# Zur öffentlichen Prüfung

im

# Kneiphöfischen Stadt-Gymnasium

den 11. und 12. April 1859

ladet

die hohen Vorgesetzten der Anstalt und die geehrten Eltern der Schüler

ergebenst ein

der Direktor

**Dr. Rudolph Ferd. Leop. Skrzeczka.**

## Inhalt:



**Königsberg 1859.**
Druck der Universitäts-Buch- und Steindruckerei von E. J. Dalkowski.

# Uebersicht der Prüfung.

**Montag, den 11. April, Vormittags 9 Uhr:**

**Sexta.**

Rechnen. Knobbe.
Latein. Cholevius.

**Quinta.**

Naturkunde. Lentz.
Latein. Friedrich.

**Quarta.**

Mathematik. Knobbe.
Griechisch. Weyl.

**Montag, Nachmittag $2^1/_2$ Uhr:**

**Tertia.**

Geschichte. Lentz.
Griechisch. v. Drygalski.
Französisch. Weyl.

**Secunda B.**

Griechisch. v. Drygalski.
Latein. Schwidop.

**Dienstag, den 12. April, Vormittags 9 Uhr:**

**Secunda A.**

Mathematik. Koenig.
Latein. Lentz.

Gesang der ersten Singklasse.

**Prima.**

Latein. Der Direktor.
Französisch. Weyl.
Deutsch. Cholevius.

---

Entlassung der Abiturienten durch den Direktor. Reden eines Abiturienten und eines Primaners. Choral.

---

Das neue Schuljahr beginnt am 28. April c. 7 U. M. Zur Aufnahme neuer Schüler wird der Unterzeichnete vom 13. bis 20. April und am 27. April in den Vormittagsstunden bereit sein.

# Einiges über Kettenbrüche.

Bei der Beschäftigung mit den Kettenbrüchen bei Gelegenheit des Unterrichts in diesem Theile der Arithmetik habe ich die Ableitung einiger bekannten Sätze auf einem andern als dem gewöhnlichen Wege gefunden, so wie auch einige neue Formeln und Relationen zwischen einer Zahl und den Näherungswerthen ihrer Quadratwurzel, die mir der Mittheilung in einer Gelegenheitsschrift nicht unwerth schienen. Auch der kleinste Beitrag zur Theorie der Zahlen darf nicht verschmäht werden.

Der Kürze wegen habe ich die erste Periode des der Quadratwurzel einer Zahl entsprechenden Kettenbruchs gewöhnlich nicht ausgeschrieben, sondern, nach dem Vorgange Digen's in seinem Canon Pellianus, nur die Theilnenner bis zur Mitte der Periode und den mittelsten, in eine Parenthese eingeschlossen, so dass z. B.

$$\sqrt{28} = 5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \sqrt{28}}}}} = 5;\ 3,\ (2), \text{ und } \sqrt{53} = 7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{7 + \sqrt{53}}}}}} = 7;\ 3,\ (1,\ 1)$$

gesetzt ist.

Die Buchstaben bedeuten durchweg ganze Zahlen.

## §. 1.

Jeder von Anfang an periodisch-symmetrische Kettenbruch drückt die Quadratwurzel einer ganzen oder gebrochenen Zahl aus.

Heisst die grösste in der Quadratwurzel enthaltene Zahl $n$ (welches $n$ auch $= o$ sein kann), der Näherungswerth bis ans Ende der ersten Periode (excl. $2n$) $\frac{nN + B}{N}$, also, da der Kettenbruch symmetrisch ist, der Nenner des dann vorhergehenden $B$, und der Näherungswerth selbst $\frac{nB+C}{B}$, so ist der Werth des Bruches:

$$x = \frac{(nN+B)(n+x)+nB+C}{N(n+x)+B}$$

woraus

$$x^2 = \frac{n^2N+2nB+C}{N} = n^2 + \frac{2nB+C}{N}$$

Da die erste Potenz von $x$ fortfällt, so hat man die allgemeine Form der ganzen oder gebrochenen Zahlen, deren Quadratwurzel dem gegebenen Kettenbruche zugehört.

Nimmt man noch den Theilnenner $n$ hinzu und setzt den Zähler dieses Näherungswerthes bis $\frac{1}{n} = M^1$, so ist:

$$M^1 = n^2N + 2nB + C,$$

folglich

$$x^2 = \frac{M^1}{N}.$$

Die Zahl ist also gleich dem Zähler des letzten Näherungswerthes der ersten Periode, diese bis $\frac{1}{n}$ genommen, dividirt durch den Nenner des vorletzten. Dieser zur Berechnung der Zahl aus den Quotienten des Kettenbruchs sehr bequeme Ausdruck entscheidet zugleich auf der Stelle, ob $x^2$ eine ganze oder gebrochene Zahl ist.

## §. 2.

Berechnung der Kettenbrüche der Quadratwurzeln einiger Zahlen von allgemeiner Form.

1. $\sqrt{n^2+1} = n;\ (2n),$

also $m\sqrt{n^2+1} = \sqrt{m^2(n^2+1)}$

$$= mn + \cfrac{1}{\frac{2n}{m} + \frac{1}{2mn}\Big|} + \text{etc.}$$

Ist nun $n = mv$, so erhält man:

$$\sqrt{m^2(m^2v^2+1)} = m^2v;\ (2v).$$

2. $\sqrt{n^2+2} = n;\ (n)$

$$m\sqrt{n^2+2} = mn + \cfrac{1}{\frac{n}{m} + \frac{1}{2mn}\Big|} + \text{etc.}$$

und wenn $n = mv$,

$$\sqrt{m^2(m^2v^2)} = m^2v;\ (v).$$

3. $\sqrt{n^2-1} = n-1;\ (1.).$

Ist $n-1 = m^1v$, also $n^2-1 = m^2v(m^2v+2)$, dann wird:

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{m} = \sqrt{v(m^2v+2)} = \frac{n-1}{m} + \frac{1}{m+}\,\frac{1}{\frac{2(n-1)}{m}}\Bigg| + \text{etc.}$$

$$= mv + \frac{1}{m+}\,\frac{1}{2ma}\Big| + \text{etc.}$$

$$= mv;\ (m).$$

4. $\sqrt{n^2-2} = n-1+\frac{1}{x}.$

$$x = \frac{\sqrt{n^2-2}+n-1}{2n-3} = 1+\frac{1}{y}.$$

$$y = \frac{\sqrt{n^2-2}+n-2}{2} = \frac{2n-3+\frac{1}{x}}{2} = (n-1)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}\right)$$

Da $\frac{1}{2}-\frac{1}{2x}$ positiv, so ist $n-1$ um einen echten Bruch zu gross, folglich:

$$y = \frac{\sqrt{n^2-2}+n-2}{2} = n-2+\frac{1}{z}.$$

$$z = \frac{\sqrt{n^2-2}+n-2}{2n-3} = 1+\frac{1}{u}.$$

$$u = \sqrt{n^2-2}+n-1 = 2(n-1)+\frac{1}{x}.$$

also endlich:

$$\sqrt{n^2-2} = n-1;\ 1,\ (n-2).$$

Für $n=2$ ist oben $x = \frac{\sqrt{n^2-2}+n-1}{2n-3} = \frac{2(n-1)+\frac{1}{x}}{2n-3} = 2+\frac{1}{x}$,

also $\sqrt{2} = 1;\ (2)$

und nach der letzten Formel: $\sqrt{2} = 1;\ 1,\ (0)$.

Dieser Kettenbruch giebt ausser den Näherungswerthen des ersten immer noch zwei; nämlich der Quotient 1 vor der Null giebt einen zu grossen, und der 0 wiederholt den vorhergehenden zu kleinen. Die Näherungswerthe sind:

nach der ersten Form $\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29}$ etc.

und nach der zweiten $\frac{1}{1},\ \left(\frac{2}{1},\ \frac{1}{1}\right),\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \left(\frac{10}{7},\ \frac{7}{5}\right),\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29}$ etc.

Die Wurzeln aus $n^2 \pm 3$ lassen sich nicht mehr auf ähnliche Weise in allgemeiner Form darstellen.

## §. 3.

Der Berechnung der allgemeinen Formen einiger Zahlen, deren Wurzeln durch allgemeine Formen von Kettenbrüchen ausgedrückt werden, möge folgende Betrachtung vorausgehen.

Nach der Bezeichnung des §. 1. ist:

$$x^2 = n^2 + \frac{2nB+C}{N} = n^2+m$$

wo $m \leqq 2n$ sein muss.

Heissen nun die Quotienten des Kettenbruchs ohne die Ganzen: $a, b \ldots b, a$, so war §. 1.

$$\frac{B}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdot \cdot + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \qquad \text{also ist } \frac{N}{B} = a + \frac{1}{b} + \cdot \cdot + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

folglich, wenn man $m = 2p$ setzt:

$$n = \frac{Np - \frac{C}{2}}{B} = ap + q.$$

Ebenso ist $p = bq + r,\ q = cr + s \ldots,\ u + at \pm \frac{C}{2}$.

Substituirt man immer die Werthe der folgenden Buchstaben in $p$, so erhält man ganz die Bildung der Näherungswerthe, mithin ist, wenn $\frac{E}{F}$ den drittletzten Näherungswerth bedeutet, das letzte $p = C\left(at \pm \frac{C}{2}\right) + Et$

$$= (aC + E)t \pm \frac{C^2}{2} = Bt \pm \frac{C^2}{2}$$

und $m = 2Bt \pm C^2$.

Da $n = a + q$, so wird nach demselben Bildungsgesetze das letzte

$$n = B\left(at \pm \frac{C}{2}\right) + Ft = (aB + F)t \pm \frac{BC}{2}$$
$$= Nt \pm \frac{BC}{2}.$$

Die zweiten Glieder sind $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negattiv}\end{matrix}\right\}$ zu nehmen, je nachdem die Anzahl der Theilnenner von $a$ bis $a$ $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist, d. h. je nachdem die Periode $\left\{\begin{matrix}\text{kein}\\ \text{ein}\end{matrix}\right\}$ mittelstes Glied hat. Wird $N$ eine gerade Zahl, so hat man, um keine Zahl zu überspringen, bei $m$ und $n$ $\frac{t}{2}$ für $t$ und dann für $t$ jede positive Zahl zu setzen. $t = 0$ ist nur statthaft, wenn die zweiten Glieder positiv sind, und $t$ nur negativ, so lange $n$ und $m$ positiv werden, also wenn die zweiten Glieder positiv sind und $C^2 > 2B$, $\frac{BC}{2} > N$. So wird z. B. für die Theilnenner a, b, (c, c)

4, 1, (2, 2)

$$n = 221\,t + 235$$
$$m = 94\,t + 100$$

also die kleinsten Zahlen für $t = -1$, nämlich $n = 14$, $m = 6$, oder für $t = 0$, wenn man

$$n = 221\,t + 14$$
$$m = 94\,t + 6$$

schreibt.

$$x^2 = n^2 + m = 202.$$

Für $a, b, c, (d, d)$ wird $n = 73\,t + 667$ oder $n = 73\,t + 10$

1, 1, 1, (2, 2) $\quad m = 92\,t + 841 \qquad m = 92\,t + 13$

also die kleinsten $n$ und $m$ nach den ursprünglichen Formeln für $t = -9$, nämlich

$$n = 10,\ m = 13,\ x^2 = 113.$$

## §. 4.

Einige nach §. 4. berechnete Werthe für $n$ und $m$ aus gegebenen Theilnennern.

