^2-y^3).$$

93. Uprościć:

$$\frac{x}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}+\frac{y}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}+$$

$$+\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

94. Rozwiązać równanie:

$$\frac{6x+7}{13}+\frac{2x+5}{7}=3-\frac{8x+1}{9}.$$

95. Rozwiązać równania:

$$xy+20(x-y)=0;\quad yz+30(y-z)=0;\quad 3x-2z=0.$$

96. Rozwiązać równanie:

$$3x^2-2x+\sqrt{3x^2-4x-6}=18+2x.$$

97*. Rozwiązać równania:

1) $$\sqrt{12x-11}+\sqrt{3x+16}=\frac{9x+27}{\sqrt{3x+16}}$$

2) $$\sqrt{x+15}+\sqrt{x-24}-\sqrt{x-13}=\sqrt{x}.$$

98*. Kupiec bławatny ma sztukę aksamitu. Gdyby ją sprzedał, biorąc po $5\frac{5}{8}$ rs. za łokieć, wtedy na całéj sztuce stracił by $22\frac{1}{2}$ rs.; gdyby znowuż sprzedał ją, biorąc po $6\frac{3}{8}$ rs. za łokieć, wtedy na całéj sztuce zyskał by $22\frac{1}{2}$ rs. Pytanie: ile było łokci w sztuce i ile rubli jego samego sztuka kosztowała.

99. Zesumować do 8 wyrazów i do nieskończoności szereg:

$$12+4+1\tfrac{1}{3}+\ldots.$$

100. Znaleść trzy liczby stanowiące postęp ilorazowy i takie, że jeżeli od pierwszéj odejmiemy 1, od drugiéj 3 i od trzeciéj 9, wtedy otrzymamy trzy liczby w postępie różnicowym, którego suma będzie 15.

101. Pomnożyć: $x^{\frac{7}{2}}-x^3+x^{\frac{5}{2}}-x^2+x^{\frac{3}{2}}-x+x^{\frac{1}{2}}-1$ przez $x^{\frac{1}{2}}+1$; i $1-x^{\frac{3}{4}}$ podzielić przez $1-x^{\frac{1}{4}}$.

102. Znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną względem:

$$x^3-a^3;\quad x^3+a^3;\quad x^4+a^2x^2+a^4;\quad x^3-ax^2-a^2x+a^3$$

i $$x^3+ax^2-a^2x-a^3.$$

103. Uprościć wyrażenie:

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2+\dfrac{2b^2}{1+\dfrac{a+b}{a-b}}}$$

104. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x+5}{6}+\frac{1}{9}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{5}\right)-\frac{2}{3}\left(3+2x\right)=\frac{4x-14}{3}+\frac{x+10}{10}.$$

105. Rozwiązać równanie:

$$\frac{6}{x-1}+\frac{8}{x-5}=\frac{7}{x+1}+\frac{18}{x+5}.$$

106. Rozwiązać równania:

$$x^2+y^2+z^2=50$$
$$yz+xy-zx=7$$
$$xy-yz-zx=47.$$

107. Dwie osoby A i B wyjeżdżają razem koleją do miasta odległego o 120 wiorst. Ponieważ osoba B ma zamiar zaraz wrócić, przeto bierze bilet powrotny, za który płaci o połowę więcéj, aniżeli osoba A. Pokazało się z obliczenia, że za każde 100 wiorst drogi osoba B płaci tym sposobem o $1\frac{1}{24}$ rs. mniéj, aniżeli osoba A. Ileż kosztuje bilet osoby A?

108. Znaleść wyraz pierwszy w proporcyi ciągłéj, w któréj średnim wyrazem jest średnia gieometryczna pomiędzy 2 i 18, a wyrazem ostatnim jest średnia harmonijna pomiędzy 3 i $\frac{3}{7}$.

109. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wyrażenia:

$$\frac{x}{y}\left(2+\frac{x}{y}\right)-\frac{y}{x}\left(2-\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right).$$

110. Jeżeli $a:b=b:c$, pokazać, że będzie:

$$b^4=\frac{a^2-b^2+c^2}{a^{-2}-b^{-2}+c^{-2}}.$$

111. Podzielić:

$$x^{\frac{3n}{2}}-x^{-\frac{3n}{2}} \text{ przez } x^{\frac{n}{2}}-x^{-\frac{n}{2}}.$$

112. Ułamek: $\frac{x^3+3x^2-20}{x^4-x^2-12}$ sprowadzić do najprostszéj postaci i znaleść jego wartość, gdy $x=2$.

113. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x-3}{x-4}-\frac{13}{3}=\frac{x+2}{3(6-x)}.$$

114. Znaleść te wartości na m, przy których równanie $m^2x^2+(m^2+m)ax+a^2=0$ ma pierwiastki równe.

115. Rozwiązać równania:

$$3xy+x^2=10, \quad 5xy-2x^2=2.$$

116. Rozwiązać równania:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5; \quad \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{6}.$$

117. Znaleść ułamek mający takie własności: jeżeli licznik jego pomnożymy przez 4, a do mianownika dodamy 3, wtedy wartość całego ułamku się podwoi; lecz jeżeli do licznika dodamy 2, a mianownik pomnożymy przez 4, wtedy wartość całego ułamku stanie się dwa razy mniejszą.

118. Uprościć: $\left\{-(x^3)^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\times\left\{-(-x)^{-3}\right\}^{\frac{1}{2}}$.

119. Wyraz trzeci postępu arytmetycznego jest 18, wyraz siódmy jest 30: znaleść sumę 17 wyrazów tegoż postępu.

120. Pokazać że jeżeli trzy ilości $\frac{a+b}{2}, b, \frac{b+c}{2}$ stanowią postęp harmonijny, wtedy a, b, c stanowią postęp gieometryczny.

121. Uprościć wyrażenie:

$$a-\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{b+\cfrac{ab}{a-b}}}$$

122. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z:

$$37x^2y^2-30x^3y+9x^4-20xy^3+4y^4.$$

123. Wyrażenie: $3x^3-14x^2-24x$ rozłożyć na czynniki stopnia pierwszego.

124. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x+5}{2x-1}-\frac{3(5x+1)}{5x+4}=\frac{4}{2x-1}-2\frac{1}{2}.$$

125. Rozwiązać: $x^3+\frac{1}{x^3}=\frac{65}{8}$.

126. Rozwiązać:

$$x^2-y^2=9;\quad x+4=3(y-1).$$

127. Rozwiązać równania:

$$y+\sqrt{x^2-1}=2;\quad \sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{}.$$

128. Jeżeli a, b, c, d stanowią postęp ilorazowy, wtedy będzie:

$$a:b+d=c^3:c^2d+d^3.$$

129. Wykładnik w postępie różnicowym jest równy 2, a liczba wyrazów jest równą wyrazowi drugiemu; znaleść, jaki powinien być wyraz pierwszy tegoż postępu, aby jego suma była równą 35.

130. Znaleść sumę n wyrazów szeregu, którego wyraz m^{ty} jest 2×3^m.

131. Uprościć wyrażenie:

$$\frac{1+\sqrt{1-2x}}{1-\sqrt{1-2x}}+\frac{x-\sqrt{1-2x}}{x}$$

132. Znaleść największy wspólny dzielnik dla: $30x^4+16x^3-50x^2-24x$ i $24x^4+14x^3-48x^2-32x$.

133. Rozwiązać równanie: $x^2-x-12=0$.

134. Ułożyć równanie stopnia drugiego, którego pierwiastkami byłyby: 3 i -2.

135. Rozwiązać równanie:

$$x^4+\frac{1}{x^4}=a^4+\frac{1}{a^4}.$$

136. Rozwiązać równanie:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}=1+\sqrt{\frac{1}{x^2+5}}.$$

137. Znaleść wartość wyrażenia $\frac{6}{\sqrt{3}-1}$ do pięciu cyfr dziesiętnych, wiedząc, że: $\sqrt{3}=1{,}73205$.

138. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wyrażenia: $61-28\sqrt{3}$.

139. Znaleść średnią proporcyjonalną pomiędzy $\frac{x+y}{x-y}$ i $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$.

140. Znaleść liczbę wyrazów i sumę wyrazów postępu różnicowego, którego pierwszym wyrazem jest a, drugim b, a ostatnim c.

141. Znaleść wartości liczebne następujących wyrażeń:

$$\frac{a+b+c}{a-b+c},\quad \frac{ab-cd}{ac-bd},\quad \sqrt{\frac{a-1}{b-3}},$$

gdy $a=5,\ b=4,\ c=3,\ d=2.$

142. W iloczynie z: $1+4x+7x^2+10x^3+15x^4$ przez: $1+5x+9x^2+13x^3+17x^4$ znaleść współczynnik przy x^4.

Podzielić: $21x^5-2x^4-70x^3-23x^2+33x+27$ przez: $7x^2+4x-9$.

143. Uprościć następujące wyrażenia:

a) $$\frac{a^4-b^4}{a^2+b^2+2ab}:\frac{a-b}{a^2+ab};$$

b) $$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}-\frac{x-a}{x+a}.$$

144. Rozwiązać następujące równania:

1) $$\frac{60-x}{14}-\frac{3x-5}{7}=6-\frac{24-3x}{4};$$

2) $$\frac{x+4}{x+3}=\frac{5x+12}{\frac{43x}{9}+9}.$$

3) $$\frac{3x+5y}{20}+\frac{5x-3y}{8}=3;\quad \frac{x+1}{y+2}=\frac{2}{3}.$$

145. Rozwiązać następujące równania:

1) $$\frac{20}{8-x}+\frac{21}{6-x}=11.$$

2) $$\sqrt{\frac{x}{2}}+\sqrt{3x+1}=7.$$

3) $3x^2-4xy=7;\quad 3xy-4y^2=5.$

146. Dług 106 rubli został zapłacony papierkami pięciorublowymi i rublowymi; jednych i drugich było razem 32: znaleść, ile było papierków pięciorublowych, a ile rublowych.

147. Handlarz zakupił stado wołów za 1800 rubli; w drodze zdechły mu dwa woły, wskutek czego po sprowadzeniu okazało się, że mu jedna sztuka wypadła o 10 rubli drożéj, aniżeli z początku zapłacił. Ileż zakupił sztuk wołów?

148. Wiedząc, że suma dwóch liczb wynosi 40 a summa ich odwrotności wynosi $\frac{5}{48}$, znaleść te liczby.

149. Znaleść liczbę średnią proporcyjonalną pomiędzy $2\frac{1}{2}$ i $5\frac{5}{8}$; a także trzeci wyraz w proporcyi ciągłéj, w któréj wyrazem pierwszym jest 100 a średnim 130.

150. Mamy papierki bankowe dwóch gatunków: jeżeli weźmiemy 8 papierków pierwszego gatunku (większych) i 9 papierków drugiego gatunku, wtedy miéć będą one tęż samą wartość, jak gdybyśmy wzięli 6 papierków pierwszego gatunku i 19 papierków drugiego gatunku. Znaleść stosunek pomiędzy wartością papierka pierwszego gatunku i wartością papierka drugiego gatunku.

151. Znieść nawiasy w następującém wyrażeniu:

$$(x-a)(x-b)(x-c)-\big[bc(x-a)-\{(a+b+c)x-a(b+c)\}x\big].$$

152. Pomnożyć:

$a+2\sqrt[4]{a^2b}+2\sqrt{b}$ przez: $a-2\sqrt[4]{a^2b}+2\sqrt{b}$.

153. Znaleść największy wspólny dzielnik dla:

$x^4-16x^3+93x^2-234x+216$ i $4x^3-48x^2+186x-234$.

154. Rozwiązać następujące równania:

1) $\frac{13x-1}{4}-\frac{28-5x}{3}=17-\frac{3x+1}{8}$.

2) $\frac{2x+3}{3x+9}=\frac{2x-8}{3x-13}$.

3) $x-y=3$; $3\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=11\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$.

155. Rozwiązać następujące równania:

1) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}=7$.

2) $7x-20\sqrt{x}=3$.

3) $7xy-5x^2=36$; $4xy-3y^2=105$.

156. Chłopiec wydał wszystkie pieniądze, które miał, na kupno pomarańcz; gdyby dostał o 5 pomarańcz więcéj wtedy każda pomarańcza kosztowała by go o 1 kopiejkę taniéj; gdyby znowuż za też same pieniądze dostał o 3 pomarańcze mniéj, wtedy każda pomarańcza kosztowała by go o 1 kopiejkę więcéj. Ileż pieniędzy wydał?

157. Jeżeli kupiec sprzedaje 6 funtów pewnego towaru za 5 rs., wtedy ma zysku 25 od sta; pytanie ile miéć będzie zysku od sta, jeżeli ten sam towar sprzedawać będzie 5 funtów za 6 rs.?

158. Konia sprzedano za 240 rs., z zyskiem, który od sta był równym cenie jaką koń kosztował, podzielonéj przez dziesięć. Ileż koń kosztował?

159. Uprościć wyrażenie:

$$\sqrt{4a^2+\sqrt{16a^2x^2+8ax^3+x^4}}.$$

160. Pokazać, że jeżeli summa dwóch ułamków jest równa jedności, wtedy summa powstała z dodania do ułamku pierwszego kwadratu ułamku drugiego, jest równą summie, powstałéj z dodania do ułamku drugiego kwadratu ułamku pierwszego.

161. Uprościć następujące wyrażenia:

$$a-[b-\{a+(b-a)\}];$$

$$25a-19b-|3b-\{4a-(5b-6c)\}|-8a;$$

$$\left[\left\{(a^{-m})^{-n}\right\}^{-p}\right]:\left[\left\{(a^{2m})^{-3p}\right\}^{2n}\right].$$

162. Znaleść największy wspólny dzielnik dla:

$18a^3-18a^2x+6ax^2-6x^3$ i $60a^2-75ax+15x^2$.

163. Znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną względem: $18(x^2-y^2)$; $12(x-y)^2$ i $24(x^3+y^3)$.

164. Rozwiązać następujące równania:

1) $\frac{2x-4}{7}+\frac{3x-2}{5}=7$.

2) $\frac{9x+20}{36}=\frac{4x-12}{5x-4}+\frac{x}{4}$.

3) $\frac{\frac{x}{2}+4}{\frac{x}{3}+1}=\frac{2}{1}$.

4) $2(x-y)=3(x-4y)$; $14(x+y)=11(x+8)$.

165. Rozwiązać następujące równania:

1) $32x-5x^2=12.$

2) $\sqrt{2x+3}\,.\,\sqrt{x-2}=15.$

3) $x^2+y^2=290,\quad xy=143.$

4) $3x^2-4y^2=8;\quad 5x^2-6xy=32.$

166. Robotnicy A i B wykonali razem robotę w ciągu 3 dni taką, że sam robotnik A pracowałby nad nią 4 dni zanim by ją skończył. W ileż dni sam robotnik B skończyłby tę robotę?

167. Znaleść dwie liczby, których iloczyn stanowiłby $\frac{2}{5}$ części summy ich kwadratów; różnica zaś ich kwadratów równałaby się 96 wziętemu ilorazowi z podzielenia mniejszéj z tych liczb przez większą.

168. Znaleść ułamek, który stałby się równym $\frac{1}{3}$, gdybyśmy jego licznik powiększyli o jedność, i który stałby się równym $\frac{1}{4}$ gdybyśmy podobnie postąpili z mianownikiem.

169. Pokazać, że jeżeli: $a:b=c:d$, to będzie także:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}:\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}:\frac{1}{c}-\frac{1}{d}.$$

170. Znaleść średnią proporcyjonalną pomiędzy 169 i 256, a także ostatni wyraz w proporcyi ciągłéj, w któréj wyrazem pierwszym jest 25, średnim zaś 100.

171. Znieść nawiasy w następującém wyrażeniu:

$$b-2\{b-3[a-4(a-b)]\}.$$

172. Uprościć następujące wyrażenia:

$$\frac{x}{y}+\frac{2x^2+y^2}{xy}+\frac{3xy^2-3x^3-y^3}{x^2y}-\frac{4xy^3-2x^2y^2-y^4}{x^2y^2};$$

$$(p-q-m)p-(m+q-p)q+(q+m)m+m(p-m)+q^2;$$

$$\left(\frac{x^{p+q}}{x^q}\right)^p:\left(\frac{x^q}{x^{q-p}}\right)^{p-q}.$$

173. Znaleść największy wspólny dzielnik dla:

$$x^4+ax^3-9a^2x^2+11a^3x-4a^4$$

$$x^4-ax^3-3a^2x^2+5a^3x-2a^4.$$

174. Rozwiązać następujące równania:

1) $x-\frac{2x+1}{3}=\frac{x+7}{5};$

2) $\frac{10x+17}{18}-\frac{12x+2}{13x-16}=\frac{5x-4}{9};$

3) $9x+\frac{8y}{5}=70;\quad 7y-\frac{13x}{3}=44;$

4) $\frac{6x+7}{3x+1}=\frac{2x+19}{x+7}.$

175. Rozwiązać równania następujące:

1) $x+4-\frac{7x-8}{x}=3;$

2) $2x^2-3y^2=2;\quad xy=20;$

3) $2y^2-x^2=1$; $3x^2-4xy=7$.

4) $x+y=6$; $x^3+y^3=126$.

176. O której godzinie i minucie po godzinie 12 skazówki zegara będą po raz pierwszy tworzyć kąt prosty?

177. Pewna liczba, podzielona przez iloczyn jéj cyfr, daje na iloraz 2; jeżeli zaś do niéj dodamy 27, wtedy otrzymamy liczbę złożoną z tych samych cyfr, lecz napisanych w porządku odwrotnym. Jakaż to jest liczba?

178. Dług 1230 rs. został zapłacony papierkami 25 rublowemi i 10 rublowemi; pierwszych było o 17 więcéj niż drugich. Ileż było papierków 25, a ile 10 rublowych?

179. Znaleść summę sześciu wyrazów, a także summę nieskończonéj liczby wyrazów szeregu:

$$12+8+5\tfrac{1}{3}+\ldots.$$

180. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wyrażenia: $55-7\sqrt{24}$.

181. Znaleść wartość wyrażenia:

$$x^2+xy+y^2,$$

jeżeli $x=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$, a $y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

182. Ułamek: $\dfrac{3x^2-16x-12}{x^3-8x^2-12x+144}$ sprowadzić do najprostszéj postaci.

183. Pokazać, że jeżeli dwie liczby dwucyfrowe, są złożone z tych samych cyfr, ale napisanych w porządku odwrotnym, wtedy różnica tych liczb jest zawsze podzielna przez 9.

184. Rozwiązać równania następujące:

1) $\dfrac{3x-3}{4}-\dfrac{3x-4}{3}=\dfrac{21-4x}{9}$.

2) $\dfrac{2x+3y}{6}+\dfrac{x}{3}=8$; $\dfrac{7y-3x}{2}-y=11$.

3) $4x-\dfrac{14-x}{x+1}=14$.

185. Rozwiązać równania następujące:

1) $\sqrt{x+3}\times\sqrt{3x-3}=24$.

2) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+4}=8$.

3) $x^4-x^2(2x-3)=2x+8$.

186. Znaleść dwie liczby, których stosunek byłby równy stosunkowi 9:7 i takie aby kwadrat ich sumy był równy sześcianowi ich różnicy.

187. Podróżny wychodzi z miasta A do miasta B i idzie z prędkością $3\frac{1}{2}$ wiorst na godzinę. W czterdzieści minut późniéj drugi podróżny wychodzi z B ku A z prędkością $4\frac{1}{2}$ wiorst na godz. Ostatni przeszedł pół wiorsty po za środek odległości pomiędzy A i B, zanim spotkał pierwszego podróżnego. Znaleść odległość pomiędzy A i B.

188*. 37 funtów cyny po zanurzeniu w wodzie traci 5 funtów na wadze; 23 funty ołowiu traci w wodzie 2 funty na wadze. Kawałek aliażu, złożonego z cyny i ołowiu, i ważący 120 funtów, po zanurzeniu w wodzie stracił na wadze 14 funtów. Ileż jest cyny a ile ołowiu w tym aliażu?

189. Pokazać, że:

$$mn+\sqrt{(m^2+4)(n^2+4)}=2\left(xy+\frac{1}{xy}\right),$$

jeżeli: $m=x-x^{-1}$, i $n=y-y^{-1}$.

190. Znaleść summę dziewiętnastu wyrazów szeregu: $\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\ldots\ldots$.

191. Pomnożyć:

$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+\frac{1}{4}$, przez: $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2}$.

Podzielić: $\frac{3x^5}{4}-4x^4+\frac{77}{8}x^3-\frac{43}{4}x^2-\frac{33}{4}x+27$,

przez: $\frac{x^2}{2}-x+3$.

192. Ułamek: $\frac{4x^3-27x^2+58x-39}{x^4-9x^3+29x^2-39x+18}$ sprowadzić do najprostszéj postaci.

193. Znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną względem:

$x^3+2x^2y+4xy^2+8y^3$ i $x^3-2x^2y+4xy^2-8y^3$.

194. Rozwiązać równania następujące:

1) $\frac{1}{4}(x+6)-\frac{1}{12}(16-3x)=4\frac{1}{6}$.

2) $\frac{5x-9}{13}-\frac{23-2x}{9}=3x-20$.

3) $\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{3}(2x+4)$; $\frac{1}{3}(x-y)=\frac{1}{2}(x-24)$.

195. Rozwiązać następujące równania:

1) $\frac{3}{4}(x^2-3)=\frac{1}{8}(x-3)$.

2) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-3}=10$.

3) $x+y=6$; $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440$.

196*. Pociąg osobowy, idący z prędkością 48 wiorst na godzinę, przejeżdża odległość pomiędzy Warszawą i Skierniewicami w czasie o $1\frac{5}{8}$ godziny krótszym, aniżeli pociąg towarowy, idący z prędkością 22 wiorst na godzinę. Ileż wiorst wynosi odległość Warszawy od Skierniewic?

197. Znaleść liczbę dwucyfrową, którąby była równą potrojonemu iloczynowi cyfr składających ją, i którąby, będąc podzieloną przez summę tychże cyfr, dała na iloraz 4.

198*. Trzy osoby A, B i C zasiadły do gry. W pierwszéj partyi B przegrał połowę swoich pieniędzy do A. W drugiéj partyi przeciwnie B wygrał od C jedną trzecią część tych pieniędzy, jakie C miał. W trzeciéj zaś partyi C wygrał od A jedną czwartą część tych pieniędzy jakie A miał wtedy. Po trze-

ciéj partyi porachowali swoje pieniądze i okazało się, że każdy miał po 700 rs. Pytanie: po ileż rs. każdy miał przed pierwszą partyą?

199. Wyciągnąć pierwiastki kwadratowe z wyrażeń:

$$a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4,$$

i $$(a+b)^4-2(a^2+b^2)(a+b)^2+2(a^4+b^4).$$

200. Znaleść postęp ilorazowy, złożony z czterech wyrazów i taki, że jego wyraz trzeci jest o 2 większy od summy pierwszego i drugiego, a wyraz czwarty jest o 4 większy od summy drugiego i trzeciego.

201. Pomnożyć: $8-3x+\frac{38x-6x^2-58}{7-2x}$

przez: $9-2x+\frac{7x^2-55+30x}{6-3x}$

202. Znaleść największy wspólny dzielnik dla:
x^4+4x^2+16 i x^4-x^3+8x-8.

203. Dodać ułamki:

$$\frac{1}{2+3x},\quad \frac{2x-5}{(2+3x)^2},\quad \frac{x^2-x+6}{(2+3x)^3}.$$

Pomnożyć: $\frac{1}{1-x+x^2}$ przez: $\frac{1}{1+x+x^2}$.

204. Rozwiązać równania następujące:

1) $\frac{3x+5}{8}-\frac{21+x}{3}=39-5x$;

2) $(a+b)(a-x)=a(b-x)$;

3) $\frac{2x+3y}{16}+\frac{x}{12}=2\frac{3}{4}$; $\frac{7y-3x}{2}-2y=3$.

205. Rozwiązać równania następujące:

1) $6x+\frac{35-3x}{x}=44.$

2) $4(x^2+3x)-21\sqrt{x^2+3x}=12.$

3) $x^2+yx=15$; $y^2+xy=10.$

206*. Dwóch kupców miało razem 10000 rs.; kapitał jednego i drugiego procentuje się jednakowo (to jest zysk obu od sta na rok, jest jednakowy). Pierwszy z nich po upływie trzech lat ma kapitału wraz z procentem 9900 rs.; drugi zaś już po upływie dwóch lat ma kapitału wraz z procentem 9900 rs.. Pytanie: Jakiż był początkowy kapitał każdego z tych kupców?

207. W liczbie dwucyfrowéj cyfra, stojąca na miejscu dziesiątków jest o 2 większą od cyfry, stojącéj na miejscu jedności; jeżeli zaś cyfry odwrócimy, wtedy nowa liczba będzie w takim stosunku do liczby danéj, w jakim jest 7 do 4. Znaleść tę liczbę.

208. Ma ktoś w portmonetce pewną summę pieniędzy, złożoną tylko z papierków pięcio rublowych i rublowych. Kwadrat z liczby papierków pięciorublowych jest równy podwojonéj liczbie papierków rublowych, a cała kwota pieniędzy zawiera tyle rubli jaka jest podwojona summa liczby papierków jednego i drugiego rodzaju. Pytanie: ileż jest papierków każdego rodzaju i jak summa znajduje się w portmonetce?

209. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z wielomianu:

$$4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16ab^2x+16b^4.$$

210. Napisać taki postęp różnicowy, którego wyrazem pierwszym jest 7 i w którym summa dwunastu pierwszych wyrazów jest równą 348.

211. Podzielić:

$$6x^5-25x^4y+47x^3y^2-49x^2y^3+62xy^4-45y^5$$

przez $2x^2-7xy+9y^2$.

212. Pomnożyć:

$$3+5x-\frac{12+41x+36x^2}{4+7x} \text{ przez: } 5-2x+\frac{26x-8x^2-14}{3-4x}.$$

213. Ułamek:

$$\frac{4x^3-45x^2+162x-185}{x^4-15x^3+81x^2-185x+150}$$

sprowadzić do najprostszéj postaci.

214. Rozwiązać równania następujące:

$$1)\quad \frac{3x-2}{5}-\frac{1-5x}{11}=9.$$

$$2)\quad x+\frac{1}{4}y=17;\quad y+\frac{1}{4}x=8.$$

$$3)\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{9};\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{18}.$$

215. Rozwiązać równania następujące:

$$1)\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

$$2)\quad 10yx-7x^2=7;\quad 5y^2-3xy=20.$$

$$3)\quad x+y=6;\quad x^4+y^4=272.$$

216. 684 rubli podzielić na takie dwie części, aby liczba pięciorublówek, zawartych w jednéj części była równą liczbie rublówek, zawartych w drugiéj części.

217. Liczba złożona z trzech cyfr, których summa jest równa 9. wynosi 42 razy wziętą summę cyfry średniéj i pierwszéj z lewéj strony; cyfra zaś ostatnia z prawéj strony jest równą podwojonéj summie dwóch cyfr pozostałych. Znaleść tę liczbę.

218. Kupił ktoś pewną liczbę akcyj za 2625 rubli; gdy następnie akcye poszły w górę, tak że ich wartość podwoiła się, sprzedał wszystkie, z wyjątkiem pięciu, które sobie zostawił, za 4600 rs. Ileż akcyj kupił?

219. Cztery liczby stanowią postęp różnicowy: summa ich jest 50, a iloczyn drugiéj i trzeciéj wynosi 156. Znaleść te liczby.

220. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z:

$$17+12\sqrt{2}.$$

221. Podzielić: x^9-1 przez: x^3-1,

i: $m(qx^2-rx)+p(mx^3-nx^2)-n(qx-r)$ przez $mx-n$.

222. Uprościć:

$$\frac{ax^m-bx^{m+1}}{a^2bx-b^3x^3} \text{ i } \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}.$$

223. Znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną względem: $7x^3-4x^2-21x+12$ i $21x^2-26x+8$.

224. Rozwiązać równania następujące:

$$1)\quad \frac{2x-4}{7}-\frac{2-3x}{5}=7.$$

$$2)\quad 17x-13y=144;\quad 23x+19y=890.$$

$$3)\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{8};\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{9};\quad \frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{5}{72}.$$

225. Rozwiązać równania następujące:

1) $\frac{x}{100}-\frac{21}{25x}=\frac{1}{4}$.

2) $0{,}0075x^2+0{,}75x=150$.

3) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{c}$. $b(x-a)+a(b-y)=0$.

226. Człowiek, który idąc zwykłym krokiem, przechodzi na godzinę $3\frac{1}{2}$ wiorsty, wyszedł na przechadzkę; i. uszedłszy pewną odległość, przypomniał sobie, że miał załatwić w domu pilny interes. Wraca więc, biegnąc z początku z prędkością 7 wiorst na godzinę, a następnie pozostałą część drogi przechodzi zwykłym swoim krokiem w ciągu pięciu minut. Pokazało się, że od chwili jego wyjścia z domu aż do powrotu upłynęło 25 minut. Pytanie: ileż wiorst on przebiegł.

227. Ojciec umierając, dzieli testamentem swój majątek, wynoszący 75000 rs., pomiędzy pozostałą żonę, dwóch synów i trzy córki w następujący sposób: każdemu synowi zapisuje dwa razy tyle co każdéj córce, a wdowie o 5000 rs. więcéj aniżeli wszystkim dzieciom razem. Ileż każda osoba otrzymała?

228. Zbiornik może być napełniony wodą, wpływającą dwiema rurami, w ciągu $1\frac{1}{3}$ godziny. Rura szersza może napełnić ten zbiornik o 2 godziny prędzéj aniżeli rura węższa. Znaleść w ile godzin każda z tych rur oddzielnie napełniłaby zbiornik.

229. Wyraz trzeci postępu różnicowego jest równy cztery razy wziętemu wyrazowi pierwszemu, a wyraz szósty tegoż postępu jest 17; napisać ten postęp.

230. Znaleść summę n wyrazów postępu.

$$3\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}+\ldots.$$

231. Uprościć następujące wyrażenia:

$$x^{a+b+c}\times x^{a+b-c}\times x^{a-b+c}\times x^{b+c-a};$$

$$\frac{b}{a+b}-\frac{a+b}{2a}+\frac{a^2+b^2}{2a(a-b)};$$

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a^3-3ab(a-b)-b^3}\times\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

232. Sprowadzić do najprostszéj postaci ułamek:

$$\frac{x^2+11x+30}{9x^3+53x^2-9x-18}.$$

233. Rozwiązać równania następujące:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}=\frac{7}{3}$.

2) $\frac{3}{1+x}+\frac{3}{1-x}=8$.

3) $\frac{4x+5y}{40}=x-y$; $\frac{2x-y}{3}+2y=\frac{1}{2}$.

234. Rozwiązać równania następujące:

1) $\frac{48}{x+3}=\frac{165}{x+10}-5$.

2) $ax^2+b^2+c^2=a^2+2bc+2(b-c)x\sqrt{a}$.

3) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4$; $x^2+y^2=41$.

235. Oddział wojska, uciekający po przegranéj bitwie przed nieprzyjacielem, jest w pewnéj chwili odległy od niego na 26 wiorst. W ucieczce swéj maszeruje z taką prędkością, że odbywa 18 wiorst na dzień. Nieprzyjaciel ściga go z prędkością 23 wiorst na dzień; lecz najprzód pierwszy dzień traci na przygotowaniach; następnie po dwóch dniach marszu jest zmuszony do zatrzymania się przez jeden dzień, dla naprawy mostu, i toż samo się powtarza znowuż po nowych dwóch dniach marszu. Pytanie: po ilu dniach, licząc od wyjścia cofającego się oddziału, ten ostatni zostanie dognany przez nieprzyjaciela?

236. Ma ktoś 900 rs. w samych banknotach pięcio- i trzyrublowych; których razem jest sztuk 200. Ileż ma banknotów pięcio,- a ile trzyrublowych?

237. Dwie liczby są do siebie w stosunku 4 do 5; jeżeli pierwszą z nich powiększymy o 10, a drugą o tyleż zmniejszymy, wtedy stosunek pomiędzy temi nowemi liczbami będzie odwrotnym względem pierwszego. Znaleść te liczby.

238. Pułkownik chce ustawić swoich żołnierzy w kwadrat pełny. Probuje ich ustawić jednym sposobem; wtedy okazuje się, że zbywa mu jeszcze 39 żołnierzy; przy ustawieniu ich po raz drugi w ten sposób, że bok kwadratu poprzedniego powiększył o jednego żołnierza, pokazało się, że mu brakuje do kwadratu zupełnego jeszcze 50 żołnierzy. Z ilu żołnierzy składał się oddział?

239. Wyciągnąć pierwiastki kwadratowe z wyrażeń:

$$a^6+2a^5b+3a^4b^2+4a^3b^3+3a^2b^4+2ab^5+b^6;$$

i

$$a^2+4b^2+9c^2+4ab+6ac+12bc.$$

240. Pomnożyć: $x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}-2xy+4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}$ przez:

$$x^{\frac{1}{2}}+2y^{\frac{1}{2}}.$$

241. Uprościć wyrażenia:

$$40xy-(9x-8y)(5x+2y)-(4y-3x)(15x+4y);$$

$$\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1-x+x^2}{1+x^2}-\frac{1+x+x^2}{1-x^2}+2.$$

242. Znaleść największy wspólny dzielnik dla:

$$x^4+ax^3+2a^2x^2+3a^3x+a^4$$

i

$$x^4+ax^3+2a^2x^2+3a^3x+ab^2x+a^4+a^2b^2.$$

243. Dwaj handlarze poszli na targ z jednakową summą pieniędzy, po pewien towar. Pierwszy wydał wszystko co miał z wyjątkiem 5 rs. i zakupił za to 250 funtów towaru. Drugi kupił tegoż samego towaru i po téj saméj cenie wprawdzie 350 funtów, lecz musiał dopożyczyć jeszcze 35 rs., aby wszystko zapłacić. Pytanie: ileż rubli każdy z nich miał z początku?

244 Jeżeli cyfry, stanowiące pewną liczbę dwucyfrową odwrócimy, i liczbę tak otrzymaną odejmiemy od pierwszéj, wtedy okaże się, że różnica znaleziona równać się będzie summie cyfr. Znaleść tę liczbę, skoro wiemy, że jedna z tych dwóch cyfr jest o jedność większą od drugiéj.

245. Znaleść trzy liczby, z których trzecia jest o 5 większą od pierwszéj i takie, że iloczyn

z ich summy, pomnożonéj przez pierwszą z nich jest 48; iloczyn zaś z ich summy przez trzecią jest 128.

246. Wypożyczył ktoś 1024 rs. podług pewnéj stopy procentu; na końcu drugiego roku odbiera summę, równą kapitałowi wraz z procentem składanym, wynoszącą 1156 rs. Znaleść stopę procentu.

247. Z pewnéj summy pieniędzy biorę najprzód o 50 rs. więcéj, aniżeli wynosi połowa téjże summy; następnie z reszty o 30 rs. więcéj, aniżeli wynosi piąta część téj że summy; potem z nowéj reszty znowuż o 20 rs. więcéj aniżeli wynosi czwarta część początkowéj summy; — poczém zostało tylko 10 rubli. Jakaż była początkowa summa?

248. Znaleść taki ułamek, że jeżeli do jego licznika dodamy 2, wtedy jego wartość stanie się równą $\frac{1}{3}$, a jeżeli od mianownika jego odejmiemy 1, wtedy jego wartość stanie się równą $\frac{1}{4}$.

249. Znaleść dwie liczby, mające następujące własności: jeżeli mniejszą z nich podzielimy przez większą, wtedy na iloraz otrzymamy 0,21 i na resztę 0,04162; jeżeli zaś liczbę większą podzielimy przez mniejszą, wtedy na iloraz otrzymamy 4 i na resztę 0,742.

250. Pokazać, że:

$$\frac{(xy^2)^{\frac{1}{3}}-(x^2y)^{\frac{1}{3}}+x}{x+y}=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}$$

251. Uprościć:

$$6a+\{4a-\{8b-(2a+4b)-22b\}-7b\}-\{7b+\{8a-(3b+4a)+8b\}+6a\}.$$

252. Pomnożyć: $a-x$, kolejno przez $a+x$, a^2+x^2, a^4+x^4, a^8+x^8;

pomnożyć także:

$a^{m-n}b^{n-p}$ przez $a^{n-m}b^{p-n}c$.

253. Znaleść największy wspólny dzielnik dla:

$45a^3x+3a^2x^2-9ax^3+6x^4$ i $18a^2x-8x^3$.

254. Rozwiązać następujące równania:

1) $x-\frac{x-2}{3}=\frac{x+23}{4}-\frac{10+x}{5}$.

2) $\frac{x}{6}+\frac{y}{11}=26$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{7}=46$.

3) $a-x=\sqrt{a^2-x\sqrt{4a^2-7x^2}}$.

255. Liczbę 208 podzielić na takie dwie części, aby summa jednéj czwartéj większéj części i jednéj trzeciéj mniejszéj części powiększona o 4, była równą cztery razy wziętéj różnicy pomiędzy temi częściami.

256. Dwie osoby A i B kupują majątek za 90000 rs.. Osoba A mogłaby całą summę zapłacić, gdyby do tego co ma, osoba B dodała jéj połowę swojego kapitału; osoba B zapłaciłaby sama całą summę, gdyby do tego co ma, osoba A dodała jéj trzecią część swojego kapitału. Znaleść ile każda z tych osób miała?

257. Właściciel domu kupił od sąsiada plac prostokątny, którego długość jest większą od szerokości o 18 łokci, a którego powierzchnia wynosi 819 łokci kwadratowych. Znaleść długość i szerokość placu.

258. Kupił ktoś pewną liczbę jabłek do podzielenia pomiędzy swoje dzieci. Najstarszemu daje połowę wszystkich jabłek bez 8 jabłek; drugiemu daje połowę tego co zostało bez 8 jabłek; podobnież trzeciemu i czwartemu. Piątemu zaś oddaje pozostałe jeszcze 20 jabłek. Ileż jabłek kupił?

259. Summa dwóch liczb jest 13, różnica ich kwadratów jest 39; znaleść te liczby.

260. Handlarz kupił konia, którego następnie sprzedał za 144 rs. i miał przy sprzedaży tyle zysku od sta, ile go koń kosztował. Ileż zapłacił za konia?

261. Uprościć wyrażenie:

$$(a+b)(a-b)-\{a+b-c-(b-a-c)+$$
$$+(b+c-a)\}(a-b-c).$$

262. Pomnożyć: $x^8+x^6+x^4+x^2+1$ przez x^2-1

a także: $\frac{a}{x}-\frac{2x}{a}-1$ przez $\frac{x}{a}-\frac{2a}{x}+1$.

263. Jakie wyrażenie, będąc pomnożone przez $x-\frac{1}{x}$ da na iloczyn $x^3-\frac{1}{x^3}-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$?

264. Uprościć następujące wyrażenia:

$$\frac{3x^3-13x^2+23x-21}{6x^3+x^2-44x+21};$$

$$\left\{\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a-b}{2(a+b)}+\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right\}\frac{a-b}{2b}.$$

265. Rozwiązać równania następujące:

1) $\frac{5x+3}{x-1}+\frac{2x-3}{2x-1}=6.$

2) $\sqrt{3+x}+\sqrt{x}=\frac{6}{\sqrt{3+x}}.$

3) $\frac{5x}{9}+9y=91;\quad \frac{5y}{9}+9x=167.$

266. Rozwiązać równania następujące:

1) $x^2-x-6=0.$

2) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$

3) $x^2-xy+y^2=7;\quad x+y=5.$

267. Stosunek summy dwóch liczb do ich różnicy jest równy stosunkowi 7 do 3. Pokazać, że jeżeli połowę mniejszéj z tych liczb dodamy do liczby większéj, i połowę liczby większéj dodamy do liczby mniejszéj, wtedy stosunek dwóch liczb w ten sposób utworzonych będzie równym stosunkowi 4 do 3.

268. Sztuka płótna kosztuje o 15 rubli mniéj aniżeli sztuka sukna, a wartość 50 sztuk płótna przewyższa wartość 30 sztuk sukna o 150 rs. Znaleść cenę sztuki płótna i sztuki sukna.

269. Pokazać, że:

$$(bcd+cda+dab+abc)^2-(a+b+c+d)^2abcd=$$
$$=(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd).$$

270. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z:

$$x^4+x^3-\frac{5x^2}{12}-\frac{x}{3}+\frac{1}{9},$$

a także z:

$$33-20\sqrt{2}.$$

271. Znaleść wartość wyrażenia:

$$b^2+c^2+2bc-a^2,$$

gdzie: $a=y+z-2x$, $b=z+x-2y$, $c=x+y-2z$.

272. Podzielić: $x^4-21x+8$ przez: $1-3x+x^2$.

273. Dodać ułamki:

$$\frac{a+x}{a-x},\ \frac{a-x}{a+x} \text{ i } \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$$

Pomnożyć:

$$\frac{27a^2+3ax+7x^2}{15a^2+ax-2x^2} \text{ przez: } \frac{3a+x}{3a-x}.$$

274. Pomnożyć:

$$3x-\frac{12ax-5x^2}{4a-3x} \text{ przez: } 4x-\frac{20ax-7x^2}{5a-2x}.$$

Podzielić: $1-\frac{1}{1+x}$ przez: $1+\frac{x^2}{1-x^2}$.

275. Uprościć wyrażenia:

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+d}} \text{ i } \frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{ax}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ax}+\frac{1}{x^2}}.$$

276. Rozwiązać równania następujące:

1) $\frac{6}{x}-\frac{12}{x}+\frac{20}{x}=7.$

2) $5y-3x=2;\ 8y-5x=1.$

3) $\frac{3x-2y}{4}-\frac{x-y}{2}=1;\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=4.$

277. Rozwiązać równania następujące:

1) $a^2(x-a)^2=b^2(x+a)^2.$

2) $\frac{x}{x-2}+\frac{5x+1}{x+3}=5.$

3) $\sqrt{13x-1}-\sqrt{2x-1}=5.$

278. Pewna osoba szła od podstawy góry do wierzchołka z prędkością $2\frac{1}{3}$ wiorsty na godz.; schodziła zaś tąż samą drogą z prędkością $3\frac{1}{2}$ wiorsty na godzinę. W obie strony szła 5 godzin. Pytanie: jak długą drogę odbyła?

279. Pokazać, że różnica pomiędzy kwadratem liczby dwucyfrowéj, a kwadratem liczby, powstałéj z pierwszéj przez proste przestawienie cyfr, jest zawsze podzielna przez 99.

280. Jeżeli $a:b=c:d$, pokazać, że będzie:

$$\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}.$$

281. Znaleść wartość liczebnę wyrażenia:

$$\frac{\sqrt{a-(a-b)}}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{5a-(a-b)}}{a+b},$$

gdy: $a=3$, $b=4$.

282. Od: $(a-b)(c-d)$ odjąć: $(b-a)(c-d)$ i znaleść wartość otrzymanéj różnicy w tym szczególnym przypadku, gdy $a=2b$, i $d=2c$.

283. Wyrażenia:

$$\frac{x^2-2ax-24a^2}{x^2-7ax-44a^2} \text{ i } \frac{x-y}{x+y}-\frac{y}{x-y}+\frac{y}{y-x},$$

sprowadzić do najprostszéj postaci.

284. Rozwiązać równania.

1) $\frac{4}{3+x}-\frac{1}{x}=\frac{9}{7x}$.

2) $\frac{3x-2y}{5}-\frac{x-y}{2}=1$; $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=4$.

3) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+10}=\sqrt{11x+9}$.

285. Rozwiązać równania:

1) $10x+\frac{2}{1-x}=9$.

2) $\left(\frac{x}{a}-\frac{2a}{x}-1\right)\left(1+\frac{a}{x}-\frac{2x}{a}\right)=0$.

3) $x^2-xy+y^2=7$; $5x-2y=9$.

286. Podczas regat jedna łódka płynie przez całą drogę z prędkością 4 metrów na sekundę; druga zaś płynie pierwszą połowę drogi z prędkością $3\frac{1}{2}$ metrów na sekundę, a drugą połowę — z prędkością $4\frac{1}{2}$ metrów na sekundę i dosięga mety w 15 sekund później, aniżeli pierwsza. Znaleść ile czasu płynęła każda.

287. Obraz prostokątny jest otoczony bardzo wązką ramą, mającą całego obwodu wewnętrznego 10 stóp długości, i kosztującą, licząc po 1 rub. 20 kop. stopę bieżącą, dwa razy tyle rubli, ile sam obraz ma stóp kwadratowych powierzchni. Znaleść długość i szerokość obrazu.

288. Jeżeli: $a:b=c:d$, wtedy będzie i:

$$a+b+c+d:a+b-c-d=a-b+c-d:a-b-c+d.$$

289. Objętość ostrosłupa jest proporcyonalną jednocześnie do powierzchni jego podstawy i do jego

wysokości. Znaleziono, że objętość takiego ostrosłupa, którego podstawa jest kwadratem, mającym bok równy 9 stopom, a którego wysokość jest 10 stóp, jest równą 270 stóp sześciennych. Oznaczyć wysokość takiego ostrosłupa, którego objętość wynosi 54 stopy sześcienne, a podstawa jest kwadratem, mającym bok równy 3 stopom.

290. Znaleść summę n wyrazów postępu różnicowego:

$$\frac{1}{1+x},\ \frac{1}{1-x^2},\ \frac{1}{1-x}\ \ldots\ldots,$$

291. Znaleść wartość liczebną wyrażenia:

$a^3+b^3+c^3-3abc$, gdy: $a=0{,}03$, $b=0{,}1$ i $c=0{,}07$.

292. Uprościć wyrażenie:

$$\frac{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}{c^2+d^2}-a^2;$$

i pokazać, że:

$$bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)-$$
$$-(a+b+c)\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}=0.$$

293. Jeżeli: $a+b+c=0$, pokazać, że będzie także: $a^3+b^3+c^3=3abc$.

294. Ułamek:

$$\frac{x^4+2x^3+6x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}$$

sprowadzić do najprostszéj postaci.

295. Rozwiązać równania następujące:

1) $\frac{10x+17}{18}-\frac{12x+2}{13x-16}=\frac{5x-4}{9}$.

2) $6x-5y=1$; $y-x=12$.

3) $\frac{x}{8}+8y=66$; $\frac{y}{8}+8x=129$.

296. Rozwiązać równania:

1) $\frac{x+1}{4}+\frac{3x+1}{x+4}=4$.

2) $\sqrt{2x+2}\sqrt{4x-3}=20$

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x-1}=1$.

297. Zbiornik może być wypróżniony klapą w ciągu 48 minut; tenże sam zbiornik może być napełniony kranem w ciągu 36 minut. Znaleść w ciągu ilu minut próżny zbiornik będzie napełniony, gdy jednocześnie otworzymy kran i klapę.

298. Wioślarz przepływa łódką po rzece 30 wiorst w jedną stronę i tyleż z powrotem w ciągu 12 godzin. Gdy płynie z wodą, robi 5 wiorst w tym samym czasie, w którym robi 3 wiorsty, płynąc pod wodę. Znaleść w jakim czasie przepłynął w jedną i w jakim w drugą stronę.

299. Wstawić trzy wyrazy średnie arytmetyczne pomiędzy: $a-b$ i $a+b$.

300. Znaleść x, jeżeli:

$$2^{x^2}:2^{2x}=8:1.$$

ROZWIĄZANIA ZADAŃ.

I. 1). 22. 2). 26. 3). 89. 4). 564.
5). 274. 6). 10. 7). 6. 8). 6. 9). 34.
10). 39. 11). 6. 12). 5. 13). 9. 14). 5.

II. 1). 55. 2). 81. 3). 94. 4). 8.
5). 27. 6). 81. 7). 12. 8). 11. 9). 21.
10). 15. 11). 10. 12). 3. 13). 2. 14). 127.
15). 6. 16). 1.

III. 1). 5. 2). 16. 3). 9. 4). 224.
5). 459. 6). 7. 7). 74. 8). 12. 9). 8.
10). 238. 11). 420. 12). 144. 13). 43. 14). 15.
15). 9. 16). 2.

IV. 1). 7. 2). 88. 3). 43. 4). 2.
5). 72. 6). 1. 7). 1. 8). 16. 9). 14.
10). 5. 11). 7. 12). 5. 13). 11. 14). 7.
15). 4. 16). 2.

V. 1). $15a-9b$. 2). $3x^2-3y^2$. 3). $9a+9b+9c$.
4). $4x+2y+4z$. 5). $a-b$. 6). $3x-3a-2b$.
7). $2a+2b$. 8). $a+b+c$. 9). $-2a+2b+2d$.
10). $2x^3-2x^2-8x+10$. 11). $5x^4+4x^3+3x^2+2x-9$.
12). $4a^3+2a^2b-4ab^2+b^3-7b^2$. 13). a^2x+3a^3.

14). $6ab - 9a^2x + 7ax^2 + ax^3$.
15). $5x^2$.
16). $10x^2 + 8y^2 + 12x + 12$.
17). x^4.
18). $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

VI. 1). $3a + 4b$.
2). $4a + 2c$.
3). $a + 5b + 4c + d$.
4). $2x^2 - 2x - 4$.
5). $3x^4 - x^3 - 14x + 18$.
6). $x^2 - ax + 2a^2$.
7). $-5xy - 5xz + 2y^2 + yz$.
8). $3x^2 + 13xy - 16xz - y^2 - 13yz$.
9). $2a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - 2b^3$.
10). $3x^3 + 4x + 16, x^3 + 8x^2$.

VII. 1). a.
2). $2c$.
3). $a + a^3$.
4). $a - 3b$.
5). $-2b + 2c$.
6). $3x + 3y - z$.
7). $a - b + c + d - e$.
8). $a - b + 2c - d$.
9). $3c$.
10). $3a - 3b$.
11). $2a - b$.
12). $5a$.
13). a.
14). $4a$.
15). $4a - 16b - 2c$.
16). $3a - 2c$.
17). $9 + 3x$.
18). $7x + 6$.
19). a.
20). $16 - 12x$.
21). $12x - 15y$.
22). $4c$.
23). $3a - 2c$.
24). $-8x^3 - 8x$.

VIII. 1). $8x^5$.
2). $12a^9$.
3). $4a^3b^3$.
4). $15x^7y^5z^3$.
5). $49x^4y^4z^4$.
6). $12a^3b - 9ab^2$.
7). $24a^4 - 27a^3b$.
8). $6x^4y - 8x^2y^3 + 10x^2yz^2$.
9). $x^4y^5z^2 - x^2y^5z^6 + x^4y^2z^6$.
10). $4x^2y^4z^4 + 6x^3y^5z^2 - 10x^4y^3z^3$.
11). $2x^2 + 3xy - 2y^2$.
12). $6x^4 - 96$.
13). $x^4 - 2x + 1$.
14). $1 - 2x - 31x^2 + 72x^3 - 30x^4$.
15). $x^5 - 41x - 120$.
16). $x^5 + 151x - 264$.

17). $2x^5 - 18x^4 + 39x^3 - 25x^2 + x + 1$.
18). $x^6 + 1008x + 720$.
19). $4x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 10x^3 - 8x^2 - 5x - 4$.
20). $x^8 + 2x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1$.
21). $x^3 - 9a^2x$.
22). $a^4 + 4a^3x + 4a^2x^2 - x^4$.
23). $-10b^3 - ab^2 + 26a^2b - 7a^3$
24). $a^4 - a^2b^2 + 2ab^3 - b^4$.
25). $a^4 + 3a^2b^2 + 4b^4$.
26). $12x^3 - 17x^2y + 3xy^2 + 2y^3$.
27). $x^6 - x^4y^2 + x^2y^4 - y^6$.
28). $6x^4 + 17x^3y + 26x^2y^2 + 19xy^3 + 4y^4$.
29). $x^3 + y^3 + 3xy - 2x - 2y + 1$.
30). $x^5 - 32y^5$.
31). $243x^5 - y^5$.
32). $x^2 - 4y^2 + 12yz - 9z^2$.
33). $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 + 2b^2x - (a - b)x^2$.
34). $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
35). $a^4 + 8b^2x^2(a^2 - 2) + 16b^4x^4$.
36). $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4abc^2 - c^4$.
37). $x^4 - a^4$.
38). $x^3 + x^2(a + b + c) + x(ab + ac + bc) + abc$.
39). $x^8 + x^4a^4 + a^8$.
40). $x^4 - 5a^2x^2 + 4a^4$.

IX. 1). $5x^3$
2). $-3a^3$.
3). $3xy$.
4). $-8a^2b^2c^2$.
5). $4a^4b^2y^2$.
6). $x^2 - 2x + 4$.
7). $-a^2 + 4a - 5$.
8). $x^2 - 3xy + 4y^2$.
9). $5a^2b^2 + ab - 4$.
10). $15a^2b^2 - 12ab^3 + 9abc^2 - 5c^4$.
11). $x - 4$.
12). $x - 8$.
13). $x^2 + x + 3$.
14). $3x^2 - 2x + 4$.
15). $3x^2 + 2x + 1$.
16). $x^2 - 3x + 7$.
17). $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
18). $a^2 + ab - b^2$.
19). $x^3 + 3x^2y + 9xy^2 + 27y^3$.

20). $x^3-x^2y+xy^2$.
21). $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$.
22). $a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4$.
23). $2a^3-6a^2b+18ab^2-27b^3$.
24). x^2+xy+y^2. 25). $x^2+2xy+3y^2$.
26). x^2-2x+2. 27). x^2-3x-1.
28). x^2-5x+6. 29). x^2-4x+8.
30). x^2+5x+6. 31). x^2-x-19.
32). $1-3x+2x^2-x^3$.
33). $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.
34). $a^2+2ab+3b^2$.
35). $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$. 36). x^4-3x^3+4x+1.
37). $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$. 38). $x^8-x^6+2x^2-2$.
39). $x-c$. 40). ax^2+bx+c.
41). $x^2-2xy+y^2$. 42). $x^2+x(y+1)+y^2-y+1$.
43). $7x+4z$. 44). $a+b+c$.
45). $a+2b+c$.
46). $a^2+a(2b-c)+b^2-bc+c^2$.
47). $a(b+c)-bc$. 48). $x^2-x(a+b)+ab$.
49). $x+y-z$. 50). $x+y+z$.

X. 1). $225x^2+420xy+196y^2$.
2). $49x^4-70x^2y^2+25y^4$. 3). x^4+4x^3-8x+4.
4). $x^4-10x^3+39x^2-70x+49$.
5). $4x^4-12x^3-7x^2+24x+16$.
6). $x^2+4y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz$.
7). $x^4+2x^3y+x^2y^2-y^4$. 8). $x^4+x^2y^2+y^4$.
9). $x^4-x^2y^2-2xy^3-y^4$. 10). $x^4-x^2y^2+2xy^3-y^4$.
11). $x^6+2x^4+5x^2-1$. 12). x^4-18x^2+81.
13). $a^4-4a^2b^2-4ab^3-b^4$.
14). $16x^4+96x^3y+144x^2y^2-81y^4$.
15). $a^4x^4-b^4y^4$. 16). $a^4x^4-2a^2b^2x^2y^2+b^4y^4$.

XI. 1). $a^2+b^2+c^2$. 2). $a^2+b^2+c^2$.
3). $a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd$.
4). $6(a+b+c)$. 5). $2(a+b+c)$.
6). $2b(x+y)$. 7). $bx+ay+(a+b)z$.
8). $x(2a+c)+y(2b+a)+z(2c+b)$.
9). $2(a+b+c)(x+y+z)$.
10). $2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.
11). $b-11a$. 12). b^2-d^2.
13). $2a+4by$. 14). $(x+a)^2$.
15). a. 16). $2a-5b+4c$.
17). 6. 18). $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
19). $x^3+x^2y+xy^2+y^3$. 20). $12abc$.
21). $a+b+c+d$. 22). $3b$.
23). $9a^2-30ab+25b^2$.
24). $-6c^2+c(9a+4b)-6ab$.
25). $(x^3+xy+y^2)^2$. 26). $(x^2-xy+y^2)^2$.
27). $a^2-2ab+3b^2$. 28). $x^2-8xy+15y^2$.
29). $a^4-a^2b^2+b^4$. 30). a^4-b^4.
31). $2a^2-3ab+4b^2$. 32). $x-1$.
33). $(x-1)(x+4)$. 34). $a+x$.
35). a^3+b^3. 36). x^2-ax+a^2.
37). $(x+4)(x+5)$. 38). $(x+5)(x+6)$.
39). $(x-5)(x-10)$. 40). $(x-10)^2$.
41). $(x-11)(x+12)$. 42). $(x+4)(x-11)$.
43). $(x-3)(x+3)(x^2+9)$. 44). $(x+5)(x^2-5x+25)$.
45). $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$.
46). $(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$.
47). [illegible] $(a+5b)$.
48). $(x-6y)(x-7y)$.
49). $(a+b-5c)(a+b-6c)$.
50). $(2x+2y-a-b)(x+y-3a-3b)$.

XII. $3x^2$.
2). $4a^2b^2$.
3). $12x^4y^5z^4$.
4). $7a^2b^3x^3y^3$.
5). $2(x+1)$.
6). $3(x+1)$.
7). $4(a^2+b^2)$.
8). x^2-y^2.
9). $x+5$.
10). $x-7$.
11). $x-10$.
12). $x-12$.
13). x^2+3x+4.
14). x^2-5x+3.
15). x^2-6x+7.
16). x^2-6x-5.
17). $x+3$.
18). $x-4$.
19). x^2-x+1.
20). x^2-x+1.
21). $3x+2$.
22). x^2-x-1.
23). x^2-2.
24). $x-2$.
25). x^2+1.
26). x^2+3x+5.
27). $7x^2+8x+1$.
28). $x^4-2x^3+3x^2-2x+1$.
29). x^2-3x+1.
30). $x+1$.
31). $x+7$.
32). $x+3y$.
33). $x+a$.
34). $x-2a$.
35). $x-y$.

