





JERZY MIHULOWICZ

ALGEBRA

DLA III KLASY GIMNAZJALNEJ

CENA WRAZ ZE ZNACZKIEM
NA TOWARZYSTWO POPIERANIA BUDOWY
PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH
WYNOŚI zł 1,10

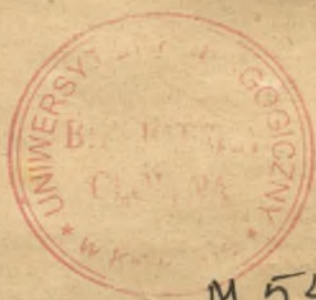


KSIĄŻNICA - ATLAS

S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.

LWÓW — WARSZAWA

1935



M 54 25311

UP - Kraków BG



1050307198

BG. UP

20. D. 203-3

2608 11

Kłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie

BIBL WSP

1969-150-11

Rozdział I

Wyrażenia ułamkowe

§ 1. Wyrażenia całkowite i ułamkowe.

Jednomiany i wielomiany nazywamy *wyrażeniami całkowitemi*. Iloraz dwu wyrażeń całkowitych nazywamy *wyrażeniem ułamkowym* lub *ułamkiem algebraicznym*. Dzielną nazywamy *licznikiem*, dzielnik *mianownikiem* ułamka.

Uławkami algebraicznymi są np. następujące wyrażenia:

$$\frac{-2}{+3}, \frac{2a^2}{3b}, \frac{4a}{2a-1}, \frac{x^2+1}{2x^3-5} \text{ i t. p.}$$

Jeżeli w wyrażeniu całkowitem podstawimy zamiast liter dowolne wartości szczegółowe i wykonamy naznaczone działania, otrzymamy zawsze pewną liczbę, którą nazywamy *wartością* tego wyrażenia dla przyjętych wartości liter.

Np.: Wielomian $3x^2 - 5x + 2$ przyjmuje dla $x = -\frac{2}{3}$ wartość:

$$3 \cdot \frac{4}{9} + 5 \cdot \frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3} + \frac{10}{3} + 2 = 6\frac{2}{3}.$$

Podobnie obliczamy w ogólności wartość ułamka algebraicznego dla danych wartości liter. Nie można jednak obliczyć wartości ułamka algebraicznego dla takich wartości liter, dla których mianownik ułamka staje się zerem; wtedy bowiem wypadłoby nam wykonać dzielenie przez 0, a działanie takie, jak wiemy, nie jest wykonalne. Mówimy, że *ułamek algebraiczny ztraca sens liczbowy dla miejsc zerowych mianownika*, t. j. dla takich wartości liter, dla których mianownik staje się zerem.

Tak np. można obliczyć wartość ułamka $\frac{3x}{x-5}$ dla wszelkich wartości x z wyjątkiem wartości $x=5$. Wtedy bowiem wypadłoby nam 15 dzielić przez 0, co jest niemożliwe.

Przy każdym ułamku algebraicznym należy przeto zawsze zdać dokładnie sprawę z tego, dla jakich wartości liter ztraca ułamek sens liczbowy.

Ćwiczenia:

Oblicz wartości następujących ułamków algebraicznych dla podanych obok nich wartości liter:

$$a) \frac{-\frac{3}{2}}{5a^2}; [a = -2; +\frac{3}{2}; 0(?); 3].$$

$$b) \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}; [x = -2; -1; 0,2; 3; 10].$$

$$c) \frac{x - 2}{x^2 - 4}; [x = -3; -2(?); -1; 0; 1; 2(?); 3; 4].$$

$$d) \frac{2ab^2}{a^3 + b^3}; [a = 0, b = 1; a = 1, b = -1(?); a = b = 2; \\ a = -2, b = +2(?)].$$

$$e) \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x}; [x = -2; -0,5; -1; 2; 0(?); 1; 3(?); 4].$$

$$f) \frac{m^2 - 1}{m^3 - 7m - 6}; [m = -3; -2(?); -1(?); 0; \frac{3}{2}; 2(?); 3].$$

§ 2. Miejsca zerowe wyrażeń całkowitych.

Ponieważ ułamek algebraiczny zatracza sens liczbowy dla miejsc zerowych mianownika, zajmiemy się zagadnieniem: Jak wyznaczamy miejsca zerowe wyrażenia całkowitego?

Chcąc znaleźć miejsca zerowe dwumianu $2x + 3$, mamy odpowiedzieć na pytanie, dla jakiej wartości x ten dwumian staje się zerem. Pytanie to zapiszemy w postaci równania: $2x + 3 = 0$. Rozwiązując je, znajdziemy: $x = -1,5$; ta wartość jest miejscem zerowym danego dwumianu.

Aby znaleźć miejsca zerowe danego wyrażenia całkowitego, układamy równanie, którego lewą stronę stanowi dane wyrażenie, a po stronie prawej jest 0; pierwiastek tego równania jest miejscem zerowym danego wyrażenia. Jeżeli to równanie jest równaniem stopnia pierwszego, rozwiązanie go nie sprawia trudności. W przeciwnym razie staramy się dane wyrażenie rozłożyć na czynniki i stosujemy twierdzenie: iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, jeżeli przynajmniej jeden z czynników jest zerem.

Np.: Miejscami zerowymi jednomianu $2a^2b$ są według ostatniego twierdzenia wartości $a = 0$ i $b = 0$.

Miejscami zerowymi dwumianu $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ są wartości $x = -1$ i $x = +1$. Dla pierwszej z tych wartości staje się zerem pierwszy czynnik iloczynu, dla drugiej drugi. Więcej miejsc zerowych dany dwumian mieć nie może, bo dla innych wartości żaden z czynników nie staje się zerem.

Nie należy sądzić, że każdy wielomian ma miejsca zerowe. Tak np. dwumian $x^2 + 3$ nie staje się zerem dla żadnej wartości x . Dla jakiegokolwiek wartości x jest bowiem x^2 liczbą nieujemną; przeto $x^2 + 3$ nie ma dla żadnej wartości x wartości mniejszej niż 3.

Ze względu na ważne zastosowania zestawiamy znane przypadki, w których umiemy wielomiany rozkładać na czynniki:

1) $ad + bd + cd = (a + b + c)d$, (wyłączanie wspólnego czynnika za nawias).

2) $ac + bc + ad + bd = (a + b)c + (a + b)d = (a + b)(c + d)$, (rozkładanie na czynniki przez grupowanie wyrazów i wyłączanie wspólnych czynników za nawias).

Wzór ten znajduje zastosowanie przy rozkładaniu na czynniki trójmianu stopnia drugiego ze względu na x , mającego postać $x^2 + mx + n$, jeżeli w takim trójmianie wyraz n niezawierający x jest iloczynem dwu liczb, a współczynnik m przy x jest sumą tych czynników. Sposób postępowania w tym przypadku wyjaśniają przykłady:

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2 + 3)x + 2 \cdot 3 = x^2 + 2x + 3x + 6 = \\ = x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3);$$

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 + (-2 - 3)x + (-2)(-3) = x^2 - 2x - 3x + 6 = \\ = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3);$$

$$x^2 - x - 6 = x^2 + (2 - 3)x + (+2)(-3) = x^2 + 2x - 3x - 6 = \\ = x(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(x - 3).$$

3) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, (kwadrat dwumianu).

4) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$, (sześcián dwumianu).

5) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, (różnica kwadratów).

Przykłady:

1. Znaleźć miejsca zerowe wielomianu $x^5 - x$.

Rozkładamy dany wielomian na czynniki:

$$x^5 - x = x(x^4 - 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = x(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1).$$

Miejscami zerowymi poszczególnych czynników, a więc i danego wielomianu, są wartości: $x = 0$, $x = -1$, $x = +1$. Dwumian $x^2 + 1$ nie ma miejsc zerowych.

2. Znaleźć miejsca zerowe wielomianu: $x^2 - 8x + 15$.

Rozkładamy wielomian na czynniki:

$$x^2 - 8x + 15 = x^2 - 3x - 5x + 15 = x(x - 3) - 5(x - 3) = (x - 3)(x - 5)$$

Miejscami zerowymi czynników, a więc i danego wielomianu są wartości: $x = 3$ i $x = 5$.

3. Dla jakich wartości a zetraca sens liczbowy ułamek $\frac{3b}{2a^3 - 2ab^2}$?

Ułamek zetraca sens dla miejsc zerowych wielomianu $2a^3 - 2ab^2$. Aby je wyznaczyć, rozkładamy ten wielomian na czynniki:

$$2a^3 - 2ab^2 = 2a(a^2 - b^2) = 2a(a + b)(a - b).$$

Miejscami zerowymi tego dwumianu, a więc i wartościami, dla których dany ułamek zetraca sens liczbowy, są wszelkie wartości a i b , dla których: $a = 0$, albo $a = -b$, albo $a = +b$.

Ćwiczenia:

1. Rozłożyć na czynniki wielomiany:

- a) $x^2 + x$; b) $5x^4 - 10x^3 + 50x^2$; c) $3a^2b - 3ab^2$;
d) $2ax^2 - 2ax$; e) $a^5 + a^4 + a^3$; f) $x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4$.

2. Rozłożyć na czynniki wielomiany:

- a) $ac + bc - ad - bd$; b) $ax - bx + cx - ay + by - cy$;
c) $ax + a + bx + b$; d) $ab + b + a + 1$;
e) $ax - a + 2x - 2$; f) $xy - 2y - x + 2$;
g) $a^2 - ab - ac + bc$; h) $x^2 - x - ax + a$;
i) $ax - ay - 2x + 2y$; j) $x^2 + xy + x - ax - ay - a$.

3. Rozłożyć na czynniki wielomiany:

- a) $x^2 + ax + bx + ab$; b) $x^2 - ax - bx + ab$;
c) $x^2 + 3x + 2$; d) $x^2 - 3x + 2$; e) $x^2 - 7x + 10$;
f) $x^2 + 9x + 18$; g) $x^2 + 4x + 3$; h) $x^2 - 4x + 3$;
i) $x^2 - 15x + 50$; j) $x^2 - 8x + 12$; k) $x^2 + 8x + 15$.

4. Rozłożyć na czynniki wielomiany:

- a) $x^2 - ax + bx - ab$; b) $x^2 + ax - bx - ab$;
c) $x^2 - x - 2$; d) $x^2 + x - 2$; e) $x^2 - x - 6$;
f) $x^2 + x - 6$; g) $x^2 - 2x - 8$; h) $x^2 + 2x - 8$;
i) $x^2 + 3x - 4$; j) $x^2 - 3x - 4$; k) $x^2 + 6x - 16$;
l) $x^2 - 6x - 16$; m) $x^2 + 5x - 6$; n) $x^2 - 5x - 6$.

5. Rozłożyć na czynniki wielomiany:

- a) $a^2 - 2ab + b^2$; b) $1 - 2x + x^2$;
c) $4x^2 + 4x + 1$; d) $4a^2 + 12ab + 9b^2$;
e) $9a^2 - 6a + 1$; f) $a^2b^2 - 2ab + 1$;
g) $x^6 + 4x^3 + 4$; h) $x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4$;
i) $9x^2 - 6xy^2 + y^4$; j) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;
k) $-a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$; l) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$;
m) $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$; n) $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$;
o) $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$.

6. Rozłożyć na czynniki wielomiany:

- | | | |
|--------------------|-------------------|--|
| a) $x^2 - 1$; | b) $4x^2 - 25$; | c) $9a^2 - b^2$; |
| d) $a^2b^2 - 1$; | e) $a^2 - 4b^2$; | f) $a^4 - 16b^2$; |
| g) $9x^4y^2 - 4$; | h) $x^2 - 0,25$; | i) $\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{3}y^2$. |

7. Rozłożyć na możliwie wielką ilość czynników wielomiany:

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $a^2b^3 - b^5$; | b) $4a^2 - 16a^2b^2$; |
| c) $2x^3 - 98x$; | d) $2a^4 + 8a^3 + 8a^2$; |
| e) $5x^2 - 10x^3 + 5x^4$; | f) $a^5 + 2a^3 + a$; |
| g) $2a^5 - 6a^4b + 6a^3b^2 - 2a^2b^3$; | h) $32x^4 + 48x^3 + 24x^2 + 4x$; |
| i) $x^4 - 2x^2 + 1$; | j) $2a^5 - 16a^3 + 32a$; |
| k) $16x^6 - 8x^4 + x^2$; | l) $x^4 - 1$; |
| m) $x^5 - x$; | n) $x^8 - y^8$; |
| o) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$; | p) $2x^7 - 24x^5 + 96x^3 - 128x$; |
| r) $x^3 - 8x^2 + 15x$; | s) $2x^4 + 2x^3 - 4x^2$; |
| t) $x^8 - 2x^4 + 1$. | |

8. Wyznacz w pamięci miejsca zerowe wyrażeń:

- a) $3ab$; $-5a^2b^3$; $4(x+1)$; $2x(x-3)$; $4ab(a-b)$;
 b) $(x+3)(x-2)$; $(2x+1)(3x-8)$; $x^2(x+2)(2x-6)$;
 c) $x(x-3)^2(x+1)$; $(2x-3)^2(2x+5)$; $(2x+3)^2$;
 $x(x^2+1)$;
 d) $(a+b)(a+2b)$; $(2a+b)(a-b)^2$; $2ab(2a-3b)$.

9. Wyznacz miejsca zerowe wielomianów:

- | | | |
|-----------------------|-------------------------------|-------------------------|
| a) $x^2 - 4$; | b) $x^2 - 6x + 9$; | c) $x^3 - x$; |
| d) $x^3 - x^2 - 6x$; | e) $x^4 + 4x^3 - 5x^2$; | f) $2x^3 - 4x^2 + 2x$; |
| g) $x^4 - 1$; | h) $x^2y + 8xy + 7y$; | i) $x^4 - 2x^2 + 1$; |
| j) $b^2 - a^2$; | k) $a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3$; | l) $a^4 - 16b^4$. |

10. Dla jakich wartości liter tracą sens liczbowy następujące ułamki algebraiczne:

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{3a^2}{2b}$; | b) $\frac{5ax}{2ay^2}$; | c) $\frac{3}{2a^2x}$; |
| d) $\frac{x+1}{2xy}$; | e) $\frac{x+2}{x-1}$; | f) $\frac{x}{x^2-4}$; |
| g) $\frac{x+2}{2x^2-3x}$; | h) $\frac{x+3}{2x^3-2x}$; | i) $\frac{x^2+1}{x^2-2x+1}$; |
| j) $\frac{x+3}{x^2-3x+2}$; | k) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$; | l) $\frac{4x^2+1}{4x^3-x}$; |
| m) $\frac{x^2-2x}{16x^4-8x^2+1}$; | n) $\frac{x^4+1}{x^5-x}$. | |

§ 3. Porównywanie ułamków algebraicznych.

Ułamki algebraiczne określiliśmy jako ilorazy wyrażeń całkowitych. Wyrażenia całkowite oznaczać będziemy w tym rozdziale wielkimi literami: A , B , C , i t. d., a stosownie do tego ułamki algebraiczne symbolami: $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, i t. p. Wyrażenia całkowite przyjmują dla wszelkich wartości liter pewne wartości względne; wartość ułamka algebraicznego $\frac{A}{B}$ przedstawia się więc dla jakichkolwiek wartości liter, dla których $B \neq 0$, jako iloraz liczb względnych. Ułamki algebraiczne mają tedy wszelkie własności ilorazów liczb względnych, jeżeli wykluczamy miejsca zerowe mianowników.

Zestawmy własności ilorazów liczb względnych, a więc i ułamków algebr., znane z nauki w klasie II:

1) $(A : B) \cdot B = A$; ($B \neq 0$). Słowami: Gdy iloraz (ułamek) pomnożymy przez dzielnik (mianownik), otrzymamy dzielną (licznik).

2) $(A : B) = A \cdot \frac{1}{B}$; ($B \neq 0$). Słowami: Dzielenie przez jakąkolwiek liczbę różną od zera można zastąpić mnożeniem przez odwrotność tej liczby.

3) $(A \pm B) : C = A : C \pm B : C$; ($C \neq 0$). Jest to prawo rozdzielności dzielenia względem dodawania i odejmowania.

4) $(AB) : C = (A : C) \cdot B$; ($C \neq 0$). Słowami: Iloczyn dzielimy przez dowolną liczbę różną od zera, dzieląc tylko jeden czynnik przez tę liczbę, a pozostałe czynniki zostawiając niezmiennione.

Opierając się na tych twierdzeniach, wyprowadzimy własności ułamków algebraicznych. Drogowskazem będą nam przytem własności ułamków zwykłych, które, jako ilorazy całkowitych liczb dodatnich, są szczególnym przypadkiem ułamków algebraicznych.

Przykłady: $\frac{3}{4} = \frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}$; $\frac{1\frac{2}{3}}{1\frac{1}{6}} = \frac{6}{6}$ wskazują, że dwa ułamki algebraiczne mogą być równe, chociaż różnią się postacią. Postaramy się znaleźć sposób, któryby pozwolił nam zbadać, czy dwa dane ułamki algebraiczne są równe.

Niechaj $\frac{A}{B}$ i $\frac{C}{D}$ oznaczają dwa równe ułamki algebraiczne, a więc niechaj będzie:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \text{ przyczem } B \neq 0 \text{ i } D \neq 0.$$

Mnożąc obie strony tej równości przez B i stosując po lewej stronie twierdzenie 1), otrzymamy:

$$A = \frac{C}{D} \cdot B.$$

Pomnóżmy obie strony tej równości przez D ; otrzymamy:

$$AD = \frac{C}{D} \cdot B \cdot D, \text{ czyli:}$$

$$AD = \left(\frac{C}{D} \cdot D \right) \cdot B, \text{ (według prawa przemienności i łączności dla iloczynu).}$$

Ponieważ $\frac{C}{D} \cdot D = C$, otrzymamy wreszcie:

$$AD = CB.$$

Znajdujemy więc:

Jeżeli dwa ułamki algebraiczne są równe, to iloczyn licznika jednego ułamka i mianownika drugiego równa się iloczynowi licznika drugiego ułamka i mianownika pierwszego.

Naodwrot można z równości iloczynów $AD = BC$ wnioskować, że $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, jeżeli $B \neq 0$ i $D \neq 0$.

Dzieląc bowiem obie strony równości $AD = BC$ najpierw przez B , a potem przez D , otrzymamy kolejno:

$$(AD) : B = (BC) : B;$$

$$\frac{A}{B} \cdot D = C, \text{ (według tw. o dzieleniu iloczynu przez liczbę);}$$

$$\left(\frac{A}{B} \cdot D \right) : D = C : D;$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \text{ (według tw. o dzieleniu iloczynu przez liczbę).}$$

Zbierając razem oba twierdzenia, powiemy:

Ułamki algebraiczne $\frac{A}{B}$ i $\frac{C}{D}$ są równe wtedy i tylko wtedy, jeżeli $AD = BC$.

Twierdzenie to daje nam możność zbadania, czy dwa dane ułamki algebraiczne są równe. Np.:

$$\text{Chcemy zbadać, czy: } \frac{x+2}{x-1} = \frac{x^2-x-6}{x^2-4x+3}.$$

Wykonując mnożenia: $(x+2)(x^2-4x+3)$ i $(x-1)(x^2-x-6)$, znajdujemy w obu przypadkach x^3-2x^2-5x+6 . Stąd wnioskujemy na podstawie ostatniego twierdzenia, że dane ułamki algebraiczne są równe, t. j. przyjmują jednakowe wartości dla wszelkich wartości x , dla których żaden z mianowników nie staje się zerem.

Ćwiczenia:

Zbadaj, czy napisane obok siebie ułamki algebraiczne są równe:

$$a) \frac{x}{x+1}; \quad \frac{x^4 - x^3 + x}{x^4 - x^2 + x + 1}; \quad b) \frac{3x^2 + 5x + 2}{6x^2 + x - 2}; \quad \frac{x+1}{2x-1};$$

$$c) \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}; \quad \frac{a^3 - b^3}{a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3};$$

$$d) \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}; \quad \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - x - 2}; \quad \frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 5x + 2};$$

$$e) \frac{x-1}{x^2 - x + 1}; \quad \frac{2x^3 - x^2 - x}{2x^4 - x^3 + x^2 + x}; \quad \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}.$$

§ 4. Przekształcanie ułamków algebraicznych.

Wiadomo, że ułamki zwykłe można rozszerzać i upraszczać, t. j. że w ułamku zwykłym wolno licznik i mianownik przez tę samą liczbę różną od zera pomnożyć lub podzielić. Zbadajmy, czy własność tę posiadają także ułamki algebraiczne. Chodzi o sprawdzenie wzoru:

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}; \quad (B \neq 0; C \neq 0).$$

Stosując twierdzenie, udowodnione w poprzednim paragrafie, stwierdzimy z łatwością, że te ułamki są rzeczywiście równe, bo $A \cdot BC = B \cdot AC$ (wskutek prawa przemienności i łączności dla iloczynu).

Ponieważ każde dzielenie zastąpić można mnożeniem przez odwrotność, jest też:

$$\frac{A}{B} = \frac{A : C}{B : C}; \quad (B \neq 0; C \neq 0).$$

Wykazaliśmy więc:

Jeżeli licznik i mianownik danego ułamka algebraicznego przez to samo wyrażenie (różne od zera) pomnożymy lub podzielimy, otrzymamy ułamek równy danemu.

Ułamki algebraiczne można więc upraszczać i rozszerzać podobnie jak ułamki zwykłe.

Ułamek zwykły upraszczamy zawsze przez wspólny dzielnik licznika i mianownika. Pojęcie dzielnika rozszerzymy obecnie.

Jedno wyrażenie całkowite A nazywamy *podzielnem* przez drugie wyrażenie całkowite B , jeżeli A da się przedstawić jako iloczyn wyrażenia B i jakiegoś trzeciego wyrażenia całkowitego C , czyli jeżeli iloraz $A : B = C$ jest wyrażeniem całkowitem. Wyrażenie A nazywa się *wielokrotnością* wyrażenia B , a wyrażenie B *podzielnikiem* lub *czynnikiem* wyrażenia A .

Ułamek algebraiczny upraszczać można przez *wspólny podzielnik* licznika i mianownika, t. j. przez wyrażenie będące podzielnikiem tak licznika jak i mianownika ułamka.

$$\text{Np.: } \frac{12a^2}{18a^3} = \frac{2}{3a} \quad (\text{Uproszczono przez } 6a^2).$$

Jeżeli licznik i mianownik ułamka są wielomianami, praktycznie jest rozłożyć je na czynniki, a potem dopiero upraszczać przez wspólne czynniki.

Przykłady:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{4a^2 - 4b^2}{8a^3 - 16a^2b + 8ab^2} &= \frac{4(a^2 - b^2)}{8a(a^2 - 2ab + b^2)} = \frac{(a+b)(a-b)}{2a(a-b)^2} = \\ &= \frac{a+b}{2a(a-b)}; \quad (a \neq 0, a \neq b). \end{aligned}$$

Uproszczono najpierw przez 4, a potem przez $a - b$.

2) Aby uprościć ułamek $\frac{2x-2}{x^3-1}$ rozkładamy na czynniki tylko licznik, bo mianownika na czynniki rozłożyć nie umiemy. Otrzymamy:

$$\frac{2x-2}{x^3-1} = \frac{2(x-1)}{x^3-1}.$$

Zauważymy, że licznik jest podzielny przez $x-1$. Badamy więc, czy mianownik nie jest przypadkiem także przez $x-1$ podzielny. W tym celu wykonywamy dzielenie (wykonaj!):

$$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1.$$

Przekonawszy się, że i mianownik jest przez $x-1$ podzielny, upraszczamy dany ułamek przez $x-1$. Otrzymamy:

$$\frac{2x-2}{x^3-1} = \frac{2(x-1)}{x^3-1} = \frac{2}{x^2+x+1}, \quad (x \neq 1, x^2+x+1 \neq 0).$$

Każdy ułamek można uprościć przez -1 . Ponieważ wskutek dzielenia przez -1 wszystkie wyrazy licznika i mianownika zmieniają znaki na przeciwne, to:

W liczniku i mianowniku ułamka algebraicznego wolno zmienić znaki wszystkich wyrazów na przeciwne.

$$\text{Np.: } \frac{-a-b}{b-a} = \frac{a+b}{a-b}; \quad (a \neq b).$$

Ćwiczenia:

Uprościć następujące ułamki algebraiczne:

- a) $\frac{6a}{8a^2}$; b) $\frac{-4a^3b}{-8a^3b^2}$; c) $\frac{77a^2bc}{22abc^2}$; d) $\frac{42ab^3}{28ab^3}$;
 e) $\frac{4}{6a-2}$; f) $\frac{2ab}{2a-10ab}$; g) $\frac{4a^3-8a^2}{8a^3-16a^2}$; h) $\frac{a-b}{2b-2a}$;
 i) $\frac{6-12x}{4x^2-2x}$; j) $\frac{-a-b}{2a^2+2ab}$; k) $\frac{2x+4}{-3x-6}$; l) $\frac{a+b}{a^2-b^2}$;
 m) $\frac{b-a}{a^2-b^2}$; n) $\frac{2a+4}{a^2-4}$; o) $\frac{3x-6}{6x^2-24}$; p) $\frac{a^2-b^2}{2b^2-2a^2}$;
 q) $\frac{x-1}{x^2-2x+1}$; r) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$; s) $\frac{2m^2+4m}{8m-2m^3}$;
 t) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x-6}$; u) $\frac{x^2+3x-4}{x^3-3x^2+3x-1}$;
 v) $\frac{a^3-3a^2+3a-1}{a^4-2a^2+1}$; w) $\frac{x^5-2x^3+x}{x^2-x^6}$;
 x) $\frac{x^3-2x+1^*}{x^2-2x+1}$; y) $\frac{2x+2^*}{x^3+1}$; z) $\frac{x^2-1^*}{x^3+1}$.

§ 5. Sprowadzanie ułamków algebraicznych do wspólnego mianownika.

Przy pomocy rozszerzania można każdy ułamek algebraiczny zamienić na ułamek o innym mianowniku, o ile tylko ten nowy mianownik jest wielokrotnością mianownika danego ułamka. Należy w tym celu tylko zbadać (zapomocą dzielenia), przez co pomnożyć należy dawny mianownik, aby otrzymać nowy, i przez to samo wyrażenie pomnożyć licznik.

Przykłady:

1) Aby ułamek $\frac{3a}{2b^3}$ (gdzie $b \neq 0$) sprowadzić do mianownika $6b^4$, zauważymy, że $6b^4$ jest wielokrotnością mianownika $2b^3$, ponieważ $6b^4 : 2b^3 = 3b$, czyli $6b^4 = 2b^3 \cdot 3b$. Mnożąc zatem licznik i mianownik danego ułamka przez $3b$, otrzymamy:

$$\frac{3a}{2b^3} = \frac{9ab}{6b^4}, \quad (b \neq 0).$$

* Porównaj przykład 2.

2) Ułamek $\frac{x-2}{x-1}$ można sprowadzić do mianownika x^2-1 , ponieważ $x^2-1=(x+1)(x-1)$ jest wielokrotnością mianownika $x-1$. Mnożąc licznik i mianownik danego ułamka przez $x+1$, otrzymamy:

$$\frac{x-2}{x-1} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-x-2}{x^2-1}, (x \neq -1, x \neq +1).$$

Przedstawiając jakiekolwiek wyrażenie całkowite w postaci ułamka z mianownikiem 1, możemy każde wyrażenie całkowite zamienić na ułamek o dowolnym mianowniku.

Np.: Aby $x-3$ przedstawić w postaci ułamka z mianownikiem $x-2$, piszemy kolejno:

$$x-3 = \frac{x-3}{1} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-2} = \frac{x^2-5x+6}{x-2}, (x \neq 2).$$

Kilka ułamków algebraicznych można *sprowadzić do wspólnego mianownika*. Za wspólny mianownik przyjąć należy *wspólną wielokrotność* (oznaczać ją będziemy w. w.) mianowników danych ułamków, t. j. wyrażenie, podzielne przez mianowniki wszystkich danych ułamków. Wyrażeniem takim jest np. iloczyn wszystkich mianowników; staramy się jednak przy sprowadzaniu ułamków algebraicznych do wspólnego mianownika przyjąć za wspólny mianownik wspólną wielokrotność możliwie niskiego stopnia. Otrzymamy ją w następujący sposób:

Rozkładamy mianowniki danych ułamków na czynniki; wypisujemy wszystkie różne czynniki mianowników, każdy w potęgze najwyższej, w jakiej znajduje się chociażby w jednym mianowniku, i tworzymy ich iloczyn. Otrzymane wyrażenie jest niewątpliwie wspólną wielokrotnością wszystkich mianowników, bo zawiera wszystkie czynniki każdego mianownika oddzielnie. Za współczynnik szczegółowy przyjmujemy najmniejszą wspólną wielokrotność czynników szczegółowych wszystkich mianowników.