1. Gegeben: $(a)$.

$$n = at, \qquad m = 2t.$$

Für ein gerades $a$ ist $\frac{t}{2}$ für $t$ zu setzen.

2. Gegeben: $(a,\ a)$.

$$n = (a^2 + 1)\,t + \frac{a}{2}, \quad m = 2at + 1,$$

$a$ darf also keine ungerade Zahl sein, wenn, wie hier immer vorausgesetzt wird, $n$ ganz werden soll.

3. Gegeben: $a$, $(b)$.

$$n = a\,(ab + 2)t - \frac{b\,(ab+1)}{2}, \quad m = 2(ab + 1)t - b^2$$

für $a$ und $b$ ungerade, sonst ist $\frac{t}{2}$ für $t$ zu setzen. $a$ gerade, $b$ ungerade ist unzulässig.

4. Gegeben: $a$, $(b,\ b)$.

$$n = \Big((ab + 1)^2 + a^2\Big)t + (ab^2 + a + b)\ \frac{b^2 + 1}{2}$$

$$m = 2\,(ab^2 + a + b) + (b^2 + 1)^2.$$

Es darf nicht zugleich $a$ ungerade, $b$ gerade sein.

Für $a = b$ ist: $$n = \Big((a^2 + 1)^2 + a^2)\Big)\,t + \frac{a(a^2+1)\,(a^2+2)}{2}$$

$$m = 2a\,(a^2 + 2)\,t + (a^2 + 1)^2.$$

5. Gegeben: $a$, $b$, $(c)$.

$$n = (ab + 1)\,\Big(c(ab + 1) + 2a\Big)\,t - \frac{b\,(bc+2)}{2}\,\Big((ab + 1)\,(bc + 1) + ab\Big)$$

$$m = 2\Big((ab + 1)\,(bc + 1) + ab\Big)\,t - b^2\,(bc + 2)^2.$$

$a$, $b$, $c$ dürfen nicht zugleich ungerade sein, und für ein gerades $c$ ist $\frac{t}{2}$ für $t$ zu setzen.

Für $a = b = c$ ist $$n = a\,(a^2 + 1)\,(a^2 + 3)\,t - \frac{a\,(a^2+2)}{2}\,\Big((a^2 + 1)^2 + a^2\Big)$$

$$m = 2\,\Big((a^2 + 1)^2 + a^2\Big)\,t - a^2\,(a^2 + 2)^2.$$

6. Gegeben: $a$, $b$, $(c,\ c)$.

$$n = \Big[\Big((abc + a + c) + a\Big)^2 + (ab + 1)^2\Big]\,t + \Big(c(ab + 1)\,(bc + 1) + a(bc + 1) + b(ab + 1)\Big)\frac{b^2 + (bc+1)^2}{2}$$

$$m = 2\Big(c\,(ab + 1)\,(bc + 1) + a\,(bc + 1) + b\,(ab + 1)\Big)\,t + \Big({}^2 + b\,(bc + 1)^2\Big)^1$$

Die Verbindungen

| $a$ | $b$ | $c$ |
| --- | --- | --- |
| gerade | gerade | ungerade |
| gerade | ungerade | ungerade |
| ungerade | gerade | gerade |

sind unstatthaft.

Für $a = b = c$ ist:

$$n = \left(a^2 (a^2+2)^2 + (a^2+1)^2\right) t + a(a^2+1)(a^2+3) \frac{a^2 + (a^2+1)^2}{2}$$

$$m = 2a(a^2+1)(a^2+3)\, t + \left(a^2 + (a^2+1)^2\right)$$

7. Gegeben: $a$, $b$, $c$, $(d)$.

$$n = \left(d(abc+a+c) + 2(ab+1)\right)(abc+a+c)\, t$$

$$- \left((ab+1)(bc+1)(cd+1) + ab(cd+1) + bc(ab+1) + ad\right) \frac{(bc+1)\,(2b+d(bc+1))}{2}$$

$$m = 2\left((ab+1)(bc+1)(cd+1) + ab(cd+1) + bc(ab+1) + ad\right) t - (bc+1)^2 \left(2b + d(bc+1)\right)^2$$

$\frac{t}{2}$ ist für $t$ zu setzen, wenn 1) $d$ gerade, oder 2) $a$ und $c$ ungerade, oder 3) $b$ gerade, $a$ und $c$ ungerade.

$n$ wird keine ganze Zahl für:

| $a$ | b | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| gerade | ungerade | gerade | ungerade |
| ungerade | gerade | ungerade | ungerade |

Für $a = b = c = d$ ist

$$n = a(a^2+2)\left((a^2+2)^2 - 2\right) t - \left((a^2+1)^3 + a^2(2a^2+3)\right) \frac{a(a^2+1)(a^2+3)}{2}$$

$$m = 2\left((a^2+1)^3 + a^2(2a^2+3)\right) t - a^2(a^2+1)^2(a^2+3)^2$$

8. Gegeben: $a$, $b$, $c$, $(d, d)$.

$$n = \left[\left((ab+1)(cd+1)+ad\right)^2 + (abc+a+c)^2\right] t$$

$$+ \left[\left((ab+1)(cd+1)+ad\right)(bcd+b+d) + (bc+1)(abc+a+c)\right] \frac{(bc+1)^2 + (b+d(bc+1))^2}{2}$$

$$m = 2\left[\left((ab+1)(cd+1)+ad\right)(bcd+b+d) + (bc+1)(abc+a+c)\right] t$$

$$+ \left[(bc+1)^2 + \left(b+d(bc+1)\right)^2\right]^2$$

Unstatthaft sind die Verbindungen:

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| gerade | gerade | ungerade | gerade |
| gerade | ungerade | gerade | gerade |
| ungerade | gerade | gerade | gerade |
| ungerade | ungerade | gerade | ungerade |
| ungerade | ungerade | ungerade | ungerade |

$\frac{t}{2}$ ist für $t$ zu setzen, wenn:

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| gerade | gerade | gerade | ungerade |
| gerade | ungerade | ungerade. | gerade |

Für $a = b = c = d$ ist:

$$n = \left[\left((a^2+1)^2 + a^2\right)^2 + a^2(a^2+2)^2\right] t + a(a^2+2)\left((a^2+2)^2 - 2\right) \frac{(a^2+1)^2 + a^2(a^2+2)^2}{2}$$

$$m = 2a(a^2+2)\left((a^2+2)^2 - 2\right) t + \left((a^2+1)^2 + a^2(a^2+2)^2\right)^2$$

## §. 5.

Die Brüche $\frac{C}{B}$, $\frac{B}{N}$ des §. 3. lassen sich auch bloss mit Benutzung der ersten Hälfte der Periode finden. Heisst nämlich der echte Bruch 0; $\alpha$, $\beta$, ... $\mu$, ($\varkappa$, $\varkappa$) und der letzte Näherungswerth der ersten Hälfte (bis zum ersten $\frac{1}{\varkappa}$ incl.) $\frac{m'}{N'}$, der vorletzte $\frac{m}{N}$, also in der zweiten Hälfte der Werth von $\frac{1}{\varkappa}$ bis $\frac{1}{\beta}$ incl. $\frac{m}{m'}$ und der von $\frac{1}{\varkappa}$ bis $\frac{1}{\alpha}$ incl. $\frac{N}{N'}$, so ist hier obiges

$$\frac{B}{N} = \frac{\frac{N'}{N}\, m' + m}{\frac{N'}{N}\, N' + N} = \frac{m' N' + m N}{N'^2 + N^2}$$

$$\text{und } \frac{C}{B} = \frac{\frac{m'}{m}\, m' + m}{\frac{m'}{m}\, N' + N} = \frac{m'^2 + m^2}{m' N' + mN}$$

Für $n$; $\alpha$, $\beta$ ... $\mu$, ($2\varkappa$) wird §. 11. den Näherungswerth bis zum zweiten $\frac{1}{\alpha}$ gefunden: $\frac{M'(N+Q) \pm 1}{N'(N+Q)}$, wenn die drei letzten bis $\frac{1}{2\varkappa}$: $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N'}$, $\frac{P}{Q}$, heissen. Unser echte Bruch wird also erhalten, wenn man $n$ abreiht und $m'$ für $M' - nN'$ setzt, also:

$$\frac{B}{N} = \frac{m'(N+Q) \pm 1}{N'(N+Q)}$$

($\pm$) je nachdem die Anzahl der Quotienten ohne die Ganzen, also von $\alpha$ bis $2\varkappa$ incl. $\left\{\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Setzt man $\beta$, $\gamma$, ... $\varkappa = \frac{S'}{T'}$, seinen Vorgänger $\frac{S}{T}$, so ist $\varkappa$ bis $\frac{1}{\beta}$ incl. $= \frac{S'}{S'}$, und

$$\frac{C}{B} = \frac{\left(\varkappa + \frac{S'}{S}\right) m' + m}{\left(\varkappa + \frac{S'}{S}\right) N' + N} = \frac{(\varkappa S + S') m' + mS}{(\varkappa S + S') N' + NS}$$

womit in beiden Fällen $B$, $C$, $N$ bestimmt sind.

## §. 6.

Hat ein Kettenbruch, der die Quadratwurzel einer ganzen Zahl $A$ ausdrückt, in der Mitte der Periode nur einen Theilnenner $2\varkappa$, so kann man sich die ersten Quotienten bis zum ersten $\varkappa$ incl. nicht in der Periode enthalten vorstellen und diese mit dem zweiten $\varkappa$ beginnen lassen. Offenbar ist von hier ab der Kettenbruch dann auch periodisch-symmetrisch, also nach §. 1. einer Quadratwurzel gleich. Heisst diese $\sqrt{B}$, so muss 1) $B > 1$, allgemein aber $< A$ sein, da $\varkappa$, die grösste ganze Zahl in $\sqrt{B}$, $< n$ ist, und 2) $B$ keine ganze Zahl, da das mittelste Glied der zugehörigen Periode $2n > 2\varkappa$ gleich ist, was für $B$ gleich einer ganzen Zahl nicht der Fall sein könnte. Es ist also:

$$\sqrt{A} = n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\varkappa} + \frac{1}{\mu} + \dots + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{n} + \sqrt{A}$$

$$= n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\varkappa + \varkappa} + \frac{1}{\mu} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2\varkappa} + \text{etc.}$$

$$= n + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\varkappa} + \sqrt{B}$$

Wir suchen wieder $A$ durch die Theilnenner, ferner $B$, welches auf irgend eine Weise von $A$ abhängig sein muss.