XIII. 1). $12a^2b^2$.
2). $36a^3b^2c^3$.
3). $24a^2b^2x^3y^3$.
4). $(a+b)(a-b)^2$.
5). $12ab(a^3+b^3)$.
6). $(a+b)(a^3-b^3)$.
7). $(x+1)(x+3)(x-4)$.
8). $(x+2)(x+4)(x^2+3x+1)$.
9). $x(2x+1)(3x-1)(4x+3)$.
10). $(x^2-5x+6)(x-1)(x-4)$.
11). $(x^2+3x+2)(x-3)(x+5)$.
12). $(x^2+x+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$.
13). $(x^3-x^2-4x+4)(x-1)(x-4)$.
14). $(x^2-xa+a^2)(x^2+ax+a^2)(x-a)^2$.
15). $36a^3b^3c^3$.
16). $120(a+b)^2(a-b)^2$.
17). $24(a-b)(a^3+b^3)$.
18). $105ab^2(a+b)(a-b)$.

19). x^6-1.
20). x^8-1.
21). $x^{12}-1$.
22). $(x+1)(x+2)(x+3)$.
23). $(x+1)(x+2)(x^2+2x-3)$.
24). $(x^3-19x-30)(x^2+5x+10)$.

XIV. 1). $3x+\frac{4x}{7}$.
2). $4ac+\frac{4c}{9}$.
3). $2a+\frac{3b}{4a}$.
4). $2x-\frac{5y}{6x}$.
5). $x+\frac{2}{x+3}$.
6). $2x-\frac{1}{x-3}$.
7). $x^2+3ax+3a^2+\frac{3a^3}{x-2a}$.
8). $x-1-\frac{2x-1}{x^2-x+1}$.
9). $x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}$.
10). x^3-x^2+x-1.
11). $\frac{4a^2}{3b}$.
12). $\frac{8(a^2+b^2)}{3(a+b)}$.
13). $\frac{3(a-b)}{2(a+b)}$.
14). $\frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}$.
15). $\frac{4x}{3y}$.
16). $\frac{3a+2b}{a+b}$.
17). $\frac{2(a-b)}{3(a+b)}$.
18). $\frac{(x^3-1)(x+1)}{x^2+1}$.

XV. 1). $\frac{2a^2x}{3y}$.
2). $\frac{a+b}{2b}$.
3). $\frac{a+b}{a-b}$.
4). $\frac{2ax}{ax-3y^2}$.
5). $\frac{4(a+b)}{5(a-b)}$.
6). $\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$.
7). $\frac{x+2}{x+5}$.
8). $\frac{x+7}{x-5}$.

9). $\frac{x+3}{x-7}$.

10). $\frac{x+b}{x+c}$.

11). $\frac{x-b}{x+c}$.

12). $\frac{3x-4}{4x-3}$.

13). $\frac{x+a-b-c}{x+b-a-c}$.

14). $\frac{x+3}{x^2-2x+5}$.

15). $\frac{x-3}{x^2+7x+3}$.

16). $\frac{x+5}{x^2+3x+2}$.

17). $\frac{x+7}{x^2-4x-3}$.

18). $\frac{6x-5}{3x^2+x+1}$.

19). $\frac{5x+4}{3x^2+x+2}$.

20). $\frac{x-a}{x^2-ax+a^2}$.

21). $\frac{x-4}{x+4}$.

22). $\frac{x^2+ax-2a^2}{2x^2+3ax+4a^2}$.

23). $\frac{x-3}{x^2-3x+1}$.

24). $\frac{x+a}{x^2+ax+a^2}$.

25). $\frac{x-3}{x^2+1}$.

26). $\frac{3x^2+x+2}{2x^2+x+3}$.

27). $\frac{3x(x^2-5a^2)}{2x^2+3a^2}$.

28). $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$.

29). $\frac{1}{x-1}$.

30). $\frac{x^3}{x^3-a^2y}$.

31). $\frac{1}{x^2-a^2}$.

32). $\frac{y^{n-1}}{x^{n+1}}$.

33). $\frac{9x^2}{12x^3}$, ...

34). $\frac{4(x-1)}{4(x^2-1)}$, ...

35). $\frac{a(x+a)}{x^2-a^2}$, ...

36). $\frac{a(a+b)(a^2+b^2)}{a^4-b^4}$, ...

37). $\frac{(x-1)(x+1)^2}{(x^2-1)^2}$, ...

38). $\frac{a(x^2+ax+a^2)}{x^3-a^3}$, ...

39). $\frac{x^2+ax+a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}$, ...

40). $\frac{x-c}{(x-a)(x-b)(x-c)}$, ...

XVI. 1). $\frac{6a-6b-c}{4}$.

2). $\frac{2a}{a^2-b^2}$.

3). $\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$.

4). $\frac{2cb}{a^2-b^2}$.

5). $\frac{a+b+c}{abc}$.

6). $\frac{1}{x-y}$.

7). $\frac{12x}{1-9x^2}$.

8). $\frac{a+x}{ax}$.

9). $\frac{a+b}{2a-2b}$.

10). $\frac{4a}{a+x}$.

11). $\frac{2a^2+9c^2}{6ac}$.

12). $\frac{b}{a-b}$.

13). $\frac{b(a+b)}{x^2-b^2}$.

14). $\frac{2x-3}{x(4x^2-1)}$.

15). $\frac{16}{(x-2)(x+2)^2}$.

16). $\frac{a}{a^2-b^2}$.

17). $\frac{a^4+6a^2x^2+x^4}{a^4-x^4}$.

18). $\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

19). $\frac{5x^2-7x}{(x^2-1)(x-2)}$.

20). $\frac{4x^3}{y(x^2-y^2)}$.

21). $\frac{2x^2}{1-x^2}$.

22). $\frac{2x^2}{x^2-1}$.

23). $\frac{2a^2}{x(x^2-a^2)}$.

24). $\frac{2a^4+6a^2b^2}{a^4-b^4}$.

25). $\frac{3x^2}{x^2-1}$.

26). $\frac{4a^2(a^2-ax+x^2)}{a^4-x^4}$.

27). $\frac{4(x+10)}{x^4-16}$.

28). $\frac{2x^2-9x+44}{x^3+64}$.

29). $\frac{x^2-4ax-x^2}{(x^2-a^2)^2}$.

30). $\frac{2a}{x^2-x^2}$.

31). 1.

32). $\frac{x^2-2x}{x^3+1}$.

33). 0.

34). $\frac{6}{x(x+1)(x+2)}$.

35). $\frac{1}{(1+x^2)(1+x^3)}$.

36). $\frac{2x^2}{x^3+y^3}$.

37). $\frac{2y^2}{x^3-y^3}$.

38). $\frac{2x^3+2}{x^4+x^2+1}$.

39). $\frac{4(a^4x^3-b^4y^3)}{a^4x^4-b^4y^4}$.

40). $\frac{4x^3}{x^8+x^4+1}$.

41). 0.

42). $\frac{4a^3}{x^4-a^4}$.

43). $\frac{8b^7}{a^8-b^8}$.

44). $\frac{48a^3}{(x^2-a^2)(x^2-9a^2)}$.

45). $\frac{24b^4}{a(a^2-b^2)(a^2-4b^2)}$.

46). $\frac{c}{(x-a)(x-b)}$.

47). $\frac{x}{(x-a)(a-b)}$.

48). $\frac{x(a+b)-ab}{(x-a)(x-b)}$.

49). $\frac{1}{(a-c)(c-b)}$.

50). $\frac{c-a-b}{(c-a)(c-b)}$.

51). 0.

52). $-\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$.

53). 1.

54). $\frac{3x-a-b-c}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

55). $\frac{3x^2-a^2-b^2-c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

56). $\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

XVII. 1). $\frac{4e}{5a}$.

2). 1.

3). $\frac{a^3b^3c^3}{x^3y^3z^3}$.

4). $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$.

5). $x-a$.

6). $\frac{a^4-b^4}{ab}$.

7). $\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$.

8). $\frac{ax}{a^2-x^2}$.

9). $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

10). $\frac{x+c}{x+b}$.

11). $\frac{x}{x-y}$.

12). $\frac{(a-c)^2-b^2}{abc}$.

13). $\frac{x^5-ax^5+a^5x-a^6}{a^3x^3}$.

14). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{b^2}{y^2}$.

15). 1.

XVIII. 1). $\frac{6ay}{bx}$.

2). $\frac{9c^2x^2}{16a^2z^2}$.

3). $\frac{1}{x+y}$.

4). $\frac{3(a-b)^2}{b(a+b)}$

5). $\frac{x(a+2x)}{a^2}$.

6). $\frac{2x}{x-y}$.

7). $\frac{a+x}{x+y}$.

8). $\frac{x-b}{x-a}$.

9). $\frac{a+b-c}{c+a-b}$.

10). $\frac{1}{x^2-y^2}$.

11). $\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^3$.

12). $\frac{y^4-x^4}{y^3}$.

13). $5x-1$.

14). $\frac{a^4+a^2+1}{a^2}$.

15). $\frac{(x^2+a^2)(x^4+a^4)}{x^3a^3}$.

16). $\frac{x^2-6a^2}{xa}$.

17). $\frac{x-y}{y}$.

18). $\frac{x^2+ax+a^2}{ax}$

19). $\frac{a^2+x^2}{2ax}$.

20). $\frac{x^4-3x^3a+3a^3x+a^4}{a^2x^2}$.

21). 1.

22). $\frac{x-4}{x-5}$.

23). $\frac{1}{x+1}$.

24). $\frac{x^2-a^2}{x(a+b+c)-bc}$.

25). $\frac{1}{x+1}$.

26). $\frac{1+x}{1+x^2}$.

27). $x+1$.

28). $\frac{1+x^2}{1+x}$.

29). $\frac{(x^2+y^2)^2}{x^4+y^4}$.

30). x.

31). 1.

32). $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+b^4}$.

33). $\frac{a^2}{b^2}$.

34). $\frac{b}{a}$.

35). 0.

36). $\frac{4}{9}$.

37). $2\frac{2}{7}$.

38). 0.

39). 0.

40). a.

XIX. 1). 6. 2). 9. 3). 7. 4). 11.
5). 21. 6). 2. 7). 4. 8). 7. 9). 8.
10). 5. 11). 18. 12). 6. 13). 2. 14). 27.
15). 15. 16). 63. 17). 60. 18). 36. 19). 64.
20). 96. 21). 45. 22). 24. 23). 120. 24). 72.
25). 12. 26). 6. 27). 5. 28). 1. 29). 6.
30). 2. 31). 2. 32). 3. 33). $1\frac{1}{2}$. 34). 7.
35). $1\frac{1}{5}$. 36). 11. 37). 5. 38). $2\frac{1}{3}$. 39). 3.
40). 7. 41). 11. 42). 12. 43). 4. 44). 3.
45). 7. 46). 3. 47). $5\frac{1}{2}$. 48). $1\frac{1}{3}$. 49). 10.
50). 6. 51). 10. 52). 7. 53). 1. 54). 12.
55). 5. 56). $\frac{1}{7}$. 57). 3. 58). 2. 59). 3.

60). 28. 61). 5. 62). 2. 63). 3. 64). 2.
65). 4. 66). 2.

XX. 1). 10. 2). 8. 3). 12. 4). 6.
5). —7. 6). 16. 7). 5. 8). $3\frac{1}{7}$. 9). —6.
10). 5. 11). 8. 12). $\frac{7}{4}$. 13). 3. 14). 2.
15). 7. 16). $1\frac{4}{7}$. 17). $\frac{1}{5}$. 18). 1. 19). 17.
20). 2. 21). 5. 22). 2. 23). 6. 24). 7.
25). 2. 26). 2. 27). 2. 28). $\frac{50}{29}$. 29). 7.
30). 4. 31). —1. 32). $\frac{3}{2}$. 33). —23. 34). 3.
35). $5\frac{1}{2}$. 36). $\frac{4}{13}$. 37). 0. 38). 20. 39). 3.
40). 5. 41). $a-b$. 42). $a+b$. 43). $b-a$.

44). $\frac{2ab}{a+b}$.

45). $2(a+b)$.

46). $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

47). $\frac{ab}{a+b-c}$.

48). $\frac{ab(a+b-2c)}{(a+b)c-a^2-b^2}$.

49). $\frac{2ab}{a+b}$.

50). $\frac{a+b}{2}$.

51). $\frac{a+b+c+d}{m+n}$.

52). c.

53). $\frac{a^2}{b-a}$.

54). $\frac{ab-pq}{a+b+p+q}$.

55). $\frac{1}{2}(a+b+3)$.

56). $\frac{c^2-ab}{a+b-2c}$.

57). $\frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.

58). $\frac{1}{2}(a+b)$.

59). 4.

60). 50. 61). 25.
62). $\frac{13}{81}$. 63). $(a-b)^2$
64). a.

XXI. 1). 30. 2). 2.
3). 13, 20. 4). 35, 50, 70.
5). 17, 31. 6). 28, 14.
7). 28. 8). 20 Listopada.
9). 52. 10). 36, 27.
11). 48, 36. 12). 14, 24, 38.
13). 28, 32. 14). 103.
15). 54, 21. 16). 8.
17). 8, 12. 18). 10.
19). 36, 9. 20). 36, 12.
21). 100, 88. 22). 14.
23). 24, 76. 24). 21.
25). 36, 24. 26). 24, 60, 192.
27). 840. 28). 30000.
29). 420. 30). 24.
31). 500. 32). 10, 14, 18, 22, 26, 30.
33). 36, 26, 18, 12. 34). 50, 100, 150, 250.
35). 5, 6. 36). 24, 36, 56.
37). 88, 44. 38). 130, 150, 130, 90.
39). 13, 27. 40). 75, 25.
41). 85, 35. 42). 1000.
43). 8, 3, 3. 44). 24000.
45). 26, 16, 32, 27, 42. 46). 21 kop.

XXII. 1). 72. 2). 20, 30.
3). 200 wiorst od A. 4). 12, 16.
5). 8, 16. 6). 32, 16.

7). 48. 8). 30.
9). 9, 16. 10). 30.
11). 18, 22, 10, 40. 12). 6, 24.
13). 10, 15, 3, 60. 14). 3 rs.
15). 55, 45. 16). po upływie $18\frac{2}{3}$ godz.
17). 27, 17. 18). 168, 84, 42.
19). 16, 25, 7, 42. 20). 240, 180, 144.
21). 15, 21. 22). 2560.
23) 36, 54. 24). 60.
25). 12. 26). 875, 1125.
27). 25. 28). 10, 20.
29). 20, 80. 30). $5\frac{5}{17}$.
31). 40, 50. 32). 28.
33). 24. 34). 1024.
35). 450, 270. 36). 2200, 1620, 1100, 1080.
37). 60. 38). 7, 12, 32.
39). 30. 40). 240.
41). 1500. 42). 24.
43). 60. 44). 120000 rs.,
45). 25. 46). $4\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$.
47). 40. 48). 6.
49). $49\frac{1}{11}$ min. po trzeciéj. 50). $32\frac{8}{11}$ min. po trzeciéj.
51). 288. 52). 2 sekundy.
53). 40. min. po jedenastéj. 54). 3000, 2000.
55). 14.
56*). drugi 16 łut., pokrywka 20 łut..
57*). 6 metr.
58*). 8,16757305 metrów sześciennych tlenu i 30,72563195 metr. sześc. azotu

59*). 90, 100. 480 kwart.
60*). w prawéj 11, w lewéj 5 rs.
61*). 256. 62*). 50.
63*). 300. 64*). $2\frac{1}{4}$.
65*). 63. 66*). 84 lit..
67*). 1696. 68*). 3 drachmy.
69*). A jest oddalone od B na 100 mil. Okręt przebył $119\frac{11}{19}$ m.
70*). 7 mil.
71*). Zbiornik zawiera 240 litrów, i co minutę powinno się wlewać 8 litrów.
72*). 6 dni, 42 mile od B.
73*). po $\frac{d}{c'-c}$ jednostek czasu spotkają się. Nie możliwém jest rozwiązanie, gdy d jest dodatne i $c'=c$. § 214_3.
74*). $\frac{d}{c'+c}$ jednostek czasu.
75*). po $\frac{nc}{c'-c}$ jednostek czasu.
76*). po $\frac{d+nc'}{c'+c}$ jednostek czasu po wyjściu pierwszego.
77*). po $\frac{nt}{n-m}$ jednostek czasu od wyjścia pierwszego.
78*). o 1-széj $45\frac{15}{17}$ min., w odległości $8\frac{3}{34}$ mili od Warszawy.
79*). po upływie 17 lub $23\frac{1}{2}$ minut.

80*). po $\frac{d-l}{c'+c}$, lub $\frac{d+l}{c'+c}$ minut.
81*). po upływie 1 godz. i 12 min. lub 13 godz. i 12 min.
82*). po upływie $\frac{d-l}{c'-c}$ sekund *przed* ich spotkaniem się i po $\frac{d+l}{c'-c}$ sek. *po* ich spotkaniu się.
83*). 36 metr.
84*). 12 stóp.
85*). w wysokości $4\frac{11}{20}$ stopy.
86*). 16000 rs., 4000 rs., 40-ro.
87*). 9, 9, 89. 88*). 24.
89*). A 36 rs. B $46\frac{1}{2}$ rs. 90*). 8.

XXIII. 1). 10, 7. 2). 17, 19.
3). 2, 13. 4). 4, 1.
5). 5, 5. 6). 21, 12.
7). 20, 10. 8). 2, −3.
9). 3, 2. 10). 3, 2.
11). $3\frac{1}{2}$, 4. 12). 10, 7.
13). 19, 2. 14). $38\frac{1}{2}$, 70.
15). 6, 12. 16). $\frac{348}{157}$, $\frac{156}{157}$.
17). 10, 5. 18). 12, 12.
19). 20, 20. 20). 13, 5.
21). 9, 7. 22). 10, 4.
23). 4, 9. 24). 5, 7.
25). $2\frac{1}{2}$, 1. 26). 2, 2.
27). 10, 8. 28). 12, 3[illegible].

29). 3, 2. 30). 63, 14.
31). 3, 2. 32). 2, 3.
33). 4, 12. 34). a, b.
35). a, b. 36). $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{ab}{a+b}$.
37). b, a. 38). $\frac{ab^2c}{a^2+b^2}$, $\frac{a^2bc}{a^2+b^2}$.
39). $\frac{ac}{a+b}$, $\frac{bc}{a+b}$. 40). $\frac{1}{a+b}$, 0.
41). a, b. 42). $a+b$, $a-b$.
43). $(a+b)^2$, $(a-b)^2$. 44). $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+b}$.
45*). 7, 8. 46*). $\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(a-b)$.
47*). $\frac{a+1}{ab+1}$, $\frac{a(b+1)}{ab+1}$.

XXIV. 1). 2, 1, 3. 2). 3, 4, 6.
3). 2, 1, 3. 4). 9, 11, 13.
5). 4, 0, 5. 6). 5, −5, 5.
7). 45, −21. 1. 8). 10, 7, 3.
9). 51, 76, 1. 10). $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$.
11). $x=\frac{1}{2}(b+c-a)$, i t. d.
12). $x=\frac{2}{3}(a+b+c)-a$, i t. d.
13). $x=\frac{1}{2}(b+c)$ i t. d.
14). $x=y=z=\frac{abc}{ab+bc+ca}$.
15). $x=a$, $y=b$, $z=c$.
16). $v=3$, $x=4$, $y=5$, $z=2$.

17*). 5, 11, 12. 18*). 7, 8, 9.
19*). $x=a^2-b^2$, $y=b^2-c^2$, $z=c^2-a^2$.
20*). $x=b^2-c^2$, $y=c^2-a^2$, $z=a^2-b^2$.
21*). $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{4}$.
22*). $x=a+b+c$, $y=a+b-c$, $z=a-b+c$, $t=a+b+c$.

XXV. 1). 42, 26. 2). 12, 16.
3). 116, 166. 4). 24, 60.
5). 2 rs., 14 kop. 6). 49, 21.
7). $\frac{4}{15}$. 8). 45, 63.
9*). 4, 8. 10). $1\frac{1}{2}$, rs. $\frac{3}{4}$ rs.
11). 8, 4. 12*). 54 rs., 42 rs.
13). 70, 50. 14). $\frac{3}{5}$.
15). słupów 24, odległość pomiędzy dwoma najbliższemi 20 st. pomiędzy skrajnemi (24—1)20.
16). 15, 65. 17). 12, 5.
18). 14, 10. 19). 24.
20). 1, 2. 21). 59.
22*). $\frac{qs+r}{q+1}$ i $\frac{s-r}{q+1}$. 23*). 4700 rs., $4\frac{3}{4}\%$.
24). 21, 11. 25). 50, 75.
26). 70, 42, 35. 27). 90, 72, 60.
28*). 324.
29). idzie 4 wiorsty na godz., a płynie 3 wiorsty na godz. z początku.
30). $33\frac{1}{3}$ w. $48\frac{1}{3}$ w odległ. 31). 45, 30 w. na godz.
32). 30, 50 w. na godz.
33). 60 w.; pociąg tow. 30 w. na godz.

34). 150, 120, 90. 35). $3\frac{2}{3}$ rs., 3 rs., $2\frac{1}{3}$ rs.

36). 120, 80, 40. 37). 432.

38*). $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$.

39*). majstra 5 rs., czel. $3\frac{3}{4}$ rs.

40*). $3\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$. 41*). $\frac{d(m+n)}{2mn}$, $\frac{d(n-m)}{2mn}$.

42*). złota 14, 77..., srebra 5, 22... funt.

43*). 2, 10. 44*). 11, 7.

45*). $\frac{d(n+m)}{2mn+t(n+m)}$, $\frac{d(n-m)}{2mn+t(n+m)}$.

46*). $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$. 47*). $562\frac{1}{2}$, $937\frac{1}{2}$.

48*). 25, 35. 49*). 20, 1, 7 rs.

50*). robotników było 18, każdy niósł 50 funtów.

51*). 37, 45, 52. 52*). 43, 117, 328.

53*). 8 : 9 : 10 : 11.

54*). *A* 2 rs., *B* 3 rs. 60 kop., *C* 6 rs. 80 kop., *D* 13 rs. 20 kop.

55*). w 1-ym 449, 2-m 225, 3-m 113, 4-m 57, 5-m 29, 6-m 15, 7-m 8 jabłek.

XXVI. 1). $8x^6y^9z^{12}$. 2). $-8x^6y^6z^9$.

3). $81a^4b^8c^{12}$. 4). $\frac{4x^4}{9y^4}$.

5). $\frac{64x^3}{27y^6}$. 6). $\frac{x^{12}}{y^8z^8}$.

7). $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$.

9). $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6$.

10). $1-3x+3x^2-x^3$. 11). $8+12x+6x^2+x^3$.

12). $27-54x+36x^2-8x^3$.

13). $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$.

14). $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$.

15). $16x^4+96x^3+216x^2+216x+81$.

16). $2a^3x^3+6axb^2y^2$.

17). $2a^4x^4+12a^2x^2b^2y^2+2b^4y^4$.

18). $2(5x+10x^3+x^5)$.

19). $1-4x^2+6x^4-4x^6+x^8$.

20). $1+2x+3x^2+2x^3+x^4$.

22). $1+2x-x^2-2x^3+x^4$.

23). $1+6x+13x^2+12x^3+4x^4$.

24). $1-6x+15x^2-18x^3+9x^4$.

25). $2(4+25x^2+16x^4)$.

26). $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$.

28). $1+3x-5x^3+3x^5-x^6$.

29). $1+9x+33x^2+63x^3+66x^4+36x^5+8x^6$.

30). $1-9x+36x^2-81x^3+108x^4-81x^5+27x^6$.

31). $2(36x+171x^3+144x^5)$.

32). $1-2x+3x^2-x^4+2x^5+x^6$.

33). $1+4x+10x^2+20x^3+25x^4+24x^5+16x^6$.

34). $4(ab+ad+bc+cd)$.

35). $2(a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2)$.

36). $1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$.

37). $1-12x+60x^2-160x^3+240x^4-192x^5+64x^6$.

38). $1+8x+28x^2+56x^3+70x^4+56x^5+28x^6+8x^7+x^8$.

39). $1-3x^3+3x^6-x^9$.

40). $1+3x^2+6x^4+7x^6+6x^8+3x^{10}+x^{12}$.

XXVII. 1). $3a^2b^2$. 2). $2ab$.

3). $-4ab^2$. 4). $2ab^2c^3$.

5). $-ab^2c^3$. 6). $\frac{5ab}{7c^2}$.

7). $-\frac{6ab^3}{5c^2}$.

8). $\frac{3a}{bc}$.

9). $\frac{a}{2b^2}$.

10). $\frac{2ab^2}{c^4}$.

11). $4a+5b$.

12). $7a^2-6b$.

13). $6x^3+1$.

14). $8a+3bc$.

15). $\frac{5a+2b}{5a+2c}$.

16). $\frac{3x^2-4}{2x-3}$.

17). x^2+x+1.

18). $1-x+2x^2$.

19). x^2+3x+8.

20). x^2-2x-2.

21). $1-2x+3x^2$.

22). $2x^4-x^2-2$.

23). $x^2-ax+2a^2$.

24). x^2-ax+b^2.

25). $x^3-6x^2+12x-8$.

26). $x^3+2ax^2-2a^2x-a^3$.

27). $1-x+x^2-x^3+x^4$.

28). $\frac{2x}{3y}-\frac{4x}{5z}-\frac{3y}{4z}$.

29). $1+x$.

30). $2x-3y$.

31). $1-x+x^2$.

32). $x^2-(a+b)x+ab$.

33). $x+1$.

34). x^2-xy+y^2.

35). 34.

36). 45.

37). 61.

38). 72.

39). 87.

40). 99.

41). 123.

42). 321.

43). 407.

44). 55, 5.

45). 6, 42.

46). 0, 914.

47). 1234.

48). 5420.

49). 620, 1.

50). 70, 58.

51). 8, 008.

52). 0, 4937.

53). 12007.

54). 504, 06.

55). 1, 8042.

56). 2, 1319.

57). 0, 75416.

58). 443329.

59). 0, 94868.

60). 2, 49198.

61). 0, 65574.

62). 0, 09233.

63). 4, 12310.

64). 11, 35781.

65). 18, 63488.

66). 119, 56331.

67). $2x+3y$.

68). $12x^2+4y^3$.

69). $x-a-b$.

70). x^2+x+1.

71). x^2-ax-a^2.

72). $2x^2+4cx+3c^2$.

73). $1-3x+4x^2$.

74). $1-x+x^2-x^3$.

75). $1+2x$.

76). $3x-1$.

77). 27.

78). 35.

79). 54.

80). 61.

81). 88.

82). 92.

83). 138.

84). 148.

85). 378.

86). 39, 2.

87). 5, 76.

88). 0, 604.

89). 1111.

90). 2755.

91). 45045.

92). 17479.

XXVIII. 1). $\frac{1}{3}$.

2). $\frac{1}{8}$.

3). $\frac{1}{10}$.

4). 100.

5). $\frac{1}{27}$.

6). a^{-6}.

7). a^6.

8). a^{-2}.

9). a^{-1}.

10). $a^{\frac{7}{12}}$.

11). $x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$.

12). $a-b$.

13). $x^2+2x^{\frac{3}{2}}+x-4$.

14). x^4+1+x^{-4}.

15). $a^{-1}-1$.

16). $a^2-3a^{\frac{2}{3}}+3a^{-\frac{2}{3}}-a^{-2}$.

17). $a^2+2a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+ab-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}$.

18). $x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{3}{2}}y+xy^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{5}{2}}$.

19). $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}}$.

20). $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$.

21). $16x^{-\frac{2}{3}}-12x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+9y^{-\frac{4}{3}}$.

22). $x+y$.

23). $a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}$.

24). $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}$.

25). $x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{4}}a+2x^{\frac{1}{8}}a^{\frac{3}{2}}+a^2$.

26). $x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{8}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{4}}$.

27). $x^{\frac{1}{4}}-2x^{-\frac{1}{4}}$.

28). $x-2-x^{-1}$.

29). $x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$.

30). $2x^{\frac{3}{4}}-3+4x^{-\frac{3}{4}}$.

XXIX. 1). $7\sqrt{2}$.

2). $9\sqrt[3]{4}$.

3). $\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

4). $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$.

5). $\frac{13\sqrt{15}}{10}$.

6). $\frac{5\sqrt[3]{2}}{2}$.

7). $2+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

8). $2+\frac{5}{6}\sqrt{6}$.

9). $4+\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

10). $5+2\sqrt{6}$.

11). $\frac{24-\sqrt{15}}{33}$.

12). $\frac{1}{7}(18+9\sqrt{6}+4\sqrt{15}+6\sqrt{10})$.

13). $3+\sqrt{5}$.

14). $3-\sqrt{7}$.

15). $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

16). $\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}$.

17). $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

18). $2+\sqrt{3}$.

19). $\sqrt{3}$.

20). $\sqrt{10}$.

21*). $a+m$.

22*). n.

23*). $2y-2z$.

24*). $2x+2y$.

25*). $y+x$.

26*). $\sqrt[3]{\frac{64}{3}}-\sqrt[3]{-\frac{64}{24}}=4\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=$

$=6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}=2\sqrt[3]{9}$.

27*). 5.

28*). $\sqrt{a^n+b^2}$.

29*). $\sqrt[m]{a^m b}$.

30*). $\sqrt{ab}$.

31*). $\sqrt{ab}$.

32*). $\sqrt{ab}$.

33*). $\sqrt{a^2-b^2}$.

34*). $\sqrt[3]{500}$.

35*). $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^7}}}=\sqrt[8]{a^7}$ (§ 276).

36*). $\frac{7}{2}\sqrt{2}$.

37*). $\frac{3\sqrt{2}+4}{2}$.

38*). $3(\sqrt{19}-4)$.

39*). $3(13+7\sqrt{3})$.

40*). $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

41*). $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$.

42*). $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$.

43*). $\sqrt{1+a^2}+a$.

44*). $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=$

$$= \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}.$$

45*). $\frac{9\sqrt{3}+5\sqrt{5}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}}{59}$.

46*). $\frac{xy}{x-y}$.

47*). $\frac{\sqrt{x^3+x^2\sqrt{y}-xy-y\sqrt{y}}}{x^2-y}$.

48*). $a^{\frac{mr+ns}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr+ns}}$.

49*). $\sqrt[15]{a^{46}}$.

50*). $\sqrt[252]{a^{661}}$.

51*). $(2ab)^{\frac{m}{n}}$.

52*). $2a^3+6ab^2$.

53*). $2a$.

54*). $2a$.

55*). $14\sqrt{5}-18\sqrt{3}$.

56*). $\sqrt[n]{a^2}-2\sqrt[n]{ab}+\sqrt[n]{6^2}$.

57*). $\sqrt[60]{7}$.

58*). $\sqrt{a}$.

59*). $\sqrt[3]{a}$.

60*). $\sqrt[12]{4375}$.

XXX. 1). ± 4.

2). ± 25.

3). ± 7.

4). ± 9.

5). ± 9.

6). ± 6.

7). 1, 2

8). 2, 3.

9). 2, -12.

10). 3, $-\frac{1}{2}$.

11). $4\frac{1}{3}$, -3.

12). 10, 5.

13). 5, $-\frac{5}{2}$,

14). 6, -3.

15). $\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

16). $\frac{9}{2}$, $\frac{1}{2}$.

17). 5, $\frac{2}{3}$.

18). 3, -9.

19). $2\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

20). $1\frac{2}{3}$, $-1\frac{1}{2}$.

21). 1, 2.

22). 4.

23). 6, $\frac{9}{4}$.

24). 11, 3.

25). 5, $3\frac{1}{2}$.

26). 44, -2.

27). 7, $-\frac{7}{12}$.

28). 10, -10.

29). 3, $-2\frac{1}{3}$.

30). $\frac{1}{3}$, -3.

31). 2.

32). 2, -3.

33). ± 2.

34). 1, -4.

35). 3, $-\frac{2}{3}$.

36). 6, $2\frac{2}{5}$.

37). 6, $\frac{16}{7}$.

38). 7, $\frac{7}{3}$.

39). 8, $2\frac{4}{11}$.

40). 3, $-4\frac{2}{3}$.

41). 3, -5.

42). 3, $-\frac{5}{7}$.

43). 2, -1.

44). 4, -1.

45). 7, $3\frac{14}{15}$.

46). $1\frac{3}{4}$, 1.

47). $4\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$.

48). 3, $-\frac{4}{5}$.

49). 3, -9.

50). -10, $9\frac{25}{29}$.

51). 3, $-1\frac{1}{3}$.

52). 3, $-1\frac{2}{3}$.

53). 4, 0.

54). $1\frac{1}{3}$, 0.

55). 13, $\frac{5}{7}$.

56). 6, $-3\frac{1}{3}$.

57). $5, -1\frac{5}{13}$.

58). $5, 1\frac{1}{5}$.

59). $5, -1\frac{1}{4}$.

60). $2\frac{2}{3}, 0$.

61). $a \pm \frac{1}{a}$.

62). $(a \pm b)^2$.

63). $\pm\sqrt{ab}$.

64). $a, -\frac{b(a+b)}{2a+b}$.

65*). $\pm\sqrt{a^2-b^2}$.

66*). ± 1.

67*). $\pm\sqrt{\frac{ac}{bd}}$.

68*). $\pm\sqrt{\frac{a+c}{c-1}}$.

69*). $0, a+b$.

70*). $0, \frac{2ab}{a+b}$.

71*). $2a-b, 3b-2a$.

XXXI. 1). $\pm 2, \pm 3$.

2). 49.

3). 4.

4). ± 4.

5). $5, -3$.

6). $3, -2$.

7). $6, 0$.

8). $12, -3$.

9). $9, -12$.

10). ± 3.

11). $2, -15\frac{1}{3}$.

12). $4, 11\frac{1}{8}$.

13). $1\frac{2}{5}$.

14). 16.

15). 1.

16). $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$.

17). 4.

18). 4.

19). $\frac{4(a+b)(a^2+b^2)}{(a-b)^2}$.

20). $\frac{a-1}{2}$.

21). $3a^2$.

22). $0, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

23). $0, \pm 5$.

24). $0, \pm\sqrt{2}$.

25). $2, \pm 1$.

26). $0, \pm\sqrt{ab}$.

27). $a, -2a, -2a$.

28). $a, \frac{3a}{2}, -\frac{a}{2}$.

29*). $0, \pm\sqrt{c(2a-c)}$.

30*). 196, 49.

31*). $4, 1, \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{-7})$.

32*). 256, 625.

33*). $3\frac{1}{4}, -364\frac{148}{343}$.

34*). $-(n+1)^3, n^3$.

35*). a, b.

36*). $1. \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$.

37*). $1, 4, \frac{1}{4}$.

38*). $3, 2, -2, -1$.

39*). $a+\sqrt{a^2+c^2}, a-\sqrt{a^2-c^2}$.

40*). $1, \sqrt{-1}$.

41*). $2, \frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$.

42*). $3, \frac{1}{3}, -4, -\frac{1}{4}$.

43*). $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$.

XXXII. 1). 36, 24.

2). 36, 24.

3). 30, 24.

4). 18, 12, 9.

5). 12, 10.

6). 4, 6.

7). 196.

8). 3, 48.

9). 11.

10). 7.

11). 6, 12.

12). 15.

13). 24.

14). 27.

15). 20.

16). 126, 96.

17). 10, 9 w.

18). 56.

19). 192, 128.

20). 9 garn.

21). równe ilości.

22). 4%.

23*). 40 metr.

24*). 224.

25*). 4.

26*). $\frac{d}{\sqrt{c^2+c_1^2}}$.

27*). $\frac{a \pm \sqrt{a^2-4n}}{2}$. 28*). 16, 5.

29*). $52\frac{1}{2}$ m. dług. 35 m. szer.

30*). $\frac{7}{30}$ rs., $\frac{3}{10}$ rs. 31*). 4 metry; 5 metr.

32*). 1800 rs., 1600 rs. 33*). 28, 23, 17.

34*). 36 m., 30 m.

35*). $\frac{1}{2}$ mili lub $\frac{3}{10}$ mili na godzinę. Równanie do rozwiązania będzie: $\frac{\frac{v}{2}}{v-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2v} - \frac{1}{6}$, gdzie v oznacza prędkość, z jaką podróżni idą.

36*). w 11 sekund po wyjściu drugiego.

37*). $\frac{-tc_1^2 \pm \sqrt{d^2-t^2c_1^2)(c^2+c_1^2)+t^2c_1^4}}{c^2+_1{}^2}$.

38*). po: $\frac{ac+bc_1 \pm \sqrt{d^2(c^2+c_1^2)-(ac_1-bc)^2}}{c^2+c_1^2}$ jednostek czasu.

39*). po upływie czasu $\frac{ac+bc_1}{c^2+c_1^2}$.

40*). Oznaczając przez d odległość tych dwóch punktów świecących, przez i i i_1 natężenie ich w jodległości równéj 1, a przez x odległość szukanego punktu od pierwszego będzie:

$$x = \frac{d\sqrt{i}}{\sqrt{i} \pm \sqrt{i_1}}.$$

41*). 135, 74.

XXXIII. 1). 5, —4; 4, —5.

2). 4, $-\frac{25}{7}$; 1, $-\frac{71}{35}$. 3). ± 8; ± 6.

4). 6, 12; 2, —4. 5). 7, —4; 4, —7.

6). 4, $-\frac{48}{13}$; 3, $-\frac{41}{13}$. 7). —24, $\frac{6}{5}$; 12, $\frac{4}{5}$.

8). 6, $-\frac{4}{81}$; 5, $\frac{12}{81}$. 9). 2, $-\frac{29}{24}$; 4 $-\frac{53}{6}$.

10). 6, 0; 5, 0. 11). $\frac{2}{3}$, 0; $\frac{3}{2}$, 0.

12). 3,6; $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. 13). 4, $\frac{1}{8}$; 8, $\frac{1}{4}$.

14). $\frac{a+b}{a}$, 0; $\frac{a+b}{b}$, 0. 15). a, b.

16). a, $\frac{(3b-a)a}{a+b}$; b, $\frac{(3a-b)b}{a+b}$.

17). a, $\frac{2ab^2}{a^2+b^2}$; b, $\frac{2ba^2}{a^2+b^2}$. 18) a. 0; 0, b.

19). ± 4, $\pm \frac{7}{\sqrt{2}}$; ± 3, $\frac{1}{\pm\sqrt{2}}$.

20). ± 5; ± 4. 21). ± 7; ± 6.

22). ± 15; ± 7. 23). ± 4, ± 14; ± 1, ∓ 4.

24). ± 9; ± 4. 25). ± 3, ± 36; ± 5, $\mp \frac{23}{2}$.

26). ± 9; ± 3. 27). ± 8; ± 6.

28). ± 2; ± 1.

29). ± 9, $\pm 8\sqrt{2}$; ± 7, $\pm \sqrt{2}$.

30). ± 4; ± 1. 31). 0,1, $\frac{15}{22}$; 0, 2, $\frac{9}{22}$.

32). $\pm \frac{(a+1)b}{\sqrt{(2a^2+2)}}$; $\pm \frac{(a-1)b}{\sqrt{(2a^2+2)}}$,

33). $\pm a$, $\pm \frac{a+b}{\sqrt{2}}$; $\pm b$, $\pm \frac{a-b}{\sqrt{2}}$.

34). $\pm a, \pm \frac{a+1}{\sqrt{2}}; \pm 1, \pm \frac{a-1}{\sqrt{2}}$.

35). 6, −4; 4, −6. 36). 5, 4; 4, 5.

37). 4, 2; 2, 4. 38). 4, −3; 3, −4.

39). 1, 2; 2, 1. 40). $\pm 4, \pm 3; \pm 3 \pm 4$.

41). 2, 1; $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$. 42). $\pm 5; \pm 3$.

43). 2, 1 — 1, — 2; 1, 2, — 2, — 1.

44). $\frac{1}{2}, \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}; 1, -2 \mp \sqrt{3}, \frac{-1 \mp \sqrt{13}}{2}$.

45). $3, -\frac{1}{3}; 6, -\frac{2}{3}$. 46). $5, -\frac{5}{3}; 2, -\frac{2}{3}$.

47). 2; 1.

48). $4, \frac{3}{2}; \frac{1}{4}, -\frac{9}{4}; 2, \frac{9}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{4}$.

49). $a+b+1, -\frac{a+b+1}{a+1}; b, -\frac{b}{a+1}$.

50). $\pm \frac{a}{3}; \pm 3b$. 51). $\pm \frac{a}{4}; \pm 2b$.

52). $0, a+b, \frac{1}{2}(a-b) \pm \frac{1}{2}\sqrt{[(a+3b)(a-b)]}$;

$0, a+b, \frac{1}{2}(a-b) \mp \frac{1}{2}\sqrt{[(a+3b)(a-b)]}$.

53). $x = a : \sqrt[4]{(abc)}$; i t. d.

54). $(x+y)(y+z)(z+x) = \pm abc$; i t. d.

55). $\pm 1; \pm 2; \pm 3$. 56). $\frac{8}{3}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3}; \pm 2$.

XXXIV. 1). 11, 7. 2). 6, 18.

3). 8, 24. 4). 8, 16.

5). 10, 15. 6). 10, 12.

7). 7, 5. 8). 18, 8 lub 6, 16.

9). 5, 3. 10). 4, 2.

11). 2, 2. 12). 4, 6.

13). 7, 4. 14). 12, 8.

15). 20, 15 pierwszego. 16). 30, 40.

17). 60, 10. 18). 6, 4.

19). 160, 8. 20). 24 dni, 2 rs., 1,5 rs.

21). 756, 36, 27.

22). $4\frac{1}{2}$ w. idzie na godz., $4\frac{1}{2}$ w. przepływa pod wodę.

23*). 343 centym. sześc. i 64 cent. sześc.

24). 6 wiorst.

25*). 3 metry 4, 2 metra.

26*). 12, 8 metr. 1, 6 metr.

27*). robotników było 28, każdy przenosił 45 funt., lub robot. 36, każdy przen. 77 funt. kam.

28*). 2145 rs. na $2\frac{1}{2}$ lat.

29*). 100, 80, 60 metr. Oznaczając przez x przeciwprostokątną, przez y i z przyprostokątne, równania będą:

$$x^2 = y^2 + z^2, \left(y + \frac{1}{z}x\right) : \left(z + \frac{1}{2}x\right) = 13 : 11;$$

$$\left(\frac{1}{2}x + z + 20\right) : \left(\frac{1}{2} + y - 20\right) = 13 : 11.$$

30*). Bachus w 6 godz. Sylen w 3 godz. Równania

$$\frac{2}{3}y + \left(1 - \frac{2y}{3x}\right)y - 2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2y}{3x}\right)x;$$

$$y : x = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2y}{3x}\right) : \frac{1}{2}\left(1+\frac{2y}{3x}\right).$$

31*). 2, $8\frac{1}{2}$, lub $3\frac{81455}{84529}$ i $7\frac{131987}{169058}$ m.

32*). $\frac{1}{2}(b\pm\sqrt{c-a^2}) : \frac{1}{2}(a\pm\sqrt{c-b^2}) =$

$$= \frac{1}{2}(a\mp\sqrt{c-b^2}) : \frac{1}{2}(b\mp\sqrt{c-a^2}).$$

XXXV. 1). $\frac{2}{9}$. 2). $\frac{7}{12}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}$.

3). $\frac{5}{27}$. 4). 14, 21.

5). 24, 30. 6). 20, 32.

7). 1. 8). 15, 10.

9). 6, 8. 10). 35, 42.

11). 4. 12). $\frac{ab}{a+b}$.

13). 50, 60, 90. 14). 0, 2 : 5.

XXXVI. 1). 14. 2). 18.

3). 15. 4). 12.

5). 4. 6). 4.

7). $2, 2\frac{1}{2}$. 8). 5.

9). 1, —1. 13). 45, 60, 80.

14). 4, 6, 9.

XXXVII. 1). 4. 3). 5 : 2.

4). 2. 5). 4.

6). 5. 7). 8.

8). abc. 9). $\frac{ac^2}{b^2}$.

10). $113\frac{1}{3}$ rs. 11). 15.

12). 3868,8 rs,

XXXVIII.

1). 936. 2). $77\frac{1}{2}$.

3). 69. 4). $139\frac{1}{2}$.

5). $37\frac{1}{2}$. 6). —115.

7). 14, 16, 18. 8). $14\frac{1}{3}, 14\frac{2}{3}, \ldots$

9). $6\frac{1}{2}, 5, \ldots$ 10). $-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots$

11). 10, 4. 12). 82.

13). 5, 9, 13, 17. 14). 5, 7, 9.

15). 1, 2, 3, 4, 5. 16). 18, 19.

17). 7. 18). 5.

19). 1, 4, 7. 20). 1, 2.

21*). $b = \frac{u-r}{q-p}$; $a = \frac{r(q-1)-u(p-1)}{q-p}$;

$$l = \frac{u(n-p)-r(n-q)}{q-p};$$

$$s = \frac{2(qr-pu)+(n+1)(u-r)}{q-p} \cdot \frac{n}{2}.$$

22*). 210. 23*). 27.

XXXIX.

1). 1365. 2). $13\frac{4}{9}$.

3). $40\frac{3}{5}$. 4). $62(\sqrt{2}+1)$.

5). $\frac{665}{648}$. 6). $\frac{463}{96}$.

7). $\frac{3}{4}$. 8). $\frac{4}{3}$.

9). $\frac{2}{3}$. 10). $4\frac{1}{2}$.

11). $\frac{5}{33}$. 12). $\frac{41}{333}$.

13). $\frac{212}{495}$. 14). $\frac{557}{1980}$.

15). 4, 16, 64. 16). 8, 12, 18, 27.

17). $-9, 27, -81, 243$.

18). 3, 12, 48; albo $36, -54, 81$.

19). 1, 3, 9, ... 20). 3, 6, 12.

21*). $s=2047\frac{7}{8}$, $r=2$. 22*). $r=1\frac{1}{2}$ lub $-2\frac{1}{2}$.

23*). $\frac{p\cdot q}{p^{n-1}}$, $\frac{p^2\left[\left(\frac{q}{p}\right)^n-1\right]}{q-p}$; $\frac{p^2}{p-q}$.

24*). $\frac{x^{10}-y^{10}}{x-y}$ 25*). $\frac{p^2-q^2}{\sqrt[4]{p}+\sqrt[4]{q}}$.

27*). $\frac{(a+b)(a-b)^n-(a+b)}{(a-b)^{n-1}-(a-b)^{n-2}}=\frac{a+b}{(a-b)^{n-2}}\cdot\frac{(a-b)^n-1}{(a-b)-1}$.

28*). $\frac{(a+x)^{2n}-(a-x)^{2n}}{[(a+x)^2-(a-x)^2](a-x)(a+x)^{2n-3}}=$

$=\frac{(a+x)^{2n}-(a-x)^{2n}}{4ax(a-x)(a+x)^{2n-3}}$.

30*). 18,446,744,073,709,551,615 ziarn. Dla wyrażenia tego w korcach można przyjąć, że kilogram pszenicy ma około 20,000 ziarn, a korzec waży 100 kilogramów.

31*). $2m$.

XL. 1) $\frac{3}{2}, \frac{6}{5}, 1$. 2). $\frac{4}{5}, \frac{8}{13}, \frac{1}{2}$.

3). $3, \frac{12}{5}$. 4). $\frac{2}{15}, \frac{1}{12}, \frac{2}{33}$.

5). 6, 12. 6). 36, 64.

7). 1, 9. 8). 3, 9.

XLI. 1). 134596. 2). 5040.

3). 126. 4). 30240.

5). 11. 6). 1900.

7). 15504, 3876. 8). 27, 99.

9*). liczba przestawień 1) 6, 2) 24.

10*). 1) 66, 2) $\frac{1}{2}u(u-1)$.

11*). 1) 55, 2) $\frac{1}{2}n(n-1)$.

12*). $\frac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$.

13*). $\underline{|10}-\underline{|9}=3265920$.

XLII. 1). $a^{13}-13a^{12}x+78a^{11}x^2\ldots-78a^2x^{11}+13ax^{12}-x^{13}$.

2). $243-810x^2+1080x^4-720x^6+240x^8-32x^{10}$.

3). $1-14y+84y^2-280y^3+560y^4-672y^5+448y^6-128y^7$.

4). $x^n+2nx^{n-1}y+2n(n-1)x^{n-2}y^2+\frac{4n(n-1)(n-2)}{3}x^{n-3}y^3$.

5). $1+4x+2x^2-8x^3-5x^4+8x^5+2x^6-4x^7+x^8$.

6). $1+5x+15x^2+30x^3+45x^4+51x^5+45x^6+30x^7+15x^8+5x^9+x^{10}$.

7). $1-8x+28x^2-56x^3+70x^4-56x^5+28x^6-8x^7+x^8$.

8). 5922. 9). 1590.

10). $x=2, y=3, n=5$. 11). $x=4, y=-\frac{1}{2}, n=8$.

12). $a^{\frac{1}{4}}-\frac{a^{-\frac{3}{4}}x}{2}-\frac{3a^{-\frac{7}{4}}x^2}{8}-\frac{7a^{-\frac{11}{4}}x^3}{16}-\frac{77a^{-\frac{15}{4}}x^4}{128}$.

13). $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{13x^3}{54}$.

14). $1+2x+4x^2+8x^3+\ldots$.

15). $r+1$.

16). $\frac{3.7.11.15.19}{4^5\lfloor 5}(3x)^{-\frac{3}{4}}-5y^5$.

17). $a^{-\frac{10}{3}}+10a^{-\frac{13}{3}}b+65a^{-\frac{16}{3}}b^2+\frac{1040}{3}a^{-\frac{19}{3}}b^3+$
$+\frac{4940}{3}a^{-\frac{22}{3}}b^4$.

18). $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}$. 19). $1+\frac{1}{2}x+\frac{3x^2}{8}-\frac{3x^3}{16}$.

20). $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{7x^3}{16}$.

XLIII. 1). 2042132. 2). 22600.
3). 11101001010. 4). 2076.
5). *d*4592. 6). Zasada 8.
7). Zasada 6. 8). 9*j*21, *dj*.
9). Zasada 5. 10). *jjj*.

XLIV. 1). $\frac{bc}{a}$. 3). $n=\frac{1}{r}$.

Zadania rozmaite.

1). 729, 369, 1, 41. 2). $41x-51y$.
3). $9-30x+37x^2-20x^3-4x^4$.
4). $1+x-x^3-x^4$, $1-x+x^3-x^4$.
5). $\frac{2x^2+3x-4}{3x-4}$. 6). $(4x^2-9)(9x^2-4)$.

7). $\frac{2}{a}$. 8). 3.

9). 240, 360. 10). 2 rs., $3\frac{2}{3}$ rs.

11). $\frac{7x}{6}+\frac{7y}{6}+\frac{7z}{6}$, $x+\frac{13y}{6}+\frac{3z}{2}$.

12). 1. 13). $3b^2$.

14). $2x^2-xy-2y^2$. 15). $\frac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$.

16). $(x-10)(x+1)(x+3)$. 17). $\frac{59}{(x-10)(x+1)(x+3)}$.

18). 5. 19). 7.

20*). 1909 m.

21). $2a-2b-x-2y$, $a+3b+4x+4y$.

22). 11. 23). x^4-a^4.

24). $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-\frac{1}{4}$. 25). x^2-2.

26). $\frac{ab-b^2}{b^2-4a^2}$. 27). $(16x^2-1)(x^2-4)$.

28). 6). 29). 14 rs., 21 rs., $52\frac{1}{2}$ rs.

30). 100. 31). 1.

32). $(x^2-a^2)(x^2-b^2)$, $(x-a)(x-b)$.

33). $4x^4-2x^3y+x^2y^2-xy^3+\frac{y^4}{2}$.

34). $x-2$. 35). $\frac{3(4x-y)}{2(3x^2+y^2)}$.

36). 1. 37). 4.

38). 2. 39). 30 minut.

40). 18 rs., 6 rs. 41). $10x+10z$.

42). $7x^2-2xy+y^2$, $-x^2-6xy+7y^2$, $12x^4-10x^3y-$
$-x^2y^2+20xy^3-12y^4$.

43). $a+b-c$.

44). x^2+1.

45). $\frac{1}{x+1}$.

46). $(x^2-4)(x^2-9)$.

47). $\frac{x^2+x+2}{2x^2+x-1}$.

48). 1.

49). $\frac{16}{25}$.

50). 30.

51). $3a^4-5a^3b-12a^2b^2-ab^3+3b^4$, $3a^3-8a^2b-4ab^2+3b^3$.

52). $2x-5$.

53). 2.

54). $\frac{(a+b)a}{b}$.

55). 1, 2.

56). 3, 6.

57). 5, 8.

58). 4, 5, 2.

59). $\frac{a^2+b^2}{am+bn}, \frac{a^2+b^2}{bm-an}$.

60). 12, −15.

61). $x^4+x^2+1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$.

62). $\frac{11x+2}{7x^2+7x+2}$.

63). $\frac{2ax}{x^2+1}$.

64). 1.

65). 4, 3.

66). 2, 4.

67). 3, −3.

68). 3.

69). 2.

70). 20, 40.

71). 1.

72). $\frac{3x-1}{2x-1}, \frac{8}{5}$.

73). $(x-2)(x-1)$, $(x-2)(x-5)$, $(x-1)(x-5)$.

74). 0.

75). $\frac{2}{5}$.

76). $\frac{17}{3}, \frac{4}{3}$.

77). 3 rs., 2 rs.

78). $3x^2-x+1$.

82). $(x^2-4y^2)^3$.

83). 3, −2.

84). 5.

85). 47 albo 74.

86). 45 gallonów.

87). $4x^3-3xy^2+5y^3$.

88). $52\frac{4}{5}$.

89). 4,85409.

91). $x-y$.

92). $8(x^2+y^2), 48(x^4-y^4)$.

93). $\frac{x^2+3y^2}{x^4-y^4}$.

94). 1.

95). 4, 5, 6.

96). 3, $-\frac{5}{3}$.

97*). 1) 11, 2). 49.

98*). 60 ł., 360 rs.

99). $18\left(1-\frac{1}{3^8}\right)$, 18.

100). 4, 8, 16.

101). $x^4-1, 1+x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}}$.

102). $(x^2-a^2)(x^6-a^6)$.

103). a.

104). 1.

105). $13, \pm\sqrt{\frac{35}{11}}$.

106). $\pm 3, \pm 4, \mp 5$: albo $\pm 3, \pm 5, \mp 4$.

107). 5 rs.

108). 48.

109). $\frac{x}{y}+1-\frac{y}{x}$.

111). x_n+1+x^{-n}.

112). $\frac{x^2+5x+10}{x^3+2x^2+3x+6}, \frac{6}{7}$.

113). $7, \frac{38}{9}$.

114). 1 lub −3.

115). $\pm 2, \pm 1$.

116). $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

117). $\frac{2}{3}$.

118). $-x^{-2}$.

119). 612.

121). $\frac{2a^2b^2-ab^3+a^2-3ab+b^2}{2ab^2-b^3+a-b}$.

122). $3x^2-5xy+2y^2$.

123). $x(3x+4)(x-6)$.

124). $\frac{2}{17}$.

125). $2, \frac{1}{2}$.

126). $5, -\frac{13}{4}, 4, \frac{5}{4}$.

127). $1, \frac{5}{3}, 2, \frac{2}{3}$.

129). 3.

130). $3(3_n-1)$.

131). $\frac{1}{x}$.
132). $2x(3x+4)$.
133). 4, −3.
134). $x^2-x-6=0$.
135). $x^4=a^4$ lub $\frac{1}{a^4}$.
136). ± 2.
137). 8, 19615.
138). $7-2\sqrt{3}$.
139). $\frac{x+y}{xy}$.
140). $\frac{c+b-2a}{b-a}$, $\frac{(a+c)(c+b-2a)}{2(b-a)}$.
141). 3, 2, 2.
142). 197, $3x^3-2x^2-5x-3$.
143). $a(a^2+b^2)$, $\frac{4xa}{x^2-a^2}$.
144). 1) 4. 2) 0, 5. 3) 5, 7.
145). 1) 3, $\frac{80}{11}$. 2) 8. 3) ± 7, ± 5.
146). 16, 16.
147). 20.
148). 16, 24.
149). $\frac{15}{4}$, 169.
150). Jak 5 do 1.
151). x^3.
152). a^2+4b.
153). $x-3$.
154). 1) 5. 2). 3. 3) 7, 4.
155). 1) 8. 2) 9. 3) ± 9, ± 7.
156). 60 kop.
157). 80.
158). 20 rs.
159). $x+2a$.
161). a, $21a-27b+6c$, a^{11mnp}.
162). $3(a-x)$.
163). $72(x-y)^2(x^3+y^3)$.
164). 1) 9. 2) 8. 3) 12. 4) 20, 2.
165). 1) 6, $\frac{2}{5}$. 2) 11. 3) ± 11, ± 13, ± 13; ± 11. 4) ± 2, ∓ 1.