Przykłady:

1) Sprowadzić do wspólnego mianownika ułamki: $\frac{5a}{2b}, \frac{b}{6a}, \frac{7}{9ab^2}$.

Rozkładamy mianowniki na czynniki:

$$2b = 2 \cdot b, \quad 6a = 2 \cdot 3 \cdot a, \quad 9ab^2 = 3^2 \cdot a \cdot b^2.$$

Obliczamy:

$$\text{w. w. } (2b, 6a, 9ab^2) = 2 \cdot 3^2 \cdot a \cdot b^2 = 18ab^2.$$

Sprowadzamy dane ułamki do mianownika $18ab^2$:

$$\frac{5a}{2b} = \frac{45a^2b}{18ab^2}, \quad \frac{b}{6a} = \frac{3b^3}{18ab^2}, \quad \frac{7}{9ab^2} = \frac{14}{18ab^2}, \quad (a \neq 0, \quad b \neq 0).$$

2) Sprowadzić do wspólnego mianownika: $\frac{2x}{3x-3}$, $\frac{x+2}{2x^2-2}$, $x-3$.

Postępując jak w przykładzie 1), znajdujemy kolejno:

$$3x-3 = 3(x-1), \quad 2x^2-2 = 2(x^2-1) = 2(x+1)(x-1).$$

$$\text{w. w. } (3x-3; 2x^2-2; 1) = 2 \cdot 3 \cdot (x+1)(x-1) = 6(x+1)(x-1).$$

$$\frac{2x}{3x-3} = \frac{2x}{3(x-1)} = \frac{4x(x+1)}{6(x+1)(x-1)},$$

$$\frac{x+2}{2x^2-2} = \frac{x+2}{2(x+1)(x-1)} = \frac{3(x+2)}{6(x+1)(x-1)},$$

$$x-3 = \frac{x-3}{1} = \frac{6(x+1)(x-1)(x-3)}{6(x+1)(x-1)}; \quad (x \neq 1, \quad x \neq -1).$$

Ćwiczenia:

1. W następnych zadaniach obliczyć liczniki ułamków, oznaczone znakiem „?":

$$a) \frac{3a}{2b^2c} = \frac{?}{6ab^2c^2};$$

$$b) \frac{2}{3xy} = \frac{?}{12x^2y};$$

$$c) \frac{3ax}{6by^2} = \frac{?}{6ab^2x^2y^2};$$

$$d) \frac{a-b}{a+b} = \frac{?}{a^2-b^2};$$

$$e) \frac{a+3}{2a-2} = \frac{?}{6(a-1)^2};$$

$$f) \frac{2x-1}{4x+2} = \frac{?}{8x^2+8x+2};$$

$$g) \frac{x+1}{(x+3)^2} = \frac{?}{(x+3)^3};$$

$$h) \frac{x+2}{x-1} = \frac{?}{x^2-5x+4};$$

$$i) \frac{x+1}{x^2-x} = \frac{?}{x^3-x};$$

$$k) \frac{x^2+x+1}{x^2+3x-1} = \frac{?}{6x^3+18x^2-6x};$$

$$l) \frac{x+1}{x-3} = \frac{?}{x^3-2x^2-4x+3}.$$

2. Dla następujących wyrażeń znaleźć wspólną wielokrotność możliwie niskiego stopnia:

$$a) 2a; 3b; 5; \quad b) 6a; 4b^2; 8; \quad c) 6a^2; 9b; 2ab^2;$$

$$d) 12a^3; 15ab; 40b^2; 20b^3; \quad e) x; 2y; y^2; 4x^3; 6xy;$$

$$f) a; a+1; a-1; \quad g) 2x+4; 3x+6; 4x+8;$$

$$h) x^2-4y^2; x+2y; x-2y; \quad i) 4a^2-4; 6a^2-6a;$$

$$j) x^2-2x+1; x^2-1; \quad k) x^2-4; x^2+5x+6;$$

- l) $x^2 - 3x + 2$; $x^2 + x - 2$; m) $x^3 - x$; $x^3 + x^2$;
 n) $a^4 - 1$; $a^4 + a^2$; $a^4 + a^3$; $a^4 - a^2$; $a^4 - a^3$;
 o) $4x^3 + 24x^2 + 36x$; $6x^3 - 18x^2$; $2x^3 - 18x$;
 p) $12a^2b$; $18ab^2$; $6a^3 - 6ab^2$; $4ab^2 + 4b^3$.

3. Sprowadzić do wspólnego mianownika:

- a) 4 ; $2x$; $\frac{5}{4x}$; $\frac{7}{6x^2}$; b) $2a$; $\frac{8}{15a^2}$; $\frac{7a}{10}$; $\frac{5}{6a}$;
 c) $\frac{a-2}{4a^2}$; $\frac{3a-2}{12a}$; $a+1$; d) $a+1$; $\frac{3}{a-1}$; $\frac{2}{a}$;
 e) $\frac{a-3}{3a-3}$; $\frac{a+4}{2a-2}$; $\frac{a+1}{a-1}$; f) $\frac{2}{9x^2-9x}$; $\frac{5}{18x^2}$; $\frac{x+1}{2x-2}$;
 g) $\frac{a-1}{a+1}$; $\frac{a+1}{a-1}$; $\frac{a^2}{a^2-1}$; h) $\frac{x-1}{x^2+2x+1}$; $\frac{x+2}{x^2-1}$;
 i) $\frac{3}{x^4-1}$; $\frac{2}{x^4-2x^2+1}$; $\frac{1}{x^2+1}$; $\frac{4}{x^2+2x+1}$;
 j) $\frac{3}{4a^3-4a}$; $\frac{5}{6a^3+12a^2+6a}$; $\frac{1}{9a^3-18a^2+9a}$;
 k) $\frac{x}{x^2-3x+2}$; $\frac{x+1}{x^2-4x+4}$; $\frac{x-2}{x^2-1}$;
 l) $\frac{3}{x^3-4x}$; $\frac{2x}{3x^2-12x+12}$; $\frac{1}{2x^3+4x^2}$; $x+2$.

§ 6. Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych.

Zgodnie z prawem rozdzielności dzielenia względem dodawania i odejmowania jest:

$$\frac{A \pm B}{C} = \frac{A}{C} \pm \frac{B}{C}, \text{ jeżeli } C \neq 0.$$

Przestawiając w tej równości lewą stronę z prawą, otrzymamy:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}, \text{ jeżeli } C \neq 0.$$

Ostatnią równość możemy tak odczytać:

Ułamki algebraiczne o równych mianownikach dodajemy (odejmujemy), dodając (odejmując) ich liczniki i dzieląc otrzymaną sumę (różnicę) przez wspólny mianownik.

$$\begin{aligned} \text{Np. } \frac{5x-3}{x^2-1} + \frac{x^2-3x}{x^2-1} - \frac{x-3}{x^2-1} &= \frac{5x-3+x^2-3x-x+3}{x^2-1} = \\ &= \frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x}{x+1}; (x \neq +1, x \neq -1). \end{aligned}$$

Jeżeli ułamki algebraiczne, które mamy dodawać lub odejmować, nie mają równych mianowników, należy je przed wykonaniem działania do wspólnego mianownika sprowadzić.

Przykłady:

$$1) \quad x - 1 - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2}{x-1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1 - x - 1}{x-1} = \\ = \frac{x^2 - 3x}{x-1}; \quad (x \neq 1).$$

$$2) \quad \frac{2a}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{2b}{a^2 - b^2} - \frac{1}{a+b} = \\ = \frac{2a}{(a-b)^2} - \frac{2b}{(a+b)(a-b)} - \frac{1}{a+b} = \\ = \frac{2a(a+b)}{(a-b)^2(a+b)} - \frac{2b(a-b)}{(a-b)^2(a+b)} - \frac{(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)} = \\ = \frac{2a^2 + 2ab - 2ab + 2b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{(a-b)^2(a+b)} = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{(a-b)^2(a+b)} = \\ = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2(a+b)} = \frac{a+b}{(a-b)^2}; \quad (a \neq b, \quad a \neq -b).$$

Ćwiczenia:

1. Wykonać działania:

$$a) \quad \frac{a-3}{12a} - \frac{3a-5}{20a};$$

$$b) \quad \frac{2x+3y}{5xy} - \frac{6x-y}{15xy};$$

$$c) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a};$$

$$d) \quad \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab};$$

$$e) \quad \frac{2a+b}{4b} - \frac{a^2+b^2}{6ab} + \frac{2b-2a}{3a} - \frac{a+2b}{4a};$$

$$f) \quad 1 - \frac{a+1}{a} + \frac{a+2}{a^2} - \frac{a-1}{a^3};$$

$$g) \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) - \frac{a+b}{b};$$

$$h) \quad \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) - \frac{a-b}{a};$$

$$i) \quad \frac{x^3+x^2-7}{21x^3} + \frac{x+1}{3x^3} - \frac{x^2-x+2}{6x^2} - \frac{3x-4}{14x};$$

$$j) \quad a-b - \frac{a^2+b^2}{a} - \frac{a^2-b^2}{b} + \frac{a^2(a+b)}{b^2};$$

$$k) \quad \frac{x+y}{2xy} + \frac{x+z}{2xz} - \frac{y+z}{2yz};$$

$$l) \quad \frac{a-b}{ab} - \frac{a-c}{ac} + \frac{b-c}{bc}.$$

2. Wykonać działania:

$$a) \frac{2(a+2)}{2a-1} - \frac{3(1-a)}{2a-1} - \frac{4-a}{2a-1};$$

$$b) \frac{2(2x+1)}{x^2-1} - \frac{3(x-2)}{x^2-1} - \frac{6-x}{x^2-1};$$

$$c) 1 - \frac{a}{a+b};$$

$$d) \frac{4a}{2a-1} + 2a - 1;$$

$$e) a + b - \frac{4ab}{a+b};$$

$$f) a + b + \frac{b^2}{a-b};$$

$$g) \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1};$$

$$h) \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a-1} + \frac{2}{a^2-1} + 1;$$

$$i) \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1};$$

$$j) \frac{2a-3b}{2a+3b} - \frac{2a+3b}{2a-3b};$$

$$k) \frac{x}{4x-8} - \frac{1}{2x-4};$$

$$l) \frac{3(x-5)}{4x-12} - \frac{2x-15}{6x-18};$$

$$m) \frac{5x-1}{12x-6} - \frac{2x+1}{16x-8};$$

$$n) \frac{a-2b}{2a+4b} - \frac{a^2-3ab+2b^2}{3a^2+6ab};$$

$$o) \frac{a-2b}{a+b} + \frac{ab+3b^2}{a^2+2ab+b^2};$$

$$p) \frac{a+b}{a-b} + \frac{2b(a+b)}{a^2-2ab+b^2};$$

$$q) \frac{5}{x-3} - \frac{15}{x^2-3x} - \frac{17}{4x};$$

$$r) \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x};$$

$$s) \frac{a^2+2ab+b^2}{12ab-12b^2} - \frac{a}{12b} + \frac{b}{6a+6b} + \frac{b^2}{3a^2-3b^2};$$

$$t) \frac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2} + \frac{3ab}{a^2+2ab+b^2} + \frac{3b}{2a-2b} - \frac{3ab-3b^2}{2a^2+4ab+2b^2};$$

$$u) \frac{3x+1}{4x-4} + \frac{x^2-2x+1}{4x^2+8x+4} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+2x+1};$$

$$v) \frac{5}{x^2-x-6} - \frac{3}{x^2+x-2}; \quad x) \frac{5x-5}{x^2-2x-3} - \frac{9x-2}{2x^2-2x-12};$$

$$y) \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)};$$

$$z) \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{a+c}{(b-a)(b-c)} + \frac{a+b}{(c-a)(c-b)}.$$

3. a) O ile zmieni się* ułamek $\frac{a}{b}$, jeżeli do jego licznika i mianownika dodamy 1? Kiedy zmiana ta jest dodatnia, a kiedy

* Przez zmianę ułamka rozumiemy różnicę między jego nową (zmienioną) wartością, a wartością pierwotną.

ujemna, jeżeli a i b są liczbami dodatnimi? Czy wartość ułamka wzrasta czy zmniejsza się przez dodanie 1 do licznika i mianownika? Sprawdź na kilku przykładach.

- b) Zbadaj w podobny sposób jak w zadaniu poprzednim zmianę wartości ułamka, powstałą przez odjęcie liczby 1 od licznika i mianownika ułamka.
- c) O ile zmieni się wartość ułamka $\frac{a}{b}$, w którym a i b oznaczają liczby dodatnie, jeżeli jego licznik i mianownik podniesiemy 1) do kwadratu; 2) do sześciannu?
- d) Koszta wycieczki klasy, liczącej a uczniów, rozdzielono na równe części między wszystkich uczniów i okazało się, że każdy uczeń miał płacić m zł. Ponieważ jednak w klasie było b uczniów ubogich, zobowiązali się pozostali uczniowie zapłacić za nich koszta wycieczki, rozkładając tę kwotę między siebie. Po ile zł musieli płacić pozostali uczniowie?

Po ułożeniu i przekształceniu wzoru podstawić: $a = 30$; $b = 5$; $m = 2,5$.

- e) Klasa, licząca a uczniów, urządziła dwie wycieczki. Koszta pierwszej wycieczki wynosiły p zł; koszta drugiej wycieczki były o q zł mniejsze, lecz klasa liczyła wtedy już o n uczniów mniej, niż w czasie pierwszej wycieczki. O ile większa (mniejsza) opłata wypadła na każdego ucznia za udział w drugiej wycieczce, niż w pierwszej?

Po ułożeniu i przekształceniu ogólnego wzoru podstawić:

a) $a = 28$; $n = 3$; $p = 53,2$; $q = 10,7$; b) $a = 28$; $n = 3$; $p = 53,2$; $q = 5,7$; c) $a = 28$; $n = 3$; $p = 53,2$; $q = 3,2$,

- f) Miano rozdzielić a zł między n ubogich. W ostatniej chwili przed podziałem kwota przeznaczona do podziału wzrosła o b zł, a liczba ubogich zmniejszyła się o m . O ile zł więcej otrzyma teraz każdy ubogi?

Sprawdzić, przyjmując: $a = 30$; $b = 6$; $n = 10$; $m = 1$.

- g) Płynąc z prądem rzeki, przebywa statek s km w t godzinach; płynąc przeciw prądowi potrzebuje na przebycie tej samej drogi o t' godzin więcej. O ile km więcej przebywa statek w jednej godzinie, gdy płynie z prądem rzeki, niż gdy płynie przeciw prądowi?

Sprawdź, przyjmując za s , t i t' dowolne szczegółowe wartości.

h) Pociąg przebył połowę drogi $2s$ km z prędkością c km/godz., a drugą połowę z prędkością mniejszą o b km/godz. Jak długo trwała podróż? Ile minut spóźnił się pociąg, jeżeli miał jechać całą drogę z prędkością c km/godz.?

Sprawdzić, przyjmując: $2s = 210$; $c = 60$; $b = 12$.

§ 7. Mnożenie ułamka algebraicznego przez wyrażenie całkowite.

Uogólniając przykład: $\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4}$, sprawdźmy dla ułamków algebraicznych równość:

$$\frac{A}{B} \cdot C = \frac{AC}{B}, \quad (B \neq 0).$$

Że równość ta jest prawdziwa, łatwo widzieć natychmiast, przedstawiając w niej lewą stronę z prawą. Otrzymamy wtedy wzór $\frac{AC}{B} = \frac{A}{B} \cdot C$, który wyraża znane twierdzenie o dzieleniu iloczynu przez liczbę (§ 3, twierdzenie 4). Równość powyższą możemy tak odczytać:

Ułamek algebraiczny mnożymy przez wyrażenie całkowite, mnożąc jego licznik przez wyrażenie całkowite, a mianownik zostawiając niezmienny.

Np.:
$$\frac{x}{x+3} \cdot (2x-1) = \frac{x(2x-1)}{x+3}; \quad (x \neq -3).$$

Ponieważ przy tem mnożeniu wyrażenie całkowite wchodzi jako czynnik do licznika, można przed wykonaniem mnożenia wyrażenie całkowite z mianownikiem ułamka uprościć.

Np.: 1)
$$\frac{2a}{3(a^2-1)} \cdot (2a^2+2a) = \frac{2a}{3(a+1)(a-1)} \cdot 2a(a+1) =$$

$$= \frac{2a}{3(a-1)} \cdot 2a = \frac{4a^2}{3(a-1)}; \quad (a \neq 1, a \neq -1).$$

2)
$$(x+1) \cdot \frac{x^2+1}{x^2+x} = (x+1) \cdot \frac{x^2+1}{x(x+1)} = \frac{x^2+1}{x}; \quad (x \neq 0, x \neq -1).$$

Stosując twierdzenie o mnożeniu ułamka przez wyrażenie całkowite, otrzymamy:

$$\frac{-a^2+3a-2}{a^2+1} \cdot (-1) = \frac{a^2-3a+2}{a^2+1}.$$

Zważywszy zaś, że mnożenie liczby przez -1 zmienia tę liczbę na przeciwną, znajdziemy:

$$\frac{-a^2+3a-2}{a^2+1} \cdot (-1) = -\frac{-a^2+3a-2}{a^2+1}.$$

Porównując oba wyniki, otrzymamy:

$$\frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 + 1} = - \frac{-a^2 + 3a - 2}{a^2 + 1}.$$

Z przykładu tego wysnuwamy regułę:

Przed ułamek algebraiczny można wyłączyć znak $-$, zmieniając równocześnie znaki wszystkich wyrazów w liczniku na przeciwne. I naodwrot: Znak $-$ przed ułamkiem algebraicznym można opuścić (lub zastąpić znakiem $+$), zmieniając równocześnie znaki wszystkich wyrazów w liczniku na przeciwne.

Ćwiczenia:

Wykonać działania:

a) $\left(-\frac{12ab}{13c}\right) \cdot (-3a^2);$

b) $\left(-\frac{5}{18a^2}\right) \cdot (+9a);$

c) $\left(+\frac{12}{5a^3}\right) \cdot (-10a^3);$

d) $\frac{8a^5}{3b^2} \cdot 6ab;$

e) $\frac{-5a}{2b^2c} \cdot (-4ab^4c);$

f) $\frac{2x^3}{-5a^2} \cdot 2ax;$

g) $\frac{3(a+b)}{2(a-b)} \cdot (a^2 - b^2);$

h) $\frac{5a-5}{2a^2+4a+2} \cdot (2a^2-2);$

i) $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2} \cdot (a^2-b^2);$

j) $\frac{a^2-ab}{ab+b^2} \cdot (a^2+2ab+b^2);$

k) $\frac{x-1}{x^2-4} \cdot (x^2-x-2);$

l) $\frac{x+1}{2x^3-x^2} \cdot (x^3-x^2).$

§ 8. Dzielenie ułamka algebraicznego przez wyrażenie całkowite.

Przykład $\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{5 \cdot 2}$ nasuwa myśl, że dla wszelkich ułamków algebraicznych jest:

$$\frac{A}{B} : C = \frac{A}{BC}; \quad (B \neq 0; C \neq 0).$$

I rzeczywiście równość ta jest prawdziwa. Gdy bowiem iloraz $\frac{A}{BC}$ pomnożymy przez dzielnik C , otrzymamy dzielną $\frac{A}{B}$, jak wskazuje rachunek:

$$\frac{A}{BC} \cdot C = \frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}.$$

Udowodnioną równość odczytamy tak:

Ułamek algebraiczny dzielimy przez wyrażenie całkowite, pozostawiając licznik ułamka niezmienny, a mnożąc mianownik przez wyrażenie całkowite.

$$\text{Np.: } \frac{4a^3}{15b^2} : 2a^2b = \frac{4a^3}{30a^2b^3} = \frac{2a}{15b^3}; (a \neq 0; b \neq 0).$$

Ćwiczenia:

Wykonać działania:

$$a) \left(-\frac{2a}{3b^2}\right) : (-5b); \quad b) \frac{3a^3b^2}{2x} : 3ab^2; \quad c) \frac{6ax^2}{5by^2} : 2ax;$$

$$d) \left(-\frac{12ab^2}{5c}\right) : (-4b); \quad e) \frac{2x^2}{9a^3} : 2a^2x^2; \quad f) \frac{10a^2}{b^3} : 5ab;$$

$$g) \frac{4a^2b}{a+b} : (2a^3b - 2ab^3); \quad h) \frac{x+1}{x-1} : (1-x^2);$$

$$i) \frac{x^3+x^2}{x-1} : (x^4-x^2); \quad j) \frac{4a^4-8a^3b+4a^2b^2}{a+b} : (8a^2b-8a^3);$$

$$k) \frac{a-b}{a+b} : (b-a); \quad l) \frac{1-m}{1+m} : (m^2-1).$$

§ 9. Mnożenie i potęgowanie ułamków algebraicznych.

Uogólniając przykład $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$, domyślamy się, że w podobny sposób można mnożyć wszelkie ułamki algebraiczne, że więc:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}; (B \neq 0; D \neq 0).$$

Sprawdźmy ten wzór:

Jeżeli $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$ równa się ilorazowi $\frac{AC}{BD}$, to mnożąc $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$ przez dzielnik BD , musimy otrzymać dzielną AC . I rzeczywiście:

$$\left(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}\right) \cdot BD = \left(\frac{A}{B} \cdot B\right) \cdot \left(\frac{C}{D} \cdot D\right) \text{ według prawa przemienności i łączności dla iloczynu.}$$

$$= AC, \text{ ponieważ (według tw. 1 w § 3) } \frac{A}{B} \cdot B = A$$

$$\text{ i } \frac{C}{D} \cdot D = C.$$

Wzór powyższy jest więc prawdziwy. Możemy go tak odczytać:



Ułamek algebraiczny mnożymy przez ułamek algebraiczny, dzieląc iloczyn ich liczników przez iloczyn ich mianowników.

$$\text{Np.: } \frac{a-b}{3a} \cdot \frac{2b}{a+b} = \frac{2ab-2b^2}{3a^2+3ab}; (a \neq 0, a \neq -b).$$

Ponieważ przy mnożeniu ułamków algebraicznych liczniki obu ułamków wchodzi jako czynniki do licznika iloczynu, a mianowniki wchodzi jako czynniki do mianownika iloczynu, można przed wykonaniem mnożenia ułamków licznik jednego ułamka z mianownikiem drugiego uprościć.

$$\text{Np.: } \frac{12a^3}{5b^2} \cdot \frac{15}{8ab} = \frac{3a^2}{b^2} \cdot \frac{3}{2b} = \frac{9a^2}{2b^3}.$$

Z twierdzenia o mnożeniu ułamków algebraicznych otrzymujemy natychmiast twierdzenie:

Ułamek algebraiczny potęgujemy, potęgując jego licznik i mianownik, a otrzymane potęgi dzieląc.

Aby to twierdzenie udowodnić, wystarczy zastąpić potęgę iloczynem równych czynników. Otrzymamy:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \underbrace{\frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{A}{B} \cdot \dots}_{n \text{ razy}} = \frac{\overbrace{A \cdot A \cdot A \dots}^{n \text{ razy}}}{\underbrace{B \cdot B \cdot B \dots}_{n \text{ razy}}} = \frac{A^n}{B^n}; (B \neq 0).$$

$$\text{Np.: } \left(\frac{-2x}{x+1}\right)^2 = \frac{4x^2}{x^2+2x+1}, (x \neq -1).$$

Ćwiczenia:

1. Wykonać działania:

$$a) \frac{3a^2}{b} \cdot \frac{2a^3}{5b^2};$$

$$b) \frac{3a^5}{8b^2} \cdot \frac{a}{b};$$

$$c) \frac{2a^3}{3b^2} \cdot \frac{6b}{a};$$

$$d) \frac{2a^3b}{3c^2} \cdot \frac{12bc^3}{a^3};$$

$$e) \frac{5xy}{2ab} \cdot \frac{6ab}{5y};$$

$$f) \frac{2x}{3ab} \cdot \frac{3b}{2ax};$$

$$g) \left(-\frac{2a^5b}{21xy}\right) \cdot \left(-\frac{7x^2y}{4a^4b^2}\right); \quad h) \left(-\frac{2a^3}{9b^2}\right) \cdot \left(+\frac{3b^3}{2a^4}\right);$$

$$i) \frac{a}{b} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b}{a^3} \cdot \frac{b^3}{a};$$

$$j) \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ac}{b^2};$$

$$k) \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+b}{a^2};$$

$$l) \frac{a^2+2a+1}{a^2-2a+1} \cdot \frac{a-1}{a+1};$$

$$m) \frac{x^3-x^2}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x^2-x^3};$$

$$n) \frac{x^3-5x^2+6x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x^3-4x^2+4x}.$$

2. Wykonać działania:

$$a) \left(\frac{2a^3}{3b^2} \right)^2;$$

$$b) \left(-\frac{3a^2}{2b} \right)^3;$$

$$c) \left(-\frac{ax^2}{2y} \right)^4;$$

$$d) \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2;$$

$$e) \left(\frac{x^2}{2x-1} \right)^2;$$

$$f) \left(\frac{x}{y} \right)^2 \cdot \left(\frac{y}{x^2} \right)^3 \cdot \left(\frac{x^2}{y} \right)^2.$$

§ 10. Dzielenie ułamków algebraicznych.

Każdy z ułamków algebraicznych $\frac{C}{D}$ i $\frac{D}{C}$ (przyczem $C \neq 0$ i $D \neq 0$) nazywa się *odwrotnością* pozostałego. Mają one tę własność, że iloczyn ich ma wartość 1. Jest bowiem:

$$\frac{C}{D} \cdot \frac{D}{C} = \frac{CD}{CD} = 1.$$

Udowodnimy twierdzenie:

Dzielenie przez ułamek algebraiczny można zastąpić mnożeniem przez odwrotność dzielnika; czyli wzorem:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}; \quad (B \neq 0; C \neq 0; D \neq 0).$$

Gdy bowiem otrzymany iloraz $\frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$ pomnożymy przez dzielnik $\frac{C}{D}$, otrzymamy dzielną $\frac{A}{B}$, jak wskazuje następujący rachunek:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \right) \cdot \frac{C}{D} &= \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{D}{C} \cdot \frac{C}{D} \right) \text{ według prawa łączności dla iloczynu;} \\ &= \frac{A}{B}, \text{ ponieważ } \frac{D}{C} \cdot \frac{C}{D} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Np.: } \frac{a+1}{a-2} : \frac{a+2}{a-1} = \frac{a+1}{a-2} \cdot \frac{a-1}{a+2} = \frac{a^2-1}{a^2-4}; \quad (a \neq 2; a \neq -2; a \neq 1)$$

Ćwiczenia:

Wykonać działania:

$$a) a^3 : \frac{a^2}{b};$$

$$b) \frac{a^4 b}{6c^3} : \frac{2a^2 b}{3c};$$

$$c) (-4a^3 b^2) : \frac{2a^3}{3b};$$

$$d) 2a : \frac{4a^2}{3b};$$

$$e) ab : \frac{a}{b};$$

$$f) \left(-\frac{12a^2 x}{35b^4} \right) : \frac{4a^2}{21b^4};$$

$$g) (a^2 - b^2) : \frac{a-b}{a+b};$$

$$h) \frac{x^3 - x}{x^2 - 9} : \frac{x^2 - x}{x + 3};$$

$$i) \frac{n}{2m^2 - 2mn} : \frac{1}{n-m};$$

$$j) \frac{1}{x^2 + 2x} : \frac{1}{x^3 - 4x}.$$

§ 11. Ułamki podwójne.

Ostatnie twierdzenie wskazuje, że iloraz dwóch ułamków algebraicznych (t. zw. *ułamek podwójny* lub *piętrowy*) da się zawsze sprowadzić do postaci zwykłego ułamka algebraicznego (ilorazu dwóch wyrażeń całkowitych). Ułamki podwójne można zresztą tak dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić jak zwykle ułamki algebraiczne. Aby się o tem przekonać wystarczy we wszystkich rozumowaniach w paragrafach 4 ÷ 10 uważać A , B , C i D nie za wyrażenia całkowite, lecz za ułamki algebraiczne; jeżeli wykluczamy wartości liter, dla których wyrażenia A , B , C i D tracą sens liczbowy, pozostają wszystkie przekształcenia prawdziwe.

