

4260



ROBERT WILSON

ALGEBRA

BY ROBERT WILSON

NEW YORK

1887

ALGEBRA

ALGEBRA

JERZY MIHUŁOWICZ

ALGEBRA

DLA II KLASY GIMNAZJALNEJ

CENA WRAZ ZE ZNACZKIEM
NA TOWARZYSTWO POPIERANIA BUDOWY
PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH
WYNOŚI zł 1,10



KSIĄŻNICA - ATLAS

S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.

LWÓW — WARSZAWA

1934

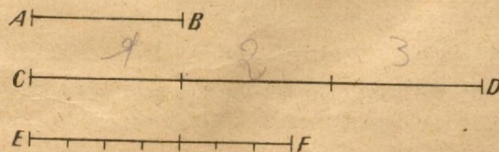
Rozdział I

Liczby względne i działania na nich

§ 1. Liczby bezwzględne.

Liczby, którymi dotąd zajmowaliśmy się nazywamy *liczbami bezwzględными*. W praktyce służą nam te liczby często jako *miary wielkości* takich, jak np. długość, pole, objętość, kąt, ciężar i t. p. Aby wyrazić liczbą pewną wielkość, np. długość odcinka, przyjmujemy pewien odcinek za jednostkę i dochodzimy, ile razy ta jednostka lub jej część mieści się w danym odcinku. Jeżeli mieści się 5 razy, mówimy, że odcinek dany ma 5 jednostek, albo że miarą danego odcinka jest liczba 5 przy przyjętej jednostce długości; jeżeli trzecia część odcinka przyjętego za jednostkę mieści się w danym odcinku 4 razy, mówimy, że odcinek ma $\frac{4}{3}$ jednostki, albo że miarą danego odcinka jest przy przyjętej jednostce długości liczba $\frac{4}{3}$. Podobne znaczenie mają zdania: ciało ma objętość $4\frac{2}{3}$ cm³, srebrna moneta waży 5,5 g i t. p.

Liczby bezwzględne uzmysławiamy sobie często zapomocą odcinków. Przyjmujemy pewien odcinek, np. AB (rys. 1), za jednostkę; odcinek ten przedstawia liczbę 1. Odcinek CD przedstawia liczbę 3, odcinek EF liczbę $\frac{7}{4}$ i t. p.



Rys. 1.

Zwykle zestawiamy odcinki przedstawiające liczby na jednej półprostej OX (rys. 2) tak że wszystkie mają jeden wspólny koniec w początku O półprostej. Liczby 1, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{3}{4}$ i t. d. przedstawione są na rys. 2 odcinkami $O1$, $O\frac{1}{2}$, $O2$, $O\frac{3}{4}$ i t. d. Liczbie 0



M 54 254/1

UP - Kraków BG



1050307199

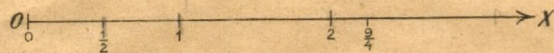
20 BG. UP D. 203-2 2498

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica Atlas we Lwowie.

I.VI.

BIBL WSP
1969-K 150-12

podporządkujemy tak zwany odcinek zerowy OO , którego oba końce schodzą się, czyli punkt O . Ponieważ wszystkie te odcinki mają wspólny koniec O , to każdy z nich jest oznaczony, jeżeli



Rys. 2.

podamy jego drugi koniec. Ten więc drugi koniec podporządkujemy liczbie, którą ten odcinek przedstawia, i będziemy mówić, że liczby bezwzględne są przedstawione punktami półprostej. Półprostą taką, której punkty podporządkowane są w powyższy sposób liczbom, nazywamy *linją (osią) liczbową*.

§ 2. Liczby względne.

Doświadczenie i życie praktyczne dostarczają nam przykładów wielkości, które zmieniać się mogą w dwóch przeciwnych kierunkach.

Np.: Wóz na torze kolejowym, biegnącym od zachodu ku wschodowi, może się przesunąć albo ku wschodowi, albo ku zachodowi; rtęć w termoskopie może się podnosić lub opadać; stan kasy może się powiększać przez wpływy, albo zmniejszać przez wydatki; stan wody w rzece może się podnosić lub opadać i t. p.

Do wyrażenia takich zmian stanów wielkości nie wystarczają liczby bezwzględne.

Jeżeli powiemy, że stan wody w rzece zmienił się o 3 *dcm*, to przez to zmiana stanu wody nie jest jeszcze należyście wyrażona; należy podać, czy w danym przypadku mamy do czynienia z podniesieniem się poziomu wody, czy z obniżeniem się.

Aby w wygodny sposób wyrazić takie zmiany stanu wielkości, umawiamy się przedewszystkiem w każdym szczególnym przypadku, że jeden (dowolnie obrany) kierunek zmiany nazywać będziemy *dodatnim*, a drugi, przeciwny tamtemu, *ujemnym*.

Tak np. umówmy się przy zmianie stanu wody w rzece uważać kierunek pionowy dogóry za dodatni, a kierunek pionowy nadół za ujemny.

Zmianę w kierunku dodatnim lub ujemnym zaznaczamy, kładąc przed liczbą bezwzględną, wyrażającą wielkość zmiany, znak $+$ (plus) lub $-$ (minus) zależnie od tego, czy zmiana odbywa się w kierunku przyjętym za dodatni, czy ujemny.

Tak np. przy zmianach stanu wody w rzece liczby $+5$ *dcm*, -3 *dcm*, $-4,3$ *dcm* oznaczają kolejno według poprzedniej naszej umowy, że poziom wody podniósł się o 5 *dcm*, opadł o 3 *dcm*, opadł o 4,3 *dcm*.