166). 12 dni.
167). 4, 8.
168). $\frac{4}{15}$.
170). 208, 400.
171). $23b-18a$.
172). 2, p^2, x^{pq}.
173). $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$.
174). 1) 13. 2) 4. 3) 6, 10. 4) 3.
175). 1) 2, 4. 2) ± 5, ± 4. 3) ± 1, ± 7, ∓ 1, ± 5. 4) 1, 5, 5, 1.
176). $16\frac{4}{11}$ minut po 12-ej.
177). 36.
178). 40, 23.
179). $36\left(1-\frac{2^6}{3^6}\right)$, 36.
180). $7-\sqrt{6}$.
181). 15.
182). $\frac{3x+2}{x^2-2x-24}$.
184). 1) 9. 2) 6, 8. 3) 4, $-\frac{7}{4}$.
185). 1) 13, −15. 2) 7. 3) 2, −1.
186). 288, 224.
187). 29 mil.
188*). 74 f. c. 46 f. oł.
190). $-85\frac{1}{2}$.
191). $\frac{18x^4+12x^3-43x^2+36x-18}{144}$, $\frac{6x^3-20x^2+x+36}{4}$.
192). $\frac{4x^2-15x+13}{x^3-6x^2+11x-6}$.
193). x^4-16y^4.
194). 1) 8. 2) 7. 3) 40, 16.
195). 1) $\frac{5}{3}$, $-\frac{3}{2}$. 2) 13. 3) 2, 4; 4, 2.
196). 66 w.
197). 24.
198*). $466\frac{2}{3}$. $933\frac{1}{3}$, 700.
199). a^2-ab+b^2, a^2+b^2.

200). 2, 4, 8, 16. 201). $\frac{1+9x-13x^2}{3(7-2x)}$.

202). x^2-2x+4.

203). $\frac{16x^2}{(2+3x)^3}$. $\frac{2x}{1+x^2+x^4}$.

204). 1) 9. 2) $\frac{a^2}{b}$. 3) 6, 8.

205). 1) 7, $\frac{5}{6}$. 2) 1, -4. 3) ± 3, ± 2.

206*). 4500, 5500. 207). 24.

208). 6 pięcior. $+18$ rub. 209). $2x^2+2ax+4b^2$.

210). 7, 11, 15, ...

211). $3x^3-2x^2y+3xy^2-5y^3$.

212). $-\frac{x^2}{12+5x-28x^2}$. 213). $\frac{4x^2-25x+37}{x^3-10x^2+31x-30}$.

214). 1) 9. 2) 16, 4. 3) 3, 6, 9.

215). 1) 3, -6. 2) ± 7, ± 5. 3) 2, 4, 4, 2.

216). 114 każdego. 217). 126.

218). 21. 219). 11, 12, 13, 14.

220). $3+2\sqrt{3}$.

221). x^6+x^3+1, px^2+qx-r.

222). $\frac{x^{m-1}}{b(a+bx)}$, $\frac{a+b+c}{a-b-c}$.

223). $(7x-4)(3x-2)(x^2-3)$.

224). 1) 9. 2) 23, 19. 3) 12, -24, 36.

225). 1) 28, -3. 2) 100, -200.

3) $\frac{ac}{2a+2\sqrt{(a^2-b^2)}}$, $\frac{bc}{2a+2\sqrt{(a^2-b^2)}}$.

226). $\frac{7}{12}$ wiorsty. 227). 5000, 1000, 40000.

228). 2 godz., 4 godz. 229). 2, 5, 8, ...

230). $\frac{5n}{12}(9-n)$.

231). $x^{2a+2b+2c}$, $\frac{b(a^2+b^2)}{a(a^2-b^2)}$, $\frac{a^3+b^3}{(a-b)^2(a^2+b^2)}$.

232). $\frac{x+5}{9x^2-x-3}$.

233). 1) $\frac{1}{2}$. 2) $\pm\frac{1}{2}$. 3) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$.

234). 1) 5, $\frac{27}{5}$. 2) $\frac{b-c\pm a}{\sqrt{a}}$. 3) 5, ± 4.

235). 19. 236). 150, 50.

237). 40, 50. 238). 1975.

239). $a^3+a^2b+ab^2+b^3$, $a+2b+3c$.

240). $x^2y^{\frac{1}{2}}+8x^{\frac{1}{2}}y^2$. 241). $14xy$, $\frac{2(1+x^2-x^3)}{1-x^4}$.

242). $x+a$. 243). 105 rs.

244). 54. 245). 3, 5, 8.

246). $6\frac{1}{4}$ 247). 2200.

248). $\frac{5}{21}$. 249). 5, 678, 1, 234.

251). $2a-b$. 252). $a^{16}-x^{16}$, c.

253). $x(3a+2x)$.

254). 1) 5. 2) 114, 77. 3) 0, $\frac{a}{2}$.

255). 112, 96.

256). A ma 54000 rs. B -72000 rs.

257). 21, 39. 258). 80.

259). 8, 5. 260). 80 rs.

261). c^2+2bc.

262). $x^{10}-1$, $-\frac{1}{x^2a^2}(2x^4+3ax^3-4a^2x^2-3a^3x+2a^4)$.

263). $x^2-x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

264). $\frac{x^2-2x+3}{2x^2+5x-3}$, 1.

265). 1) $\frac{3}{7}$. 2) 1. 3) 18, 9.

266). 1) 3, -2. 2) 5, $\frac{6}{5}$. 3) 2, 3, 3, 2.

268). 45 rs., 30 rs.

270). $x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}$, $5-2\sqrt{2}$.

271). 0.

272). x^2+3x+8.

273). $\frac{3(a^2+x^2)}{a^2-x^2}$, $\frac{12a^2-8ax+5x^2}{15a^2+ax-2x^2}$.

274). $\frac{4x^4}{(4a-3x)(5a-2x)}$, $x(1-x)$.

275). $\frac{b(c+d)+1}{ab(c+d)+a+c+d}$, $\frac{a^2-ax+x^2}{a^2+ax+x^2}$.

276). 1) 2. 2). 11, 7. 3) 4, $\frac{16}{3}$.

277). 1) $\frac{a(a+b)}{a-b}$, $\frac{a(a-b)}{a+b}$. 2) 4, 7. 3) 5.

278). 7+7 wiorst.

281). $\frac{34}{35}$.

282). $2(a-b)(c-d)$, $-2bc$.

283). $\frac{x-6a}{x-11a}$, $-\frac{4xy}{x^2-y^2}$.

284). 1) 4. 2) 6, 4. 3) 5, $\frac{2}{3}$.

285). 1) $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{5}$. 2) $2a$, $-a$, a, $-\frac{a}{2}$. 3) 1, $\frac{53}{19}$, $-2\frac{47}{19}$.

286). Druga łódka 16 min.

287). 3 st., 2 st.

289). 18 st.

290). $\frac{n}{2}\left\{\frac{2}{1+x}+\frac{(n-1)x}{1-x^2}\right\}$.

291). 0.

292). b^2.

294). $\frac{x^2+3}{x^2+2x+3}$.

295). 1) 4. 2) 61, 73. 3) 16, 8.

296). 1) 7, -8. 2) 7, $-\frac{29}{4}$. 3) 1, 5.

297). 144 min.

298). $4\frac{1}{2}$ godz. z prądem, $7\frac{1}{2}$ godz. przeciw prądowi.

299). $a-\frac{1}{2}b$, a, $a+\frac{1}{2}b$.

300). 3, -1.

KONIEC.

DODATEK

zawierający:

I. **Zasady nauki o podzielności liczb.**

II. **Ułamki ciągłe.**

III. **Rozwiązanie równań nieoznaczonych stopnia pierwszego.**

IV. **O Logarytmach.**

I.

Podzielność liczb.

1*. Pod wyrazem *liczba* rozumiéć będziemy w całym tym rozdziale *liczbę całkowitą*; w przeciwnym razie wyraźnie zaznaczymy, że myślimy o liczbie nie całkowitéj.

Gdy pewna liczba powstaje z powtórzenia drugiéj liczby ilekolwiek razy, wtedy pierwszą nazywamy *wielokrotną* względem drugiéj, lub *wielokrotnością* drugiéj. Tak naprzykład gdy a jest równe liczbie b powtórzonéj m razy, t. j. gdy: $a=mb$, wtedy a jest wielokrotnością b. Zamiast tego mówimy często, że: a jest *podzielne* przez b, lub że a *dzieli* się przez b; liczbę b nazywamy *dzielnikiem* lub *częścią wielokrotną* liczby a.

Z tego określenia wypada, że gdy a jest wielokrotném względem b, a b jest wielokrotném względem c, wtedy i a jest także wielokrotném względem c. Gdyż podług założenia $a=mb$, $b=nc$, przeto i $a=mnc$; więc a jest podzielne przez c.

I w ogólności: jeżeli mamy szereg liczb, z których każda jest wielokrotnością następnéj, wtedy także i każda z nich jest wielokrotną względem każdéj z następnych.

Również z tego określenia wypada, że jeżeli liczba a jest wielokrotną względem c i liczba b jest także wielokrotną względem c, wtedy i summa lub różnica liczb a i b będzie także wielokrotną względem c. Gdyż jeżeli: $a=mc$, i $b=nc$, wtedy: $a \pm b = (m \pm n)\, c$.

2*. Jedném z najważniejszych zadań w nauce o podzielności liczb, jest zadanie następujące: *Znaleść wszystkie dzielniki wspólne dla dwóch liczb danych* a i b, to jest takie liczby d, któreby się mieściły bez reszty i w liczbie a i w liczbie b.

Możemy przyjąć tutaj, że a jest większe od b; dzieląc a przez b otrzymamy na iloraz q_1 i na resztę r_1, która to ostatnia liczba będzie zawsze mniejszą od b. Wtedy możemy utworzyć równość:

$$a = q_1\, b + r_1.$$

Przypuśćmy, że pewna liczba d mieści się w a i b bez reszty; ostatnia równość pokazuje, że taż sama liczba musi się mieścić w r_1. Gdyż: skoro d dzieli bez reszty a i b, to dzieli także bez reszty a i $q_1 b$, a zatém musi dzielić i ich różnicę $a - q_1 b = r_1$. Możemy więc powiedzieć, że każdy wspólny dzielnik dla a i b, jest zarazem dzielnikiem i dla r_1. I odwrotnie: każdy wspólny dzielnik dla liczb b i r_1 jest zarazem dzielnikiem i liczby a; gdyż jeżeli b jest wielokrotne względem pewnéj liczby d, wówczas i $q_1 b$ jest także wielokrotne względem téjże saméj liczby d; jeżeli i r_1 jest wielokrotne względem d, wtedy summa $q_1 b + r_1$, czyli a, będzie także wielokrotną względem d. I tak: każdy wspólny dzielnik dla liczb a i b, jest zarazem dzielnikiem wspólnym dla b i r_1; i odwrotnie każdy wspólny dzielnik dla b i r_1, jest zarazem wspólnym dzielnikiem dla a i b. Widzimy z tego, że zadanie odnoszące się

do wynalezienia wspólnych dzielników liczb a i b, zostało tym sposobem sprowadzone do wynalezienia wspólnych dzielników liczb b i r_1. A ponieważ b jest mniejsze od a, r_1 zaś jest mniejsze od b, przeto możemy powiedzieć, że zadanie pierwotne zostało sprowadzone do zadania prostszego.

Jeżeli r_1 jest różne od zera, gdy zatem pierwsze dzielenie nie mogło być wykonane bez reszty, wtedy dzieląc znowuż b przez r_1, i oznaczając iloraz przez q_2, a resztę przez r_2, otrzymamy nową równość:

$$b = q_2 r_1 . + r_2,$$

w któréj r_2 jest mniejsze od r_1. Rozumowanie podobne do powyższego pokaże nam, że wszystkie wspólne dzielniki liczb r_1 i r_2 są zarazem wspólnemi dzielnikami liczb b i r_1 i odwrotnie: zatém oznaczenie wspólnych dzielników liczb a i b zostaje tym sposobem sprowadzone do wynalezienia wspólnych dzielników liczb r_1 i r_2.

Postępując w podobny sposób daléj, dojdziemy nakoniec po pewnéj skończonéj liczbie działań do takiego dzielenia, które zostanie wykonane bez reszty. To nastąpić musi: gdyż liczby b, r_1, r_2, r_3 i t. d., stanowią szereg liczb całkowitych i ciągle zmniejszających się; a że liczba takich liczb, które są mniejsze od b jest ograniczoną, przeto pomiędzy niemi musi nakoniec przytrafić się zero.

Przypuśćmy, że to mieć będzie miejsce po $n+1$ dzieleniu. Wtedy otrzymamy szereg następujących równości, w których głoski mają ciągle jednakowe znaczenie:

$$a = q_1\, b + r_1,$$
$$b = q_2\, r_1 + r_2,$$

$$r_1 = q_2\, r_2 + r_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = q_n\, r_{n-1} + r_n,$$
$$r_{n-1} = q_{n+1}\, r_n$$

Każdy wspólny dzielnik d dla a i b jest także dzielnikiem następnych liczb: $r_1, r_2, \ldots r_{n-2}, r_{n-1}$, i nakoniec r_n; i odwrotnie jeżeli d jest dzielnikiem liczby r_n wtedy będzie ono i dzielnikiem r_{n-1}, czyli będzie wspólnym dzielnikiem dla r_{n-1} i r_n; zatem będzie ono i dzielnikiem dla r_{n-2} i t. d., i nakoniec będzie dzielnikiem liczb: a i b.

Te wszystkie rozumowania prowadzą nas do takiego wypadku: Dzielniki wspólne dwóch liczb a i b, są zarazem wszystkiemi dzielnikami *pewnéj oznaczonéj* liczby r_n, którą możemy znaleźć za pomocą podanego wyżej sposobu postępowania. Ponieważ pomiędzy temi dzielnikami znajduje się i sama ta liczba r_n, i ponieważ z pomiędzy tych wszystkich dzielników jest ona największą, przeto r_n nazywamy *największym wspólnym dzielnikiem* liczb a i b. Oznaczać go będziemy w przyszłości takim znakiem: $D(a, b)$.

Rachunek powyższy nie rozwiązał nam bez wątpienia tego zadania, jakie na początku postawiliśmy; jednak za pomocą tego sposobu postępowania, jaki był wyłożony, zadanie zostało sprowadzone do innego zadania, mianowicie do oznaczenia wszystkich dzielników liczby: $D(a, b) = r_n$.

Przypuściliśmy w całém rozumowaniu, że a jest większe od b; gdyby było odwrotnie, wtedy należałoby przyjąć, że $q_1 = 0$; i zresztą sposób postępowania i wypadek ostateczny pozostały by bez zmiany.

3°. Na szczególną uwagę zasługuje ten przypadek, gdy największy wspólny dzielnik dwóch liczb jest równy jedności, co oczywiście mieć będzie miejsce wtedy, gdy przy wykonywaniu powyższego rachunku, jedna z reszt wypadnie 1. Dwie takie liczby nazywamy *pierwszemi względem siebie*, lub *względnie pierwszemi*; mówimy także, że są to liczby nie mające żadnego wspólnego dzielnika; na dzielnik 1, wspólny dla wszystkich liczb, nie zwracamy przy tém żadnej uwagi. Z samego określenia największego wspólnego dzielnika wypada, że ilorazy powstałe z podzielenia dwóch liczb a i b przez ich największy wspólny dzielnik, są liczbami pierwszemi względem siebie. W rzeczy samej: oznaczmy iloraz $\frac{a}{D(a, b)}$ przez m, iloraz zaś $\frac{b}{D(a, b)}$ przez n. Gdyby m i n miały jakikolwiek wspólny dzielnik d; wtedy: $m = m'd$; $n = n'd$; a ponieważ: $a = m \,.\, D(a, b)$, i $b = n \,.\, D(a, b)$, przeto, podstawiając zamiast m i n ich wartości, byłoby: $a = m' \,.\, d \,.\, D(a, b)$; i $b = n' \,.\, d \,.\, D(a, b)$; zkąd wypadłoby, że a i b mają za wspólny dzielnik iloczyn: $d \,.\, D(a, b)$, to jest liczbę większą od $D(a, b)$, co się sprzeciwia założeniu.

Dla liczb pierwszych względem siebie dowiedziemy najprzód taką własność główną:

Jeżeli a i b są dwiema liczbami pierwszemi względem siebie, k zaś jakąkolwiek liczbą trzecią, wtedy największy wspólny dzielnik dla iloczynu ka i liczby b będzie równy największemu wspólnemu dzielnikowi liczb k i b.

Używając sposobu oznaczenia, objaśnionego w poprzednim paragrafie, możemy wyrazić tę własność tak: Jeżeli: $D(a, b) = 1$, wtedy: $D(ka, b) = D(k, b)$

Aby tego dowieść, ułóżmy te równości dla liczb a i b, jakie znaleźliśmy w § 2* przy oznaczaniu największego wspólnego dzielnika tychże liczb a i b. Ponieważ liczby te są pierwszemi względem siebie, czyli największy ich wspólny dzielnik jest 1, przeto w wymienionych równościach $r_n = 1$, i one zamienią się na następne:

$$a = q_1\ b + r_1$$
$$b = q_2\ r_1 + r_2$$
$$r_1 = q_3\ r_2 + r_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2} = q_{n-1}\ r_{n-1} + 1$$

Mnożąc teraz obie strony, każdej z tych równości przez k, otrzymamy:

$$ak = q_1\ k\ b + r_1 k$$
$$bk = q_2\ kr_1 + r_2 k$$
$$r_1 k = q_3\ kr r_2 + k r_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$r_{n-2}\ k = q_{n-1}\ k r_{n-1} + k.$$

Każdy wspólny dzielnik dla ak i b mieści się i w $q_1 kb$, a zatém i w $ak - q_1 kb = r_1 k$; mieści się zatém i w $q_2 kr_1$, a przeto i w $bk - q_2 kr_1 = r_2 k$. I powtarzając toż samo rozumowanie daléj, tak jak to miało miejsce w paragrafie poprzednim, dochodzimy do tego, że każdy wspólny dzielnik dla ak i b, jest zarazem wspólnym dzielnikiem dla k i b. A z tego wypada, że największy wspólny dzielnik dla ak i b jest taki sam, jak największy wspólny dzielnik dla k i b.

Z téj własności wypadają bezpośrednio następujące wnioski:

1. Iloczyn dwóch liczb a i k, z których każda jest pierwszą względem trzeciéj liczby b, jest także pierwszym względem liczby b; czyli: jeżeli $D(a, b) = 1$ i $D(k, b) = 1$, będzie także i $D(ak, b) = 1$.

Gdyż podług dowiedzionéj własności największy wspólny dzielnik dla ak i b jest równy największemu wspólnemu dzielnikowi liczb k i b. Lecz podług założenia i te dwie ostatnie liczby są także pierwsze względem siebie, największy ich wspólny dzielnik jest 1; przeto i największy wspólny dzielnik liczb ak i b jest równy 1, czyli ak i b są pierwsze względem siebie.

2. Jeżeli a jest liczbą pierwszą względem b i iloczyn ak jest podzielnym przez b, wtedy liczba k jest sama podzielną przez b. Gdyż skoro iloczyn ak jest podzielnym przez b, wtedy największy wspólny dzielnik dla ak i b jest b. A że podług twierdzenia głównego, największy wspólny dzielnik ak i b jest równy największemu wspólnemu dzielnikowi k i b, przeto i ten ostatni jest także b, czyli liczba k musi być podzielną przez b.

3. Jeżeli pewna liczba N jest podzielną przez każdą z liczb a i b, pierwszych względem siebie, wtedy taż liczba N jest podzielną i przez iloczyn ab.

W rzeczy saméj: Jeżeli N jest podzielne przez a, wtedy $N = ma$. Podzielmy obie strony téj równości przez b; otrzymamy:

$$\frac{N}{b} = \frac{ma}{b}$$

Ponieważ, podług założenia, N jest podzielne i przez b, pierwsza strona téj ostatniéj równości, a zatém i druga strona powinny być całkowite, czyli ma

powinno być podzielne przez b. A że a jest pierwsze względem b, więc na zasadzie wniosku drugiego, m samo musi być podzielne przez b; to jest powinno być $m = nb$. Podstawiając tę wartość na m w wyrażenie $N = ma$, otrzymamy: $N = nab$, co pokazuje, że liczba N jest wielokrotną względem iloczynu ab.

4. Pierwszy z powyższych wniosków może być uogólniony w następujący sposób: Jeżeli mamy dwa szeregi liczb:

$$a,\ b,\ c,\ d\ \ldots\ .$$

i

$$a',\ b',\ c',\ d'\ \ldots\ .$$

takich, że każda liczba szeregu pierwszego jest pierwszą względem każdéj z liczb szeregu drugiego, wtedy i iloczyn wszystkich liczb szeregu pierwszego, będzie liczbą pierwszą względem iloczynu wszystkich liczb szeregu drugiego.

I w rzeczy saméj: skoro a i b są pierwsze względem a', wtedy i ich iloczyn ab jest także pierwszym względem a'. Gdy zaś ab i c są pierwsze względem a', wówczas i iloczyn $(ab).c = abc$ jest pierwszym względem a'. Powtarzając dalej toż samo rozumowanie, wypadnie, że iloczyn $abc\ldots$. będzie pierwszym względem każdéj z liczb a', b', $c'\ldots$. Lecz jeżeli znowu liczba a' jest pierwszą względem iloczynu $abcd\ldots$. i liczba b' jest także pierwszą względem tegoż samego iloczynu, będzie i iloczyn $a'b'$ liczbę pierwszą względem $abcd\ldots$. Ciągnąc daléj toż rozumowanie wypadnie ostatecznie, że iloczyn $a'b'c'd\ldots$ jest pierwszym względem iloczynu $abcd\ldots$.

5. Przyjmijmy, jako szczególny przypadek wniosku poprzedniego, że wszystkie liczby pierwszego szeregu stają się równemi a, wszystkie zaś liczby drugiego szeregu stają się równemi a'. Wtedy iloczyn liczb pierwszego szeregu zamieni się na pewną potęgę a; iloczyn zaś liczb szeregu drugiego zamieni się na potęgę liczby a'. Ztąd wypada, że jeżeli dwie liczby a i a' są pierwszemi względem siebie, będzie też i każda potęga liczby a pierwszą względem każdéj potęgi liczby a'.

Przez zastosowanie powyższéj zasady możemy łatwo dowieść, że $\sqrt[n]{N}$ gdzie N jest całkowite, nie może być wyrażony nietylko pod postacią liczby całkowitéj, ale nawet pod postacią ułamku, gdy N nie jest zupełną potęgą n-tą pewnéj liczby całkowitéj. Gdyby bowiem mogło być $\sqrt[n]{N} = \frac{a}{a'}$, gdzie a i a' można przyjąć, jako liczby pierwsze względem siebie, wtedy byłoby: $\left(\frac{a}{a'}\right)^n = \frac{a^n}{a'^n} = N$. A że a jest pierwsze względem a', więc i a^n jest pierwsze względem a'^n; ułamek przeto $\frac{a^n}{a'^n}$ nie może być równym liczbie całkowitéj N, a tém samem i $\sqrt[n]{N}$ nie może być równym $\frac{a}{a'}$. Pierwiastek taki przedstawia nam przykład ilości *niewymiernéj*. (Patrz § § 254, 255, 265, oraz rozdział XXIX).

4*. Nie trudno się przekonać, że jeżeli dwie liczby a i b są pierwsze względem siebie, wtedy tworząc szereg liczb:

$$1.a\ ;\ 2.a\ ;\ 3.a\ ;\ \ldots\ .\ (b-2)\,a\ ;\ (b-1)\,a\ \ldots\ . \quad (1)$$

nie otrzymamy w nim ani jednéj liczby, która by była podzielną przez b. Gdyż aby którakolwiek

z tych liczb, np. ma była podzielną przez b, potrzeba aby m było podzielne przez b, co być nie może; liczba bowiem m jako wzięta z szeregu:

$$1, 2, 3, 4 \ldots\ldots (b-2), (b-1),$$

jest mniejszą od b.

Dzieląc zatém kolejno każdą z liczb szeregu (1) przez b, otrzymamy z każdego dzielenia pewną resztę. Można dowieść, że pomiędzy temi resztami, nie ma dwóch reszt równych, czyli innemi słowami, że *wszystkie one są różne.* W rzeczy saméj: wybierzmy z szeregu (1) dwie liczby którekolwiek ma i na, i przypuśćmy, jeżeli to być może, że reszty pozostałe z podzielenia każdéj z tych liczb przez b są równe. Oznaczmy te wspólną resztę przez r, ilorazy zaś przez q i q^1. Wtedy byłoby:

$$ma = qb + r\,; \quad na = q^1 b + r.$$

Odejmijmy odpowiedniemi stronami te dwie równości, będzie:

$$(m - n)\, a = (q - q^1)\, b\,;$$

dzieląc zaś obie strony przez b;

$$\frac{(m-n)\,a}{b} = q - q^1.$$

Lecz q i q^1 są liczbami całkowitemi, więc i ich różnica jest także całkowitą, zatém i pierwsza strona równości powyższéj powinna być całkowitą, to jest $(m-n)\,a$ powinno być podzielne przez b. A ponieważ a jest pierwsze względem b, przeto $m-n$ powinno dzielić się bez reszty przez b. Lecz to jest niemożliwe, gdyż każda z liczb m i n, jako wzięta z szeregu: $1, 2, 3 \ldots (b-2)$ i $(b-1)$, jest mniejszą od b, więc i ich różnica $m-n$ jako mniejsza od b nie może być wielokrotną względem b. Z tego więc wypada,

że wszystkie reszty, pozostałe z dzielenia liczb szeregu (1) przez b są *różne.* Każda z tych reszt jest mniejszą od b, liczba ich jest $b-1$, gdyż szereg (1) zawiera liczb $b-1$; reszty te przeto są znowuż liczbami:

$$1, 2, 3, 4 \ldots (b-2), (b-1);$$

które oczywiście mogą wypadać w bardzo rozmaitym porządku.

Ta własność reszt, pozostałych z dzielenia liczb szeregu (1) przez b jest bardzo ważną w teoryi liczb; użyjemy jéj w rozdziale III niniejszego dodatku.

5*. Zadanie jakie podaliśmy w § 2*, może być uogólnione i rozciągnięte do ilukolwiek liczb; mianowicie możemy zadać sobie pytanie, jak znaleźć wszystkie wspólne dzielniki, i zarazem największy wspólny dzielnik dla szeregu liczb $a, b, c, d \ldots\ldots$ Ponieważ każdy wspólny dzielnik dla liczb a i b, jest zarazem dzielnikiem i dla $D(a, b)$, (to jest największego wspólnego dzielnika liczb a i b), przeto każdy wspólny dzielnik dla liczb a, b i c, będzie zarazem wspólnym dzielnikiem dla $D(a, b)$ i c; i odwrotnie. Więc największy wspólny dzielnik dla $D(a, b)$ i c będzie największym wspólnym dzielnikiem dla trzech liczb a, b i c. Wyrazić to możemy znakami przyjętemi w ten sposób:

$$D(a, b, c) = D\,\{\,D(a, b)\,,\, c\,\}.$$

W podobny sposób rozumując znajdziemy w dalszym ciągu:

$$D(a, b, c, d) = D\,\{\,D(a, b, c),\, d\}$$

Ten sposób postępowania możemy przedłużyć tak daleko, dopóki nie dojdziemy do ostatniej liczby.

6*. Zadaniem odwrotném poniekąd względem zadania rozwiązanego w § 2*, jest zadanie następujące: Mając dany szereg liczb $a, b, c, d \ldots$ znaleźć wszystkie wspólne wielokrotne względem tych liczb, to jest wszystkie te liczby, które są podzielne przez każdą z liczb danych.

Z początku ograniczymy się tylko dwiema liczbami a, b, i rozwiążemy pytanie tylko dla tych dwóch liczb. Oznaczmy jakąkolwiek wspólną wielokrotną dla liczb a i b znakiem $M(a, b)$. Ponieważ szukana wspólna wielokrotna ma być podzielną przez a, przeto musi być ona téj postaci na, gdzie n jest jakąkolwiek liczbą całkowitą.

Lecz szukana wspólna wielokrotna ma być podzielną także i przez b; dzieląc przeto obie strony równości:

$$M(a, b) = na,$$

przez b, powinniśmy otrzymać ilorazy całkowite; to jest

$$\frac{M(a, b)}{b} = \frac{na}{b} = \text{całkowitéj},$$

Jeżeli daléj oznaczymy największy wspólny dzielnik liczb a i b przez $D(a, b)$, wtedy ilorazy, powstałe z podzielenia liczb a i b przez $D(a, b)$ muszą być liczbami pierwszemi względem siebie (§ 3*). Czyli: jeżeli iloraz $\frac{a}{D(a, b)}$ oznaczymy głoską a', a iloraz $\frac{b}{D(a, b)}$ głoską b', to a' i b' są liczbami pierwszemi względem siebie. Z powyższych oznaczeń wypada że

$$a = a' \cdot D(a.b); \quad b = b' \cdot D(a, b).$$

Podstawmy teraz na drugiéj stronie równości $\frac{na}{b}$ = całkowitéj zamiast a i b ich odpowiednie wartości: $a' \cdot D(a, b)$ i $b' \cdot D(a, b)$; otrzymamy:

$$\frac{n a' \; D(a,b)}{b' \cdot D(a, b)} = \frac{n a'}{b'} = \text{całkowitéj}.$$

Ostatnia ta równość pokazuje, że na' powinno być podzielne przez b'. A że a' jest pierwsze względem b', przeto n samo powinno być podzielne przez b', czyli $n = n' b'$, gdzie n' oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Aby więc na mogło przedstawiać liczbę podzielną i przez b, potrzeba aby n było téj postaci: $n' \cdot b'$, gdzie b' jest ilorazem, powstałym z podzielenia b przez największy wspólny dzielnik liczb a i b. Podstawiając tę wartość w wyrażenie na $M(a, b)$, otrzymamy:

$$M(a, b) = n' \; ab' ;$$

czyli, ponieważ $b' = \frac{b}{D(a, b)}$, przeto:

$$M(a, b) = n' \cdot \frac{ab}{D(a, b)}.$$

Ten wypadek pokazuje nam, że wszystkie liczby podzielne zarazem przez a i przez b są zawarte w téj postaci $\frac{n' a b}{D(a, b)}$; i odwrotnie wszystkie liczby zawarte w tém ostatniém wyrażeniu, są podzielne i przez a i przez b. Gdyż

$$\frac{ab}{D(a, b)} = n' \cdot a \cdot \frac{b}{D(a, b)}, \text{ lub } = n' \cdot b \cdot \frac{a}{D(a, b)}.$$

Wypada z tego ostatecznie, że wszystkie wspólne wielokrotne względem liczb a i b są zarazem wielo-

krotnościami *pewnej* oznaczonej liczby $\frac{ab}{D(a,b)}$. Tę ostatnią liczbę nazywamy *najmniejszą wspólną wielokrotną* względem liczb a i b, lub *najmniejszą wspólną wielokrotnością* liczb a i b i oznaczać będziemy tak: $m(a, b)$.

Aby toż samo twierdzenie rozciągnąć do ilukolwiek liczb danych a, b, c, d..... należy tylko zwrócić uwagę na to, że każda wspólna wielokrotna liczb a, b, c, d...., czyli $M(a, b, c, d$.....), musi być także wspólną wielokrotną dla liczb:

$$\frac{ab}{D(a,b)}, c, d \ldots.$$

i odwrotnie. Należy więc najprzód znaleść najmniejszą wspólną wielokrotną względem liczb $\frac{ab}{D(a,b)}$ i c, czyli $m\left[\frac{ab}{D(a,b)}, c\right]$, następnie najmniejszą wspólną wielokrotną dla téj ostatniéj i dla nowéj liczby d, i tak daléj aż do ostatniéj z danych liczb. Stąd widzimy, że wszystkie wspólne wielokrotne liczb danych: a, b, c, d..... są zarazem wielokrotnościami *pewnéj* oznaczonéj liczby, którą nazywamy *najmniejszą wspólną wielokrotną* względem tychże liczb. Aby ją wyrazić dogodnie jednym znakiem, używać będziemy do tego symbolu $m(a, b, c, d$....). Dla téj liczby $m(a, b, c, d$....) możnaby wyprowadzić wzór ogólny, podobny do wzoru $\frac{ab}{D(a,b)}$, odnoszącego się do dwóch liczb danych a, b, lecz ponieważ wyprowadzenie wzoru tego jest dosyć złożone, przeto opuszczamy je tymbardziéj, że w praktyce nigdy go nie używamy.

7*. Na szczególną uwagę zasługuje ten przypadek, w którym liczby dane, brane po dwie, są pierwsze względem siebie. W tym razie największy wspólny dzielnik najprzód dwóch liczb a i b jest równy 1, więc najmniejsza wspólna wielokrotna dla tych dwóch liczb jest ich iloczynem, czyli ab. Ponieważ daléj liczba c jest pierwszą i względem a i względem b, przeto jest ona także pierwszą i względem iloczynu ab; zatem najmniejsza wspólna wielokrotna dla ab i c czyli dla trzech liczb a, b i c będzie znowuż abc. Postępując w rozumowaniu tak samo daléj, znajdziemy, że w tym przypadku najmniejsza wspólna wielokrotna liczb a, b, c, d.... jest ich iloczynem: $abcd$.... A że każda wspólna wielokrotna względem liczb a, b, c, d..... jest zarazem pewną wielokrotnością najmniejszéj wspólnéj wielokrotnéj, przeto liczba podzielna przez liczby a, b, c, d....., które, po dwie brane, są pierwszemi względem siebie, jest także podzielną i przez ich iloczyn: $abcd$..... (Porównaj wniosek 3-ci § 4*, gdzie ta zasada jest ustanowiona dla dwóch czynników).

8*. Każda liczba jest podzielną przez siebie samą i przez jedność; możemy więc powiedzieć, że każda liczba (z wyjątkiem jedności) ma przynajmniéj dwa dzielniki: każdą liczbę, która nie ma innych dzielników, oprócz tych dwóch, nazywamy *liczbą pierwszą*.

Z tego określenia wypada bezpośrednio, że jeżeli w szeregu liczb całkowitych obierzemy dwie liczby p i a, z których p jest liczbą pierwszą, wtedy dwie te liczby albo będą pierwszemi względem siebie, albo też liczba p będzie dzielnikiem liczby a: i dwa te

przypadki wzajemnie się wyłączają. Gdyż największy wspólny dzielnik dla tych dwóch liczb będzie albo 1 albo p.

Z tego jeszcze, jako dalszy wniosek, wypada i to, że jeżeli iloczyn z ilukolwiek liczb $a, b, c, d \ldots$. jest podzielny przez liczbę pierwszą p, wtedy przynajmniej jeden z czynników: $a, b, c, d \ldots$. jest podzielnym przez p. Gdyż jeżeliby żaden z tych czynników, oddzielnie wzięty nie był podzielnym przez liczbę p, wtedy ta ostatnia liczba byłaby pierwszą względem każdego z nich, a zatém byłaby pierwszą i względem ich iloczynu: to zaś sprzeciwia się założeniu, iloczyn bowiem tych czynników ma być podzielnym przez p.

Każda liczba, która oprócz jedności i saméj siebie ma jeszcze inne jakiekolwiek dzielniki, nazywa się *złożoną*. Nazwa ta będzie usprawiedliwioną przez następujące twierdzenie:

Każda liczba złożona może być zawsze, i to w jeden tylko sposób, przedstawiona jako iloczyn skończonéj liczby liczb pierwszych.

W rzeczy saméj: weźmy pod uwagę jakąkolwiek liczbę złożoną N. Liczba ta ma, oprócz siebie saméj i 1 jeszcze inne dzielniki; przyjmijmy, że jednym z takich dzielników będzie pewna liczba a. Jeżeli a nie jest liczbą pierwszą, wtedy znowuż oprócz 1 i a ma ona inne dzielniki: przypuśćmy, że się dzieli bez reszty przez b; jeżeli b nie jest jeszcze liczbą pierwszą, wtedy i ona ma przynajmniej jeden dzielnik c, różny od 1 i od b. Postępując tak daléj, musimy w końcu dojść do pewnego dzielnika, który będzie liczbą pierwszą; szereg liczb bowiem $N, a, b, c \ldots$. zawiera liczby malejące, musi przeto składać się ze skończonéj

liczby wyrazów, gdyż skończona jest liczba tych liczb całkowitych, które są mniejsze od N. Ostatni zatém wyraz tego szeregu będzie liczbą pierwszą; w przeciwnym bowiem razie możnaby było szereg daléj przedłużyć. Oznaczmy tę liczbę pierwszą przez p; wtedy, ponieważ każda z liczb tego szeregu jest wielokrotną względem każdéj z liczb następnych, przeto możemy uczynić:

$$N = p \,.\, m.$$

Liczba m może być pierwszą lub złożoną; w przypadku pierwszym liczba N jest już przedstawioną pod postacią iloczynu z dwóch czynników pierwszych. W drugim przypadku, to jest gdy m jest liczbą złożoną, możemy znowuż znaleźć taką liczbę pierwszą p', która się mieści w m bez reszty, tym sposobem możemy uczynić:

$$m = p' m',$$

zkąd:
$$N = pp' m'.$$

Jeżeli m' nie jest jeszcze liczbą pierwszą, wówczas możemy daléj w podobny sposób postępować dotąd, dopóki nie przedstawimy liczby N jako iloczyn samych liczb pierwszych. Że musi to nastąpić po skończonej liczbie podobnych działań wypada z tego, że szereg liczb $N, m, m' \ldots$. również stanowi szereg malejący, a więc złożony ze skończonéj liczby wyrazów.

Powyższe rozumowanie pokazuje możliwość rozłożenia liczby na czynniki pierwsze. Lecz ponieważ dzielniki liczby N mogą być bardzo rozmaite, a działanie powyższe możemy zacząć od któregokolwiek z nich, przeto porządek, w jakim wynajdywać będzie-

my kolejno czynniki pierwsze jest dowolnym. Możemy zatem zadać sobie pytanie: czy porządek ten jest rzeczą obojętną, czy nie; to jest czy rozkładając liczbę daną jakimkolwiek sposobem na czynniki pierwsze, otrzymamy zawsze jeden i ten sam wypadek ostateczny, czy też nie? Aby na to pytanie odpowiedzieć, przypuśćmy że rozkładając raz liczbę N, otrzymujemy wypadek:

$$N = p \cdot p' \cdot p'' \ldots\ldots$$

przy drugim zaś rozkładzie znajdziemy:

$$N = q \cdot q' \cdot q'' \ldots\ldots$$

gdzie tak: p, p', p'' ..... jako też i q, q', q'' .... oznaczają liczby pierwsze. Ponieważ liczba N, jest podzielną przez q, przeto iloczyn $p \cdot p' \cdot p'' \ldots$ jest podzielny przez q . A że q jest liczbą pierwszą, więc przynajmniéj jeden z czynników np. p, musi być podzielnym przez q . Lecz p jest liczbą pierwszą; zatem jedyne dzielniki jakie posiada są 1 i p; jeżeli przeto q nie jest jednością, to musi być równe p.

Stąd wypada daléj że:

$$p' \cdot p'' \ldots\ldots = q' \cdot q'' \ldots\ldots$$

i w podobny do powyższego sposób możemy pokazać, że czynnik q' musi być równym jednemu z czynników na pierwszéj stronie znajdujących się np. p', skąd będzie:

$$p'' \ldots = q'' \ldots.$$

i t. d. Tym sposobem widzimy, że każda liczba pierwsza, wchodząca jako czynnik do drugiego rozłożenia, musi wchodzić, i to *przynajmniéj tyleż* razy, do rozłożenia pierwszego; ponieważ zaś i odwrotnie można dowieść tak samo, że każda liczba pierwsza, wchodząca jako czynnik do pierwszego rozłożenia musi *co najmniéj tyleż* razy wchodzić i do rozłożenia drugiego, przeto wypada stąd, że oba sposoby rozłożenia prowadzą do tych samych czynników pierwszych.

Tak więc dana liczba złożona N może zawsze być rozłożoną i to w jeden tylko sposób na czynniki pierwsze.

Ten iloczyn czynników pierwszych. równy liczbie N, może być najprościej wyrażony przez użycie wykładników. Przypuśćmy bowiem, że w skład liczby N czynnik pierwszy a wchodzi m razy, wtedy zamiast pisać go w rzeczywistości tyleż razy: $aaa\ldots\ldots$, możemy napisać tak: a^m. Podobnież jeżeli czynnik pierwszy b wchodzi n razy, wtedy część liczby N, zależąca od tegoż czynnika, będzie b^n i t. d. Tym sposobem każda liczba złożona może być przedstawiona pod tą postacią:

$$N = a^m b^n c^p d^q \ldots\ldots,$$

gdzie a, b, c .... oznaczają wszystkie te liczby pierwsze, które, będąc różnemi, mieszczą się bez reszty w liczbie N, a m, n, p, q ... liczby całkowite i dodatne. Widoczną jest rzeczą, że w téj postaci są zawarte nietylko wszystkie liczby złożone, ale także wszystkie liczby pierwsze.

9*. Pokazuje się z powyższego, że liczby pierwsze są niejako materyałem, z którego są utworzone wszystkie pozostałe liczby. Już Euklides dowiódł, że takich liczb jest nieskończenie wiele, a to w następujący sposób: Gdybyśmy przypuścili, że liczba liczb pierwszych jest ograniczona i że ostatnią z nich, a więc największą, jest np. p, wtedy łatwo mogliby-

śmy się przekonać, że takie przypuszczenie utrzymać sie nie może. W rzeczy saméj: każda liczba nie należąca do szeregu:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13 \ldots\ldots p,$$

a zatém i każda liczba większa od p, musiałaby być złożoną, więc podzielną przez jednę z liczb napisanych wyżéj. Lecz nie trudno nam znaleźć przynajmniej jednę liczbę taką, która będzie większą od p, a nie będzie podzielną przez żadną z powyższych liczb. W tym celu należy tylko utworzyć iloczyn ze wszystkich liczb pierwszych i dodać do niego jedność; otrzymamy liczbę:

$$x = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots\ldots p + 1 \,.$$

Liczba ta jest najprzód większą od p, — gdyż już $2p$ jest od p większe; powtóre: nie jest podzielną przez żadną z liczb pierwszych $2, 3, 5 \ldots\ldots p$, — gdyż podzielona przez którąkolwiek z nich daje zawsze na resztę 1 . Jest więc albo sama liczbą pierwszą, większą od p, albo téż, jeżeli jest złożoną, to dzieli się przez liczbę pierwszą nie zawartą w szeregu powyższym, a więc większą od p.

9*. Zadanie: jak poznać czy liczba dana jakakolwiek jest pierwszą, czy złożoną, w ogóle mówiąc jest trudne, z wyjątkiem liczb niewielkich, jakoteż liczb podzielnych przez małe liczby pierwsze jak np. 2, 3, 5, 7, 11.

Nie ma ogólnego wyrażenia na liczby pierwsze: nie ma także wzoru, który by obejmował tylko liczby pierwsze, chociażby nie wszystkie. Można nawet łatwo dowieść, że żaden wielomian algiebraiczny całkowity, o współczynnikach wymiernych i zawierający tylko jednę zmienną, nie może wyrażać samych tylko

liczb pierwszych. W rzeczy saméj: weźmy pod uwagę wielomian : $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots$, i przypuśćmy, że podstawiając w nim zamiast x pewną liczbę r, otrzymamy na wartość tego wielomianu liczbę pierwszą p , t. j. że będzie:

$$p = a + br + cr^2 + dr^3 + \ldots\ldots$$

Nie trudno się przekonać, że podstawiając za x w tenże sam wielomian liczbę $r + np$, gdzie n oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, otrzymamy na wartość tegoż wielomianu liczbę podzielną przez p . Gdyż robiąc to podstawienie i oznaczając teraz wartość tego wielomianu przez p', miéć będziemy:

$$p' = a + b(r + np) + c(r + np)^2 + d(r + np)^2 + \ldots\ldots$$

Jeżeli zniesiemy w całym wielomianie nawiasy, wtedy otrzymamy na drugiéj stronie wyrażenie, które będzie złożone z dwóch takich części: najprzód z pierwszych wyrazów w każdym nawiasie otrzymamy część:

$$a + br + cr^2 + dr^3 + \ldots\ldots$$

to jest p ; drugiéj części nie potrzebujemy do naszego celu nawet całkowicie obliczać, dosyć jest zauważyć, że wszystkie pozostałe wyrazy zawierać będą jako czynnik liczbę p ; wyłączając p za nawias, i oznaczając ilość pozostałą w nawiasie przez A, możemy zbiór tych pozostałych wyrazów przedstawić tak: $A \,.\, p$. Będzie więc:

$$p' = p + Ap \,,$$

a to pokazuje, że druga strona, a zatém i pierwsza czyli p', jest podzielną przez p. Wyrażenie więc $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$, jakkolwiek wielką liczbę wyrazów wzięlibyśmy w niém, nie może przedstawiać samych liczb pierwszych.

Sławny matematyk, francuzki Fermat, podał wyrażenie:

$$2^{(2^n)} + 1,$$

które podług niego miało zawiérać tylko liczby pierwsze. Jednak Euler dowiódł, że już przy $n = 5$, otrzymujemy liczbę $2^{32} + 1$, która jest podzielną przez 641, a więc pierwszą nie jest.

Czytelnik może znaleźć w Arytmetyce profesora D-ra M. A. Baranieckiego, na str. 157 i następnych wyłożone niektóre sposoby przekonania się, czy dana liczba jest pierwszą czy nie, a także tam znajduje się tabliczka liczb pierwszych mniejszych od 1500.

10*. Rozłożenie liczb na czynniki pierwsze jest działaniem bardzo łatwém, gdy idzie o liczby małe; lecz w ogólności mówiąc o liczbach jakiéjkowiek wielkości, jest ono działaniem trudném. Przypuszczając wszakże, że dana liczba jest już rozłożoną na czynniki pierwsze, bardzo łatwo nam poznać kiedy może być ona podzieloną przez inną liczbę, i w ogólności odszukać wszystkie jéj dzielniki. W rzeczy saméj przypuśćmy, że dana liczba jest N, i że ona jest podzielną przez pewną liczbę D; nazwijmy iloraz otrzymany z podzielenia N przez D głoską q. Wtedy widocznie będzie: $N = D \cdot q$. Ponieważ, jak wiadomo, jedno jest tylko możliwe rozłożenie liczby N na czynniki pierwsze, przeto czyn-

niki pierwsze liczb D i q, razem wzięte, muszą stanowić zbiór czynników pierwszych liczby N. Jeżeli $q=1$, wówczas D zawierać będzie wszystkie czynniki pierwsze liczby N; w każdym innym przypadku liczba *wszystkich* czynników pierwszych liczby D będzie mniejszą od liczby wszystkich czynników liczby N, lecz liczba D nie może zawierać innych czynników pierwszych, jak tylko te, które wchodzą w skład liczby N.

Jeżeli więc czynniki pierwsze, różne od siebie i wchodzące w skład liczby N oznaczymy przez a, b, c .... tak że:

$$N = a^m b^n c^p \ldots\ldots$$

wtedy każdy dzielnik D téj liczby musi być zawarty w téj postaci:

$$D = a^{m'} b^{n'} c^{p'} \ldots\ldots,$$

gdzie: m' oznacza jedną z liczb 0, 1, 2, 3 .... m

n' „ — 0, 1, 2, 3 ... n,

p' „ — 0, 1, 2, 3 ... p,

i t. d.

Podstawiając więc w wyrażeniu na D: za m wszystkie wartości od 0 do m, (ich liczba jest $m+1$), za n' wszystkie wartości od 0 do n, (ich liczba jest $n+1$), za p' wszystkie wartości od 0 do p (ich liczba jest $p+1$) i t. d., i kombinując wszystkiemi możliwemi sposobami te wartości, otrzymamy wszystkie dzielniki liczby N. Praktycznie wykonać możemy wszystkie te kombinacye następującym sposobem:

Utwórzmy wielomiany takie:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^n,$$
$$1 + b + b^2 + b^3 + \ldots\ldots + b^n,$$
$$1 + c + c^2 + c^3 + \ldots\ldots + c^n,$$

wtedy oddzielne wyrazy iloczynu tych wszystkich wielomianów przedstawiać nam będą wszystkie dzielniki liczby N. W pierwszym wielomianie jest $m+1$ wyrazów, w drugim $n+1$ wyrazów, w trzecim $p+1$ i t. d.; liczba więc wyrazów w iloczynie tych wielomianów będzie:

$$(m+1)\ (n+1)\ (p+1)\ \ldots\ldots$$

Iloczyn ten przedstawia nam *liczbę wszystkich dzielników* liczby N, włączając w to 1 i samę liczbę N. Z tych samych wyrażeń możemy znaleźć i wartość sumy tych wszystkich dzielników; suma ta bowiem równać się będzie oczywiście wartości samego iloczynu. Lecz pierwszy wielomian jest sumą wyrazów postępu gieometrycznego:

$$1+a+a^2+\ldots\ldots+a^m=\frac{a^{+1}-1}{a-1}\ (\S\ 402)$$

podobnież:

$$1+b+b^2+\ldots\ldots+b^n=\frac{b^{n+1}-1}{b-1},$$

$$1+c+c^2+\ldots\ldots+c^p=\frac{c^{p+1}-1}{c-1},$$

i t. d.

Suma więc wszystkich wyrazów iloczynu, będąca zarazem sumą dzielników liczby N, wyrazi się przez iloczyn:

$$\frac{a^{m+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{p+1}-1}{c-1}\ldots\ldots$$

Aby objaśnić przykładem to, co było powiedziane wyżéj, weźmy liczbę 72. Przez rozkład na czynniki pierwsze miéć będziemy:

$$72=2^3\cdot 3^2.$$

Wszystkie dzielniki zatém liczby 72 będą zawarte w wyrażeniu:

$$D=2^{m'}\cdot 3^{n'},$$

gdzie: m' może kolejno przyjąć wartości 0, 1, 2, 3: a n' wartości: 0, 1, 2. W celu odszukania wszystkich dzielników tworzymy dwa wielomiany:

$$1+2+2^2+2^3,\ \text{i}\ 1+3+3^2;$$

rozmaite wyrazy iloczynu tychże wielomianów przedstawiać będą wszystkie dzielniki liczby 72, powstałe przez wszystkie możliwe kombinacyje wartości wykładników m' i n'. Iloczyn ten będzie:

$$(1+2+2^2+2^3)\ (1+3+3^2)=1+2+2^2+2^3+3+2\cdot 3+2^2\cdot 3+2^3\cdot 3+3^2+2\cdot 3^2+2^3\cdot 3^2+2^2\cdot 3^2.$$

Porządkując wyrazy tego iloczynu podług wielkości, otrzymamy na dzielniki 72 następujące liczby:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72;

ich liczba: $(3+1)\ (2+1)=12$;

a suma: $\frac{2^4-1}{2-1}\times\frac{3^3-1}{3-1}=15\times 13=195.$

11*. Sposoby podawane w arytmetyce na wynajdywanie największego wspólnego dzielnika i najmniejszéj wspólnéj wielokrotnéj, przez rozkład liczb danych na czynniki pierwsze, albo raczéj, w przypuszczeniu, że liczby dane są już rozłożone na czynniki pierwsze, są zbyt dobrze znane, abyśmy mieli tutaj je powtarzać. Wyłożone powyżéj zasady, dają zupełne objaśnienie tych sposobów; pozostawiamy objaśnienie rozwadze czytelnika, gdyż nie są one ani trudne, ani też wymagają nowych rodzajów rozumowania. Zresztą w wybornéj „Arytmetyce“ prof. Niewięgłowskiego, czytelnik znajdzie wszystkie niezbędne do tego przedmiotu wskazówki.

Również przez dosyć łatwe zastosowanie zasad § 8* wypada, że aby liczba N była potęgą r^q pewnéj liczby całkowitéj x, potrzeba aby wszystkie wykładniki czynników pierwszych, z których się składa liczba N były podzielne przez r.

12*. Bardzo często w rozumowaniach nad własnościami liczb wypada nam klasyfikować też liczby w pewien oznaczony sposób, tak jak np. w najpospolitszéj klasyfikacyi na liczby parzyste i nieparzyste. Podstawy takiéj klasyfikacyi mogą być rozmaite: najzwykléj i najczęściéj używaną jest klasyfikacya, oparta na zasadzie zupełnie podobnéj do téj, jaka służy do rozróżnienia liczb parzystych i nieparzystych. Rozróżnienie to polega, jak wiadomo na tém, że jedna klasa zawiéra liczby podzielne przez 2, druga zaś liczby, które podzielone przez 2 dają na resztę 1. Oznaczając więc przez n jakąkolwiek liczbę całkowitą, możemy powiedzieć, że ogólne wyrażenie na liczbę parzystą jest $2n$, na liczbę nieparzystą zaś $2n+1$. W podobny sposób możemy wszystkie liczby rozklasyfikować na trzy grupy, biorąc za dzielnik liczbę 3. Mianowicie: jedna grupa zawiéra liczby podzielne przez 3, ogólne wyrażenie na takie liczby jest $3n$; druga grupa zawiéra te liczby, które będąc podzielone przez 3, dają na resztę 1, ogólne wyrażenie na takie liczby jest $3n+1$; nakoniec trzecia grupa zawiera liczby, które będąc podzielone przez 3 dają w reszcie 2, ogólne zatém wyrażenie na tego rodzaju liczby jest $3n+2$. Liczba 3 która tutaj służy do rozdziału na grupy wszystkich liczb, nazywa się *modułem*. Możemy więc powiedzieć, że względem modułu 3 wszystkie liczby dadzą się podzielić na trzy klasy: pierwsza zawiera liczby postaci $3n$, druga postaci: $3n+1$ i trzecia postaci: $3n+2$. W podobny sposób względem modułu 4 wszystkie liczby mogą być albo postaci $4n$, albo postaci $4n+1$, albo postaci: $4n+2$, albo nakoniec postaci $4n+3$. I w ogóle biorąc za moduł liczbę jakąkolwiek m, możemy wszystkie liczby całkowite ugrupować w m klas, z których pierwsza zawiéra liczby wielokrotne względem m, t. j. liczby postaci mn; druga — liczby, które przy dzieleniu przez m dają na resztę 1 t. j. liczby postaci $mn+1$, i t. d.; nakoniec ostatnia — liczby, które będąc podzielone przez m dają na resztę $m-1$, t. j. liczby postaci $mn+(m-1)$.

Do takiéj klasyfikacyi liczb zmusza nas ta okoliczność, że zwykle liczby należące do jednéj grupy względem pewnego modułu, czyli liczby jednéj postaci, mają niektóre ważne własności wspólne.

Zadania.

1. Znaleźć najmniejszą liczbę taką, aby iloczyn z téj liczby przez 3234 był zupełnym kwadratem (66).

2. Kwadrat każdéj liczby jest zawsze jednéj z tych trzech postaci: $5n$, $5n+1$, $5n+4$.

3. Jeżeli a oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, to iloczyn:

$$a\,(a+1)\,(2a+1),$$

jest zawsze podzielny przez 6.

4. Znaleźć najmniejszą liczbę taką, aby iloczyn z téj liczby przez 1845 był zupełnym sześcianem ($3 \cdot 5^2 \cdot 41^2$).

5. Kwadrat liczby całkowitéj nie może być nigdy téj postaci: $3n+2$.

6. Każda potęga parzysta jakiéjkolwiek liczby nieparzystéj jest zawsze tej postaci $8n+1$.

7. Znaleźć liczbę dzielników liczby 140 . (12).

8. Znaleźć liczbę dzielników liczby 1845 . (12).

II. Ułamki ciągłe.

12*. Pod nazwiskiem: *ułamek ciągły* rozumiemy wyrażenie téj postaci:

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \ldots}}}$$

Lecz ponieważ w zastosowaniach ważnemi są jedynie takie ułamki ciągłe, w których liczniki b_2 , b_3 , b_4 . . , . są wszystkie równe 1, przeto w dalszym ciągu wykładu tylko tego rodzaju ułamki ciągłe rozważać będziemy. Tym sposobem nazwą: *ułamek ciągły* oznaczać będziemy wyrażenie:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}$$

Słowami opisać możemy tego rodzaju wyrażenie w ten sposób:

Ułamek ciągły jest to wyrażenie składające się z całkowitéj z ułamkiem, którego licznikiem jest jedność, a mianownikiem znowuż całkowita z ułamkiem, którego licznikiem jest jedność, a mianownikiem całkowita z takimże ułamkiem i t. d.

Pierwsza całkowita a_1 może być równą 0.

13*. Każdy ułamek zwyczajny, którego licznik i mianownik są pierwszemi względem siebie, może być zamieniony na ułamek ciągły. Objaśnimy to na następującym przykładzie: Weźmy ułamek $\frac{1103}{887}$. Odłączając z niego całkowitą, otrzymamy:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \frac{216}{887} .$$

Wartość ułamku wchodzącego do drugiéj strony powyższéj równości nie zmieni się, jeżeli licznik i mianownik jego podzielimy przez 216; czyniąc to będzie:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{\left(\frac{887}{216}\right)}$$

czyli, odłączając znowuż całkowitą z ułamku niewłaściwego $\frac{887}{216}$;

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \frac{23}{216}} .$$

Wartość ostatniego ułamku w powyższém wyrażeniu nie zmieni się, gdy licznik i mianownik tego ułamku podzielimy przez 23 ; wykonywając to, otrzymamy:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\left(\frac{216}{23}\right)}}$$

czyli, po wyłączeniu całkowitéj z ułamku niewłaściwego $\frac{216}{23}$:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{9}{23}}}$$

Dzieląc znowuż licznik i mianownik ostatniego ułamku przez licznik 9, i postępując ciągle jednakowo podług powyższych wskazówek, otrzymamy szereg następujących równości, z których ostatnia rozwiązuje nam w zupełności zadanie:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{23}{9}}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{5}{9}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{9}{5}}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{5}}}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{5}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}$$

Ostatecznie więc:

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}},$$

skąd widzimy, że ułamek zwyczajny $\frac{1103}{887}$ został przedstawiony pod postacią wyrażenia, które nazwaliśmy *ułamkiem ciągłym*. Oczywiście tenże sam sposób może być zastosowany do każdego ułamku zwyczajnego.

Gdy ułamek zwyczajny zamieniamy na ułamek ciągły, wtedy często mówimy, że *ułamek zwyczajny rozwijamy na ułamek ciągły*.