Kilka przykładów wskaże nam, jak przekształcamy ułamki podwójne.

1) Mając dany ułamek podwójny
$$\frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{\frac{x-1}{x^2-4}},$$
 należy najpierw zastanowić

się dla jakich wartości x to wyrażenie nie ma sensu liczbowego. Ułamek w liczniku ztraca sens, jeżeli $x = -2$; ułamek w mianowniku ztraca sens, gdy $x = 2$, lub $x = -2$; mianownik $\frac{x-1}{x^2-4}$ ułamka podwójnego staje się zerem, gdy $x = 1$; wtedy również ztraca sens liczbowy ułamek podwójny. Dla wszelkich innych wartości x można wartość danego ułamka podwójnego obliczyć. Wykluczając dla x wartości -2 , -1 i $+2$, możemy wykonać naznaczone w ułamku podwójnym dzielenie ułamków i otrzymamy:

$$\frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{\frac{x-1}{x^2-4}} = \frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x-1} = (x+1)(x-2).$$

Można też (zakładając, że x nie przyjmuje wartości -2 , -1 i $+2$) licznik i mianownik ułamka podwójnego pomnożyć przez $x^2-4 = (x+2)(x-2)$. Otrzymamy:

$$\frac{\frac{x^2-1}{x+2}}{\frac{x-1}{x^2-4}} = \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x-1)} = (x+1)(x-2).$$

2) Mając dany ułamek podwójny
$$\frac{1 + \frac{1}{q^2}}{1 - \frac{1}{q}},$$
 zakładamy, że $q \neq 0$ i $q \neq 1$,

i mnożymy licznik i mianownik ułamka podwójnego przez q^2 . Otrzymamy:

$$\frac{1 + \frac{1}{q^2}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{q^2 + 1}{q^2 - q}.$$

Można też wykonać naznaczone dodawanie w liczniku i naznaczone odejmowanie w mianowniku, a potem podzielić otrzymane ułamki. Wykonaj!

Na ułamki podwójne natrafiamy zawsze, gdy w zwykłym ułamku algebraicznym na miejsce jakiejś litery wprowadzamy wyrażenie ułamkowe. Np.:

W wyrażeniu $\frac{a^2-1}{2a-1}$, w którym $2a-1 \neq 0$, chcemy podstawić $a = \frac{x-1}{x-2}$, ($x \neq 2$). Otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{a^2-1}{2a-1} &= \frac{\frac{(x-1)^2}{(x-2)^2} - 1}{\frac{2x-2}{x-2} - 1} = \frac{(x-1)^2 - (x-2)^2}{(2x-2)(x-2) - (x-2)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4x - 4}{2x^2 - 2x - 4x + 4 - x^2 + 4x - 4} = \frac{2x-3}{x^2-2x}. \end{aligned}$$

Dla x należy wykluczyć oprócz wartości $x=2$ także tę wartość, dla której $2a-1=0$. Wartością tą jest (jak to zresztą z postaci ostatniego ułamka widać) $x=0$. Sprawdź!

Ćwiczenia:

1. Następujące ułamki podwójne sprowadzić do postaci ilorazów wyrażeń całkowitych:

$$a) \frac{\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b-c}};$$

$$b) \frac{p-2 + \frac{1}{p}}{\frac{1}{p} - p};$$

$$c) 1 + \frac{x}{1+x + \frac{2x^2}{1-x}};$$

$$d) 1 + \frac{1 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}};$$

$$e) \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}};$$

$$f) \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}}.$$

2. W podanych niżej wyrażeniach podstawić w miejsce x (względnie x i y) napisane obok wyrażenie i wykonać naznaczone działania:

$$a) \frac{x-1}{x+2}; \quad x = \frac{a+2}{a-1};$$

$$b) \frac{2x+1}{3x-1}; \quad x = \frac{a+1}{a-1};$$

$$\begin{array}{ll}
 c) \frac{x^2-1}{x^2-4}; & x = \frac{2a-1}{a-2}; \\
 d) \frac{ax^2-ax+1}{ax^2-x}; & x = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}; \\
 e) \frac{xy}{x+y}; & x = \frac{a-1}{a+3}; \quad y = \frac{a+1}{a-3}; \\
 f) \frac{a-x}{b-x}; & x = \frac{ab}{a+b}; \\
 g) \frac{(x-a)^2}{x^2-(a+1)^2}; & x = \frac{a^2+1}{a-1}; \\
 h) \frac{x^2-m^2}{x^2+m^2}; & x = \frac{m^2+m}{m-1}; \\
 i) \frac{xy}{x^2-y^2}; & x = \frac{ab}{a-b}; \quad y = \frac{ab}{a+b}.
 \end{array}$$

3.* Wykonać działania:

$$\begin{array}{ll}
 a) \left(3a^2b - \frac{3}{4}ab^2\right) \cdot \frac{2a}{3b}; & b) \left(x - \frac{a}{3x}\right) \cdot \left(\frac{3x}{a} + \frac{1}{x}\right); \\
 c) \left(a + \frac{2}{a}\right)\left(a - \frac{2}{a}\right); & d) \left(\frac{a}{2b} - \frac{b}{a}\right)^2; \\
 e) \left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m}\right)^3; & f) \left(\frac{a^2}{4x} + \frac{a}{2} + x\right) \cdot \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{a}\right); \\
 g) \left(\frac{x+2}{3} - \frac{x+3}{6}\right) \cdot \frac{3}{2x+2}; & h) \left(\frac{x}{x-y} - \frac{x-y}{x}\right)^2; \\
 i) \left(1 + \frac{7+5x}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{5x-2}{6} - \frac{3x-1}{4}\right); \\
 j) \frac{ab}{a-b} \left(1 - \frac{b}{a}\right); & k) \left(1 + \frac{x^2}{1+x}\right) \left(1 + \frac{x^2}{1-x}\right); \\
 l) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right); & m) \left(\frac{2a^2b}{a-b} - \frac{2ab^2}{a+b}\right) \left(1 - \frac{a^2+b^2}{2ab}\right); \\
 n) \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right); & o) \left[1 - \frac{1+(a+1)^2}{2a+3}\right] : \frac{a+1}{6a+9}; \\
 p) \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) : \frac{2x}{1-2x+x^2}; \\
 q) \left[\frac{x+1}{2} - \frac{x}{6}\right] : \left[\frac{(3x+1)^2 - (2x^2+1)}{3} - x^2\right]; \\
 r) \left[x(x-1) + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right] : \left[2x-1 + \frac{2x-1}{5}\right]; \\
 s) (a+b) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right); & t) (x+y+z) : \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}\right);
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 u) & \left(\frac{a+b}{c} - \frac{a}{b+c} \right) : \left(\frac{a+c}{b} - \frac{a}{b+c} \right); \\
 w) & \left[\frac{a+b}{a+c} - \left(\frac{a}{a+c} \right)^2 \right] : \left[\frac{b+c}{a+b} - \left(\frac{b}{a+b} \right)^2 \right]; \\
 x) & \left[1 - \frac{x}{(x+1)^2} \right] : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right); \\
 y) & \left[\frac{1}{m^2-1} - \frac{1}{n^2-1} \right] : \left[\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \right]; \\
 z) & \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} \right) : \left(b - \frac{2b^2}{a+b} \right).
 \end{aligned}$$

4. W następujących przykładach ułożyć wzór rozwiązujący zadanie i przekształcić go na wygodny do rachunku. Sprawdzić wzór, przyjmując za litery szczegółowe wartości.

- Samolot przebył drogę s km w t min. W jakim czasie przebędzie drogę n razy dłuższą, jeżeli wskutek niepomysłnych warunków atmosferycznych prędkość samolotu będzie o a km/min. mniejsza?
- Kupiec sprowadził a kg towaru po z zł za kg i sprzedał cały towar, zarabiając x zł na każdym kg . Za otrzymane pieniądze kupił znów ten sam towar po tej samej cenie i sprzedał z takim samym zyskiem na każdym kg . Za całą uzyskaną kwotę kupił znów ten sam towar. Ile kg towaru otrzymał trzecim razem? Ile towaru było we wszystkich trzech partjach razem?
- Kupiec kupił a q jabłek po z zł za 1 q. $p\%$ jabłek zepsuło się. Po ile zł musi sprzedawać 1 q, aby zarobić $s\%$ ceny kupna?
- Kupiec sprowadził a kg towaru za z zł. Z tego sprzedał najpierw b kg, zarabiając x zł na każdym kg . Resztę towaru sprzedał, tracąc $\frac{1}{2}x$ zł na każdym kg . Za ile zł sprzedał pierwszą partję towaru, a za ile drugą? Ile zarobił (stracił)?
- Kupiec zakupił a q drzewa za z zł, potem $a + n$ q po cenie niższej o $\frac{1}{2}$ zł na 1 q, a wreszcie $a - n$ q po cenie wyższej o $\frac{1}{2}$ zł na 1 q, niż przy pierwszej partji. Ile zł płacił średnio za 1 q?
- Kupiec sprowadził a kg towaru, płacąc z zł za 1 kg. Towar sprzedał z zyskiem, wynoszącym $p\%$ ceny kupna. n -tą część otrzymanej ze sprzedaży kwoty zużył na utrzymanie, a za

resztę kupił znów tego samego towaru po tej samej cenie.
Ile kg zakupił drugim razem?

- g) Kapitał a zł rozdzielono między 4 osoby. Pierwsza otrzymała n -tą część kapitału; druga n -tą część reszty; trzecia n -tą część tego, co jeszcze pozostało; a czwarta resztę. Ile zł otrzymała czwarta osoba?
-

Rozdział II

Równania ułamkowe. Proporcje

§ 1. Równania ułamkowe.

Równanie, w którym przynajmniej jeden wyraz jest ułamkiem algebraicznym, zawierającym niewiadomą w mianowniku, nazywa się *równaniem ułamkowym*. Równanie takie może mieć sens oczywiście tylko dla takiej wartości niewiadomej, dla której mianowniki ułamków zawartych w równaniu są różne od zera. Wykluczając takie wartości niewiadomej, uwalniamy równanie od ułamków, mnożąc obie jego strony przez wspólny mianownik ułamków, jak wskazują przykłady:

Przykład 1. Rozwiązać równanie: $\frac{3}{2x+2} = 1 - \frac{x^2-2}{x^2-1}$.

W celu wyznaczenia miejsc zerowych mianowników i w celu wyznaczenia wspólnego mianownika ułamków rozkładamy mianowniki wszystkich ułamków na czynniki:

$$\frac{3}{2(x+1)} = 1 - \frac{x^2-2}{(x+1)(x-1)}$$

Miejscami zerowymi mianowników są wartości $x = -1$ i $x = +1$. Zakładając, że równanie ma pierwiastek, który oczywiście jest różny od -1 i $+1$, mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik wszystkich ułamków, t. j. przez $2(x+1)(x-1)$. Otrzymamy:

$$3(x-1) = 2(x+1)(x-1) - 2(x^2-2).$$

Wykonujemy naznaczone

$$\begin{aligned} \text{działania: } 3x-3 &= 2x^2-2-2x^2+4, \\ 3x-3 &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rozwiązujemy: } 3x &= 5, \\ x &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Sprawdzamy:

$$L = \frac{3}{\frac{10}{3}+2} = \frac{3}{\frac{16}{3}} = 3 \cdot \frac{3}{16} = \frac{9}{16};$$

$$P = 1 - \frac{\frac{25}{9}-2}{\frac{25}{9}-1} = 1 - \frac{\frac{7}{9}}{\frac{16}{9}} = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16};$$

$$L = P.$$

Przykład 2. Rozwiązać układ równań:

$$\frac{7x-4y}{6x-12y} - \frac{6y+1}{4x-8y} = 1,$$

$$\frac{3x+2}{x} - \frac{2y+1}{2y} = 2.$$

Rozkładamy w pierwszym równaniu mianowniki ułamków na czynniki, a drugie równanie przepisujemy:

$$\frac{7x-4y}{6(x-2y)} - \frac{6y+1}{4(x-2y)} = 1,$$

$$\frac{3x+2}{x} - \frac{2y+1}{2y} = 2.$$

Zakładamy, że układ równań ma rozwiązanie, które oczywiście spełnia warunki $x \neq 2y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, i mnożymy obie strony pierwszego równania przez $12(x-2y)$, a drugiego przez $2xy$. Otrzymamy:

$$14x - 8y - 18y - 3 = 12x - 24y$$

$$6xy + 4y - 2xy - x = 4xy.$$

Porządkujemy:

$$2x - 2y = 3,$$

$$-x + 4y = 0.$$

Rozwiązując ten układ równań, znajdziemy: $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$.

Sprawdzenie:

$$L_1 = \frac{14-2}{12-6} - \frac{3+1}{8-4} = \frac{12}{6} - \frac{4}{4} = 2 - 1 = 1, \quad P_1 = 1; \quad L_1 = P_1.$$

$$L_2 = \frac{6+2}{2} - \frac{1+1}{1} = 4 - 2 = 2, \quad P_2 = 2; \quad L_2 = P_2.$$

Przykład 3. Mając rozwiązać układ równań:

$$\frac{x}{x+y} + \frac{x+2}{y} = -1,$$

$$\frac{4x}{x+y} + \frac{x+2}{y} = 5,$$

zauważymy, że niewiadome występują w tych równaniach tylko w wyrażeniach $\frac{x}{x+y}$ i $\frac{x+2}{y}$. Oznaczmy pierwsze z nich literą a , a drugie literą b tak, że:

$$a = \frac{x}{x+y}, \quad b = \frac{x+2}{y}.$$

Wprowadzając te oznaczenia do danego układu równań, otrzymamy:

$$a + b = -1,$$

$$4a + b = 5.$$

Rozwiązując ten układ równań, znajdziemy: $a = 2$, $b = -3$.

Znaczy to, że dany układ równań może się sprawdzać tylko dla takich wartości x i y , dla których

$$\frac{x}{x+y} = 2, \quad \frac{x+2}{y} = -3.$$

Rozwiązując ten układ równań ze względu na x i y , znajdziemy:

$$x = 4, \quad y = -2.$$

Sprawdzenie:

$$L_1 = \frac{4}{4-2} + \frac{4+2}{-2} = 2 - 3 = -1, \quad P_1 = -1; \quad L_1 = P_1.$$

$$L_2 = \frac{16}{4-2} + \frac{4+2}{-2} = 8 - 3 = 5, \quad P_2 = 5; \quad L_2 = P_2.$$

Przykład 4. Dwie pompy dostarczają wody do zbiornika. Zbiornik napełnia się wodą, albo gdy obie pompy są czynne przez 6 godzin, albo gdy pierwsza pracuje przez 9 godzin, a druga przez 4 godziny. W jakim czasie napełni się zbiornik, gdy wody dostarczać będzie tylko pierwsza pompa, a w jakim, gdy pracować będzie tylko druga pompa?

Pierwsza pompa napełni zbiornik w x godzinach, druga w y godzinach. Przyjmijmy nadto, że pojemność zbiornika wynosi $v \text{ m}^3$. Pierwsza pompa, dostarczająca w x godzinach $v \text{ m}^3$ wody, dostarcza w jednej godzinie $\frac{v}{x} \text{ m}^3$; druga dostarcza w godzinie $\frac{v}{y} \text{ m}^3$ wody.

Ponieważ w 6 godzinach obie pompy wypełniają cały zbiornik, to:

$$\frac{6v}{x} + \frac{6v}{y} = v.$$

Podobnie prowadzi drugi warunek do równania:

$$\frac{9v}{x} + \frac{4v}{y} = v.$$

Po uproszczeniu przez v i wprowadzeniu oznaczeń:

$$\frac{1}{x} = a; \quad \frac{1}{y} = b,$$

otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned} 6a + 6b &= 1, \\ 9a + 4b &= 1. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ równań (rozwiąż!), znajdziemy: $a = \frac{1}{15}$, $b = \frac{1}{10}$, a stąd: $x = 15$, $y = 10$.

Pierwsza pompa wypełnia zbiornik w 15 godz., a druga w 10 godz. Sprawdź!

Ćwiczenia:

1. Rozwiązać równania:

a) $\frac{1}{x} - \frac{4}{15x} = \frac{1}{5x} - \frac{4}{3};$

b) $\frac{6}{x} - \frac{x+10}{3x} = 1;$

c) $\frac{3x-2}{4x} - \frac{4x+1}{6x} = \frac{7x+10}{9x} - 4\frac{1}{3};$

d) $\frac{x+4}{x-3} - \frac{5}{x} = 1;$

e) $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-3}{2x-4} = 1;$

f) $\frac{2x}{3x-6} - \frac{x+2}{4x-8} = \frac{1}{2};$

g) $\frac{x-2}{3x+3} - \frac{x-4}{2x+2} = 1;$

h) $\frac{2x-1}{4x+8} - \frac{x-2}{6x+12} = 1;$

i) $\frac{5}{6x-12} - \frac{1}{4x-8} = \frac{5}{4} - \frac{3}{2x-4};$

j) $\frac{7}{24x-12} - \frac{2}{18x-9} = \frac{10}{9} - \frac{3}{8x-4};$

k) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{x-5}{x-2} = 2;$

l) $\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{3x+6} = \frac{2}{3x-1};$

m) $\frac{x+7}{x+3} - \frac{x+8}{x+2} = 1 - \frac{x+3}{x+1};$

n) $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x-1};$

o) $\frac{2x+3}{x+1} - \frac{x}{x+2} = 1 + \frac{3}{x+3};$

p) $\frac{2x}{x-2} - \frac{x}{x-4} = \frac{x+4}{x-2} - \frac{6}{x-6};$

2. Rozwiązać równania:

a) $\frac{3}{x^2-x} - \frac{2}{x^2+x} = \frac{3}{x^2-1};$

b) $\frac{5x+3}{x+1} - \frac{2(x+3)}{x^2+2x+1} = 5;$

c) $\frac{3x^2+3}{x^2+x} + \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x^2-1} = 3;$

d) $\frac{4}{x^2-1} + \frac{3}{x} = \frac{3}{x-1};$

e) $\frac{1}{x} - \frac{5}{3x^2+3x} + \frac{x^2+1}{2x^2+4x} = \frac{1}{2};$

f) $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{5}{x^2} = \frac{6}{x^2-2x};$

g) $\frac{x}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x};$

h) $\frac{10x-1}{4x^2+4x+1} + \frac{12}{4x^2-1} = \frac{5}{2x-1};$

i) $\frac{1}{3x} - \frac{x+1}{3x^2+2x} = \frac{3}{(3x+2)^2};$

j) $\frac{x+14}{x^2-1} - \frac{6}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2+x} = \frac{6}{x^2};$

$$k) \frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{x^3+3x^2+3x+1} = 1 - \frac{2x+3}{x^2+2x+1};$$

$$l) \frac{2(x^2-2)}{x^2-4x+4} = \frac{8(x+1)}{x^2+2x} = 3 - \frac{x^2-32}{x^2-4};$$

$$m) \frac{1}{(2x-1)^2} + \frac{5}{(2x+1)^2} = \frac{6}{4x^2-1};$$

$$n) \frac{3}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{3}{x^2-4x+3}.$$

3. Rozwiązać układy równań:

$$a) \frac{x-5}{x-2} + \frac{3}{y+2} = 1;$$

$$\frac{y-1}{y} + \frac{x+10}{2x+4} = 1\frac{1}{2};$$

$$b) \frac{x+y}{x+y+1} + \frac{5}{2x-3} = 1;$$

$$\frac{7x-6}{6x-12y} - \frac{5y-2}{4x-8y} = 1;$$

$$c) \frac{x+3}{x-1} + \frac{y+3}{y+1} = 2;$$

$$\frac{x+y+2}{x+y} + \frac{x+2y+2}{x+2y} = 2;$$

$$d) \frac{x+1}{x-2y+1} - \frac{4y+1}{2x-4y-1} = 1;$$

$$\frac{x+3}{x} + \frac{y+1}{y} = 2;$$

$$e) 2 - \frac{x+y}{x-y} = \frac{x-y}{x+y} - \frac{(2y-1)^2+x}{x^2-y^2};$$

$$\frac{x+1}{4} - \frac{y+1}{3} = 1;$$

$$f) \frac{x+5}{x+1} - \frac{2}{y-2} = 1;$$

$$\frac{5}{y} - \frac{3}{x} = \frac{3}{xy};$$

$$g) \frac{5x+y+1}{2x+4y} + \frac{3x-y+2}{3x+6y} = 1;$$

$$\frac{20}{y} + \frac{7}{x} = \frac{34}{xy};$$

$$h) \frac{x(2x+3)}{x^2-y^2} - \frac{x}{x-y} = \frac{x+1}{x+y};$$

$$\frac{2x+1}{x+y} - \frac{x^2-y^2-3}{x^2+2xy+y^2} = 1;$$

$$i) \frac{x-2}{x+1} + \frac{y+1}{y-1} = 2;$$

$$\frac{x^2-1}{x} - \frac{3y(x-4)}{3y-1} = 4 - \frac{x}{3y-1};$$

$$j) \frac{2x+y-7}{3} + \frac{x+y}{6} = 1; \quad k) \frac{12}{x} - \frac{15}{y} = 1;$$

$$5. \frac{2x+y-7}{3} - 7 \cdot \frac{x+y}{6} = 3; \quad \frac{6}{x} + \frac{10}{y} = 4;$$

$$l) \frac{1}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 3;$$

$$\frac{3}{x+y} - \frac{2}{x-y} = 2;$$

$$n) \frac{y+2}{5x-5} + \frac{2x}{y+1} = 2;$$

$$\frac{y+2}{2x-2} - \frac{x}{y+1} = 2;$$

$$m) \frac{x-3}{2y+4} + \frac{x+1}{6y+3} = 3;$$

$$\frac{5x-15}{y+2} - \frac{6x+6}{2y+1} = 2;$$

$$o) \frac{5x-20y}{6x+30} - \frac{3x}{4y-4} = 3;$$

$$\frac{2x-8y}{3x+15} - \frac{3x}{2y-2} = 2.$$

4. a) Przez jaką liczbę należy podzielić 328, aby otrzymać iloraz (niezupełny) 12 i resztę 4?
- b) Gdy pewną liczbę całkowitą podzielę przez liczbę mniejszą od niej o 7, otrzymam iloraz 2 i resztę 3. Jaka to liczba?
- c) Jaką liczbę należy dodać do licznika i mianownika ułamka $\frac{2}{3}$, aby otrzymać $\frac{3}{4}$?
- d) Stosunek dwu liczb, z których pierwsza jest o 6 mniejsza od drugiej, wynosi 0,4. Obliczyć te liczby.
- e) Liczbę 100 rozłożono na dwa składniki, których iloraz wynosi 5,25. Znaleźć te składniki.
- f) Gdy do licznika i mianownika pewnego ułamka dodamy 1, otrzymamy 0,8; gdy zaś od licznika i mianownika tego ułamka odejmiemy 1, otrzymamy 0,75. Wyznaczyć ten ułamek.
- g) Gdy podzielę jedną liczbę całkowitą przez drugą, otrzymam iloraz 5 i resztę 3. Gdy zaś dzielną powiększę o 1, a dzielnik pomniejszę o 1, to iloraz wzrośnie o 1, a reszta zmniejszy się o 1. Jakie to liczby?
- h) Gdy podzielę pewną liczbę dwucyfrową przez liczbę, która z niej powstaje przez przestawienie cyfry jednostek z cyfrą dziesiątek, otrzymam iloraz 2 i resztę 2. Gdy zaś podzielę liczbę dziesiątek tej liczby przez liczbę jednostek, otrzymam taki sam iloraz, a resztę o 1 mniejszą. Znaleźć tę liczbę.
- i) Kupiec miał pewną ilość jabłek, które zamierzał sprzedać po 80 gr za kg. Gdy n -ta część zapasu jabłek zepsuła się, sprzedał pozostałe jabłka po 1 zł za kg i uzyskał ze sprzedaży tę samą kwotę, którą zamierzał pierwotnie uzyskać. Obliczyć n .
- j) Koszta jednej wycieczki szkolnej wynosiły a zł, a koszt drugiej były o 56% wyższe. Ponieważ jednak liczba ucz-

niów, biorących udział w drugiej wycieczce była o 11 mniejsza od podwójnej liczby uczestników pierwszej wycieczki, wypadły w obu wycieczkach na każdego ucznia jednakowe koszty. Ilu uczniów brało udział w każdej wycieczce?

- k) Jeden lotnik wyleciał z miejscowości A , a drugi równocześnie z miejscowości B i obaj przybyli równocześnie do C . Pierwszy leciał z prędkością o 26 km/godz. większą, niż drugi. Z jaką prędkością leciał drugi, jeżeli $AC = 342 \text{ km}$, a $BC = 285 \text{ km}$?

l) Dwóch robotników niejednakowo zręcznych wykonałoby, pracując wspólnie, pewną pracę w 12 dniach. Po pięciu dniach wspólnej pracy pierwszy robotnik zachorował, a drugi ukończył resztę pracy w $17\frac{1}{2}$ dniach. W ilu dniach wykonałby tę pracę każdy z tych robotników, pracując sam.

- m) Dwóch robotników niejednakowo zręcznych, pracując wspólnie, wyłożyło kostkami kamiennymi 100 m^2 jezdni w $5\frac{5}{8}$ dnia. Drugim razem pracował pierwszy robotnik $7\frac{1}{2}$ dni, a drugi 9 dni i wyłożyli kostkami 150 m^2 jezdni. Ile dni potrzebowaliby każdy z tych robotników na wyłożenie kostkami 100 m^2 powierzchni, gdyby pracował sam?

- n) Kierowca samochodu obliczył, że przebędzie pewną drogę w 3 godzinach. Wskutek złego stanu drogi musiał $\frac{1}{3}$ część drogi przebyć z prędkością o 6 km/godz. mniejszą, niż zamierzał. Pozostałe $\frac{2}{3}$ drogi przebył jednak z prędkością większą o 4 km/godz. , niż zamierzał, wskutek czego całą drogę przebył rzeczywiście w 3 godzinach. Obliczyć długość x drogi.

Wskazówka: Zamierzona prędkość wynosi $\frac{1}{3}x$; prędkość w pierwszej części drogi wynosi $\frac{1}{3}x - 6$, a w drugiej $\frac{1}{3}x + 4$. Równanie ułożymy z warunku: (czas przebycia pierwszej części drogi) + (czas przebycia drugiej części drogi) = 3.

§ 2. Proporcje.

Dwa równe stosunki, połączone znakiem równości, tworzą *proporcję*.

Proporcją jest np.:

$$8\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8} = 4,5 : 3.$$

Pierwszy stosunek ma bowiem wartość (wykładnik): $8\frac{3}{4} : 5\frac{5}{8} = \frac{35}{4} : \frac{45}{8} = \frac{35}{4} \cdot \frac{8}{45} = \frac{2}{3}$, a drugi: $4,5 : 3 = 1,5 = \frac{3}{2}$; oba są więc równe.

Ogólną postacią proporcji jest:

$$a : b = c : d.$$

Proporcję czytamy tak: „*a* ma się tak do *b*, jak *c* do *d*“, albo „stosunek *a* do *b* równa się stosunkowi *c* do *d*“. Liczby *a*, *b*, *c*, *d* nazywamy *wyrazami* proporcji, a mianowicie kolejno pierwszym, drugim, trzecim i czwartym. Wyrazy *a* i *d* nazywamy wyrazami *skrajnymi*, a wyrazy *b* i *c* wyrazami *średnimi*. Dla uproszczenia dalszych rozważań przyjmujemy, że wszystkie wyrazy proporcji są różne od zera.

Z określenia proporcji wynika bezpośrednio, że:

Wykładniki obu stosunków proporcji są sobie równe.

Ponieważ stosunek dwu liczb równa się ich ilorazowi, możemy proporcję $a : b = c : d$ napisać także w postaci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Mnożąc obie strony ostatniej równości przez *bd*, otrzymamy:

$$ad = bc.$$

Równość ta wyraża podstawową własność proporcji:

W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi wyrazów średnich.

Naodwrot otrzymujemy z równości $ad = bc$ po podzieleniu obu stron przez *bd* proporcję: $a : b = c : d$. Słowami:

Z czynników dwóch równych iloczynów można ułożyć proporcję, przyjmując czynniki jednego iloczynu za wyrazy skrajne, a czynniki drugiego iloczynu za wyrazy średnie.