Setzt man den Näherungswerth bis zum ersten $\frac{1}{\mu}$ incl. $\frac{M'}{N'}$, den vorhergehenden $\frac{N}{M}$, den bis $\frac{1}{\varkappa}$ incl. $\frac{M''}{N''}$, dann ist:

$$\sqrt{A} = \frac{\varkappa M' + M + M'\sqrt{B}}{\varkappa N' + N + N'\sqrt{B}}$$

und wenn man $B = \frac{A}{x^2}$ setzt:

$$\sqrt{A} = \frac{(\varkappa M' + M)\,x + M'\sqrt{A}}{(\varkappa N' + N)\,x + N'\sqrt{A}}$$

Multiplicirt man mit dem Nenner und setzt die rationalen Theile und ebenso die irrationalen einander gleich, so entstehen die beiden Gleichungen:

$$1)\quad AN' = (\varkappa M' + M)\,x$$
$$2)\quad M' = (\varkappa N' + N)\,x$$

folglich $A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{\varkappa M' + M}{\varkappa N' + N} = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}$

Betrachtet man also den halben mittelsten Theilnenner als letzten der ersten Hälfte der ersten Periode, dann ist das Produkt der beiden letzten Näherungswerthe dieser ersten Hälfte gleich der Zahl $A$.

Setzt man aber in die erste Gleichung $x\sqrt{B}$ für $\sqrt{A}$, so erhält man auf dieselbe Weise:

$$B = \frac{(\varkappa M' + M)(\varkappa N' + N)}{M'N'} = \frac{M''N''}{M'N'}$$

Eliminirt man $x$ aus den Gleichungen 1) und 2), so ensteht:

$$x = \frac{M'^2 - AN'^2}{NM' - MN'} = \pm (M'^2 - AN'^2)$$

also $x$ eine ganze Zahl. Durch Substitution des obigen Werthes von $A$ in diese Gleichung erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung $M'N'' - N'M'' = 1$, was auch gleich $x^2 = \frac{A}{B}$ giebt:

$$x = \frac{M'}{N''}.$$

Dass $\frac{M'}{N''}$ eine ganze Zahl werden muss, folgt schon aus $A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}$. Da nämlich $M'$ und $N'$, und ebenso $M''$ und $N''$ relative Primzahlen sind, so müssen $\frac{M'}{N''}$ und $\frac{M''}{N'}$ ganze Zahlen werden.

Für $\sqrt{180} = 13;\ 2,\ (2)$ sind die Näherungswerthe: $\frac{13}{1}, \frac{27}{2}, \frac{40}{3} = \frac{M''}{N''}$, also $x = \frac{27}{3} = 9$, und $B = \frac{180}{9^2} = \frac{3 \cdot 40}{2 \cdot 27} = \frac{20}{9}$.

## §. 7.

Das Produkt der beiden ganzen Zahlen $\frac{M'}{N''} \cdot \frac{M''}{N'}$ soll die ganze Zahl $A$ geben; d. h. $A$ ist **keine Primzahl**, es sei denn, dass der kleinere dieser Faktoren $= 1$, und der grössere eine Primzahl ist. Nun ist aber:

$$M'' > M'$$
$$N' < N''$$

also

$$\frac{M''}{N'} > \frac{M'}{N''}$$

folglich müsste $\frac{M'}{N''} = 1$, oder $M' = N''$ sein, wenn $A$ eine Primzahl sein sollte. Da aber

$$\frac{M''}{N''} = n + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cdots + \cfrac{1}{x}}}$$ und deshalb $$\frac{M''}{M'} = x + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cdots + \cfrac{1}{n}}}$$

so muss, wenn $M' = N''$ sein soll, $x = n$ sein, d. h. der mittelste Quotient gleich dem letzten, also auch gleich dem ersten, oder die Periode beginnt für $A$ gleich einer Primzahl, deren Quadratwurzel in der Mitte **einen geraden** Quotienten hat, mit dem Quotienten $2n$. Dann ist $\frac{M'}{N'} = \frac{n}{1}$, $\frac{M''}{N''} = \frac{n^2+1}{n}$, also $\frac{M'}{N''} = 1$, $\frac{M''}{N'} = n^2 + 1 = A$. In der That ist $\sqrt{n^2+1} = n;\ (2n)$.

Wir haben also auf diesem Wege den bekannten Satz abgeleitet, dass die Quadratwurzel aus einer Primzahl, mit Ausnahme deren von der Form $n^2 + 1$, keinen Kettenbruch mit **einem geraden** Theilnenner in der Mitte geben kann.

Dass $A$ keine Primzahl sein kann, folgt auch schon aus den Werthen für $A$ und $x$ (§. 6.) auf folgende Weise:

$$A = \frac{xM' + M}{N'} \cdot \frac{M'}{xN' + N}$$
$$= \frac{xM' + M}{N'}\, x = \frac{xM' + M}{N'} (M'^2 - AN'^2)$$

Da nun $N'$, wenn es nicht $= 1$ ist, mit $M'$ keinen Faktor gemein haben, also auch in $M'^2 - AN'^2$ nicht aufgehen kann, so muss es ganz in $\varkappa M' + M$ enthalten sein, folglich besteht $A$ aus zwei Faktoren, von denen keiner $= 1$ sein kann. Es ist nämlich $\frac{\varkappa M' + M}{N'} > 1$, da $N' < M'$, also um so mehr $< \varkappa M' + M$, und $M'^2 - AN'^2$ d. i. $x > 1$, weil $B = \frac{A}{x^2}$ und $B < A$.

## §. 8.

Ist $A = a \,.\, b$ und zwar $a > b$, und setzt man $B = \frac{p}{q}$, wo $p > q$ sein muss, und $q$ nicht $= 1$ sein kann, so erhält man: $x^2 = \frac{A}{B} = \frac{a\;b\,.\,q}{p}$. Da $x$ eine ganze Zahl, und $B > 1$ sein muss (§. 6.), so ist $p = a$ und $q = b = x$, also $B = \frac{a}{b}$

Ist also $\sqrt{A} = \sqrt{ab} = n + \cfrac{1}{\alpha + \ldots + \cfrac{1}{\mu + \cfrac{1}{2\varkappa + \cfrac{1}{\mu + \ldots + \cfrac{1}{n + \sqrt{ab}}}}}}$, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}} = \varkappa + \cfrac{1}{\mu + \ldots + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{2n + \cfrac{1}{\alpha + \ldots + \cfrac{1}{\varkappa + \sqrt{\frac{a}{b}}}}}}}$

z. B. $\sqrt{14} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \sqrt{14}}}}}$, also $\sqrt{\frac{7}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{\frac{7}{2}}}}}}$

$$\sqrt{55} = 7;\ 2\,(2), \text{ also } \sqrt{\tfrac{11}{5}} = 1;\ 2,\ (14)$$

Aber für $a \,.\, b = n^2 + 1$ wird $\sqrt{a.b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = n;\ (2n)$, also $b = 1$ z. B. für $A = 13 \,.\, 5$ ist $B$ nicht $= \frac{13}{5}$, sondern $= 65$. Immer ist $B = A$, wenn $A = n^2 + 1$, auch wenn $n^2 + 1$ eine Primzahl ist.

Besteht $A$ aus mehr als zwei Faktoren, so erhält man $b$ d. i. $x$ nach § 6. aus der Gleichung $b = M'^2 - AN'^2$, oder $b = \frac{M'}{N'^{2}}$. Ist z. B. $A = 180 = 4 \,.\, 5 \,.\, 9$, so folgt aus $\sqrt{180} = 13;\ 2,\ (2)$: $b = 9$, also $a = \frac{A}{b} = 20$, $B = \frac{20}{9}$, und $\sqrt{\frac{20}{9}} = 1;\ 2,\ (26)$.

Ueberhaupt lösen $M'$ und $N'$ die Gleichung $M'^2 - abN'^2 = \pm b$ in ganzen Zahlen, wenn $a$ und $b$ so beschaffen sind, dass der zu $\sqrt{ab}$ gehörige Kettenbruch in der Mitte der Periode einen geraden Theilnenner $2\varkappa$ hat, und dass $\sqrt{\frac{a}{b}}$ zwischen $\varkappa$ und $\varkappa + 1$ liegt. ($\pm b$) je nachdem der mittelste Quotient (die Ganzen nicht mitgerechnet) an $\left\{\begin{matrix}\text{gerader}\\ \text{ungerader}\end{matrix}\right\}$ Stelle steht.

$M'^2 - 11 \,.\, 5\, N'^2 = 5;\ \sqrt{55} = 7;\ 2,\ (2)$.

Näherungswerthe: $\frac{7}{1}$, $\frac{15}{2}$; $M' = 15$, $N' = 2$.

$M'^2 - 11 \,.\, 7\, N'^2 = -7;\ \sqrt{77} = 8;\ 1,\ 3,\ (2)$.

Näherungswerthe: $\frac{8}{1}$, $\frac{9}{1}$, $\frac{35}{4}$; $M' = 35$, $N' = 4$.

## §. 9.

Die §. 6. gewonnenen Formeln für $A$, $x$, $B$ behalten auch ihre Giltigkeit, wenn die Periode in der Mitte einen ungeraden Theilnenner $\varkappa$ hat, nur ist dann $\frac{\varkappa}{2}$ statt $\varkappa$ zu setzen, also wird:

$$A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{\frac{\varkappa}{2} M' + M}{\frac{\varkappa}{2} N' + N} = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}.$$

In diesem Falle kann $B$ auch eine ganze Zahl werden, aber das $n$ für $\sqrt{B}$ ist immer ein Bruch, nämlich $\frac{\varkappa}{2}$.

$\sqrt{75} = 8;\ 1,\ (1)$; Näherungswerthe: $\frac{8}{1}, \frac{9}{1}, \frac{\frac{25}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{M''}{N''}$

$9^2 - 75 . 1 = 6$, also $B = \frac{75}{36} = \frac{25}{12}$, oder $B = \frac{3 . 75}{4 . 9} = \frac{25}{12}$

und $\sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{16} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{25}{12}}$

$\sqrt{96} = 9;\ 1,\ (3)$ giebt $B = 6$, also $\sqrt{6} = \frac{3}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{18} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{3}{2}} + \sqrt{6}$

$\sqrt{32} = 5;\ 1,\ (1)$, $B = 2$, $\sqrt{2} = \frac{1}{1};\ 1,\ (10)$.

Es ist zu beachten, dass, wenn man $\frac{M''}{N''} = \frac{\varkappa M' + 2M}{\varkappa N' + 2N}$ setzt, das nach der Formel $B = \frac{M'' . N''}{M' . N'}$ erhaltene Resultat durch 4 zu dividiren ist.

Ist $\varkappa N' + 2N = M'$ (was nothwendig der Fall sein muss, wenn $A$ eine Primzahl), so ist:

$$A = \frac{\varkappa M' + 2M}{N'}, \text{ und da } \varkappa = \frac{M' - 2N}{N'}, = \frac{M'^2 + 2(MN' - NM')}{N'^2} = \frac{M'^2 \pm 2}{N'^2}$$

oder $M'^2 - AN'^2 = \mp 2$.

$(\mp 2)$ wenn $\frac{M'}{N'}$, ohne die Ganzen, an $\left\{\begin{matrix}\text{gerader}\\ \text{ungerader}\end{matrix}\right\}$ Stelle steht.

Für solche Zahlen $A$ wird also die Gleichung durch $M'$ und $N'$ in ganzen Zahlen gelöst.

$A$, $M'$ und $N'$ können nur ungerade sein. Für $A$ gerade müsste auch $M'$ gerade, also $N'$ ungerade sein, was wegen $\varkappa = \frac{M' - 2N}{N'}$ nicht angeht, da $\varkappa$ gerade werden würde und doch nach der Annahme ungerade ist.