Rozpatrując bacznie całe działanie, które posłużyło nam do rozwinięcia ułamku $\frac{1103}{887}$ na ułamek ciągły, spostrzeżemy, że działanie to jest zupełnie takie samo, jak działanie, za pomocą którego znaleźlibyśmy największy wspólny dzielnik dla liczb 1103 i 887. W saméj rzeczy: rozkładając w zwykły sposób wspomniane działanie, otrzymamy:

	1	4	9	2	1	1	4
1103	887	216	23	9	5	4	1
887	864	207	18	5	4	4	
216	23	9	5	4	1	0	

Ilorazy 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4 przedstawiają nam mianowniki ułamków *cząstkowych* w ułamku ciągłym.

Gdybyśmy chcieli rozwinąć na ułamek ciągły ułamek dziesiętny lub peryodyczny, wtedy należałoby najprzód każdy z tych ostatnich zamienić na ułamek zwyczajny, skrócić go, i potém postąpić jak pokazano wyżéj.

14*. Ułamki ciągłe spotykamy zawsze, chcąc wyrazić liczebnie ilości ułamkowe lub niewymierne. W rzeczy saméj: przypuśćmy, że chcemy oznaczyć wartość pewnéj ilości x, która nie może być wyrażoną za pomocą liczby całkowitéj. Wtedy najprostszy sposób dojścia do celu będzie następujący: wynajdźmy najprzód taką liczbę całkowitą a_1, któraby najbardziéj zbliżała się swoją wartością do x, będąc wszakże od niego mniejszą. Wówczas $x-a_1$, będzie równe ułamkowi mniejszemu od jedności, a zatém $\frac{1}{x-a_1}$ będzie większe od jedności. Przypuśćmy, że $\frac{1}{x-a_1}=x_1$; i ponieważ x_1 jest większe od jedności, przeto możemy znaleść nową liczbę całkowitą a_2, jak można najbardziéj zbliżoną do x_1 i mniejszą od x_1. Wtedy znowuż $x_1-a_2<1$, a zatém $\frac{1}{x_1-a_2}>1$. Oznaczmy $\frac{1}{x_1-a_2}$ przez x_2; wówczas w dalszym ciągu znajdziemy nową liczbę całkowitą a_3 zbliżającą się najbardziéj do x_2 i mniejszą od niego. Tym sposobem będzie: $x_2-a_3<1$, więc: $\frac{1}{x_2-a_3}$ będzie od jedności większe. Oznaczywszy tę ostatnią ilość przez x_3, wy-

najdziemy następnie nową liczbę całkowitą a_4, najbardziéj zbliżoną do x_3 i daléj tak samo postępować będziemy. Z tego widoczną jest rzeczą, że tak postępując powoli wyczerpiemy ilość x i to w sposób najprostszy i zarazem najprędszy, gdyż używamy tu ciągle tylko liczb całkowitych, z których każda zbliża się jak można najbardziéj do ilości szukanéj.

Ponieważ:

$$\frac{1}{x-a_1}=x_1,$$

przeto; $x-a_1=\frac{1}{x_1}$, a stąd:

$$x=a_1+\frac{1}{x_1}.$$

I podobnie: ponieważ:

$$\frac{1}{x_1-a_2}=x_2, \text{ przeto:}$$

$$x_1=a_2+\frac{1}{x_2};$$

daléj, skoro:

$$\frac{1}{x_2-a_3}=x_3, \text{ więc:}$$

$$x_2=a_3+\frac{1}{x_3};$$

również:

$$x_3=a_4+\frac{1}{x_4}$$

i tak daléj. Podstawiając teraz kolejno znalezione wartości, otrzymamy:

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_2}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_3}}} =$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{x_4}}}}$$

czyli ostatecznie:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}$$

Ułamki $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4} \ldots$ nazywają się *ułamkami cząstkowemi* ułamku ciągłego, a ich mianowniki $a_2, a_3, a_4 \ldots$ *mianownikami cząstkowemi*.

Ze sposobu otrzymania wartości $a_1, a_2, a_3 \ldots$ wypada, że wszystkie one są dodatnie; i takie tylko ułamki ciągłe w następstwie rozpatrywać będziemy. Należy tu jednak nadmienić, że mogą być ułamki ciągłe, w których ułamki cząstkowe nie wszystkie są dodatnie. Rozważanie wszakże takich ułamków ciągłych nie należy do zakresu niniejszego rozdziału, tembardziéj, że tylko takie ułamki ciągłe, jakie bierzemy pod uwagę, mają praktyczne znaczenie.

15*. Liczba tych działań, które prowadzą do oznaczenia ilości $a_1, a_2, a_3, \ldots$ może być ograniczoną lub nie ograniczoną. Przypadek pierwszy mieć będzie miejsce wtedy, gdy jedna z liczb, $x_1, x_2, x_3 \ldots$

wypadnie wprost równą całkowitéj. Całe działanie oczywiście na niéj zostanie zakończone. Ułamek ciągły, otrzymany wtedy składać się będzie z ograniczonej liczby ułamków cząstkowych, i nazywa się ułamkiem ciągłym *skończonym*. W przeciwnym razie, gdy żadna z liczb $x_1, x_2, x_3 \ldots$ nie będzie całkowitą, ułamek ciągły będzie *nieskończonym*.

16*. Przykład rozwinięcia pierwszego rodzaju, to jest na ułamek ciągły skończony, mieliśmy w § 13*. I w ogólności nie trudno dowieść, że ułamek zwyczajny może być zawsze rozwinięty na ułamek ciągły skończony. W rzeczy saméj: przypuśćmy, że dany ułamek zwyczajny jest $\frac{A}{B}$. Jest to więc ta wartość, którą w § 14*, oznaczyliśmy przez x. Oczywistą jest rzeczą, że liczbą całkowitą, najwięcej zbliżoną do wartości tego ułamku, będzie iloraz powstały z podzielenia A przez B; oznaczmy go przez a_1, resztę zaś pozostałą z tego dzielenia przez r_1. Wtedy będzie: $\frac{A}{B} - a_1 = \frac{r_1}{B}$. Ilość ta, którą w § 14* oznaczyliśmy przez x_1, będzie tutaj: $\frac{B}{r_1}$, i ponieważ r_1 jest resztą z takiego dzielenia, w którém dzielnikiem było B, przeto $r_1 < B$. Wartość całkowita, najbardziéj zbliżona do x_1 otrzyma się znowuż przez podzielenie B przez r_1; oznaczmy iloraz z tego dzielenia przez a_2, a resztę pozostałą przez r_2. Wtedy: $\frac{B}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r_1}$, skąd: $\frac{B}{r_1} - a_2 = \frac{r_2}{r_1}$; ilość więc, którąśmy oznaczyli

w § 14* przez x_2, będzie tutaj widocznie $\frac{r_1}{r_2}$. Powtarzając powyższe rozumowanie, widzimy, że najbliższą wartością całkowitą tego ostatniego ułamku, będzie iloraz powstały z podzielenia r_1 przez r_2. Oznaczając go przez a_3 i resztę z dzielenia przez r_3, będzie $\frac{r_1}{r_2} = a_3 + \frac{r_3}{r_2}$; skąd: $\frac{r_1}{r_2} - a_3 = \frac{r_3}{r_2}$, ilość więc x_3 będzie równą $\frac{r_2}{r_3}$. I tak daléj powtarzamy ciągle toż samo działanie. Oczywistą jest rzeczą, że działanie które służy do oznaczenia x_1, x_2 .... i a_1, a_2, a_3 . , . . jest takie samo, jak działanie jakie należy wykonać, aby wynaleść największy wspólny dzielnik dla A i B (dodatek §); możemy go więc przedstawić w ten sposób:

	a_1	a_2	a_3	a_4	
A	B	r_1	r_2	r_3	. . . . .
r_1	r_2	r_3	r_4		

Wiemy zaś, że tak postępując przyjdziemy w końcu do takiéj reszty r_n, która w poprzedniéj r_{n-1} mieścić się będzie całkowitą liczbę razy a_{n+1}; wtedy to całe działanie będzie ukończone. Ułamek więc $\frac{A}{B}$ przedstawi się pod postacią takiego ułamku ciągłego:

$$\frac{A}{B} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}}}}$$

17*. I odwrotnie: każdy ułamek ciągły skończony może być zamieniony na ułamek zwyczajny. Ogólny i zarazem najdogodniejszy sposób takiéj zamiany będzie pokazany późniéj; tutaj objaśnimy na przykładzie możliwość takiego przekształcenia ułamku ciągłego na ułamek zwyczajny.

Weźmy ułamek ciągły:

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}$$

Ostatni z ułamków cząstkowych, mianowicie $\frac{1}{4}$, należy do mianownika przedostatniego ułamku cząstkowego, t. j. do 1. Włączając $1 + \frac{1}{4}$ w ułamek, otrzymamy $\frac{5}{4}$. Zamiast więc $1 + \frac{1}{4}$ możemy w mianowniku napisać $\frac{5}{4}$. Będzie zatém:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+1}}} \quad \text{czyli:} \quad \left(\frac{5}{4}\right)$$

$$= 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{5}}}}$$

I w tém wyrażeniu ułamek ostatni $\frac{4}{5}$ należy do mianownika poprzedniego ułamku cząstkowego, t. j. do 2 . Włączając $2+\frac{4}{5}$ w ułamek, otrzymamy $\frac{14}{5}$. Zatém będzie:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{14}{5}}}} \quad \text{, czyli:}$$

$$= 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{14}}}$$

Włączając i tutaj ułamek $\frac{5}{14}$ z całkowitą 1 w ułamek, otrzymamy:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+1}}} \quad \text{, czyli} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\frac{14}{19}}}$$

$$\left(\frac{19}{14}\right)$$

I dalej: tenże sam ułamek ciągły równać się będzie:

$$2+\cfrac{1}{\frac{71}{19}} \quad \text{, czyli } 2+\frac{19}{71} \text{ ,}$$

i nakoniec po włączeniu téj ostatniéj całkowitéj z ułamkiem w ułamek:

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}} = \frac{161}{71} \text{ .}$$

Oczywiście ten sam sposób postępowania możemy zastosować w każdym przypadku, a nawet i do ułamku ciągłego skończonego wyrażonego pod postacią ogólną:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_{n+1}}}}}$$

Wyrażenie jednak ogólne, jakiebyśmy tą drogą otrzymali, byłoby zbyt zawiłe; i dlatego opuszczamy je, tembardziéj, że późniéj poznamy dogodniejszą drogę do znalezienia wypadku ostatecznego, a sposób wskazany wyżéj, oprócz rozwlekłości rachunku, nie przedstawia żadnych szczególnych trudności. W każdym razie sposób ten dowodzi nam możliwości zamiany każdego ułamku ciągłego skończonego na ułamek zwyczajny.

18*. Ułamki ciągłe nieskończone powstają z rozwinięcia wyrażeń niewymiernych. Że ilość niewymierna, będąc rozwiniętą na ułamek ciągły, nie może dać ułamku ciągłego skończonego, wypada to bezpośrednio z powyższego. Gdyby bowiem ilość niewymierna mogła się równać ułamkowi ciągłemu skończonemu, wtedy zamieniając go odwrotnie na ułamek zwyczajny, otrzymalibyśmy, że ilość niewymierna jest równą ułamkowi zwyczajnemu, co jak wiemy jest niemożliwe.

Sposoby wszakże rozwijania ilości niewymiernych na ułamek ciągły nie są tak proste, jak sposób, który podaliśmy wyżéj dla ułamków zwyczajnych. Każdego rodzaju ilość niewymierna wymaga osobnego sposobu do oznaczenia mianowników a_1, a_2, a_3 .... ułamków cząstkowych. Tutaj pokażemy tylko jak rozwinąć na ułamek ciągły ilość niewymierną pierwiastkową stopnia drugiego, czyli pierwiastek kwadratowy z liczby, która nie jest zupełnym kwadratem.

Weźmy jako przykład $\sqrt{17}$; zwracając uwagę na oznaczenia, przyjęte w § 14* będzie $x = \sqrt{17}$. Liczba całkowita, która najbardziéj zbliża się do $\sqrt{17}$,

będąc od niego mniejsza, jest 4; to zatem, co jest oznaczone w powołanym wyżéj paragrafie przez a_1, jest tutaj równe 4. Będzie więc: $x - a_1 = \sqrt{17} - 4$, a ilość, która w § 14* jest oznaczona przez x_1, czyli $\frac{1}{x-a_1}$, jest tutaj $x_1 = \frac{1}{\sqrt{17}-4}$. Aby znaleźć liczbę całkowitą, najbardziéj zbliżoną do ilości x_1, zamieńmy to ostatnie wyrażenie na ułamek z mianownikiem wymiernym, przez pomnożenie licznika i mianownika przez $\sqrt{17}+4$ (patrz § 294). Otrzymamy:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{17}-4} = \frac{\sqrt{17}+4}{(\sqrt{17}-4)(\sqrt{17}+4)} = \frac{\sqrt{17}+4}{17-16},$$

czyli:

$$x_1 = \sqrt{17} + 4.$$

Ponieważ $\sqrt{17}$ jest równy 4 więcéj ilość mniejsza od jedności, przeto wartością całkowitą, najbardziéj zbliżoną do x_1 będzie tutaj 8. Przeto $a_2 = 8$. Mamy daléj: $x_1 - a_2 = \sqrt{17} + 4 - 8 = \sqrt{17} - 4$, skąd:

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{17}-4}.$$

Zamieniając to ostatnie wyrażenie na ułamek z mianownikiem wymiernym znajdziemy, że:

$$x_2 = \frac{\sqrt{17}+4}{17-16} = \sqrt{17} + 4.$$

Najbliższa wartość całkowita tego wyrażenia jest znowuż 8, czyli będzie $a_3 = 8$. I daléj otrzymamy:

$$x_2 - a_3 = \sqrt{17} + 4 - 8 = \sqrt{17} - 4,$$

skąd:

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_3} = \frac{1}{\sqrt{17} - 4} = \sqrt{17} + 4,$$

a następnie: $a_4 = 8$, i $x_3 - a_4$ znowuż $= \sqrt{17} - 4$.

I tak daléj. Widzimy z tego, że działanie to nigdy się nie skończy, a także i to, że wartości na $x_1, x_2, x_3 \ldots$, a tém samém i wartości na $a_2, a_3, a_4 \ldots$ są ciągle też same. Powtarzając więc rozumowanie § 14*, otrzymamy:

$$x = \sqrt{17} = 4 + \frac{1}{x},$$

$$x_1 = 8 + \frac{1}{x_2},$$

$$x_2 = 8 + \frac{1}{x_3}, \text{ i t. d., skąd:}$$

$$\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \ldots\ldots}}}$$

Do tegoż samego wypadku moglibyśmy dojść jeszcze i takim rachunkiem: Ponieważ $\sqrt{17}$ jest zawarty pomiędzy 4 i 5, przeto możemy powiedzieć, że on jest równy 4 więcéj pewien ułamek właściwy (rozumiejąc tutaj pod wyrazem ułamek właściwy wogóle ilość mniejszą od jedności), który oznaczymy przez $\frac{1}{x_1}$. Będzie więc:

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{x_1}.$$

Aby znaleźć ilość x_1, przenieśmy 4 na pierwszą stronę i zmieńmy porządek stron, otrzymamy:

$$\frac{1}{x_1} = \sqrt{17} - 4,$$

skąd:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{17} - 4}.$$

W tym ostatnim ułamku uczyńmy mianownik wymiernym, będzie.

$$x_1 = \sqrt{17} + 4.$$

A ponieważ $\sqrt{17}$ jest równy 4, więcéj pewną ilość mniejsza od jedności, przeto:

$$x_1 = 8 + \frac{1}{x_2}.$$

W celu znalezienia x_2, weźmy znowuż pod uwagę równość:

$$\sqrt{17} + 4 = 8 + \frac{1}{x_2};$$

z niéj otrzymamy:

$$\frac{1}{x_2} = \sqrt{17} - 4,$$

a następnie:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{17} - 4} = \sqrt{17} + 4.$$

Będzie więc znowuż:

$$x_2 = 8 + \frac{1}{x_3},$$

gdzie: x_3 możemy w podobny sposób oznaczyć tak, jak powyższe wartości. Będzie więc:

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{x_1},$$

gdzie: $$x_1 = 8 + \frac{1}{x_2},$$

gdzie: $$x_2 = 8 + \frac{1}{x_3},$$

$$x_3 = 8 + \frac{1}{x_4}$$

. . . . . .

skąd ostatecznie:

$$\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \ldots}}}$$

19*. Jako drugi przykład weźmy ogólne wyrażenie $\sqrt{m^2+1}$, gdzie m oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Tutaj $x = \sqrt{m^2+1}$. Liczba całkowita najwięcéj zbliżona do wartości tego pierwiastku i od niego mniejsza jest m, będzie przeto: $a_1 = m$, skąd:

$$x - a_1 = \sqrt{m^2+1} - m, \text{ a następnie:}$$

$$x_1 = \frac{1}{x - a_1} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1} - m}.$$

Zamieniając ostatni ułamek na ułamek z mianownikiem wymiernym, do czego dochodzimy przez pomnożenie obu jego wyrazów przez $\sqrt{m^2+1} + m$, otrzymamy:

$$x_1 = \frac{\sqrt{m^2+1} + m}{(\sqrt{m^2+1} - m)\ (\sqrt{m^2+1} + m)} = \frac{\sqrt{m^2+1} + m}{m^2+1-m^2},$$

czyli: $$x_1 = \sqrt{m^2+1} + m.$$

Ponieważ zaś liczbą całkowitą, najwięcéj zbliżoną do $\sqrt{m^2+1}$ jest m, przeto liczbą całkowitą najbliższą x_1, będzie $2m$. Jest więc:

$$a_2 = 2m, \text{ a następnie:}$$

$$x_1 - a_2 = \sqrt{m^2+1} + m - 2m = \sqrt{m^2+1} - m.$$

Skąd:

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1} - m}.$$

Powtarzając w dalszym ciągu toż samo rozumowanie, znajdziemy ostatecznie:

$$x = \sqrt{m^2+1} = m + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{2m + \ldots}}}$$

Na zasadzie powyższego wyrażenia możemy odrazu rozwijać na ułamki ciągłe wszystkie ilości pierwiastkowe, w których pod znakiem pierwiastku znajduje się liczba całkowita, równa kwadratowi zupełnemu (m^2) powiększonemu o 1. Przykład poprzedni odnosi się właśnie do tego przypadku, gdyż: $\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{4^2+1}$. Tutaj więc: $m = 4$. W podobnym przypadku będą jeszcze: $\sqrt{10} = \sqrt{3^2+1}$; $\sqrt{26} = \sqrt{5^2+1}$; $\sqrt{37} = \sqrt{6^2+1}$ i t. d.

20*. Jako dalszy przykład weźmy $\sqrt{42}$. Liczbą całkowitą, najwięcéj zbliżoną do wartości tego

pierwiastku jest 6, przyjmując więc też same oznaczenia, których już tyle razy używaliśmy, będzie $a_1 = 6$, a następnie: $x - a_1 = \sqrt{42} - 6$, skąd: $x_1 = \frac{1}{x - a_1} = \frac{1}{\sqrt{42} - 6}$. Zamieniając ten ułamek na ułamek z mianownikiem wymiernym, otrzymamy:

$$x_1 = \frac{\sqrt{42} + 6}{(\sqrt{42} - 6)(\sqrt{42} + 6)} = \frac{\sqrt{42} + 6}{42 - 36} = \frac{\sqrt{42} + 6}{6}.$$

Aby znaleść liczbę całkowitą najwięcéj zbliżoną do x_1, zwróćmy uwagę na to, że $\sqrt{42}$ jest równy 6 więcéj pewna ilość, mniejsza od jedności, zatém $\sqrt{42} + 6$ jest równe 12 więcéj pewna ilość, mniejsza od jedności. Jeżeli teraz $\sqrt{42} + 6$ podzielimy przez 6, otrzymamy na iloraz 2 więcéj pewna ilość mniejsza od jedności.

Zatém liczbą całkowitą, najbardziej zbliżoną do $\frac{\sqrt{42} - 6}{6}$ będzie 2, czyli: $a_2 = 2$. Daléj będzie:

$$x_1 - a_2 = \frac{\sqrt{42} + 6}{6} - 2 = \frac{\sqrt{42} - 6}{6}$$

skąd:

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_2} = \frac{6}{\sqrt{42} - 6}.$$

Czyniąc mianownik wymiernym w tym ostatnim ułamku, otrzymamy:

$$x_2 = \frac{6(\sqrt{41} + 6)}{(\sqrt{42} - 6)(\sqrt{42} + 6)} = \frac{6(\sqrt{42} + 6)}{6} = \sqrt{42} + 6.$$

Liczbą całkowitą, najbliższą x_2 będzie tutaj 12; przeto: $a_3 = 12$, a następnie:

$$x_2 - a_3 = \sqrt{42} + 6 - 12 = \sqrt{42} - 6,$$

skąd:

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_3} = \frac{1}{\sqrt{42} - 6}.$$

Powtarzając poprzednie rozumowanie i rachunek, znajdziemy że:

$$a_4 = 2; \quad x_4 = \frac{1}{x_3 - a_4} = \frac{6}{\sqrt{42} + 6},$$

skąd: $a_5 = 12$, i t. d.

I tutaj widzimy jak w przykładach poprzednich, że działanie nigdy się nie skończy, gdyż na żadną z ilości x nie otrzymamy wprost wartości całkowitéj. Szukany ułamek ciągły nieskończony będzie:

$$\sqrt{42} = 6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}$$

Podobny rachunek, zastosowany do wyrażenia $\sqrt{m^2 + m}$, da nam:

$$\sqrt{m^2 + m} = m + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2m + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2m + \cdots}}}}$$

Powtórzenie tychże samych rozumowań w następnych przykładach pozostawiamy czytelnikowi:

1) $\sqrt{48}$, tutaj będzie: $a_1 = 6$, $a_2 = 1$, $a_3 = 12$, $a_4 = 1$, $a_5 = 12$ i t. d. skąd:

$$\sqrt{48} = 6 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+}}}} \cdots$$

2) $\sqrt{m^2+2m} = m + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2m+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2m+}}}} \cdots$

3) $\sqrt{47} = 6 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{12+}}}}}}}} \cdots$

Ułamki ciągłe otrzymane w poprzednich rozwinięciach, są nie tylko nieskończonemi, ale nadto takiemi, że w każdym z nich mianowniki ułamków cząstkowych powtarzają się w tym samym porządku. Tak np. w rozwinięciu $\sqrt{37}$ powtarza się mianownik 12;

w rozwinięciu $\sqrt{42}$ powtarzają się mianowniki 2 i 12; w rozwinięciu $\sqrt{47}$ powtarzają się mianowniki 1, 5, 1, 12 i t. d. Tego rodzaju ułamki ciągłe nieskończone nazywają się *peryodycznemi*. Zbyteczną niemal rzeczą jest dodawać, że nie są one jedynemi ułamkami ciągłemi nieskończonemi; oprócz nich są jeszcze ułamki ciągłe nieskończone i nieperyodyczne.

Ułamki ciągłe peryodyczne powstają zawsze z rozwinięcia ilości pierwiastkowych stopnia drugiego. Dowiedziemy w dalszym ciągu wykładu, że ułamek ciągły peryodyczny może być zawsze zamieniony na ilość pierwiastkową stopnia drugiego, gdyż jest on równym jednemu z pierwiastków równania stopnia drugiego. Można dowieść daléj, że i odwrotnie ilość pierwiastkowa stopnia drugiego, daje w rozwinięciu zawsze tylko ułamek peryodyczny. Dowiedzenie tej drugiéj części, podane poraz pierwszy przez Lagrange'a przechodzi po za ramy niniejszego dodatku. Inne ilości niewymierne dają rozwinięcia nieskończone i nieperyodyczne.

21*. Poznawszy sposoby otrzymywania ułamków ciągłych, zajmiemy się teraz ich własnościami. Przypuśćmy, że mamy ułamek ciągły jakikolwiek (t. j. skończony lub nieskończony):

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+}}} \cdots$$

Jeżeli, zaczynając od a_1, weźmiemy jakąkolwiek liczbę ułamków cząstkowych, i na ostatnim z nich za-

trzymamy się, wtedy otrzymamy pewien ułamek ciągły skończony. Ułamek ten możemy zamienić na ułamek zwyczajny; wykonawszy tę zamianę otrzymamy ułamek, który nazywać będziemy *reduktem* lub *przybliżeniem* danego ułamku ciągłego.

Tak np. zamieniając ułamki ciągłe *skończone*:

$$a_1 + \frac{1}{a_2}, \text{ lub } a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}, \text{ lub } a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}$$

i t. p. na ułamki zwyczajne, otrzymamy różne przybliżenia czyli redukty danego ułamku ciągłego. Dla odróżnienia jednego reduktu od drugiego, oznaczamy każdy dodaniem do wyrazu „przybliżenie“ lub „redukt“ liczby porządkowéj, pokazującéj ile ułamków cząstkowych wchodzi do składu tegoż przybliżenia. I tak: przybliżeniem *pierwszém* będzie a_1 (wrazie, gdyby w ułamku ciągłym pierwszéj całkowitéj nie było, będziemy pisać jako pierwsze przybliżenie 0); przybliżeniem *drugiem* będzie ułamek zwyczajny, powstały z zamiany $a_1 + \frac{1}{a_2}$ na ułamek, przybliżeniem *trzeciém* ułamek zwyczajny, powstały z zamiany:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$$

i t. d.; i w ogólności przybliżeniem n-tém będzie ułamek zwyczajny, powstały z ułamku:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdot \cdot \cdot + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

Każde przybliżenie oznaczać będziemy w ten sposób: $\frac{P}{Q}$; dla pokazania zaś o którém przybliżeniu jest mowa przy liczniku P i mianowniku Q pisać będziemy u dołu wskazówkę, wyrażającą miejsce, jakie przybliżenia zajmuje w szeregu wszystkich przybliżeń. Mianowicie: przybliżenie pierwsze będzie: $\frac{P_1}{Q_1}$, przybliżenie drugie: $\frac{P_2}{Q_2}$; przybliżenie trzecie: $\frac{P_3}{Q_3}$, i wogóle przybliżenie n-te $\frac{P_n}{Q_n}$. To ostatnie będziemy pisać niekiedy dla skrócenia bez wskazówek dolnych tak: $\frac{P}{Q}$. Tym sposobem będzie:

$$\frac{P_1}{Q_1} = a_1; \quad \frac{P_2}{Q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2}; \quad \frac{P_3}{Q_3} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}};$$

i t. d.; w ogólności:

$$\frac{P_n}{Q_n} \text{ lub } \frac{P}{Q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdot \cdot \cdot + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

22*. W § 17* był pokazany sposób, jakim każdy z tych ułamków ciągłych może być zamieniony na ułamek zwyczajny. Możemy go tutaj bez wątpienia zastosować i otrzymać wartości $\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3} \cdots \frac{P_n}{Q_n}$. Lecz sposób ten jest długi, a nadewszystko używając go, nie łatwo odkryć związek, jaki zachodzi pomiędzy rozmaitemi przybliżeniami $\frac{P}{Q}$. Dlatego też to podamy tutaj inny sposób wynajdywania wszystkich przybliżeń.

Przybliżenie pierwsze, jak wiemy, jest takie:

$$\frac{P_1}{Q_1} = a_1 = \frac{a_1}{1}.$$

Przybliżenie drugie otrzyma się, włączając w wyrażeniu $a_1 + \frac{1}{a_2}$ całkowitą z ułamkiem w ułamek. Będzie więc:

$$\frac{P_2}{Q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}.$$

Przybliżenie trzecie otrzymamy ze zwinięcia ułamku ciągłego:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$$

Różni się ono od poprzedniego tém, że dobrany został jeszcze jeden ułamek cząstkowy $\frac{1}{a_3}$, który należy do mianownika a_2.

Zamiast więc wykonywać zamianę tego ułamku na zwyczajny możemy także powiedzieć, że przybliżenie to otrzyma się z przybliżenia poprzedniego $\frac{P_2}{Q_2}$ *podstawiając w niém* $a_2 + \frac{1}{a_3}$ *zamiast* a_2. Ta uwaga jest zasadniczą i służy do wynalezienia związku pomiędzy następującemi po sobie przybliżeniami. Będzie więc:

$$\frac{P_3}{Q_3} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = \frac{a_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + 1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}$$

czyli:

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{a_1\left(\frac{a_2 a_3 + 1}{a_3}\right) + 1}{\frac{a_2 a_3 + 1}{a_3}}.$$

Mnożąc licznik i mianownik ułamku będącego na drugiej stronie równości przez a_3, w celu pozbycia się mianownika i znosząc nawias otrzymamy:

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1};$$

a wyłączając a_3 z dwóch wyrazów licznika za nawias, będzie:

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{(a_1 a_2 + 1) a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1}.$$

Jeżeli teraz porównamy ten wypadek z wartościa-

mi przybliżeń: $\frac{P_1}{Q_1}$ i $\frac{P_2}{Q_2}$, przekonamy się, że przybliżenie trzecie może być tak wyrażone:

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_2 a_3 + P_1}{Q_2 a_3 + Q_1}, \ldots (2)$$

gdyż ilość $a_1 a_2 + 1$ w liczniku jest równa P_2, a_1 jest licznikiem przybliżenia pierwszego, a więc $= P_1$; a_2 w mianowniku jest mianownikiem przybliżenia drugiego, t. j. Q_2, nakoniec 1 jest mianownikiem przybliżenia pierwszego.

Gdybyśmy chcieli z tego przybliżenia otrzymać następnie przybliżenie czwarte, to jest:

$$\frac{P_4}{Q_4} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}},$$

wtedy należałoby we wzorze (2) podstawić $a_3 + \frac{1}{a_4}$.

Czyniąc to znajdziemy:

$$\frac{P}{Q_4} = \frac{P_2\left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) + P_1}{Q_2\left(a_3 + \frac{1}{a_4}\right) + Q_1}.$$

znosząc nawias w liczniku i mianowniku drugiéj strony, będzie:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{P_2 a_3 + P_1 + \frac{P_2}{a_4}}{Q_2 a_3 + Q_1 + \frac{Q_2}{a_4}},$$

mnożąc zaś licznik i mianownik tego ostatniego ułamku przez a_4, otrzymamy:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{(P_2 a_3 + P_1) a_4 + P_2}{(Q_2 a_3 + Q_1) a_4 + Q_2}.$$

Jeżeli zwrócimy uwagę na to, że podług wzoru (2): $P_2 a_3 + P_1 = P_3$, a $Q_2 a_3 + Q_1 = Q_3$, i wartości te podstawimy w równość powyższą, wówczas otrzymamy ostatecznie:

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{P_3 a_4 + P_2}{Q_3 a_4 + Q_2} \ldots\ldots (3)$$

Widzimy z tego, że przybliżenie czwarte jest ułamkiem, którego licznik jest równy licznikowi przybliżenia trzeciego, pomnożonemu przez mianownik ułamku cząstkowego czwartego, więcéj licznik przybliżenia drugiego; mianownik zaś jest równy podobnie mianownikowi przybliżenia trzeciego, pomnożonemu przez mianownik ułamku cząstkowego czwartego, więcéj mianownik przybliżenia drugiego.

Tak samo jak znaleźliśmy przybliżenie czwarte, moglibyśmy znaleźć i przybliżenie piąte; — mianowicie należałoby w równości (3) podstawić $a_4 + \frac{1}{a_5}$ zamiast a_4 i postępować jak wyżej. Otrzymalibyśmy wtedy:

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{P_4 a_5 + P_3}{Q_4 a_5 + Q_3},$$

skąd okazuje się, że licznik i mianownik piątego przybliżenia w podobny sposób jest utworzony z wyrazów przybliżeń: czwartego i trzeciego, a także i mianownika ułamku cząstkowego piątego, jak był utworzony licznik i mianownik przybliżenia czwartego

z wyrazów przybliżeń trzeciego i drugiego i z mianownika ułamku cząstkowego czwartego. Możemy więc zapytać się, czy ten sposób tworzenia się każdego przybliżenia z dwóch poprzednich i z mianownika ostatniego ułamku cząstkowego, na którym zatrzymujemy się, jest ogólny, t. j. czy daje się zastosować do wszystkich przybliżeń? Aby na to pytanie odpowiedzieć, użyjemy tutaj tego sposobu rozumowania, który był opisany w § 423 i nazwany tam *indukcyą matematyczną*. Mianowicie: weźmy pod uwagę ułamek ciągły:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_{n+2}+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}}}}}}}+\cdots$$

i przypuśćmy, że pomiędzy przybliżeniami: $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$, (z których pierwsze odpowiada mianownikowi cząstkowemu a_{n-2}, drugie a_{n-1}, trzecie zaś mianownikowi a_n) zachodzi taki związek, jaki widzieliśmy np. dla przybliżeń drugiego, trzeciego i czwartego, to jest, że:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}\,a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}\,a_n + Q_{n-2}}, \quad \ldots\ldots (4)$$

czyli, innemi słowami, przypuśćmy, że P_n i Q_n są utworzone podług takiego prawa:

$P_n = P_{n-1}\,a_n + P_{n-2}$, i $Q_n = Q_{n-1}\,a_n + Q_{n-2}$.

Dowiedziemy, że tenże sam związek zachodzić będzie pomiędzy $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, $\frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, to jest, że i następne przybliżenie będzie utworzone podług tegoż samego prawa. W tym celu należy tylko zwrócić uwagę na to, że przybliżenie $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ tworzy się przez dobranie do tej części ułamku ciągłego, z której powstało $\frac{P_n}{Q_n}$, jeszcze ułamku cząstkowego $\frac{1}{a_{n+1}}$, że zatem przybliżenie $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ otrzymamy z przybliżenia $\frac{P_n}{Q_n}$ podstawiając w niém $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ zamiast a_n. Będzie więc:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + Q_{n-2}}$$

skąd, znosząc nawiasy w liczniku i mianowniku:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}\,a_n + P_{n-2} + \frac{P_{n-1}}{a_{n+1}}}{Q_{n-1}\,a_n + Q_{n-2} + \frac{Q_{n-1}}{a_{n+1}}}$$

mnożąc zaś licznik i mianownik drugiéj strony przez a_{n+1}, będzie:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{(P_{n-1}\,a_n + P_{n-2})\,a_{n+1} + P_{n-1}}{(Q_{n-1}\,a_n + Q_{n-2})\,a_{n+1} + Q_{n-1}}.$$

Jeżeli teraz zwrócimy uwagę na to, że podług założenia:

$$P_{n-1}\,a_n + P_{n-2} = P_n \text{ ; i } Q_{n-1}\,a_n + Q_{n-2} = Q_{n-1},$$

otrzymamy ostatecznie:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n\,a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n\,a_{n+1} + Q_{n-1}};$$

a ta ostatnia równość pokazuje nam, że podług tegoż samego prawa jest utworzone przybliżenie $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ z przybliżeń $\frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i mianownika a_{n+1}.

Skoro zaś widzieliśmy, że podług tego prawa było utworzone przybliżenie piąte, przeto na zasadzie dowiedzionego twierdzenia w tenże sam sposób będzie utworzone i przybliżenie szóste, a skoro podług tego prawa będzie utworzone przybliżenie szóste, przeto podług tegoż samego prawa będzie utworzone i przybliżenie siódme i t. d., t. j. że znaleziony powyżej sposób tworzenia się kolejnych przybliżeń jest ogólny. Możemy zatém powiedzieć, że:

Licznik każdego przybliżenia zacząwszy od trzeciego, jest równy licznikowi przybliżenia poprzedzającego, pomnożonemu przez mianownik tego ułamku cząstkowego, na którym się zatrzymujemy, więcéj licznik przybliżenia przed-poprzedzającego, mianownik jest także w ten sam sposób związany z mianownikami dwóch przybliżeń poprzedzających i mianownikiem ułamku cząstkowego, na którym się zatrzymujemy.

Np. Niech będzie dany ułamek zwyczajny: $\frac{151}{347}$.

Rozwinąwszy go na ułamek ciągły sposób podanym w § 13*, znajdziemy:

$$\frac{151}{347} = 0 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}}}}}.$$

Przybliżenia kolejne tego ułamku ciągłego będą:

$$\frac{P_1}{Q_1} = 0 = \frac{0}{1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_2 \,.\, 3 + P_1}{Q_2 \,.\, 3 + Q_1} = \frac{1 \,.\, 3 + 0}{2 \,.\, 3 + 1} = \frac{3}{7},$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{3 \,.\, 2 + 1}{7 \,.\, 2 + 2} = \frac{7}{16},$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{7 \,.\, 1 + 3}{16 \,.\, 1 + 7} = \frac{10}{23},$$

$$\frac{P_6}{Q_6} = \frac{10 \,.\, 4 + 7}{23 \,.\, 4 + 16} = \frac{47}{108},$$

$$\frac{P_7}{Q_7} = \frac{47 \,.\, 3 + 10}{108 \,.\, 3 + 23} = \frac{151}{347}.$$

Ostatnie przybliżenie jest równe wartości ułamku danego, jak powinno być.

Jako drugi przykład weźmiemy rozwinięcie, dane wyżéj $\sqrt{42}$.

$$\sqrt{42} = 6 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\ldots}}}}$$

Przybliżenia kolejne tego ułamku ciągłego będą

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{6}{1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2},$$

$$\frac{P_3}{Q_3} = \frac{13 \cdot 12 + 6}{2 \cdot 12 + 1} = \frac{156 + 6}{24 + 1} = \frac{162}{25},$$

$$\frac{P_4}{Q_4} = \frac{162 \cdot 2 + 13}{25 \cdot 2 + 2} = \frac{337}{52},$$

i tak daléj;—tu oczywiście szereg tych przybliżeń nigdy się nie skończy. Każde z nich możemy wziąć za przybliżoną wartość $\sqrt{42}$; zobaczymy późniéj jak oznaczyć stopień przybliżenia w każdym przypadku.

21*. Wiedząc w jaki sposób tworzą się przybliżenia, poznamy teraz główne ich własności.

Najprzód widoczną jest rzeczą, z samego sposobu tworzenia się przybliżeń, że, z wyjątkiem dwóch pierwszych, licznik każdego przybliżenia jest większy od licznika przybliżenia poprzedzającego, i mianownik każdego przybliżenia jest większy od mianownika przybliżenia poprzedzającego. Gdyż:

$$P_{n+1} = P_n a_{n+1} + P_{n-1},$$

a ponieważ wszystkie liczby wchodzące do téj równości są dodatne, i a_{n+1} jest co najmniéj równe jedności, przeto: $P_{n+1} > P_n$.

22*. *Różnica pomiędzy dwoma po sobie następującemi przybliżeniami jest równą ułamkowi, któreyo licznikiem jest jedność wzięta ze znakiem + lub —, a mianownikiem iloczyn z mianowników tychże przybliżeń.*

Na przykładach § 20* własność ta oczywiście sprawdza się. I tak weźmy przykład ostatni: w nim:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{6}{1}; \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{13}{2}, \text{ przeto:}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} = \frac{13}{2} - \frac{6}{1} = \frac{13-12}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2},$$

Podobnie:

$$\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{162}{25} - \frac{13}{2} = \frac{324-325}{50} = -\frac{1}{50},$$

i t. d.

Przechodząc do wyrażeń ogólnych łatwo widzieć, że w ułamku ciągłym:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_{n+1}+\ldots}}}}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} = \left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) - a_1 = +\frac{1}{a_2}$$

Aby znaleźć różnicę pomiędzy trzeciem i drugiem przybliżeniem, zauważmy najprzód, że:

$$\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_3\,Q_3 - P_2\,Q_3}{Q_2\,Q_3};$$

mianownik téj różnicy jest więc iloczynem mianowników tych dwóch przybliżeń. Wartość licznika $P_3 Q_2 - P_2 Q_2$ możnaby wynaleźć, podstawiając zamiast P_2, Q_2, P_3 i Q_3 ich wartości, wyrażone za pomocą a_1, a_2 i a_3. Lecz aby uniknąć zbyt rozwlekłych rachunków możemy tak postąpić: Ponieważ, podług prawa tworzenia się przybliżeń:

$$P_3 = P_2\,a_3 + P_1\ ;\ Q_3 = Q_2\,a_3 + Q_1\ ,$$

przeto podstawiając te wartości w wyrażenie $P_3\,Q_2 - P_2\,Q_3$, otrzymamy:

$$P_3\,Q_2 - P_2\,Q_3 = (P_2\,a_3 + P_1)\,Q_2 - (Q_2\,a_3 + Q_1)\,P_2\ ,$$

czyli:

$$P_3\,Q_2 - P_2\,Q_3 = P_1\,Q_2 - P_2\,Q_1\ .$$

A że:

$$P_1 = a_1\ ;\ P_2 = a_1\,a_2 + 1$$
$$Q_1 = 1_1\ ;\ Q_2 = a_2\ ,$$

więc:

$$P_3\,Q_2 - P_2\,Q_3 = a_1\,a_2 - (a_1\,a_2 + 1) = -1\ .$$

Skąd wypada, że

$$\frac{P_3}{Q_3} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{-1}{Q_2\,Q_3}\ .$$

W podobny sposób moglibyśmy znaleźć, że różnica:

$$\frac{P_4}{Q_4} - \frac{P_3}{Q_3} = \frac{+1}{Q_3\,Q_4}\ .$$

Dowiedziemy teraz, że licznik różnicy pomiędzy dwoma któremikolwiek przybliżeniami jest ilością stałą, co do swojéj liczebnej wartości. W tym celu weźmy trzy, którekolwiek po sobie następujące przybliżenia:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \frac{P_n}{Q_n}\ \text{i}\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},$$

odpowiadające mianownikom cząstkowym:

$$a_{n-1}\ ,\ a_n\ \text{i}\ a_{n+1}\ ,$$

i znajdźmy najprzód różnicę pomiędzy $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$, a następnie pomiędzy $\frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$. Będzie:

$$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n\,Q_{n-1} - P_{n-1}\,Q_n}{Q_{n-1}\,Q_n},$$

i daléj:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1}}{Q_n\,Q_{n+1}}\ .$$

Lecz ponieważ, podług prawa tworzenia się przybliżeń, mamy:

$$P_{n+1} = P_n\,a_{n+1} + P_{n-1}\ ,\ Q_{n+1} = Q_n\,a_{n+1} + Q_{n-1}\ (\S\ 20^*),$$

przeto:

$$P_{n+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1} = (P_n\,a_{n+1} + P_{n-1})\,Q_n - P_n\,(Q_n\,a_{n+1} + Q_{n-1}),$$

czyli:

$$P_{n+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1} = P_{n-1}\,Q_n - P_n\,Q_{n-1}$$

A że licznik różnicy poprzedniéj był:

$$P_n\,Q_{n-1} - P_{n-1}\,Q_n\ ,$$

przeto:

$$P_{n+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1} = -\,(P_n\,Q_{n-1} - P_{n-1}\,Q_n)\,.$$

Ta równość pokazuje nam, że licznik różnicy pomiędzy dwoma przybliżeniami: $(n+1)$-tém i n-tém jest równy co do swojéj liczebnéj wartości licznikowi różnicy pomiędzy przybliżeniem n-ém i $(n-1)$-ém, a tylko ma znak przeciwny. A że te przybliżenia są jakiemikolwiek w szeregu wszystkich przybliżeń, przeto możemy stąd wyprowadzić wniosek, że licznik różnicy dwóch następujących po sobie przybliżeń jest stały co do swojéj liczebnéj wartości; znak tylko w nim kolejno się zmienia. Lecz widzieliśmy wyżéj, że licznik różnicy pomiędzy np. trzeciém, i drugiém przybliżeniem jest -1 , więc we wszystkich różnicach licznik ten jest także $=1$, tylko znak przed nim może być $+$ lub $-$, stosownie do miejsca, jakie zajmują uważane przybliżenia w szeregu wszystkich przybliżeń. Mianowicie: licznik różnicy pomiędzy drugiém a pierwszem przybliżeniem jest $+1$; licznik różnicy pomiędzy trzeciém i drugiém przybliżeniem jest -1 ; licznik różnicy pomiędzy czwartém i trzeciém przybliżeniem będzie znowuż $+1$, i t. d. Wogóle więc licznik różnicy pomiędzy dwoma przybliżeniami po sobie następującemi będzie wtedy -1 , gdy odejmujemy od przybliżenia porządku *nieparzystego* przybliżenie poprzedzające; w przeciwnym razie licznik ten jest $+1$. Wyrazić to możemy w ten sposób:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n\,Q_{n+1}} \ldots, (1)\,.$$

Ilość $(-1)^{n+1}$ służy tutaj do oznaczenia znaku różnicy; liczebna wartość jéj jest zawsze 1 : ponieważ ilość odjemna podniesiona do potęgi parzystéj, daje wypadek dodatni, a podniesiona do potęgi nieparzystéj daje wypadek odjemny, przeto znak przy $(-1)^{n+1}$ będzie wtedy $+$, jeżeli $n+1$ będzie parzyste, a— wtedy gdy $n+1$ będzie nieparzyste.

Znosząc mianownik w równości (1) otrzymamy inne wyrażenie téj saméj własności:

$$P_{n+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1} = (-1)^{n+1} \ldots . (2)\,.$$

23*. Jako bezpośredni wniosek z powyższéj wypada własność następująca:

Licznik i mianownik każdego przybliżenia są liczbami pierwszemi względem siebie.

W rzeczy saméj: przypuśćmy, że największy wspólny dzielnik dla licznika i mianownika przybliżenia $\frac{P_n}{Q_n}$ jest d. Wtedy i ilość $P_{1+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1}$ musi być podzielną przez d , gdyż P_n i Q_n są osobno podzielne przez d. A że:

$$P_{n+1}\,Q_n - P_n\,Q_{n+1} = (-1)^{n+1}\,,$$

przeto i druga strona powyższéj równości musi być podzielną przez d. Lecz wartość téj drugiéj strony jest ± 1 , stosownie do tego czy $n+1$ jest parzyste lub nie, więc i d nie może być różne od 1.

24*. *Całkowita wartość x ułamku ciągłego*

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}$$

jest zawarta pomiędzy dwoma po sobie następującemi przybliżeniami, t. j. jeżeli jest większą od przybliżenia $\frac{P_n}{Q_n}$. to będzie mniejszą od przybliżenia następnego $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ i odwrotnie.

Do tego wniosku przychodzimy zastanawiając się nad tém, z czego się składa każde przybliżenie. Pierwsze przybliżenie jest a_1 : jest ono widocznie większe od całkowitéj wartości ułamku ciągłego x, gdyż opuszczamy tutaj część dodatnią $\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}$.

Drugie przybliżenie powstało z $a_1 + \frac{1}{a_2}$; jest ono większe od całkowitéj wartości x ułamku ciągłego, gdyż tutaj opuszczamy część $\cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}$, którą należy dodać do samego mianownika a_2, aby otrzymać wartość x. Biorąc a_2 zamiast prawdziwego mianownika, bierzemy mianownik za mały, a więc wartość ułamku, powstałego z $a_1 + \frac{1}{a_2}$ będzie za wielką w porównaniu do x. I t. d., rozumowanie to

możemy rozciągnąć do wszystkich następnych przybliżeń.

Lecz toż samo twierdzenie dowiedziemy innym sposobem. W tym celu zachowajmy dla głoski x toż samo znaczenie jak dotąd, t. j. uczyńmy:

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cdots}}}};$$

oznaczmy daléj przez $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ $\frac{P_n}{Q_n}$ dwa po sobie następujące przybliżenia, i postarajmy się znaleźć różnice $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $x - \frac{P_n}{Q_n}$. Jeżeli się okaże, że te różnice *w każdym przypadku* mają znaki przeciwne, wtedy twierdzenie będzie dowiedzione, gdyż z tego wypadnie, że jeżeli x będzie np. większe od $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, wtedy toż samo x będzie mniejsze od $\frac{P_n}{Q_n}$ i odwrotnie. Aby znaleźć wspomniane wyżéj różnice, wyrazimy najprzód x pod taką postacią, pod jaką przedstawiają się wszystkie przybliżenia.

Na zasadzie prawa tworzenia się przybliżeń mamy:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_{n+1} + P_{n-1}}{Q_n a_{n+1} + Q_{n-1}}.$$

Gdybyśmy chcieli z tego przybliżenia otrzymać przybliżenie następne, wówczas należałoby w niém zamiast a_{n+1} podstawić $a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}}$. Lecz gdybyśmy zamiast a_{n+1} w wyrażenie na $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, podstawili: $a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{a_{n+3} + \ldots}}$, to jest ten ułamek ciągły, jakie otrzymamy, biorąc wszystkie ułamki cząstkowe danego ułamku ciągłego od a_{n+1} aż do końca, wtedy oczywiście z przybliżenia $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ otrzymalibyśmy całkowitą wartość ułamku ciągłego.

Jeżeli więc uczynimy:

$$y = a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \cfrac{1}{a_{n+3} + \ldots}}$$

wtedy podstawiając y zamiast a_{n+1} w wyrażenie na $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, otrzymamy wartość całkowitą ułamku ciągłego. Zwracamy uwagę czytelnika na to, że ilość y ma takież samo znaczenie, co i x_n w §14*. Będzie zatém:

$$x = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} \quad \ldots . \quad (1)$$

To bardzo ważne wyrażenie służyć nam będzie nietylko do znalezienia szukanych różnic $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $x - \frac{P_n}{Q_n}$, ale nadto w wielu innych przypadkach.

Wyraziwszy tak x, poszukajmy teraz różnic wymienionych wyżéj. Będzie:

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},$$

czyli: sprowadzając ułamki drugiéj strony téj równości do jednakowego mianownika:

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{P_n Q_{n-1} y + P_{n-1} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n y - P_{n-1} Q_{n-1}}{(Q_n y + Q_{n-1}) Q_{n-1}}$$

skąd, po zrobieniu redukcyi wyrazów podobnych i wyłączeniu y za nawias z wyrazów pozostałych:

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n) y}{Q_{n-1} (Q_n y + Q_{n-1})} \quad \ldots (2)$$

Podobnie dla znalezienia różnicy $x - \frac{P_n}{Q_n}$, podstawmy zamiast x jego wartość z równości (1). Otrzymamy:

$$x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} - \frac{P_n}{Q_n};$$

postępując zaś z drugą stroną powyższéj równości tak samo, jak postępowaliśmy przy $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, znajdziemy ostatecznie:

$$x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}\,Q_n - P_n\,Q_{n-1}}{Q_n\,(Q_n\,y + Q_{n-1})} \quad \ldots \quad (3)$$

Porównywając z sobą drugie strony równości (2) i (3). widzimy że one *koniecznie* mają znaki przeciwne. Gdyż mianowniki ich są dodatnie, również jak i ilość y , znajdująca się w liczniku drugiéj strony równości (2) ; znaki zatém drugich stron tych równości zależą od ilości: $P_n\,Q_{n-1} - P_{n-1}\,Q_n$ i $P_{n-1}\,Q_n - P_n\,Q_{n-1}$. Widoczną zaś jest rzeczą, że ilości te mają znaki przeciwne.

Jeżeli więc $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ jest dodatnie, t. j. jeżeli $x > \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, wtedy $x - \frac{P_n}{Q_n}$ *musi* być odjemne, t. j. musi być $x < \frac{P_n}{Q_n}$; i odwrotnie jeżeli $x < \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, wtedy będzie: $x > \frac{P_n}{Q_n}$. Nierówności te często wyrażają w ten sposób:

albo będzie: $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < x < \frac{P_n}{Q_n}$,

albo też: $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > x > \frac{P_n}{Q_n}$.

Ponieważ podług własności dowiedzionéj w paragrafie 22*,

$$P_n\,Q_{n-1} - P_{n-1}\,Q_n = (-1)^n ,$$

przeto równości (2) i (3) mogą być tak napisane:

$$x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-)^n\,y}{Q_{n-1}\,(Q_n\,y + Q_{n-1})} , \quad \ldots \quad (4)$$

$$x - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_n\,(Q_n y + Q_{n-1})} \quad \ldots \quad (5)$$

Gdybyśmy chcieli, na zasadzie tych równości, znaleźć wartość różnicy pomiędzy x i którémkolwiek przybliżeniem, wtedy w jednéj lub drugiéj równości należałoby zamiast n podstawić odpowiednią liczbę. Tak np. chcąc znaleźć jaki znak ma różnica pomiędzy x i przybliżeniem pierwszém, należy albo w równości (4) uczynić $n = 2$, albo w równości (5) uczynić $n = 1$. I jedna i druga równość pokazuje, że ta różnica jest dodatnią, więc $x > \frac{P_1}{Q_1}$. Podobnie czyniąc w równości (5) $n = 2$, lub w równości (4) $n = 3$, wypada, że różnica pomiędzy x i $\frac{P_2}{Q_2}$ jest odjemną, czyli że $x < \frac{P_2}{Q_2}$, i t. d. Wypada stąd, że w ogóle: *x jest większe od każdego przybliżenia porządku nieparzystego a mniejsze od każdego przybliżenia porządku parzystego.*

25*. Też same równości (4) i (5) pokazują nam zarazem i następującą własność ułamku ciągłego:

Każde przybliżenie jest bliższe całkowitéj wartości ułamku ciągłego, aniżeli przybliżenie poprzedzające.

W rzeczy saméj: druga strona równości (5), paragrafu 24*, wyrażająca różnicę pomiędzy x i którémkolwiek przybliżeniem, jest mniejszą co do swojéj liczebnéj wartości (t. j. bez względu na jéj znak) od drugiéj strony równości (4) wyrażającéj różnicę pomiędzy x i przybliżeniem poprzedzającém. Gdyż y

jest większe od 1, i Q_{n-1} mniejsze od Q_n; przeto $\frac{y}{Q_{n-1}} > \frac{1}{Q_n}$, skąd i

$$\frac{y}{Q_{n-1}(Q_n y + Q_{n-1})} > \frac{1}{Q_n(Q_n y + Q_{n-1})}.$$

Jest więc: $x - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > x - \frac{P_n}{Q_n}$, czyli: różnica pomiędzy x i przybliżeniem n-tém jest mniejszą liczebnie od różnicy pomiędzy x i przybliżeniem poprzedzającém. Tworząc więc coraz dalsze przybliżenia ułamku ciągłego, zbliżamy się coraz bardziéj do jego całkowitéj wartości.

Przybliżenia porządku nieparzystego są mniejsze od téj wartości, przybliżenia zaś porządku parzystego większe od niéj. Gdybyśmy przeto oddzielnie ugrupowali przybliżenia nieparzyste i oddzielnie parzyste w dwa następujące szeregi:

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \frac{P_5}{Q_5} \ldots\ldots,$$
$$\frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_4}{Q_4}, \frac{P_6}{Q_6} \ldots\ldots,$$

wtedy ułamki pierwszego szeregu zbliżały by się coraz bardziéj do x rosnąc, wyrazy zaś drugiego szeregu zbliżałyby się ciągle do x malejąc; samo zaś x jest zawsze zawarte pomiędzy dwoma odpowiedniemi wyrazami tych dwóch szeregów.

26*. *Różnica pomiędzy całkowitą wartością ułamku ciągłego a jakiémkolwiek przybliżeniem, jest mniejszą liczebnie od ułamku, którego licznikiém jest jedność, a mianownikiem iloczyn z mianownika uważanego przybliżenia i mianownika następującego.*

A także: *różnica pomiędzy całkowitą wartością ułamku ciągłego, a jakiémkolwiek przybliżeniem jest mniejszą od ułamku, którego licznikiem jest jedność, a mianownikiem kwadrat z mianownika uważanego przybliżenia.*

W rzeczy saméj: jeżeli weźmiemy dwa przybliżenia po sobie następujące $\frac{P_n}{Q_n}$ i $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, wtedy całkowita wartość ułamku ciągłego x jest zawartą pomiędzy temi przybliżeniami; a więc różnica pomiędzy x i którémkolwiek z nich jest, liczebnie biorąc (t. j. bez względu na znak), mniejszą od różnicy pomiędzy samemi przybliżeniami, czyli

$$x - \frac{P_n}{Q_n} < \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}.$$

Lecz

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{Q_n Q_{n+1}},$$ gdzie

licznik $(-1)^{n+1}$ jest równy ± 1 stosownie do tego czy $n+1$ jest parzyste czy też nie parzyste.

Zwracając zatém uwagę tylko na liczebną wartość tego licznika, która jest równą 1, mieć będziemy:

$$x - \frac{P_n}{Q_n} < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

W téj nierówności zawiéra się pierwsze wyrażenie różnicy pomiędzy wartością całkowitą ułamku ciągłego a którémkolwiek przybliżeniem.

Jeżeli teraz zwrócimy uwagę na to, że ze sposobu tworzenia się przybliżeń:

$$Q_n < Q_{n+1} ,$$

wtedy, mnożąc obie strony téj nierówności przez Q_n, wypadnie że i:

$$Q_n{}^2 < Q_n\, Q_{n+1} .$$

Ułamek przeto $\frac{1}{Q_n\, Q_{n+1}}$ jest mniejszym od ułamku $\frac{1}{Q_n{}^2}$, gdyż przy równych licznikach drugi ma mianownik mniejszy. A że: $x - \frac{P_n}{Q_n}$ jest mniejsze od $\frac{1}{Q_n\, Q_{n+1}}$, przeto tym bardziéj będzie $x - \frac{P_n}{Q_n} < \frac{1}{Q_n{}^2}$,

i to jest drugim sposobem wyrażenia różnicy pomiędzy x i wartością ułamku ciągłego.

Należy tu jednak zaznaczyć, że pierwszy sposób daje daleko dokładniejszą granicę błędu, jaki popełniamy, biorąc zamiast x którekolwiek przybliżenie, aniżeli drugi, za to drugi sposób jest do rachunku dogodniejszy, gdyż nie wymaga obliczenia wartości mianownika przybliżenia następującego.