Np.: Z równych iloczynów $4 \cdot 9 = 3 \cdot 12$ otrzymujemy proporcję: $4 : 3 = 12 : 9$.

Równość $ad = bc$ jest więc zupełnie równoważna proporcji $a : b = c : d$; z równości wynika proporcja i naodwrot. Dlatego posługujemy się temi twierdzeniami przy sprawdzaniu proporcji.

Aby zbadać, czy proporcja $8\frac{3}{4} : 5\frac{5}{6} = 4,5 : 3$ jest prawdziwa, tworzymy: iloczyn wyrazów skrajnych: $I = 8\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{35}{4} \cdot 3 = \frac{105}{4}$ i iloczyn wyrazów średnich: $I' = 5\frac{5}{6} \cdot 4,5 = \frac{35}{6} \cdot \frac{9}{2} = \frac{35}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{105}{4}$.

Ponieważ $I = I'$, to na podstawie ostatniego twierdzenia stwierdzamy, że dana proporcja jest prawdziwa.

Z równoważności proporcji $a : b = c : d$ i równości $ad = bc$ wysnuwamy dalsze własności proporcji. I tak:

1) Przetwarzając w równych iloczynach $ad = bc$ czynniki, lub przedstawiając w tej równości lewą stronę z prawą i tworząc każdym razem z czynników równych iloczynów proporcję, znajdziemy:

W proporcji wolno: a) wyrazy skrajne ze sobą przestawić; b) wyrazy średnie ze sobą przestawić; c) wyrazy skrajne przyjmując za średnie, przyjmując równocześnie wyrazy średnie za skrajne.

Stosując te twierdzenia do proporcji $a : b = c : d$, możemy z niej otrzymać następujących 7 nowych proporcji:

$a : c = b : d$; (w danej proporcji przestawiono wyrazy średnie).

$b : a = d : c$; (w danej proporcji przyjęto wyrazy skrajne za średnie, a średnie za skrajne).

$b : d = a : c$; (w ostatniej proporcji przestawiono wyrazy średnie).

$c : a = d : b$; (w przedostatniej proporcji przestawiono wyrazy skrajne).

$c : d = a : b$; (w ostatniej proporcji przestawiono wyrazy średnie).

$d : b = c : a$; (w danej proporcji przestawiono wyrazy skrajne).

$d : c = b : a$; (w ostatniej proporcji przestawiono wyrazy średnie).

Te wszystkie proporcje wyrażają to samo; z każdej z nich wynikają wszystkie pozostałe.

2) Jeżeli w proporcji $a : b = c : d$ jeden wyraz skrajny (np. a) i jeden wyraz średni (np. c) pomnożymy przez m , to proporcja $am : b = cm : d$ będzie również prawdziwa. Iloczyn wyrazów skrajnych adm będzie bowiem równy iloczynowi wyrazów średnich bcm , o czym łatwo przekonać się, mnożąc obie strony równości $ad = bc$ (wynikającej z danej proporcji) przez m . Zważywszy, że każde dzielenie zastąpić można mnożeniem przez odwrotność dzielnika, powiemy:

W proporcji wolno jeden wyraz skrajny i jeden wyraz średni przez tę samą liczbę różną od zera pomnożyć lub podzielić.

Z twierdzenia tego korzystamy, aby proporcję uprościć.

3) Z proporcji $a : b = c : d$ wynika $ad = bc$, a stąd:

$$a = \frac{bc}{d}; \quad b = \frac{ad}{c}; \quad c = \frac{ad}{b}; \quad d = \frac{bc}{a}.$$

Słowami:

Wyraz skrajny proporcji równa się iloczynowi wyrazów średnich, podzielonemu przez pozostały wyraz skrajny; wyraz średni proporcji równa się iloczynowi wyrazów skrajnych, podzielonemu przez pozostały wyraz średni.

Przy pomocy tego twierdzenia można obliczyć jeden niewiadomy wyraz proporcji, gdy trzy pozostałe są dane, czyli *rozwiązać proporcję*.

Np.: Z proporcji $5,4 : x = 2 : 7$ obliczymy:

$$x = \frac{5,4 \cdot 7}{2} = 18,9.$$

Dwie równoczesne proporcje:

$$\begin{array}{l} a : b = d : e \\ \text{ i } b : c = e : f \end{array}$$

piszemy krótko w postaci t. zw. *proporcji bieżącej*, t. j.:

$$a : b : c = d : e : f.$$

Z proporcji bieżącej (czyli z dwu proporcji, które ona zastępuje) wynika także, że:

$$a : c = d : f.$$

Mnożąc bowiem stronami równości: $ae = bd$ i $bf = ce$, wynikające z dwu danych proporcji, otrzymamy: $abef = bcde$, a po podzieleniu przez be obu stron: $af = cd$. Z równości tej wynika proporcja $a : c = d : f$.

Ćwiczenia:

1. Sprawdź proporcje:

- a) $24 : 8 = 15 : 5$; b) $14,3 : 6,5 = 7,7 : 3,5$; c) $7\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = 5 : 2\frac{1}{2}$;
d) $4,5 : 2\frac{1}{2} = 1,5 : \frac{5}{6}$; e) $2\frac{1}{2} : 2,4 = 1\frac{3}{5} : 1,6$; f) $3\frac{1}{2} : 2,1 = 1\frac{2}{3} : 1$;
g) $3\frac{1}{2} : 1 = 2,1 : \frac{3}{8}$; h) $2,2 : 17 = 5\frac{1}{2} : 42,5$; i) $0,3 : \frac{4}{8} = \frac{1}{2} : 1\frac{1}{3}$.

2. Rozłóż liczby: 24; 54; 100 w dwojaki sposób na dwa czynniki i ułóż z tych czynników proporcje.

3. a) Ułóż dowolną proporcję i utwórz z niej przez przestawianie wyrazów 7 nowych proporcji.

b) Ile różnych proporcji otrzymać można przez przestawianie wyrazów *proporcji ciągłej*: $a : b = b : c$?

4. Rozwiązać i sprawdzić proporcje:

- a) $38 : 1,7 = 13,3 : x$; b) $4,8 : 24 = x : 10,2$; c) $x : 7\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$;
d) $x : \frac{1}{6} = \frac{2}{5} : \frac{1}{25}$; e) $58 : 43\frac{1}{2} = x : 1\frac{1}{2}$; f) $0,4 : x = \frac{3}{4} : 0,625$;
g) $1,2 : \frac{1}{2} = x : \frac{5}{6}$; h) $2,5 : x = \frac{3}{7} : 1,2$; i) $0,375 : 2\frac{1}{4} = 4,2 : x$

5. Rozwiązać równania i układy równań:

- a) $1 : x = 0,5 : (x - 1)$; b) $(15 - x) : x = 1 : 2$;
c) $4 : x = 7 : (x + 4,5)$; d) $9 : (x + \frac{5}{6}) = 4 : x$;
e) $(x + 7) : (x - 1) = (x + 10) : x$;
f) $(x - 10) : (x - 12) = (x + 10) : (x - 2)$;
g) $(x + \frac{2}{3}) : (3\frac{1}{2} - x) = x : (2\frac{1}{4} - x)$;
h) $(x + \frac{2}{3}) : (5 - 2x) = (2 - 3x) : (6x - 21)$;
i) $x + y = 1$, j) $9x + 4y = 4$,
 $x : y = 5 : 3$; $(3x + 1) : (3 - 2y) = 3 : 4$;
k) $(x + y) : \frac{1}{2} (y - x) : (x + 2y + 1) = 1 : 2 : 3$;
l) $x : y : (x + y + 2) = 2 : 3 : 6$;

$$\begin{array}{ll}
 m) x : y : z = 6 : 9 : 10, & n) (x + 1) : (y - 1) : (z + 3) = 6 : 3 : 1, \\
 \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + 2z = 2; & x + y + z = 7; \\
 o) x : y : z : u = 2 : 3 : 1 : 6, & \\
 x + y + z + u = 6. &
 \end{array}$$

§ 3. Reguła trzech.

Proporcje znajdują zastosowanie przy rozwiązywaniu wielu zagadnień praktycznych. Omówimy przedewszystkiem zagadnienia z *reguły trzech*, które umiemy już rozwiązywać innemi sposobami. Zagadnienia te dotyczą wielkości wprost i odwrotnie proporcjonalnych.

Dwie wielkości nazywamy wprost proporcjonalnemi, jeżeli są tak ze sobą związane, że gdy jedna wzrośnie (zmniejszy się) 2, 3, 4... razy, to druga również wzrośnie (zmniejszy się) 2, 3, 4... razy.

Związek taki zachodzi np. między ilością towaru a jego wartością. Jeżeli 1 *kg* towaru kosztuje *a* zł, to 3 *kg* tego towaru kosztują 3*a* zł, a 4,5 *kg* kosztują 4,5 *a* zł. Wymienione ilości towaru pozostają w stosunku 3 : 4,5, a odpowiadające im wartości w stosunku 3*a* : 4,5*a* czyli (po uproszczeniu przez *a*) również w stosunku 3 : 4,5. Z tego przykładu wysnuwamy twierdzenie:

Jeżeli dwie wielkości są wprost proporcjonalne, to stosunek wartości jednej wielkości równa się stosunkowi odpowiednich wartości drugiej wielkości.

Dwie wielkości nazywamy odwrotnie proporcjonalnemi, jeżeli są tak ze sobą związane, że gdy jedna wzrośnie (zmniejszy się) 2, 3, 4... razy, to druga zmniejszy się (wzrośnie) 2, 3, 4... razy.

Związek taki zachodzi np. między czasem potrzebnym do przepisania na maszynie jakiegoś dzieła, a ilością pracowników przepisujących to dzieło. Jeżeli jeden pracownik potrzebuje na przepisanie dzieła *n* godzin, to 5 pracowników przepisze dzieło w $\frac{n}{5}$ godz., a 7 pracowników

w $\frac{n}{7}$ godz. Oczywiście przyjmujemy, że wszyscy pracownicy piszą jednakowo szybko i że dzieło można przepisywać częściami tak, że piszący wzajemnie sobie nie przeszkadzają. Ilości pracowników wymienione w tym przykładzie pozostają do siebie w stosunku 5 : 7, a odpowiednie ilości godzin w stosunku $\frac{n}{5} : \frac{n}{7}$, który po rozszerzeniu przez 35 i uproszczeniu przez *n* przyjmuje postać 7 : 5. Stosunek 7 : 5 nazywamy *stosunkiem odwrotnym* do stosunku 5 : 7. Z tego przykładu wysnuwamy twierdzenie:

Jeżeli dwie wielkości są odwrotnie proporcjonalne, to stosunek wartości jednej wielkości równa się odwrotnemu stosunkowi odpowiednich wartości drugiej wielkości.

Znając jedną parę odpowiadających sobie wartości dwu wielkości wprost lub odwrotnie proporcjonalnych, możemy przy pomocy proporcji obliczyć każdą wartość jednej wielkości, odpowiadającą danej wartości drugiej wielkości. Np.:

Zadanie 1. Pociąg, poruszający się ruchem jednostajnym, przebył w $4\frac{1}{2}$ min. drogę 3,6 km; ile km przebędzie w $12\frac{3}{4}$ min.?

Zakładając, że ruch pociągu jest jednostajny, przyjmujemy tem samem, że droga przebyta przez pociąg i czas, w którym ta droga została przebyta, są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Oznaczając literą x drogę przebytą w $12\frac{3}{4}$ min., zestawiamy odpowiadające sobie wartości obu wielkości:

$$\begin{array}{ccccccc} 4\frac{1}{2} & \text{minutom} & \text{odpowiada} & \text{droga} & 3,6 & \text{km;} \\ 12\frac{3}{4} & " & " & " & x & \text{km.} \end{array}$$

Ponieważ wielkości te są wprost proporcjonalne, to stosunek wartości jednej wielkości równa się stosunkowi odpowiednich wartości drugiej wielkości. Stąd proporcja:

$$4\frac{1}{2} : 12\frac{3}{4} = 3,6 : x.$$

Rozwiązując ją, znajdujemy:

$$x = \frac{12\frac{3}{4} \cdot 3,6}{4\frac{1}{2}} = \frac{51 \cdot 3,6}{18} = 51 \cdot 0,2 = 10,2.$$

W $12\frac{3}{4}$ min. przebędzie pociąg 10,2 km.

Zadanie 2. Pisząc dziennie po $1\frac{1}{2}$ godz. można przepisać pewne dzieło w 42 dniach; w ilu dniach można przepisać to dzieło, pisząc dziennie po $3\frac{1}{2}$ godz.?

Przyjmujemy, że czas potrzebny do przepisania dzieła jest odwrotnie proporcjonalny do ilości godzin dziennej pracy. Oznaczając literą x czas potrzebny do przepisania dzieła przy $3\frac{1}{2}$ godz. dziennej pracy, zestawiamy odpowiadające sobie wartości obu wielkości:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Przy } 1\frac{1}{2} & \text{godz.} & \text{dziennej} & \text{pracy} & \text{czas} & \text{potrzebny} & \text{wynosi } 42 \text{ dni;} \\ " & 3\frac{1}{2} & " & " & " & " & x \text{ dni.} \end{array}$$

Ponieważ wielkości te są odwrotnie proporcjonalne, to stosunek wartości jednej wielkości równa się odwrotnemu stosunkowi odpowiednich wartości drugiej wielkości. Stąd proporcja:

$$1\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2} = x : 42.$$

Rozwiązując tę proporcję, znajdziemy:

$$x = \frac{1\frac{1}{2} \cdot 42}{3\frac{1}{2}} = \frac{3 \cdot 42}{7} = 18.$$

Pracując po $3\frac{1}{2}$ godz. dziennie, przepisze się dzieło w 18 dniach.

Zadanie 3. Do oświetlenia budynku przeznaczonego na kolonje wakacyjne wystarczył zapas 60 l nafty w lecie na 36 dni, gdy dziennie paliło się 16 lamp przeciętnie po $2\frac{1}{2}$ godz. dziennie. Na ile dni wystarczy 50 l nafty w zimie, jeżeli palić się będzie 12 lamp po $5\frac{1}{2}$ godz. dziennie?

Zadanie zapisujemy w następujący sposób:

Ilość l nafty:	Ilość lamp:	Oświetlano budynek dziennie przez godzin:	Zapasy wystarczył na dni:
60	16	$2\frac{1}{2}$	36
50	12	$5\frac{1}{2}$	x

Rozbijamy zadanie na następujące:

Ilość l nafty:	Ilość lamp:	Oświetlano budynek dziennie przez godzin:	Zapasy wystarczył na dni:
(1) 60	16	$2\frac{1}{2}$	36
(2) 50	16	$2\frac{1}{2}$	z
(3) 50	12	$2\frac{1}{2}$	y
(4) 50	12	$5\frac{1}{2}$	x

Rozwiązujemy kolejno zadania, zapisane w wierszach: (1) i (2), (2) i (3) oraz (3) i (4):

Według tematu zadania, zapisanego w wierszach (1) i (2), ta sama ilość lamp pali się przez jednakową ilość godzin dziennie. Łatwo zrozumieć, że w tym przypadku czas, na jaki zapas nafty wystarczy, jest wprost proporcjonalny do wielkości tego zapasu. Jest więc:

$$60 : 50 = 36 : z, \text{ a stąd: } z = \frac{50 \cdot 36}{60}.$$

Według tematu zadania, zapisanego w wierszach (2) i (3), zapas nafty jest stały i ilość godzin, przez które codziennie pali się lampy, jest stała. W tych warunkach czas, na jaki dany zapas nafty wystarczy, jest odwrotnie proporcjonalny do ilości lamp. Jest więc:

$$16 : 12 = y : z, \text{ a stąd: } y = \frac{16z}{12} = \frac{50 \cdot 36 \cdot 16}{60 \cdot 12}.$$

Według tematu zadania, zapisanego w wierszach (3) i (4), zapas nafty jest stały i ilość lamp jest stała. W tych warunkach czas, na jaki zapas nafty wystarczy, jest odwrotnie proporcjonalny do ilości godzin, przez które codziennie lampy się pali. Jest więc:

$$2\frac{1}{2} : 5\frac{1}{2} = x : y, \text{ a stąd } x = \frac{2\frac{1}{2} \cdot y}{5\frac{1}{2}} = \frac{50 \cdot 36 \cdot 16 \cdot 2\frac{1}{2}}{60 \cdot 12 \cdot 5\frac{1}{2}} = 18\frac{2}{11}.$$

Zapasy nafty wystarczy na 18 dni.

Ćwiczenia:

1. a) Na uszycie 120 mundurów zużył zakład krawiecki 330 m sukna i 168 m podszewki. Ile m sukna i podszewki ma zakupić, jeżeli otrzymał zamówienie na 300 takich samych mundurów?

- b) Jeden ze wspólników przedsiębiorstwa, który włożył w przedsiębiorstwo 3700 zł, otrzymał 495,6 zł dywidendy. Jaką dywidendę otrzymają wspólnicy, którzy włożyli w przedsiębiorstwo 5000 zł i 2850 zł?
- c) Przednie koło u wozu o obwodzie 2,2 m wykonało 700 obrotów; ile obrotów wykonało równocześnie koło tylne, którego obwód wynosi 2,75 m?
- d) Pewną drogę można przebyć rowerem w 1 godz. 15 min., jadąc z prędkością 12,5 km/godz. W jakim czasie można przebyć tę drogę pieszo z prędkością 4,5 km/godz.?
- e) Probówka o długości 20,5 cm, obciążona śrutem tak, że waży 12,6 g, pływa w położeniu pionowym po wodzie, przy czym nad wodę wystaje 13,5 cm. Ile g śrutu należy dosypać, aby nad wodę wystawało tylko $\frac{1}{2}$ cm probówki?
- f) Ciężarek mosiężny ma objętość 253 cm³; jaką objętość mieć będzie tak samo ciężki ciężarek żelazny, jeżeli ciężar właściwy żelaza wynosi 7,7 g/cm³, a mosiądzu 8,4 g/cm³?
- g) Motor elektryczny, poruszający pompę, podnosi w 1 sek. 7 $\frac{3}{4}$ kg wody na wysokość 8,5 m. Ile kg wody w 1 sek. dostarczać będzie pompa, poruszana takim samym motorem, na wysokość 15 m?
- h) 1 cm³ wodoru waży przy 0° C i normalnem ciśnieniu 0,0000898 g; jaką objętość ma wtedy 12 g wodoru?
- i) W pewnej maszynie dwa koła o obwodach 4,15 m i 1,25 m połączone są pasem. Pierwsze koło wykonywa 3 $\frac{1}{2}$ obrotów na sekundę; ile obrotów na sekundę wykonywa drugie koło?
- j) W rowerze ma koło zębate połączone z pedałami (przypatrz się konstrukcji roweru) 58 zębów, a drugie, połączone z kołem tylnym, 22 zębów. Jaką drogę przebędzie rower, gdy większe koło zębate wykona 1 obrót, jeżeli średnica koła roweru ma 70 cm?

Wzór na obwód u koła o promieniu r jest: $u = 2\pi r$.

- k) Jak wielki kąt środkowy odpowiada w kole łukowi równemu promieniowi koła?
- l) Towar brutto (wraz z opakowaniem) waży 84 kg, tara (opakowanie) waży 7 $\frac{1}{2}$ % wagi brutto; ile zapłacić należy za ten towar, jeżeli 5 kg towaru netto (bez opakowania) kosztuje 17 zł?

- m) Sadzawka wypełnia się wodą w $10\frac{1}{2}$ godz., jeżeli woda dopływa do niej jedną rurą; w ilu godzinach wypełni się, jeżeli woda będzie dopływała jeszcze drugą rurą, której przekrój pozostaje do przekroju pierwszej rury w stosunku $2:3$?
2. a) Z 23 kg przędzy wyrabia tkacz 161 m płótna, szerokiego na 72 cm; ile m płótna, szerokiego na 84 cm, wyrobi z 7,5 kg przędzy?
- b) Za przewóz 845 kg na odległość 65 km zapłacono 47,80 zł; ile kosztować będzie przewóz 750 kg na odległość 80 km?
- c) Za oświetlenie sali 12 lampami po 25 świec zapłacono za $2\frac{1}{2}$ miesiąca 68,10 zł, gdy lampy świeciły się po 5 godz. dziennie. W innym czasie oświetlano salę 8 lampami po 40 świec przez 2 miesiące i zapłacono za światło 51,84 zł. Ile godzin dziennie paliły się przeciętnie lampy?
- d) Utrzymanie rodziny, złożonej z 5 osób, przez 3 miesiące kosztowało 1680 zł; ile kosztować będzie utrzymanie 6 osób przez $2\frac{1}{2}$ mies., jeżeli koszt utrzymania wzrosną o $4\frac{1}{2}\%$?
- e) Samolot przebył pewną drogę w 36 min.; w jakim czasie przebędzie drogę 3 razy dłuższą, jeżeli lecieć będzie z prędkością o 25% mniejszą?
- f) Obliczono, że w celu usypania wału ochronnego od wylewu rzeki musi pracować 50 robotników przez 40 dni po 8 godz. dziennie. Zdołano wynająć tylko 40 robotników, którzy jednak po 6 dniach pracy zgodzili się pracować po 11 godz. dziennie. W ilu dniach wał będzie usypany?

§ 4. Rachunek podziału proporcjonalnego.

Drugi typ zagadnień praktycznych, w których stosować można proporcje łącznie z równaniami, stanowi *rachunek podziału proporcjonalnego*. Rachunek ten wyjaśnimy na dwóch przykładach:

Zadanie 1. Dwóch kupców zawiązało spółkę; pierwszy włożył w przedsiębiorstwo 6000 zł, drugi 4000 zł. Przedsiębiorstwo przyniosło 5486 zł zysku. Jak podzielić się tym zyskiem?

Oznaczmy literą x kwotę, którą z zysku otrzyma pierwszy kupiec, a literą y kwotę, którą otrzyma drugi. Kwoty te mają pozostawać do siebie w takim stosunku, jak kwoty, włożone przez kupców w przedsiębiorstwo; zatem:

$$x : y = 6000 : 4000.$$

A że zysk, przeznaczony do podziału, wynosi 5486 zł, przeto:

$$x + y = 5486.$$

Rozwiązujemy ten układ równań: Po uproszczeniu proporcji wyrazimy z niej y przez x ; otrzymamy:

$$\begin{aligned} x : y &= 3 : 2, \\ y &= \frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

Znalezione wyrażenie podstawiamy w drugim równaniu:

$$x + \frac{2}{3}x = 5486.$$

$$\text{Stąd: } 3x + 2x = 16458.$$

$$5x = 16458;$$

$$x = 3291,6;$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot 3291,6 = 2 \cdot 1097,2 = 2194,4.$$

Pierwszy kupiec otrzyma 3291,60 zł, drugi 2194,40 zł. Sprawdź!

Zadanie to można rozwiązać również bez stosowania równań zapomocą następującego rozumowania:

Zysk 5486 zł ma być rozdzielony między wspólników w takim stosunku, w jakim pozostają ich wkłady, t. j. w stosunku 6000 : 4000 czyli 3 : 2. Znaczy to, że pierwszy wspólnik ma otrzymać 3, a drugi 2 takie same części zysku. Należy więc cały zysk 5486 zł podzielić przez 5; otrzymamy 1097,2 zł. Pierwszy wspólnik otrzyma 3 takie części, t. j. $3 \cdot 1097,2 \text{ zł} = 3291,6 \text{ zł}$; drugi wspólnik otrzyma 2 takie części, t. j. $2 \cdot 1097,2 \text{ zł} = 2194,4 \text{ zł}$.

Zadanie 2. Kwas siarkowy składa się z wodoru, siarki i tlenu, połączonych ze sobą w stosunku wagowym 1 : 16 : 32. Ile wodoru, ile siarki i ile tlenu jest w 1 kg kwasu siarkowego?

Oznaczywszy szukane ilości wodoru, siarki i tlenu kolejno literami x , y i z , otrzymamy:

$$x : y : z = 1 : 16 : 32;$$

$$x + y + z = 1.$$

Pierwsze równanie zastępuje następujące dwie proporcje:

$$x : z = 1 : 32;$$

$$x : y = 1 : 16.$$

Z tych proporcji otrzymamy:

$$z = 32x;$$

$$y = 16x.$$

Podstawiając te wyrażenia w drugim równaniu, otrzymamy:

$$x + 16x + 32x = 1;$$

$$49x = 1;$$

$$x = \frac{1}{49} = 0,0204\dots$$

Z równań $y = 16x$, $z = 32x$ obliczymy:

$$y = \frac{16}{49} = 0,3265\dots; z = 0,6530\dots$$

Po zaokrągleniu tych liczb powiemy, że 1 *kg* kwasu siarkowego zawiera 20 *g* wodoru, 327 *g* siarki i 653 *g* tlenu. Sprawdź!

Także i to zadanie można rozwiązać bez stosowania równań:

Ilości wagowe wodoru, siarki i tlenu w kwasie siarkowym pozostają w stosunku 1 : 16 : 32; znaczy to, że na 1 część wodoru przypada 16 takich samych części siarki i 32 takich samych części tlenu. Wszystkich takich części ma być w 1 *kg* kwasu siarkowego $1 + 16 + 32 = 49$. Dzielimy tedy 1 *kg* = 1000 *g* przez 49 i znajdujemy, że jedna taka część waży w przybliżeniu 20,41 *g*. W 1 *kg* kwasie siarkowego jest tedy w przybliżeniu: $1 \cdot 20,41 \text{ g} = 20 \text{ g}$ wodoru, $16 \cdot 20,41 \text{ g} = 327 \text{ g}$ siarki i $32 \cdot 20,41 \text{ g} = 653 \text{ g}$ tlenu.

Ćwiczenia:

- Liczbę 5000 podzielić na dwie części, pozostające do siebie w stosunku $2\frac{3}{4} : 1\frac{1}{2}$.
- Liczbę 4800 podzielić na trzy części, pozostające do siebie w stosunku $2 : \frac{1}{2} : 0,75$.
- Trzy osoby kupiły 4 losy po 61,50 zł. Losy wygrały 16 500 zł. Jak podzielić się wygraną, jeżeli na kupno losów osoba A dała 75 zł, osoba B 80 zł, a osoba C resztę?
- Trzy gminy mają dostarczyć 200 robotników, każda ilość proporcjonalną do liczby mieszkańców. Ilu robotników ma dostarczyć każda gmina, jeżeli pierwsza liczy 2856 mieszkańców, druga 1682, a trzecia 1520.
- Jeden robotnik pracował 8 dni, a drugi 5 dni. Jak podzielić się wspólnym zarobkiem, wynoszącym 70 zł, jeżeli płaca dzienna drugiego robotnika jest o 20% wyższa od płacy pierwszego?
- Kupiec sprowadził razem 3 gatunki towarów, ważące 847 *kg*, 1200 *kg* i 1045 *kg*. Koszta transportu wynosiły 326,70 zł. Jakiej kosztu transportu wypadają na każdy gatunek towaru?
- Trzy osoby zawiązały spółkę handlową, składając razem 80 000 zł. Zysk z przedsiębiorstwa rozdzielono w ten sposób, że pierwsza osoba otrzymała 9181 zł, druga 11 476,25 zł, a trzecia 16 066,75 zł. Ile włożyła w przedsiębiorstwo każda osoba?
- Azotan srebra składa się ze srebra, azotu i tlenu, połączonych ze sobą w stosunku wagowym 54 : 7 : 24. Ile azotanu srebra otrzymać można z 50 *g* srebra?

- i) W fabryce kilimów pozostają koszty materiału, koszty wyrobu i koszty utrzymania fabryki wraz z zyskiem w stosunku $2 : 3 : 4$. Jaka jest cena kilimów, wyrobionych z wełny za 1000 zł?
- j) Przy upadku pewnej firmy wynosiły aktywa 26 835,65 zł, a pasywa 48 534,50 zł. Ile otrzyma wierzyciel, którego wierzytelność wynosi 4825 zł?
-

Rozdział III

Wstępne wiadomości o funkcjach

§ 1. Pojęcie funkcji.

Rozwiążmy następujące zagadnienia:

1) Pewna sprężyna ma w stanie nieobciążonym długość 26 cm i wydłuża się przy obciążeniu każdym gramem o 0,8 cm. Jaka (y) będzie długość tej sprężyny przy obciążeniu x g?

Znajdziemy: $y = 26 + 0,8x$.