## §. 10.

Der Ausdruck $A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}$ lässt sich auch ableiten ohne Einführung der $\sqrt{B}$. Bei derselben Bezeichnung ist nämlich in der z w e i t e n Hälfte der Periode der Bruch von

$\frac{1}{\mu}$ bis $\frac{1}{\alpha} = \frac{N}{N'}$, und der ihm vorangehende von $\frac{1}{\mu}$ bis $\frac{1}{\beta}$, $= \frac{M-nN}{M'-nN'}$, d. i. gleich dem Quotienten zwischen den Zählern der echten Brüche in der ersten Hälfte von $\frac{1}{\alpha}$ bis $\frac{1}{\mu}$ und seinem Vorgänger. Dann ist der Werth vom zweiten $\frac{1}{\mu}$, also

$$\frac{1}{\mu + \text{in inf.}} = \frac{(n+\sqrt{A})\; N + (M-nN)}{(n+\sqrt{A})\; N' + (M'-nN')} = L.$$

$$\text{also } \sqrt{A} = \frac{(\varkappa + L)\; M' + M}{(\varkappa + L)\; N' + N}$$

und wenn man für $L$ den Werth substituirt:

$$\sqrt{A} = \frac{(M'N + N'M + \varkappa M'N')\sqrt{A} + \varkappa M'^2 + 2M'M}{N'(2N + \varkappa N')\sqrt{A} + (M'N + N'M + \varkappa M'N')}$$

Multiplicirt man mit dem Nenner, so werden die irrationalen Theile identisch, die rationalen geben:

$$A = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{\varkappa M' + 2M}{\varkappa N' + 2N} = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{\frac{\varkappa}{2} M' + M}{\frac{\varkappa}{2} N' + N} = \frac{M'}{N'} \cdot \frac{M''}{N''}$$

Heisst der Näherungswerth bis $\frac{1}{\varkappa}$ incl. $\frac{P}{Q}$, dann ist $\varkappa M' + M = P$, $\varkappa N' + N = Q$, also:

$$A = \frac{M'(M+P)}{N'(N+Q)} = \frac{M'(2P - \varkappa M')}{N'(2Q - \varkappa N')}$$

## §. 11.

Die Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ wird bekanntlich durch den Näherungswerth $\frac{x}{y}$ bis zum zweiten $\frac{1}{\alpha}$ incl., also vor dem vollständigen Quotienten $n + \sqrt{A}$, gelöst. Es ist also durch die Theilnenner der ersten Hälfte der ersten Periode.

$$\frac{x}{y} = \frac{\left(\varkappa + \frac{N'}{N}\right) M' + M}{\left(\varkappa + \frac{N'}{N}\right) N' + N} = \frac{\varkappa M'N' + M'N + MN'}{(\varkappa N' + N)\, N' + NN'}$$

$$= \frac{PN' + M'N}{N'(N+Q)}, \text{ oder da } M'N + MN' = 2MN' \pm 1,$$

$$= \frac{(\varkappa M' + M)\, N' + MN' \pm 1}{(\varkappa N' + N)\, N' + NN'} = \frac{N'(M+P) \pm 1}{N'(N+Q)}$$

Da $N'M = M'N \mp 1$

$N'P = M'Q \mp 1$

so ist: $N'(M+P) \pm 1 = M'(N+Q) \mp 1.$

Für obige Gleichung ist also, wenn sie eine Auflösung in ganzen Zahlen gestattet:

$$x = N' \,(M + P) \pm 1 = M' \,(N + Q) \pm 1 \text{ *)}.$$
$$y = N' \,(N + Q)$$

das $\left\{\begin{array}{l}\text{obere}\\ \text{untere}\end{array}\right\}$ Zeichen, je nachdem die Anzahl der Quotienten ohne die Ganzen, also von $\alpha$ bis $\varkappa$ incl. $\left\{\begin{array}{l}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{array}\right\}$ ist.

Da der mittelste Theilnenner eben so gut zu der einen, wie zu der andern Hälfte der Periode genommen werden kann, so steht zu erwarten, dass die Formeln noch mehr an Symmetrie gewinnen und einfacher gestaltet sein werden, wenn man ihn halbirt und die eine Hälfte zu der ersten, die andere zur zweiten Hälfte der Periode nimmt. Dann wird das obige

$$\frac{x}{y} = \frac{\varkappa M'N' + M'N + MN'}{(\varkappa N' + N)\, N' + NN'}$$
$$= \frac{\left(\frac{\varkappa}{2} M' + M\right) N' + \left(\frac{\varkappa}{2} N' + N\right) M'}{2\left(\frac{\varkappa}{2} N' + N\right) N'}$$
$$= \frac{N'M'' + N''M'}{2N'N''} = \frac{2N'M'' \pm 1}{2N'N''}$$

Setzt man, um bequemer mit ganzen Zahlen rechnen zu können, $\frac{\varkappa M' + 2M}{\varkappa N' + 2N} = \frac{M''}{N''}$, so wird, da $M' \left(\frac{\varkappa}{2} N' + N\right) - N' \left(\frac{\varkappa}{2} M' + M\right) = \pm 1$,

offenbar $M' \,(\varkappa N' + 2N) - N' \,(\varkappa M' + 2M) = \pm 2$,

d. h. $M'N'' - N'M'' = \pm 2$

also $M'N'' + N'M'' = 2(N'M'' \pm 1)$

$$\text{und } \frac{x}{y} = \frac{N'M'' \pm 1}{N'N''}$$

Die Zeichen wie vorhin:

$\sqrt{28} = 5;\ 3,\ (2)$; Näherungswerthe: $\frac{5}{1}, \frac{16}{3}, \frac{21}{4} = \frac{M''}{N''}$

$$\frac{x}{y} = \frac{6.21 + 1}{6.4} = \frac{127}{24}$$

$\sqrt{21} = 4;\ 1,\ 1,\ (2)$; Näherungswerthe: $4,\ 5,\ \frac{9}{2}, \frac{14}{3} = \frac{M''}{N''}$

$$\frac{x}{y} = \frac{4.14 - 1}{4.3} = \frac{55}{12}$$

---

*) Diese Formel hat schon Tenner, doch ohne Ableitung gegeben, im Gymnasial-Programme, Merseburg 1841. Es mag hier zugleich ein Druckfehler erwähnt werden, auf den ich in der dritten Ausgabe der Théorie des nombres von Legendre, die mir allein zur Hand ist, gestossen bin. Dort steht Tome I. Table X. bei $N = 94$, $x = 2543295$ statt 2143295, wie auch der Canon Pellianus richtig hat.

$\sqrt{128} = 11;\ 3,\ (5)$; Näherungswerthe: $11,\ \frac{34}{3},\ \frac{\frac{5}{2}.34 + 11}{\frac{15}{2} + 1} = \frac{M''}{N''} = \frac{192}{17}$

$$\frac{x}{y} = \frac{6(5.17 + 11) + 1}{6(\frac{15}{2} + 1)} = \frac{577}{51} = \frac{3.192 + 1}{3.17}$$

$\sqrt{19} = 4;\ 2,\ 1,\ (3)$; Näherungswerthe: $4,\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{\frac{39}{2} + 9}{\frac{9}{2} + 2} = \frac{M''}{N''} = \frac{57}{13}$

$$\frac{x}{y} = \frac{6(\frac{39}{2} + 9) - 1}{6(\frac{9}{2} + 2)} = \frac{170}{39} = \frac{3.57 - 1}{3.13}$$

## §. 12.

Da der Bruch von $n$ bis $\frac{1}{\mu}$ mit $\frac{M'}{N'}$, sein Vorgänger mit $\frac{M}{N}$ bezeichnet ist, so ist der von $\frac{1}{\mu}$ bis $\frac{1}{n} = \frac{M}{M'}$, und der Näherungswerth bis ans Ende der ersten Periode, d. h. bis $\frac{1}{n}$:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\left(x + \frac{M}{M'}\right) M' + M}{\left(x + \frac{M}{M'}\right) N' + N} = \frac{(xM' + 2M)\, M'}{xM'N' + MN' + M'N}$$

$$= \frac{(M + P)\, M'}{QM' + MN'} = \frac{(M + P)\, M'}{PN' + NM'} = \frac{(N + Q)\, N'}{PN' + M'N} \,.\, A \ (\text{§. } 10.)$$

Durch Gleichstellung der Nenner erhält man $(P - M)\, N' = (Q - N)\, M'$.

Oben §. 11. war $\frac{x}{y} = \frac{PN' + M'N}{(N + Q)\, N'}$, daher

$$\frac{x}{y} \,.\, \frac{x'}{y'} = \frac{x'}{y} = A.$$

wie schon im §. 1. gefunden wurde.

Den Werth $\frac{x''}{y''}$ von $n$ bis $\frac{1}{2n}$ erhält man, wenn man im §. 10. $2n$ für den Faktor $n + \sqrt{A}$ setzt, also:

$$\frac{x''}{y''} = \frac{(P + nQ)\, M' + (M' + nN')\, M}{(P + nQ)\, N' + (M' + nN')\, N,} = \frac{n\,(M'Q + N'M) + (M + P)\, M'}{n\,(N + Q)\, N' + PN' + NM'}$$

$$= \frac{n\,(PN' + M'N) + (M + P)\, M'}{n\,(N + Q)\, N' + PN' + NM'} = \frac{nx + x'}{ny + y'}$$

wie sich von selbst versteht.

Wohl mit Unrecht findet man gewöhnlich $2n$ als den Schluss der Periode bezeichnet, da doch passender die zweite wieder mit $\sqrt{A}$, also mit $n$ beginnt, so dass die erste von $n$ bis $n$, die zweite wieder von $n$ bis $n$ geht u. s. f. Die beiden letzten Ausdrücke geben, die erste Periode bis $\frac{1}{n}$ und bis $\frac{1}{2n}$ durch die drei letzten Näherungswerthe der ersten Hälfte; der erstere, als der weit einfachere, spricht auch für diese Ansicht. Der Unterschied in der Einfachheit der Werthe für $\frac{x'}{y'}$ und $\frac{x''}{y''}$ tritt noch deutlicher hervor, wenn man die eine Hälfte des mittelsten Theilnenners $2x$ zur ersten, die zweite zur zweiten Hälfte der Periode nimmt und nun $\frac{x'}{y'}$ und $\frac{x''}{y''}$ durch die letzten Näherungswerthe der ersten Hälfte ausdrückt.

Da der Bruch von $x$ bis $\frac{1}{n} = \frac{M''}{M'}$ (§. 7.), so ist:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\left(x+\frac{M''}{M'}\right) M' + M}{\left(x+\frac{M''}{M'}\right) N' + N} = \frac{2M'N''}{M'N''+M''N'}$$
$$= \frac{2M'M''}{2N'M''\pm 1} = \frac{2M'M''}{2M'N''+1}$$

Diesen Ausdruck, wie den für $\frac{x''}{y''}$, erhält man auch, wenn man $P$ und $Q$ §. 10. durch $M'$, $M''$ und $N'$, $N''$ ausdrückt und in vorige Werthe §. 11. substituirt. Aus dem dortigen $\frac{x}{2}\; M' + M = M''$ und $\frac{x}{2}\; N' + N = N''$ folgt aber $xM' = 2(M''-M)$, $xN' = 2(N''-N)$, also $P = 2M''-M$, $Q = 2N''-N$, $\frac{x'}{y'}$ wie vorhin, und

$$\frac{x''}{y''} = \frac{2M'(M''+nN'')\pm n}{2N'(M''+nN'')\pm 1}$$

oder wenn $M''$ und $N''$, für $x$ ungerade, in ganzen Zahlen ausgedrückt sind:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{M'M''}{N'M''\pm 1} = \frac{M'M''}{M'N''\mp 1}$$
$$\frac{x''}{y''} = \frac{M'(M''+nN'')\pm n}{N'(M''+nN'')\pm 1}$$

Das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, wenn $x$ ohne die Ganzen an $\left\{\begin{matrix}\text{gerader}\\ \text{ungerader}\end{matrix}\right\}$ Stelle steht.