27*. Wartości przybliżone względem x, otrzymane z ułamków ciągłych przez oznaczenie różnych przybliżeń tegoż ułamku ciągłego, mają jeszcze tę własność, że, przy równym stopniu przybliżenia, są wyrażone w najprostszych liczbach. Mianowicie: można dowieść, że jeżeli jakikolwiek ułamek $\frac{r}{s}$, nie wchodzący do szeregu przybliżeń $\frac{P}{Q}$, bardziéj się zbliża do x, aniżeli którekolwiek przybliżenie $\frac{P_n}{Q_n}$, wtedy ułamek ten musi być wyrażony większemi liczbami, aniżeli toż przybliżenie; przynajmniéj mianownik tego ułamku musi być większym od mianownika uważanego przybliżenia. Tę własność przybliżeń wyrazić możemy w następujący sposób:

Jeżeli jakikolwiek ułamek $\frac{r}{s}$ *zbliża się więcej swoją wartością do* x (t. j. do całkowitéj wartości ułamku ciągłego), *aniżeli przybliżenie* $\frac{P_n}{Q_n}$, *wtedy mianownik* s *tego ułamku musi być większym od mianownika* Q_n.

W rzeczy saméj: zauważmy najprzód, że skoro $\frac{r}{s}$ jest więcéj zbliżone do x, aniżeli $\frac{P_n}{Q_n}$, to tymbardziéj $\frac{r}{s}$ będzie więcéj zbliżone do x, aniżeli przybliżenie poprzedzające $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$. Ponieważ zaś x jest zawarte pomiędzy dwoma po sobie następującemi przybliżeniami $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$, a ułamek $\frac{r}{s}$ zbliża się więcéj do x, aniżeli każde z nich, przeto ten ułamek $\frac{r}{s}$ musi być także zawartym pomiędzy $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ i $\frac{P_n}{Q_n}$. Różnica więc pomiędzy ułamkiem $\frac{r}{s}$ i którémkolwiek z przybliżeń $\frac{P}{Q}$, musi być, liczebnie biorąc, mniejszą od różnicy pomiędzy samemi przybliżeniami, t. j. powinno być:

$$\frac{r}{s} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < \frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} .$$

Sprowadzając ułamki na pierwszéj stronie powyższéj nierówności do jednakowego mianownika, i mając wzgląd na to, czemu się równa różnica pomiędzy dwoma przybliżeniami po sobie następującemi, otrzymamy:

$$\frac{r\,Q_{n-1} - s\,P_{n-1}}{s\,Q_{n-1}} < \frac{1}{Q_n\,Q_{n-1}}.$$

Lecz ponieważ r, s, P_{n-1} i Q_{n-1} są liczbami całkowitemi, przeto i ilość $r\,Q_{n-1} - s\,P_{n-1}$ musi być także liczbą całkowitą, zatém co najmniej równą jedności. Aby więc ułamek na pierwszej stronie mógł być mniejszym od ułamku na drugiéj stronie nierówności napisanéj wyżej, powinno być:

$$s\,Q_{n-1} > Q_n\,Q_{n-1},$$
skąd: $s > Q_n$.

I tak jeżeli ułamek $\frac{r}{s}$ jest bliższym całkowitéj wartości x ułamku ciągłego, aniżeli przybliżenie $\frac{P_n}{Q_n}$, to przynajmniej mianownik jego s musi być większym od mianownika Q_n. Ze wszystkich zatem wartości ułamkowych przybliżonych do x *w równym stopniu*, ułamek $\frac{P_n}{Q_n}$ jest najprostszym.

28*. Ta własność nadaje szczególną cechę i zarazem znaczenie przybliżeniom, którą tutaj należy nam wyjaśnić. Wartość przybliżoną pewnéj ilości x, któréj dokładnie nie znamy, lub jéj dokładnie wyrazić nie możemy, przedstawiamy zwykle w postaci ułamku. Możnaby sądzić, że im większy jest mianownik tego ułamku, tém większy jest stopień przybliżenia i tém ułamek ten jest bliższym oznaczanéj ilości. Bardzo często w rzeczy saméj ma to miejsce; że tak

jednak nie jest w ogólności, pokazuje następujący przykład. Weźmy pod uwagę trzy ułamki: $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{7}$. Sprowadzając je do jednakowego mianownika, otrzymamy: $\frac{20}{28}$, $\frac{21}{28}$, $\frac{24}{28}$; co pokazuje, że ułamek $\frac{3}{4}$ jest zawarty pomiędzy ułamkami $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$. Otóż może się przytrafić, że pewna ilość x, któréj wartość przybliżoną chcemy oznaczyć, jest zawartą wprawdzie pomiędzy $\frac{5}{7}$ i $\frac{6}{7}$, ale zarazem jest daleko bliższą $\frac{3}{4}$, aniżeli każdego z ułamków skrajnych. W takim razie wyrażając wartość przybliżoną ilości x za pomocą ułamków z mianownikiem 7 otrzymujemy przybliżenie dalsze od prawdziwéj wartości, aniżeli za pomocą ułamku z mianownikiem 4. Może się więc niekiedy przytrafić, że oznaczając wartość przybliżoną pewnéj ilości, otrzymamy przy ułamku z mniejszym mianownikiem wyższy stopień przybliżenia, aniżeli przy ułamku z większym mianownikiem.

Własność przybliżeń ułamku ciągłego dowiedziona wyżéj, pokazuje, że przy użyciu ułamków ciągłych dla oznaczenia wartości przybliżonych, ten przypadek miejsca mieć nie może; każde przybliżenie jest ze wszystkich ułamków mających ten sam lub mniejszy mianownik najwięcéj zbliżoną wartością x.

29*. Gdy wartość przybliżoną jakiejkolwiek ilości niewymiernéj mamy już wyrażoną w ułamku dziesiętnym, wtedy możemy tę ilość niewymierną rozwinąć na ułamek ciągły przez rozwinięcie tego ułamku

dziesiętnego. W tym celu znajdujemy najprzód dwie wartości przybliżone, pomiędzy któremi dana ilość jest zawartą. Zwykle wartość przybliżona, jest podaną w ten sposób, że prawdziwa wartość jest od niéj większą. Dodając więc do ostatniéj cyfry ułamku dziesiętnego przybliżonego jedność, otrzymamy dwa ułamki, pomiędzy któremi dana ilość jest zawartą. Aby nie wyjść po za te granice, które w ten sposób znajdziemy, należy oba te ułamki dziesiętne zamienić na ułamki ciągłe, i zachować w otrzymanym ułamku ciągłym tylko te ułamki cząstkowe, które są wspólne w obu rozwinięciach.

Objaśnimy to przykładem. Przypuśćmy, że chcemy zamienić na ułamek ciągły stosunek okręgu koła do średnicy, oznaczany w rachunkach zwykle głoską π. Wiemy, że stosunek ten jest niewymierny; Ludolph znalazł przybliżoną wartość tegoż stosunku, wyrażoną w trzydziestu pięciu cyfrach dziesiętnych następnych:

3, 14159 26535 89793 23846 26435 83279 50288.

Późniejsi matematycy posunęli stopień przybliżenia jeszcze daléj. Rachunek, w którym wszystkie cyfry tutaj przytoczone, są uwzględnione, ciekawi mogą znaleźć w pierwszéj nocie Lagrange'a do drugiego tomu algiebry Eulera (str. 318 i następne). Tutaj ograniczymy się tylko pierwszemi dziesięcioma cyframi dziesiętnemi.

Zachowując przeto te dziesięć cyfr, mamy na wartość przybliżoną π:

3, 14159 26535 .

Dodając do ostatniéj cyfry jedność, znajdziemy, że prawdziwa wartość na π, jest zawartą pomiędzy dwoma ułamkami:

$$\frac{31\,415\,926\,535}{10\,000\,000\,000} \text{ i } \frac{31\,415\,926\,536}{10\,000\,000\,000}.$$

Oba te ułamki zamieniamy sposobem podanym w § 16*, na ułamki ciągłe przez postępowanie takie, jakiego używamy przy wynajdywaniu największego wspólnego dzielnika. Z ułamku pierwszego mamy taki szereg ilorazów:

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 6, 2, 13, 3, 1, 12, 3;

z drugiego zaś:

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1. 45, 1, 1, 8.

Zachowując tylko ilorazy wspólne tym dwóm ułamkom, otrzymamy takie rozwinięcie ilości π na ułamek ciągły:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}$$

Tworząc przybliżenia tego ułamku podług prawideł podanych poprzednio, znajdziemy następujące wartości przybliżone:

$$\frac{P_1}{Q_1} = 3\ ;\ \frac{P_2}{Q_2} = \frac{22}{7}\ ;\ \frac{P_3}{Q_3} = \frac{333}{106}\ ;\ \frac{P_4}{Q_4} = \frac{355}{113}\ ;$$

$$\frac{P_5}{Q_5} = \frac{103993}{33102}\ ;\ \frac{P_6}{Q_6} = \frac{104\,348}{33215}\ ;\ \frac{P_7}{Q_7} = \frac{208\,341}{66317}\ .$$

Każdy z tych ułamków zbliża się do prawdziwéj wartości π tak daleko, jak żaden inny ułamek z mianownikiem takim samym lub mniejszym.

Przybliżenie drugie $\frac{22}{7}$ było wartością znalezioną zupełnie inną drogą przez Archimedesa. Wartość ta jest większą od π ; różnica pomiędzy π i $\frac{22}{7}$ jest mniejszą, jak wiemy z § 26*, od $\frac{1}{7\times 106} = \frac{1}{742}$.

Ułamek $\frac{355}{113}$ jest stosunkiem Adryana Mecyusza. Jest on również większym od prawdziwéj wartości π ; ale jest daleko więcéj przybliżonym do π , aniżeli liczba Archimedesa, gdyż różnica pomiędzy π i $\frac{355}{113}$ jest mniejszą od $\frac{1}{113\times 33102}$, to jest od $\frac{1}{3740526}$.

Ułamek $\frac{333}{106}$, zawarty pomiędzy liczbą Archimedesa i liczbą Mecyusza nie jest wcale prostszym od tego ostatniego, jest jednak daleko mniej dokładnym, gdyż błąd jaki popełniamy, biorąc ten ułamek zamiast π jest zaledwie mniejszym od $\frac{1}{11978}$. Zresztą można porównać te liczby z sobą w łatwy sposób, zamieniając je na ułamki dziesiętne i porównywając tak otrzymane ułamki dziesiętne z liczbą Ludolpha.

Znajdziemy:

$$\frac{22}{7} = 3{,}142\ldots\ ;\ \frac{333}{106} = 3{,}14150\ldots\ ;\ \frac{355}{113} = 3{,}1415929\ldots,$$

skąd widzimy, że liczba Archimedesa daje już 3-cią cyfrę błędną liczba zaś Mecyusza dopiéro 7-mą.

30*. Na zakończenie tego rozdziału pokażemy sposób wynajdywania całkowitéj wartości ułamku ciągłego peryodycznego. Okaże się, że ta całkowita wartość jest zawsze jednym z pierwiastków równania stopnia drugiego, którego współczynniki są wymierne. Zaczniemy od przykładów liczebuych.

Przypuśćmy, że mamy ułamek ciągły peryodyczny:

$$x = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \ldots}}}}$$ do nieskoń.

Oznaczmy przez y całą tę część ułamku ciągłego, która się zaczyna od pierwszego peryodu, to jest uczyńmy:

$$y = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{10 + \ldots}}}$$ do nieskończ.

Wtedy widocznie będzie:

$$x = 5 + \frac{1}{y}\ ,\quad y = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{y}}\ ,$$

skąd: $x = \frac{5y+1}{y}\ ;\ y = \frac{21y+2}{10y+1}$.

Wynajdując wartość na y z równania pierwszego będzie:

$$y = \frac{1}{x-5};$$

podstawiając ją w równanie drugie, otrzymamy:

$$\frac{1}{x-5} = \frac{\frac{21}{x-5} + 2}{\frac{10}{x-5} + 1}.$$

Mnożąc licznik i mianownik drugiéj strony tego równania przez $x-5$, miéć będziemy:

$$\frac{1}{x-5} = \frac{21+2(x-5)}{10+x-5} = \frac{11+2x}{5+x},$$

skąd, znosząc mianowniki:

$$11x+2x^2-55-10x=5+x,$$

po wykonaniu zaś redukcyj:

$$2x^2=60,$$

czyli: $x^2=30$.

Widzimy z tego, że ostatecznie dla oznaczenia x przyszliśmy do równania stopnia drugiego w najprostszéj postaci. Stąd otrzymamy:

$$x=\sqrt{30},$$

wyrażenie, które łatwo sprawdzić przez bezpośrednią zamianę na ułamek ciągły.

W podobny sposób postępować będziemy dla dowiedzenia w ogólności, że ułamek ciągły peryodyczny przedstawia jeden z pierwiastków równania stopnia drugiego, a zatem, że zawsze taki ułamek daje się

sprowadzić do wyrażenia pierwiastkowego stopnia drugiego. Wtym celu weźmy pod uwagę ułamek ciągły peryodyczny:

$$x=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{b_3+\cdots+\cfrac{1}{b_m+\cfrac{1}{b_1+\cdots}}}}}}}}$$

w którym mianowniki $a_1, a_2 \ldots a_n$ przedstawiają część nieperyodyczną, t. j. nie powtarzającą się, mianowniki zaś $b_1, b_2 \ldots b_m$, część peryodyczną, złożoną z m ułamków cząstkowych, powtarzających się, z temiż samemi mianownikami i w tym samym porządku do nieskończoności. Uczyńmy:

$$y=b_1+\cfrac{1}{b_2+\cdots+\cfrac{1}{b_m+\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cdots}}}}$$

...do nieskoń.

wtedy mieć będziemy:

$$(1)\quad x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{y}}}},$$

i także:

$$(2)\quad y = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_m + \cfrac{1}{y}}}}.$$

Jeden i drugi z tych ułamków ciągłych należy zamienić na ułamek zwyczajny, wówczas otrzymamy dwa równania, z których wyrugowawszy y, znajdziemy równanie, zawierające tylko jednę niewiadomą x i służące do ostatecznego znalezienia tejże niewiadomej. Aby w najdogodniejszy sposób wynaleźć odpowiednie wyrażenia, weźmy przybliżenie $(n+1)$-sze w ułamku danym i podstawmy w niém y zamiast b_1, wtedy mieć będziemy całkowitą wartość ułamku ciągłego; t. j.

$$x = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}} \quad \ldots\ldots (3)$$

W podobny sposób, biorąc w ułamku (2) przybliżenie $(m+1)$-sze otrzymamy całkowitą wartość ułamku ciągłego (2), to jest y. Będzie zatém:

$$y = \frac{P_m y + P_{m-1}}{Q_m y + Q_{m-1}} \quad \ldots\ldots (4)$$

Oznaczając z równania (3) wartość na y i podstawiając ją w równanie (4), otrzymamy, po zniesieniu mianowników i sprowadzeniu do najprostszéj postaci, równanie *stopnia drugiego*, z którego znajdziemy x. Rachunku tego wykonywać tu nie będziemy, gdyż jakkolwiek z ogólnéj postaci tego równania można wyprowadzić niektóre ważne wnioski, wszakże robić tego nie będziemy, przechodziłoby to bowiem zakres niniejszego dziełka. W każdym szczególnym przypadku prościéj jest bezpośrednio używać równań (3) i (4) w celu znalezienia równania ostatecznego, aniżeli odwoływać się do postaci ogólnéj tego równania, o którem mowa.

Rachunki wykonane w tym paragrafie pokazują nam, że każdy ułamek ciągły peryodyczny daje się wyrazić za pomocą jednego pierwiastku równania stopnia drugiego, o współczynnikach wymiernych. Lecz pozostawałoby teraz dowieść, że i odwrotnie każda ilość pierwiastkowa niewymierna stopnia drugiego daje się zawsze rozwinąć na ułamek ciągły peryodyczny. Dowodzenie to jednak, podane po raz pierwszy przez Lagrange'a, przechodzi po za obręb tego rozdziału. Nie mniéj rozbiór pytania jaki związek mieć będzie drugi pierwiastek równania stopnia drugiego, powstałego z wyrugowania y z równań (3) i (4) z danym ułamkiem ciągłym peryodycznym, także do naszego zamiaru nie należy.

Zadania.

1) Następujące ułamki zwyczajne zamienić na ułamki ciągłe: *a*) $\frac{79}{55}$ (1, 2, 3, 2, 3), *b*) $\frac{37}{101}$ (2, 1, 2, 1, 2, 3), *c*) $\frac{743}{611}$ (4, 1, 1, 1, 2, 3, 1, 3), *d*) $\frac{445}{612}$ (1, 2, 1, 1, 1, 55), *e*) $\frac{1769}{5537}$ (3, 7, 1, 2, 4, 5, 1, 2), *f*) $\frac{154}{43}$ (3, 1, 1, 2, 1, 1, 3).

2) W otrzymanych ułamkach ciągłych w poprzedniem zadaniu oznaczyć wszystkie przybliżenia.

3) Następujące ułamki dziesiętne zamienić na ułamki ciągłe.

a) 1, 2 3 4 5 (1, 4, 3, 1, 3. 1, 1, 2, 5); *b*) 0, 9 7 5 3 1 (1, 39, 1, 1, 111, 1, 2, 1, 2), *c*) przyjmując, że: $\sqrt{2} =$ 1, 4 1 4 2 , (1, 2, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 29).

4) Znaleść wartości następujących ułamków ciągłych:

a) $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}}$ $\left(\frac{972}{421}\right)$ *b*) $6+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$ $\left(\frac{972}{157}\right)$;

c) $2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7}}}}$ $\left(\frac{421}{157}\right)$; *d*) $7+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$ $\left(\frac{421}{59}\right)$.

5) Następujące ilości pierwiastkowe rozwinąć na ułamki ciągłe:

a) $\sqrt{2}$ (1, 2, 2....) ; *b*) $\sqrt{11}$ (3, 3, 6, 3, 6....), *c*) $\sqrt{56}$ (7, 2, 14, 2, 14...), *d*) $\sqrt{45}$ (6, 1, 2, 2, 2, 1, 12....); *e*) $\sqrt{53}$ (7, 3, 1, 1, 3, 14....), *f*) $\sqrt{59}$ (7, 1, 2, 7, 2, 1. 14....).

6) Znaleść 6 pierwszych przybliżeń $\sqrt{2}$.

7) Znaleść 8-me przybliżenie $\sqrt{31}$ $\left(\frac{1520}{273}\right)$.

8) Znaleść wartości następujących ułamków ciągłych peryodycznych:

a) $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+}}}}$ $(=\sqrt{3})$; *b*) $1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+}}}}$ $\left(=\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$; *c*) $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+}}}}$ $\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)$, *d*) $5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{3+}}}}}$ $(\sqrt{28})$

e) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+}}}}$ (pierwiastek dodatni równania $x^2+2x-2=0$).

f) $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}$ (Pierwiastek dodatni równania $7x^2 - 8x - 3 = 0$).

9) Następujące wyrażenia pierwiastkowe rozwinąć na ułamki ciągłe:

$\sqrt{32}$ (5, 1, 1, 1, 10, 1, 1, 1, 10,...),
$\sqrt{43}$ (6, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12, 1, 1....),
$\sqrt{52}$ (7, 4, 1, 2, 1, 4, 14, 4, 1,....),
$\sqrt{61}$ (7, 1, 4, 3, 1, 2, 2, 1, 3, 4, 1, 14, 1,....),
$\sqrt{67}$ (8, 5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16,....),
$\sqrt{89}$ (9, 2, 3, 3, 2, 18, 2,.....).

10) Dowieść, że jeżeli: $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \frac{P''}{Q''}$ oznaczają trzy jakiekolwiek po sobie następujące przybliżenia, wtedy będzie:

$$(P''-P)\,Q'=(Q''-Q)\,P''.$$

11) Dowieść, że:

$$\frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_1}{Q_1}+\frac{1}{Q_1 Q_2}-\frac{1}{Q_2 Q_3}+\frac{1}{Q_3 Q_4}\ldots+\frac{(-1)_n}{Q_{n-1}Q_n}.$$

12) Znaleść wartości następujących ułamków ciągłych, wyrażone bezpośrednio za pomocą a:

1) $a_1+\frac{1}{a_2}$; 2) $a_2+\frac{1}{a_1}$; 3) $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}$,

4) $a_3+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}}$; 5) $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}$; 6) $a_4+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}}}$.

Wartości otrzymane porównać, mianowicie 1) z 2); 3) z 4) : 5) z 6).

(Jeżeli wartość $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}=\frac{P_4}{Q_4}$, a poprzednie przybliżenie oznaczymy, jak zwykle: $\frac{P_3}{Q_3}$, to: $a_4+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}}}=\frac{P_4}{P_3}$ i t. d).

13) Poprzednie pytanie uogólnić, mianowicie znaleść związek ogólny pomiędzy wartościami ułamków ciągłych:

1) $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}$, i 2) $a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_{n-2}+\ddots+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}}}}}$.

(Jeżeli wartość ułamku: 1) oznaczymy przez: $\frac{P_n}{Q_n}$, a przybliżenie poprzedzające przez $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, wtedy wartość ułamku: 2) będzie: $\frac{P_n}{P_{n-1}}$.

Gdyż: $P_n = P_{n-1}a_n + P_{n-2}$,

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\left(\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}\right)};$$

a że: $P_{n-1} = P_{n-2}\,a_{n-1} + P_{n-3}$,

przeto: $\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}$,

skąd: $\frac{P_n}{P_{n-1}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}}$ i t. d.

14) W zadaniach 11) i 12) jakie mają znaczenie ułamki: $\frac{Q_4}{Q_3}$ i $\frac{Q_n}{Q_{n-1}}$.

$$\left(a_4 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_2}},\quad a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \cdots + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_2}}}\right).$$

15) Stosunek miesiąca synodycznego, wynoszącego 29,530588 dni, do roku słonecznego zwrotnikowego, mającego dni 365, 242 22, wyrazić w prostszych liczbach.

$$\left(\frac{1}{12}, \frac{2}{25}, \frac{3}{37}, \frac{8}{99}, \frac{11}{136}, \frac{19}{235}, \frac{334}{4131}\right).$$

III. Równania nieoznaczone stopnia pierwszego.

31*. Widzieliśmy w nauce o równaniach, że jedna ilość niewiadoma jest w zupełności oznaczoną za pomocą jednego równania, że dwie ilości niewiadome są oznaczone za pomocą dwóch równań, trzy ilości niewiadome za pomocą trzech równań, i t. d. W ogóle mówiąc, oznaczenie pewnéj liczby ilości niewiadomych wymaga tylu równań, ile jest niewiadomych.

Gdy więc zadanie jest tego rodzaju, że z jego warunków możemy ułożyć mniéj równań, aniżeli jest niewiadomych, wtedy z tych równań oznaczyć wartości niewiadomych nie można.

Gdyby np. były dwa równania, a trzy niewiadome, wówczas z nich moglibyśmy oznaczyć wartości tylko dwóch niewiadomych; na jedną zaś niewiadomą moglibyśmy nadać wartość dowolną. Nadając jakąkolwiek wartość na tę trzecią niewiadomą, otrzymalibyśmy dwa równania, zawierające tylko dwie niewiadome; z nich zatém można by było oznaczyć te dwie niewiadome. Lecz ponieważ na trzecią niewiadomą możemy nadać jakąkolwiek wartość, przeto podstawiając zamiast tejże trzeciéj niewiadoméj inną wartość, znajdziemy, wogóle mówiąc, i inne wartości odpowiednie na dwie pozostałe niewiadome: —dla każdej wartości trzeciéj niewiadoméj, znajdziemy inny układ wartości dwóch pozostałych niewiadomych. Liczba więc wszystkich rozwiązań takiego układu równań będzie nieskończenie wielką. I taki właśnie układ równań nazwano: *równaniami nieoznaczonemi*. W ogóle równania są *nieoznaczone* wtedy, *gdy liczba równań jest*

mniejszą od liczby niewiadomych. Wówczas, nadając wartości dowolne na tyle niewiadomych, ile ich jest *więcéj* aniżeli równań, otrzymamy równania, z których można oznaczyć pozostałe niewiadome. A że każdemu układowi wartości na te niewiadome, które zależą od naszéj woli, odpowiada pewien układ pozostałych niewiadomych, przeto na wszystkie niewiadome otrzymamy nieskończenie wiele odpowiedzi.

Gdyby nie było innych warunków, którym rozwiązania tych równań zadosyć czynić powinny, wtedy nic więcéj nad to, co powiedziano wyżéj, nie byłoby do dodania. Każde dane zadanie podpadałoby pod ogólną naukę o równaniach bądź to pierwszego, bądź to drugiego, bądź innych stopni, stosownie do stopnia równania, do których toż zadanie doprowadziło. Lecz rozwiązania takich równań poddają się zawsze w tej części algiebry, która się niemi zajmuje, jeszcze temu warunkowi, aby one były *liczbami całkowitemi.* Wskutek tego za rozwiązanie równania nieoznaczonego, lub układu równań nieoznaczonych, uważać będziemy tylko *liczby całkowite, zadosyć czyniące danemu równaniu.* I ponieważ rozwiązać równanie nieoznaczone jest to wynaleźć te wszystkie liczby całkowite, które mu zadosyć czynią, przeto nauka o rozwiązaniu równań nieoznaczonych nosi odrębną cechę od innych części algiebry i właściwie stanowi część osobnej gałęzi matematyki, zwanej: *„teoryą liczb“.*

Rozwiązania równań nieoznaczonych ograniczają się niekiedy jeszcze warunkiem tym, że powinny być dodatnie. Ten ostatni warunek ścieśnia tak dalece liczbę rozwiązań, że niekiedy tylko jedno z nich, a nawet czasami żadne nie odpowiada danemu zadaniu.

Równania nieoznaczone, podobnie jak oznaczone, dzielą się na równania stopnia pierwszego, drugiego i t. d. Pod względem liczby niewiadomych, może być albo jedno równanie jakiegokolwiek stopnia z dwiema niewiadomemi, lub z trzema, i t. d., albo też mogą być dwa równania z trzema, czterema i t. d., niewiadomemi, trzy równania z czterema lub większą liczbą niewiadomych, i t. d. Tutaj ograniczymy się tylko równaniami stopnia pierwszego, przedewszystkiém w tym przypadku, gdy dane jest jedno równanie z dwiema niewiadomemi.

32*. Jako prosty przykład, objaśniający na czém polegają rozwiązania zadań tego rodzaju, weźmiemy zadanie następujące:

Znaleść dwie liczby, których summa równa się dziesięciu.

Oznaczając jednę z tych liczb przez x drugą zaś przez y, otrzymamy równanie do rozwiązania:

$$x + y = 10.$$

Z tego równania miéć będziemy:

$$x = 10 - y.$$

Dla każdéj wartości obranéj na y znajdziemy stąd odpowiednią wartość na x; lecz wartości jednéj i drugiéj niewiadoméj są ograniczone tym warunkiem, że mają być tylko całkowite. Możemy więc uczynić:

y równém albo 0, albo 1, albo 2, albo 3, i t. d.

i stąd otrzymamy odpowiednie wartości na x. Czyniąc tak:

$y = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11. 12....$

znajdziemy: $x = 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4. 3, 2, 1, 0, -1, -2...$

Wartości więc x i y całkowite, czyniące zadosyć danemu równaniu, są zawarte w tych dwóch szeregach liczb, stanowiących dwa postępy arytmetyczne. Z tych szeregów widzimy, jak dalece warunek, aby rozwiązania były nietylko całkowite ale i dodatnie, zmniejsza liczbę tychże rozwiązań, gdyż rozwiązania dodatnie są tylko takie:

$$y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ;$$
$$x = 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 .$$

Jeżelibyśmy zaś z tych rozwiązań wyłączyli 0 i 10, to liczba rozwiązań jeszcze bardziej zmniejszyła by się i właściwie byłoby tylko pięć odpowiedzi różnych na pytanie jakie to są dwie liczby, których summa równa się 10?

33*. Nie trudno również wynaleść wszystkie rozwiązania równania tego rodzaju:

$$5x + y = 28 .$$

Należy tylko rozwiązać je względem téj niewiadoméj, przy któréj współczynnik jest równy jedności. Będzie:

$$y = 28 - 5x .$$

Dla każdéj wartości całkowitéj na x, wypadnie także całkowita wartość na y. Czyniąc więc:

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10....$$

otrzymamy: y=28, 23, 18, 13, 8, 3, -2, -7, -12, -17, -22....

Te dwa szeregi liczb całkowitych, zawierające wszystkie rozwiązania, stanowią także dwa postępy arytmetyczne: jeden z nich obejmujący wartości na x (t. j. na tę niewiadomą, przy któréj współczynnik jest

różny od 1) ma za wykładnik 1, drugi zaś, przedstawiający wartości na y, ma za wykładnik —5, (jak w tym przykładzie jest to współczynnik przy drugiéj niewiadoméj, wzięty ze znakiem —).

Widoczną jest rzeczą, że i w tém zadaniu liczba rozwiązań dodatnich jest ograniczoną; mianowicie jest ich tylko sześć;

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$
$$y = 28, 23, 18, 13, 8, 3.$$

W sposób podobny do powyższego można zawsze rozwiązać takie równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomemi, w którem współczynnik przy jednej niewiadoméj jest równy jedności, t. j. równania postaci:

$$x + by = k ,$$
lub: $x - by = k .$

Wtedy rozwiązując to równanie względem niewiadomej, przy któréj współczynnik jest jednością, (w równaniach przytoczonych wyżéj: x), i podstawiając na drugą niewiadomą y, kolejno wszystkie liczby całkowite, wynajdziemy i odpowiednie wartości całkowite na x.

Tych bardzo prostych sposobów nie można oczywiście użyć we wszystkich przypadkach do rozwiązania równania ogólnego:

$$ax + by = k .$$

którém się teraz zajmiemy.

34*. Możemy przyjąć, że wszystkie trzy liczby a, b i k, będące współczynnikami w napisanem wyżéj równaniu, nie mają, razem wzięte, żadnego wspólnego dzielnika: w przeciwnym bowiem razie dzieląc obie

strony tegoż równania przez największy wspólny dzielnik liczb a, b i k otrzymalibyśmy ostatecznie równanie takie, w którem współczynniki a, b i k, byłyby pierwszemi względem siebie. Gdyby tylko dwa współczynniki a i b miały jakikolwiek wspólny dzielnik, którego nie ma k, w takim razie nie trudno się przekonać, że równanie *nie może być rozwiązane w liczbach całkowitych*. W rzeczy samej: przypuśćmy, że a i b mają wspólny dzielnik d, który w k nie mieści się bez reszty. Wtedy, oznaczając iloraz z podzielenia $\frac{a}{d}$ głoską a', iloraz zaś: $\frac{b}{d}$ głoską b', byłoby $a = a'd$, i $b = b'd$. Podstawiając te wartości za a i b w dane równanie:

$$ax + by = k \ldots . (1)$$

byłoby:

$$a'dx + b'dy = k,$$

dzieląc zaś obie strony przez d, wypadłoby:

$$a'x + b'y = \frac{k}{d}.$$

Skoro k nie jest podzielne przez d, wtedy $\frac{k}{d}$ nie jest liczbą całkowitą; żadne więc liczby całkowite podstawione zamiast x i y w to równanie nie mogą uczynić pierwszej strony równą drugiéj. Wszystkie zatém przypadki, w których dwa współczynniki a i b nie są pierwszémi względem siebie, są wyłączone przy poszukiwaniu rozwiązań całkowitych równania (1). Równanie to przedstawiać nam będzie przykład równania, które rozwiązane w liczbach całkowitych być nie może.

Gdyby którykolwiek ze współczynników a lub b osobno i druga strona równania k miały jakikolwiek wspólny dzielnik d, wtedy równanie mogłoby być sprowadzone do prostszéj postaci. Aby pokazać jak wówczas należy postąpić, przypuśćmy, że np. b i k mają wspólny dzielnik d; tym sposobem będzie: $b = db'$ i $k = dk'$, gdzie b' i k' są liczbami całkowitemi, powstałemi z podzielenia b i k przez d. Uczyńmy $x = dx'$. Gdybyśmy byli w stanie znaleść czemu się równa x', wtedy mnożąc każdą z otrzymanych wartości na x' przez d, otrzymamy odpowiednią wartość na x. Podstawmy napisane powyżéj wartości na b, k i x w równanie dane (1); miéć będziemy:

$$adx' + b'dy = k'd,$$

z którego, przez podzielenie wszystkich wyrazów przez d, otrzymamy równanie prostsze:

$$ax' + b'y = k.$$

Np. Gdyby było równanie:

$$25x + 18y = 102,$$

wtedy, ponieważ 18 i 102 mają wspólny dzielnik 6, uczyńmy: $x = 6x'$, i podstawmy tę wartość za x. Otrzymamy:

$$25 . 6x' + 18y = 102.$$

Podzieliwszy wszystkie wyrazy przez 6 otrzymamy równanie prostsze, aniżeli dane:

$$25x' + 3y = 17,$$

Wynalazłszy z tego równania x' i y należy tylko wartości x' pomnożyć przez 6, a znajdziemy odpowiednie wartości na x.

Widzimy z powyższego, że tylko takie równania wypada nam wziąć pod uwagę, w których trzy liczby a, b i k razem, a nadto dwie a i b są pierwszemi względem siebie.

35*. Załóżmy więc, że w równaniu:

$$ax + by = k, \ldots (1)$$

liczby a i b mają za największy wspólny dzielnik 1; dowiedziemy najprzód, że w tym przypadku rozwiązanie równania (1) jest zawsze możliwe, to jest, że: *gdy a i b są pierwszemi względem siebie, zawsze można znaleźć takie liczby całkowite, które równaniu* (1) *zadosyć czynią.*

Dowodzenie opiera się na zasadzie, wyprowadzonej w § 4*. Aby tego dowieść znajdźmy wartość na jednę z niewiadomych równania (1), np. na y, wyrażoną za pomocą drugiéj niewiadomej x. Będzie:

$$y = \frac{k - ax}{b} \ldots . (2)$$

Wystawmy sobie teraz, że za x podstawiamy kolejno wszystkie liczby całkowite, poczynając od 0 i idąc przez liczby dodatnie i odjemne. Oczywiście nie wszystkie te liczby odpowiadać będą równaniu, gdyż nietylko x ma być całkowite, ale także i y. Z pomiędzy więc wszystkich wartości na x, tylko te wybrać nam należy, przy których ułamek na drugiéj stronie równania (2) staje się liczbą całkowitą, to jest przy których licznik jest podzielny przez mianownik. Że to jest zawsze możliwe, gdy a i b są pierwszemi

względem siebie, przekonywamy się z następującego rozważania: Na zasadzie własności dowiedzionéj w § 4* wiemy, że z dzielenia każdéj z liczb szeregu:

$$1 . a,\ 2a,\ 3a \ldots . (b-2)a,\ (b-1)a$$

przez b, gdy b jest pierwsze względem a, pozostają zawsze reszty, i że pomiędzy niemi nie ma reszt jednakowych; a że ich jest $b-1$ i wszystkie one są różne, więc muszą one być wszystkiemi liczbami szeregu

$$1, 2, 3, 4 \ldots . (b-2) \text{ i } (b-1).$$

Podstawiając zatém kolejno w wyrażenie na drugiéj stronie równania (2) zamiast x liczby:

$$(3) \ldots . 0, 1, 2, 3, 4 \ldots . (b-2) \text{ i } (b-1),$$

musimy koniecznie pomiędzy temi liczbami natrafić na jedną, *ale tylko na jedną*, taką, która da na resztę z podzielenia ax przez b tęż samą ilość jaką daje k, będąc podzielone także przez b. Przypuśćmy, że to mieć będzie miejsce wtedy, gdy zamiast x podstawimy pewną liczbę m z szeregu (3). Wówczas oznaczając iloraz z podzielenia am przez b głoską q, a resztę głoską r, otrzymamy:

$$am = bq + r.$$

Ponieważ zaś k, podzielone przez b, daje tęż samą resztę r, przeto możemy uczynić:

$$k = bq' + r,$$

gdzie q' jest ilorazem z podzielenia k przez b.

Lecz wyrażenie na y, dane równaniem (2), gdy w niém x uczynimy równém m zamieni się na takie:

$$y = \frac{k - am}{b}.$$

Podstawiając tutaj zamiast k i am napisane powyżéj wartości, będzie:

$$y = \frac{bq' + r - (bq + r)}{b},$$

czyli:

$$y = q' - q,$$

a to jest liczbą całkowitą, gdyż q i q' są liczbami całkowitemi. Widzimy więc z tego, że gdy a i b są pierwszemi względem siebie, można zawsze znaleść taką liczbę, i *to tylko jedną mniejszą* od b, która podstawiona zamiast x w dane równanie, czyli, co na jedno wychodzi, w równanie (2), uczyni y całkowitem. I to nam pokazuje możliwość rozwiązania danego równania w przypadku rozbieranym.

Podstawienia na x zaczynamy od 0 chcąc objąć i ten przypadek, w którym k jest podzielne bez reszty przez b; gdy jednak to nie ma miejsca, możemy podstawienia te odrazu zacząć od 1.

36*. Gdyśmy już znaleźli jedną taką wartość m, która podstawiona zamiast x, w równanie (2) daje i wartość na y także całkowitą, nie trudno znaleść i inne rozwiązania całkowite. W tym celu należy tylko zwrócić uwagę na to, że liczba m jest taką, przy któréj iloczyn am podzielony przez b, daje na resztę r,— ilość taką samą, jak i k podzielone przez b. Lecz jeżeli am podzielona przez b daje na resztę r, wtedy podstawiając zamiast m liczbę $m + b$, otrzymamy iloczyn $a(m + b) = am + ab$, który podzielony przez b da téż samą resztę r, gdyż b mieści się w ab całkowitą liczbę a razy. A zatem wartość na x równa $m + b$, uczyni w równaniu (2) i y całkowitem. Podobnież:

dodając do powyższej wartości $m + b$ jeszcze raz b, otrzymamy liczbę $m + 2b$, która podstawiona zamiast x w wyrażenie ax, da iloczyn $a(m + 2b) = am + 2ab$ taki, że reszta z podzielenia tego iloczynu przez b, będzie znowuż r; a zatem i liczba $m + 2b$, podstawiona w równanie (2) uczyni i y całkowitem. I tak daléj: biorąc zamiast x w ogóle liczbę: $m + pb$, gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, i podstawiając ją w równanie (2), otrzymamy i odpowiednią wartość na y całkowitą.

Podług tego co było dotąd powiedzianém, nie trudno wynaleść ogólne wyrażenia na x i y, czyniące zadosyć danemu równaniu (1), lub, co na jedno wychodzi, równaniu (2). W rzeczy saméj: wartości r, równéj m odpowiada wartość na y, równa $q' - q$. Oznaczmy tę ostatnią ilość jedną głoską n. Jeżeli za x podstawimy w równanie (2) $m + b$, wtedy na y otrzymamy:

$$y = \frac{k - a(m + b)}{b} = \frac{k - am - ab}{b},$$

a że: $k = q'b + r$; $am = qb + r$;

przeto:

$$y = \frac{q'b + r - (qb + r) - ab}{b},$$

czyli:

$$y = q' - q - a,$$

i nakoniec:

$$y = n - a.$$

Podobnież: jeżeli na x podstawimy $m + 2b$, wtedy podobny rachunek do powyższego pokaże nam, że:

$$y = n - 2a.$$

I w ogólności, gdy w równaniu (2) uczynimy: $x = m + pb$, otrzymamy na y wartość:

$$y = n - pa.$$

Widzimy z tego, że wartości na x i y są zawarte w dwóch następnych szeregach liczb:

$$x = m,\ m+b,\ m+2b \ldots .\ m+pb, \ldots .$$
$$y = n,\ n-a,\ n-2a \ldots .\ n-pa, \ldots .$$

gdzie odpowiadające sobie wartości na dwie niewiadome, znajdują się jedna pod drugą.

Wartości więc na x *tworzą postęp różnicowy, którego pierwszym wyrazem jest* m, *a wykładnikiem* b (*t. j. współczynnik przy* y *w daném równaniu*); *wartości zaś na* y *stanowią także postęp różnicowy, którego, pierwszym wyrazem jest* n, *a wykładnikiem* $-a$ (*t. j. współczynnik przy* x *w daném równaniu, wzięty ze znakiem* —).

Ogólne wyrażenie przeto na liczby całkowite, przedstawiające wartość niewiadomej x jest: $x = m + pb$, a zaś ogólne wyrażenie liczb, przedstawiających wartości na y jest: $y = n - pa$, gdzie m i n są to dwie pierwsze wartości, które zadosyć czynią równaniu (1), a p jakakolwiek liczba całkowita.

Zbyteczną rzeczą jest dodawać, że przyszlibyśmy do tych samych wniosków, gdybyśmy zaczęli rozwiązanie od znalezienia wartości na y.

Gdyby dane równanie było postaci:

$$ax - by = k,$$

wtedy otrzymalibyśmy z niego:

$$y = \frac{ax-k}{b};$$

rozumowanie zupełnie podobne do powyższego pokazało by nam, że zawsze możemy znaleść na x taką liczbę całkowitą m, mniejszą od b, którą gdy podstawimy w wyrażenie na y, otrzymamy z niego także wartość całkowitą i równą n; i daléj, że taka liczba mniejsza od b jest tylko jedna; nakoniec że wszystkie wartości całkowite, zadosyć czyniące temu równaniu, będą zawarte w wyrażeniach:

$$x = m + pb;\ y = n + pa.$$

Gdybyśmy jednak zamiast zacząć rozwiązanie od wynalezienia wartości na tę niewiadomą, przy któréj współczynnik ma znak odjemny (jak tutaj na y), zaczęli od wynalezienia wartości na x, otrzymalibyśmy:

$$x = \frac{k+by}{a},$$

i wtedy należałoby cokolwiek zmienić rozumowanie, dla pokazania że rozwiązanie w liczbach całkowitych jest i w tym razie zawsze możliwe. Oznaczmy iloraz powstały z podzielenia k przez a głoską s, resztę zaś głoską r. Przeto $r < a$. Podstawiajmy kolejno zamiast y liczby:

$$1, 2, 3, 4 \ldots .\ a-2,\ a-1;$$

wtedy wiemy, że reszty z podzielenia by przez a wszystkie będą różne, a więc będą wszystkiemi liczbami, mniejszemi od a. Możemy zatém zawsze wynaleść taką liczbę n pomiędzy liczbami, zawartemi w szeregu od 1 do $(a-1)$, że iloczyn bn, powstały z podstawienia téj liczby zamiast y w wyrazie by, po podzieleniu przez a da na resztę r' równą różnicy pomiędzy a i r. Innemi słowami: możemy zawsze wynaleść pomiędzy resztami ostatniemi taką, która będąc dodaną do r da na summę a. Oznaczmy odpowiedni iloraz z podzielenia bn przez a, głoską s'. Wtedy będzie:

$$k = as + r,$$
$$bn = as' + r';$$

skąd: $$k + bn = a\,(s+s') + r + r'$$

A że $r + r' = a$, przeto:

$$x = \frac{a\,(s+s') + a}{a} = s + s' + 1.$$

Dodając a do téj pierwszéj wartości na y, to jest do n, otrzymamy nową liczbę $n+a$, która uczyni i x całkowitem i równém $s+s'+1+b$. I w ogóle: dodając a powtórzone ilekolwiek razy p do n, otrzymamy taką wartość na y, która uczyni i x całkowitą.

37*. Objaśnimy teraz powyższe rozumowanie na kilku przykładach liczebnych.

Weźmy najprzód równanie:

$$8x + 15y = 127.$$

Współczynniki 8 i 15 są pierwszemi względem siebie; rozwiązanie zatém jest możliwe.

Z tego równania otrzymamy:

$$x = \frac{127 - 15y}{8}.$$

Ponieważ przy dzieleniu 127 przez 8 otrzymujemy na resztę 7, przeto powinniśmy odszukać takiéj liczby, która podstawiona zamiast y w iloczyn $15y$, dałaby następnie przy dzieleniu przez 8 na resztę także 7. Taką liczbą jest 1. Podstawiając w powyższe wyrażenie na x, jedność zamiast y, otrzymamy:

$$x = \frac{127 - 15 \cdot 1}{8} = \frac{112}{8} = 14.$$

Dwie więc wartości: $y = 1$, i $x = 14$, podstawione w równanie dane, zadosyć mu czynią. Aby znaleść

inne odpowiedzi, zwróćmy uwagę na to, że jeżeli zamiast y podstawimy w iloczynie $15y$, jedność powiększoną o ośm, wtedy otrzymamy iloczyn, który podzielony przez 8 da także na resztę 7, a zatem uczyni $127 - 15y$ podzielnem przez 8. W rzeczy saméj, będzie:

$$x = \frac{127 - 15 \cdot 9}{8} = -1.$$

Para więc wartości: $x = -1$, $y = 9$, także zadosyć czyni danemu równaniu. Podstawiając daléj zamiast y liczbę $1 + 2.8 = 17$, również uczynimy różnicę $127 - 15y$ podzielną przez 8; i w istocie:

$$x = \frac{127 - 15 \cdot 17}{8} = \frac{127 - 255}{8} = -\frac{128}{8} = -16;$$

czyli dwie wartości: $x = -16$, $y = 17$ zadosyć czynią równaniu danemu. W ogóle podstawiając zamiast y liczbę téj postaci: $1 + 8p$, uczynimy różnicę $127 - 15y$ podzielną przez 8, będzie:

$$x = \frac{127 - 15\,(1+8p)}{8} = \frac{112 - 15 \cdot 8p}{8} = 14 - 15p.$$

Wszystkie więc liczby całkowite tych postaci:

$$x = 14 - 15p,$$
$$y = 1 + 8p,$$

gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, będą zadosyć czynić danemu równaniu. Liczby zawarte w powyższych wyrażeniach są takie:

$p = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, 5, \ldots.$
$x = 14, -1, -16, -31, -46, \ldots.$
$y = 1, \quad 9, \quad 17, \quad 25, \quad 33 \ldots.$

Oczywiście oba te szeregi liczb możemy posunąć w lewą stronę, podstawiając za p wartości całkowite

odjemne. Te dwa szeregi są postępami arytmetycznemi: wykładnikiem w pierwszym, przedstawiającym wartości x, jest -15, (t. j. współczynnik przy y w równaniu danem, wzięty ze znakiem $-$), wykładnikiem zaś w drugim, przedstawiającym wartości y, jest 8 (t. j. współczynnik przy x).

Możemy tu jeszcze dodać, że wszystkie liczby będące wartościami na x należą do jednéj klassy względem modułu 15, (§ 12*); wszystkie zaś liczby, będące wartościami na y należą także do jednéj klasy względem modułu 8.

Gdyby szło o wynalezienie wartości nie tylko całkowitych, ale i dodatnich, zadosyćczyniących danemu równaniu, wtedy powyższe dwa szeregi pokazują nam, że byłoby tylko jedno rozwiązanie, mianowicie $x = 14$, $y = 1$. We wszystkich innych rozwiązaniach, jedna tylko z liczb jest dodatnią, druga zaś jest odjemną. Gdybyśmy mieli na widoku rozwiązanie np. takiego zagadnienia: kupował ktoś gruszki i jabłka, za jedno jabłko płacił 8 kopiejek, za jedną gruszkę 15 kop.; wydał na całe kupno 1 rs. 27 kop.; ileż kupił jabłek a ile gruszek? wtedy, oznaczając przez x liczbę jabłek, a przez y liczbę gruszek, otrzymalibyśmy równanie:

$$8x + 15y = 127.$$

które, jakkolwiek nieoznaczone, dałoby nam jedną tylko odpowiedź: $x = 14$, $y = 1$, gdyż liczby kupionych gruszek i jabłek muszą być całkowite i dodatnie.

Jako drugi przykład weźmy równanie:

$$9x + 25y = 81.$$

Ponieważ współczynnik przy x i druga strona równania mają wspólny dzielnik 9, przeto, czyniąc

$y = 9y'$ i podstawiając w równanie, sprowadzimy je do prostszéj postaci. (§ 34*)

$$x + 25y' = 9.$$

Gdybyśmy jednak nie chcieli użyć tego uproszczenia i próbowali rozwiązać bezpośrednio równanie dane, wtedy otrzymalibyśmy:

$$x = \frac{81 - 25y}{9}.$$

Ponieważ reszta pozostała z dzielenia 81 przez 9 jest zero, przeto i za y powinniśmy podstawić taką liczbę, któraby uczyniła iloczyn $25y$ podzielnym przez 9. Taką liczbę będzie najprzód 0, a następnie każda liczba wielokrotna względem 9.

Rozwiązania więc będą:

$$y = 0, \quad 9, \quad 18, \quad 27 \ldots . \quad 9p.$$
$$x = 9, -16, -41, \ldots . 9 - 25p.$$

Trzeci przykład: Dane równanie:

$$19x - 7y = 50.$$

Otrzymujemy najprzód:

$$y = \frac{19x - 50}{7}.$$

Ponieważ 50 podzielone przez 7 daje na resztę 1, przeto szukamy takiéj liczby całkowitéj, któraby podstawiona zamiast x w iloczynie $15x$ przy dzieleniu przez 7 dała też samą resztę. Taką liczbą jest 3; co znajdujemy podstawiając za x kolejno liczby całkowite, zaczynając od jedności. Stąd otrzymamy:

$$y = \frac{19 \cdot 3 - 50}{7} = \frac{57 - 50}{7} = 1.$$

Liczby więc 3 i 1 zadosyć czynią danemu równaniu. Rozumowanie jakiego użyliśmy już kilkakrotnie,

pokazuje że rozwiązania będą zawarte w dwóch następnych szeregach liczb:

$$x = 3,\ 10,\ 17,\ 24 \ldots . 3 + 7p;$$
$$y = 1,\ 20,\ 39,\ 58 \ldots . 1 + 19p.$$

Gdybyśmy zaczęli rozwiązanie od wynalezienia wartości na x, wtedy otrzymalibyśmy:

$$x = \frac{50 + 7y}{19}.$$

50 podzielone przez 19 daje na iloraz 2 i na resztę 12. Odszukujemy na y takiéj liczby, dla któréj iloczyn $7y$, podzielony przez 19 dałby na resztę 7, to jest tyle, ile potrzeba dodać do reszty 12 aby otrzymać 19. Taką wartością na y jest 1. Podstawiając tę wartość za y w wyrażenie na x będzie:

$$x = \frac{50 + 7 . 1}{19} = \frac{57}{19} = 3.$$

Znaleźliśmy więc też same rozwiązania co i poprzednio.

Czwarty przykład: Mamy równanie:

$$12x - 25y = 0.$$

z niego otrzymujemy:

$$x = \frac{0 + 25y}{12} = \frac{25y}{12}.$$

Widzimy z tego, że $y = 0$ i w ogóle każda liczba podzielna przez 12, podstawiona zamiast y zadosyć czyni temuż równaniu. Biorąc więc:

$$y = 0.\ 12,\ 24,\ 36 \ldots .$$
$$x = 0,\ 25,\ 50,\ 75 \ldots .$$

i w ogóle:

$$y = 12p,$$
$$x = 25p,$$

otrzymamy rozwiązania.

38*. Rozumowania i objaśnienia zawarte w dwóch poprzednich paragrafach pokazują wprawdzie możliwość rozwiązanie równania: $ax + by = k$ w liczbach całkowitych, w tym przypadku, gdy a i b są pierwszemi względem siebie, lecz właściwie nie stanowią sposobu bezpośredniego rozwiązania tegoż równania. Nie możemy bowiem nazwać sposobem rozwiązania równania odszukanie niewiadomej, przez kolejne podstawianie liczb, zaczynając od jedności, podobnie jak takiego sposobu postępowania nie nazwalibyśmy rozwiązaniem i równań oznaczonych. Zajmiemy się teraz wyłożeniem sposobów, prowadzących bezpośrednio albo do wyrażenia w ogólnéj postaci liczb całkowitych, zadosyć czyniących danemu równaniu, albo też do wynalezienia dwóch liczb całkowitych, które podstawione zamiast x i y w dane równanie, zadosyć mu czynią. W tym ostatnim przypadku, mając już znalezione dwie takie liczby, łatwo odszukać rozwiązanie ogólne.

Podamy tutaj dwa sposoby rozwiązania równania nieoznaczonego $ax + by = k$; jeden z nich moglibyśmy nazwać: sposobem *dzielenia kolejnego*, drugi zaś za pomocą ułamków ciągłych.

39*. Pierwszy z tych sposobów, który prowadzi do wynalezienia ogólnych wyrażeń na niewiadome, objaśnimy najprzód przykładami liczebnemi.

1-szy przykład: Rozwiązać równanie:

$$2x + 3y = 25.$$

W tym celu wynajdźmy z tego równania wartość na tę niewiadomą, przy której współczynnik jest mniejszy, jak tutaj na x; będzie:

$$x = \frac{25 - 3y}{2}.$$

Odłączmy z tego ułamku całkowitą, co nie tylko w tym przypadku, ale zawsze będzie możliwe, gdyż w mianowniku będzie liczba mniejsza od współczynnika przy niewiadomej znajdującej się w liczniku. Otrzymamy:

$$x = 12 - y + \frac{1 - y}{2}.$$

Ponieważ x powinno być całkowitém, przeto y należy wybrać takie liczby całkowite, któreby uczyniły drugą stronę całkowitą. A że: $12 - y$ jest samo przez się całkowitém przy każdéj wartości całkowitéj na y, zatem powinniśmy wybrać tylko takie wartości na y, przy których ułamek $\frac{1 - y}{2}$ miałby wartość całkowitą, zresztą jakąkolwiek. Czyniąc więc:

$$\frac{1 - y}{2} = p,$$

gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą, otrzymamy stąd:

$$y = 1 - 2p;$$

a podstawiając tę wartość w wyrażenie na x, będzie:

$$x = 11 + 3p.$$

Czyniąc:

$p = \ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

otrzymamy:

$y = \ldots -9, 7, 5, 3, 1, -1, \ldots$

$x = \ldots -1, 2, 5, 8, 11, 14 \ldots$

Wyrażenia $1 - 2p$ i $11 + 3p$ są ogólnemi wartościami na te dwie niewiadome.

2-gi przykład. Rozwiązać równanie:

$$3x - 8y = 43.$$

Wynajdujemy wartość na x, gdyż przy niem współczynnik jest mniejszy; będzie:

$$x = \frac{43 + 8y}{3}.$$

Z ułamku na drugiéj stronie wyłączamy całkowitą; ponieważ 43 podzielone przez 3 daje na iloraz 14 i resztę 1, a 8 podzielone przez 3 daje na iloraz 2 i resztę 2, przeto:

$$x = 14 + 2y + \frac{1 + 2y}{3},$$

Aby wartości na x były całkowite, powinniśmy na y wybrać takie liczby, przy których ułamek $\frac{1 + 2y}{3}$ byłby całkowitym. Uczyńmy więc:

$$\frac{1 + 2y}{3} = p';$$

gdzie p' oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Otrzymamy stąd:

$$y = \frac{3p' - 1}{2} = p' + \frac{p' - 1}{2}.$$

Ta ostatnia równość pokazuje, że aby y było całkowite, powinniśmy na p' tylko takie liczby całkowite wybierać, przy których ułamek $\frac{p' - 1}{2}$ byłby całkowitym. Czyniąc więc jeszcze:

$$\frac{p' - 1}{2} = p,$$

gdzie p jest jakąkolwiek liczbą całkowitą, będzie:

$$p' = 2p + 1.$$

Z téj ostatniéj równości widzimy, że p' powinno być postaci $2p + 1$, czyli powinno być zawsze nieparzyste. Podstawiając tę wartość za p' w wyrażenie na y, otrzymamy:

$$y = 1 + 3p;$$

a przez podstawienie wartości na y i na p' w wyrażenie na x, wypadnie:

$$x = 14 + 2(3p+1) + 2p + 1,$$

czyli:

$$x = 17 + 8p.$$

Podstawiając teraz kolejno za p wszystkie liczby całkowite zaczynając od 0 do $+\infty$ i do $-\infty$, otrzymamy wszystkie liczby całkowite, czyniące zadosyć danemu równaniu. Wartości te są zawarte w następującéj tablicy:

$p =$ ..... $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.....
$x =$ ..... $1, 9, 17, 25, 33, 41$ .....
$y =$ ..... $-3, -1, 3. 5, 7$ .....

Widzimy z téj tablicy, że równanie dane ma nieskończenie wielką liczbę rozwiązań nie tylko całkowitych, ale i dodatnich. Mianowicie wszystkie wartości na x i y odpowiadające wartościom dodatnim na p, zaczynając od 0, są dodatnie

3-ci przykład. Rozwiązać równanie:

$$31x + 21y = 1770.$$

Przy rozwiązaniu tego równania zwracamy uwagę czytelnika na pewne uproszczenie, którego często można użyć, i które znacznie ułatwia rachunki, przez sprowadzenie zadania do liczb prostszych.

Zaczynamy, jak zwykle, działanie od wynalezienia wartości na tę niewiadomą, przy któréj współczynnik jest mniejszy. Będzie:

$$y = \frac{1770 - 31x}{21}.$$

W dalszym ciągu odłączamy całkowitą z tego ułamku; otrzymamy:

$$y = 84 - x + \frac{6 - 10x}{21},$$

czyli:

$$y = 84 - x + \frac{2(3 - 5x)}{21}.$$

Aby wartości całkowitéj na x odpowiadała z tego wyrażenia wartość całkowita na y, potrzeba x wybrać takie, przy którém ułamek $\frac{2(3-5x)}{21}$ byłby całkowitym, t. j. przy którém licznik: $2(3-5x)$ byłby podzielnym przez 21. A że czynnik 2 jest pierwszym względem 21, przeto potrzeba aby $3-5x$ było podzielne przez 21, t. j. aby ułamek

$$\frac{3-5x}{21} = p' \text{ (całkowitéj)}.$$

Przez opuszczenie czynnika 2 w liczniku, pierwszego względem mianownika 21, cały ułamek został uproszczonym i sprowadzonym do liczb mniejszych. Tego rodzaju uproszczenia można zawsze użyć; mianowicie jeżeli przy rozwiązywaniu równania sposobem kolejnego dzielenia, napotkamy taki ułamek, w liczniku którego będzie czynnik pierwszy względem mianownika, to czynnik ten można zawsze opuścić.