2) Kapitał 2000 zł złożono na 6%. Jaka (y) wartość przedstawia ten kapitał wraz z dochodem po x miesiącach?

Znajdziemy: $y = 2000 + 10x$.

3) Ile (y) obrotów wykona koło o obwodzie x m na drodze, wynoszącej 1000 m?

Znajdziemy: $y = \frac{1000}{x}$.

4) O ile (y) wzrośnie (zmniejszy się) pole prostokąta o bokach 15 cm i 20 cm, gdy każdy bok powiększymy (zmniejszymy) o x cm?

Znajdziemy: $y = (15 + x)(20 + x) - 300 = 35x + x^2$.

We wszystkich wzorach, rozwiązujących te zadania mamy dwie litery x i y ; nazywać je będziemy *zmiennymi*, ponieważ mogą przyjmować rozmaite wartości. Wartość x jest naogół dowolna; wartość y zależy od wartości x . Dlatego nazywamy x *zmienną niezależną*, a y *zmienną zależną* lub *funkcją* zmiennej x . Określamy więc:

Jedną zmienną nazywamy funkcją drugiej zmiennej, jeżeli każdej wartości drugiej zmiennej jest przyporządkowana ściśle oznaczona wartość pierwszej zmiennej.

W tem znaczeniu mówimy w powyższych przykładach, że: długość sprężyny jest funkcją obciążenia, że wartość kapitału jest funkcją czasu, że ilość obrotów koła na drodze 1 km jest funkcją obwodu koła i t. p.

Związek funkcyjny wyrażony jest we wszystkich powyższych przykładach *wzorem algebraicznym*, który pozwala do każdej wartości x obliczyć odpowiednią wartość y .

Przyjmijmy w pierwszym przykładzie dla x kilka wartości, obliczymy odpowiednie wartości y i zestawmy te wartości w tabelce, pisząc w pierwszym rzędzie wartości x , a pod nimi w drugim rzędzie odpowiednie wartości y . Otrzymamy tabelkę:

x	-4^*	-3	-2	-1	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$\dots$
y	$22,8$	$23,6$	$24,4$	$25,2$	26	$26,4$	$26,8$	$27,2$	$27,6$	28	$28,4$	$\dots$

W tej tabelce są również wartościom x podporządkowane ściśle oznaczone wartości y ; możemy więc powiedzieć, że *tabela* ta przedstawia także y jako funkcję x , podobnie jak wzór:

$$y = 26 + 0,8x.$$

Przedstawienie funkcji zapomocą tabelki ma tę zaletę, że w tabelce znajdujemy gotowe wartości y , podczas gdy ze wzoru trzeba wartości y dopiero obliczać. Wadą tabelki jest zawsze jej niezupełność. Tabela bowiem nie może objąć wszystkich wartości x , bo nawet między dwiema bezpośrednio po sobie następującymi całkowitymi wartościami x znajduje się nieskończona ilość ułamków.

§ 2. Przykłady zastosowania wzorów.

Zajmijmy się funkcją, wyrażoną wzorem $y = ax$, gdzie a oznacza liczbę stałą, różną od zera.

Oznaczmy literami x_1, y_1 i x_2, y_2 dwie pary odpowiadających sobie wartości x i y tak, że

$$y_1 = ax_1; y_2 = ax_2.$$

Dzieląc stronami te równości, otrzymamy proporcję:

$$y_1 : y_2 = x_1 : x_2.$$

Proporcja ta wskazuje, że gdy x_1 jest 2, 3, 4, ... razy większe (mniejsze) niż x_2 , to y_1 jest również 2, 3, 4, ... razy większe (mniejsze) niż y_2 , czyli że y jest wprost proporcjonalne do x .

Naodwrot: Niech x i y oznaczają dwie zmienne wprost proporcjonalne, a x_1 i y_1 dwie odpowiadające sobie wartości tych zmiennych. Wtedy (rozdz. II, § 3):

$$x : x_1 = y : y_1, \text{ a stąd } y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x.$$

Lecz x_1 i y_1 są to pewne stałe liczby; ich iloraz ma więc też pewną stałą wartość a tak, że $\frac{y_1}{x_1} = a$. Jest więc:

$$y = ax. \text{ Znajdujemy zatem:}$$

* Ujemne wartości x należy rozumieć jako zginiatanie sprężyny ciężarkiem.

Jeżeli zmienna y jest wprost proporcjonalna do zmiennej x , to zachodzi między nimi związek: $y = ax$, gdzie a jest liczbą stałą.

Wzór $y = ax$ oznacza to samo, co zdanie: „ y jest wprost proporcjonalne do x ”.

Nazwę proporcjonalności prostej zachowujemy dla związku $y = ax$ także wtedy, gdy a jest liczbą ujemną lub zerem.

Liczba stała a , oznaczająca stały stosunek wartości y do odpowiedniej wartości x , nazywa się *współczynnikiem proporcjonalności*.

Ze wzoru $y = ax$ korzystać można przy rozwiązywaniu zadań z reguły trzech. Np.:

Zadanie 1. Pociąg, poruszający się ruchem jednostajnym, przebył w $4\frac{1}{2}$ min. drogę 3,6 km; ile km przebędzie w $12\frac{3}{4}$ min.?

Zakładając, że ruch jest jednostajny, przyjmujemy tem samem, że droga y jest wprost proporcjonalna do czasu x , w którym została przebyta. Jest więc: $y = ax$.

Do wyznaczenia a mamy dane w zadaniu dwie odpowiadające sobie wartości x i y , a mianowicie: jeżeli $x = 4\frac{1}{2}$, to $y = 3,6$. Podstawiając te wartości we wzorze $y = ax$, otrzymamy $3,6 = a \cdot 4\frac{1}{2}$, a stąd $a = 3,6 : 4\frac{1}{2} = \frac{3}{5}$. Zatem:

$$y = \frac{3}{5}x.$$

Zapomocą tego wzoru możemy obliczyć wartość y , odpowiadającą każdej wartości x . Jeżeli w szczególności $x = 12\frac{3}{4}$, to $y = \frac{3}{5} \cdot 12\frac{3}{4} = 10,2$. W $12\frac{3}{4}$ min. przebędzie pociąg 10,2 km.

Porównaj rozwiązanie tego samego zadania na str. 40.

Zbadajmy w podobny sposób funkcję, wyrażoną wzorem $y = \frac{c}{x}$, w którym c oznacza liczbę stałą różną od zera.

Niechaj x_1 , y_1 i x_2 , y_2 oznaczają dwie pary odpowiadających sobie wartości x i y . Wtedy:

$$y_1 = \frac{c}{x_1}; \quad y_2 = \frac{c}{x_2}.$$

Dzieląc stronami te równości, otrzymamy:

$$y_1 : y_2 = \frac{c}{x_1} : \frac{c}{x_2}.$$

Po pomnożeniu trzeciego i czwartego wyrazu tej proporcji przez $x_1 x_2$ i uproszczeniu przez c otrzymamy proporcję:

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1.$$

Proporcja ta wskazuje, że gdy x_2 jest 2, 3, 4, ... razy większe niż x_1 , to y_1 jest 2, 3, 4, ... razy większe niż y_2 , czyli że y_2 jest 2, 3, 4, ...

razy mniejsze niż y_1 ; znaczy to, że zmienna y jest odwrotnie proporcjonalna do zmiennej x .

Przyjmijmy naodwrot, że zmienna y jest odwrotnie proporcjonalna do zmiennej x , a y_1 i x_1 są dwiema odpowiadającymi sobie wartościami tych zmiennych. Wtedy (rozdz. II, § 3) jest dla wszelkich odpowiadających sobie wartości x i y :

$$x : x_1 = y_1 : y, \text{ skąd } y = \frac{x_1 y_1}{x}.$$

Oznaczając literą c stałą wartość iloczynu $x_1 y_1$, otrzymamy wzór:
 $y = \frac{c}{x}$. Wykazaliśmy więc, że:

Jeżeli zmienna y jest odwrotnie proporcjonalna do zmiennej x , to między x i y zachodzi związek: $y = \frac{c}{x}$.

Wzór $y = \frac{c}{x}$ oznacza to samo co zdanie: „ y jest odwrotnie proporcjonalne do x ”.

Stała c , oznaczająca stałą wartość iloczynu odpowiadających sobie wartości obu zmiennych, nazywa się *współczynnikiem proporcjonalności*.

Jak można korzystać z tego wzoru przy rozwiązywaniu zagadnień z reguły trzech, wyjaśnimy na przykładzie.

Zadanie 2. Pisząc dziennie po $1\frac{1}{2}$ godz., można przepisać pewne dzieło w 42 dniach; w ilu dniach można przepisać to dzieło, pisząc dziennie po $3\frac{1}{2}$ godz.?

Przyjmując, że liczba y dni potrzebna na przepisanie dzieła jest odwrotnie proporcjonalna do liczby x godzin dziennej pracy, możemy napisać: $y = \frac{c}{x}$.

Do wyznaczenia c mamy podane w zadaniu dwie odpowiadające sobie wartości x i y , a mianowicie: $x = 1\frac{1}{2}$, $y = 42$. Podstawiając te wartości we wzorze $y = \frac{c}{x}$, otrzymamy: $42 = \frac{c}{1\frac{1}{2}}$, a stąd $c = 42 \cdot 1\frac{1}{2} = 63$.

$$\text{Zatem: } y = \frac{63}{x}.$$

Ostatni wzór pozwala obliczyć wartość y , odpowiadającą każdej wartości x . Przyjmując w szczególności, jak żąda zadanie, $x = 3\frac{1}{2}$, otrzymamy: $y = \frac{63}{3\frac{1}{2}} = 18$.

Pisząc po $3\frac{1}{2}$ godz. dziennie, przepisemy dzieło w 18 dniach.
 Porównaj rozwiązanie tego samego zadania na str. 40.

Ćwiczenia:

Przedstawić zapomocą wzoru algebraicznego następujące funkcje:

- Ilość obrotów koła u wozu jest funkcją przebytej drogi. Na drodze 250 *m* wykonywa koło 120 obrotów.
- Ilość obrotów koła u wozu wykonanych na pewnej drodze jest funkcją obwodu koła. Koło o obwodzie 2,4 *m* wykonywa na tej drodze 85 obrotów.
- Długość cienia jakiegoś przedmiotu w pewnej porze dnia jest funkcją wysokości przedmiotu. Przedmiot o wysokości 3,4 *m* rzuca cień długi na 5,8 *m*.
- Długość łuku pewnego koła jest funkcją kąta środkowego, odpowiadającego temu łukowi. Łukowi 5,4 *cm* odpowiada kąt środkowy $36^{\circ} 20'$.
- Wysokość prostokąta o danem polu jest funkcją jego podstawy; prostokąt o podstawie 6 *cm* ma wysokość 7 *cm*.
- Objętość jednego grama jakiegoś ciała jest funkcją jego ciężaru właściwego.
- Ilość ciepła potrzebna do ogrzania o 1°C przedmiotu zrobionego z żelaza jest funkcją jego masy. Do ogrzania 76 *g* żelaza o 1°C trzeba 8,6 kaloryj gramowych.
- Czas potrzebny do wykonania pewnej pracy jest funkcją ilości robotników; 30 robotników wykona tę pracę w 40 dniach.
- Ilość *kg* wody, którą pewien motor wydobywa w 1 min. ze studni, jest funkcją odległości miejsca, do którego woda ma być dostarczona od poziomu wody w studni. Motor podnosi w 1 min. 20 *kg* wody na wysokość 15 *m*.

§ 3. Przykład zastosowania tablic.

W praktyce używamy często tablic (tabel). Np.:

Tablica przy końcu książki podaje 1000 razy zwiększone od-

wrotności liczb, a więc przedstawia funkcję: $y = \frac{1000}{x}$.

Aby znaleźć w tej tablicy $\frac{1000}{528}$, szukamy w kolumnie, mającej u góry napis: *x*, liczby 52. W rzędzie poziomym, w którym znaleźliśmy 52, a w kolumnie, mającej u góry napis 0, znajdziemy część całkowitą 1, szukanej wartości; w kolumnie, mającej u góry napis 8 (cyfra jednostek), znajdziemy jej część dziesiętną: 894 tak, że:

$$\frac{1000}{528} = 1,894.$$



Jeżeli przy części dziesiętnej szukanej wartości znajdziemy znaczek *, należy za część całkowitą przyjąć liczbę z następnego wiersza. Np.:

Chcąc wyznaczyć $\frac{1000}{336}$ szukamy w kolumnie z napisem x liczby 33.

W rzędzie poziomym, w którym znaleźliśmy 33, znajdujemy jednak w kolumnie 6 część dziesiętną szukanej wartości 976 ze znaczkiem *. Należy więc za cyfrę całości przyjąć cyfrę z kolumny 0 następnego wiersza, t. j. 2. Otrzymamy:

$$\frac{1000}{336} = 2,976.$$

Łatwo teraz obliczyć odwrotności liczb 336; 33,6; 3,36 i t. p. Znajdziemy:

$$\frac{1}{336} = 0,002976; \quad \frac{1}{33,6} = 0,02976; \quad \frac{1}{3,36} = 0,2976 \text{ i t. p.}$$

Przy pomocy tej tablicy można każde dzielenie przez liczbę, mającą niewielecyfrowy dzielnik, zastąpić mnożeniem. Np.:

$$40 : 5,28 = 40 \cdot \frac{1}{5,28} = 40 \cdot 0,1894 = 7,576.$$

Pamiętać należy, że wartości funkcji y w tablicy są zaokrąglone do trzech miejsc dziesiętnych.

Ćwiczenia:

- Korzystając z tablicy odwrotności liczb, oblicz w przybliżeniu ilorazy następujących przybliżeń:

$$\begin{array}{llll} a) \frac{70,0}{487}; & b) \frac{5710}{84,3}; & c) \frac{6,01}{25,7}; & d) \frac{820}{33,5}; \\ e) \frac{0,630}{0,506}; & f) \frac{1,00}{42,3 \cdot 0,0507}; & g) \frac{56,0}{2,43 \cdot 3,38}; & h) \frac{1,07}{0,037 \cdot 4,52}. \end{array}$$

- Korzystając z tablicy odwrotności liczb, oblicz z dokładnością do trzech cyfr znaczących:

- Promień ziemi, przyjmując, że obwód południka wynosi 40 000 km, a $\pi = 3,14$.
- Gęstość zaludnienia (iloraz liczby mieszkańców przez powierzchnię) Polski, przyjmując, że Polska ma 33,0 milionów mieszkańców, a powierzchnia jej wynosi 388,6 tysięcy km².
- Stosunek (w procentach) długości granic morskich Polski do długości granic ogółem, przyjmując, że długość granic morskich wynosi 140 km, a długość granic lądowych 5394 km.
- Ciężar właściwy miedzi, wiedząc, że pewien przedmiot miedziany waży 425 g w powietrzu, a 377,5 g pod wodą.
- Ciepło właściwe żelaza, wiedząc, że 115 kaloryj ciepła, doprowadzonych do 236 g żelaza, podnosi temperaturę żelaza o 4,5° C.

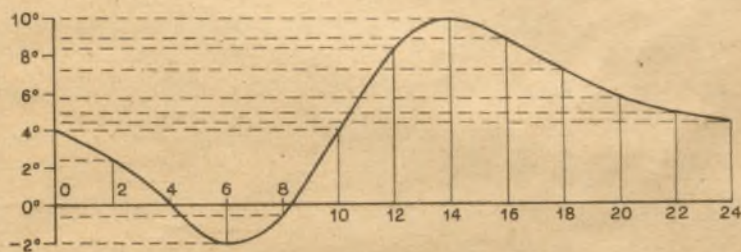
§ 4. Graficzne przedstawienie funkcji.

Ani wzór algebraiczny, ani tabelka nie pozwalają nam dość szybko orientować się w przebiegu zmienności funkcji; trudno natychmiast dostrzec, czy funkcja rośnie, czy maleje ze wzrostem zmiennej niezależnej, czy wzrost ten jest szybki, czy powolny i t. p. Jeżeli chcemy uzmysłowić sobie zmienność funkcji, uciekamy się do *graficznego* czyli *geometrycznego* przedstawienia funkcji. Jak to czynimy, wyjaśnimy najpierw na przykładzie.

Tabelka, umieszczona niżej, przedstawia temperaturę powietrza w ciągu pewnego dnia jako funkcję czasu.

Godz.	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	...
Temp.	4°	2,5°	0°	-2°	-0,5°	4°	8,5°	10°	9°	7,3°	5,9°	4,8°	4,2°	...

Aby przedstawić graficznie tę funkcję, kreślimy prostą poziomą i sporządzamy na niej podziałkę, przedstawiającą godziny (rys. 1). Temperaturę o każdej godzinie (a więc funkcję) przedstawiamy zapomocą odcinka prostokątnego do obranej prostej poziomej, a wykreślonego z punktu, oznaczającego tę godzinę. Każdy odcinek ma tyle jednostek długości, ile stopni wynosi temperatura o danej godzinie, i przedstawia wartość funkcji. Gdybyśmy mieli podaną temperaturę nie w odstępach dwu-



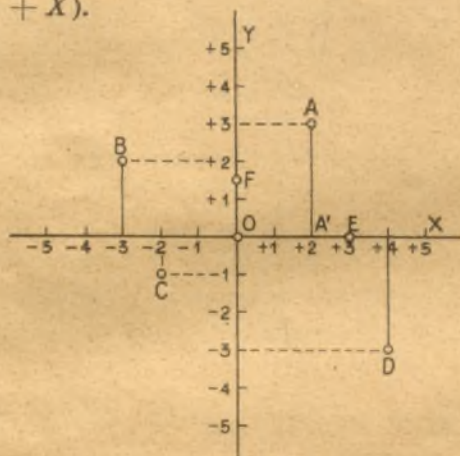
Rys. 1.

dzinnych, lecz mniejszych, to owe odcinki pionowe zagęszczałyby się, a końce ich utworzyłyby wreszcie linię, która wskazuje, jak w ciągu dnia temperatura się zmieniała, kiedy wzrastała, kiedy obniżała się, kiedy była najwyższa i t. p. Linia ta daje więc przejrzysty obraz zmiany temperatury w ciągu dnia. Dla ułatwienia odczytywania temperatury kreśli się często jeszcze prostą prostokątną do prostej, na której oznaczono godziny (patrz rys. 1), a na niej sporządza się podziałkę, oznaczającą temperaturę.

Zanim przejdziemy do dokładnego omówienia sposobu graficznego przedstawiania funkcji, zajmiemy się jeszcze pewnymi rozważaniami geometrycznymi:

Wiadomo z nauki geografii, że położenie miejscowości jakiejś na ziemi oznaczamy, podając jej długość i szerokość geograficzną, t. j. położenie względem południka głównego i równika. Koła te stanowią t. zw. *układ odniesienia*, bo położenie każdej miejscowości wyznaczamy w odniesieniu do tych dwu linii.

Jeżeli chcemy określić położenie punktu na płaszczyźnie, obieramy za układ odniesienia dwie prostopadłe do siebie osie, zazwyczaj jedną poziomą, a drugą pionową. Poziomą nazywamy *osią X*, lub *osią odciętych*, a pionową *osią Y*, lub *osią rzędnych*. Kierunek dodatni na osi *X* obieramy od strony lewej ku prawej, na osi *Y* od dołu w górę. Obie osie stanowią układ odniesienia, który nazywamy *układem współrzędnych prostokątnych*. Punkt przecięcia się obu osi nazywamy *początkiem układu współrzędnych*. Na obu osiach sporządzamy podziałkę, przyjmując punkt zerowy w początku układu. Osie dzielą płaszczyznę rysunku na cztery części, które nazywamy ćwiartkami, kolejno: pierwszą (między $+X$ a $+Y$), drugą (między $+Y$ a $-X$), trzecią (między $-X$ a $-Y$) i czwartą (między $-Y$ a $+X$).



Rys. 2.

Aby oznaczyć położenie jakiegoś punktu *A* na płaszczyźnie (rys. 2), kreślimy z tego punktu odcinek AA' prostopadły do osi *X*; długość odcinka OA' , który AA' odcina na osi *X*, nazywamy *odciętą*, albo *x* punktu *A*; długość odcinka $A'A$ nazywamy *rzędną*, albo *y* punktu *A*. W ten sposób przyporządkujemy każdemu punktowi płaszczyzny dwie liczby względne: odciętą i rzędną, które nazywamy *współrzędnymi prostokątnymi* tego punktu.

Piszemy to zwykle w następujący sposób: $A(2; 3)$, $B(-3; 2)$, $C(-2; -1)$, $D(4; -3)$, $E(3; 0)$, $F(0; 1,5)$, $O(0; 0)$ i t. p., co oznacza, że *A* ma współrzędne $x=2$, $y=3$ i t. d.

Mając dane współrzędne jakiegoś punktu, możemy położenie jego na płaszczyźnie wyznaczyć. Należy tylko posunąć się na osi *X* od punktu *O* o tyle jednostek (na prawo lub na lewo, sto-

sownie do znaku x), ile wskazuje odcięta, a stąd w kierunku prostopadłym (do góry lub na dół, stosownie do znaku y) o tyle jednostek, ile wskazuje rzędna. Punkt, do którego w ten sposób dojdziemy, będzie szukany punktem.

Tak podporządkowaliśmy w sposób jednoznaczny każdemu punktowi na płaszczyźnie parę liczb (współrzędnych) i każdej parze liczb ściśle określony punkt na płaszczyźnie.

Aby przedstawić graficznie jakąś funkcję, daną zapomocą tabelki, uważamy każdą parę odpowiadających sobie liczb w tabelce za współrzędne punktu i kreślimy tyle punktów, ile jest par odpowiadających sobie liczb w tabelce. Otrzymamy w ten sposób zbiór punktów, które tem bliżej siebie będą leżały, im gęstsza jest tabelka. Gdyby tabelka obejmowała wszystkie liczby, to punkty te utworzyłyby pewną linię (w ogólności krzywą). Odcięte punktów tej krzywej przedstawiają wartości zmiennej niezależnej; rzędne przedstawiają odpowiednie wartości funkcji (zmiennej zależnej). By nie zamazywać rysunku, nie rysujemy zwykle przy graficznem przedstawianiu funkcji rzędnych, lecz tylko samą krzywą i mówimy w skróceniu, że krzywa przedstawia funkcję, pamiętając, że nie krzywa sama, lecz rzędne jej punktów przedstawiają wartości funkcji. Tę krzywą nazywamy *wykresem funkcji*.

Jako przykład sporządzania wykresu na podstawie danej tabelki posłużyć może tabelka na str. 53 i rys. 1. Aby otrzymać wykres, kreślimy oś X (pozioma prosta wyciągnięta w rys. 1) i oś Y (pionowa prosta wyciągnięta w rysunku) i sporządzamy na nich podziałki. Wyznaczamy punkty o współrzędnych $(0; 4)$, $(2; 2,5)$, $(4; 0)$, $(6; -2)$ i t. d. (Wskaż te punkty w rys. 1). Punkty te łączymy odręcznie linią krzywą (lub odcinkami prostej), a linia ta przedstawia wykres temperatury jako funkcji czasu w ciągu dnia, ale tylko w przybliżeniu. Przy kreśleniu tej krzywej postępowaliśmy bowiem zupełnie dowolnie; przeto temperatura np. między godz. 8 a 10 mogła w rzeczywistości zmieniać się inaczej, niż wskazuje krzywa. Rzędne punktów krzywej między punktami $(8; -0,5)$ i $(10; 4)$ niezupełnie odpowiadają temperaturom w tym czasie. Gdy jednak przyjmiemy, że temperatura w tym czasie nie ulegała gwałtownym zmianom, co naogół dość często zgadza się z doświadczeniem, możemy owe rzędne uważać za przybliżone wartości temperatury. Do uzyskania dokładniejszego wykresu konieczna byłaby tabelka, podająca temperaturę powietrza w odstępach mniejszych niż dwugodzinnych.

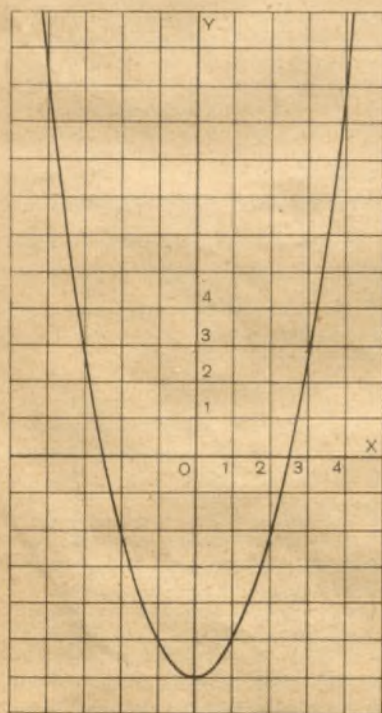
Jeżeli chcemy sporządzić wykres funkcji danej zapomocą wzoru algebraicznego, przedstawiamy tę funkcję zapomocą tabelki, obliczając wartości funkcji dla różnych wartości zmiennej niezależnej, i sprowadzamy w ten sposób to zadanie do poprzedniego.

Wyjaśnimy to na przykładzie.

Chcemy sporządzić wykres funkcji $y = x^2 - 6$. Podstawiamy w tym wzorze zamiast x kolejno wartości -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 , obliczamy odpowiednie wartości y i zestawiamy odpowiadające sobie wartości x i y w tabelce. Otrzymamy:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\dots$
y	10	3	-2	-5	-6	-5	-2	3	10	$\dots$

Następnie kreślimy (najpraktyczniej na papierze kratkowanym) układ współrzędnych (rys. 3), sporządzamy na osiach X i Y podziałki i wyznaczamy punkty o współrzędnych $(-4; 10)$, $(-3; 3)$, $(-2; -2)$, $(-1; -5)$ i t. d. (Zaznacz te punkty na rys. 3). Łącząc te punkty linią krzywą (rys. 3), otrzymamy przybliżony wykres funkcji $y = x^2 - 6$. Wykres możemy poprawić, zagęszczając stosownie tabelkę. Podstawmy np. zamiast x wartości $-0,5$; $+0,5$; $+1,5$ i t. d. Otrzymamy dla y odpowiednie wartości: $-5,75$; $-5,75$; $-3,75$ i t. d. Kreśląc punkty $(-0,5; -5,75)$, $(0,5; -5,75)$, $(1,5; -3,75)$ i t. d., które są dalszemi punktami wykresu, możemy uzyskać rysunek dokładniejszy.



Rys. 3.

Jeżeli np. z wykresu funkcji na rys. 3 chcemy odczytać, jaka wartość y odpowiada wartości $x = 2$, kreślimy przez punkt $(2; 0)$ prostopadłą do osi X . Odczytujemy z wykresu, że ta prostopadła przecina krzywą w punkcie $(2; -2)$. Wartości $x = 2$ odpowiada zatem wartość funkcji $y = -2$.

Przy sporządzaniu wykresów trzymać się należy następujących wskazówek: Przedewszystkiem należy ustalić, jakie odcinki przedstawiać mają jednostki, w których wyrażamy zmienną niezależną i zależną. Liczyć się

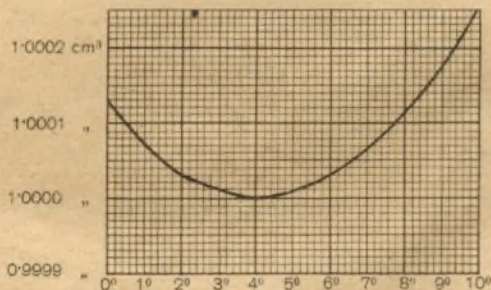
przytem należy z wymiarami rysunku, który chcemy otrzymać i z obszarami zmienności x i y . Jednostka długości, którą przedstawiamy jednostki zmiennej x , nie musi być koniecznie równa jednostce długości, którą przedstawiamy jednostki zmiennej y . Należy te jednostki tak dobrać, aby zmiany y były dostatecznie widoczne. Jeżeli obchodzą nas tylko wartości x w pewnych granicach, można w rysunku przedstawić tylko tę część osi X , o którą nam w danym wypadku chodzi. Jeżeli wartości y są stale większe od pewnej liczby, można oś X w rysunku opuścić, myśląc ją sobie znacznie niżej od pierwszej linii poziomej rysunku.

Jak stosuje się te wskazówki, wyjaśnimy na przykładzie.