## §. 13.

Im §. 10. war $A = \frac{M'(M+P)}{N'(N+Q)} = \frac{M'M''}{N'N''}$. Da $M'$ und $N'$ relative Primzahlen sind, ferner $M + P = n(N + Q) + m + p$ ist, wenn man die Zähler der echten Brüche mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnet, folglich $\frac{M+P}{N+Q} = n + \frac{m+p}{N+Q}$ keine ganze Zahl sein kann, so muss $\frac{M+P}{N'}$ ganz sein, $N + Q$ aber in $M'(M+P)$ oder in $M'$ aufgehen. Ist nun:

I. $M' = N + Q = 2Q - xN' = nN' + m' = xN' + 2N$, z. B. $\sqrt{19} = 4;\ 2,\ 1,\ (3)$.

Näherungswerthe: $4,\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{48}{11};\ 13 = 2 + 11$,

so kann $x$ nur $= n$ oder $= n - 1$ sein. Wäre nämlich $x = n + x$, so müsste $nN' + m' = nN' + xN' + 2N$ sein, was nur für $x = 0$ möglich ist, da schon $N' > m'$. Die Substitution von $n - x$ für $x$ giebt $nN' + m' = nN' - xN' + 2N$ oder $xN' + m' = 2N$ d. h. in diesem Falle ist das Maximum von $x = 1$, da $N' > N$. Ist folglich $A$ eine Primzahl, deren Quadratwurzel in der Mitte der Periode nur einen Theilnenner hat, wo also $M' = N + Q$ sein muss, so ist $x = \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\}$ je nachdem $n \left\{ \begin{matrix} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{matrix} \right\}$ ist. Für $x = n$ ist $m' = 2N$ und für $x = n - 1$, $m' + N' = 2N$.

Aus obigen Gleichungen folgt auch

$$x = \frac{Q - N}{N'} = \frac{2Q - m'}{N'} - n \text{ (also } N' \text{ nur ungerade)}$$

$$n = \frac{2Q - m'}{N'} - x = \frac{2Q - m'}{N'} - \frac{Q - N}{N'} = \frac{Q + N - m'}{N'}$$

also

$$A = \frac{M + P}{N'} = \frac{n(N + Q) + m + p}{N'} = \frac{(N + Q - m')(N + Q) + (m + p) N'}{N'^2}$$

$$= \frac{(N + Q)^2 \pm 2}{N'^2}$$

wie schon §. 9. gefunden wurde, da $N + Q = M'$ ist.

$$AN'^2 = N^2 + Q^2 + 2NQ \pm 2$$

$$x^2 N'^2 = N^2 + Q^2 - 2NQ$$

$$\text{mithin } \frac{(A + x^2)}{2} N'^2 = N^2 + Q^2 \pm 1$$

$$\text{und } \frac{(A - x^2)}{2} N'^2 + 2NQ \pm 1$$

Da $N'$ ungerade ist, so muss $A + x^2$ gerade sein, d. h. für ein ungerades $A$, also auch für $A$ gleich einer Primzahl, kann $x$ nur ungerade sein. Ferner ist $N^2 + Q^2 \pm 1$ eine gerade Zahl, da $N + Q$ wegen $A = \frac{(N + Q)^2 \pm 2}{N'^2}$ ungerade, also der eine der Nenner $N$ und $Q$ gerade, der andere ungerade sein muss, folglich muss $A + x^2$ ein Vierfaches sein, und da $x^2$ von der Form $4t + 1$, so ist $A$ von der Form $4t + 3$.

Für ein gerades $A$ können $N$ und $Q$ beide gerade, auch beide ungerade sein. Im ersten Falle ist $N^2 + Q^2 \pm 1$ von der Form $4t \pm 1$, also muss, da $N'^2$ dieselbe Form hat, $A + x^2$ von der Form $8t \pm 2$ sein, d. h. $A = 8t \pm 2$ und $x = 4s$, oder $= 4s + 2$.

Im zweiten Falle ist $N^2 + Q^2 \pm 1$ von der Form $\left\{ \begin{matrix} 4t + 3 \\ 4t + 1 \end{matrix} \right\}$, daher $A + x^2$ von der Form $\left\{ \begin{matrix} 8t + 6 \\ 8t + 2 \end{matrix} \right\}$ d. i. wie vorhin $A + x^2 = 8t \pm 2$.

Ist also bei geraden Zahlen der mittelste Theilnenner $x = n$ oder $= n - 1$, so kann $x$ nur gerade sein, und die Zahl $A$ muss die Form $8t + 2$ oder $8t - 2$ haben.

Die kleinste Differenz zweier Zahlen, bei denen $x = n$ oder $= n - 1$ ist, muss demnach 4 sein.

II. $N + Q$ geht in $M'$ $(M + P)$ auf, z. B.

$\sqrt{45} = 6$; 1, 2, (2); Näherungswerthe: 6, $\frac{7}{1}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{47}{7} = \frac{P}{Q}$, also $A = \frac{20\,(7+47)}{3\,(1+7)}$

$$\text{und } \frac{M'\,(M+P)}{N+Q} = \frac{20\,.\,54}{8} = 135.$$

Ist $N + Q = a\,.\,b$ und $M' = nN + m = aL$, wenn $a$ den grössten gemeinschaftlichen Faktor zwischen $N + Q$ und $M'$ bedeutet, so entsteht, wenn man $n = \frac{aL - m}{N'}$ substituirt:

$$A = \frac{[(aL - m)(N + Q) + (m + p)\,N']\;aL}{abN'^2}$$

$$= \frac{[aL\,(N + Q) \pm 2]\;L}{bN'^2} = \frac{a^2 bL^2 \pm 2L}{bN'^2}$$

Da $b$ Faktor des ersten Summanden ist und in $L$ nicht enthalten sein soll, denn sonst ginge $N + Q$ in $M'$ auf, so kann $b$ nur $= 2$ sein und dann wird:

$$A = \frac{a^2L^2 \pm L}{N'^2} = \frac{M'^2 \pm L}{N'^2}$$

$$M'^2 - AN'^2 = \mp L.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $L$ nicht $= 1$ sein kann, dass also $M' > N + Q$ sein muss, denn unmöglich können die Werthe $M'$ und $N'$ der Gleichung $M'^2 - AN'^2 = \mp 1$ Genüge leisten.

Aus $N + Q = 2a$ und $Q - N = \varkappa N$ folgt

$$\varkappa^2 N'^2 = 4a^2 - 4NQ \text{ und } N'^2\,(A - \varkappa^2) = (M'^2 - 4a^2) + 4NQ \pm L$$

$$= 4al + l^2 + 4NQ \pm 2 \pm \frac{l}{a},$$

wenn man $M' = 2a + l$ und $L = \frac{M'}{a} = 2 + \frac{l}{a}$ setzt.

III. Geht $N + Q$ ganz in $M'$ auf, z. B.

$\sqrt{91} = 9$; 1, 1, 5, (1); Näherungswerthe: 9, 10, $\frac{19}{2}$, $\frac{105}{11}$, $\frac{124}{13}$,

also $\frac{105}{2 + 13} = 7$, dann ist $b = 1$, $N + Q = a$, $\varkappa^2 N'^2 = a^2 - 4NQ$ und

$$N'^2\,(A - \varkappa^2) = (M'^2 - a^2) + 4NQ \pm 2L = a^2\,(L + 1)(L - 1) + 4NQ \pm 2L.$$

In allen Fällen ist $A - \varkappa^2$ positiv, also $\varkappa^2 < A$, mithin $\varkappa < \sqrt{A}$, d. h. $\varkappa \leqq n$.

## §. 14.

Aus $M = N + Q$ (§. 13. I.), d. i. $nN' + m' = \varkappa N' + 2N$, folgt: $(n - \varkappa)\,N' = 2N - m'$, also für $\varkappa = n$: $2N = m'$.

Sollte nun der dem $\varkappa$ unmittelbar vorangehende Theilnenner $= 1$ sein, so müsste $N' = N + N^0$, und da $N' > m'$, auch $N + N^0 > m'$, also um so mehr $2N > m'$ sein, was nicht angeht. Für $\varkappa = n - 1$ folgt: $N' = 2N - m'$. Wäre nun der dem $\varkappa$ vorangehende Theilnenner $v$, so müsste $N' = vN + N^0 = 2N - m'$ sein, was nur für $v = 1$ möglich ist. Wir haben also folgenden Satz gewonnen:

D e r d e m $\varkappa$ v o r a n g e h e n d e (also auch der unmittelbar folgende) T h e i l n e n n e r k a n n f ü r $\varkappa = n$ n i c h t $= 1$ s e i n, f ü r $\varkappa = n - 1$ d a g e g e n m u s s e r $= 1$ s e i n.

## §. 15.

Bezeichnet man in dem Kettenbruche

$$\sqrt{A} = n;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \ldots \mu,\ (\varkappa,\ \varkappa)$$

die 3 letzten auf einander folgenden Näherungswerthe der ersten Hälfte der ersten Periode mit $\frac{M^0}{N^0}, \frac{M}{N}, \frac{M'}{N'}$, und behält sonst die Bezeichnung des §. 5. bei, so ist nach dem dort Bemerkten

$$\frac{1}{\varkappa + \text{in inf.}} = \frac{(n+\sqrt{A})\,N+m}{(n+\sqrt{A})\,N'+m'} = L,$$

folglich

$$\varkappa + L = \frac{(\varkappa N' + N)(n+\sqrt{A}) + (\varkappa M' + M)}{(n+\sqrt{A})\,N' + M'} = L'$$

und

$$\sqrt{A} = \frac{L'M + M^0}{L'N + N^0}$$

Nun ist $M^0 = M' - \varkappa M$, $N^0 = N' - \varkappa N$, also, wenn man für $L'$, $M^0$, $N^0$ die Werthe substituirt:

$$\sqrt{A} = \frac{M^2 + M'^2 + (MN + M'N')\sqrt{A}}{(MN + M'N') + (N^2 + N'^2)\sqrt{A}}$$

Multiplicirt man mit dem Nenner, so sind die irrationalen Theile identisch, die rationalen geben:

$$A = \frac{M^2 + M'^2}{N^2 + N'^2}$$

Da weder die Zähler, noch die Nenner von zwei auf einander folgenden Näherungswerthen einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so können weder $M$ und $M'$, noch $N$ und $N'$ zugleich gerade sein, auch können, da $A$ eine ganze Zahl ist, $N$ und $N'$ nicht zugleich ungerade sein, wenn das eine $M$ gerade, das andere ungerade ist. Es entsteht also nur noch die Frage, ob zugleich beide $M$ und beide $N$ ungerade sein können. In diesem Falle könnte $\varkappa$ nur gerade sein, denn ein ungerades müsste Zähler und Nenner des folgenden Näherungswerthes gerade machen. Das gerade $\varkappa$ aber giebt Zähler und Nenner des folgenden Bruches ungerade und ebenso müsste, wenn $M$, $M'$, $N$, $N'$ ungerade werden sollten, der vorhergehende Theilnenner gerade, $M^0$ und $N^0$ aber ungerade u. s. f. alle vorhergehenden Quotienten bis zum ersten gerade, Zähler und Nenner der Näherungswerthe ungerade sein. Der erste Quotient $\alpha$ müsste also als solcher gerade, als Nenner $N'$ ungerade sein. Auch sind die Zähler der beiden ersten Näherungswerthe $\frac{n}{1}$, $n + \frac{1}{\alpha} = \frac{n\alpha + 1}{\alpha}$, wäre $\alpha$ ungerade, $n \left\{ \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix} \right\}$, $n\alpha + 1 \left\{ \begin{matrix} \text{ungerade} \\ \text{gerade} \end{matrix} \right\}$. Die beiden $M$ und die beiden $N$ können also auch nicht zugleich ungerade sein. Von den Nennern $N$ und $N'$ ist also stets der eine gerade, der andere ungerade, folglich $N^2 + N'^2$ immer ungerade und für ein gerades $A$ $M^2 + M'^2$ gerade, d. h. beide $M$ ungerade, für ein ungerades $A$ das eine $M$ gerade, das andere ungerade.