Wprowadzając powyższe oznaczenie do wyrażenia na y, będzie:

$$y = 84 - x + 2p'$$

Z równania zaś: $\frac{3-5x}{21} = p'$, otrzymujemy:

$$x = \frac{3-21p'}{5},$$

czyli:

$$x = -4p' + \frac{3-p'}{5}.$$

Aby wartość na x wypadła całkowitą, potrzeba p' tak wybrać, aby ułamek $\frac{3-p'}{5}$ był całkowitym. Czyniąc więc:

$$\frac{3-p'}{5} = p,$$

będzie:

$$x = -4p' + p,$$

i:

$$p' = 3 - 5p.$$

Podstawiając wartość na p' w wyrażenia na x i y otrzymamy ostatecznie:

$$x = -12 + 21p,$$

$$y = 102 - 31p,$$

jako ogólne wyrażenia na liczby całkowite, zadosyć czyniące danemu równaniu. Czyniąc:

$p = \ldots. -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$

miéć będziemy:

$x = \ldots. -54, -33, -12, 9, 30, 51, 72 \ldots.$

$y = \ldots. 164, 133, 102, 71, 40, 9, -22 \ldots.$

dwa szeregi liczb, zawierające wszystkie ro związania. Czytelnik bezwątpienia widzi, że te dwa szeregi są postępami arytmetycznemi z wykładnikami 21 i —31.—

Gdyby szło o rozwiązania tylko dodatnie, wtedy widocznie byłyby trzy odpowiedzi: $x = 9, 30, 51$; $y = 71, 40, 9$.

4-*ty przykład*: Rozwiązać równanie:

$$12x + 17y = 479.$$

Wynajdując wartość na x, otrzymamy:

$$x = \frac{479 - 17y}{12} = 39 - y + \frac{11-5y}{12}.$$

Uczyńmy dalej: $\frac{11-5y}{12} = p'$,

będzie:

$$x = 39 - y + p';$$

i nadto:

$$y = \frac{11-12p'}{5} = 2 - 2p' + \frac{1-2p'}{5},$$

Czyniąc znowuż: $\frac{1-2p'}{5} = p''$,

otrzymamy:

$$y = 2 - 2p' + p'',$$

i:

$$p' = \frac{1-5p''}{2} = -2p'' + \frac{1-p''}{2}.$$

Ponieważ $\frac{1-p''}{2}$ ma być całkowite, przeto:

$$\frac{1-p''}{2} = p,$$

gdzie p jest jakąkolwiek całkowitą; skąd:

$$p'' = 1 - 2p.$$

Podstawiając tę wartość w p', y i x, otrzymamy ostatecznie ilości x i y, wyrażone bezpośrednio za pomocą p. Wyrażenia te będą;

$$x = 30 + 17p,$$

$$y = 7 - 12p.$$

Czyniąc p kolejno równe wszystkim liczbom całkowitym, otrzymamy wartości odpowiednie na x i y.

$p = \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$
$x = \ldots\ldots -4, 13, 30, 47, 64, \ldots\ldots$
$y = \ldots\ldots 31, 19, 7, -5, -17 \ldots\ldots$

Można się łatwo przekonać, że wartości znalezione na x i y zadosyć czynią danemu równaniu przy wszystkich znaczeniach na p. Należy tylko podstawić te wartości w równanie: $12x + 17y = 479$. Otrzymamy:

$$12\ (30 + 17p) + 17\ (7 - 12p) =$$
$$= 360 + 12 . 17p + 119 - 12 . 17p = 479.$$

Ponieważ wyrazy, zawierające p znoszą się same przez się na pierwszéj stronie równości, przeto wartości na x i y czynią zadosyć danemu równaniu przy jakiémkolwiek p.

Z szeregów liczb, napisanych wyżéj, widzimy że dane równanie ma tylko dwa rozwiązania całkowite i zarazem dodatnie, mianowicie: albo $x = 19$, $y = 13$; albo téż: $x = 7$, $y = 30$.

40*. Przykłady rozwiązane w paragrafie poprzednim objaśniają dostatecznie na czem polega sposób wynalezienia ogólnych wyrażeń całkowitych na x i y. Możemy sposób ten opisać w ogólności tak:

Niech będzie dane równanie:

$$ax + by = k. \qquad (1)$$

Gdyby współczynnik przy jednéj z niewiadomych był równym jedności, wtedy odrazu rozwiązalibyśmy je, wynajdując wartość na tęż niewiadomą i podstawiając kolejno za drugą niewiadomą wszystkie liczby całkowite. Należy nam przedewszystkiem rozebrać

ten przypadek, w którym a i b są różne od 1. Wiemy już z poprzedniego, że rozwiązanie w liczbach całkowitych jest tylko wtedy możliwe, gdy a i b są pierwsze względem siebie.

Niech więc będą a i b różne od 1 i pierwsze względem siebie; przypuśćmy nadto, że $b < a$. Wynajdźmy z równania (1) wartość na tę niewiadomą, przy któréj współczynnik jest mniejszy; jak tutaj, podług naszego przypuszczenia, na y. Będzie:

$$y = \frac{k - ax}{b}. \qquad (2)$$

Podzielmy a przez b; oznaczmy iloraz z tego dzielenia przez q a resztę przez r. Gdyby k było także większe od b wtedy podzielmy k przez b i oznaczmy iloraz przez m a resztę przez n. Wtedy:

$$a = bq + r; \qquad k = bm + n.$$

Podstawiając te wartości za a i k w równanie (2) otrzymamy:

$$y = \frac{bm + n - (bq + r)x}{b} = \frac{bm - bq\,x}{b} + \frac{n - rx}{b},$$

czyli:

$$y = m - qx + \frac{n - rx}{b}.$$

Podług założenia szukamy na x i y wartości całkowitych. Lecz nadając na x jakąkolwiek wartość całkowitą, otrzymamy na część $m - qx$ wartość także całkowitą; aby więc i y było całkowite, potrzeba wynaleść takie wartości na x, przy których ułamek $\frac{n - rx}{b}$ byłby całkowitym. Dla tego téż to czynimy:

$$\frac{n - rx}{b} = p',$$

oznaczając przez p' jakąkolwiek liczbę całkowitą. Z téj ostatniéj równości wypada:

$$rx + bp' = n. \qquad (3)$$

Całe zadanie sprowadza się więc właściwie do rozwiązania równania (3), prostszego od równania danego, gdyż b, które było mniejszém od a. jest tutaj współczynnikiem większym, a n może być mniejsze od k.

Gdyby r było równém 1, wtedy zadanie byłoby już rozwiązane, Jeżeli $r > 1$, wówczas znajdźmy znowuż z tego równania wartość na x, przy którém współczynnik jest mniejszy od b; będzie:

$$x = \frac{n - bp'}{r}. \qquad (4)$$

Oznaczając iloraz, pozostały z podzielenia b przez r głoską q' i resztę głoską r'; iloraz zaś z podzielenia n przez r głoską m', a resztę głoską n', miéć będziemy jak wyżéj:

$$x = \frac{m'r + n' - (q'r + r')\,p'}{r} =$$

$$= \frac{m'r - q'rp' + n' - r'p'}{r},$$

czyli:

$$x = m' - q'p' + \frac{n' - r'p'}{r}.$$

Ponieważ zaś x i p' mają być całkowite, przeto tę ostatnią liczbę należy tak wybrać, aby ułamek $\frac{n' - r'p'}{r}$ był całkowitym. Z tego powodu uczyńmy:

$$\frac{n' - r'p'}{r} = p'',$$

gdzie p'' oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą.

Stąd:

$$r'p' + rp'' = n' \qquad (5)$$

i zadanie znowuż jest sprowadzone do rozwiązania równania prostszego, niż poprzednie, gdyż $r' < r$. Gdyby tutaj wypadło $r' = 1$, wtedy rozwiązanie byłoby skończone. Lecz jeżeli $r' > 1$, wówczas znowuż wynajdźmy wartość na p' (współczynnik bowiem przy niem jest mniejszy); będzie

$$p' = \frac{n' - rp''}{r'},$$

i odłączmy całkowitą z tego ułamku, co zawsze da się zrobić, gdyż $r > r'$. Wprowadzając też same oznaczenia co i poprzednio, t. j. oznaczając przez m'' i n'' iloraz i resztę z podzielenia n' przez r', a przez q'' i r'' iloraz i resztę z podzielenia r przez r', otrzymamy:

$$p' = m'' - q''p'' + \frac{n'' - r''p''}{r'}.$$

Czynimy znowuż:

$$\frac{n'' - r''p''}{r'} = p''',$$

skąd wypada równanie:

$$r''p'' + r'p''' = n'', \qquad (6)$$

którém kończyło by się rozwiązanie, gdyby r'' było równém 1. Gdyby ono było różném od 1, wtedy daléj postępowalibyśmy tak samo jak poprzednio dotąd, dopóki jedna z reszt: r, r', r''... nie wypadłaby równą 1. To nastąpić koniecznie musi; gdyż, podług założenia, liczby a i b są pierwszemi względem siebie, a reszty: r, r', r'' i t. d. są otrzymane z takiego działania, jakie wykonalibyśmy, gdybyśmy chcieli znaleść dzieleniem największy wspólny dzielnik dla a i b. Przy-

puśćmy więc, że już reszta r'' jest równą 1; co możemy uczynić, liczba działań bowiem nie ma tutaj żadnego wpływu na bieg rozumowania. Wtedy z równania (6) otrzymamy:

$$p'' = n'' - r'p,$$

gdzie znaczki nad p''' opuściliśmy, jako już daléj nie potrzebne. Jeżeli teraz weźmiemy pod uwagę wyrażenia poprzednio otrzymane:

$$\begin{aligned} y &= m - qx + p', \\ x &= m' - q'p' + p'', \\ p' &= m'' - q''p'' + p, \\ p'' &= n'' - r'p, \end{aligned}$$

i podstawimy wartość na p'' w wyrażenie na p', następnie wartości na p' i p'' w wyrażenie na x i nakoniec wartości na x i p' w wyrażenie na y, wtedy wyrazimy obie wartości na x i y za pomocą jednéj ilości ostatniéj p, która oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Rachunku tego nie wykonywamy tutaj, gdyż nie prowadzi on do wzorów, mających znaczenie praktyczne. Najlepiéj w każdym przypadku sposobem wskazanym postępować tak, jak robiliśmy w przykładach rozwiązanych w poprzednim paragrafie.

41*. Zastosujemy jeszcze zasady podane wyżéj do rozwiązania kilku zagadnień.

1-sze. *Liczbę 100 podzielić na takie dwie części, aby jedna z nich podzielona przez 5 dała na resztę 2, a druga podzielona przez 7 dała na resztę 4.*

Ponieważ pierwsza z tych części, będąc podzielona przez 5 ma dać w reszcie 2, przeto ta pierwsza część powinna być téj postaci: $5x + 2$, gdzie x oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. I daléj: ponieważ

druga część, będąc podzielona przez 7, ma dać na resztę 4, przeto musi być ona na téj postaci: $7y + 4$ (§ 12*). Obie te części razem wzięte powinny stanowić 100. Będzie więc równanie:

$$5x + 2 + 7y + 4 = 100, \text{ czyli:}$$
$$5x + 7y = 94.$$

Następującym rachunkiem, który tu wykonywamy, bez żadnych objaśnień, znajdujemy ostateczne wyrażenia na x i y:

$$x = \frac{94 - 7y}{5} = 18 - y + \frac{4 - 2y}{5}$$
$$= 18 - y + \frac{2(2-y)}{5};$$
$$\frac{2-y}{5} = p; \quad y = 2 - 5p,$$
$$x = 16 + 7p.$$

Tym sposobem ostateczne wyrażenia są:

$$x = 16 + 7p; \quad y = 2 - 5p.$$

Czyniąc: $p = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$
otrzymamy: $x = \ldots -5, 2, 9, 16, 23, 30 \ldots$
$y = \ldots 17, 12, 7, 2, -3, -8 \ldots$

Ponieważ natura pytania wymaga oczywiście odpowiedzi nie tylko całkowitych, ale i dodatnich, przeto powinniśmy z tych wartości na x i y te tylko wybrać, które dają dwie części szukane dodatnie, a zatém wartości tylko dodatnie na x i y. Tych wartości jest trzy:

$$x = 2, 9, 16;$$
$$y = 12, 7, 2.$$

Przy pierwszéj z nich $x = 2$, $y = 12$, część pierwsza szukana: $5x + 2 = 12$, część druga $7y + 4 = 88$;

przy drugiéj: $x=9$, $y=7$, część pierwsza: $5x+2=47$, część druga: $7y+4=53$; nakoniec przy trzeciéj: $x=16$, $y=2$, część pierwsza: $5x+2=82$, część druga: $7x+4=18$.

42*. *Zagadnienie. Znaleść taką liczbę, która podzieloną przez 11 da na resztę 3, a podzielona przez 19 da na resztę 5.*

Ponieważ liczba szukana, podzielona przez 11 ma dać na resztę 3, przeto względem modułu 11 musi być ona téj postaci: $11x+3$, gdzie x oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą (§ 12*). A że taż sama liczba, będąc podzieloną przez 19 ma dać na resztę 5, przeto musi być ona także i téj postaci: $19y+5$. Ponieważ oba wyrażenia napisane wyżéj, oznaczają jednę i tęż samą liczbę, przeto otrzymamy równanie:

$$11x+3=19y+5,$$

czyli:
$$11x-19y=2.$$

Rozwiązanie znajdujemy następującym rachunkiem:

$$x=\frac{2+19y}{11}=y+\frac{2+8y}{11}=y+\frac{2(1+4y)}{11}.$$

Czyniąc: $\frac{1+4y}{11}=p'$, będzie: $x=y+2p'$.

Daléj: $y=\frac{11p'-1}{4}=2p'+\frac{3p'-1}{4}$.

Czyniąc: $\frac{3p'-1}{4}=p''$, mamy: $y=2p'+p''$,

i daléj: $p'=\frac{4p''+1}{3}=p''+\frac{p''+1}{3}$.

Czyniąc nakoniec: $\frac{p''+1}{3}=p$, będzie:

$$p''=3p-1,$$
$$p'=p''+p=4p-1,$$
$$y=2(4p-1)+3p-1=8p-2+3p-1,$$

czyli:
$$y=11p-3.$$

Podobnież:
$$x=19p-5.$$

Że te wartości zadosyć czynią danemu równaniu, łatwo się przekonać przez bezpośrednie podstawienie.

Oznaczając szukaną liczbę, zadosyć czyniącą danym warunkom, głoską N, znajdziemy wyrażenie ogólne na tęż liczbę, podstawiając albo w wyrażenie:

$$N=11x+3.$$

wartość powyższą na x, albo też w wyrażenie:

$$N=19y+5,$$

wartość znalezioną na y. Wykonywając np. podstawienie pierwsze otrzymamy:

$$N=11(19p-5)+3=209p-52.$$

Do tegoż samego wypadku dojdziemy podstawiając wartość za y w wyrażenie drugie.

Wszystkie więc liczby takie, które przy dzielcniu przez 11 dają na resztę 3, a przy dzieleniu przez 19 dają na resztę 5, są zawarte w tym wzorze:

$$N=209p-52.$$

Najmniejszą z tych liczb znajdziemy, podstawiając zamiast p najmniejszą wartość, przy któréj odpowiednia wartość na N będzie dodatnią. Taką wartością tutaj będzie: $p=1$. Stąd najmniejsza liczba, mająca własności wymienione wyżéj będzie: 157. Oczywiście liczba tego rodzaju liczb jest nieskończenia wielka; otrzymywać je możemy podstawiając za p kolejno wartości: 2, 3, 4, ...

43*. *Zagadnienie.* Handlarz kupował konie i woły: za konia płacił 141 rubli, za wołu zaś 99 rs.; kupił tyle koni i tyle wołów, że za woły zapłacił o 18 rs. więcéj, aniżeli za konie. Ileż kupił koni a ile wołów?

Oznaczmy liczbą kupionych wołów głoską x, a liczbę kupionych koni głoską y. Wtedy za konie zapłacił $141y$, a za woły $99x$. Ponieważ woły kosztowały o 18 rs. więcéj, aniżeli konie, przeto:

$$99x = 141y + 18, \text{ czyli}$$
$$99x - 141y = 18. \qquad (1)$$

W celu rozwiązania tego równania, zauważmy najprzód, że wszystkie wyrazy jego mogą być podzielone przez 3; wykonajmy to dzielenie, przez to równanie się upraszcza. Będzie:

$$33x - 47y = 6.$$

Ponieważ 33 i 6 mają wspólny czynnik 3, przeto równanie można daléj uprościć (§ 34*) czyniąc:

$$y = 3u, \qquad (2)$$

gdzie u jest nową niewiadomą. Podstawiając tę wartość w równanie, otrzymamy:

$$33x - 47 \cdot 3u = 6;$$

dzieląc teraz całe równanie przez 3, będzie:

$$11x - 47u = 2 \qquad (3)$$

Z tego ostatniego równania otrzymujemy najprzód:

$$x = \frac{2 + 47u}{11} = 4u + \frac{2 + 3u}{11};$$

czyniąc zaś: $$\frac{2 + 3u}{11} = p',$$

mamy:

$$x = 4u + p',$$

$$u = \frac{11p' - 2}{3} = 3p' + \frac{2p' - 2}{3},$$

czyli: $$u = 3p' + \frac{2(p' - 1)}{3}.$$

Ponieważ 2 jest pierwsze względem 3, przeto czynimy:

$$\frac{p' - 1}{3} = p, \text{ skąd:}$$

$$u = 3p' + 2p,$$

i daléj: $$p' = 3p + 1.$$

Przez kolejne podstawiania, znajdziemy ostatecznie:

$$u = 11p + 3,$$
$$x = 47p + 13.$$

Podstawiając zaś tę wartość na u w równanie (2), otrzymamy:

$$y = 33p + 9.$$

Czyniąc teraz w tych wyrażeniach kolejno:

$$p = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

otrzymamy wartości na x i y:

$$x = 13, 60, 107, 154 \ldots\ldots$$

$$y = 9, 42, 75, 108 \ldots\ldots$$

Oczywistą jest rzeczą, że zagadnienie może mieć tylko odpowiedzi dodatnie, wyrażenia, znalezione wyżéj pokazują, że odpowiedzi tych jest nieskończenie wiele,—najmniejsza z nich: kupiono wołów 13, koni 9.

44*. *Zagadnienie.* Znaleść taki ułamek, któryby odjęty od ułamku $\frac{355}{113}$ dał na różnicę ułamek, mający za licznik 1 a za mianownik iloczyn z mianowników tych dwóch ułamków.

Oznaczając licznik szukanego ułamku przez x, a mianownik przez y, miéć będziemy równanie:

$$\frac{355}{113} - \frac{x}{y} = \frac{1}{113y}. \qquad (1)$$

Zniósłszy mianowniki otrzymamy:

$$355y - 113x = 1.$$

Rozwiązując to ostatnie równanie sposobem wielokrotnie wskazanym, znajdziemy następujące wartości na x i y:

$$x = 355p - 22,$$
$$y = 113p - 7.$$

Podstawiając za p jakiekolwiek liczby całkowite, dodatnie lub odjemne, otrzymamy nieskończoną liczbę wartości na x i y całkowitych, z których biorąc pierwszą za licznik, a odpowiednią drugą za mianownik miéć będziemy nieskończoną liczbę ułamków, zadosyć czyniących żądanym warunkom. I tak:

gdy; $p = \ldots\ldots$ —2, —1, 0, 1, 2, 3 .....

wtedy: $x = \ldots\ldots$ —732, —377, —22, 333, 688 .....

$y = \ldots\ldots$ —233, —120, — 7, 106, 219 .....

skąd:

$$\frac{x}{y} = \ldots\ldots \frac{732}{233}, \frac{377}{120}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{688}{219} \ldots\ldots$$

Zwracamy uwagę czytelnika na trzeci i czwarty z napisanych ułamków: należy porównać te wypadki z ułamkami w § 29*.

45*. Widzieliśmy w § 36*, że wartości całkowite na x, zadosyć czyniące wraz z odpowiedniemi wartościami na y, równaniu:

$$ax + by = k, \ldots\ldots \quad (1)$$

lub: $$ax - by = k, \ldots\ldots \quad (1)$$

gdzie a i b są pierwszemi względem siebie, stanowią postęp różnicowy, którego wykładnikiem jest współczynnik przy y, wartości zaś na y, stanowią postęp różnicowy, którego wykładnikiem jest współczynnik przy x, wzięty ze znakiem przeciwnym. Oczywistą jest rzeczą, że jeden i drugi postęp powinny być przedłużone w obie strony do nieskończoności.

Gdybyśmy więc znali jeden wyraz z postępu, zawierającego wartości na x, i odpowiedni wyraz z postępu zawierającego wartości na y, wtedy na zasadzie powyższego, możnaby było napisać oba postępy, a tym samym odszukać wszystkie rozwiązania. Innemi słowy: *jeżeli mamy jedną parę wartości, które, podstawione w równanie* (1) *zamiast x i y, sprawdzają je, wtedy możemy odrazu napisać ogólne wyrażenia na obie niewiadome, a tym samym wynaleść wszystkie rozwiązania.* Jakkolwiek zasada ta wypływa bezpośrednio z rozumowań w paragrafie powołanym wyżéj, to wszakże ze względu na jéj ważność, dowiedziemy jéj tutaj inną drogą.

Przypuśćmy więc, że mamy już dwie liczby A i B, które podstawione zamiast x i y odpowiednio, zadosyć czynią pierwszemu równaniu (1). Aby dowieść, że stąd możemy natychmiast napisać ogólne wyraże-

nia na x i y, zauważmy, że: podług założenia mamy najprzód:

$$aA + bB = k.$$

Odejmijmy tę równość, od równania:

$$ax + by = k,$$

otrzymamy:

$$ax - aA + by - bB = 0,$$

czyli $$ax - aA = bB - by;$$

wyłączając zaś na pierwszéj stronie a, a na drugiéj b za nawias, będzie:

$$a(x - A) = b(B - y),$$

skąd:

$$x - A = \frac{b(B-y)}{a} \qquad (2)$$

Ponieważ A jest liczbą całkowitą i x ma być także całkowite, przeto i druga strona powinna być całkowitą, czyli: $b(B-y)$ powinno być podzielne przez a. A że b jest pierwszem względem a, przeto $B-y$ samo przez się powinno być podzielne przez a (§ 3*). Należy zatém y wybrać takie, aby było:

$$\frac{B-y}{a} = p, \qquad (3)$$

gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą.

Podstawiając tę wartość w równanie (2), otrzymamy:

$$x - A = bp,$$

skąd:

$$x = A + bp. \qquad (4)$$

Z równania zaś (3) znajdziemy:

$$y = B - ap. \qquad (5)$$

Czyniąc tutaj kolejno:

$$p = \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$$

miéć będziemy:

$$x = \ldots\ldots A-2b, A-b, A, A+b, A+2b, A+3b\ldots.$$
$$y = \ldots\ldots B+2a, B+a, B, B-a, B-2a, B-3a\ldots.$$

A to dowodzi twierdzenia podanego wyżéj.

Gdybyśmy toż samo rozumowanie zastosowali do równania:

$$ax - by = k,$$

otrzymalibyśmy na wypadki ostateczne:

$$\left.\begin{aligned} x &= A + bp, \\ y &= B + ap; \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

skąd rozwiązania wszystkie byłyby zawarte w postępach następujących:

$$p = \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$$
$$x = \ldots\ldots A-2b, A-b, A, A+b, A+2b, A+3b \ldots.$$
$$y = \ldots\ldots B-2a, B-a, B, B+a, B+2a, B+3a \ldots.$$

46*. W tym przypadku, w którym zagadnienie rozwiązywane może miéć tylko odpowiedzi dodatnie, należy we wzorach (4), (5) i (6) poprzedniego paragrafu, wybrać tylko takie wartości na p, przy których x i y wypadłyby dodatnie. Pisząc postępy, jak wyżéj, łatwo wybrać te wartości; lecz można także odrazu wynaleść przy jakich znaczeniach na p, x i y będą dodatnie rozumowaniem następującém:

1-sze. Gdy dane równanie jest:

$$ax + by = k,$$

w którém a i b są dodatniemi, wtedy z nich wypada:

$$x = A + bp,$$
$$y = B - ap.$$

Wyłączając na drugiéj stronie pierwszéj równości b, na drugiéj stronie drugiéj równości a, za nawias, będzie:

$$x = b\left(p - \frac{-A}{b}\right),$$

$$y = a\left(\frac{B}{a} - p\right).$$

Te ostatnie wyrażenia pokazują, że aby wartość na x była dodatnią, należy p wybrać takie, aby było:

$$p > -\frac{A}{b}, \text{ (gdyż } b \text{ jest dodatnie).}$$

Również aby wartość na y była dodatnią, należy p wybrać takie, aby było:

$$p < \frac{B}{a}.$$

Tym sposobem oznaczyliśmy dwie granice, pomiędzy któremi p powinno być zawarte aby i x i y wypadły dodatnie. Stąd się pokazuje, że liczba rozwiązań dodatnich w tym przypadku będzie ograniczoną; nawet bardzo łatwo może się przytrafić, że nie będzie ani jednego rozwiązania dodatniego.

2-ie. Gdy dane równanie jest:

$$ax - by = k,$$

wtedy wartości na x i y są dane wzorami:

$$x = A + bp,$$
$$y = B + ap.$$

Wartości te można przedstawić w podobny sposób, jak w poprzednim przypadku, tak:

$$x = b\left(p - \frac{-A}{b}\right),$$

$$y = a\left(p - \frac{-B}{a}\right)$$

Aby x było dodatne, potrzeba aby było:

$$p > \frac{-A}{b};$$

aby znowuż y było dodatne, należy wybrać takie p, aby:

$$p > \frac{-B}{a}.$$

Biorąc więc p większe od większéj z tych liczb: $-\frac{A}{b}$ i $-\frac{B}{a}$ otrzymywać będziemy wartości na x i y dodatnie. Liczba zatém rozwiązań dodatnich będzie w tym przypadku nieograniczoną.

47*. Własności przybliżeń ułamków ciągłych podają nam łatwy sposób wynalezienia jednej pary liczb całkowitych, które podstawione w dane równanie zamiast x i y, zadosyć mu czynią. Wiemy zaś, z paragrafu 45*, że gdy jedną taką parę liczb całkowitych znamy, wtedy możemy odrazu napisać wyrażenia ogólne, i tym sposobem wynaleść wszystkie rozwiązania. Pokażemy teraz to zastosowanie teoryi ułamków ciągłych do rozwiązania równania nieoznaczonego:

$$ax + by = k \ldots . (1).$$

W tym celu rozwińmy ułamek $\frac{a}{b}$ na ułamek ciągły, i wynajdźmy wszystkie przybliżenia tegoż ułamku

ciągłego. Przedostatnie przybliżenie niech będzie $\frac{P}{Q}$, ostatnie zaś będzie oczywiście równe danemu ułamkowi zwyczajnemu $\frac{a}{b}$. Znajdźmy następnie różnicę pomiędzy $\frac{a}{b}$ (czyli przybliżeniem ostatniem) i $\frac{P}{Q}$, t. j.:

$$\frac{a}{b} - \frac{P}{Q}.$$

Podług własności przybliżeń, dowiedzionej w § 22*, różnica ta jest równa ułamkowi, którego licznikiem jest $+$ lub $-$ jedność, a mianownikiem: iloczyn z mianowników tychże przybliżeń. Będzie więc:

$$\frac{a}{b} - \frac{P}{Q} = \frac{\pm 1}{bQ},$$

czyli znosząc mianowniki:

$$aQ - b \,.\, P = \pm 1.$$

Pomnóżmy teraz obie strony tego równania przez k, *wzięte z takim znakiem, aby po wykonaniu mnożenia wypadło na drugiéj stronie k z takim znakiem, z jakim wchodzi do drugiéj strony równania* (1).

Zrobiwszy to otrzymamy:

$$a \,.\, Qk - b \,.\, Pk = k.$$

(Znaki opuszczamy tutaj, dla nierozróżniania zbyt wielu przypadków).

Tę ostatnią równość możemy tak napisać:

$$a \,.\, (Qk) + b \,.\, (-Pk) = k.$$

Porównywając ją z równaniem (1), widzimy że toż równanie zostaje sprawdzone przez podstawienie

w niem zamiast x i y odpowiednio: Qk i $-Pk$. Dwie te liczby przeto stanowią pierwszą parę rozwiązań, i możemy przyjąć, że:

$$A = Qk\,;\; B = -Pk.$$

Mając zaś te wartości, możemy wynaleść wszystkie rozwiązania.

48*. Przykład. Weźmy równanie rozwiązane już w § 39*, przykład 4-ty:

$$12x + 17y = 479.$$

Ułamek $\frac{12}{17}$ zamieńmy na ułamek ciągły; będzie:

$$\frac{12}{17} = 0 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}.$$

Znajdźmy wszystkie przybliżenia; otrzymamy:

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{12}{17}.$$

Weźmy teraz różnicę pomiędzy całkowitą wartością ułamku ciągłego i przedostatniém przybliżeniem; będzie:

$$\frac{12}{17} - \frac{5}{7} = \frac{12\,.\,7 - 17\,.\,5}{17\,.\,7} = \frac{84-85}{17\,.\,7} = \frac{-1}{17\,.\,7},$$

skąd: $$12\,.\,7 - 17\,.\,5 = -1.$$

Pomnóżmy obie strony téj ostatniéj równości przez -479; otrzymamy:

$$12\,.\,(-7\,.\,479) + 17\,.\,(5\,.\,479) = 479.$$

Porównywając tę równość z daném równaniem widzimy, że liczby: -7×479 i 5×479, podstawione zamiast x i y zadosyć mu czynią. Możemy więc przyjąć, że:

$$A = -7 \times 479 = -3353, \text{ i } B = 3 \times 479 = 2395.$$

Ogólne wyrażenia zatém na x i y będą:

$$x = 17p - 3353 \; ; \; y = -12p + 2395.$$

Podstawiając za p kolejno $0,1,2 \ldots . -1, -2, \ldots .$ otrzymamy wszystkie rozwiązania.

Porównywając wyrażenia otrzymane obecnie z wyrażeniami na x i y, znalezionemi w § 39*, wydaje się, że wartości, jakie wyrażenia te przedstawiają, są różne. Czyniąc tu bowiem:

	$p = \ldots .$	0,	1 ,	2 , 3, ...
otrzymujemy:	$x = \ldots .$	—3353,	3336 ,	....
	$y = \ldots .$	2395,	2383 ,	....

Lecz różnica ta jest tylko pozorną, gdyż tak wyrażenia § 39*, jak i wyrażenia teraźniejsze przedstawiają postępy różnicowe o nieskończonéj liczbie wyrazów; inne części tych postępów mamy przed oczyma czyniąc $p = 0, 1, \ldots .$ w wyrażeniach § 39*, a inne w paragrafie obecnym. Dosyć jest podstawić za p liczbę dostatecznie wielką w wyrażeniach: $x = 17p - 3353$, i $y = -12p + 2395$, aby otrzymać też same wyrazy, które są napisane jako rozwiązania równania danego w § 39*. Mianowicie: jeżeli uczynimy $p = 197$, wtedy otrzymamy: $x = -4$, $y = 31$; to jest też same liczby, od których zaczęliśmy pisać rozwiązania w wymienionym tyle razy paragrafie. Łatwo wyrażenia $x = 17p - 3353$ i $y = -12p + 2395$ przerobić

na wyrażenia: $x = 30 + 17p$, i: $y = 7 - 12p$. W tym celu należy tylko zwrócić uwagę na to, że: $3353 = 17 \cdot 199 - 30$, i $2395 = 12 \cdot 199 + 7$. Jeżeli te ostatnie wartości podstawimy w wyrażenia powyższe, otrzymamy:

$$x = 17p - 17 \cdot 199 + 30 = 17(p - 199) + 30,$$
$$y = -12p + 12 \times 199 + 7 = -12(p - 199) + 7.$$

Podstawiając zamiast $p - 199$ w powyższych wyrażeniach jedną głoskę, oznaczającą jakąkolwiek liczbę całkowitą, otrzymamy wyrażenia § 39*.

49*. Gdyby dane zadanie prowadziło do równania, zawierającego więcéj niż dwie niewiadome, lub gdyby były dwa równania z trzema niewiadomemi i t. d., wtedy zasady wyłożone poprzednio mogą być zastosowane do tych przypadków, jak to się pokaże z rozwiązania następujących zadań:

Z a d a n i e. Znaleźć taką liczbę, która podzielona przez 11 da na resztę 3, podzielona przez 19 da na resztę 5, podzielona zaś przez 29 da na resztę 10.

W zagadnieniu § 42* znaleźliśmy, że liczba zadosyć czyniąca dwóm pierwszym warunkom powinna być téj postaci: $N = 209p + 157$. Ostatni warunek, trzeci, wymaga nadto aby taż liczba była téj postaci: $N = 29p' + 10$. Porównywając te dwie wartości z sobą wypada:

$$209p + 157 = 29p' + 10,$$
$$\text{czyli: } 209p - 29p' = -147.$$

Liczby zatém p i p' powinny być tak dobrane, aby czyniły zadosyć powyższemu równaniu. Rozwiązując je, którymkolwiek z podanych sposobów, znajdziemy następujące wartości na p i p':

$$p = 29u - 735,$$
$$p' = 209u - 5292,$$

dzie u oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Podstawiając jedno z tych wyrażeń, w wartość odpowiednią na N, otrzymamy, że N powinno być téj postaci:

$$N = 6061u - 153458.$$

Najmniejszą z liczb, zawartych w téj postaci otrzymamy, czyniąc $u = 26$, skąd będzie $N = 4128$.

50*. Zadanie. Rozwiązać w liczbach całkowitych dwa równania:

$$\begin{aligned} 2x + 14y - 7z &= 341, \\ 10x + 4y + 9z &= 473. \end{aligned} \quad \ldots (1).$$

Wyrugujmy z tych dwóch równań x. W tym celu pomnóżmy pierwsze równanie przez 5 i następnie odejmijmy od niego równanie drugie; otrzymamy:

$$66y - 44z = 1232,$$

dzieląc zaś obie strony przez 22, będzie:

$$3y - 2z = 56. \ldots . (2)$$

Oczywistą jest rzeczą, że te wartości całkowite na y i z, które zadosyć czynią równaniom danym, muszą zadosyć czynić i równaniu (2); stosując do tego ostatniego znane sposoby, otrzymamy:

$$y = 2p, \; z = 3p - 28. \ldots . (3)$$

Gdyby więc było dane do rozwiązania równanie (2), wtedy powyższe wyrażenia zawierały by odpowiedź zupełną na pytanie. Lecz wartości na y i z nietylko powinny być całkowite same, ale nadto jeszcze takie, aby przy nich i wartość na x wypadła

całkowita; i z tego powodu za p można wziąć nie każdą liczbę całkowitą. W celu znalezienia odpowiednich wartości na p, podstawmy wartości na y i z z równości (3) w jedno z równań danych (1), np. w pierwsze; otrzymamy:

$$2x + 7p = 145;$$

i z tego równania znajdźmy wszystkie wartości całkowite na x i p, które zadosyć mu czynią. Postępując znanemi sposobami znajdziemy:

$$x = 69 + 7p', \; p = 1 - 2p',$$

gdzie p' oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Podstawiając teraz wartość za p w równaniu (3), wyrazimy ostatecznie wszystkie trzy niewiadome x, y i z za pomocą liczby całkowitéj dowolnéj p'. Mianowicie będzie:

$$x = 69 + 7p'; \; y = 2 - 4p'; \; z = -25 - 6p'.$$

Czyniąc w tych wyrażeniach p' równém kolejno wszystkim liczbom całkowitym od 0 do $+\infty$ i $-\infty$, otrzymamy wszystkie rozwiązania całkowite danych równań.

51*. Gdybyśmy nadto chcieli znaleść nietylko wartości całkowite ale i dodatnie, wtedy należałoby wybrać tylko takie wartości na p', przy których jednocześnie byłoby:

$$7p' > -69, \text{ skąd: } p' > -9\tfrac{6}{7},$$

$$4p' < 2, \text{ skąd: } p' < \tfrac{1}{2},$$

$$6p' < -25; \text{ skąd: } p' < -4\tfrac{1}{6}.$$

Widzimy stąd, że jedyne wartości na p', które czynią zadosyć powyższym warunkom, są: $p' = -5$, -6, -7, -8 i -9. Podstawiając je w wyrażenia na x, y i z, otrzymamy na te ostatnie ilości wartości następujące:

$$x = 34, 27, 20. 13, 6;$$
$$y = 22, 26, 30, 34, 38;$$
$$z = 5, 11, 17, 23, 29.$$

Gdyby dane były trzy równania z czterema niewiadomémi, lub cztery równania z pięcioma niewiadomémi, lub w ogóle ilekolwiek równań, w których liczb niewiadomych byłoby o jedność większą od liczby równań, wtedy w podobny sposób postępując, jak w przykładzie paragrafu poprzedniego, wyrazilibyśmy wszystkie niewiadome za pomocą jednéj liczby całkowitéj dowolnéj p, liczba tylko działań jakie należałoby wykonać, byłaby większą.

52*. Jeżeli jest jedno równanie z trzema lub większą liczbę niewiadomych, lub w ogóle jeżeli jest danych m równań z $m + n$ niewiadomemi, wtedy stopień nieoznaczoności (jeżeli się tak można wyrazić), będzie jeszcze większy. Gdyby np. było dane jedno równanie z trzema niewiadomemi, wtedy do wyrażenia ogólnego każdéj z niewiadomych potrzeba dwóch ilości dowolnych, całkowitych; w przypadku jednego równania z czterema niewiadomemi potrzeba będzie trzech ilości całkowitych dowolnych, i t. d. Wynalezienie takich wyrażeń ogólnych nie przedstawia żadnych szczególnych trudności; następujący przykład pokazuje, jak w takich razach należy postępować:

Rozwiązać równanie:

$$10x + 9y + 7z = 58 \ldots . (1)$$

w liczbach całkowitych i dodatnich. Znajdźmy wartość na tę niewiadomą, przy któréj współczynnik jest najmniejszy, jak tutaj na z. Będzie:

$$z = \frac{58 - 9y - 10x}{7};$$

a odłączając całkowitą:

$$z = 8 - y - x + \frac{2 - 2y - 3x}{7}.$$

Aby wartość na z wypadła całkowita, potrzeba aby ułamek na drugiéj stronie ostatniego równania był całkowitym. Uczyńmy przeto:

$$\frac{2 - 2y - 3x}{7} = p,$$

gdzie p oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Otrzymamy stąd:

$$y = \frac{2 - 3x - 7p}{2} = 1 - x - 3p - \frac{x + p}{2}.$$

A że i ułamek $\frac{x+p}{2}$ powinien być także równy liczbie całkowitéj, przeto:

$$\frac{x+p}{2} = p', \text{ skąd: } x = -p + 2p'.$$

Podstawiając tak znalezioną wartość w wyrażenie na y, i tę ostatnią wraz z wartością na x w wyrażenie na z, otrzymamy *ostatecznie* wyrażenia wszystkich trzech niewiadomych za pomocą dwóch liczb całkowitych dowolnych p i p'. Będą one takie:

$$x = -p + 2p'; \; y = 1 - 2p - 3p'; \; z = 7 + 4p + p' \ldots . (2).$$

Podstawiając za p i p' wszystkie liczby całkowite, dodatnie i odjemne, znajdziemy rozwiązania.

53*. Do wyrażeń ogólnych można także dojść i inną drogą, którą wskażemy na ogólném równaniu:

$$ax+by+cz+du+\ldots\ldots+mv=k \ldots (1)$$

zawierającém n niewiadomych: $x, y, z \ldots v$.

Najprzód należy tu zauważyć, że jeżeli wszystkie współczynniki: $a, b, c \ldots m$ mają jakikolwiek wspólny dzielnik, to i k musi być podzielne przez tenże sam dzielnik, inaczéj rozwiązanie równania w liczbach całkowitych jest niemożliwe (§ 32*). Podzieliwszy obie strony równania przez największy wspólny dzielnik dla $a, b, c \ldots m$ i k, otrzymamy równanie, w którém współczynniki $a, b, c \ldots m$ i k są pierwszemi względem siebie; lecz może się przytrafić, że albo współczynniki $a, b, c \ldots m$ po dwa brane mają jeszcze wspólne dzielniki, albo też że przynajmniéj dwa z nich są względnie pierwszemi. Ten ostatni przypadek jest najczęstszym i o nim tylko tutaj mówić będziemy. Przypuśćmy więc, że dwa współczynniki a i b nie mają żadnego wspólnego dzielnika. Przenosząc na drugą stronę równania (1) wszystkie wyrazy, z wyjątkiem tych dwóch, które mają za współczynniki a i b, otrzymamy:

$$ax+by=k-cz-du-\ldots-mv.$$

Uczyńmy dla krótkości:

$$M=k-cz-du-\ldots-mv,$$

będzie:

$$ax+by=M \ldots (2)$$

Na zasadzie tego co było powiedzianem w § 50* możemy zawsze znaleść dwie liczby A i B takie, że będzie:

$$aA+bB=1; \ldots$$

mnożąc zaś obie strony tego ostatniego równania przez M, otrzymamy:

$$a \cdot AM+b \cdot BM=M \ldots (3)$$

Odejmując równanie (3) od równania (2) będzie:

$$a(x-AM)+b(y-BM)=0.$$

Stosując do tego równania rozumowanie § 41*, otrzymamy na ogólne rozwiązanie:

$$x=AM+bw\ ;\ y=BM-aw,$$

gdzie w oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą. Podstawiając teraz w te wyrażenia zamiast M, jego wartość, znajdziemy ostatecznie:

$$\left.\begin{aligned} x&=A(k-cz-du-\ldots-mv)+bw,\\ y&=B(k-cz-du-\ldots-mv)-aw. \end{aligned}\right\} \S\ (4)$$

Tu niewiadome x i y są wyrażone za pomocą ilości całkowitéj dowolnéj w i $(n-2)$-ch niewiadomych $z, u \ldots v$, które mogą także przyjmować dowolne znaczenia całkowite.

Dla objaśnienia powyższego sposobu, weźmy równanie rozwiązane w poprzednim paragrafie:

$$10x+9y+7z=58.$$

Ponieważ 10 i 9 są pierwsze względem siebie, przeto:

$$10x+9y=58-7z=M.$$

Daléj znajdujemy, że:

$$10 \cdot 1+9 \cdot (-1)=1\ ,$$

skąd:

$$10 \cdot (M)+9 \cdot (-M)=M,$$

i następnie jako rozwiązania danego równania:

$$x = M + 9w,$$
$$y = -M - 10w,$$

czyli, podstawiając zamiast M jego wartość:

$$x = 58 - 7z + 9w,$$
$$y = -58 + 7z - 10w. \quad \S\ (5)$$

W wyrażeniach tych z równie jak i w mogą przebiegać wszelkie wartości całkowite dodatnie i odjemne.

Z porównania wyrażeń (5) z wyrażeniami na x i y poprzedniego paragrafu możnaby sądzić na pierwszy rzut oka, że one dają zupełnie inne rozwiązania, gdyż są innéj postaci. Gdybyśmy jednak napisali wszystkie odpowiedzi podług jednych i drugich wzorów, przekonalibyśmy się, że one zawierają też same liczby, tylko w innym porządku. Tak np. z wzorów (5) przy $w = 0$ mamy rozwiązania:

$$x = 58\ ;\ y = -58\ ;\ z = 0;$$

też same liczby otrzymamy z wzorów (2) § poprzedniego, czyniąc: $p = -8$ i $p' = 25$. Gdybyśmy we wzorach (2) § 52* uczynili $p = 0$, $p' = 0$, wtedy byłoby:

$$x = 0\ ,\ y = 1\ ,\ z = 7.$$

Też same wartości mieć będziemy z wyrażeń (5), jeżeli uczynimy $z = 7$, $w = -1$. I tak daléj. Możnaby zresztą ogólne wyrażenia na niewiadome przedstawić jeszcze pod inną postacią i zawsze otrzymalibyśmy z tych wyrażeń też same rozwiązania.

Rozbiór innych przypadków rozwiązania tego rodzaju równań, mianowicie gdy pomiędzy współczynnikami $a, b, \ldots, m$ nie ma dwóch pierwszych względem siebie, musimy pozostawić dziełom obszerniejszym.

54*. Gdybyśmy chcieli oznaczyć jakie wartości należy nadać na te ilości dowolne, które wchodzą do wyrażeń ogólnych na niewiadome, aby wartości wszystkich niewiadomych wypadły dodatnie, również gdybyśmy chcieli z góry oznaczyć liczbę rozwiązań dodatnich danego równania o n niewiadomych, wtedy natrafilibyśmy na zadanie bez porównania trudniejsze od rozwiązywanego w poprzednim paragrafie. Bez wątpienia w wielu przypadkach szczególnych, na to zadanie można dosyć łatwo odpowiedzieć; lecz ogólne zadanie jest trudne i związane z zadaniem, o rozkładaniu liczb całkowitych na składniki. W przypadku jednego równania z trzema niewiadomemi:

$$ax + by + cz = k,$$

najłatwiejszym sposobem wynalezienia rozwiązań dodatnich zdaje się być taki: Z danego równania mamy:

$$ax + by = k - cz.$$

W tém ostatniém równaniu podstawiajmy za z kolejno:

$$1, 2, 3, \ldots \text{ i t. d.}$$

i wynajdźmy przy każdém podstawieniu odpowiednie wartości całkowite i dodatnie na x i y. Otrzymamy tym sposobem wszystkie żądane rozwiązania.

Nakoniec zastosowanie równań nieoznaczonych do rozwiązania zadań, odnoszących się do reguły mieszaniny, czytelnik znajdzie dobrze wyłożone

w wybornem dziele St. Kramsztyka: „Arytmetyka handlowa“, str. 224 § 101.

55*. Jakkolwiek rozwiązywanie równań nieoznaczonych stopnia drugiego już do nas nie należy, wszakże ze względu na to, że w zagadnieniach egzaminowych przytrafiają się niekiedy najprostsze równania tego rodzaju, podamy tutaj kilka zadań, pokazujących jak w takich przypadkach należy postępować.

Zadanie I-sze. Znaleść takie dwie liczby, którychby iloczyn, dodany do ich sumy wynosił 79.

Oznaczając przez x i y liczby szukane, mamy podług warunków zadania:

$$(1)\ldots xy + x + y = 79, \text{ skąd:}$$

$$y = \frac{79-x}{x+1},$$

$$\text{a następnie: } y = -1 + \frac{80}{x+1}.$$

Ta ostatnia równość pokazuje nam, że x powinno być takie, aby $x+1$ było jednym z dzielników liczby 80. Wynajdując wszystkie dzielniki téj ostatniéj liczby sposobem podanym w § 10* dodatku, znajdziemy, że one mają takie wartości: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80; więc otrzymamy wszystkie wartości całkowite na x, czyniące zadosyć danemu równaniu, przyrównywając $x+1$ kolejno do każdego z tych dzielników. Tym sposobem otrzymamy następującą tablicę, zawierającą wartości, rozwiązujące równanie (1):

dzielniki ...	1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80,
$x =$	0, 1, 3, 4, 7, 9, 15, 19, 39, 79,
$y =$	79, 39, 19, 15, 9, 7, 4, 3, 1, 0.

Ponieważ zaś rozwiązania w drugiéj połowie powyższych szeregów powtarzają się, przeto mamy właściwie pięć różnych rozwiązań danego zadania:

jedna liczba $= 0, 1, 3, 4, 7$
druga „ $= 79, 39, 19, 15, 9.$

56*. W podobny do powyższego sposób można rozwiązać w ogólności równanie:

$$xy + ax + by = k; \ldots (1)$$

z niego otrzymamy najprzód:

$$y(x+b) = k - ax,$$

a następnie:

$$y = \frac{-ax+k}{x+b},$$

skąd odłączając całkowitą wypadnie:

$$y = -a + \frac{ab+k}{x+b} \ldots . (2)$$

To ostatnie wyrażenie pokazuje nam, że $x+b$ powinno być dzielnikiem liczby $ab+k$. Jeżeli więc rozłożymy liczbę $ab+k$ na iloczyn dwóch czynników $m\,n$, i ostatnie równanie (2) napiszemy w téj postaci:

$$y = -a + \frac{m\,n}{x+b},$$

wtedy, czyniąc: $x+b=m$, skąd: $x=m-b$, otrzymamy, $y = -a+n$, czyli: $y=n-a$.

Dla każdego zatém sposobu rozłożenia liczby $ab+k$ na iloczyn dwóch czynników m i n znajdziemy dwie wartości na x i dwie wartości na y. Z tych rozwiązań jedno będzie:

$$x = m - b,\ y = n - a;$$

drugie zaś otrzymamy czyniąc:

$$x+b=n \text{ , skąd:}$$
$$x=n-b \text{ , } y=m-a.$$

Rozłożenia zaś liczby $ab+k$ na dwa czynniki m i n łatwo się znajdują, jeżeli już mamy liczbę tę rozłożoną na czynniki pierwsze.

57*. Gdyby przy iloczynie niewiadomych xy znajdował się jakikolwiek współczynnik różny od 1, wtedy należałoby podany wyżéj sposób postępowania zmienić. Mianowicie: przypuśćmy, że dane równanie do rozwiązania jest:

$$axy=bx+cy+k, \ldots . \quad (1)$$

Wtedy:

$$y=\frac{bx+k}{ax-c}.$$

Pomnóżmy obie strony tego ostatniego równania przez a, będzie:

$$ay=\frac{abx+ak}{ax-c},$$

skąd, przez odłączenie całkowitéj:

$$ay=b+\frac{bc+ak}{ax-c} \ldots . \quad (2)$$

Z wyrażenia, znajdującego się na drugiéj stronie téj równości, wyprowadzić możemy wniosek, że $ax-c$ powinno być dzielnikiém liczby $bc+ak$. Jeżeli więc licznik $bc+ak$ przedstawimy pod postacią iloczynu dwóch czynników mn, wtedy x należy tak wybrać aby $ax-c$ było równe jednemu z tychże czynników t. j.

$$ax-c=m \text{ , lub } =n.$$

Jeżeli zatrzymamy uwagę naszą na czynniku m, wtedy z równości pierwszéj wypada, że x powinno nadto czynić zadosyć warunkowi:

$$x=\frac{m+c}{a},$$

a więc $m+c$ powinno być podzielne przez a, zatém z czynników, na które można rozłożyć liczbę $bc+ak$, te tylko należy wybrać, które po dodaniu do nich c. dadzą liczby podzielne przez a. Objaśnimy to przykładem:

Niech będzie równanie:

$$5xy=2x+3y+18;$$

stąd najprzód:

$$y=\frac{2x+18}{5x-3},$$

a następnie:

$$5y=\frac{10x+90}{5x-3}=2+\frac{96}{5x-3}.$$

Należy więc teraz znaleść te dzielniki liczby 96, które dodane do 3 dadzą summy podzielne przez 5. Wynajdując wszystkie dzielniki liczby 96, otrzymamy:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96;

z nich tylko trzy, mianowicie: 2, 12, 32 mają powyżéj przytoczoną własność; te trzy zatém dzielniki mogą być tutaj użyte. Jeżeli więc:

1. $5x-3=2$, wtedy: $5y=50$,
skąd: $x=1$; $y=10$;
2. $5x-3=12$; wtedy: $5y=10$,
skąd: $x=3$; $y=2$;

3. $5x - 3 = 32$; wtedy: $5y=5$,
skąd: $x=7$, $y=1$.

Ponieważ nie jest naszém zadaniem wykładać teoryą równań nieoznaczonych stopnia 2-go, przeto na tych najprostszych przypadkach ograniczamy powyższą wzmiankę:

Zadania.

1) Rozwiązać następujące równania:

a) $8x+65y=81$; *b*) $17x+23y=183$; *c*) $7x+10y=297$; *d*) $13x+19y=1170$; *e*) $7x+17y=408$; *f*) $123x+567y=5028$.

((*a*) $x=2$, $y=1$; (*b*) $x=4$, $y=5$; (*c*) $x=41$, $y=1$; (*d*) $x=90$; $y=0$; (*e*) $x=51$, $y=3$; (*f*) $x=-4$, $y=8$).

W tych samych równaniach znaleść wszystkie odpowiedzi dodatnie.

2) Rozwiązać równania:

a) $7x-9y=29$; *b*) $9x-11y=8$; *c*) $19x-5y=119$; *d*) $17x-49+8=0$.

((*a*) $x=8$, $y=3$; (*b*) $x=7$, $y=5$; (*c*) $x=11$. $y=18$; (*d*) $x=37$, $y=13$).

3) Rozwiązać równania:

(*a*) $5x+7y+4=56$; (*b*) $y=13+\frac{4}{13}(15-x)$;

(*c*) $17x+53y-123=441-19x+15y$ (*d*) $91x=221y$; (*e*) $8x=11y$;

(*f*) $3x=5y+1$; (*g*) $17x=11y+86$; (*h*) $89x-144y=1$;

(*i*) $11x=13y=36y-3x=133$; (*j*) $\frac{73x+17}{19}$

$\frac{58y-56}{21}$.

[(*a*) $x=2$, $y=6$; (*b*) $x-2$, $y=17$; (*c*) $x=3$; $y=12$; (*d*) $x=17$, $y=7y$;

(*f*) $x=2$, $y=1$, (*g*) $x=7$, $y=3$; (*h*) $x=89$, $y=55$; (*i*) $x=1$, $y=3$;

(*j*) $x=145$, $y=203$].

4) Rozwiązać następujące układy dwóch równań z trzema niewiadomemi: nadto znaleść rozwiązania dodatnie:

(*a*) $x+3y+5z=44$, (*b*) $x+y-4z=19$, (*c*) $5x+4y+z=272$;
$3x+5y+7z=68$; $3x+7y-8z=3$; $8x+9y+3z=656$:

(*c*) $x+2y+3a=50$, (*d*) $x+y+2z=17$,
$4x-5y-6z=-66$; $x+3y+4z=28$;

[(*a*) $x=1, 2, 3$; $y=6, 4, 2$; $z=5, 6, 7$; (*b*) $x=1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36$; $y=8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$; $z=7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$. (*c*) $x=7$, $y=8$, $z=9$. (*d*) niema rozwiąz. (*e*) $x=1$, $y=51$; $z=63$].

5) Rozwiązać następujące równania z trzema niewiadomemi:

(*a*) $3x+5y+7z=67$; (*b*) $5x=7y=9z$; (*c*) $12x=15y=20z$; (*d*) $17x+23y+3z=200$.

[(*a*) $x=15$, $y=3$, $z=1$ i t. d. rozwiązań dodatnich będzie 14]. § 54*.

6) Liczbę 200 rozłożyć na takie dwie części, że pierwsza z nich podzielona przez 6 da na resztę 5, a druga podzielona przez 11 da na resztę 4. (185, 15 ; 119, 81 ; 53. 147).

7) Znaleść najmniejszą z liczb, które podzielone przez 28 dają na resztę 21, a podzielone przez 19 dają na resztę 17 (245).

8) Znaleść ogólne wyrażenia na liczby, które będąc podzielone przez 3, 5, 7 dadzą na odpowiednie reszty 2, 4, 6 . ($105p+104$).

9) Wiedząc po 1-sze, że summa cyfr, stanowiących pewną liczbę trzycyfrową wynosi 20, po 2-gie, że jeżeli od téj liczby odejmiemy 16 i resztę podzielimy przez 2, wtedy otrzymamy liczbę, złożoną z tychże samych cyfr, ale napisanych w porządku odwrotnym znaleść tę liczbę (974).

10) Znaleść ułamek mający tę własność, że jeżeli każdy z jego wyrazów powiększymy o 3, wtedy otrzymamy ułamek równy $\frac{5}{8}$. $\left(\frac{2}{5}, \frac{7}{13} \cdots\right)$

11) Znaleść trzy ułamki właściwe, stanowiące postęp arytmetyczny, których mianowniki byłyby 6, 9, 18, i których summa wynosiłaby $2\frac{2}{3}$ $\left(\frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{17}{18}\right)$.

12) Summa trzech liczb dodatnich wynosi 20; jeżeli pierwszą z tych liczb pomnożymy przez 5, drugą przez 8, trzecią przez 7 i iloczyny te dodamy, wtedy otrzymamy na summę 141. Znaleść te liczby: (x=1, 2, 3, 4, 5, 6 ; y = 3, 5, 7, 9, 11, 13 ; z = 16, 13, 10, 7, 4, 1).

13) Ma ktoś kule ołowiane dwojakiego rodzaju kul, pierwszego rodzaju ma 50 sztuk i każda z nich waży $1\frac{1}{3}$ łuta, każda kula drugiego rodzaju waży $2\frac{1}{2}$ łuta, i tych kul posiada on 25 sztuk. Ileż kul jednego i drugiego rodzaju powinien wziąć, aby ulać 40 kul, z których każda ma ważyć po $1\frac{3}{4}$ łuta? (45, 30, 15 ; 4, 12, 20).

14) Ogrodnik ma mniej niż 1000 drzew do posadzenia. Jeżeli je sadzić będzie rzędami tak, że w każdym rzędzie znajdować się będzie 37 sztuk, wtedy

pozostanie mu 8 drzew; jeżeli zaś sadzić je będzie rzędami po 43 w rzędzie, wtedy pozostanie mu 11 drzew. Ileż ma drzew? (785).