Tabelka umieszczona obok podaje objętość 1 g wody w cm^3 jako funkcję temperatury w obszarze od 0°C do 10°C . Chcemy przedstawić tę funkcję wykresem. Ponieważ obchodzą nas tylko temperatury od 0° do 10° , to licząc się z wymiarami rysunku, przedstawimy na osi X 1° odcinkiem $0,5\text{ cm}$. Aby ustalić, jakim odcinkiem przedstawić należy 1 cm^3 , zauważymy w tabelce, że zmiany objętości okazują się dopiero w stutysięcznych cm^3 . Aby te zmiany były w rysunku widoczne, przedstawimy $0,00001\text{ cm}^3$ odcinkiem 1 mm , a więc $0,0001\text{ cm}^3$ odcinkiem 1 cm , a 1 cm^3 odcinkiem $10\,000\text{ cm} = 100\text{ m}$. Wykres zupełny

Temp. w stop. C	Objętość w cm^3
0°	1,000129
1°	1,000072
2°	1,000031
3°	1,000009
4°	1,000000
5°	1,000010
6°	1,000030
7°	1,000067
8°	1,000114
9°	1,000176
10°	1,000253

miałby tedy wymiary $5\text{ cm} \times 100\text{ m}$. Lecz rzędne w tym wykresie będą się wahać między $10\,000\text{ cm}$ a $10002,5\text{ cm}$; można zatem z każdej rzędnej opuścić (od dołu) np. 9999 cm , a więc pomyśleć sobie oś X o 9999 cm niżej od pierwszej prostej poziomej w rysunku. Rys. 4 przedstawia wykres funkcji, danej zapomocą powyższej tabelki, sporządzony według powyższych wskazówek na papierze milimetrowym. Objasnij ten rysunek!



Rys. 4.

Ćwiczenia:

1. a) Średnie miesięczne temperatury wynosiły w pewnej miejscowości począwszy od stycznia: -4° ; -2° ; 2° ; $7,5^\circ$; 12° ; 16° ; 18° ; 17° ; 13° ; 8° ; $1,5^\circ$; $-2,5^\circ$. Przedstawić graficznie, jak zmieniała się temperatura w ciągu roku.

- b) Temperatura chorego (stan gorączki), mierzona co 6 godzin przez 4 następujące po sobie dni, wynosiła: $37,5^{\circ}$; 38° ; $38,3^{\circ}$; $37,8^{\circ}$; $38,7^{\circ}$; $39,4^{\circ}$; $39,8^{\circ}$; 40° ; $40,1^{\circ}$; $39,8^{\circ}$; $39,3^{\circ}$; $38,6^{\circ}$; $37,7^{\circ}$; $36,7^{\circ}$; $36,2^{\circ}$. Przedstawić graficznie temperaturę chorego jako funkcję czasu.
- c) W kole o promieniu 4 cm wykreślić kąty środkowe, mające: 0° , 10° , 20° , ... 180° i odpowiadające im cięciwy. Zmierzyć te cięciwy i przedstawić na podstawie tych pomiarów długość cięciwy jako funkcję odpowiadającego jej kąta środkowego zapomocą tabelki i wykresu.
2. a) Pociąg wyjeżdża ze stacji A o godz. 12; o godz. 12 min. 15 przybywa do stacji B, oddalonej od A o 12 km, i zatrzymuje się tu do godz. 12 min. 30. O godz. 12 min. 50 przybywa do stacji C, oddalonej od A o 30 km, i zatrzymuje się tu do godz. 13. Stąd wyjeżdża do stacji D, oddalonej od A o 40 km, i przybywa tu o godz. 13 min. 10. Przedstawić graficznie, jak zmienia się odległość pociągu od A między godz. 12, a godz. 13 min. 10.

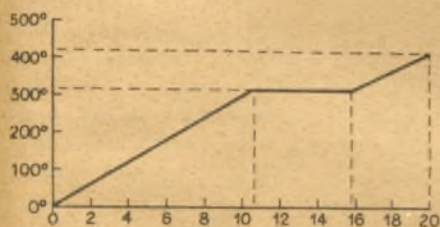
Czas liczyć od godz. 12. Na osi X przedstawiać 1 min. odcinkiem 1 mm, a na osi Y 1 km odcinkiem 1 mm. Poszczególne punkty wykresu łączyć odcinkami prostej.

- b) Inny pociąg wyjeżdża o godz. 12 ze stacji C i przybywa do B o godz. 12 min. 20. Zatrzymawszy się tu 15 min., odjeżdża do stacji A i przybywa tu o godz. 13. Przedstawić na rysunku z poprzedniego zadania także ruch tego pociągu. — Rysunek przedstawi graficzny rozkład jazdy obu pociągów między stacjami A i C.
3. a) Wzór $y = \frac{3}{4}x$ wyraża, że y jest wprost proporcjonalne do x (współczynnik proporcjonalności jest $\frac{3}{4}$). Przedstaw graficznie tę funkcję.
- b) Wzór $y = \frac{6}{x}$ wyraża, że y jest odwrotnie proporcjonalne do x (współczynnik proporcjonalności wynosi 6). Sporządź wykres funkcji, wyrażonej zapomocą tego wzoru.
- Ponieważ wartości $x = 0$ nie odpowiada żadna wartość y , to na osi Y nie będzie leżał żaden punkt wykresu.
4. Przedstawić graficznie funkcje, wyrażone zapomocą wzorów:
- a) $y = x - 4$; b) $y = -0,5x + 2$; c) $y = 2x - 5$;
 d) $y = 8 - \frac{1}{2}x^2$; e) $y = x^2 - 4x$; f) $y = \frac{10}{x^2}$.

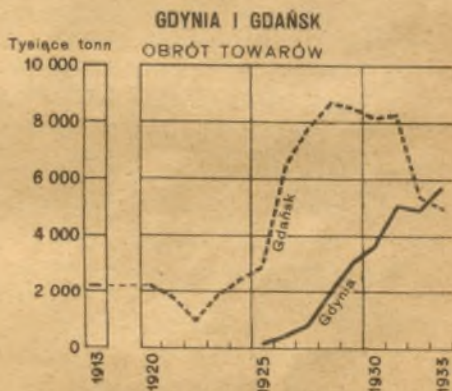
5. a) Objaśnij wykres, podany na rys. 5. Wykres ten przedstawia, jak zmienia się temperatura jednego grama ołowiu, który ma początkowo temperaturę 0°C , gdy do niego doprowadzamy ciepło. (Odcięta punktu wykresu przedstawia ilość doprowadzonego ciepła w kalorjach, a rzędna temperaturę.)

Zauważysz z wykresu, że w miarę doprowadzania ciepła temperatura początkowo wzrasta, później pozostaje stała, a później znów rośnie. Domyśl się, jakie jest znaczenie poziomej linii w wykresie. Czy można odczytać z wykresu temperaturę i ciepło topnienia ołowiu? Czy można obliczyć na podstawie wykresu ciepło właściwe ołowiu? Oblicz! Czy ciepło właściwe ołowiu stałego wypada takie samo, jak ciepło właściwe ołowiu płynnego?

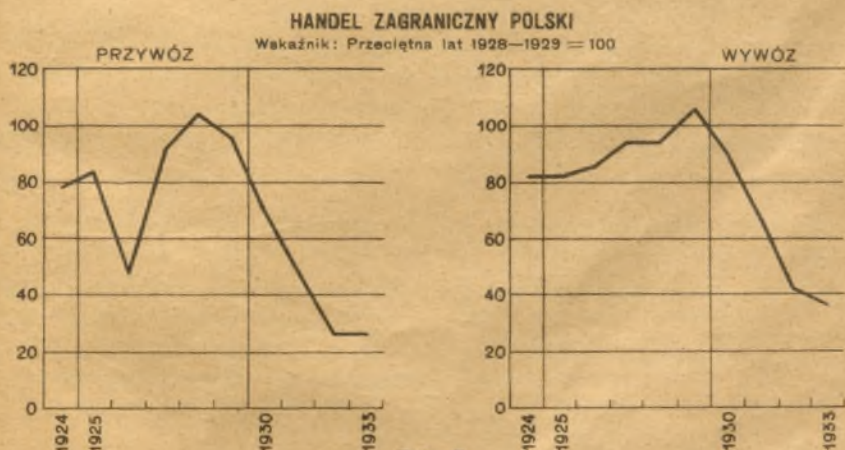
- b) Objaśnij wykresy, przedstawione na rysunku 6 i rysunku 7.



Rys. 5.



Rys. 6.



Rys. 7.

Wszystkie trzy wykresy zaczerpnięte są z „Małego Rocznika Statystycznego” z r. 1934, wydawanego nakładem Głównego Urzędu Statyst.

Wykres na rys. 6 przedstawia obrót towarów przez dwa porty, Gdynię i Gdańsk, z których Polska korzysta w handlu morskim. Omów najpierw na podstawie wykresu, jak rozwijał się w ciągu lat obrót towarów przez Gdańsk, a jak przez Gdynię. Próbuj dostrzeżone zmiany obrotu wyjaśnić. Czy ruch towarowy przez Gdańsk jest (pomimo spadku w ostatnich latach) mniejszy, niż był przed wojną? Jak to wyjaśnisz? Sporządź wykres, któryby przedstawiał obrót towarów przez oba porty razem. Co zauważysz?

Oba wykresy na rys. 7 ilustrują rozwój handlu zagranicznego Polski w latach 1924 ÷ 1933. W wykresie tym nie chodzi o podanie wartości w złotych towarów przywiezionych do Polski lub wywiezionych z Polski; chodzi tylko o wyraźne przedstawienie, jak ten handel rozwijał się w ciągu lat. Oznaczono więc wartość towaru przywiezionego do Polski (wywiezionego z Polski) średnio w jednym roku w latach 1928 i 1929 liczbą 100. (Zaznaczono to w napisie: „Wskaźnik...”). Jeżeli więc np. dla r. 1931 odczytamy w „przywozie” rzędną 45, to liczba ta oznacza, że wartość przywiezionych w tym roku towarów wynosiła 45% wartości towarów przywiezionych średnio w latach 1928 i 1929. Objasnij oba wykresy.

Ważną rzeczą dla Państwa jest, aby wartość wywiezionych towarów była zawsze większa od wartości przywiezionych. Wykresy nasze nie pozwalają jednak bezpośrednio porównać wartości przywozu z wartością wywozu. Gdy jednak znajdziemy w Roczniku Statystycznym, że w r. 1933 wartość przywozu wynosiła 827, a wywozu 960 milionów złotych, potrafimy obliczyć przy pomocy wykresu (oczywiście w przybliżeniu) wartość przywozu i wywozu także w innych latach. Zrób to i przedstaw graficznie różnicę między wywozem a przywozem w latach 1924 ÷ 1933.

Rozdział IV

Równania o współczynnikach literowych

§ 1. Powtórzenie zasad rozwiązywania równań.

Przy rozwiązywaniu równań opieraliśmy się na twierdzeniach:

Jeżeli dane równanie ma pierwiastek, to pierwiastek ten sprawdza także równanie, które otrzymamy, jeżeli:

- 1) po jednej lub po obu stronach równania zastąpimy jakieś wyrażenie wyrażeniem równem (a więc np. wykonamy naznaczone działania);
- 2) do obu stron danego równania dodamy tę samą liczbę;
- 3) od obu stron danego równania odejmiemy tę samą liczbę;
- 4) obie strony równania pomnożymy przez tę samą liczbę;
- 5) obie strony równania podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera.

Stosując te twierdzenia, dochodziliśmy do równania tak prostego, że pierwiastek jego mogliśmy łatwo znaleźć. Jeżeli dane równanie miało pierwiastek, to mógł nim być tylko pierwiastek ostatniego równania. Że pierwiastek ostatniego równania był rzeczywiście pierwiastkiem danego równania, stwierdzaliśmy zapomocą sprawdzenia.

We wszystkich zadaniach, które rozwiązywaliśmy, okazywało się jednak, że pierwiastek ostatniego równania sprawdzał zawsze dane równanie; nasuwa się tedy myśl, że tak jest zawsze, że więc sprawdzenie można pominąć.

Wyjaśnimy tę sprawę, rozwiązując równanie:

$$\frac{x-3}{4} + \frac{x+1}{6} = 4. \quad (1)$$

Mnożymy obie strony
przez 12:

$$3x - 9 + 2x + 2 = 48. \quad (2)$$

Przenosimy wyrazy, zawierające x , na lewą stronę, a wyrazy wiadome na prawą:

$$3x + 2x = 48 + 9 - 2 \dots (3)$$

Redukujemy:

$$5x = 55 \dots (4)$$

Dzielimy obie strony przez 5:

$$x = 11 \dots (5)$$

Równanie (5) ma jedyny pierwiastek 11. Zatem i pierwiastkiem równania (1) może być tylko 11. Że jest nim rzeczywiście, stwierdzaliśmy przez sprawdzenie.

Zamiast sprawdzania, zastosujemy teraz następujące rozumowanie:

11 sprawdza równanie (5).

11 musi sprawdzać także równanie (4), ponieważ równanie (4) powstaje z równania (5) przez pomnożenie obu stron przez 5 (twierdzenie 4).

11 musi sprawdzać także równanie (3), które powstaje z równania (4) przez zastąpienie wyrażeń $5x$ i 55 przez wyrażenia równe $3x + 2x$ i $48 + 9 - 2$ (twierdzenie 1).

11 musi sprawdzać równanie (2), bo równanie (2) powstaje z równania (3) przez kolejne dodanie do obu stron liczb -9 i $+2$ (twierdzenie 2).

Skoro 11 jest pierwiastkiem równania (2), to musi być też pierwiastkiem równania (1), bo równanie (1) powstaje przez podzielenie obu stron równania (2) przez 12, które jest różne od zera (twierdzenie 5).

Tak więc widzimy bez sprawdzania, że pierwiastek 11 równania (5) musi być także pierwiastkiem danego równania (1).

Rozumowanie takie możemy zamiast sprawdzania przeprowadzić po rozwiązaniu każdego równania. Nie natrafimy nigdy na żadne trudności, o ile tylko przy rozwiązywaniu równania nie mnożyliśmy obu stron równania przez 0. To zastrzeżenie jest konieczne; przechodząc bowiem w rozumowaniu końcowem w powyższym przykładzie z równania (2) do równania (1), musieliśmy dzielić obie strony równania (2) przez 12, t. j. przez liczbę, przez którą przy rozwiązywaniu równanie (1) mnożyliśmy, aby otrzymać równanie (2). Gdyby tą liczbą było nie 12, lecz 0, nie moglibyśmy dzielenia wykonać, nie mielibyśmy więc pewności, czy pierwiastek równania (2) sprawdza równanie (1).

Doszliśmy więc do następującego wyniku:

Jeżeli przy rozwiązywaniu równania unikamy mnożenia i dzielenia obu stron równania przez 0, to znaleziona na x wartość jest zawsze pierwiastkiem danego równania. O ile zachowamy tę ostrożność, możemy sprawdzenie pominąć; sprawdzenie będzie stanowiło odtąd tylko kontrolę, czy nie popełniliśmy w toku rozwiązywania równania jakiegoś błędu.

Jeżeli wszystkie współczynniki przy niewiadomej i wyrazy wiadome są liczbami szczególnymi, nie zachodzi obawa, abyśmy popełnili błąd,

mnożąc lub dzieląc obie strony równania przez 0. Jeżeli jednak w równaniu znajdują się liczby oznaczone literami, należy zawsze pamiętać, że ani dzielić ani mnożyć obu stron równania nie wolno przez żadne wyrażenia bez stwierdzenia lub zastrzeżenia, że wyrażenia te mają wartości różne od zera.

§ 2. Ogólne równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.

Jeżeli równanie z jedną niewiadomą zawiera po uporządkowaniu (t. j. po uwolnieniu od nawiasów i ułamków i po przeniesieniu wszystkich wyrazów na stronę lewą i zredukowaniu) niewiadomą tylko w pierwszej potęgze, to nazywa się równaniem stopnia pierwszego. Po lewej stronie takiego równania znajduje się niewiadoma x z jakimś współczynnikiem a i wyraz b , wolny od niewiadomej, a po prawej 0. Ogólną postacią takiego równania jest:

$$ax + b = 0.$$

Aby takie równanie rozwiązać, przenosimy najpierw b na stronę prawą. Otrzymamy:

$$ax = -b.$$

Dalsze postępowanie zależy od wartości a . Rozróżnimy następujące przypadki:

1. Jeżeli $a \neq 0$, to dzieląc obie strony równania przez a , znajdziemy natychmiast pierwiastek danego równania:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

W tym przypadku ma więc równanie jeden i tylko jeden pierwiastek; mówimy, że równanie jest *oznaczone*.

2. Jeżeli $a = 0$, rozróżnimy znów dwa przypadki:

a) Jeżeli $a = 0$ i $b = 0$, równanie przyjmuje postać:

$$0 \cdot x = 0$$

i sprawdza się dla każdej wartości x . Mówimy, że równanie jest *nieoznaczone*.

b) Jeżeli $a = 0$, a $b \neq 0$, wtedy lewa strona równania $ax = -b$ ma dla wszelkich wartości x wartość 0, prawa zaś jest różna od zera. Niema takiej liczby, któraby podstawiona zamiast x sprawdzała równanie; mówimy, że równanie jest *sprzeczne*.

§ 3. Rozwiązywanie równań o współczynnikach literowych.

Przykład 1. Rozwiązać i sprawdzić równanie:

$$a(x-a) + 3(x+3) = 0.$$

Wykonujemy naznaczone działania:

$$ax - a^2 + 3x + 9 = 0.$$

Przenosimy wyrazy zawierające niewiadomą na lewą, a pozostałe na prawą stronę:

$$ax + 3x = a^2 - 9;$$

Wylączamy x za nawias:

$$(a+3)x = a^2 - 9.$$

Rozróżniamy 2 przypadki:

1) Jeżeli $a+3 \neq 0$, t. j. $a \neq -3$, to dzieląc obie strony równania przez $a+3$, znajdziemy pierwiastek równania:

$$x = a - 3.$$

2) Jeżeli $a+3 = 0$, t. j. $a = -3$, wtedy prawa strona równania $a^2 - 9$ staje się również zerem; równanie jest nieoznaczone.

Napisz zamiast a w danym równaniu -3 i próbuj je rozwiązać! Podstaw zamiast a w danym równaniu -3 , a zamiast x dowolną liczbę i stwierz, że równanie się sprawdza.

Sprawdzanie w przypadku 1) jest wobec rozważań w § 1 zbędne. Przeprowadzimy je tylko dla stwierdzenia, czy przy rozwiązywaniu nie popełniłmy błędu. Znajdziemy:

$$L = a(a-3-a) + 3(a-3+3) = a \cdot (-3) + 3a = -3a + 3a = 0; \quad P = 0.$$

$$L = P.$$

Z przykładu tego widzimy, że równania o współczynnikach literowych rozwiązujemy zupełnie tak samo, jak równania o współczynnikach szczegółowych. Zapamiętać należy tylko następujące praktyczne wskazówki:

Jeżeli po uporządkowaniu równania niewiadoma znajduje się w kilku wyrazach, których zredukować nie można, należy niewiadomą wyłączyć za nawias.

Przy uwalnianiu niewiadomej od współczynnika należy rozważyć oddzielnie przypadek, kiedy ten współczynnik staje się zerem.

Przy równaniach ułamkowych uwzględnić należy jeszcze warunek, że wszystkie ułamki w równaniu muszą mieć mianowniki różne od zera. Wyjaśnimy to na przykładzie.

Przykład 2. Rozwiązać równanie: $\frac{a^2}{x+1} - \frac{b^2}{x-1} = \frac{2ab}{x^2-1}$.

Miejscami zerowymi ułamków w tym równaniu są wartości $x = -1$ i $x = +1$. Zakładamy, że x nie przyjmuje żadnej z tych wartości, i mnożymy obie strony równania przez $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \neq 0$. Otrzymamy:

$$a^2(x-1) - b^2(x+1) = 2ab,$$

$$\text{a po wykonaniu działań: } a^2x - a^2 - b^2x - b^2 = 2ab.$$

Przenosimy wyrazy, zawierające x , na lewą stronę, a pozostałe na prawą:

Wylączamy x za nawias:

$$a^2x - b^2x = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a^2 - b^2)x = (a+b)^2.$$

Zauważymy, że współczynnik przy niewiadomej $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ staje się zerem, gdy albo $a = -b$, albo $a = b$ i rozróżniamy następujące przypadki:

1) Jeżeli $a^2 - b^2 \neq 0$, czyli $a \neq -b$ i $a \neq b$, dzielimy obie strony równania przez $a^2 - b^2$; otrzymamy:

$$x = \frac{(a + b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{a + b}{a - b}.$$

Wyrażenie to przedstawia w tym przypadku pierwiastek danego równania, o ile $x \neq 1$ i $x \neq -1$. Sprawdź!

2) Jeżeli $a^2 - b^2 = 0$ i $(a + b)^2 = 0$, czyli jeżeli $a = -b$, równanie jest nieoznaczone.

3) Jeżeli $a^2 - b^2 = 0$ i $(a + b)^2 \neq 0$, czyli jeżeli $a = b$, równanie jest sprzeczne.

Podstaw w danym równaniu raz $a = -b$, drugi raz $a = b$ i próbuj je rozwiązać!

Przykład 3. Kapitał a złożono na procent prosty $p\%$, a kapitał b równocześnie na procent prosty $q\%$. Po ilu latach zrównają się te kapitały?

Oznaczmy literą x ilość lat, po której to nastąpi. Kapitał a będzie miał wtedy wartość $a + \frac{apx}{100}$, a kapitał b wartość $b + \frac{bqx}{100}$. Ponieważ obie wartości mają być równe, otrzymujemy równanie:

$$a + \frac{apx}{100} = b + \frac{bqx}{100}.$$

Porządkujemy to równanie:

$$100a + apx = 100b + bqx,$$

$$apx - bqx = 100b - 100a,$$

$$(ap - bq)x = 100(b - a).$$

Rozróżniamy 3 przypadki:

1) Jeżeli $ap - bq \neq 0$, wtedy:

$$x = \frac{100(b - a)}{ap - bq}.$$

Praktyczne znaczenie ma to rozwiązanie oczywiście tylko wtedy, jeżeli na x otrzymamy wartość dodatnią.

Oblicz wartość x i sprawdź zadanie według tekstu, przyjmując:

$$a) a = 1000, b = 1250, p = 6, q = 4;$$

$$b) a = 1000, b = 1250, p = 6, q = 5;$$

$$c) a = b = 1000, p = 6, q = 4.$$

2) Jeżeli $ap - bq = 0$ i $b - a = 0$, wtedy równanie jest nieoznaczone.

Łatwo zrozumieć praktyczne znaczenie tego przypadku: Z równości ostatnich wynika: $a = b$ i $p = q$, t. j. oba kapitały są równe i złożone są na jednakowy procent. W tych warunkach oba kapitały będą zawsze równe: i teraz i za rok i za dwa lata i t. d.

3) Jeżeli $ap - bq = 0$ i $b - a \neq 0$, wtedy równanie jest sprzeczne.

Jeżeli np. $a = 1000$, $b = 1500$, $p = 6$, $q = 4$, to warunek ten jest spełniony. Wtedy pierwszy kapitał wzrasta co roku o 60 zł, a drugi również o 60 zł; nigdy nie zrównają się oba. Zadanie nie ma rzeczywiste rozwiązanie.

Ćwiczenia:

1. Rozwiąż w pamięci równania:

a) $0 = x + b$;	b) $0 = ax - b$;	c) $ax + bx = c$;
$0 = x - a$;	$-ax + b = 0$;	$a = bx - x$;
$b - x = 0$;	$a - bx = 0$;	$ax = x + a$;
$a + x = b$;	$ax + b = c$;	$x = ax + b$;
$a = x - b$;	$ax - b = c$;	$b - ax = cx$;
$a = b - x$;	$a - bx = c$;	$bx + b = cx$;
$b = -x - a$;	$b = c + ax$;	$ax + a = bx$;
$a - x = -b$;	$a + b - cx = 0$;	$a - x = ax$;
d) $\frac{x}{a} = b$;	e) $\frac{1}{x} = a$;	f) $\frac{a}{x} = b + c$;
$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$;	$\frac{1}{x} = \frac{1}{a}$;	$a - \frac{b}{x} = c$;
$\frac{ax}{2} = b$;	$\frac{1}{x} = \frac{a}{b}$;	$\frac{a+b}{x} = c$;
$2b = \frac{ax}{3}$;	$\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$;	$\frac{a}{x} + b = \frac{c}{x}$;
$\frac{bx}{a} = c$;	$\frac{a}{x} = \frac{1}{b}$;	$\frac{1}{x} - \frac{a}{x} = b$;
$\frac{ax}{b} = \frac{m}{n}$;	$\frac{a}{bx} = c$;	$\frac{a-c}{x} = b - c$;
$\frac{ax}{b} = \frac{1}{c}$;	$\frac{a}{bx} = \frac{m}{n}$;	$a + \frac{b}{x} = b - \frac{c}{x}$.

2. Ułożyć wzór, rozwiązujący każde z następujących zagadnień. Następnie uważać w otrzymanym wzorze za niewiadomą kolejno każdą z liczb, wymienionych w nawiasie przy końcu zagadnienia, a wszystkie inne liczby za wiadome. Sformułować zagadnienie stosownie do nowych warunków. Rozwiązać otrzymane równanie.

a) Obliczyć pole p trójkąta o podstawie a i wysokości h . $[a, h]$.

Rozwiązanie: 1) Pole p trójkąta obliczamy według wzoru: $p = \frac{1}{2}ah$. 2) Uważamy za niewiadomą a , za wiadome p i h . Mamy więc zadanie: Jak wielka jest podstawa a trójkąta o polu p i wy-

sokości h ? Wychodząc ze wzoru $p = \frac{1}{2}ah$, rozwiązujemy to równanie ze względu na a ; otrzymamy: $2p = ah$; $a = \frac{2p}{h}$. 3) Uważamy za niewiadomą h , za wiadome p i a . I t. d.

- b) Obliczyć pole p trapezu o bokach równoległych a i b i wysokości h . [a, h].
- c) Obliczyć całkowitą powierzchnię p prostopadłościanu o krawędziach a, b i c . [a, b, c].
- d) Obliczyć sumę s kątów wewnętrznych wielokąta, mającego n boków. [n].
- e) Kapitał k rozdzielono na dwie części (a i $k-a$), z których jedna jest o l większa od drugiej. Znaleźć te części. [k].
- f) Kapitał k rozdzielono na dwie części (a i $k-a$), które pozostają do siebie w stosunku $m:n$. Znaleźć te części. [k].
- g) Z a zł wydałem b zł i n -tą część pozostałej reszty. Ile (r) pieniędzy pozostało mi? [a, b, n].
- h) Towar netto waży a kg, a tara wynosi $p\%$ wagi towaru netto. Ile (b) waży towar brutto? [a, p].
- i) Zmieszano a g tytoniu po m gr za 1 g z b g tytoniu po n gr za 1 g. Obliczyć cenę c jednego grama mieszaniny. [a, m].
- j) Zmieszano a g p -procentowego roztworu soli z b g q -procentowego. Jaki (r) procent soli zawiera otrzymany roztwór? [a, p].
- k) Kupiec kupił a tonn drzewa po m zł za tonnę i b tonn po n zł za tonnę. Po ile (s) zł ma sprzedawać tonnę, jeżeli chce na sprzedaży całego zapasu zarobić $p\%$ ceny kupna? [a, m, p].
- l) Kapitał k złożono na procent prosty $p\%$. Obliczyć dochód d z tego kapitału za n miesięcy. [k, p, n].
- m) Kapitał k złożono na procent prosty $p\%$. Jaką wartość K mieć będzie ten kapitał wraz z dochodem za n miesięcy? [k, p, n].
- n) Ktoś umieścił n -tą część kapitału k na $p\%$, a resztę na $q\%$. Jaki dochód roczny d ma z tego kapitału? [k, n, p, q].
- o) Pociąg jest oddalony od stacji A w pewnej chwili o b km. Odległość ta wzrasta (zmniejsza się) w każdej minucie o a km. Jaka będzie odległość s pociągu od A po t minutach? [a, b, t].

p) Objętość v_0 gazu przy 0°C wzrasta przy ogrzewaniu o każdy stopień C o $\frac{v_0}{n}$, jeżeli ciśnienie pozostaje niezmiennione. Jaka będzie objętość v gazu przy $t^\circ \text{C}$, a niezmiennionem ciśnieniu? [v_0 , n , t].