Daraus, dass das eine $N$ gerade, das andere ungerade sein muss, folgt auch, was schon §. 4. 2) gefunden wurde, dass die beiden mittelsten Quotienten, wenn die Periode gleich mit ihnen beginnt, nur gerade sein können.

## §. 16.

Setzt man in $A = \frac{M^2 + M'^2}{N^2 + N'^2}$ für $M$ und $M'$ die Werthe $nN + m$ und $nN' + m'$, so erhält man:

$$\frac{(A-n^2)(N^2 + N'^2) - (m^2 + m'^2)}{2} = n(mN + m'N')$$

Ist I. $A-n^2$ gerade, so muss $m^2 + m'^2$ gerade sein, und da $N'^2 + N^2$ ungerade (von der Form $4m + 1$) ist, so müssen $m$ und $m'$ beide ungerade sein, oder $m^2 + m'^2$ von der Form $4t + 2$. Sind nun

1) $A$ und $n$ gerade, so muss, damit auch links eine gerade Zahl herauskommt, $\frac{A-n^2}{2}$ ungerade sein, oder $A-n^2$ von der Form $4t + 2$, d. h. $A = 4t + 2$, $n = 2l$.

2) Sind $A$ und $n$ ungerade, dann muss $\frac{A-n^2}{2}$ gerade sein, also von der Form $4t$, d. h $A = 4t + 1$, $n = 2l + 1$.

Ist II. $A-n^2$ ungerade, dann muss $m^2 + m'^2$ ungerade sein, also das eine $m$ gerade, das andere ungerade, $m^2 + m'^2$ von der Form $4t + 1$ und $mN + m'N'$ gerade. Ist nun:

1) $A$ gerade, $n$ ungerade, so muss der Zähler ein Vierfaches sein, mithin $A-n^2 = 4t + 1$ und $A = 4t + 2$, $n = 2l + 1$.

2) Wenn $A$ ungerade, $n$ gerade ist, muss wieder $A-n^2$ von der Form $4t + 1$ sein, also $A = 4t + 1$, $n = 2l$.

Die geraden $A$ sind also von der Form $4t + 2$, die ungeraden von der $4t + 1$.

## §. 17.

Heisst der vorletzte Näherungswerth der ersten Periode, also bis $\frac{1}{\alpha}$ incl., $\frac{x}{y}$, dann sind $x$ und $y$ die kleinsten Wurzeln der Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$ in ganzen Zahlen, wenn der der $\sqrt{A}$ entsprechende Kettenbruch in der Mitte zwei gleiche Theilnenner hat. Es ist dann nach voriger Bezeichnung:

$$\frac{x}{y} = \frac{\left(\varkappa + \frac{N}{N'}\right) M + M^0}{\left(\varkappa + \frac{N}{N'}\right) N + N^0}$$

und für $M^0$ und $N^0$ die Werthe $M' - \varkappa M$ und $N' - \varkappa N$ gesetzt:

$$\frac{x}{y} = \frac{MN + M'N'}{N^2 + N'^2} \text{ *)}$$

also $x = MN + M'N'$, $y = N^2 + N'^2$.

*) Auch diese Formel giebt Tenner a. a. O. ohne Ableitung.

## §. 18.

Da $= n + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cdot \cdot + \cfrac{1}{\mu}}} = n;\ \alpha,\ \beta \ldots \mu = \frac{M}{N}$ und $n;\ \alpha,\ \beta, \ldots \varkappa = \frac{M'}{N'}$,

so ist $0;\ \varkappa,\ \mu \ldots n = \frac{M}{M'}$, folglich, wenn der Näherungswerth bis $\frac{1}{n}$, d. i. bis ans Ende der ersten Periode, mit $\frac{x'}{y'}$ bezeichnet wird:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{\left(\varkappa + \frac{M}{M'}\right) M + M^0}{\left(\varkappa + \frac{M}{M'}\right) N + N^0} = \frac{M^2 + M'^2}{MN + M'N'} = \frac{N^2 + N'^2}{MN + M'N'} \cdot A.$$

$$\text{und } \frac{x}{y} \cdot \frac{x'}{y'} = \frac{x'}{y} = A$$

wie schon §. 1. allgemein und §. 12. auch für den Fall gefunden wurde, dass die Periode in der Mitte nur **einen** Theilnenner hat.

Den Näherungswerth $\frac{x''}{y''}$ bis $\frac{1}{2n}$ findet man auch hier wie §. 12. offenbar sogleich aus den beiden $\frac{x}{y}$ und $\frac{x'}{y'}$, nämlich $\frac{x''}{y''} = \frac{nx + x'}{ny + y'}$. Ohne vorher diese Werthe berechnet zu haben, verfährt man auf ähnliche Weise wie vorhin.

$$0;\ \varkappa,\ \mu \ldots 2n = \frac{2nN' + m}{2nN + m'} = L, \text{ also}$$

$$\frac{x''}{y''} = \frac{(\varkappa + L)\, M + M^0}{(\varkappa + L)\, N + N^0}$$

Substituirt man für $L$ obigen Werth und setzt für $M^0$, $N^0$, $m$, $m'$ die resp. Werthe $M' - \varkappa M$, $N' - \varkappa N$, $M - nN$, $M' - nN'$, so erhält man wie oben:

$$\frac{x''}{y''} = \frac{n\,(MN + M'N') + M^2 + M'^2}{n\,(N^2 + N'^2) + (MN + M'N')}$$

---

Es mögen noch von zwei Sätzen Beweise folgen, die mir kürzer und übersichtlicher scheinen, als die gewöhnlichen.

## §. 19.

Die Differenz zwischen dem ganzen Werthe $x$ eines Kettenbruches und einem seiner Näherungswerthe $\frac{M}{N}$ ist, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen $< \frac{1}{N^2}$

Heisst der auf $\frac{M}{N}$ folgende Näherungswerth $\frac{M'}{N'}$, dann ist:

$$\frac{M}{N} = x \pm d$$
$$\frac{M'}{N'} = x \mp d'$$

also $$\frac{M}{N} - \frac{M'}{N'} = \frac{\pm 1}{NN'} = \pm (d + d')$$

folglich $d$, d. i. $\frac{M}{N} - x < \frac{1}{NN'}$ und, da $N < N'$, um so mehr:

$$\frac{M}{N} - x < \frac{1}{N^2}.$$

## §. 20.

Der Näherungswerth $\frac{M}{N}$ kommt dem ganzen Werthe $x$ eines Kettenbruches näher als irgend ein anderer Bruch $\frac{m}{n}$, wenn $n < N$.

Nach §. 19. ist $\frac{M}{N} - \frac{M'}{N'} = \pm \frac{1}{NN'} = \pm (d + d')$

und wenn $\frac{m}{n} = x \pm \delta$, oder $= x \mp \delta$: $\frac{m}{n} - \frac{M'}{N'} = \frac{mN' - nM'}{nN'} = \pm (\delta + d')$

oder $= \mp (\delta - d')$

Offenbar ist aber $mN' - nM' \geqq 1$ und, wegen $n < N$, $nN' < NN'$, also $\frac{mN' - nM'}{nN'} > \frac{1}{NN'}$ folglich, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, $\delta + d'$, so wie $\delta' \gtrless d' > d + d'$, d. h. $\delta > d$.

**J. F. Koenig.**

## Druckfehler.

Es mus heissen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Seite | 1 | Zeile | 10. | mittelsten oder die beiden mittelsten. |
| „ | 3 | „ | 3 v. u. | $(m^2v^2 + 2)$. |
| „ | 3 | „ | 2. | $2mv$. |
| „ | 4 | „ | 5. | $u =$; Z. 11: $n = ap + q$; Z. 13: ganze Zahl. |
| „ | 5 | „ | 1. | §. 3; Z. 7 v. u.: $(c(ab+1)+a)^2$ für $(abc+a+c+a)^2$. |
| „ | — | „ | 6. v. u.: | $(b^2 + (bc+1)^2)^2$. |
| „ | 6 | „ | 3. | $(a^2 + (a^2+1)^2)^2$. |
| „ | 7 | „ | 8. | der; Z. 14: 0; $\alpha, \beta \ldots$ und $\frac{S'}{S}$. |
| „ | 9 | „ | 11 v. u. | $x$. |
| „ | 11 | „ | 9. | 3 . 25. |
| „ | 13 | „ | 1. | $\mp$ *). |
| „ | 15 | „ | 5. | $2M'N'' \mp 1$; Z. 8: folgt; Z. 10: $\mp n$; Z. 11: sind für wird. |

# Das Kneiphöfische Stadt-Gymnasium
## im Schuljahre $18^{58}/_{59}$.

## I. Unterricht.

Da die in den einzelnen Klassen behandelten Gegenstände in den beiden letzten Programmen ausführlich angegeben, in diesem Jahre aber keine wesentlichen Veränderungen im Lektionsplan vorgekommen sind; so verweise ich auf meine früheren Berichte und führe hier nur an, dass wir von der Erlaubniss des Herrn Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, welche dieser auf den Antrag des Königlichen Provincial-Schul-Kollegiums ertheilt hatte, auf den beiden unteren Klassen eine Stunde wöchentlich dem lateinischen Unterrichte abzunehmen und dem deutschen zuzulegen, sofort nach dem Eintreffen der betreffenden Verfügung (13. Juni v. J.) um so lieber Gebrauch gemacht haben, als wir in den Jahresberichten stets das Bedürfniss einer Vermehrung der deutschen Stunden hervorgehoben hatten.

Von den Abiturienten sind im Deutschen und Lateinischen folgende Aufgaben bearbeitet:

Michaelis 1858. Auch die Sinnbilder der Natur enthalten die Mahnung: Glaube, liebe, hoffe!