15. Ktoś otrzymał ze sklepu rachunek, w którym znajdowała się następująca pozycya: „*) funtów po 2 rs. 18 kop. kosztują: *) 98 rs. 38 kop". W miejscach, gdzie znajdują się gwiazdki (*) cyfry były zupełnie nieczytelne. Pytanie jakież tam cyfry powinny być napisane?

(Równanie do rozwiązania: $(10x + 1) \cdot 218 = 10000y + 9838$, czyli: $109x - 500y = 481$; x=9 , y=1).

16. Ułamek $\frac{17}{72}$ rozłożyć na summę dwóch ułamków, których mianowniki byłyby: 8 i 9 . $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{9}\right)$.

17. Znaleść n liczb całkowitych dodatnich, stanowiących postęp różnicowy i takich, że ich summa równa się n^2.

(Równanie do rozwiązania: $2x + (n-1)y = 2n$ Gdy n jest *parzyste*, wtedy pierwszy wyraz x postępu szukanego, będzie równy 1, wykładnik zaś y będzie równy 2. Gdy n jest *nieparzyste*, wtedy pierwszy wyraz postępu będzie $\frac{n+1}{2}$, a wykładnik 1, lub pierwszy wyraz 1, a wykładnik 2).

18. 180 rubli rozdzielono pomiędzy pewną liczbę mężczyzn, kobiet i dzieci w ten sposób, że każdy mężczyzna dostał 24 rs., każda kobieta 21 rs. i każde dziecko 9 rs. Iluż było mężczyzn, ile kobiet a ile dzieci?

(Mężczyzn: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5;
kobiet: 1, 4, 7, 2, 5, 3. 1, 2;
dzieci: 15, 8, 1, 10, 3, 5, 7, 2).

19. Dwa postępy arytmetyczne mają jednakowe wyrazy pierwsze; ostatni wyraz w pierwszym postępie jest 39, a summa wszystkich wyrazów tegoż postępu jest 207; ostatni wyraz drugiego post. 124, a summa wyrazów tegoż drugiego postępu jest 917. Znaleść ile jest wyrazów w każdym postępie i jaki jest wyraz pierwszy.

(Wyraz pierwszy 7; liczby wyrazów 9 i 14 § 57*).

20. Dwa postępy arytmetyczne mają jednakowe wyrazy ostatnie. W pierwszym wyraz pierwszy jest równy 9 a summa wyrazów 25; w drugim wyraz pierwszy jest 8 a summa wyrazów 36. Znaleść wyraz ostatni i liczby wyrazów w tych postępach.

(Liczba wyrazów w pierwszym 2, 5, 10, 14.....
„ „ w drugim 3, 8, 18, 28.....)

IV. O Logarytmach.

58*. Zastanawiając się nad działaniami algebraicznemi, przychodzimy do przekonania, że każde z tych działań prowadzi także do działania odwrotnego. Następujące rozważanie bliżéj tę rzecz objaśni:

Wystawmy sobie 3 liczby a, b i c, które są z sobą w pewnym związku. Rozbierzmy też takie pytanie: Jakiemi działaniami, wykonanemi na dwóch z tych liczb, możemy otrzymać liczbę trzecią? Najprostszém z tych działań jest dodawanie; otóż może

się najprzód przytrafić, że liczba np. c powstaje z dodania dwóch pozostałych liczb a i b, tak, że będzie:

$$a + b = c.$$

Gdybyśmy teraz w przypuszczeniu, że c jest summą dwóch liczb a i b chcieli znaleść z wiadoméj téj summy c i jednego ze składników, np. b, drugi składnik a, wtedy przyszlibyśmy do działania odwrotnego dodawania, t. j. do odejmowania. Mielibyśmy mianowicie:

$$a = c - b.$$

I ponieważ $a + b = b + a$, przeto toż samo działanie, które nas prowadzi do znalezienia a z wiadomych c i b, doprowadzi nas i do znalezienia b z wiadomych c i a. Innemi słowy: dodawanie ma tylko jedno działanie odwrotne: odejmowanie. Przypadek, w którym b byłoby większe od c równości: $a = c - b$ doprowadzi nas do pojęcia liczb odjemnych.

Następny sposób połączenia dwóch z liczb a, b i c w celu otrzymania trzeciéj, jest mnożenie. Mianowicie: liczba np. c może powstać przez pomnożenie dwóch liczb a i b, t. j.:

$$ab = c.$$

Gdybyśmy odwrotnie z wiadomego iloczynu c i jednego z mnożników np. b, chcieli znaleść mnożnik drugi a, wtedy doszlibyśmy do działania odwrotnego mnożenia, mianowicie dzielenia; byłoby wówczas:

$$a = \frac{c}{b}.$$

I tutaj, ponieważ porządek czynników nie zmienia wielkości iloczynu, t. j. ponieważ $ab = ba$, przeto toż samo działanie służyło by i do znalezienia czynnika b

z wiadomego iloczynu c i drugiego czynnika a. Mnożenie ma więc także tylko jedno odwrotne działanie, mianowicie dzielenie. Rozważanie tego przypadku, w którym b nie mieści się całkowicie w c prowadzi nas do pojęcia liczb ułamkowych.

Nakoniec, jedna z tych liczb, np. c, może być wypadkiem podnoszenia do potęg; mianowicie: liczba c może być równą jednéj z pozostałych liczb, np. a, podniesionéj do potęgi, któréj wykładnikiem jest druga liczba b. . Tym sposobem: $a^b = c$. W téj równości a jest pierwiastkiem, c potęgą, b zaś wykładnikiem téj potęgi.

Gdybyśmy teraz odwrotnie, z wiadoméj potęgi c chcieli znaleść liczbę a lub b, wtedy natrafilibyśmy na dwa, zupełnie różne działania, z tego mianowicie powodu, że a^b nie jest wcale równe b^a. Jeżeli z wiadoméj potęgi c i wykładnika b, chcemy znaleść pierwiastek a, wtedy przychodzimy do jednego działania odwrotnego względem podnoszenia do potęg, mianowicie: wyciąganie pierwiastku. Rozwiązanie różnych przypadków w tém działaniu prowadzi nas do rozróżnienia ilości rzeczywistych i urojonych; wymiernych i niewymiernych.

Lecz jeżeli chcemy w inny sposób odwrócić zadanie o podnoszeniu do potęg i zadajemy sobie pytanie: do jakiéj potęgi należy podnieść jedną z liczb danych a, aby otrzymać drugą liczbę daną c, wtedy natrafiamy na zupełnie innego rodzaju działanie od poprzedniego, działanie, które oddzielnego nazwiska nie otrzymało. Aby odpowiedzieć na to pytanie, przychodzimy do rozważania równań, w których niewiadoma jest wykładnikiem. Oznaczając tę niewiadomą, jak zwykle, głoską x, wypadnie nam w tym razie rozwiązać równanie:

$$a^x = c.$$

Podnoszenie więc do potęg ma dwa działania odwrotne: jedno z nich jest wyciąganiem pierwiastków; drugie, nie mające oddzielnego nazwiska, prowadzi nas do równań wykładniczych, i jak to zaraz zobaczymy, do logarytmów.

59*. Jakkolwiek nie będziemy tu wykładać sposobu rozwiązania równań wykładniczych, z tém wszystkiém pokażemy najprzód główne własności wyrażenia wchodzącego do takich równań i nazwanego w matematyce: wyr. *wykładniczem*. Wyrażenie to jest takiéj postaci: a^x, gdzie a oznacza jakąkolwiek liczbę stałą różną od zera i jedności, a x może przybierać wszelkie wartości: całkowite, ułamkowe lub niewymierne, dodatnie lub odjemne.

Wystawmy sobie, że podstawiamy kolejno w wyrażenie a^x zamiast x wszelkie liczby zaczynając od $-\infty$ aż do $+\infty$, przechodząc przez wszystkie stopnie wielkości. Wtedy otrzymamy taki szereg wartości:

Przy: $x = -\infty \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots + \infty, \ldots$ (1)

będzie: $a^x = \frac{1}{a^\infty} \ldots \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a} 1, a, a^2, a^3, a^4 \ldots a^\infty \ldots$ (2)

Jakkolwiek a w ogólném wyrażeniu może mieć znaczenie dodatnie lub odjemne, to wszakże dla celu, jaki mamy na widoku potrzebny jest tylko ten przypadek, gdy a oznacza liczbę dodatnią, zresztą jakąkolwiek, i ten téż tylko przypadek rozpatrywać będziemy.

W szeregu (2), wyraz 1, odpowiadający znaczeniu $x = 0$ jest niezależny od téj wartości szczególnéj, jaką może miéć a; lecz pozostałe części tegoż szeregu w zupełności zależą od wartości a. I pod tym względem należy rozróżnić dwa przypadki: gdy $a > 1$ lub gdy $a < 1$.

1-sze. Gdy $a > 1$. Szereg (2) przedstawia wtedy szereg liczb rosnących od lewéj strony w prawą, nie trudno się przekonać, że liczby te, w miarę tego jak x powiększa się nieograniczenie wzrastają także nieograniczenie, tak że przy $x = \infty$ i a^x ma wartość nieskończenie wielką. W rzeczy saméj: jeżeli $a > 1$, wtedy możemy przyjąć że $a = 1 + k$, gdzie k oznacza pewną ilość dodatnią. Zatém $a^x = (1 + k)^x$. Opierając się na wzorze Newton'a, (§ 427) możemy powiedzieć, że:

$$(1 + k)^x > 1 + k,$$

Do powyższej nierówności możemy dojść i następném rozumowaniem: Ponieważ: $(1+k)^2 = 1+2k+k^2$, przeto: $(1+k)^2 > 1 + 2k$, gdyż summa $1 + 2k$ jest widocznie mniejszą od $1 + 2k + k^2$. Lecz mnożąc obie strony téj nierówności przez ilość dodatnią $1 + k$, otrzymamy: $(1 + k)^3 > (1 + 2k)\ (1 + k)$. A że: $(1+2k)\ (1+k) = 1 + 3k + 2k^2$, przeto iloczyn: $(1+2k)\ (1 + k) > 1 + 3k$; więc tymbardziéj:

$$(1 + k)^3 > 1 + 3k.$$

Powtarzając toż samo rozumowanie, znajdziemy, że: $(1 + k)^4 > 1 + 4k$; i w ogóle przez nietrudną indukcyą otrzymamy ostatecznie nierówność napisaną wyżéj:

$$(1 + k)^x > 1 + kx. \qquad (3)$$

Ta nierówność pokazuje nam, że jakkolwiek k byłoby małe, możemy zawsze znaleść na x ilość dostatecznie wielką taką, że $(1 + k)^x$ będzie większe od każdéj ilości, jaką zechcemy pomyśléć. Tak up. gdyby $k = 0{,}001$ i gdybyśmy chcieli znaleść przy jakich wartościach na x wyrażenie $(1 + 0{,}001)^x$ będzie większe np. od 1000; wtedy należałoby tylko rozwiązać równanie:

$$1 + 0{,}001x = 1000,$$

z którego by wypadło: $x = 999000$,

co pokazuje że przy $x = 999000$ ilość $(1+0{,}001)^x > 1000$, a tymbardziéj przy większych wartościach na x. I toż samo odnosi się do każdéj innéj wartości na k.

Możemy zatem z tego wyprowadzić wniosek, że jeżeli $a > 1$, wtedy wyrazy szeregu (2), zaczynając od wyrazu środkowego 1, będą powiększać się nieograniczenie, tak, że wartości $x = \infty$, odpowiadać będzie wartość $a^x = \infty$. Przeciwnie zaś zaczynając od tegoż samego wyrazu 1 w lewą stronę wyrazy będą maleć i to nieograniczenie, tak, że dla $x = -\infty$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = 0.$$

W uważanym zatem przypadku a większego od 1, wartości $x = 0$, odpowiada $a^x = 1$, wartości $x = \infty$ odpowiada $a^x = \infty$, i wartości $x = -\infty$ odpowiada $a^x = 0$.

2-re. Gdy $a < 1$, wówczas wyrazy szeregu (2) zaczynając od wyrazu średniego 1 w prawą stronę będą się ciągle zmniejszać, i to nieograniczenie, tak, że dla $x = \infty$, odpowiednia wartość: $a^x = 0$. W rzeczy saméj: gdy $a < 1$, wtedy $\frac{1}{a}$ będzie > 1. Mo-

żemy więc uczynić: $\frac{1}{a} = 1 + k$, gdzie k oznacza pewną ilość dodatnią.

Stąd będzie: $a = \frac{1}{1+k}$, i następnie $a^x = \frac{1}{(1+k)^x}$.

A że, jak to widzieliśmy w poprzednim ustępie niniejszego paragrafu $(1+k)^x$ zaczynając od x dostatecznie wielkiego, rośnie nieograniczenie, tak że staje się większe od wszelkiéj ilości mogącéj się pomyśléć, więc $\frac{1}{(1+k)^x}$, czyli a^x, staje się mniejszém od wszelkiéj ilości mogącéj się pomyśléć, czyli dąży nieograniczenie do 0 i przy $x = \infty$ staje się zerem. Odwrotnie zaczynając od wyrazu 1 w lewą stronę wyrazy szeregu (2) rosną i to nieograniczenie, tak że przy $x = -\infty$, $a^x = \infty$. [Gdyż $\frac{1}{a} = 1 + k$ i t. d.

60*. W następstwie przyjmiemy, że $a > 1$ jest zarazem całkowite; ten jeden bowiem przypadek ma dla nas znaczenie praktyczne. Czyniąc to przypuszczenie, zobaczymy teraz jakim sposobem możnaby odpowiedzieć na pytanie: czemu się równa wykładnik téj potęgi, do któréj należy podnieść daną liczbę a, aby otrzymać inną daną liczbę c; innemi słowami jak wynaleść x z równania:

$$a^x = c. \qquad (1)$$

Przypuszczamy tu nadto, że i c jest całkowite.

W celu rozwiązania tego równania podstawiajmy zamiast x kolejno wszystkie liczby całkowite, zaczynając od 0. Może się przytrafić, że dojdziemy do takiéj liczby całkowitéj, która zadosyć uczyni równaniu (1);

wtedy zadanie będzie rozwiązane. Lecz zazwyczaj takiéj liczby całkowitéj nie znajdziemy, zawsze jednak dojdziemy do takiéj liczby m, że podstawiając ją zamiast x w równanie (1), będzie

$$a^m < c,$$

podstawiając zaś zamiast x następną liczbę całkowitą $m+1$, otrzymamy wypadek większy od c, czyli:

$$a^{m+1} > c.$$

Wtedy oczywiście prawdziwa wartość na x będzie zawartą pomiędzy m i $m+1$, czyli równać się będzie m więcéj pewna ilość mniejsza od 1. Możemy więc uczynić:

$$x = m + \frac{1}{x_1}. \qquad (2)$$

Podstawiając tę wartość za x w równaniu (1), otrzymamy:

$$a^{m+\frac{1}{x_1}} = c,$$

czyli:

$$a^m \cdot a^{\frac{1}{x_1}} = c,$$

skąd:

$$a^{\frac{1}{x_1}} = \frac{c}{a^m},$$

oznaczając zaś dla krótkości ilość $\frac{c}{a^m}$ głoską ∂ będzie:

$$a^{\frac{1}{x_1}} = \partial;$$

nakoniec podnosząc obie strony do potęgi x_1, otrzymamy:

$$\partial^{x_1} = a. \qquad (3)$$

Czyniąc tu kolejno: $x_1 = 0, 1, 2, 3.....$ i t. d. przyjdziemy znowuż do takich dwóch po sobie następujących liczb m_1 i $m_1 + 1$, że:

$$\partial^{m_1} < a,$$

a: $$\partial^{m_1+1} > a.$$

Wartość więc x_1 będzie zawartą pomiędzy liczbami m_1 i $m_1 + 1$; możemy zatém uczynić:

$$x_1 = m_1 + \frac{1}{x_2}. \qquad (4)$$

Podstawiając daléj tę wartość na x_1 w równanie (3) miéć będziemy:

$$\partial^{m_1 + \frac{1}{x_2}} = a,$$

czyli:

$$\partial^{m_1} \cdot \partial^{\frac{1}{x_2}} = a,$$

skąd:

$$\partial^{\frac{1}{x_2}} = \frac{a}{\partial^{m_1}}.$$

Czyniąc dla krótkości $\frac{a}{\partial^{m_1}} = f$, i podnosząc obie strony tego równania do potęgi x_2, otrzymamy:

$$f^{x_2} = \partial. \qquad (5)$$

Z tego równania przez kolejne podstawianie zamiast x_2 liczb całkowitych $0, 1, 2, ...$ znajdziemy w dalszym ciągu dwie liczby po sobie następujące m_2 i $m_2 + 1$ także, że będzie

$$f^{m_2} < \partial;\ f^{m_2+1} > \partial.$$

Wtedy możemy uczynić: $x_2 = m_2 + \frac{1}{x_3}$ i t. d., działanie to prowadzić będziemy dotąd, dopóki albo się ono nie skończy, albo też dopóki nie dojdziemy do żądanego stopnia przybliżenia. Podstawiając teraz wartość na x_1 w równanie (2), następnie wartość na x_2 i t. d. wyrazimy ostatecznie wartość na x, w postaci ułamku ciągłego:

$$x = m + \cfrac{1}{m_1 + \cfrac{1}{m_2 + ...}}$$

Jeżeli wartości na x, odpowiadająca równaniu (1) będzie wymierną, wtedy ułamek ten wypadnie skończony; w przeciwnym razie będzie on nieskończonym, lecz z oznaczenia coraz to większéj liczby ułamków cząstkowych możemy tak daleko zbliżyć się do istotnéj wartości na x, jak tylko chcemy.

61*. Pozostaje nam jeszcze odpowiedziéć na to pytanie, kiedy wartość na x zadosyć czyniąca równaniu, w tem przypuszczeniu, że a i c są całkowite. Aby odpowiedziéć na to pytanie, przypuśćmy, że $x = \frac{p}{q}$ gdzie p i q są liczbami całkowitemi. Podstawiając tę wartość za x w równanie $a^x = c$, będzie: $a^{\frac{p}{q}} = c$, skąd $a^p = c^q$. Równość ta pokazuje, że a^p i c^q składają się z tych samych czynników pierwszych; — a że a^p zawiera tylko te czynniki pierwsze, które wchodziły w skład a; c^q zawiéra tylko te czynniki pierwsze, które wchodziły w skład c, przeto a i c powinny się składać z jednakowych czynników pierwszych. Niech

będą te czynniki r, s, t.....; wtedy $a = r^{\alpha} . s^{\beta} . t^{\gamma} ....$; $c = r^{\alpha'} . s^{\beta'} . t^{\gamma'} .....$

Równość $a^p = c^q$, zamieni się na taką:

$$(r^{\alpha} . s^{\beta} . t^{\gamma} ...)^p = (r^{\alpha'} . s^{\beta'} . t^{\gamma'} ...)^q ,$$

skąd: $r^{\alpha p} s^{\beta p} t^{\gamma p} ... = r^{\alpha' q} . s^{\beta' q} . t^{\gamma' q} .....$

Rozumowanie takie, jakiego użyliśmy w § 8* pokazuje, że każdy z czynników r, s, t i t. d., powinien wchodzić jednakową liczbę razy na obu stronach powyższéj równości. Stąd wypada, że:

$$\alpha p = \alpha' q \; ; \; \beta p = \beta' q \; ; \; \gamma p = \gamma' q ....,$$

i następnie:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{p}{q} \; ; \; \frac{\beta'}{\beta} = \frac{p}{q} \; ; \; \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{p}{q} \; . \; . \; . \; .$$

Te ostatnie równości mogą być tak napisane:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = . \; . = \frac{p}{q} \; .$$

I odwrotnie: gdyby a i c, po rozłożeniu na czynniki pierwsze, dały takie rozłożenia:

$$a = r^{\alpha} . s^{\beta} . t^{\gamma} ... \; ; \; c = r^{\alpha'} . s^{\beta'} . t^{\gamma'} ...,$$

$$\text{gdzie: } \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} ,$$

wtedy wartość na x, z równania $a^x = c$ wypadłaby wymierną. Gdyż czyniąc wówczas:

$$x = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} \; . \; . \; . \; , \text{ byłoby:}$$

$$\alpha' = \alpha x \; ; \; \beta' = \beta x \; ; \; \gamma' = \gamma x \; . \; . \; .$$

Stąd daléj mielibyśmy:

$$a^x = (r^{\alpha} s^{\beta} t^{\gamma} ...)^x = r^{\alpha x} s^{\beta x} t^{\gamma x} ,$$

czyli: $a^x = r^{\alpha'} s^{\beta'} t^{\gamma'} = c.$

Rozumowania powyższe pokazują nam więc że, aby x z równania $a^x = c$ było wymierne, potrzeba najprzód: aby czynniki pierwsze, z których składają się a i c były jednakowe; 2-ie aby stosunki wykładników odpowiednich czynników w a i w c były równe.

62*. Po objaśnieniach, danych w poprzednich paragrafach, możemy przystąpić do określenia logarytmu i wyłożenia głównych jego własności. Widzieliśmy, że można zawsze znaleść wartość na x taką, która zadosyć uczyni równaniu:

$$a^x = N .$$

gdzie a oznacza pewną stałą ilość dodatnią, a N jakąkolwiek liczbę.

W tém równaniu a nazywa się *zasadą*, N *liczbą* a x jéj *logarytmem*. To jest:

Logarytmem liczby N przy zasadzie a nazywamy wykładnik x téj potęgi, do któréj należy podnieść zasadę, aby otrzymać liczbę daną.

Podług tego określenia wartość logarytmu pewnéj liczby zależy od zasady; zbiór logarytmów wszystkich liczb, obliczonych przy pewnéj zasadzie, nazywa sią *układem logarytmów* przy téjże zasadzie.

Dla oznaczenia logarytmu przyjmiemy takie znakowanie:

$$x = Log_a N \; ,$$

które czyta się tak: *x równa się logarytmowi liczby N przy zasadzie a.*

U spodu trzech liter początkowych wyrazu *Logarytm*, pisać będziemy jako wskazówkę, ilość ozna-

czającą zasadę. W przypadkach, w których nie ma żadnej wątpliwości co jest zasadą oznaczenie zasady w wyrażeniu $Log_a N$ jest zbyteczne i zazwyczaj opuszcza się. Wtedy powyższe wyrażenie pisać będziemy tak: *Log* N, czytając *Logarytm N.*

63*. Z powyższego określenia logarytmu i z uwagi na szeregi (1) i (2) § 59* wypada bezpośrednio:

1. Że logarytm 1 jest przy każdéj zasadzie równy 0.

2. Że logarytm zasady jest zawsze równy 1.

3. Że przy zasadzie większéj od jedności logarytmy liczb większych od jedności są dodatnie, logarytmy zaś liczb mniejszych od jedności są odjemne.

4. Że w tym przypadku gdy $a > 1$, logarytm nieskończoności jest liczbą nieskończenie wielką dodatnią, logarytm zaś zera jest liczbą nieskończenie wielką odjemną.

5. Że przy zasadzie mniejszéj od jedności, logarytmy liczb większych od jedności są odjemne, logarytmy zaś liczb mniejszych od jedności są dodatnie.

6. Nakoniec, że w tym samym przypadku, gdy $a<1$, logarytm nieskończoności jest liczbą nieskończenie wielką odjemną, a logarytm zera jest liczbą nieskończenie wielką dodatnią.

W dalszym ciągu wykładu rozważać będziemy wyłącznie ten przypadek, w którym $a>1$. Używając więc oznaczeń, wskazanych w poprzednim paragrafie, możemy własności dopiéro co wymienione wyrazić tak:

$$1)\ Log_a 1 = 0,$$
$$2)\ Log_a a = 1,$$
$$3)\ Log_a \infty = \infty,$$
$$4)\ Log_a 0 = -\infty.$$

64*. Główne własności logarytmów są następujące:

1-sza Logarytm iloczynu równa się summie logarytmów czynników.

W rzeczy saméj: niech będzie danych ilekolwiek liczb: N, N_1, N_2 .... ; oznaczmy dla krótkości głoską x logarytm liczby N przy pewnéj zasadzie a, podobnie $x_1 = Log_a N_1$, $x_2 = Log_a N_2$..... Podług określenia logarytmu wartości x, x_1, x_2.... są oznaczone następującemi równaniami, w których a jest zasadą:

$$a^x = N$$
$$ax_1 = N_1$$
$$ax_2 = N_2$$
$$\ldots\ldots$$

Pomnóżmy odpowiedniemi stronami te wszystkie równania; będzie:

$$a^x \cdot ax_1 \cdot ax_2 \ldots = N \cdot N_1 \cdot N_2 \ldots,$$

czyli: $a^{x+1\ x+x_2+\cdots} = N \cdot N_1 \cdot N_2 \ldots$

Ta ostatnia równość pokazuje nam, że zasadę a potrzeba podnieść do potęgi $x+x_1+x_2+\ldots$ aby otrzymać iloczyn $N \cdot N_1 \cdot N_2 \ldots$; z określenia więc logarytmu wypada, że:

$Log_a (N \cdot N_1 \cdot N_2 \ldots) = x+x_1+x_2+\ldots$, czyli

(1) $Log_a (N \cdot N_1 \cdot N_2 \ldots) = Log_a N + Log_a N_1 + Log_a N_2 + \ldots$

a równość ta wyraża nam własność, któréj chcieliśmy dowieść.

2-ga. *Logarytm ilorazu jest równy różnicy pomiędzy logarytmem dzielnéj i logarytmem dzielnika.*

Niech będą dane dwie liczby N i N_1, które należy podzielić w ten sposób, że N jest dzielną, a N_1 dzielnikiem. Dowiedziemy, że:

$$(2) \qquad Log_a\left(\frac{N}{N_1}\right) = Log_a N - Log_a N_1 .$$

W tym celu oznaczmy dla krótkości głoską x logarytm liczby N przy pewnéj zasadzie a, głoską zaś x_1 logarytm liczby N_1 przy téjże saméj zasadzie. Wtedy x i x_1 wypadną z równań: (§ 61)

$$a^x = N \; ; \; a^{x_1} = N_1 .$$

Podzielmy obie strony pierwszego z tych równań przez odpowiednie strony równania drugiego; otrzymamy:

$$a^{x-x_1} = \frac{N}{N_1} .$$

Ta ostatnia równość pokazuje, że należy a (zasadę) podnieść do potęgi $x-x_1$, aby otrzymać iloraz $\frac{N}{N_1}$. Podług określenia więc logarytmu, $x-x_1$ jest logarytmem liczby $\frac{N}{N_1}$ przy zasadzie a, czyli:

$$Log_a\left(\frac{N}{N_1}\right) = x - x_1 \; ;$$

a że: $x = Log_a N$; $x_1 = Log_a N_1$, przeto ostatecznie:

$$Log_a\left(\frac{N}{N_1}\right) = Log_a N - Log_a N_1 .$$

3-cie. *Logarytm potęgi jest równy iloczynowi logarytmu liczby podnoszonéj do potęgi przez wykładnik potęgi.*

To jest: jeżeli przez a oznaczymy pewnę zasadę logarytmów, wtedy:

$$Log_a (N^p) = p \, . \, Log_a N \ldots (3)$$

W rzeczy saméj: oznaczmy dla krótkości głoską x, logarytm liczby N przy zasadzie a; wtedy x wypadnie z równania:

$$a^x = N .$$

Podnieśmy obie strony tego równania do potęgi p ; będzie:

$$(a^x)^p = N^p \text{ , czyli: (§ 228)}$$
$$a^{px} = N^p .$$

Ta ostatnia równość pokazuje nam, że jeżeli zasadę a podniesiemy do potęgi px wtedy otrzymamy liczbę N^p. Więc px jest logarytmem liczby N^p przy zasadzie a, czyli:

$$Log_a (N^p) = px \text{ , albo:}$$
$$Log_a (N^p) = p \, Log_a N .$$

4-ta. *Logarytm pierwiastku jest równy ilorazowi, powstałemu z podzielenia logarytmu liczby, z któréj wyciągamy pierwiastek, przez wykładnik pierwiastku.*

To jest: $Log_a (\sqrt[q]{N}) = \frac{Log_a N}{q} = \frac{1}{q} \, . \, Log_a N .$

W rzeczy saméj: jeżeli przez x oznaczymy logarytm liczby N przy pewnéj zasadzie a, wtedy toż x będzie określone równaniem:

$$a^x = N .$$

Wyciągnijmy pierwiastek potęgi q z obu stron tego równania; otrzymamy:

$$\sqrt[q]{a^x} = \sqrt[q]{N} \text{ , czyli: (§ 241).}$$
$$a_q^x = \sqrt[q]{N} .$$

Ta ostatnia równość pokazuje, że $\frac{x}{q}$ jest logarytmem liczby $\sqrt[q]{N}$ przy zasadzie a ; to jest:

$$Log_a\left(\sqrt[q]{N}\right)=\frac{x}{q}\text{ , lub nakoniec:}$$

$$Log_a\left(\sqrt[q]{N}\right)=\frac{1}{q}\,Log_a\,N\ldots(4)$$

65*. Własności logarytmów pokazane w parafie poprzednim są wielkiéj wagi, i one to są przyczyną, dla któréj dzisiaj każdy rachunek, cokolwiek dłuższy, wykonywa się za pomocą logarytmów. Łatwo to zrozumiemy, jeżeli wystawimy sobie, że przy pewnéj danéj zasadzie mamy już obliczone logarytmy wszystkich liczb i ułożone w tablice w ten sposób, że jedna kolumna zawiéra same liczby, druga zaś odpowiednie im logarytmy. Gdybyśmy chcieli znaleść iloczyn ilukolwiek czynników, wtedy moglibyśmy iloczyn ten wynaleść tak: odszukalibyśmy najprzód w tablicy logarytmy wszystkich czynników oddzielnie, następnie dodalibyśmy logarytmy: na zasadzie własności 1-széj § 64* summa tychże logarytmów byłaby równą logarytmowi iloczynu. Odszukawszy następnie w tablicy liczbę, odpowiednią temu ostatniemu logarytmowi, mielibyśmy żądany iloczyn. Tym sposobem mnożenie zostałoby sprowadzone do działania tego samego rodzaju, ale prostszego, mianowicie do dodawania. Podobnież na zasadzie drugiéj własności, zamiast dzielić dwie liczby dla znalezienia ich ilorazu, moglibyśmy odszukać w tablicy logarytmowéj najprzód logarytm dzielnéj, potém logarytm dzielnika, następnie odjąć

od pierwszego logarytm drugi i otrzymalibyśmy logarytm ilorazu. Liczba, wzięta z tablicy, odpowiadająca temu ostatniemu logarytmowi, byłaby szukanym ilorazem. W podobny sposób podnoszenie do potęgi moglibyśmy sprowadzić do mnożenia logarytmu przez wykładnik potęgi; wyciąganie zaś pierwiastku do dzielenia logarytmu liczby, z któréj chcemy wyciągnąć pierwiastek, przez wykładnik pierwiastku.

Uważając więc dodawanie, mnożenie i podnoszenie do potęg za działania jednego rodzaju, odejmowanie zaś, dzielenie i wyciąganie pierwiastków za działania drugiego rodzaju, możemy powiedzieć, że za pomocą logarytmów działanie każdego rodzaju zostaje sprowadzone do działania tegoż samego rodzaju, ale o stopień jeden niższego.

Z tego widzimy jak wielką wagę dla ułatwienia i skrócenia rachunków arytmetycznych mają tablice logarytmowe, zawierające logarytmy wszystkich liczb przy obranéj z góry zasadzie.

66*. Logarytm każdéj liczby, jak to wypada bezpośrednio z samego określenia, zależy od zasady. Otóż może się przytrafić potrzeba przejścia z jednego układu logarytmów do drugiego, to jest wypada rozwiązać zadanie: jakim sposobem, mając już obliczone logarytmy wszystkich liczb przy jednéj zasadzie, znaleść logarytmy tych liczb przy innéj zasadzie. Do rozwiązania tego pytania przyjdziemy przez następne rozumowanie:

Przypuśćmy, że już mamy obliczone logarytmy liczb przy zasadzie a ; logarytm więc pewnéj liczby N jest nam wiadomy. Chcemy zaś znaleść logarytm téjże saméj liczby N przy innéj zasadzie b ; czyli ma-

my: $Log_a N$, szukamy zaś: $Log_b N$. Uczyńmy dla krótkości $y = Log_b N$; wtedy y należy oznaczyć z równania:

$$b^y = N.$$

Biorąc logarytmy obu stron tego równania *przy zasadzie a*, otrzymamy:

$$y\ Log_a b = Log_a N,$$

skąd:

$$y = \frac{1}{Log_a b}\ Log_a N,$$

albo:

$$Log_b N = \frac{1}{Log_a b}\ Log_a N. \quad (1)$$

Ta równość pokazuje nam, że aby otrzymać logarytm liczby N przy nowéj zasadzie b, należy tylko logarytm téjże saméj liczby przy zasadzie dawnéj a pomnożyć przez czynnik stały dla całego nowego układu logarytmów i równy ułamkowi, którego licznikiem jest jedność, a mianownikiem logarytm zasady nowéj (b), wzięty przy zasadzie dawnéj (a). Ten ułamek $\frac{1}{Log_a b}$, przez który należy pomnożyć logarytmy wszystkich liczb przy zasadzie a, aby otrzymać logarytmy tychże liczb przy zasadzie b, nazywa się *modułem*.

Dwa są główne układy logarytmów używane w rachunkach. Jeden, którego zasada oznacza się przez e, nazywa się *układem naturalnym*; drugi którego zasada jest 10, nazywa się *układem zwyczajnym*. Pierwszy nazywają jeszcze układem logarytmów Nepera (od nazwiska pierwszego wynalazcy logarytmów, który wyłożył swoje pomysły w dziele ogłoszoném w roku 1614 pod tytułem: Mirifici Logarithmorum canonis descriptio); drugi zaś układem logarytmów Briggsa (od nazwiska profesora w Osfordzie, który odpowiednie tablice logarytmów ogłosił pierwszy w r. 1624 pod tytułem: Arithmetica logarithmica).

Zasada logarytmów naturalnych, która jak to powiedzieliśmy wyżéj, oznacza się we wszystkich rachunkach przez e, jest liczbą niewymierną i wyrażoną szeregiem nieskończonym:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

Obliczając wartość przybliżoną téj ilości znajdziemy, że: $e = 2,718281828\ldots\ldots$ Jest to więc ilość, któréj logarytm naturalny jest równy 1. Jakkolwiek zasada ta jest niewymierną, to wszakże logarytmy liczb łatwiéj przy niéj obliczają się, aniżeli przy innéj zasadzie. Jakim sposobem to być może, i za pomocą jakiego rozważania przychodzimy do takiéj zasady logarytmów: wykładać tu nie będziemy, przechodzi to bowiem zamiar, jaki założyliśmy sobie w tym rozdziale. Wspomnimy tylko, że w teoretycznych rachunkach prawie wyłącznie natrafiamy na logarytmy naturalne.

Podług przyjętego wyżéj sposobu pisania logarytmów, należałoby logarytm naturalny jakiéjkolwiek liczby N pisać tak: $Log_e N$. Lecz w tym razie opu-

szczać będziemy wskazówkę e, a za to pierwszą literę L pisać będziemy małą. Wyrażenie więc: $log\ N$ należy rozumieć tak: logarytm naturalny N.

Drugim głównym układem logarytmów, jest ten układ, w którym za zasadę przyjęto 10. Jego to wyłącznie używamy w rachunkach praktycznych, gdyż posiada on pewne szczególne własności, które zaraz poznamy i które pochodzą z tego, że w nim zasadą jest taż sama liczba, jaka służy za podstawę zwykłego sposobu liczenia, to jest 10. Tablice logarytmowe, zwykle używane, zawierają właśnie takie logarytmy, i z tego powodu nazywają jeszcze logarytmy zwyczajne: *logarytmami tablicowemi.*

Przy oznaczaniu ich, wypadałoby używać takiego sposobu znakowania: $Log_{10} N$; lecz i tutaj wskazowkę 10 opuszcza się i pisze się wprost: $Log\ N$. W dwóch więc tych układach logarytmów: naturalnym i zwyczajnym, zasada przy pisaniu opuszcza się; w innych przypadkach należy ją zawsze pisać.

Widzieliśmy na początku tego paragrafu jakim sposobem przejść od jednego układu logarytmów do drugiego. Stosując równanie (1) do przejścia od logarytmów naturalnych do logarytmów zwyczajnych, mamy:

$$Log\ N = \frac{1}{log\ 10} log\ N\ ,$$

czyli: logarytm zwyczajny jakiéjkolwiek liczby jest równy jéj logarytmowi naturalnemu, pomnożonemu przez ułamek, którego licznikiem jest 1, a mianownikiem logarytm naturalny 10. Ponieważ znaleziono za pomocą rachunków, których tu przytaczać nie możemy, że $log\ 10 = 2{,}302\ 585\ 092...$, przeto $\frac{1}{log\ 10} = 0{,}434\ 294\ 81....$ Tę ostatnią ilość oznacza się zwykle głoską M, i ją to specyalnie nazywamy *modułem logarytmów.* Jest więc:

$$Log\ N = M\ log\ N\ ...\ (2)$$

gdzie: $M = 0{,}434\ ....$

To ostatnie równanie (2) daje nam możność znalezienia logarytmu zwyczajnego, skoro logarytm naturalny pewnéj liczby jest już wiadomy.

Odwrotnie, gdybyśmy chcieli z logarytmu zwyczajnego odnaleść logarytm naturalny liczby, wtedy z równania (2) otrzymalibyśmy:

$$log\ N = \frac{1}{M}\ Log\ N.$$

A że: $M = \frac{1}{log\ 10}$, przeto: $\frac{1}{M} = log\ 10 = 2{,}302...$

stąd: $log\ N = 2{,}302\ ...\ Log\ N\ ....\ (3)$

67*. W dalszym ciągu wykładu zajmować się już będziemy wyłącznie logarytmami zwyczajnemi, jako jedynie używanemi w rachunkach liczbowych. Ponieważ w nich za zasadę układu bierze się 10, przeto logarytm jakiéjkolwiek liczby N wypada z równania:

$$10^x = N.$$

Podług tego co było dowiedzione w § 61*, wykładnik x będzie wymiernym tylko wtedy, gdy N składa się z tych samych czynników pierwszych co i 10. A że $10 = 2 \cdot 5$, przeto logarytmy tylko takich liczb będą wymierne, które się składają z samych czynników 2 i 5. Ogólna postać tych liczb jest: $2^\alpha \cdot 5^\beta$. Lecz podług drugiego warunku § 61*, potrzeba jeszcze aby: $\frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{1}$, czyli: $\alpha = \beta$. Stąd tylko dla liczb téj postaci: $N = 2^\alpha \cdot 5^\alpha = (2 \cdot 5)^\alpha$, czyli dla liczb: $N = 10^\alpha$ logarytmy będą wymierne. Widzimy więc, że w układzie zwyczajnym tylko *logarytmy zupełnych potęg 10 są wymierne: dla wszystkich pozostałych liczb całkowitych, są niewymierne.*

Wychodząc z równania: $10^x = N$, otrzymujemy na logarytmy całkowitych potęg 10 takie wartości:

$$Log\,1 = 0\,;\ Log\,10 = 1\,;\ Log\,100 = 2\,;\ Log\,1000 = 3\,;\ldots$$

i w ogóle: $Log\ 10^m = m$.

Również ponieważ:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1\,;\ 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01\,;\ 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001\,;$$

i w ogóle: $10^{-m} = \frac{1}{10^m}$, przeto:

$$Log\ 0{,}1 = -1\,;\ Log\ 0{,}01 = -2\,;\ Log\ 0{,}001 = -3\ldots$$

i t. d., w ogóle: $Log\ \frac{1}{10^m} = -m$.

To są jedyne logarytmy wymierne; logarytmy wszystkich liczb pozostałych są niewymierne.

68*. Logarytmy niewymierne mogą być wyrażone tylko w przybliżeniu. Przybliżona wartość

każdego logarytmu wyraża się w ułamku dziesiętnym; im większéj liczby cyfr dziesiętnych, dokładnie oznaczonych, użyje się do wyrażenia jéj, tym stopień przybliżenia będzie większy. Oznaczone tak wartości przybliżone logarytmów liczb całkowitych, układają się następnie w tablice, których sposób użycia zaraz poznamy.

Każdy logarytm składa się z dwóch części: całkowitéj, znajdującéj się przed przecinkiem i cyfr dziesiętnych. Część całkowita logarytmu nazywa się jego *cechą*, część dziesiętna zaś: *mantysą*. Tak np. gdy czytamy, że $Log\ 5137 = 3{,}7107096$, to w nim 3 jest cechą, pozostała zaś część ułamkowa jest mantysą. W tablicach zazwyczaj są pomieszczone tylko mantysy cechy są opuszczone, gdyż z samego wejrzenia na daną liczbę łatwo ich się domyśleć. W rzeczy saméj nie trudno pokazać, że *cecha logarytmu zawiéra zawsze w sobie tyle jedności, ile jest cyfr w części całkowitéj danéj liczby, mniéj jedna*. Gdyż skoro: $Log\ 1 = 0$, $Log\ 10 = 1$, przeto logarytmy wszystkich liczb większych od 1, a mniejszych od 10, czyli jednocyfrowych w swojéj części całkowitéj, będą większe od 0, a mniejsze od 1. Wyrażać się więc będą tak: 0 i część dziesiętna. Cechą ich zatem będzie 0. Podobnie: ponieważ $Log\ 10 = 1$, $Log\ 100 = 2$, przeto logarytmy wszystkich liczb większych od 10, a mniejszych od 100 wyrażać się będą tak: 1 z ułamkiem dziesiętnym, czyli cechą ich będzie 1 i t. d. W ogóle jeżeli jakakolwiek liczba N zawiera m cyfr w swojéj części całkowitéj, wtedy liczba ta jest większą od 10^{m-1}, a mniejszą od 10^m. Logarytm jéj przeto będzie większy od $Log\ 10^{m-1}$), czyli od $m-1$, a mniejszy od $Log\ (10^m)$, czyli

od m. Jego część całkowita zatém, czyli cecha, będzie $m-1$.

Np. *Log* 3 , *Log* $3\frac{2}{5}$, *Log* 3, 4928 mieć będą za cechę 0.

Log 39 ; *Log* 39,4 ; *Log* 84,56 mieć będą za cechę 1.

Log 729 ; *Log* 729,6 ; *Log* 999,35 mieć będą za cechę 2.

Log 4973 ; *Log* 4973,86 i t. p., mieć będą za cechę 3 i t. d.

69*. Mając już dany logarytm zwyczajny jakiéjkolwiek liczby, nietrudno znaleść logarytm liczb dziesięć, sto, tysiąc i w ogólności 10^m razy większéj lub mniejszéj od liczby danéj.

W rzeczy saméj: przypuśćmy, że oznaczamy głoską N jakąkolwiek liczbę, i że logarytm téj liczby, *Log* N, jest znany. Chcemy zaś znaleść: po 1-sze *Log* $(10\,N)$, *Log* $(100\,N)$, *Log* $(1000\,N)$.. i w ogólności *Log* $(10^m\,N)$; lub, po 2-gie, *Log* $\left(\frac{N}{10}\right)$, *Log* $\left(\frac{N}{100}\right)$, *Log* $\left(\frac{N}{1000}\right)$, i w ogóle: *Log* $\left(\frac{N}{10^m}\right)$.

Co do 1-ego. Ponieważ logarytm iloczynu jest równy summie logarytmów czynników, przeto będzie:

$$\begin{aligned} Log\ (10\ N) &= Log\ N + Log\ 10 = Log\ N + 1 \\ Log\ (100\ N) &= Log\ N + Log\ 100 = Log\ N + 2 \\ Log\ (1000\ N) &= Log\ N + Log\ 1000 = Log\ N + 3 \end{aligned}$$

i t. d.

$$Log\ (10^m\,N) = Log\ N + Log\ (10^m) = Log\ N + m.$$

Z powyższych równości czytamy, że aby otrzymać *Log* $(10\,N)$, należy do *Log* N dodać 1 ; czyli wprost cechę logarytmu N powiększyć o jedność ; podobnie aby znaleść *Log* $(100\,N)$, należy do cechy *Log* N dodać 2 i t. d., w ogólności, aby znaleść *Log* $(10^m\,N)$ należy do cechy *Log* N dodać m.

Co do 2-go. Ponieważ logarytm ilorazu jest równy różnicy pomiędzy logarytmem dzielnéj i logarytmem dzielnika, przeto:

$$Log\ \left(\frac{N}{10}\right) = Log\ N - Log\ 10 = Log\ N - 1,$$

$$Log\ \left(\frac{N}{100}\right) = Log\ N - Log\ 100 = Log\ N - 2,$$

$$Log\ \left(\frac{N}{1000}\right) = Log\ N - Log\ 1000 = Log\ N - 3,$$

i w ogóle:

$$Log\ \left(\frac{N}{10^m}\right) = Log\ N - Log\ 10^m = Log\ N - m.$$

Stąd czytamy, że aby znaleść *Log* $\left(\frac{N}{10}\right)$, należy od cechy logarytmr liczby N odjąć 1 ; aby znaleść *Log* $\left(\frac{N}{100}\right)$, należy od cechy logarytmu liczby N odjąć 2, i t. d., w ogóle aby znaleść *Log* $\left(\frac{N}{10^m}\right)$, należy od cechy logarytmu liczby N odjąć m. Więc: logarytmy liczb, różniących się tylko liczbą zer na końcu, lub położeniem przecinka, mają jednakowe mantysy, a różnią się tylko cechami.

Te własności, opiérające się na tém, że za zasadę logarytmów służy taż sama liczba, która jest zarazem podstawą systematu liczenia, dają możność znalezienia logarytmów wielu liczb z wiadomego logarytmu jednéj tylko liczby przez prostą odmianę cechy. Tak np. z tablic znajdujemy, że:

$$Log\ 2587 = 3{,}4127964\ .$$

Na zasadzie pierwszéj z dwóch powyższych własności będzie:

$$Log\ 25870 = 4{,}4127964\ ;\ Log\ 258700 = 5{,}4127964$$

i t. d.; na zasadzie zaś drugiéj własności:

$$Log\ 258\ ,\ 7 = 2{,}4127964\ ;\ Log\ 25{,}87 = 1{,}4127964\ ;$$
$$Log\ 2{,}587 = 0{,}4127964.$$

70*. Ponieważ ułamek jest ilorazem, przeto dla znalezienia logarytmu ułamku odejmujemy logarytm mianownika od logarytmu licznika. Oznaczywszy jakikolwiek ułamek przez $\frac{p}{q}$, będzie:

$$Log\left(\frac{p}{q}\right) = Log\,p - Log\,q\ .$$

Jeżeli ułamek będzie niewłaściwy, t. j. jeżeli $p>q$, wtedy i $Log\ p>Log\ q$, powyższe wyrażenie da nam wartość dodatnią na $Log\left(\frac{p}{q}\right)$. Lecz gdy ułamek jest właściwy, wówczas $p<q$, $Log\ p<Log\ q$, i z wyrażenia: $Log\ p - Log\ q$ otrzymamy wartość odjemną na $Log\left(\frac{p}{q}\right)$. Że logarytmy ułamków właściwych

(przy zasadzie większéj od jedności) są odjemne, wypada to zresztą z tego, co było powiedziane w § 63*.

Logarytmy ułamków dziesiętnych wynajdują się w podobny sposób jak logarytmy ułamków zwyczajnych, t. j. przez odjęcie logarytmu mianownika od logarytmu licznika.

Lecz z powodu wielkiéj wagi w rachunkach praktycznych i częstego zastosowania, pomówimy tu osobno o różnych sposobach wyrażenia logarytmów ułamków dziesiętnych.

Weźmy jako przykład ułamek: 0,2587. Ułamek ten możemy napisać z mianownikiem wyraźnym tak: $\frac{2587}{10000}$. Podług zasady, służącéj do znalezienia logarytmu ułamku będzie:

$$Log\ 0{,}2587 = Log\ 2587 - Log\ 10000 = 3{,}4127964 - 4\ ;$$

czyli, wykonywając odejmowanie na drugiéj stronie:

$$Log\ 0{,}2587 = -\ 0{,}5872036.$$

Podobnie znaleźlibyśmy:

$$Log\ 0{,}02587 = Log\ 2587 - Log\ 100000 = -\ 1{,}5872036\ ;$$
$$Log\ 0{,}002587 = -\ 2{,}5872036\ ;\ \text{i t. d.}$$

I tutaj widzimy, jak przy liczbach większych od jedności, że logarytmy tych ułamków dziesiętnych, które się różnią tylko położeniem przecinka, mają jednakowe mantysy, różne cechy stanowią całą różnicę pomiędzy temi logarytmami. A nawet przypatrując się sposobowi otrzymywania tych logarytmów możemy ustanowić takie prawidło: Logarytm odjemny ułamku dziesiętnego ma za cechę tyle jedności, ile jest w tym

ułamku zer po przecinku przed pierwszą cyfrą znaczącą; za mantysę zaś cyfry, otrzymane przez odjęcie wszystkich cyfr mantysy logarytmu licznika od 9, z wyjątkiem ostatniéj cyfry z prawéj strony, otrzymanéj przez odjęcie od 10 takiéj że cyfry mantysy logarytmu licznika:

Gdy więc: $Log\ 2 = 0{,}3010300;$
to: $Log\ 0{,}2 = -\ 0{,}6989700;$
$Log\ 0{,}02 = -\ 1{,}6979700;$
$Log\ 0{,}002 = -\ 2{,}6989700;$
$Log\ 0{,}0002 = -\ 3{,}6989700;$ i t. d.

Lecz logarytmy ułamków rzadko używają się w téj postaci, zazwyczaj nadajemy im inną, daleko dogodniejszą do rachunku i w skutek tego prawie wyłącznie używaną. Weźmy jeszcze raz pod uwagę tenże sam *Log* 0,2587. Jest on jak wiemy równy 3,412 7964—4. Możemy tę różnicę tak przedstawić.

$$Log\ 0{,}2587 = 3 + 0{,}412\ 7964 - 4\ ,$$

czyli: $$Log\ 0{,}2587 = -\ 1 + 0{,}412\ 7964.$$

Tutaj logarytm ten został przedstawiony jako summa dwóch wyrazów, jednego odjemnego, drugiego dodatniego; mianowicie część całkowita jest odjemną, część zaś ułamkowa dodatnią. Zgodzono się pisać razem obie te części odznaczając część odjemną znakiem *mniéj*, napisanym u góry w ten sposób:

$$Log\ 0{,}2587 = \bar{1}{,}412\ 7964.$$

Pisząc w ten sposób logarytm ułamku dziesiętnego, mówimy, że ma on cechę odjemną, a mantysę dodatnią.

Podobnie postępując znaleźlibyśmy:

$Log\ 0{,}02587 = 3 + 0{,}4127964 - 5 = \bar{2}{,}4127964,$
$Log\ 0{,}002587 = 3 + 0{,}4127964 - 6 = \bar{3}{,}4127964,$
i t. d.

Ten sposób pisania logarytmu ułamku dziesiętnego jest przeważnie używany; i my go w dalszym ciągu wyłącznie używać będziemy. Widzimy z powyższych przykładów, że w logarytmie ułamku dziesiętnego, mającym cechę odjemną, a mantysę dodatnią, cecha odjemna zawiera tyle jedności, ile jest zer przed pierwszą cyfrą znaczącą w ułamku, włączając w to i zero na całkowitą; mantysa zaś jest równa mantysie licznika. Możemy się przekonać za pomocą następującego rozumowania, że to prawidło jest ogólne: Przypuśćmy, że mamy pewien ułamek dziesiętny właściwy p, przed pierwszą cyfrą znaczącą którego, znajduje się k zer, włączając w to i zero na całkowitą. Pomiędzy przecinkiem więc i pierwszą cyfrą znaczącą jest $k-1$ zer. Przypuśćmy daléj, że mantysa logarytmu téj liczby całkowitéj, jaką otrzymamy, opuszczając w danym ułamku przecinek, jest m. Na zasadzie własności, dowiedzionéj w § 69*, gdziekolwiek byśmy umieścili przecinek w téj liczbie, zawsze mantysa logarytmu otrzymanéj liczby pozostanie taż sama t. j. m. Posuńmy przecinek w danym ułamku w prawą stronę tak, aby pierwsza cyfra znacząca stała się całkowitą; przez takie przesunięcie przecinka powiększyliśmy ułamek 10^k razy; nowa liczba będzie więc równą $10^k . p$, mantysą w jéj logarytmie będzie m, cechą zaś będzie 0, gdyż jedna tylko cyfra będzie w całkowitéj (§ 68*). Zatem:

$$Log\ (10^k \cdot p) = 0, m\ , \text{ czyli}$$
$$Log\ (10^k) + Log\ p = 0, m\ , \text{ i dalej:}$$
$$k\ Log\ 10 + Log\ p = 0, m\ , \text{ skąd}$$
$$Log\ p = 0, m - k\ ,$$

czyli, podług użytego sposobu pisania:

$$Log\ p = \overline{k}, m\ .$$

Tym sposobem, mając tablice, zawiérające logarytmy wszystkich liczb całkowitych, możemy odrazu bez żadnego rachunku napisać logarytm każdego ułamku dziesiętnego, z cechą odjemną i mantysą dodatnią.

Gdybyśmy mieli dany logarytm całkowicie odjemny ułamku dziesiętnego i chcieli go przekształcić na logarytm z cechą odjemną, a mantysą dodatnią, wtedy należałoby tak postępować: Weźmy jako przykład logarytm poprzednio znaleziony:

$$Log\ 0{,}02587 = -1{,}5872036.$$

Logarytm ten możemy napisać w ten sposób:

$$Log\ 0{,}02587 = -1 - 0{,}5872036\ .$$

Wartość tego logarytmu oczywiście nie zmieni się, gdy do niego dodamy 1 i odejmiemy 1 ; będzie wtedy:

$$Log\ 0{,}02587 = -1 - 1 + 1 - 0{,}5872036\ .$$

Wykonajmy dodawanie w dwóch pierwszych wyrazach, a odejmowanie w dwóch drugich; otrzymamy

$$Log\ 0{,}02587 = -2 + 0{,}4127964\ , \text{ czyli:}$$
$$Log\ 0{,}02587 = \overline{2}.4127964\ ,$$

to jest to, co znaleźliśmy inną drogą. Gdyby znowuż zaszła potrzeba zamiany logarytmu z cechą odjemną a mantysą dodatnią, na logarytm całkowicie odjemny, wtedy otrzymalibyśmy żądany wypadek, przez wykonanie tego odejmowania, które właściwie jest wskazane w logarytmie, napisanym pod tą postacią.

Tak np. przypuśćmy, że:

$$Log\ 0{,}002587 = \overline{3}{,}4127964\ ,$$

potrzeba przerobić na logarytm całkowicie odjemny. Zwróćmy tylko uwagę na to, że:

$$Log\ 0{,}002587 = -3 + 0{,}4127964 = 0{,}4127964 - 3\ ;$$

wykonajmy wskazane odejmowanie; otrzymamy:

$$Log\ 0{,}002587 = -2{,}5872036\ ,$$

jak poprzednio.

Jest jeszcze jeden sposób wyrażania logarytmów ułamków dziesiętnych, dosyć często używany w pewnych rachunkach, za pomocą tak zwanego *dopełnienia* do 10. Przykład najlepiéj objaśni na czém przekształcenie takie polega. Weźmy logarytm liczby już tyle razy uważanéj:

$$Log\ 0{,}002587 = \overline{3}{,}4127964\ ;$$

oczywiście pozostanie on bez zmiany, jeżeli do niego dodamy 10 i odejmiemy 10. Czyniąc to otrzymamy:

$$Log\ 0{,}002587 = -3 + 0{,}4127964 + 10 - 10\ ,$$
$$\text{czyli: } Log\ 0{,}002587 = 10 - 3 + 0{,}4127964 - 10\ ,$$
$$\text{albo jeszcze: } Log\ 0{,}002587 = 7 + 0{,}4127964 - 10\ ,$$
$$\text{i nakoniec: } Log\ 0{,}002587 = 7{,}4127964 - 10\ .$$

W praktyce ustalił się zwyczaj opuszczania —10 ,

i pisania samego dopełnienia logarytmu; t. j. powyższy logarytm pisze się tak:

$$Log\ 0{,}002587 = 7{,}4127964\ .$$

Oczywiście zawsze należy w takim logarytmie, napisanym pod postacią całkiem dodatnią, domyśleć się odjemnika—10.

W podobny sposób otrzymalibyśmy:

$$Log\ 0{,}2587 = 9{,}4127964 - 10$$
$$Log\ 0{,}02587 = 8{,}4127964 - 10$$
$$Log\ 0{,}0002587 = 6{,}4127964 - 10.$$

Chcąc z logarytmów tak wyrażonych przejść do logarytmów z cechą odjemną i mantysą dodatnią, należy tylko odjąć 10 od odpowiedniéj cechy, nie zmieniając mantysy, i różnicę odjemną napisać na miejscu cechy.

Nakoniec: chcąc z logarytmu całkowicie odjemnego przejść do dopełnienia, należy tylko do niego dodać 10 i odjąć 10.

Gdyby w wyjątkowych wypadkach cecha odjemna była większą od 10, wtedy bierze się dopełnienie do 20, lub do 30, lub w ogóle do takiéj wielokrotnéj 10, która będzie bezpośrednio większą od cechy danego logarytmu.

71*. Tablice logarytmowe zawiérają logarytmy tylko liczb całkowitych; widzieliśmy bowiem poprzednio, że do odszukania logarytmów liczb całkowitych sprowadza się wynalezienie logarytmów i liczb ułamkowych.