3. Rozwiązać następujące równania i ustalić warunki, kiedy rozwiązanie nie istnieje, lub nie jest jednoznaczne:

$$a) 2(x+a) = 12 - x; \quad b) (x+a)^2 - 4a = (x-a)^2 - a^2;$$

$$c) 1 - x = \frac{a-1}{a}; \quad d) \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = (x+b)(x-b) + \frac{5a^2}{4};$$

$$e) \frac{x+a-3b}{x+a} = \frac{x-2b}{x}; \quad f) \frac{x-1}{3} = \frac{x-2}{a};$$

$$g) (2m+x) : (m-x) = (1-x) : (2+x);$$

$$h) 2a(x-3) = x-3; \quad i) \frac{1}{2}(ax-4) = a-x;$$

$$j) a(x-1) = b(x+1); \quad k) ax+b = cx+d;$$

$$l) a^2(1-x) = b(ax+b); \quad m) (b+x)^2 = (a-x)^2;$$

$$n) \frac{x}{r} + \frac{x}{s} = 1; \quad o) \frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2;$$

$$p) x - \frac{a+b}{a-b} = \frac{a-b}{a+b}(x-1);$$

$$q) \frac{x+1}{(m+1)^2} = \frac{x}{m^2+1}; \quad r) a+2 = \frac{x+1}{1-ax};$$

$$s) \frac{2ax+1}{1-2bx} = \frac{a^2}{b^2}; \quad t) \frac{a^2}{x} - \frac{bx}{a-x} = b;$$

$$u) \frac{x-a}{x+b} + \frac{x-b}{x+a} = 2; \quad v) \frac{2x}{x-a} - \frac{x}{x-2b} = 1;$$

$$w) \frac{1}{a-x} - \frac{a}{a+x} = \frac{a}{a^2-x^2}; \quad x) \frac{ax+b}{ax-b} + \frac{bx+a}{bx-a} = 2;$$

$$y) \frac{x-a}{x+a} - \frac{a^2}{x^2-a^2} = 1; \quad z) \frac{a^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2a}{x^2-1} = 0.$$

4. a) Ojciec ma a lat, a syn b lat. Po ilu latach będzie (lub przed ilu laty był) ojciec n razy starszy od syna?

Sprawdzić, przyjmując: $a = 40$; $b = 8$; a nadto: 1) $n = 3$; 2) $n = 9$; 3) $n = 5$.

b) Ile g wody dodać (usunąć) należy do (z) m g a -procentowego roztworu soli, aby otrzymać roztwór b -procentowy?

Sprawdzić, przyjmując $m = 100$; a nadto: 1) $a = 10$; $b = 4$ 2) $a = 10$; $b = 16$; 3) $a = 10$; $b = 0$; 4) $a = b = 0$.

- c) Ile g czystego spirytusu dodać należy do a g spirytusu p -procentowego, aby otrzymać spirytus q -procentowy?

Sprawdzić, przyjmując $a = 200$, a nadto: 1) $p = 40$; $q = 60$;
2) $p = 40$; $q = 20$; 3) $p = q = 50$; 4) $p = 30$; $q = 100$;
5) $p = q = 100$.

- d) Jeden robotnik, pracując sam, wykonałby pewną pracę w a dniach. Pracował jednak razem z drugim robotnikiem, wskutek czego praca została wykonana w czasie krótszym o b dni. W jakim czasie wykonałby tę pracę drugi robotnik, pracując sam?

Sprawdzić, przyjmując za a i b stosowne szczegółowe wartości.

- e) Gdy pewną liczbę całkowitą podzielę przez liczbę o d mniejszą, otrzymam iloraz (niezupełny) q i resztę r . Jaka to liczba?

Sprawdzić, przyjmując: 1) $d = 7$; $q = 2$; $r = 7$; 2) $d = 3$, $q = 1$, $r = 2$; 3) $d = r = 7$; $q = 1$.

5. a) Do kawałka metalu, ważącego m g , a mającego temperaturę $t^{\circ}C$, doprowadzono q kaloryj ciepła. Jaka będzie temperatura metalu, jeżeli jego ciepło właściwe jest c ?
- b) Do a g wody o temperaturze $t_1^{\circ}C$ dodano b g wody o temperaturze $t_2^{\circ}C$. Jaka będzie końcowa temperatura?
- c) Do m_1 g wody o temperaturze $t^{\circ}C$ wrzucono m_2 g lodu o temperaturze $0^{\circ}C$. Lód stopił się zupełnie. Jaka była wtedy temperatura wody, jeżeli ciepło topnienia lodu jest c ?
- d) W naczyniu, zawierającym m g wody o temperaturze $t^{\circ}C$, skroplono tyle pary wodnej o temperaturze $100^{\circ}C$, że woda osiągnęła $100^{\circ}C$. Ile g pary wodnej skroplono, jeżeli ciepło parowania jest s ?
- e) W m_1 g wody o temperaturze t° skroplono m_2 g pary wodnej o temperaturze $100^{\circ}C$. Jaka była końcowa temperatura, jeżeli ciepło parowania jest s ?
- f) Pompa zgęszczająca wciąga do naczynia, zawierającego v_0 cm^3 powietrza o ciężarze właściwym s , za każdym poruszeniem tłoka v cm^3 powietrza o ciężarze właściwym s . Jaki będzie ciężar właściwy powietrza w naczyniu po n poruszeniach tłoka? Ile razy wtłoczyć należy powietrze, aby jego ciężar właściwy w naczyniu wzrósł m -krotnie?

§ 4. Ogólny układ równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Zajmiemy się teraz warunkami rozwiązalności układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi. Uporządkowane równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi ma postać: $ax + by = c$. Równanie takie zawiera bowiem niewiadomą x z jakimś współczynnikiem a , niewiadomą y z jakimś współczynnikiem b , oraz wyraz c wolny od niewiadomej.

Stosownie do tego ogólną postacią układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi jest:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned}$$

Próbujemy rozwiązać ten układ równań, stosując np. metodę podstawiania. W miarę potrzeby czynić będziemy o współczynnikach a_1 , b_1 , a_2 i b_2 pewne założenia. Chcąc wyrazić z jednego z równań jedną niewiadomą przez drugą, musimy przyjąć, że przynajmniej jeden ze współczynników przy niewiadomych jest różny od zera. Założmy tedy, że $b_2 \neq 0$ i wyrażmy z drugiego równania y przez x . Otrzymamy:

$$\begin{aligned} b_2 y &= c_2 - a_2 x, \\ y &= \frac{c_2 - a_2 x}{b_2}. \end{aligned}$$

Znalezione wyrażenie podstawiamy zamiast y w pierwszym równaniu:

$$a_1 x + b_1 \frac{c_2 - a_2 x}{b_2} = c_1.$$

Rozwiązujemy to równanie:

$$\begin{aligned} a_1 b_2 x + c_2 b_1 - a_2 b_1 x &= c_1 b_2, \\ a_1 b_2 x - a_2 b_1 x &= c_1 b_2 - c_2 b_1, \\ (a_1 b_2 - a_2 b_1) x &= c_1 b_2 - c_2 b_1. \end{aligned}$$

Zakładamy, że $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ i dzielimy obie strony równania przez współczynnik przy x ; otrzymamy:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Podstawiając znalezione wyrażenie zamiast x w drugim równaniu, otrzymamy:

$$a_2 \cdot \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_2 y = c_2.$$

Rozwiązujemy to równanie, pamiętając, że $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} a_2(c_1 b_2 - c_2 b_1) + b_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)y &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)c_2, \\ a_2 c_1 b_2 - a_2 c_2 b_1 + b_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)y &= a_1 b_2 c_2 - a_2 b_1 c_2, \\ b_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)y &= a_1 b_2 c_2 - a_2 c_1 b_2. \end{aligned}$$

Ponieważ założyliśmy, że $b_2 \neq 0$, upraszczamy równanie przez b_2 :

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)y = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Dzieląc obie strony przez $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, otrzymamy:

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Sprawdzenie:

$$\begin{aligned} L_1 &= a_1 \cdot \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_1 \cdot \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \\ &= \frac{a_1 c_1 b_2 - a_1 c_2 b_1 + a_1 c_2 b_1 - a_2 c_1 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{a_1 c_1 b_2 - a_2 c_1 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \\ &= \frac{c_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_1; \end{aligned}$$

$$P_1 = c_1; L_1 = P_1.$$

$$\begin{aligned} L_2 &= a_2 \cdot \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_2 \cdot \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \\ &= \frac{a_2 c_1 b_2 - a_2 c_2 b_1 + a_1 c_2 b_2 - a_2 c_1 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{a_1 c_2 b_2 - a_2 c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \\ &= \frac{c_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_2; \end{aligned}$$

$$P_2 = c_2; L_2 = P_2.$$

Doszliśmy do następującego wyniku:

Jeżeli $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, wtedy układ równań $a_1 x + b_1 y = c_1$ i $a_2 x + b_2 y = c_2$ ma jedno i tylko jedno rozwiązanie. Mówimy, że układ równań jest oznaczony.

Zdawaćby się mogło, że w sformułowaniu tego twierdzenia pominęliśmy jeszcze zastrzeżenie, że przynajmniej jeden ze współczynników a_1 , b_1 , a_2 i b_2 jest różny od zera. Zastrzeżenie to jest jednak już zawarte w warunku $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Gdyby bowiem wszystkie współczynniki były zerami, nie mógłby ten warunek być spełnionym.

Wyrażenie $a_1 b_2 - a_2 b_1$, od którego zależy rozwiązalność układu równań, nazywa się *wyznacznikiem układu równań*.

Do łatwiejszego zapamiętania budowy wyznacznika służyć może schemat:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \diagup & \diagdown \\ \times & \end{matrix}$$

Aby utworzyć wyznacznik układu równań, należy od iloczynu liczb, połączonych kreską \, odjąć iloczyn liczb, połączonych kreską /.

Zwracamy też uwagę, że w przypadku, gdy wyznacznik układu równań jest różny od zera, nie potrzebujemy już w przyszłości po rozwiązaniu układu równań przeprowadzać jeszcze sprawdzania. Ostatnie twierdzenie upewnia nas bowiem, że rozwiązanie układu równań istnieje.

Przykład 1. Rozwiązać układ równań:
$$\begin{aligned} mx - 2y &= m + 1, \\ (3m - 1)x - y &= 3m. \end{aligned}$$

Obliczamy wyznacznik W układu równań:

$$W = m \cdot (-1) - (-2) \cdot (3m - 1) = -m + 6m - 2 = 5m - 2.$$

W staje się zerem, gdy $5m - 2 = 0$, czyli $m = \frac{2}{5}$. Jeżeli $m \neq \frac{2}{5}$, wtedy wyznacznik układu równań jest różny od zera, a więc układ równań ma jedno rozwiązanie.

Zakładamy, że $m \neq \frac{2}{5}$, i rozwiązujemy układ równań, stosując np. metodę równych współczynników. Mnożymy drugie równanie przez 2 i odejmujemy od niego stronami równanie pierwsze; otrzymamy:

$$\begin{aligned} 2(3m - 1)x - mx &= 6m - (m + 1), \text{ a stąd kolejno:} \\ 6mx - 2x - mx &= 6m - m - 1, \\ 5mx - 2x &= 5m - 1, \\ (5m - 2)x &= 5m - 1. \text{ A że } 5m - 2 \neq 0, \text{ więc:} \\ x &= \frac{5m - 1}{5m - 2}. \end{aligned}$$

Znalezione wyrażenie podstawiamy zamiast x w pierwszym równaniu:

$$m \cdot \frac{5m - 1}{5m - 2} - 2y = m + 1.$$

Rozwiązujemy to równanie:

$$\begin{aligned} 5m^2 - m - 2(5m - 2)y &= 5m^2 - 2m + 5m - 2, \\ -2(5m - 2)y &= 4m - 2, \\ (5m - 2)y &= -2m + 1, \\ y &= \frac{-2m + 1}{5m - 2}. \end{aligned}$$

W przypadku $m = \frac{2}{5}$ otrzymaliśmy rozwiązanie układu równań. Następuje pytanie, czy układ równań ma rozwiązanie, jeżeli $m = \frac{2}{5}$. Aby tę sprawę zbadać, podstawmy w układzie równań $m = \frac{2}{5}$. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}x - 2y &= \frac{7}{5}, \\ \frac{1}{5}x - y &= \frac{7}{10}. \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że znaleźliśmy parę liczb, które podstawione zamiast x i y sprawdzają drugie równanie, i że te wartości zamiast x i y w drugim równaniu podstawiliśmy. Mnożąc obie strony otrzymanej równości przez 2, otrzymamy: $\frac{2}{5}x - 2y = \frac{7}{5}$, a nie $\frac{2}{5}x - 2y = \frac{7}{10}$, jak żąda

pierwsze równanie. Jeżeli więc jakaś para wartości sprawdza drugie równanie, to nie sprawdza pierwszego; układ równań nie ma rozwiązania. Mówimy, że w przypadku $m = \frac{2}{3}$ dany układ równań jest *sprzeczny*.

Przykład 2. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x - my &= m + 1, \\ 2x - (m + 2)y &= 6. \end{aligned}$$

Obliczamy wyznacznik W układu równań:

$$W = -(m + 2) - (-m) \cdot 2 = -m - 2 + 2m = m - 2.$$

Wyznacznik W staje się zerem, jeżeli $m - 2 = 0$, czyli $m = 2$.

Zakładamy, że $m \neq 2$, i rozwiązujemy dany układ równań (rozwiąż!). Znajdziemy:

$$x = -m + 1; \quad y = -2.$$

Aby zbadać, jak zachowuje się dany układ równań, gdy $W = 0$, podstawiamy w danym układzie $m = 2$. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} x - 2y &= 3, \\ 2y - 4y &= 6. \end{aligned}$$

Zauważymy, że drugie równanie powstaje przez pomnożenie obu stron pierwszego równania przez 2. Każda więc para wartości x i y , sprawdzająca pierwsze równanie, sprawdza i drugie równanie. Lecz pierwsze równanie ma niezliczoną ilość rozwiązań (przyjmując bowiem dowolnie $x = 1; 2; 3; 4; \dots$, znajdziemy $y = -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; \dots$); zatem i układ równań ma niezliczoną ilość rozwiązań. Mówimy, że rozwiązanie układu równań w tym przypadku nie jest jednoznaczne, i nazywamy układ równań *nieoznaczonym*.

§ 5. Układ równań nieoznaczony i sprzeczny.

W poprzednim paragrafie wykazaliśmy, że warunkiem wystarczającym istnienia jednego i tylko jednego rozwiązania układu dwu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi jest różna od zera wartość wyznacznika układu. Zbadamy obecnie, czy warunek ten jest konieczny.

Przyjmujemy, że w układzie równań:

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1, \\ a_2 x + b_2 y &= c_2, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (I)$$

wyznacznik $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, że przynajmniej przy jednej niewiadomej współczynniki w obu równaniach są różne od zera. Przyjmujemy więc np.: $b_1 \neq 0$ i $b_2 \neq 0$ i dzielimy obie strony

pierwszego równania przez b_1 , a obie strony drugiego przez b_2 . Otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} x + y &= \frac{c_1}{b_1}, \\ \frac{a_2}{b_2} x + y &= \frac{c_2}{b_2}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (II)$$

Jasne jest, że każde rozwiązanie układu (I) jest zarazem rozwiązaniem układu (II) i naodwrot.

Z założenia: $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ wynika:

$a_1 b_2 = a_2 b_1$, a stąd po podzieleniu obu stron $b_1 b_2$:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Ostatnia równość wskazuje, że lewe strony obu równań układu (II) są zupełnie jednakowe.

Jeżeli pierwsze równanie sprawdza się dla jakiejś pary wartości x i y , to drugie równanie sprawdza się dla tej samej pary wartości wtedy i tylko wtedy, jeżeli i prawe strony obu równań są równe, a więc jeżeli:

$$\frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2}, \text{ czyli } c_1 b_2 = c_2 b_1, \text{ czyli } c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0.$$

Lecz wtedy oba równania układu są zupełnie jednakowe; mamy właściwie tylko jedno równanie z dwiema niewiadomymi. Przyjmując wartość x dowolnie, możemy dobrać taką wartość y , która wraz z obraną wartością x sprawdza równanie. Równanie, a więc i układ równań, ma niezliczoną ilość rozwiązań. Mówimy, że *układ równań jest nieoznaczony*.

Jeżeli natomiast w układzie równań (II) $\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}$ czyli $c_1 b_2 - c_2 b_1 \neq 0$, wtedy żadna para wartości x i y , sprawdzająca pierwsze równanie, nie sprawdza drugiego równania. Dany układ równań nie ma wtedy rozwiązania; mówimy, że *układ równań jest sprzeczny*.

Jeżeli warunek, że przynajmniej przy jednej z niewiadomych współczynniki w obu równaniach są różne od zera, nie jest spełniony, wtedy albo w jednym równaniu współczynniki przy x i y są zerami, albo w jednym równaniu współczynnik przy x , a w drugim współczynnik przy y jest zerem. Drugi z tych przypadków sprowadza się jednak do pierwszego: Jeżeli bowiem $a_1 = b_2 = 0$, to z założenia $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$,

wynika, że $a_2 b_1 = 0$, co jest możliwe tylko wtedy, gdy albo $a_2 = 0$, albo $b_1 = 0$. Widzimy więc, że i w tym przypadku współczynniki przy x i y w jednym z równań są zerami. W obu przypadkach jedno z równań układu (I) ma postać:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = c.$$

Jeżeli $c \neq 0$, to takie równanie nie sprawdza się dla żadnych wartości x i y . Układ równań, zawierający takie równanie, jest sprzeczny.

Jeżeli zaś $c = 0$, to równanie spełnia się dla wszelkich wartości x i y . Można je więc w układzie równań skreślić, przez co rozwiązanie układu równań sprowadza się do rozwiązania jednego równania z dwiema niewiadomymi. Jeżeli to równanie jest sprzeczne (np. $0 \cdot x + 0 \cdot y = 5$), to układ równań jest sprzeczny; w przeciwnym razie (t. j. gdy równanie jest nieoznaczone) układ równań jest nieoznaczony.

Ponieważ wykazaliśmy, że gdy $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, wtedy układ równań jest albo nieoznaczony albo sprzeczny, przeto:

Warunkiem wystarczającym i koniecznym, aby układ dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi miał jedno i tylko jedno rozwiązanie, jest to, żeby wyznacznik układu równań miał wartość różną od zera. Jeżeli ten wyznacznik jest zerem, układ równań jest albo nieoznaczony albo sprzeczny. Który z tych przypadków zachodzi, rozstrzygać będziemy w każdym szczególnym przypadku oddzielnie, jak w przykładach w §-ie 4.

Ćwiczenia:

1. Które z podanych niżej układów są rozwiązalne, które nieoznaczone, a które sprzeczne:

$$\begin{array}{lll} a) \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + y = 4; \end{cases} & b) \quad \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 4, \\ 2x + y = 8; \end{cases} & c) \quad \begin{cases} -x + y = 6, \\ x - y = 8; \end{cases} \\ d) \quad \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 2, \\ x + \frac{3}{4}y = 3; \end{cases} & e) \quad \begin{cases} -\frac{5}{8}x + y = 3, \\ x - 1,2y = 2; \end{cases} & f) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{6}, \\ 10,5x - 7y = 3,5. \end{cases} \end{array}$$

2. Rozwiązać następujące układy równań i podać, dla jakich wartości liter układy te są nieoznaczone lub sprzeczne:

$$\begin{array}{ll} a) \quad \begin{cases} 4x - 2y = 5m, \\ 4x + 3y = 20; \end{cases} & b) \quad \begin{cases} x + 2y = a, \\ 4x - 4y = a + 3b; \end{cases} \\ c) \quad \begin{cases} px + y = 3, \\ 2x + y = 5; \end{cases} & d) \quad \begin{cases} (a + 1)x - y = 5, \\ (2a - 13)x + 3y = 5; \end{cases} \\ e) \quad \begin{cases} (m - 5)x + (m - 1)y = -6, \\ (m - 2)x + my = 2; \end{cases} & f) \quad \begin{cases} ax + y = a - 2, \\ 3x - y = 2; \end{cases} \end{array}$$

$$g) \begin{cases} 3x - 2y = b, \\ 9x + ay = 3; \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} ax + 2y = b, \\ (a-1)x - y = 2; \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} ax + by = a, \\ x + y = b; \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} mx - y = -m, \\ x + (m+2)y = m; \end{cases}$$

$$o) \begin{cases} \frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = \frac{b}{a+b}, \\ y - x = b; \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} \frac{x}{a+1} + \frac{y+2}{a^2+2a+1} = 1, \\ x + y = 2a; \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 3x - ry = 9, \\ 4x - (r+2)y = s; \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} ax + y = b, \\ x + ay = 2b; \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} ax + (a-1)y = b-1, \\ bx + (b+1)y = a+1; \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} x:y = (a+1):(a-1), \\ x + y = a; \end{cases}$$

$$p) \begin{cases} (x+y):(y-x) = a:b, \\ \frac{x+y}{a} + \frac{x+y}{b} = \frac{2a}{a-b}; \end{cases}$$

$$s) \begin{cases} \frac{a}{x+y} - \frac{b}{x-y} = \frac{b}{x^2-y^2}, \\ x + 2y = -1. \end{cases}$$

3. a) Pewien związek chemiczny składa się z dwóch pierwiastków, połączonych ze sobą w stosunku wagowym $m:n$. Ile g każdego pierwiastka jest w $p g$ tego związku chemicznego?
- b) Odcinek $AB = a$ podzielono punktem C 1) wewnątrz 2) zewnątrz, w stosunku $m:n$. Obliczyć AC i BC .
- c) Punkty C i C' dzielą odcinek AB w tym samym stosunku, punkt C wewnątrz, a punkt C' zewnątrz. Znajac $AB = a$ i $AC = m$, obliczyć AC' i BC' .
- d) Gdy do licznika i mianownika pewnego ułamka dodamy m , ułamek będzie miał wartość a ; gdy zaś od licznika i mianownika odejmiemy m , ułamek przyjmie wartość b . Znaleźć ten ułamek.

Sprawdzić rozwiązanie, przyjmując: 1) $a = 0,6$; $b = 0,5$; $m = 1$; 2) $a = b = \frac{2}{3}$; $m = 2$; 3) $a = b = 1$; m dowolne.

- e) Kupiec sprzedał $a kg$ towaru w dwóch partjach. Przy sprzedaży pierwszej partji zarabiał $m zł$ na $1 kg$, przy sprzedaży drugiej partji zarabiał $n zł$ na $1 kg$. Ile kg sprzedał w pierwszej, a ile w drugiej partji, jeżeli na całej sprzedaży zarobił $q zł$?

Sprawdzić wyniki, przyjmując $a = 150$, a nadto: 1) $q = 850$; $m = 4$; $n = 6$; 2) $q = 400$; $m = -2$; $n = 3$; 3) $q = 750$; $m = n = 5$; 4) $q = 800$; $m = n = 5$.

- f) Do budowy drogi najęto pewną ilość robotników. Gdyby zdołano najać o a robotników więcej, budowę drogi ukoń-

czonoby w czasie krótszym o m dni; gdyby zaś liczba robotników była o b mniejsza, budowa drogi trwałaby o n dni dłużej. Ilu robotników najęto i ile dni trwała budowa drogi?

Wskazówka: Najęto x robotników, a budowa drogi trwała y dni. Przy budowie drogi było więc w całości xy dni roboczych i t. d.

Sprawdzić rozwiązanie, przyjmując: 1) $a = 20$; $b = 28$; $m = 10$; $n = 35$; 2) $a = 10$; $b = 8$; $m = 5$; $n = 4$.

- g) Jeden gospodarz miał uprawić a arów, a drugi b arów pola. Przyjęli robotnika i pracowali z nim wspólnie na obu polach. Robotnik policzył sobie za pracę m zł. Ile ma zapłacić robotnikowi pierwszy, a ile drugi gospodarz?

Wskazówka: Pierwszy gospodarz zapłaci x , a drugi y zł. Przy rozdziale między obu gospodarzy opłaty m , którą ma otrzymać robotnik, należy uwzględnić, że każdy gospodarz oprócz zapłaty robotnika włożył w pole jeszcze własną pracę, którą ocenić należy na m zł. Wskutek tego świadczenia gospodarzy wynoszą nie x i y , lecz $x + m$ i $y + m$. I t. d.

Sprawdzić, przyjmując: $a = 100$; $b = 75$; $m = 28$.

- h) Gęstość zaludnienia wynosiła w pewnym państwie przy pierwszym spisie ludności g_1 , a przy drugim g_2 . Przyrost ludności w czasie od pierwszego do drugiego spisu wynosił d . Ile wynosiła liczba mieszkańców państwa w czasie pierwszego, a ile w czasie drugiego spisu? Jaka jest powierzchnia państwa?

Przez gęstość zaludnienia rozumiemy przeciętną liczbę mieszkańców na 1 km^2 czyli iloraz liczby mieszkańców państwa przez powierzchnię.

Oblicz te wielkości dla Polski według dat z r. 1921 i z r. 1934, przyjmując: $g_1 = 70$; $g_2 = 85$; $d = 5\,820\,000$.

- i) Z A i B wyruszają naprzeciw siebie równocześnie dwa samochody i spotykają się po t_1 min. Jeżeli zaś oba wyjadą równocześnie, pierwszy z A , a drugi z B i jechać będą w kierunku zgodnym (od A przez B dalej); wtedy pierwszy samochód dopędzi drugi po t_2 min. Obliczyć prędkości obu samochodów, jeżeli $AB = m \text{ km}$.
- j) Przedmiot sporządzony ze stopu dwóch metali waży w powietrzu (w próżni) $m_1 \text{ g}$, a pod wodą $m_2 \text{ g}$. Ile g każdego z tych metali zawiera ten przedmiot, jeżeli ciężar właściwy jednego metalu jest s_1 , a drugiego s_2 ?

Zadanie to miał według podania rozwiązać Archimedes, badając, ile było złota, a ile srebra w koronie, sporządzonej dla tyrana Syrakuz.

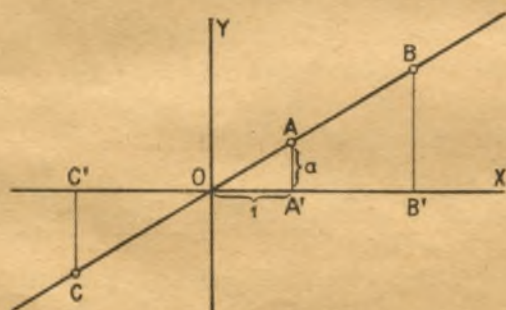
Rozwiąż zadanie, przyjmując: $m_1 = 1400$; $m_2 = 1318$; $s_1 = 19,3$ (dla złota); $s_2 = 10,5$ (dla srebra).

- k) Statek, wypływając z rzeki na morze, wynurza się z wody tak, że nad powierzchnię morza wystaje o $v \text{ m}^3$ więcej, niż wystawało nad powierzchnię rzeki. Jaki jest ciężar statku i ile m^3 wody wypiera statek, gdy pływa po rzece, jeżeli ciężar właściwy wody rzecznej jest s_1 , a wody morskiej s_2 ?

§ 6. Wykres funkcji $y = ax$.

Przedstaw zapomocą tabelki funkcję $y = \frac{2}{3}x$ i sporządź jej wykres, a zauważysz, że wszystkie punkty wykresu leżą na jednej prostej. Że tak jest rzeczywiście, udowodnimy ogólnie, wykazując, że:

Wykresem funkcji $y = ax$ jest prosta, przechodząca przez początek układu współrzędnych i przez punkt $A(1, a)$.



Rys. 8.

Rys. 8 przedstawia taką prostą. Wykażemy najpierw, że punkt leżący na tej prostej, mający odciętą x , ma rzędną $y = ax$.

Obierzmy na prostej dowolny punkt B w ćwiartce pierwszej i wykreślmy jego współrzędne: $x = \overline{OB'}$, $y = \overline{B'B}$.