Pugna Salaminia non Graecis solum summam attulit utilitatem, sed toti Europae maxime fuit salutaris.

Ostern 1859. Dass uns das memento mori und das memento vivere in gleichem Grade verderblich werden könne, wenn sich nicht das eine durch das andere ergänzt.

Num recte P. Scipio apud Livium dixerit, eam fato quodam datam Romanis sortem esse, ut magnis omnibus bellis victi vincerent.

## Tabellarische Uebersicht über die Vertheilung der Lectionen unter die Lehrer.

| Namen der Lehrer. | I. | II. a. | II. b. | III. | IV. | V. | VI. | Summa der wöchentl. Stunden. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Dr. **Skrzeczka**, Director. | 8 Latein<br>3 Griech. | 2 Religion | | | | | | 13 |
| 2. Prof. Dr. **Koenig**, Prorector u. 1ster Oberlehrer. Ordinarius von I. | 4 Mathem.<br>2 Physik. | 4 Mathem.<br>1 Physik<br>2 Franz. | 4 Mathem.<br>1 Physik | | | | | 18 |
| 3. **Witt**, 2ter Oberlehrer. Ordinarius von II. a. | 2 Gesch.<br>1 Geograph | 2 Gesch.<br>1 Geograph. | 2 Gesch.<br>1 Geograph. | 2 Gesch.<br>1 Geograph.<br>2 Deutsch | 1 Gesch. u.<br>2 Geograph. | 2 Geograph. | 2 Geograph. | 21 |
| 4. Dr. **Schwidop**, 3ter Oberlehrer. Ordinarius von II. b. | 3 Griech. | 6 Griech. | 10 Latein | | | | | 19 |
| 5. Dr **Lentz**, 4ter Oberlehrer. Ordinarius von III. | | 8 Latein | | 8 Latein<br>2 Naturbeschreibung | | 2 Naturbeschreibung | 2 Naturbeschreibung | 22 |
| 6. **Cholevius**, Professor. Ordinarius von VI. | 3 Deutsch | 2 Deutsch<br>2 Virgil | 2 Deutsch. | | | | 9 Latein<br>3 Deutsch | 21 |
| 7. **Weyl**, Oberlehrer. Ordinarius von IV. | 2 Franz. | | | 2 Franz.<br>2 Ovid | 6 Griech.<br>2 Deutsch<br>2 Franz. | 3 Franz. | 3 Religion | 22 |
| 8. Dr. **Knobbe**, 7ter ord. Lehrer. Ordinarius von V. | 2 Religion<br>2 Hebr. | 2 Hebräisch. | | 2 Religion<br>3 Mathem. | 2 Religion<br>3 Mathem. | 3 Religion<br>3 Rechnen | 4 Rechnen | 26 |
| 9. **v. Drygalski**, 3ter ord. Lehrer. | | | 6 Griech.<br>2 Franz. | 6 Griech. | 10 Latein | | | 24 |
| 10. **Friedrich**, Schulamts-Candidat. | | | | | | 9 Latein<br>3 Deutsch | | 12 |
| 11. Dr. **Seemann**, | 2 Engl.*) | 2 Engl.*) | | | | | | 4 |
| 12. **Glum**, Zeichen- und Schreiblehrer. | | | | 2 Zeichnen | 2 Zeichnen | 2 Zeichnen<br>3 Schreiben | 2 Zeichnen<br>3 Schreiben | 14 |
| 13. **Pabst**, Musikdirektor. | 1 Singen | | | 1 Singen | 1 Singen | 1 Singen | 2 Singen | 6 |
| | | | | | | | | 222 |

*) Für Schüler, die nicht Hebräisch lernen: Theilnahme freiwillig.

## II. Verordnungen.

### a. Von dem Königl. Provinzial-Schul-Collegio.

1. Vom 25. Mai 1858. In den von den Studirenden der hiesigen Universität gelieferten schriftlichen Arbeiten zeigt sich öfters eine auffällige Vernachlässigung der Handschrift. Die Gymnasien sollen darauf achten, dass die Schüler ihre Arbeiten sauber und deutlich schreiben.

2. Vom 25. Mai. Es wird Bericht erfordert, ob die Freischüler verpflichtet sind, bei dem Vormittagsgottesdienst der Sonn- und Festtage bei der Ausführung der liturgischen Gesänge mitzuwirken. — Der Gesanglehrer soll die Responsorien und Festgesänge der Liturgie periodisch mit sämmtlichen Schülern einüben.

3. Vom 10. Juli. Auf den Antrag des Königl. Provinzial-Schul-Kollegii hat der Herr Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten gestattet, unter gewissen Umständen die Zahl der deutschen Stunden auf Sexta und Quinta um eine zu vermehren, welche dem Lateinischen abzunehmen ist; ferner, dass wo eine Ober- und Unter-Tertia besteht, der Unterricht in der Naturkunde nur auf Unter-Tertia in 2 St. w. ertheilt, auf Ober-Tertia aber dafür dem Französischen und der Geschichte je eine Stunde zugelegt werde.

4. Vom 21. August. Eine in Betreff der Räumlichkeiten des Gymnasii an den Magistrat erlassene Verfügung wird abschriftlich mitgetheilt.

5. Vom 29. October. Es wird Bericht erfordert, ob der Besuch des Konfirmanden-Unterrichts Störungen in der Durchführung des Lektionsplans auf den mittleren Klassen herbeiführt.

6. Vom 15. November. Mittheilung eines Ministerial-Rescripts vom 22. October, in welchem die Mittel besprochen werden, wie der überhand nehmenden Kurzsichtigkeit zu steuern ist.

7. Vom 21. Januar 1859. Es wird mitgetheilt, in welcher Weise die bisherige Ferienordnung der hiesigen Gymnasien vom 8. Juni 1854 durch den Erlass des Herrn Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten vom 6. November v. J. abgeändert ist. (S. Nr. V.)

### b. Vom Magistrat.

1. Vom 28. April 1858. Das Stipendium Lamprechtianum ist dem Primaner Borowski verliehen.

2. Vom 9. März 1859. Die Zahlung der von der Neben-Schul-Kasse im Betrage von 250 Thalern gezahlten persönlichen Zulagen ist vom 1. Januar d. J. auf den Etat des Haupt-Schul-Fonds übernommen.

3. Vom 18. März. Die Vorschläge, welche für die vollständige Vertretung des Oberlehrer Witt gemacht sind, werden genehmigt.

## III. Chronik der Anstalt.

Das erste Semester des Schuljahres 1858/59 währte vom 13. April bis zum 6. October v. J. Das Winterhalbjahr begann am 14. October v. J. und wird mit der öffentlichen Prüfung am 11. und 12. April d. J. schliessen.

Das Geburtsfest Sr. Majestät des Königs feierte das Gymnasium wie gewöhnlich im engern Kreise der Schule. Die Festrede hielt der Prof. Dr. Koenig.

So ungünstig die Verhältnisse auch gewesen sind, unter denen wir in diesem Jahre zu arbeiten hatten; so lässt sich doch der Bericht darüber in wenige Worte zusammenfassen. Die erste Hälfte des Sommersemesters verlief ohne besondere Störung, ausser dass Oberlehrer Witt wegen eines Unwohlseins den Unterricht einige Tage hatte aussetzen müssen. Da seine Gesundheit in der letzten Zeit gekräftigt zu sein schien — glaubte er doch selbst einer Brunnenkur, welcher er sich in den letzten Jahren nicht hatte entziehen können, nicht zu bedürfen — so sahen wir der Zukunft unbesorgt entgegen, zumal da wir von der längeren Ruhe der Sommerferien auch für unsern Kollegen neue Kräftigung hoffen durften. Leider erfüllten sich unsere Hoffnungen nicht. Schon gegen das Ende des August erkrankte Oberlehrer Witt so ernstlich, dass er bis zum Schluss des Sommersemesters ausser Stande war, sein Amt zu verwalten. Mit dem Beginn des Winterhalbjahrs fühlte er sich etwas kräftiger, so dass er täglich 2 Stunden zu geben anfing. Doch hatte er seine Kraft überschätzt: schon nach acht Tagen musste er sich, wenn gleich mit schwerem Herzen, dazu entschliessen, den Unterricht aufzugeben. Zwar hoffte er nach einiger Ruhe wieder eintreten zu können. Doch ich theilte seine Hoffnung nicht, und sorgte, so gut es ging, dafür, dass seine Lektionen von den Kollegen besorgt wurden, die mir dabei mit der grössten Bereitwilligkeit entgegen kamen. Nach den Weihnachtsferien machte er einen neuen Versuch, indem er wenigstens die Geschichtsstunden in den oberen Klassen übernehmen zu können glaubte: für seine übrigen Stunden suchte ich, um meinen Amtsgenossen einige Erleichterung zu gewähren, anderweitig Rath zu schaffen. Den geschichtlichen und geographischen Unterricht auf den drei unteren Klassen übernahm Herr Dr. Wiederhold, das Deutsche auf Tertia (3 St. w.) der bereits an der Schule beschäftigte Schulamts-Kandidat Herr Friedrich, die Geschichte (2 St. w.) auf dieser Klasse der Ordinarius derselben, Oberlehrer Dr. Lentz. So hofften wir für das letzte Viertel des Schuljahres keine neue Störung besorgen zu dürfen, zumal da unser kranker Kollege versicherte, dass der Unterricht ihn nicht besonders anstrenge und auf seine ganze Stimmung belebend wirke. Und fünf Wochen lang zeigte sein Wille sich auch wirklich stärker als die körperliche Kraft: doch schon am 10. Februar fühlte er sich nicht mehr im Stande zu unterrichten. Da sein Zustand sich zu unserem herzlichen Bedauern bis jetzt noch nicht gebessert hat; so habe ich mit Genehmigung der vorgesetzten Behörde für die nächste Zukunft eine vollständige Vertretung eingerichtet. —

Wenn gleich der Gesundheitszustand unserer Schüler befriedigend gewesen ist; so haben wir doch leider den Tod eines derselben zu beklagen gehabt. Am 4. November v. J. starb nämlich an einem Nervenfieber Carl Bandisch aus Uderwangen in einem Alter von $16\frac{1}{4}$ Jahren. Zu Michaelis nach Prima versetzt war er zu den Herbstferien nach Hause gereist, um von dort nicht mehr zu uns zurückzukehren. Durch Reinheit des Herzens und redliches Streben hatte er sich die Liebe seiner Lehrer erworben, die in ihm einen Jüngling zu erziehen hofften, der einst mit heiligem Ernst an der Lösung seiner Lebensaufgabe arbeiten würde. Gott hatte es anders beschlossen!

## IV. Ferienordnung und Ferienbeschäftigung.

Da durch den Erlass des Herrn Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten vom 6. November v. J. die bisherige Ferienordnung vom 8. Juni 1854 in einigen Punkten verändert worden ist; so erscheint es angemessen, die Bestimmungen zusammen zu stellen, welche gegenwärtig über Anfang und Dauer der einzelnen Ferien gelten, zumal da auswärtige Schüler noch immer zu häufig Vorwände zu finden suchen, um sich dieselben wenigstens etwas zu verlängern.