Ponieważ nadto cechy są zawsze łatwe do napisania z samego wejrzenia na daną liczbę, przeto cechy

zazwyczaj w tablicach logarytmowych opuszczają się. Tablica więc logarytmów zawiera z jednéj strony liczby całkowite, z drugiéj zaś strony mantysy logarytmów tychże liczb.

Jedne tablice od drugich różnią się najprzód liczbą tych liczb całkowitych, których logarytmy są zamieszczone; powtóre stopniem przybliżenia, czyli liczbą cyfr dziesiętnych, do których mantysy są dokładnie obrachowane. Pod tym względem rozróżniają tablice małe i wielkie. W małych tablicach znajdują się logarytmy, obliczone do 4, 5-ciu lub 6-ciu cyfr dziesiętnych, wszystkich liczb całkowitych od 1 do 20000 najwyżéj. W wielkich tablicach mantysy są obliczone przynajmniéj do 7-miu cyfr dziesiętnych dokładnych, i w nich zawarte są logarytmy przynajmniéj pierwszych 100000 liczb. Do szkolnego użytku zupełnie wystarczają tablice małe; przypuszczamy, że w rękach czytelnika znajdują się tablice logarytmów pięciocyfrowych Schlömilcha (Fünfstellige logarithmische Tafeln, Braunschweig, Vieweg) lub takież tablice Lalande'a, wydane przez Dupuis, lub wyborne tablice Houël'a Tables des logarithmes à cinq décimales. Paris, Mallet Bachelier) i t. p. Ze względu na duży i wyraźny druk, nie męczący oczu oddajemy pierwszeństwo tablicom Schlömilcha, i o nich ciągle mówić tu będziemy, jakkolwiek w wielu częściach tablic lepszy układ mają tablice Lalande'a—Dupuis, i Houël'a.

Pierwsza część tablic Schlömilcha zawiéra logarytmy wszystkich liczb od 1 do 10909; zawartość innych części albo objaśnia się samym tytułem, albo téż do naszego przedmiotu nie należy. Pierwsza

strona pierwszéj części jest podzielona na 4-ry główne kolumny, z których każda cieńszą linijką jest jeszcze podzielona na dwie kolumny; nad jedną znajduje się litera *N* (numerus, liczba), nad drugą litera *L* (logarithmus). Pierwsza z tych dwóch kolumn zawiéra liczby od 1 do 100, druga mieści w sobie w tych samych wierszach logarytmy tychże liczb. Tak np. obok liczby 79 widzimy 1,89763 ; to znaczy że: *Log* 79=1,89763. Ostatnia cyfra jest podkreśloną z tego powodu: wiemy, że logarytmy wszystkich liczb, z małemi wyjątkami są niewymierne; mantysy ich zatem są tylko przybliżone. Istotna wartość logarytmu 79 nie jest taką jak napisano wyżéj, ale cyfry za piątą idą do nieskończoności, i te ostatnie cyfry zaczynając od szóstéj są opuszczone. Otóż jeżeli pierwsza z opuszczonych cyfr, czyli szósta wynosi mniéj niż 5, wtedy one po prostu się opuszczają; jeżeli zaś wynosi ona 5 lub więcéj, wtedy przy opuszczaniu ich ostatnia cyfra zatrzymana, powiększa się o jedność, a na znak, że ten właśnie przypadek miał miejsce, ostatnia cyfra zachowana podkreśla się. W powyższym przykładzie więc było: *Log* 79=1,89762....; lecz pierwsza z następujących po 2 cyfr była albo 5, albo 6... albo 9; ponieważ ona została opuszczoną wraz z następującemi, przeto dla zmniejszenia błędu napisano 3 zamiast 2. I rzeczywiście, w większych tablicach możemy znaleść, że w tym logarytmie cyfra następująca po 2 jest 7.

Taż sama uwaga odnosi się do wszystkich podkreślań w całéj tablicy.

Każda z następnych stronnic jest podzielona na 4-ry kolumny. Nad pierwszą jest litera *N* (numerus); zawiéra ona kolejne liczby od 100 do 1090. Na po-

czątku drugiéj jest litera *L* (logarithmus), która się odnosi i do trzeciéj kolumny. Obie te kolumny zawierają mantysy pięciocyfrowe logarytmów liczb. Nakoniec nad czwartą kolumną są litery *P*. *P*. (partes proportionales, części proporcyonalne); znaczenie jéj i użytek zaraz poznamy.

W tym wierszu gdzie jest litera *L* , znajdują się jeszcze cyfry 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Każda z tych cyfr jest ostatnią cyfrą liczby, któréj trzy pierwsze znajdują się w kolumnie pierwszéj, z nagłówkiem *N*. Przykłady najlepiéj objaśnią jak wyszukiwać logarytm któréjkolwiek z liczb znajdujących się w tablicach. Przykład. Znaleść *Log* 276.

Wiemy najprzód że cecha tego logarytmu jest 2, gdyż liczba zawiéra trzy cyfry. Co się tyczy mantysy, to odszukujemy w kolumnie pierwszéj téj liczby 276; obok niéj w drugiéj kolumnie pod cyfrą 0 znajdujemy: 44091. Jest to mantysa logarytmu tejże liczby. Będzie więc: *Log* 276=2,44091.

Gdybyśmy chcieli znaleść *Log* 2760, wtedy logarytm szukany różniłby się od znalezionego wyżéj tylko cechą i mielibyśmy:

$$Log\ 2760 = 3{,}44091\ .$$

Z tego logarytmu jeszcze byłoby:

$$Log\ 27{,}6 = 1{,}44091\ ;\ Log\ 2{,}76 = 0{,}44091$$

$$Log\ 0{,}276 = \overline{1}{,}44091\ ;\ Log\ 0{,}0276 = \overline{2}{,}44091$$

i t. d.

Przykład. Znaleść *Log* 2765.

Téj liczby nie ma w kolumnie, nad którą znajduje się głoska *N* ; ale znajdujemy w niéj najprzód liczbę

276. W kolumnie zaś trzeciéj, w szeregu nad którym znajduje się cyfra 5 (ostatnia danéj liczby 2765) i w tym wierszu, gdzie jest w pierwszéj kolumnie 276 znajdujemy trzy cyfry 170 ; są to trzy ostatnie cyfry mantysy logarytmu 2765. Dwie pierwsze cyfry 44 znajdują się w kolumnie bezpośrednio leżącéj pod literą *L*. Te dwie pierwsze cyfry dla tego zostały opuszczone, że powtarzają się one w znacznéj liczbie logarytmów liczb po sobie następujących; dla oszczędzenia więc miejsca w tablicach drukują się tylko przy pierwszéj z tych liczb; w następnych zaś opuszczają się. Tym sposobem dwie cyfry 44 odnoszą się do mantys wszystkich logarytmów zawartych w następnych wierszach, aż do miejsca od którego dwie pierwsze cyfry mantysy będą 45, jak w téj części tablicy, którą mamy przed oczyma, do liczby 282. Logarytm szukany będzie więc:

$$Log\ 2765 = 3{,}44170.$$

Należy tu jeszcze wspomnieć, że te same dwie pierwsze cyfry 44 odnoszą się także do tych trzech ostatnich cyfr w wierszu poprzednim, przed któremi znajdują się gwiazdki: 012, 028, 044, 059 i 075.

Dalsze przykłady wprost wypisujemy bez objaśnień, zalecając wszakże czytelnikowi wyszukania wszystkich tych logarytmów:

$$Log\ 2758 = 3{,}44059\ ;\ Log\ 2819 = 3{,}45010\ ;$$
$$Log\ 2823 = 3{,}45071\ ;\ Log\ 2867 = 3{,}45758\ ;$$
$$Log\ 354{,}7 = 2{,}54986\ ;\ Log\ 35{,}47 = 1{,}54986\ ;$$
$$Log\ 0{,}3547 = \bar{1}{,}54986\ ;\ Log\ 0{,}003547 = \bar{3}{,}54986\ ;$$
$$Log\ 8318 = 3{,}92002\ ;\ Log\ 83{,}18 = 1{,}92002\ ;$$
$$Log\ 0{,}8318 = \bar{1}{,}92002\ .$$

72*. Użycie tablic logarytmowych byłoby bardzo ograniczone, gdybyśmy mogli logarytmy tych tylko liczb otrzymywać, które się bezpośrednio w tychże tablicach znajdują. Zobaczymy jednak, że każdą tablicę można niejako rozszerzyć i otrzymać z niéj logarytmy liczb, nie znajdujących się w niéj bezpośrednio, i to z takim stopniem przybliżenia, z jakim cała tablica jest obliczona, pod warunkiem wszakże, że te liczby nie przechodzą po za pewną granicę. Pokażemy teraz właśnie jakim sposobem można dojść do takiego wtrącenia do tablicy nowych liczb.

W tym celu musimy najprzód zastanowić się nad pewnemi własnościami jakie mają różnice pomiędzy logarytmami dwóch po sobie następujących liczb w tablicy. Zauważmy najprzód, że na zasadzie drugiéj własności głównéj logarytmów, różnica pomiędzy dwoma logarytmami może być zawsze przedstawioną jako logarytm ilorazu. Weźmy trzy liczby całkowite następujące po sobie w postępie arytmetycznym, którego wykładnikiem jest r:

$$N\ ,\ N+r\ ,\ N+2r\ ;$$

nie trudno się przekonać, że:

$$\frac{N+r}{N} > \frac{N+2r}{N+r} \quad \ldots\ldots (1)$$

Należy tylko sprowadzić te dwa ułamki do jednakowego mianownika, i będzie z ułamku znajdującego się na pierwszéj stronie nierówności (1).

$$\frac{(N+r)^2}{N(N+r)} = \frac{N^2+2Nr+r^2}{N(N+r)}\ ;$$

z ułamku zaś znajdującego się na stronie drugiéj:

$$\frac{N(N+2r)}{N(N+r)} = \frac{N^2+2Nr}{N(N+r)}.$$

Ponieważ zaś widocznie:

$$\frac{N^2+2Nr+r^2}{N(N+r)} > \frac{N^2+2Nr}{N(N+r)},$$

przeto i nierówność (1) jest tym sposobem dowiedzioną.

Jeżeli teraz weźmiemy logarytmy obu stron nierówności (1), otrzymamy:

$$Log\,(N+r) - Log\,N > Log\,(N+2r) - Log\,(N+r) \ldots (2)$$

Pierwsza strona téj nierówności pokazuje o ile powiększa się logarytm pewnéj liczby N, jeżeli tę liczbę powiększymy o pewną ilość r; druga zaś strona podobnie pokazuje przyrost, jakiego doznaje logarytm liczby $N+r$, gdy ją znowuż powiększymy o toż samo r. Własność różnic pomiędzy logarytmami, zawartą w nierówności (2), możemy tak wyrazić:

Jeżeli liczby powiększają się o równe ilości, wtedy tym równym przyrostom liczb, odpowiadają przyrosty logarytmów ciągle zmniejszające się.

Gdybyśmy uczynili w powyższych nierównościach $r = 1$, wtedy liczby N, $N+1$, $N+2$ tworzyłyby szereg liczb naturalnych, to jest takich, jakich logarytmy są pomieszczone w tablicach logarytmowych. Różnice: $Log\,(N+1) - Log\,N$, $Log\,(N+2) - Log\,(N+1)$, byłyby różnicami pomiędzy logarytmami po sobie następującemi w tablicach (i dla tego często nazywane różnicami *tablicowemi*): własność wyrażona przez nierówność (2), zastosowana do różnic tablicowych, pokazuje że:

$$Log\,(N+1) - Log\,N > Log\,(N+2) - Log\,(N+1),$$

to jest, że różnice tablicowe po sobie następujące tworzyć muszą szereg malejący. Łatwo to sprawdzić: tworząc czy to za pomocą tablicy Schlomilcha, czy téż jakiéjkolwiek innéj różnice logarytmów kolejnych, znajdziemy że im bardziéj posuwać się będziemy w tablicy do coraz to większych liczb, tym odpowiednie różnice będą mniejsze. I jeżeli w pewnych częściach tablic znajdziemy, że różnica następna jest równą, lub nawet niekiedy większą od różnicy poprzedniej, to pochodzi to tylko z tego, że każdy logarytm w tablicy jest oznaczony w przybliżeniu, do 5-ciu cyfr dziesiętnych, z opuszczeniem cyfr dalszych.

73*. Przechodzimy teraz do drugiéj własności różnic pomiędzy logarytmami, która nas doprowadzi do wprowadzania do tablicy liczb jakichkolwiek. Własność ta polega na tém, że jakkolwiek różnice pomiędzy logarytmami stają się coraz mniejsze, to wszakże, w miarę powiększania się liczb różnice te różnią się od siebie coraz mniéj; czyli *ciągle dążą do tego, aby stać się równemi.*

Aby pokazać tę własność różnic pomiędzy logarytmami, weźmy pod uwagę oddzielnie wyrażenia, stanowiące dwie strony nierówności (2) § 72*, mianowicie: $Log\,(N+r) - Log\,N$ i $Log\,(N+2r) - Log\,(N+r)$. Pierwszą z tych ilości oznaczmy głoską d, drugą zaś głoską d_1. Będzie więc:

$$d = Log\,(N+r) - Log\,N = Log\left(\frac{N+r}{N}\right),$$

$$d_1 = Log\,(N+2r) - Log\,(N+r) = Log\left(\frac{N+2r}{N+r}\right).$$

Jeżeli zaś ułamki: $\frac{N+r}{N}$ i $\frac{N+2r}{N+r}$ sprowadzimy do jednakowego mianownika, jak to uczyniliśmy w poprzednim paragrafie, otrzymamy:

$$d = Log\left[\frac{N^2+2Nr+r^2}{N(N+r)}\right], \ldots (1)$$

$$d_1 = Log\left[\frac{N^2+2Nr}{N(N+r)}\right], \ldots . (2)$$

Odejmijmy teraz od równości (1) równość (2); będzie:

$$d - d_1 = Log\left[\frac{N^2+2Nr+r^2}{N(N+1)}\right] - Log\left[\frac{N^2+2Nr}{N(N+r)}\right];$$

a że różnica logarytmów jest równa logarytmowi ilorazu, przeto:

$$d - d_1 = Log\left[\frac{N^2+2Nr+r^2}{N^2+2Nr}\right],$$

czyli: $$d - d_1 = Log\left[1 + \frac{r^2}{N^2+Nr}\right] \ldots . (3)$$

Ponieważ w ułamku $\frac{r^2}{N^2+Nr}$ licznik jest stały, a mianownik w miarę powiększenia się liczby N ciągle się powiększa, przeto widoczną jest rzeczą, że ułamek ten, a zatém i całe wyrażenie na drugiéj stronie równości (3) ustawicznie się zmniejsza. Jeżeli w wyrażeniu (3) zamiast r podstawimy jedność, wtedy d i d_1 wyrażać będą różnice tablicowe. Równanie (3) pokazuje, że różnica pomiędzy dwiema różnicami tablicowemi jest mniejsza od takiéjże różnicy poprzedzającéj.

Innemi słowy: *różnice pomiędzy różnicami tablicowémi ciągle maleją w miarę posuwania się coraz daléj w tablicy.*

Jako przykład weźmy kilka po sobie następujących logarytmów w tablicy siedmiocyfrowéj;

	d	$d-d_1$
$Log\ 306 = 2.4857214$		
	0,0014170	
$Log\ 307 = 2.4871384$		0,0000047
	0,0014123	
$Log\ 308 = 2.4885507$		0,0000045
	0,0014078	
$Log\ 309 = 2.4899585$		

Z wypisanych powyżéj liczb widzimy: 1-sze że różnice d pomiędzy dwoma po sobie następującemi logarytmami stają się coraz mniejsze, i po 2-ie że różnice $d-d_1$ pomiędzy niemi także maleją.

Jeżeli więc posuwać się będziemy w tablicy siedmiocyfrowéj przechodząc, do coraz to większych liczb, wtedy ponieważ różnica pomiędzy różnicami tablicowemi dwóch następujących po sobie logarytmów, stają się ciągle coraz to mniejsza, dojść musimy do takiéj części tablicy, w któréj taż różnica będzie mniejszą od $\frac{1}{10000000}$, czyli od jednostki dziesiętnéj siódmego rzędu. Wówczas w téj części tablicy przy równych przyrostkach liczb, i odpowiednie przyrostki logarytmów przedstawiać się będą jako ilości równe; gdyż logarytmy obliczone są dokładnie do siedmiu cyfr dziesiętnych, a różnice pomiędzy ró-

żnicami wyrażać się będą dopiéro co najwyżéj w ósmych cyfrach dziesiętnych. Toż samo oczywiście stosuje się i do tablic zawiérających mniejszą liczbę cyfr dziesiętnych; w nich wcześniéj nastąpi ta równość przyrostków.

74*. Z poprzednich rozumowań wypada więc, że jeżeli pomiędzy dwie liczby następujące po sobie w téj części tablicy, w któréj już różnice pomiędzy dwoma następującemi po sobie logarytmami są równe, wstawimy liczby, z których każda następna równa się poprzedniéj, powiększonéj o jednę i tęż samą ilość mniejszą od 1, np. o 0,1 , wtedy różnice tablicowe, pomiędzy logarytmami odpowiadającemi tym liczbom będą tym bardziéj równe. Stąd wyprowadzamy ten ważny wniosek:

W téj części tablicy, w któréj dwie różnice tablicowe po sobie następujące są równe, przyrostkom liczb równym, lecz mniejszym od jedności, odpowiadają równe przyrostki logarytmów, lub wyrażając się krócéj, *różnice pomiędzy liczbami są proporcyonalne do różnic pomiędzy odpowiedniemi logarytmami.*

Rozumowania poprzednie pokazują, że wniosek ten jest tylko przybliżonym; ale stopień przybliżenia jest taki sam, z jakim są obliczone tablice logarytmowe.

75*. Możemy teraz pokazać, jakim sposobem znaleść z tablic logarytm takiéj liczby, która bezpośrednio w tablicach nie znajduje się.

1-sze Przypuśćmy, że chcemy znaleść logarytm liczby 4385,3.

W tablicy Schlömilcha znajdujemy logarytmy liczb 4385 i 4386. Mianowicie:

$$Log\ 4385 = 3{,}69197\ ,$$
$$Log\ 4386 = 3{,}64207\ ;$$

różnica pomiędzy niemi $= 0{,}00010$.

Liczba dana jest o 0,3 większa od liczby 4385; gdybyśmy znaleźli o ile się powiększa logarytm liczby 4385, wtedy gdy sama liczba powiększa się o 0,3, wówczas dodając tę ostatnią ilość do logarytmu: 3,64197 otrzymalibyśmy logarytm żądany. Ponieważ przy powiększeniu liczby 4385 o 1 logarytm w téj części tablicy powiększa się o 0,00010, przeto, oznaczając przez x to powiększenie jakiego dozna tenże logarytm, wtedy, gdy liczbę powiększymy tylko o 0,3, na zasadzie paragrafu poprzedzającego możemy ułożyć następną proporcyą:

$$x : 0{,}00010 = 0\ ,3 : 1\ ,$$

skąd: $$x = \frac{0\ ,00010\ .\ 0{,}3}{1} = 0{,}00003\ .$$

Przyrostek logarytmu więc, odpowiadający przyrostkowi liczby równemu 0.3 jest 0,00003. Dodając go do *Log* 4385, czyli do 3,64197, otrzymamy 3,64200 jako logarytm liczby 4385,3. Będzie więc:

$$Log\ 4385{,}3 = 3{,}64200\ .$$

Ponieważ wszystkie logarytmy w całéj tablicy są obliczone do pięciu cyfr dziesiętnych, a zatém i różnice pomiędzy niemi są zawsze wyrażone w częściach stutysiącznych, przeto zazwyczaj mianowniki, zera i przecinki opuszczają się przy obliczaniu tych przyrostków, pamiętając wszakże, że mamy tu do czynienia z częściami stutysiącznemi, że zatém to, co przedstawia się w ostatecznym wypadku jako liczba całkowita, jest

częścią stutysiączną. Podług tego więc powyższa proporcya tak się napisze:

$$x : 10 = 0{,}3 : 1 ;$$

skąd: $$x = 3 .$$

W celu ułatwienia wynajdywania takich logarytmów, które się nie znajdują w tablicy, umieszczona jest w niéj na każdéj stronnicy kolumna z napisem nad nią *P. P.*, to jest: „części proporcyonalne“. W téj kolumnie dla każdéj z różnic tablicowych, przytrafiających się na danéj stronnicy, są już obliczone przyrostki logarytmów, odpowiednie różnym przyrostkom liczb. Tak np. na stronnicy 13 tablic Schlömilcha w kolumnie *P. P.* znajdujemy jako nagłówki napisane dwie liczby 10 i 9. Są to różnice tablicowe pomiędzy logarytmami na téj stronnicy, z opuszczeniem mianowników. Pod nagłówkiem 10 z lewéj strony napisane liczby są przyrostkami liczb, z opuszczeniem w nich mianowników 10; więc: 1 oznacza 0,1 ; 2 oznacza 0,2 i t. d., z prawéj zaś strony linii pionowéj odpowiednie przyrostki logarytmów. Wprost 3 , oznaczających 0,3 znajdujemy 3,0 ; i to jest przyrostkiem logarytmu, odpowiadających przyrostkowi liczby 0,3 , wyrażonym w częściach stutysiącznych.

2gi przykład. Przypuśćmy teraz, że chcemy znaleść logarytm liczby 4385,37. Wynajdujemy z tablic *Log* $4385 = 3{,}64197$; różnicę pomiędzy następnym nie i tym logarytmem możemy znaleść na pamięć, wypisując drugiego logarytmu: będzie to znalezione w poprzednim przykładzie 10 ; następnie z proporcyi:

$$x : 10 = 0{,}37 : 1 ,$$

otrzymujemy: $x = 3{,}7$

W téj wartości na x całkowita 3 oznacza stutysiączne części; 7 zaś części milionowe. Ponieważ używane przez nas tablice dochodzą tylko do części stutysiącznych, przeto milionowe opuszczamy; — ale ponieważ jest ich więcéj, aniżeli połowa stutysiącznéj, zatém cyfrę zatrzymaną 3 powiększamy o 1. Na odpowiedni przyrostek logarytmowy otrzymamy tym sposobem 4. Dodając go do *Log* 4385, znajdziemy w końcu:

Log $4385{,}37 = 3{,}64201 .$

Moglibyśmy proporcyi powyższéj nie układać, mając przed oczyma kolumnę *P. P.* Poprawkę logarytmową dla 0,3 mamy w niéj bezpośrednio napisaną; jest ona 3. Co się zaś tyczy 0,37, to ponieważ $0{,}37 = 0{,}3 + 0{,}07$, przeto do powyższego przyrostku 3, należy dodać jeszcze przyrostek, odpowiadający 0,07. Jakkolwiek nie mamy go bezpośrednio w tablicy, to wszakże mamy tam przyrostek, odpowiadający 0,7 ;— jest on 7. Dla 0,07 będzie więc on 10 razy mniejszy, t. j. będzie $= 0{,}7$. Dodając tę ostatnią ilość do 3, otrzymamy na całkowity przyrostek, 3,7 , z którym należy postąpić tak, jak było pokazane wyżéj. Rachunek sam zwykle rozkładamy w następny sposób:

Log $4385 = 364197$

0,3 . . .	3
0,07	0,7

Log $4385{,}37 = 3{,}64201 .$

3-ci przykład. Znaleść *Log* 3059,4. Wykonywamy tu całą robotę bez żadnych objaśnień:

Log $3059 = 3{,}48558 ,$

Log $3060 = 3{,}48572$

1	14

różnica pomiędzy liczbami . . . . różnica tablicowa.

$$x : 14 = 0{,}4 : 1 ;$$
$$x = 5{,}6 = 6$$
$$Log\ 3059{,}4 = 3{,}48564 .$$

Lub, z użyciem kolumny „części proporcyonalne".

$$Log\ 3059 = 3{,}48558$$
$$0{,}4 \ldots\ldots 5{,}6$$
$$Log\ 3059{,}4 = 3{,}48564 .$$

Czytelnik sam obliczy podług powyższych wzorów następujące logarytmy, które podajemy dla wprawy:

$Log\ 1387{,}2 = 3.14214$; $Log\ 2743{,}8 = 3{,}43835$;

$Log\ 5129{,}4 = 3{,}71007$; $Log\ 8976{,}5 = 3{,}95310$.

76*. Zasady wyłożone w poprzedrim paragrafie dają nam możność wynalezienia logarytmu jakiéjkolwiek liczby. Następne przykłady najlepiéj rzecz wyjaśnią:

1-szy przykład. Znaleść logarytm liczby 24567. Liczby téj w tablicach nie znajdujemy, gdyż rozciągają się one tylko do 10909. Lecz sposobem wyłożonym poprzednio, możemy znaleść logarytm liczby 2456,7 , otrzymanéj przez odcięcie przecinkiem jednéj cyfry, tak, że to co pozostało przed przecinkiem znajduje się w tablicach. Postępując znanym sposobem, otrzymamy:

$$Log\ 2456{,}7 = 3{,}39035 .$$

A ponieważ liczba dana 24567 jest 10 razy większą od 2456,7 , przeto logarytm jéj miéć będzie tęż samą mantysę, cechę zaś większą o 1. Znajdziemy zatém ostatecznie:

$$Log\ 24567 = 4{,}39035 .$$

2-gi przykład. Znaleść logarytm liczby 3,5786. Jakkolwiek dana liczba jest zawarta pomiędzy 3 i 4, to wszakże nie będziemy brali tutaj logarytmu 3 i dodawali do niego przyrostku proporcyonalnego do 0,5786 , gdyż w téj części tablicy różnice tablicowe są dalekie od równości, a zasada proporcyonalności przyrostków liczb do przyrostków logarytmów dopiéro wtedy może być stosowaną, gdy różnice tablicowe są równe (§ 74*). Przez przesunięcie przecinka w prawą stronę o trzy cyfry, otrzymamy liczbę 3578,6 , któréj logarytm miéć będzie tęż samą mantysę co i logarytm liczby 3,5786 ; i któréj część całkowita 3578 przypadać będzie w téj części tablicy, do któréj z większém przybliżeniem można zastosować zasadę części proporcyonalnych. Ponieważ $Log\ 3578 = 3{,}55364$, różnica tablicowa jest 12, a przyrostek logarytmowy, odpowiedni przyrostkowi liczby 0,6 jest 7,2 , przeto otrzymamy:

$$Log\ 3578{,}6 = 3{,}55371 .$$

A zatém ostatecznie będzie:

$$Log\ 3{,}5786 = 3{,}55371 — 3 , \text{ czyli}$$
$$Log\ 3{,}5786 = 0{,}55371 .$$

W ogóle przy wynajdywaniu logarytmu liczby nie znajdującéj się bezpośrednio w tablicy należy zawsze zacząć działanie od umieszczenia przecinka w niéj w ten sposób, aby z lewéj strony na całkowitą była odciętą największa liczba, jaka znajduje się jeszcze w tablicy.

3-ci przykład. Znaleść logarytm liczby 879357.

Odcinając przecinkiem z lewéj strony największą liczbę, jakiéj logarytm znajduje się w tablicach, otrzymamy 8793,57,

Dodając do logarytmu liczby 8793, to jest do 3,94414 poprawkę odpowiednią ułamkowi 0,57, która jest 3 (dokładniéj 2,85), miéć będziemy na szukany logarytm:

$$Log\ 8793{,}57 = 3{,}94417\,.$$

$$Log\ 879357 = 5{,}94417\,.$$

Lecz gdybyśmy teraz chcieli znaleść logarytm liczby 879358, lub *Log* 879359, wtedy postępując tak jak wyżéj, i wynajdując poprawkę bądź to odpowiednią 0,58, bądź téż odpowiednią 0,59, otrzymamy na nią znowuż toż samo 3 (w pierwszym razie 2,90, w drugim 2,95), skąd miéć będziemy:

$$Log\ 879358 = 5{,}94417\,,$$

$$Log\ 879359 = 5{,}94417\,.$$

Gdybyśmy w liczbie 879357 po za ostatnią cyfrą 7 dopisali jakiekolwiek cyfry, wtedy one oczywiście jeszcze mniéj miałyby wpływu na poprawkę, jak cyfra 7, i zawsze otrzymalibyśmy dla takiéj liczby logarytm napisany wyżéj. Te przykłady prowadzą do uwagi, że przy użyciu tablic, w których logarytmy są obliczone z przybliżeniem do pięciu cyfr dziesiętnych nie można, w ogóle mówiąc, oznaczyć w sposób pewny mantysy logarytmów liczb, zawierających więcéj niż pięć cyfr znaczących. Cyfry znajdujące się w liczbie danéj po za piątą cyfrą, rachując ku stronie prawéj, mają wpływ na dalsze cyfry mantysy, ale nie na piątą.

Stąd przy wykonywaniu działań nad liczbami za pomocą logarytmów pięciocyfrowych, użycie w tychże liczbach więcéj niż pięciu cyfr znaczących nie prowadzi do wypadku więcéj przybliżonego, aniżeli wtedy, gdy zachowujemy w liczbie tylko pięć cyfr. Na tę okoliczność należy zwracać uwagę, aby nie przeciążać ani liczb użytych do działania, ani téż ostatecznych wypadków zbytecznemi cyframi, nie mającemi w rzeczywistości żadnego znaczenia.

Musimy tutaj ograniczyć się na téj wzmiance, nie wchodząc w bliższy rozbiór téj kwestyi, związanéj z ogólném pytaniem o oznaczeniu stopnia przybliżenia przy rachunku logarytmami, pytaniem przechodzącém znacznie po za zakres niniéjszego dziełka. Możemy tutaj tylko postawić jako ogólną zasadę (wszakże nie bezwzględnie prawdziwą), że przy rachunku wykonywanym za pomocą jakichkolwiek tablic logarytmowych, liczby użyte powinny w swoich częściach znaczących zawiérać najwyżéj tyle cyfr, ile ich jest w mantysach logarytmów. Użycie większéj liczby cyfr nie prowadzi do wypadków dokładniejszych, ani téż rachowanie większéj liczby cyfr w ostatecznym wypadku nie daje wartości więcéj przybliżonéj do prawdziwéj.

4-ty przykład. Znaleść *Log* 0,0041587.

Podług zasad wyłożonych wyżéj, będzie:

$$Log\ 0{,}0041587 = Log\ \frac{41587}{10000000} = Log\ 41587 -$$

$$-Log\ 10000000 = Log\ 41587 - 7\,.$$

A że na logarytm 41587 znajdujemy:

$$Log\ 41587 = 4{,}61896\ ,$$

przeto:

$$Log\ 0{,}0041587 = 4{,}61896 - 7\ ,$$

co możemy ostatecznie wyrazić jednym z trzech sposobów:

albo jako logarytm całkowicie odjemny:

$$Log\ 0{,}0041587 = -\ 2{,}38104$$

albo jako logarytm z cechą odjemną, a mantysą dodatnią:

$$Log\ 0{,}0041587 = \bar{3}{,}61896\ ,$$

albo nakoniec za pomocą dopełnienia do 10:

$$Log\ 0{,}0041587 = 7{,}61896 - 10\ .$$

77*. Pokażemy teraz jak rozwiązać zadanie odwrotne, to jest jak znaleść liczbę, któréj logarytm jest wiadomy. Oczywiście pytanie nie przedstawia żadnych trudności, gdy mantysa danego logarytmu znajduje się w tablicach.

1-szy przykład. Znaleść liczbę N, któréj logarytm jest równy 3,75488.

Podług zadania: $Log\ N = 3{,}75488$.

Wynajdujemy najprzód *w téj części tablicy, w któréj są logarytmy liczb czterocyfrowych* tę stronnicę, na któréj są dwie pierwsze cyfry mantysy, t. j. 75; następnie w odstępie pomiędzy 75 i 76 wyszukujemy na téj saméj stronnicy trzech ostatnich cyfr, t. j. 488. Znajdują się one w tym wierszu, w którym w pierwszéj kolumnie jest liczba 568 i w téj kolumnie, nad którą jest ostatnia cyfra liczby 7. Szukana więc liczba:

$$N = 5687\ .$$

Gdyby było: $Log\ N = 1{,}75488$, wtedy szukając w taki sam sposób, znaleźlibyśmy też same cyfry, z których się składa liczba N, mianowicie 5687. Lecz nie byłaby to liczba żądana, gdyż zawiéra cztery cyfry całkowite: tymczasem cecha logarytmu jest 1, t. j. o dwie jedności mniejsza od 3. Liczba szukana jest więc *sto* razy mniejsza od 5687, czyli:

$$N = 56{,}87.$$

Podobnie, gdyby było:

$$Log\ N = 5{,}75488\ ,$$

wtedy znaleźlibyśmy że:

$$N = 568700\ .$$

Nakoniec jeżeliby dano:

$$Log\ N = \bar{1}{,}75488\ ,$$

wówczas N byłoby ułamkiem dziesiętnym mającym przed pierwszą cyfrą znaczącą *jedno* zero (gdyż cecha jest —1), włączając w to i całkowitą; cyfry zaś znaczące tego ułamku stanowią liczbę całkowitą, któréj logarytm ma za mantysę 75488. Otrzymalibyśmy więc:

$$N = 0{,}5687\ .$$

2-gi przykład. Wiedząc, że $Log\ N = 1{,}62798$ znaleść liczbę N.

Przy wyszukiwaniu liczby odpowiedniéj danemu logarytmowi z początku nie zwracamy nigdy uwagi na cechę, ale tylko na mantysę; i jakkolwiek tutaj cecha jest 1, co pokazuje, że część całkowita liczby miéć będzie tylko dwie cyfry, to wszakże szukamy téjże mantysy zawsze w téj części tablicy, która zawiéra logarytmy liczb czterocyfrowych. Może się bowiem

przytrafić, że mantysy téj nie ma w części tablicy, zawierającéj małe liczby (jak w tablicy Schlömilcha mniejsze od 100), a jednak znajduje się ona w części tablicy, zawierającéj logarytmy większych liczb. Nadto gdyby się okazało, że téj mantysy nie ma wcale w tablicy logarytmów, wtedy dla wynalezienia odpowiedniéj liczby trzeba będzie użyć zasady proporcyonalności przyrostków liczb do przyrostków logarytmów, zasady, która jak już wiemy, daje się zastosować tylko do téj części tablicy, która obejmuje logarytmy liczb największych.

Mantysy logarytmu danego w tym przykładzie nie znajdujemy na pierwszéj stronnicy tablic, zawierającéj logarytmy liczb dwucyfrowych, znajduje się ona jednak pomiędzy mantysami, odpowiadającemi liczbom czterocyfrowym, mianowicie odpowiada ona liczbie 4246. A że cecha danego logarytmu jest 1, przeto szukana liczba będzie:

$$N = 4{,}246\,.$$

3-ci przykład. Wiedząc, że $Log\ N = 3{,}51140$ znaleść liczbę N.

W tablicy nie znajdujemy mantysy 51140; są tylko mantysy 51135 i 51148, pomiędzy któremi mantysa logarytmu danego jest zawartą. Odpowiadają one liczbom: 3246 i 3247; to jest:

$$Log\ 3246 = 3{,}51135\,,$$
$$Log\ 3247 = 3{,}51148\,.$$

Ponieważ dany logarytm 3,51140 jest zawarty pomiędzy logarytmami 3,51135 i 3,51148, przeto i liczba szukana N będzie zawiérać się pomiędzy liczbami 3246 i 3247, to jest równać się będzie liczbie 3246 więcéj pewna ilość mniejsza od jedności, którą oznaczmy przez y. Tym sposobem będzie:

$$N = 3246 + y\,.$$

Aby wynaleść y użyjemy tutaj téj zasady, że różnice pomiędzy liczbami są proporcyonalne do różnic pomiędzy logarytmami (§ 74*). Różnica tablicowa tych logarytmów, pomiędzy któremi dany logarytm jest zawarty, jest 0,00013, czyli 13 (§ 75*, przykład 1-szy), i téj różnicy odpowiada różnica pomiędzy liczbami równa 1 (3247—3246). Logarytm dany 3,51140 jest większy od logarytmu mniejszego ze znajdujących się w tablicy 3,51135 o 5: i téj różnicy pomiędzy logarytmami odpowiada różnica pomiędzy liczbami równa y. Będzie więc:

$$y : 1 = 5 : 13\,,$$

skąd: $$y = \frac{5}{13} = 0{,}38\ldots = 0{,}4.$$

Liczba szukana więc $N = 3246 + 0{,}4$ czyli:

$$N = 3246{,}4\,.$$

4-ty przykład. Wiedząc że $Log\ N = 2{,}78410$, znaleść liczbę N.

Gdybyśmy znaleźli liczbę, któréj logarytm miałby za cechę 3 a mantysą tęż samą co i logarytm dany, to jest któréj logarytm byłby 3,78410, wtedy przez proste przesunięcie przecinka o jedną cyfrę w lewą stronę otrzymalibyśmy z téj liczby i liczbę N.

Mantysy 78410 nie znajdujemy w tablicy; są tylko mantysy 78405 i 78412, pomiędzy któremi zawiéra

się mantysa logarytmu danego. Pierwsza mantysa odpowiada liczbie 6082, druga zaś liczbie 6083. Będzie więc:

$$Log\ 6082 = 3{,}78405\ ,$$
$$Log\ 6083 = 3{,}78412\ .$$

Różnica tablicowa pomiędzy temi logarytmami jest 7; odpowiada ona różnicy pomiędzy liczbami 1. Różnica pomiędzy logarytmem danym 3,78410 i logarytmem mniejszym ze znalezionych jest 5. Oznaczając więc przez y przyrostek liczby, odpowiadający przyrostkowi logarytmu równemu 5, będzie:

$$y : 1 = 5 : 7\ ,$$

skąd: $$y = \frac{5}{7} = 0{,}7\ .$$

Liczba więc, któréj logarytm jest 3,78410 jest równą 6082+0,7, czyli: 6082,7. Zatém liczba szukana N będzie:

$$N = 608{,}27\ .$$

5-ty przykład. Wiedząc że $Log\ N = \overline{3},57545$, znaleść N.

Wynajdźmy liczbę, któréj logarytm ma tęż samą mantysę 57545, a cechę 3; to jest liczbę, któréj logarytm jest 3,57545. Wtedy przez proste przesunięcie przecinka, znajdziemy liczbę N. Mianowicie będzie: liczba, któréj logarytm jest 3,57545 jest 3762,3; liczba szukana zatém: N=0,0037623.

6-ty przykład. Wiedząc że $Log\ N = -1{,}41736$, znaleść N.

Gdy dany jest logarytm ułamku całkowicie odjemny, należy najprzód przekształcić go na logarytm z cechą odjemną i mantysą dodatnią, sposobem podanym wyżéj, gdzie była mowa o logarytmie ułamków. W teraźniejszém zadaniu otrzymamy:

$$Log\ N = -1{,}41736 = -1-0{,}41736 = -1-1+1-0{,}41736 = \overline{2},58264.$$

Postępując następnie tak, jak w przykładzie poprzedzającym, znajdziemy:

$$N = 0{,}038251\ .$$

78*. Podamy na zakończenie tego rozdziału jeszcze kilka zadań, aby pokazać zastosowanie tablic.

Zadanie 1-sze. Następujące mnożenie wykonać za pomocą logarytmów:

$$x = 12 \times 0{,}042 \times 0{,}82683\ .$$

W tym celu bierzemy logarytmy obu stron; będzie:

$$Log\ x = Log\ 12 + Log\ 0{,}042 + Log\ 0{,}82683\ ;$$

następnie rachunek układamy w ten sposób:

$$Log\ 12 = 1{,}07918\ ,$$
$$Log\ 0{,}042 = \overline{2},62325\ ,$$
$$Log\ 0{,}82683 = \overline{1},91742\ .$$
$$Log\ x = \overline{1},61985;$$

stąd:

$$x = 0{,}41673\ .$$

Przy dodawaniu logarytmów, z których jedne są całkowicie dodatnie, inne zaś mają cechę odjemną

i mantysę dodatnią, należy po skończeniu dodawania mantys, wykonać uważnie dodawanie algiebraiczne cech, z *uwzględnieniem ich znaków*.

Tak właśnie w przykładzie powyższym dodawanie zostało wykonane.

Zadanie 2-ie. Obliczyć za pomocą logarytmów wyrażenie:

$$x = \frac{67,2}{793}.$$

Biorąc logarytmy obu stron, otrzymamy:

$$Log\ x = Log\ 67,2 - Log\ 793,$$

czyli: $Log\ x = 1,82737 - 2\ 89927.$

Logarytm więc x wypada odjemny, jak być powinno, gdyż x jest mniejsze od 1. Wykonywając odejmowanie, znajdziemy.

$$Log\ x = -1,07190.$$

W celu wynalezienia x należy logarytm ten przekształcić na logarytm z cechą odjemną i mantysą dodatnią. Lecz zazwyczaj przy wykonywaniu odejmowania, odrazu przekształcamy wypadek ostateczny na logarytm takiéj postaci. W tym celu do odjemnéj dodajemy najmniejszą liczbę całkowitą taką, ażeby od téj summy można było odjąć odjemnik, i następnie od wypadku też samą liczbę całkowitą odejmujemy. Oczywiście przez to wypadek ostateczny wartości swojéj nie zmieni. Tak np. w zadaniu, które rozwiązujemy, będzie:

$$Log\ x = 1,82737 - 2,89927 = 2 + 1,82737 - 2,89927 - 2$$
$$= 3,82737 - 2,89927 - 2 = 0,92810 - 2 = -2 + 0,92810,$$

czyli: $Log\ x = \bar{2},92810.$

Zazwyczaj działanie układa się tak:

$$\begin{array}{r} --\ 2 + 2 \\ Log\ 67,2 = 1,82737 \\ Log\ 79,3 = 2,89927 \\ \hline Log\ x = \bar{2},92810. \end{array}$$

Stąd otrzymamy: $x = 0,084742.$

Zadanie 3-cie. Znaleść wartość:

$$x = \frac{0,0843}{0,0064}.$$

Będzie najprzód:

$$Log\ x = Log\ 0,0843 - Log\ 0,0064.$$

Następnie: $Log\ 0,0843 = \bar{2},92583,$

$Log\ 0,0064 = \bar{3},80618,$

$Log\ x = 1,11965$

stąd: $x = 13,172.$

Przy wykonywaniu odejmowania logarytmu $\bar{3},80618$ od logarytmu górnego, należy pamiętać, że logarytm ten składa się z dwóch wyrazów: odjemnego -3 i dodatniego 0,80618. Aby więc go odjąć powinniśmy znaki zmienić na przeciwne; zatém mantysę dolną odjąć od mantysy górnéj, ale cechę dolną dodać do cechy górnéj: tym sposobem otrzymamy powyższy wypadek.

Zadanie 4-te. Znaleść wartość:

$$x = (0,0587)^3.$$

Biorąc logarytmy obu stron, mamy:

$$Log\, x = 3\, Log\, 0{,}0587\,,$$

i daléj: $$Log\, x = \overline{2}{,}76864 \times 3\,.$$

Przy wykonywaniu mnożenia należy pamiętać o tém, że właściwie mamy do pomnożenia: $(-2+0{,}76864)$ przez 3. Otrzymamy:

$$Log\, x = \overline{4}{,}30592\,;$$

skąd: $$x = 0{,}00020226\,.$$

Zadanie 5-te. Znaleść wartość:

$$x = \sqrt{0{,}00345}$$

Biorąc logarytmy obu stron, otrzymamy:

$$Log\, x = \frac{1}{2}\, Log\, 0{,}00345\,,$$

czyli: $$Log\, x = \frac{1}{2} \times \overline{3}{,}53782 = \frac{\overline{3}{,}53782}{2}\,.$$

Przy wykonywaniu dzielenia tego logarytmu przez 2 napotykamy na trudność z tego powodu, że cecha jest odjemna i mantysa dodatnia, a cecha nie jest całkowicie podzielną przez 2. Aby uniknąć téj trudności należy albo zamienić logarytm na całkowicie odjemny, albo téż nie zmieniając jego wartości, przemienić go na taki, w którymby cecha odjemna w zupełności dzieliła się przez dwa. Gdybyśmy użyli pierwszego sposobu, wtedy należałoby następnie znaleziony logarytm znowuż przekształcić na logarytm z cechą odjemną i mantysą dodatnią dla znalezienia x. Aby nie wykonywać tego podwójnego przekształcenia, zazwyczaj postępujemy tak: do cechy odjemnéj dodajemy tyle jedności odjemnych, ile potrzeba, aby tę

cechę uczynić podzielną przez mianownik, jak tutaj dodajemy -1; aby zaś logarytm nie zmienił się, dodajemy do jego mantysy tyleż jedności dodatnich. Będzie więc:

$$Log\, x = \frac{-3+0{,}53782}{2} = \frac{-4+1{,}53782}{2} =$$

$$= -2 + 0{,}76891 = \overline{2}{,}76891\,.$$

Stąd: $$x = 0{,}058737\,.$$

Zadanie 7-me. Znaleść wartość:

$$x = \sqrt[3]{0{,}0004687}$$

Mamy: $$Log\, x = \frac{Log\, 0{,}0004687}{3} = \frac{\overline{4}{,}67089}{3}\,.$$

Ponieważ cecha nie dzieli się bez reszty przez 3, przeto postępując sposobem wskazanym wyżéj, do logarytmu $\overline{4}{,}67089$ dodajemy $-2+2$; będzie więc:

$$Log\, x = \frac{-6+2{,}67089}{3} = -2+0{,}89030 = \overline{2}{,}89030\,;$$

skąd: $$x = 0{,}077678\,.$$

Zadanie 8-me. Obliczyć wartość:

$$x = (0.082)^{1{,}53}$$

Stąd mamy: $Log\, x = 1{,}53 \times Log\, 0{,}082 = 1{,}53 \times \overline{2}{,}91381$.

W przypadkach podobnych temu, jaki mamy przed oczyma, gdzie wypada logarytm z cechą odjemną i mantysą dodatnią mnożyć przez wyrażenie złożone (tutaj przez 1,53); najdogodniejszą będzie rzeczą, dla uniknięcia pomyłek, zamienić najprzód logarytm na

całkowicie odjemny, następnie wykonać mnożenie, i potém, przeszedłszy znowuż do logarytmu z cechą odjemną i mantysą dodatnią, znaleść ostateczny wypadek. W obecnym przypadku mieć będziemy:

$$Log\ x = 1{,}53 \times (-1{,}08619),$$

stąd, wykonywając mnożenie:

$$Log\ x = -1{,}66187 = \bar{2}{,}33813,$$

i nakoniec: $x = 0{,}021783$.

79*. Za pomocą tablic logarytmowych można także rozwiązywać równania wykładnicze w niektórych szczególnych przypadkach. Równanie wykładnicze postaci:

$$a^x = b,$$

gdzie a i b są danémi liczbami, może być zawsze rozwiązane. W tym celu należy wziąć logarytmy obu stron tegoż równania; będzie:

$$x\ Log\ a = Log\ b,$$

skąd: $$x = \frac{Log\ b}{Log\ a}.$$

Tak np. przypuśćmy, że mamy do rozwiązania równanie:

$$(0{,}826)^x = 2{,}88.$$

Biorąc logarytmy obu części otrzymujemy:

$$x\ Log\ 0{,}826 = Log\ 2{,}88,$$

skąd: $$x = \frac{Log\ 2{,}88}{Log\ 0{,}826} = \frac{0{,}45939}{-0{,}08302}.$$

Ponieważ mamy tutaj wykonać dzielenie przez *Log* 0,826, przeto musimy wyrazić logarytm ten pod postacią logarytmu całkowicie odjemnego. Oczywiście dzielenie wskazane 0,45939 przez — 0,08302 możemy znowuż wykonać za pomocą logarytmów; lecz ponieważ liczby odjemne nie mają logarytmów, przeto wykonywamy działanie tak jak gdyby wszystkie dane liczby były dodatnie, a następnie przed wypadkiem piszemy znak właściwy. Wykonywając wskazane dzielenie, znajdziemy ostatecznie:

$$x = -5{,}5335.$$

Można jeszcze za pomocą logarytmów rozwiązywać równania, z niewiadomą, wchodzącą do wykładnika, nieco więcéj złożone, jak podane wyżéj; niektóre z takich równań podajemy w zadaniach.

80*. Tablice logarytmowe mogą być także używane do rozwiązywania zadań na procenta składane. Podług § 444 główny wzór na procenta składane jest:

$$M = K.R^n,$$

gdzie K oznacza kapitał początkowy, M summę na którą on zamieni się po upływie lat n, R zaś jest równe $1+r$; gdzie r jest procentem od jednostki kapitału za jeden rok. Biorąc logarytmy obu stron, otrzymamy:

$$Log\ M = Log\ K + n\ Log\ R, \ldots . (1)$$

równanie, które daje nam odpowiedź na te wszystkie pytania, jakie się odnoszą do wzoru głównego. Mianowicie: równanie (1) bezpośrednio daje nam odpowiedź na to pytanie: na co się zamieni dany kapitał K po upływie n lat przy procencie składanym po 100 r

od sta na rok. Gdyby było wiadome M, R i n, a szukane K, wtedy otrzymalibyśmy:

$$Log \overset{k}{K} = Log\ M - n\ Log\ R \ldots . (2)$$

Gdyby były wiadome M, K i n, a szukana stopa procentu, wtedy mielibyśmy:

$$Log\ R = \frac{Log\ M - Log\ K}{n} \ldots (3)$$

Za pomocą tego wzoru znaleźlibyśmy R to jest $1+r$; odejmując od znalezionéj wartości 1, i mnożąc wypadek przez 100 otrzymalibyśmy procent od sta na rok.

Nakoniec gdybyśmy chcieli znaleść n z wiadomych M, K i R, wtedy byłoby:

$$n = \frac{Log\ M - Log\ K}{Log\ R} \ldots . (4).$$

Należy jednak zwrócić uwagę tutaj, że przy pomocy tablic logarytmowych pięciocyfrowych, tylko zadania o procentach składanych z małemi stosunkowo liczbami mogą być ściśle rozwiązane. Większa część zadań odnoszących się do procentów składanych, wymaga tablic logarytmowych o znacznie większéj liczbie cyfr dziesiętnych: tu należą np. zagadnienia o umarzaniu pożyczek. Zagadnienie, często zadawane, na jaką summę zamieniłby się jeden grosz, oddany na procent składany w roku narodzenia się Chrystusa do daty obecnéj; które teoretycznie rozwiązuje się bardzo prosto za pomocą wzoru (1), wymaga do ścisłego obliczenia, umiejętności obrachowania logarytmów do znacznéj liczby cyfr dziesiętnych, i następnie z wiadomego logarytmu wynalezienia saméj liczby. Rachunki takie przechodzą po za obręb wykładu początkowego

Do praktycznego rozwiązywania zadań, odnoszących się do procentów składanych, najlepiéj używać już gotowych tablic, przeznaczonych do tego celu. Możemy tu polecić tablice tego rodzaju Spitzera *).

Zadania.

1) Czemu się równać będą logarytmy liczb: 9, 81, 729, 6561, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{243}$ przy zasadzie 3?

2) Czemu się równać będą logarytmy tychże samych liczb przy zasadzie 1) 9; 2) $\frac{1}{3}$?

3) Jakie będą logarytmy liczby 4096 przy zasadzie: 1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) 16; 5) 4096; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{64}$; 8) $\frac{1}{4096}$?

4) Czemu się równać będą logarytmy liczb: $\frac{9}{25}$, $\frac{27}{125}$, $\frac{81}{625}$ przy zasadzie: 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{5}{3}$?

5) Pomiędzy jakiemi liczbami całkowitemi są zawarte logarytmy liczb: 5, 10, 32, 82. 215, 713, 1295, gdy za zasadę układu logarytmów przyjmiemy 1) 6; 2) 9?

6) Znaleść logarytmy następujących wyrażeń;

$$1)\ Log\left[\frac{(p+q)^x}{(r+s)^{y-z}}\right];\quad 2)\ Log\left[\frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[q]{ab}}\right];$$

*) Spitzer. Tabellen für die Zinses—Zinsen—und Renten—Rechnung. Wien. Gerold's Sohn 1875, 2-ic wyd.

3) $Log\left[\frac{\sqrt[p]{a+b}\,.\,\sqrt[p]{ab}}{\sqrt[p+q]{a-b}\,.\sqrt[p]{\frac{a}{b}}}\right]$; 4) $Log\left[\sqrt[p]{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{(a+b+c)(b+c-a)}}\right]$;

5) $Log\left[\sqrt[p]{a\sqrt[p]{b\sqrt[p]{c}}}\right]$; 6) $Log\left[2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}\right]$.

7) Wiedząc, że logarytmy naturalne liczb: 2, 3, 7, 10 są: 0,693147181 ; 1,09861229 ; 1,94591015 ; 2,30258509, znaleść logarytmy zwyczajne tychże liczb.

8) Znaleść z tablic logarytmy następujących liczb:

1) 1889 ; 2) 18,89 ; 3) 188900 ; 4) 0,01889 ; 5) 4345 ; 6) 4345,1 ; 7) 4345,2 ; 8) 4345,3 ; 9) 43450 10) 43451 ; 11) 43452 ; 12) 0,052173.

9) Wiedząc, że: $Log\,2=0{,}30103$, i $Log\,3=0{,}47712$, znaleść, *bez użycia* tablic logarytmowych, logarytmy następujących liczb: 16; 5; 125; 12; 30; 1,5; 2,5; 40; 3,6; 0,036; 1080; $\sqrt[5]{0{,}0125}$; $\sqrt{31{,}25}$. (Dla znalezienia np. $Log\,5$, należy tylko zwrócić uwagę na to, że: $5=\frac{10}{2}$ i t. d.)

10) Z następujących równań znaleść wartość na x, *bez użycia* tablic:

1) $Log\,x=2$; 2) $Log\,x=3$; 3) $Log\,x=0{,}5$; 4) $Log\,x=-\frac{5}{2}$; $\left(\text{Odpow. } \frac{1}{\sqrt{10^5}}\right)$; 5) $Log\,x=Log\,a-Log\,b$; 6) $Log\,x=n\,Log\,a+n\,Log\,b$; 7) $Log\,x=3\,Log\,18-4\,Log\,12$; $\left(\frac{9}{32}\right)$; 8) $2\,Log\,x=Log\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$; $\left(\text{odpow. } \frac{1}{2\sqrt{10^3}}\right)$

9) $3\,Log\,x=\frac{5}{4}+2\,Log\,\frac{x}{3}$; $\left(\text{odpow. } \frac{1}{9}\sqrt[4]{10^5}\right)$.

Obliczyć za pomocą tablic logarytmowych wartości następujących wyrażeń:

11) 8,759 : 0,05764 ; 12) $\frac{4{,}3956\times 0{,}73654}{11{,}563}$; (0,27999) ; 13) $(0{,}877)^4$; 14) $(8{,}0952)^{-3}$; (0,001885) 15) $\left(\frac{3390\times 4{,}3472}{13814}\right)^{\frac{1}{3}}$; (1,0218); 16) $\sqrt[3]{0{,}7413}$; (0,903); 17) $\sqrt[7]{9{,}3875}$; 18) $\sqrt[7]{0{,}066473}$; (0,6789) ; 19) $\sqrt[3]{\frac{229}{531}}$; (0,7541); 20) $\frac{8\sqrt{10}}{7}$; (3,614) ; 21) $\frac{109}{716}\sqrt{\frac{76}{93}}$; 22) $\left(\frac{13}{9\times 17}\right)^3$; (0,00061341) ; 23) $\sqrt[4]{0{,}47\sqrt{\frac{19}{34}}}$; (0,7699) ; 24) $\sqrt[10]{\frac{2\sqrt[10]{2}}{\sqrt{10}}}$; (96186) ; 25) $\sqrt[4]{1{,}84+\sqrt[5]{31}}$;

(Należy najprzód obliczyć $\sqrt[5]{41}$, liczbę stąd otrzymaną dodać do 1,84 i t. d.

Wypadek 1,3987).

26) $\sqrt[5]{\frac{8}{7}\sqrt[6]{54321}}$; (1,4772); 27) $\sqrt[5]{(2{,}459)^{6{,}5}-(8{,}74)^{2{,}3}}$; (2,8891) ; 28) $\sqrt[3]{\frac{413{,}9\sqrt{0{,}5127}}{372\times 9{,}046}}$; (0,44492)

29) $2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ (patrz zadanie 6; odp. 3,8304);

Rozwiązać następujące równania:

30) $(0{,}35)^x = 54{,}8$.

31) $4^{x+2} = 60$; (Należy wziąć logarytmy obu stron; podstawić zamiast *Log* 4 i *Log* 60 ich wartości z tablic; otrzymamy równanie stopnia pierwszego).

32) $5^{2x-1} = 71{,}7$; 33) $10^{(5-x)(6-x)} = 100$; 34) $ab = \sqrt[x]{c}$;
35) $3^{x^2-4x+3} = 1200$; 36) $8^{2x} - 9 \cdot 8^x + 20 = 0$;
(oznaczywszy: 8^x przez y i podstawiwszy w dane równanie, otrzymamy równanie stopnia 2-go i t. d.)
37) $5^{2x} - 7 \cdot 5^x = 450$; 38) $5^{2x} \times 3^x = 1875 \times 225$;
(należy odrazu wziąć logarytmy obu stron);
39) $10 \times 3^{2x} + 7 \times 3^x - 132 = 0$; 40) $3^{2x} \times 5^{3x-4} = 7^{x-1} \times 11^{2-x}$: 41) $a^4 - 2a^2b^2 + b^4)^{x-1} = \frac{(a-b)^{2x}}{(a+b)^2}$;$(x = \frac{log\,(a+b)}{log\,(a-b)})$;

Rozwiązać następujące równania z dwiema niewiadomemi:

42) $Log\ x + Log\ y = 2$; $5x^2 - 3y^2 = 1925$.

(Z pierwszego równania należy najprzód znaleść xy i t. d. $x=20$; $y=5$).