Stosując twierdzenie Talesa, znajdujemy:

$$B'B : A'A = OB' : OA', \text{ czyli:}$$

$$y : a = x : 1, \text{ a stąd:}$$

$$y = ax.$$

Jeżeli na prostej OA obierzemy punkt w ćwiartce trzeciej np. punkt C , to współrzędne jego $x = OC'$ i $y = C'C$ będą ujemne. Ponieważ tw. Talesa znamy tylko dla odcinków zwykłych (nie dla kierunkowych), należy w proporcji

$$CC' : AA' = OC' : OA',$$

otrzymanej z zastosowania tego twierdzenia, napisać:

$$CC' = -y, AA' = a, OC' = -x, OA' = 1.$$

Otrzymamy: $-y : a = -x : 1$, a stąd znów:

$$y = ax.$$

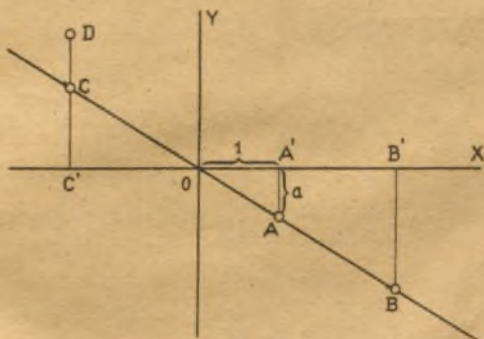
W rys. 8 przyjęliśmy, że a jest dodatnie. Rys. 9 przedstawia prostą OA dla ujemnego a . Jeżeli przyjmiemy na prostej OA punkt B w ćwiartce czwartej, otrzymamy kolejno:

$$B'B : A'A = OB' : OA';$$

$$B'B = -y, A'A = -a, OB' = x, OA' = 1;$$

$$-y : -a = x : 1;$$

$$y = ax.$$



Rys. 9.

Dla punktu C , leżącego na prostej OA w ćwiartce drugiej jest:

$$CC' : AA' = OC' : OA';$$

$$CC' = y, AA' = -a, OC' = -x, OA' = 1;$$

$$y : -a = -x : 1;$$

$$y = ax.$$

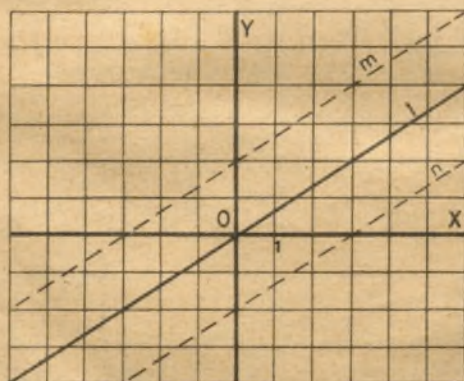
Wykazaliśmy, że rzeczywiście dla każdego punktu, leżącego na prostej OA , jest $y = ax$.

Jeżeli punkt jakiś np. punkt D na rys. 9 nie leży na prostej OA , to prostopadła do osi X wykreślona przez punkt D przetnie prostą OA w jakimś punkcie C . Oba punkty D i C mają tę samą odciętą x . Rzędną punktu C jest ax , bo punkt C leży na prostej OA . Rzędną punktu D jest różna od rzędnej punktu C (w przeciwnym razie punkty C i D zlewałyby się wbrew założeniu, że D nie leży na prostej OA), a więc różna od ax . Widzimy więc, że tylko dla punktów prostej OA jest $y = ax$; prosta OA jest przeto rzeczywiście wykresem funkcji $y = ax$.

§ 7. Graficzna ilustracja równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Przedstawimy teraz graficznie funkcję: $y = ax + b$.

Wykres tej funkcji otrzymamy z łatwością przy pomocy wykresu funkcji $y = ax$. Wystarczy w tym ostatnim do każdej rzędnej $y = ax$ dodać b . Prosta przedstawiająca funkcję $y = ax$ przesunie się wskutek tego równolegle do pierwotnego położenia o $|b|$ w górę lub o $|b|$ w dół zależnie od tego, czy b jest liczbą dodatnią, czy ujemną.



Rys. 10.

Rys. 10 przedstawia funkcje: $y = \frac{2}{3}x$ (prosta l), $y = \frac{2}{3}x + 2$ (prosta m) i $y = \frac{2}{3}x - 2$ (prosta n).

Funkcję, wyrażoną wzorem $y = ax + b$, nazywamy funkcją liniową. Wykazaliśmy, że wykresem funkcji liniowej jest linia prosta.

Ostatnie twierdzenie ułatwia nam sporządzanie wykresu funkcji linjowej, jeżeli zważymy, że dwa punkty wyznaczają prostą.

Np.: Aby otrzymać wykres funkcji $y = \frac{3}{4}x + 2$, układamy dla tej funkcji tabelkę, zawierającą tylko dwie pary wartości x i y . Np.:

x	$\parallel$	0	$\parallel$	-4
y	$\parallel$	2	$\parallel$	-1

Wyznaczamy następnie punkty $A(0, 2)$ i $B(-4, -1)$ i kreślimy przez nie prostą (wykreśl!). Prosta AB jest wykresem funkcji $y = \frac{3}{4}x + 2$.

Wiemy, że równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x i y ma niezliczoną ilość rozwiązań. Przyjmując bowiem za x dowolne wartości, możemy (jeżeli tylko współczynnik przy y jest różny od zera) znaleźć zawsze dla y taką wartość, która wraz z przyjętą wartością x sprawdza równanie. Dlatego możemy w równaniu, zawierającym x i y , uważać x i y za zmienne, jedną (np. x) za zmienną niezależną, drugą (np. y) za zmienną zależną, czyli funkcję x .

Każde równanie stopnia pierwszego z dwiema zmiennymi x i y , w którym współczynnik przy y jest różny od zera, wyraża, że y jest funkcją linjową x . Tak np. z równania $2x - 3y = 6$ wynika, że dla wszelkich wartości x jest: $y = \frac{2}{3}x - 2$. Wykres funkcji $y = \frac{2}{3}x - 2$ (prosta n na rys. 10) nazywamy też wykresem równania $2x - 3y = 6$. Między równaniem a jego wykresem zachodzi ten związek, że współrzędne każdego punktu wykresu sprawdzają równanie, a każda para wartości x i y , sprawdzająca równanie, przedstawia współrzędne punktu leżącego na wykresie.

Omówimy jeszcze wykresy równań stopnia pierwszego z dwiema zmiennymi x i y , w których współczynnik przy x lub współczynnik przy y jest zerem.

W równaniu $0x + 2y = 6$ dla wszelkich wartości x ma y zawsze stałą wartość $y = 3$. Punkty, których odcięta jest dowolna, a rzędna $y = 3$, tworzą prostą równoległą do osi X , a odcinającą na osi Y odcinek mający 3 jednostki. Ta prosta jest wykresem równania $0x + 2y = 6$, czyli $2y = 6$. Wykreśl tę prostą!

W równaniu $2x + 0y = -4$ każdej wartości y odpowiada wartość $x = -2$. Punkty, których odcięta $x = -2$, a rzędna y jest dowolna, tworzą prostą równoległą do osi Y , a odcinającą na osi X odcinek -2 . Ta prosta jest wykresem równania $2x + 0y = -4$, czyli $2x = -4$. Wykreśl tę prostą!

Ćwiczenia:

1. Przedstawić graficznie funkcje:

a) $y = \frac{2}{3}x$;

b) $y = -1,5x$;

c) $y = \frac{3}{4}x + 2$;

d) $y = \frac{1}{2}x - 3$;

e) $y = -2x + 4$;

f) $y = -x - 2$.

2. a) Pociąg jest oddalony od stacji A o $+10$ km i porusza się ruchem jednostajnym z prędkością: 1) $\frac{3}{4}$ km/min.; 2) $-0,8$ km/min. Przedstawić wzorem i wykresem odległość pociągu od A jako funkcję czasu.

1 min. przedstawić na osi X odcinkiem 1 mm, a 1 km na osi Y odcinkiem 1 mm.

b) Pociąg jest oddalony od stacji A o -20 km i porusza się ruchem jednostajnym z prędkością: 1) $+\frac{4}{5}$ km/min.; 2) $-\frac{3}{5}$ km/min. Przedstawić wzorem i wykresem odległość pociągu od A jako funkcję czasu.

Korzystaj z uwagi do poprzedniego zadania.

c) Pociąg jest o godz. 10 min. 10 na stacji A , a o godz. 10 min. 25 na stacji B , oddalonej od A o 12 km. Przyjmując, że ruch pociągu jest jednostajny, przedstawić wzorem i wykresem odległość pociągu od A jako funkcję czasu, liczonego od godz. 10.

Oblicz najpierw prędkość pociągu i odległość jego od A o godz. 10. Przy sporządzaniu wykresu korzystaj z uwag do poprzednich zadań.

§ 8. Graficzna ilustracja układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1. Układ równań:

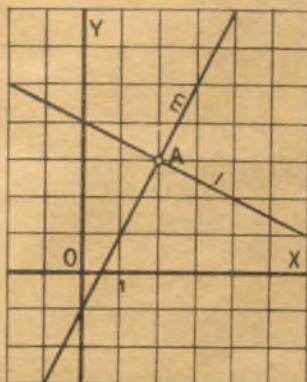
$$x + 2y = 8;$$

$$2x - y = 1;$$

jest oznaczony. Rozwiązując go znajdziemy: $x = 2$, $y = 3$.

Przedstawmy graficznie oba równania; otrzymamy jako wykres pierwszego równania prostą l (rys. 11), a jako wykres drugiego równania prostą m . Ponieważ wartości $x = 2$; $y = 3$ sprawdzają i pierwsze i drugie równanie układu, to punkt A (2; 3) musi leżeć i na prostej l i na prostej m , musi więc być punktem przecięcia się tych prostych. Znajdujemy więc:

Wartości x i y , sprawdzające oba równania układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi, są współrzędnymi punktu przecięcia się prostych, które są wykresami tych równań.



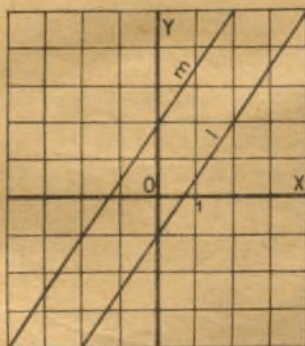
Rys. 11.

Przykład 2. Układ równań:

$$3x - 2y = 2;$$

$$3x - 2y = -4;$$

jest sprzeczny. Przedstawiając graficznie oba równania tego układu (przedstaw!), otrzymamy dwie proste równoległe l i m (rys. 12). Że $l \parallel m$, możemy wykazać zapomocą następującego rozumowania: Gdyby proste l



Rys. 12.

i m miały punkt wspólny, to współrzędne tego punktu sprawdzałyby oba równania układu; układ równań miałby rozwiązanie, a więc nie byłby sprzeczny wbrew temu, co stwierdziliśmy na początku. — Znajdujemy więc:

Jeżeli układ dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi jest sprzeczny, to proste, które są wykresami równań tego układu, są do siebie równoległe.

Przykład 3. Układ równań:

$$3x - 2y = 2;$$

$$1,5x - y = 1;$$

jest nieoznaczony. Przedstawiając graficznie oba równania (przedstaw!), otrzymamy dla obu równań tę samą prostą l (rys. 12). Współrzędne każdego punktu prostej l sprawdzają oba równania układu, układ równań ma niezliczoną ilość rozwiązań, jest więc rzeczywiście nieoznaczony. — Znajdujemy:

Jeżeli układ dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi jest nieoznaczony, to proste, które są wykresami równań tego układu, nakrywają się.

Przykład 4. Przez stację A przejeżdża o godz. 10 ruchem jednostajnym pociąg z prędkością $\frac{3}{4}$ km/godz. O t minut później (wcześniej) przejeżdża przez stację A drugi pociąg, jadący ruchem jednostajnym z prędkością c . Kiedy i jak daleko od A spotykają się te pociągi?

Pociągi spotykają się x min. po (przed) godz. 10 w odległości y km od A .

Odległość pierwszego pociągu od A wynosi wtedy: $y = \frac{3}{4}x$;

„ drugiego „ „ „ „ „ : $y = c(x - t)$.

Porządkujemy i rozwiązujemy ten układ równań:

$$\frac{3}{4}x - y = 0;$$

$$cx - y = ct.$$

Wyznacznik tego układu równań $W = -\frac{3}{4} + c = c - \frac{3}{4}$ staje się zerem, jeżeli $c = \frac{3}{4}$. Rozróżniamy następujące przypadki:

1. Jeżeli $c \neq \frac{3}{4}$, układ równań ma rozwiązanie. Rozwiązując go (rozwiąż!), znajdziemy:

$$x = \frac{ct}{c - \frac{3}{4}}, \quad y = \frac{3}{4} \cdot \frac{ct}{c - \frac{3}{4}}.$$

Pociągi spotykają się, a czas x spotkania się i odległość y miejsca spotkania się od A można obliczyć według powyższych wzorów.

2. Jeżeli $c = \frac{3}{4}$ i $t \neq 0$, układ jest sprzeczny. Pociągi nie spotykają się; rzeczywiście jadą wtedy oba z jednakową prędkością, w tym samym kierunku, zawsze w tym samym odstępzie od siebie.

3. Jeżeli $c = \frac{3}{4}$ i $t = 0$, układ równań jest nieoznaczony. Rzeczywiście oba pociągi są wtedy równocześnie na stacji A , a że prędkości ich są

równe i zgodne co do kierunku, to jadą razem i odległość jednego z nich od A jest zawsze równa odległości drugiego od A .

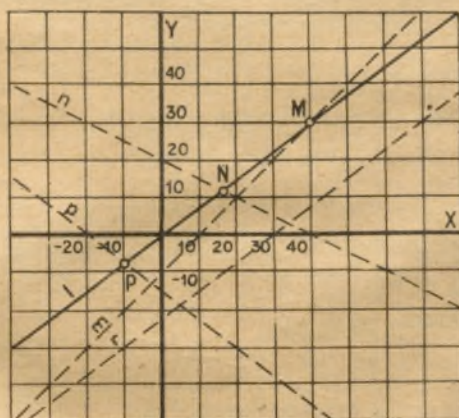
Przedstawimy graficznie oba równania układu oraz ich rozwiązanie.

Wykresem pierwszego równania jest prosta l (rys. 13). Wykres ten przedstawia odległość y pierwszego pociągu od A jako funkcję czasu x . Z wykresu tego można odczytać, jak daleko od A znajduje się pociąg pierwszy o każdej godzinie.

Jeżeli chodzi o wykres drugiego równania ($y = cx - ct$), to zauważymy, że będzie on linią prostą (funkcja liniowa!) i że będzie przedstawiał odległość y drugiego pociągu od A jako funkcję czasu x . Położenie prostej zależy będzie od wartości c i t . Rys. 13 przedstawia wykres tego równania w następujących przypadkach:

1. $c = 1$; $t = 10$. Wtedy równanie przyjmuje postać: $y = x - 10$, a wykresem jego (sporządź starannie ten wykres i następne!) jest prosta m . Z rozwiązania układu równań znajdujemy, że pociągi spotykają się 40 min. po godz. 10 w odległości 30 km od A . Rozwiązaniu temu odpowiadają w wykresie współrzędne punktu M .

2. $c = -\frac{1}{2}$; $t = 40$. Wtedy równanie ma postać: $y = -\frac{1}{2}x + 20$, a wykresem jego jest prosta n . Z rozwiązania układu równań wynika, że pociągi spotykają się 16 min. po godz. 10 w odległości 12 km od A . Rozwiązaniu temu odpowiadają współrzędne punktu N .



Rys. 13.

3. $c = \frac{3}{4}$; $t = -20$. Równanie ma postać: $y = -\frac{3}{4}x - 15$, a wykresem jego jest prosta p . Z rozwiązania układu równań wynika, że pociągi spotykają się 10 min. przed godz. 10 w odległości $-7,5$ km od A . Rozwiązaniu temu odpowiadają współrzędne punktu P .

4. $c = \frac{3}{4}$, $t = 30$. Równanie ma postać: $y = \frac{3}{4}x - 22\frac{1}{2}$, a wykresem jego jest prosta r . Układ równań jest sprzeczny, pociągi nie spotykają się, $r \parallel l$.

5. $c = \frac{3}{4}$, $t = 0$. Równanie ma postać: $y = \frac{3}{4}x$, a wykresem jego jest również prosta l . Układ równań jest nieoznaczony, pociągi poruszają się razem.

Ćwiczenia:

1. Rozwiązać następujące równania i zilustrować graficznie oba równania i rozwiązanie układu równań:

$$\begin{array}{lll} a) \begin{cases} 2x - y = 1, \\ x + y = 8; \end{cases} & b) \begin{cases} 3x - 4y = 8, \\ x + 2y = -14; \end{cases} & c) \begin{cases} y + \frac{1}{2}x = 0, \\ y - x = 6; \end{cases} \\ d) \begin{cases} x - 2y = 3, \\ y = -2; \end{cases} & e) \begin{cases} 2x + 3y = 10, \\ x = 2; \end{cases} & f) \begin{cases} x + 2y = 3, \\ y = 0; \end{cases} \end{array}$$

2. Rozkład jazdy dla pociągów I i II przedstawia tabelka:

km	I	Nazwa stacji		II
0	12 ²⁰	↓	A	↑
30	13 ⁰⁰	↓	B	↑
				12 ¹⁰

Kiedy i jak daleko od A spotykają się oba pociągi? Przedstaw graficznie ruch każdego pociągu.

Porównaj zadanie 2 c) w § 7.

3. a) Rozwiązać następujący układ równań:

$$\begin{cases} x + 2y = 6, \\ mx + y = -2; \end{cases}$$

i zilustrować graficznie oba równania i rozwiązanie układu, przyjmując: $m = -2$; $-\frac{1}{3}$; 0 ; $\frac{1}{2}$; 2 ; 3 .

- b) Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x + my = 2m + 3; \end{cases}$$

i zilustrować graficznie oba równania i rozwiązanie układu, przyjmując: $m = -2$; -1 ; $-\frac{1}{2}$; 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 ; 2 .

- c) Suma dwu liczb wynosi 5, a ich iloraz c . Znaleźć te liczby. Zilustrować graficznie oba równania i rozwiązanie układu, przyjmując: $c = 2$; 1 ; $0,6$; $0,4$; 0 ; -1 ; -5 .

- d) Pole prostokąta nie zmienia się, jeżeli jego podstawę powiększymy o 1 cm, a wysokość zmniejszymy o 1 cm, albo jeżeli podstawę zmniejszymy o 1 cm, a wysokość powięks-

szymy o a cm. Obliczyć podstawę i wysokość prostokąta. Zilustrować graficznie oba równania i rozwiązanie otrzymanego układu równań, przyjmując: $a = 3; 2; 1,5; 1$.

- e) Przez stacje A i B, oddalone od siebie o 40 km, przejeżdżają równocześnie dwa pociągi. Pierwszy jedzie z prędkością 0,6 km/min., drugi z prędkością c km/min. Kiedy i jak daleko od A spotkają się? Przedstawić graficznie odległość każdego pociągu od A jako funkcję czasu i podać znaczenie rozwiązania, przyjmując: $c = -\frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{8}; 1$.



**Tablica
wartości funkcji**

$$y = \frac{1000}{x}.$$

Tablica wartości funkcji $y = \frac{1000}{x}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	10,00	* 901	* 804	* 709	* 615	* 524	* 434	* 346	* 259	* 174
11	9,091	009	* 929	* 850	* 772	* 696	* 621	* 547	* 475	* 403
12	8,333	264	197	130	065	000	* 937	* 874	* 813	* 752
13	7,692	634	576	519	463	407	353	299	246	194
14	7,143	092	042	* 993	* 944	* 897	* 849	* 803	* 757	* 711
15	6,667	623	579	536	494	452	410	369	329	289
16	6,250	211	173	135	098	061	024	* 988	* 952	* 917
17	5,882	848	814	780	747	714	682	650	618	587
18	5,556	525	495	464	435	405	376	348	319	291
19	5,263	236	208	181	155	128	102	076	051	025
20	5,000	* 975	* 950	* 926	* 902	* 878	* 854	* 831	* 808	* 785
21	4,762	739	717	695	673	651	630	608	587	566
22	4,545	525	505	484	464	444	425	405	386	367
23	4,348	329	310	292	274	255	237	219	202	184
24	4,167	149	132	115	098	082	065	049	032	016
25	4,000	* 984	* 968	* 953	* 937	* 922	* 906	* 891	* 876	* 861
26	3,846	831	817	802	788	774	759	745	731	717
27	3,704	690	676	663	650	636	623	610	597	584
28	3,571	559	546	534	521	509	497	484	472	460
29	3,448	436	425	413	401	390	378	367	356	344
30	3,333	322	311	300	289	279	268	257	247	236
31	3,226	215	205	195	185	175	165	155	145	135
32	3,125	115	106	096	086	077	067	058	049	040
33	3,030	021	012	003	* 994	* 985	* 976	* 967	* 959	* 950
34	2,941	933	924	915	907	899	890	882	874	865
35	2,857	849	841	833	825	817	809	801	793	786
36	2,778	770	762	755	747	740	732	725	717	710
37	2,703	695	688	681	674	667	660	653	646	639
38	2,632	625	618	611	604	597	591	584	577	571
39	2,564	558	551	545	538	532	525	519	513	506
40	2,500	494	488	481	475	469	463	457	451	445
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tablica wartości funkcji $y = \frac{1000}{x}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	2,500	494	488	481	475	469	463	457	451	445
41	2,439	433	427	421	415	410	404	398	392	387
42	2,381	375	370	364	358	353	347	342	336	331
43	2,326	320	315	309	304	299	294	288	283	278
44	2,273	268	262	257	252	247	242	237	232	227
45	2,222	217	212	208	203	198	193	188	183	179
46	2,174	169	165	160	155	151	146	141	137	132
47	2,128	123	119	114	110	105	101	096	092	088
48	2,083	079	075	070	066	062	058	053	049	045
49	2,041	037	033	028	024	020	016	012	008	004
50	2,000	* 996	* 992	* 988	* 984	* 980	* 976	* 972	* 969	* 965
51	1,961	957	953	949	946	942	938	931	931	927
52	1,923	919	916	912	908	905	901	898	894	890
53	1,887	883	880	876	873	869	866	862	859	855
54	1,852	843	845	842	838	835	832	828	825	821
55	1,818	815	812	808	805	802	799	795	792	789
56	1,786	783	779	776	773	770	767	764	761	757
57	1,754	751	748	745	742	739	736	733	730	727
58	1,724	721	718	715	712	709	706	704	701	698
59	1,695	692	689	686	684	681	678	675	672	669
60	1,667	664	661	658	656	653	650	647	645	642
61	1,639	637	634	631	629	626	623	621	618	616
62	1,613	610	608	605	603	600	597	595	592	590
63	1,587	585	582	580	577	575	572	570	567	565
64	1,563	560	558	555	553	550	548	546	543	541
65	1,538	536	534	531	529	527	524	522	520	517
66	1,515	513	511	508	506	504	502	499	497	495
67	1,493	490	488	486	484	481	479	477	475	473
68	1,471	468	466	464	462	460	458	456	453	451
69	1,449	447	445	443	441	439	437	435	433	431
70	1,429	427	425	422	420	418	416	414	412	410
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tablica wartości funkcji $y = \frac{1000}{x}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	1,429	427	425	422	420	418	416	414	412	410
71	1,408	406	404	403	401	399	397	395	393	391
72	1,389	387	385	383	381	379	377	376	374	372
73	1,370	368	366	364	362	361	359	357	355	353
74	1,351	350	348	346	344	342	340	339	337	335
75	1,333	332	330	328	326	325	323	321	319	318
76	1,316	314	312	311	309	307	305	304	302	300
77	1,299	297	295	294	292	290	289	287	285	284
78	1,282	280	279	277	276	274	272	271	269	267
79	1,266	264	263	261	259	258	256	255	253	252
80	1,250	248	247	245	244	242	241	239	238	236
81	1,235	233	232	230	229	227	225	224	222	221
82	1,220	218	217	215	214	212	211	209	208	206
83	1,205	203	202	200	199	198	196	195	193	192
84	1,190	189	188	186	185	183	182	181	179	178
85	1,176	175	174	172	171	170	168	167	166	164
86	1,163	161	160	159	157	156	155	153	152	151
87	1,149	148	147	145	144	143	142	140	139	138
88	1,136	135	134	133	131	130	129	127	126	125
89	1,124	122	121	120	119	117	116	115	114	112
90	1,111	110	109	107	106	105	104	103	101	100
91	1,099	098	096	095	094	093	092	091	089	088
92	1,087	086	085	083	082	081	080	079	078	076
93	1,075	074	073	072	071	070	068	067	066	065
94	1,064	063	062	060	059	058	057	056	055	054
95	1,053	052	050	049	048	047	046	045	044	043
96	1,042	041	040	038	037	036	035	034	033	032
97	1,031	030	029	028	027	026	025	024	022	021
98	1,020	019	018	017	016	015	014	013	012	011
99	1,010	009	008	007	006	005	004	003	002	001
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Spis treści

	Str.
Rozdział I. Wyrażenia ułamkowe	3 ÷ 28
§ 1. Wyrażenia całkowite i ułamkowe	3
§ 2. Miejsca zerowe wyrażeń całkowitych	4
§ 3. Porównywanie ułamków algebraicznych	8
§ 4. Przekształcanie ułamków algebraicznych	10
§ 5. Sprowadzanie ułamków algebraicznych do wspólnego mianownika	12
§ 6. Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych	15
§ 7. Mnożenie ułamka algebraicznego przez wyrażenie całkowite	19
§ 8. Dzielenie ułamka algebraicznego przez wyrażenie całkowite	20
§ 9. Mnożenie i potęgowanie ułamków algebraicznych	21
§ 10. Dzielenie ułamków algebraicznych	23
§ 11. Ułamki podwójne	24
 Rozdział II. Równania ułamkowe. Proporcje	 29 ÷ 46
§ 1. Równania ułamkowe	29
§ 2. Proporcje	35
§ 3. Reguła trzech	39
§ 4. Rachunek podziału proporcjonalnego	43
 Rozdział III. Wstępne wiadomości o funkcjach	 47 ÷ 60
§ 1. Pojęcie funkcji	47
§ 2. Przykłady zastosowania wzorów	48
§ 3. Przykład zastosowania tablic	51
§ 4. Graficzne przedstawienie funkcji	53
 Rozdział IV. Równania o współczynnikach literowych	 61 ÷ 87
§ 1. Powtórzenie zasad rozwiązywania równań	61
§ 2. Ogólne równanie stopnia pierwszego z jedną niewiadomą	63
§ 3. Rozwiązywanie równań o współczynnikach literowych	64
§ 4. Ogólny układ równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi	70

§ 5. Układ równań nieoznaczony i sprzeczny	7
§ 6. Wykres funkcji $y = ax$	7
§ 7. Graficzna ilustracja równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi	8
§ 8. Graficzna ilustracja układu dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi	8
Tablica wartości funkcji $y = \frac{1000}{x}$	91 ÷ 9



INSTYTUT WYDAWNICZY KSIĄŻNICA-ATLAS

Lwów, ul. Czarnieckiego 12 — Warszawa 1, ul. Nowy Świat 59

poleca

POWIEŚCI I NOWELE

Alfoge A.: Walka światów	2-20
Barszczewski S.: Tajemnica jeziora Bangweolo	4-20
Bobrowska B.: Janek w legjonach . Wyd. III	2-
Gennet J.: Skowronek	4-
Czyżowski K.: Szalony lotnik	1-80
Czyżowski K.: Jim Żeglarz	2-40
Dickens K.: Mała Dorrit . Wyd. II	2-60
Dickens K.: Dawid Copperfield . Wyd. II	3-20
Dąbrowsa J. M.: Telewizor Orkisz	5-20
Łoś S.: Strażnica	3-
Konarski K.: Tajemnica zegara królewskiego	4-
Makarczyk J.: Przez morza i dżungle	-
Meissner J.: Licznik z czerwoną strzałką . Nowele lotn.	2-40
Merwin B.: Dwunastka . Dwanaście nowel	2-20
Ossendowski F. A.: Zagończyk	2-60
Ossendowski F. A.: Wanek z Lisowa	4-40
Ossendowski F. A.: Pod polską banderą	3-80
Ostrowska B.: Bohaterski Miś . Wyd. IV	2-
Pawłowicz B.: Chłopiec z pinjorowych lasów	2-50
Pociocki J.: Rycerze z K. O. P.	3-
Przytycki S.: Gонец królewski	2-20
Scott W.: Rwintyn Durward	3-60
Scott W.: Talizman	2-20
Urbanowicz Z.: Róża bez kolców . Cz. I i II. Wyd. III. Po	3-60
Verne J.: Rektor Servadac	5-
Verne J.: Wyprawa w głąb Afryki	3-60
Verne J.: Tajemniczy gród pustyni	3-20

Żądać w księgarniach inteligentnych!



M 54253/1

UP - Kraków BG



1050307198