1. Zu Ostern wird die Schule mit der öffentlichen Prüfung abwechselnd Dienstag oder Mittwoch vor dem Feste auf vierzehn Tage geschlossen und das Sommerhalbjahr beginnt am Donnerstage nach dem weissen Sonntage (Quasimodogeniti). Fällt Ostern nach dem 15. April; so beginnen die Ferien 8 Tage früher und dauern bis zum Donnerstage in der Osterwoche.

2. Die Pfingstferien währen fünf Tage, indem die Schule am Freitage vor dem heiligen Abende 4 U. Nachm. geschlossen wird und am Donnerstag nach dem Feste wieder beginnt.

3. Die Sommerferien beginnen mit dem Donnerstage, welcher auf einen der Tage vom 6 bis 12. Juli incl. fällt und dauern vier Wochen.

4. Zu Michaelis wird der Unterricht am ersten Mittwoch des Monats October geschlossen: das Winterhalbjahr beginnt am Donnerstage der nächsten Woche.

5. Die Weihnachtsferien, welche vierzehn Tage währen, beginnen mit den Donnerstage vor dem Feste und schliessen mit dem Mittwoch nach Neujahr. Fällt der heilige Abend auf einen Mittwoch, so wird die Schule schon am Dienstage geschlossen.

Sonst fällt der Unterricht, ausser an den beiden kirchlichen Festen, welche immer auf einen Wochentag fallen, nur noch an dem Krönungstage und dem Geburtstage Sr. Majestät des Königs aus. Ob wegen übergrosser Hitze oder Kälte die Unterrichtsstunden auszusetzen sind, bleibt dem pflichtmässigen Ermessen des Direktors überlassen. Diesem wird es auch zur Pflicht gemacht, mit Strenge darauf zu halten, dass die Schüler nicht vor dem Schluss der Schule zu den Ferien reisen und nach denselben rechtzeitig wieder eintreffen. An die verehrten Eltern unserer Schüler ergeht deshalb die dringende Bitte, auch ihrerseits Alles zu vermeiden, wodurch ihre Kinder veranlasst werden könnten, die Schulordnung in dieser Beziehung zu verletzen.

Endlich macht der Herr Minister auf eine Einrichtung aufmerksam, durch welche an mehreren Lehranstalten die Uebelstände wenigstens zum Theil beseitigt werden, welche insbesondere für die Schüler der untern Klassen aus der langen Dauer der Hauptferien erwachsen. Während derselben bringen nämlich dort solche Schüler, insofern die Eltern es wünschen, täglich einige Stunden im Schullokale zu und werden daselbst von einem oder mehreren Lehrern gegen eine angemessene Vergütung Seitens der betreffenden Eltern bei ihren Ferienarbeiten beaufsichtigt oder anderweitig beschäftigt. In dem Jahresbericht soll jedesmal angegeben werden, wie weit diese Ferienbeschäftigungen in dem Gymnasium Eingang gefunden haben.

## V. Statistische Nachrichten.

### a. Lehrapparat.

Aus den etatsmässigen Mitteln sind für die Bibliothek angeschafft: Fr. von der Hagen, Die Minnesinger 4 Theile in 3 Bänden; Duncker Geschichte des Alterthums 4ter Theil; Fischer Griechische Mythologie und Antiquitäten (nach Grote) 3ter Theil: Toeppen Historisch-komparative Geographie von Preussen; Engelmann bibliotheca scriptorum classicorum; Stephani Thesaurus Gr. L. Vol. I. fasc. 7 u. Vol. VIII. fasc. 6; Jacob und Wilhelm Grimm Deutsches Wörterbuch Bd. 2. Lief. 6. und Bd. 3. Lief. 1. — Von periodischen Schriften sind gehalten: Die Zeitschrift für das Gymnasialwesen von Muetzell; Grunert Archiv für die Mathematik und Physik; Annalen der Physik und Chemie von Poggendorf.

An Geschenken, für welche der Unterzeichnete im Namen der Anstalt den ehrerbietigsten und ergebensten Dank sagt, sind eingegangen:

Durch das Königl. Provinzial-Schul-Kollegium: E. Eichwald Naturhistorische Skizze von Litthauen, Volhynien und Podolien; Ovidii Tristia ed. Vit. Loers (Geschenk des Herrn Verfassers).

Von Herrn B. G. Teubner: Benseler Griechich-Deutsches Schulwörterbuch.

Auch die Schülerbibliothek, die Kartensammlung und das physikalische Kabinet sind angemessen erweitert worden.

### b. Unterstützung armer Schulkinder.

Die Klassen Quinta, Quarta, Tertia und Secunda besitzen zur Unterstützung armer Schüler kleine durch Beiträge einzelner gebildete Klassen. Der Stand derselben ist folgender:

| | Bestand um Ostern 1858. | | | Zugang. | | | Ausgabe. | | | Bestand um Ostern 1859. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quinta: | 21 rtl. | 15 sgr. | — pf | 15 rtl. | 29 sgr. | 6 pf. | 17 rtl. | 1 sgr. | 6 pf. | 20 rtl. | 13 sgr. | pf. |
| Quarta: | 45 „ | 27 „ | 3 „ | 9 „ | 19 „ | 9 „ | 8 „ | — „ | — „ | 47 „ | 16 „ | 10 „ |
| Tertia: | 18 „ | 9 „ | — „ | 13 „ | 14 „ | 6 „ | 19 „ | 8 „ | 6 „ | 12 „ | 15 „ | — „ |
| Sec. A: | 11 „ | 1 „ | 6 „ | 6 „ | 5 „ | — „ | 7 „ | 15 „ | — „ | 9 „ | 21 „ | 6 „ |
| Sec. B: | 31 „ | 8 „ | 2 „ | 14 „ | 21 „ | — „ | 14 „ | 8 „ | 6 „ | 31 „ | 20 „ | 8 „ |

Von dem im vorjährigen Programm erwähnten Geschenke sind in diesem Jahre 9 Thlr. 18 Sgr. als Unterstützung verausgabt.

Eine Reihe von Jahren bezog das Gymnasium aus der Schimmelpfennigschen Familien-Stiftung (vom J. 1673) ein Legat von 20 Thlrn., welches ursprünglich für die Zöglinge des Pauperhauses bestimmt war, womit aber nach der Aufhebung desselben arme Schüler aus dem Kneiphofe mit Büchern unterstützt wurden. Der gegenwärtige Inspektor und Exekutor der genannten Stiftung inhibirte im J. 1856 die weitere Zahlung an das Gymnasium, da dieses nach dem Statut zur Empfangnahme des Legats nicht berechtigt sei. Jetzt ist die Sache dahin entschieden, dass das hiesige städtische Waisenhaus als Rechtsnachfolgerin der früher in den drei Städten bestandenen Pauperhäuser anzusehn und das erwähnte Legat den aus dem Kneiphofe in das städtische Waisenhaus aufgenommenen Waisen zuzuwenden sei.

Mit grossem Danke erwähne ich noch, dass Herr Pfarrer Bandisch mir mehrere Schulbücher zum Geschenk für arme Schüler überwiesen hat.

### c. Schüler.

Am Schlusse des vorigen Schuljahres zählte das Gymnasium 303 Schüler. Nachdem 6 zur Universität, 18 anderweitig abgegangen, dagegen 23 aufgenommen waren, begann das Sommersemester mit 302 Schülern. Und so gross war die Schülerzahl auch am Schluss des Semesters, da während desselben 9 abgegangen, 9 hinzugekommen waren. Das Wintersemester 1858/59 begann mit 304 Schülern, indem 3 zur Universität, 9 anderweitig abgegangen und 14 aufgenommen waren. Im Laufe des Semesters sind 6 abgegangen, 3 hinzugekommen, so dass am Schlusse des Jahres 301 das Gymnasium besuchen und zwar in I. 37; II. A. 32; II. B. 28; III. 66; IV. 54; V. 52; VI. 32. —

In diesem Schuljahre haben zwei Abiturienten-Prüfungen unter dem Vorsitz des Königl. Provinzial-Schulraths, Herrn Dr. Schrader, Statt gefunden. Bei der ersten, am 13. September v. J., haben sich 3 Schüler (Nr. 307—309), bei der zweiten, am 26. März d. J., 10 Primaner (Nr. 310—319) das Zeugniss der Reife erworben.

**Verzeichniss der Primaner, welche bei den beiden oben angeführten Abiturienten-Prüfungen das Zeugniss der Reife erhalten haben.**

| No. | Name. | Geburtsort. | Stand und Wohnort des Vaters. | Lebensalter. Jahr | Aufenthalt i. d. Anstalt überhaupt Jahr | Aufenthalt in Prima Jahr | Gewähltes Fakultäts-Studium. | Universität, welche sie besuchen zu wollen erklärt haben. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 307 | Theodor Clemens | Königsberg. | Partikulier in Königsberg. | $20\frac{1}{4}$ | 12 | 2 | Die Rechte. | die hiesige Universität. |
| 308 | Max Schwartz | Bartenstein. | Kreisgerichts-Direktor in Allenstein. | $17\frac{1}{2}$ | 6 | 2 | Er wollte sich d. Handlung widmen. | keine. |
| 309 | Conrad von Wallenrodt | Popelnen b. Tapiau | Landrath a. D. in Culm. | $19\frac{1}{2}$ | $4\frac{1}{2}$ | 2 | Die Rechte. | |
| 310 | Waldemar Otto Bacher | Lyck. | Rentier in Königsberg. | $18\frac{3}{4}$ | 9 | 2 | Unbestimmt. | |
| 311 | Friedrich Wilhelm Borowski | Königsberg. | Tribunals-Kanzlist (todt). | $19\frac{1}{4}$ | 8 | 2 | Theologie. | |
| 312 | Herm. Gust. Ad. Brausewetter | Pr. Holland. | Assessor a. D. in Königsberg. | 18 | 8 | 2 | Philologie. | |
| 313 | Emil Hermann Gebauer | St. Lorenz, Kreis Fischhausen. | Superintendent in Medenau. | $21\frac{1}{4}$ | 8 | 3 | Die Rechte. | |
| 314 | Heinrich Otto Hirschfeld | Königsberg. | Kaufmann in Königsberg. | 16 | 6 | 2 | Unbestimmt. | die hiesige Universität. |
| 315 | Max Hugo Bertram Humlet | Gerdauen. | Kreis-Physikus (todt). | $17\frac{1}{4}$ | $8\frac{3}{4}$ | $2\frac{1}{2}$ | Medicin. | |
| 316 | Wolfg. Aug. Adalbert Kähler | Marienfelde, Kreis Pr. Holland. | Pfarrer in Marienfelde. | $18\frac{3}{4}$ | 4 | 2 | Theologie. | |
| 317 | Benoit Alexander Oppenheim | Königsberg. | Königl. Belgischer Konsul in Königsberg. | $16\frac{1}{2}$ | 3 | 2 | Die Rechte. | |
| 318 | Oskar Rich. Edwin Reyländer | Hermsdorf b. Zinten | Pfarrer emerit. in Königsb. | $18\frac{1}{2}$ | $7\frac{1}{2}$ | 2 | Theologie. | |
| 319 | Ernst Fried. Wilh. Wichert | Pillau. | Kreisgerichts-Direktor in Königsberg. | $17\frac{3}{4}$ | $8\frac{1}{2}$ | 2 | Mathematik. | |

**Skrzeczka.**