Otrzymujemy w ten sposób dwa zbiory liczb:

$$+1; +\frac{3}{4}; +6,7; +2; +5; \dots$$

$$-1; -\frac{3}{4}; -6,7; -2; -6; \dots$$

które służyć mogą do wyrażania zmian stanów wielkości, mogących się zmieniać w dwóch przeciwnych kierunkach. 0 piszemy zwykle bez znaku, bo $+0$ i -0 oznacza to samo, mianowicie brak zmiany. Liczby ze znakiem $+$ nazywamy *liczbami dodatnimi*; liczby ze znakiem $-$ nazywamy *liczbami ujemnymi*. Liczby dodatnie i ujemne nazywamy *liczbami względnymi*. W każdej liczbie względnej rozróżnić należy *znak* i *wartość bezwzględną*. Liczba $+3$ ma wartość bezwzględną 3, a znak $+$; liczba $-7,2$ ma wartość bezwzględną 7,2, a znak $-$. Chcąc zaznaczyć, że mamy na myśli tylko wartość bezwzględną pewnej liczby, piszemy tę liczbę między dwiema kreskami pionowymi.

$$\text{Np.: } |-3| = 3, \quad |+5| = 5, \quad |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}.$$

Dwie liczby względne uważamy za równe wtedy i tylko wtedy, jeżeli mają jednakowe znaki i jednakowe wartości bezwzględne. Jeżeli chociażby jeden z tych warunków nie jest spełniony, mówimy, że liczby są nierówne.

$$\text{Np.: } +3 = +3; \quad -4,5 = -4,5; \quad -7 \neq +7; \quad -2 \neq -3.$$

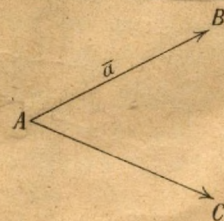
Wyjątek stanowi: $+0 = -0$.

To określenie liczb równych i nierównych jest zgodne z ich znaczeniem praktycznym. Wszak musimy uważać np. spadek temperatury o 7° i wzrost temperatury o 7° za zmiany różne; podobnie za różne uważać musimy dochód 5 zł i wydatek 5 zł. Natomiast dochód 0 zł i wydatek 0 zł nie zmieniają stanu kasy; należy więc je uważać za zmiany równe.

§ 3. Odcinki kierunkowe.

Liczby względne przedstawiać będziemy zapomocą odcinków kierunkowych, umieszczonych na osi.

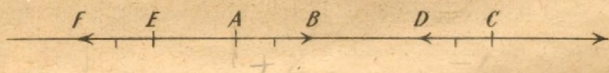
Przez *odcinek kierunkowy* czyli *wektor* rozumiemy odcinek, który oprócz długości ma także pewien ściśle określony kierunek. Odcinek taki, np. AB w rys. 3 kreślić będziemy w ten sposób, że



Rys. 3.

zaopatrzymy go strzałką, która wskazuje kierunek odcinka. Odcinek $\overline{AC}$, jakkolwiek równy co do długości odcinkowi $\overline{AB}$, uważamy za różny od $\overline{AB}$, bo ma inny kierunek. Oznaczamy odcinek kierunkowy symbolem $\vec{a}$ lub $\overline{AB}$, przyczem przy ostatnim sposobie oznaczania porządek liter A i B nie jest dowolny: Litera napisana na pierwszym miejscu, a więc litera A , oznacza początek, a litera napisana na drugim miejscu, a więc litera B , koniec odcinka kierunkowego. $\overline{BA}$ oznaczałoby odcinek, mający początek w B , a koniec w A ; w rysunku należałoby strzałkę przy B opuścić, a dodać strzałkę przy A . Jeżeli w tekście oznaczamy odcinki kierunkowe dwiema literami, staje się zbędnym umieszczanie w rysunku strzałek, sam bowiem porządek liter wskazuje już kierunek odcinka. Będziemy więc często strzałkę, wskazującą kierunek odcinka, opuszczać.

Przez oś rozumiemy prostą, na której pewien kierunek obrany jest jako dodatni; kierunek przeciwny temu kierunkowi nazywamy ujemnym. Kierunek dodatni zaznaczamy na osi strzałką (rys. 4).



Rys. 4.

Umieścimy na osi w rys. 4 odcinki kierunkowe $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$; długość każdego z tych odcinków wynosi $2j$ (dwie jednostki). Kierunek odcinka $\overline{AB}$ jest zgodny z kierunkiem dodatnim osi; przypisujemy tedy odcinkowi $\overline{AB}$ znak dodatni. Podobnie przypiszemy odcinkowi $\overline{CD}$ znak ujemny, gdyż kierunek tego odcinka zgodny jest z kierunkiem ujemnym osi. Napiszemy: $\overline{AB} = +2j$, $\overline{CD} = -2j$. Odcinki kierunkowe umieszczone na osi nazywamy równymi wtedy i wtedy tylko, jeżeli mają równe długości i jednakowe znaki; gdy chociażby jeden z tych warunków nie jest spełniony, uważamy odcinki za nierówne. Tak np.: $\overline{EF} = \overline{CD}$, $\overline{AB} \neq \overline{CD}$. Nieistotną jest przeto rzeczą, w którym punkcie osi początek odcinka kierunkowego umieścimy; wyrażamy to, mówiąc, że odcinek kierunkowy na osi wolno dowolnie przesuwać.

Takimi odcinkami kierunkowymi na osi przedstawiać będziemy zmiany wielkości, mogących się zmieniać w dwóch przeciwnych kierunkach, jak np.: przesunięcia wozu na torze kolejowym, zmiany stanu poziomu wody w rzece, zmiany stanu kasy i t. p. a także liczby względne. Długość odcinka kierunkowego, mierzona w przyjętych jednostkach, przedstawia wartość bezwzględną

liczby, kierunek dodatni lub ujemny odcinka, znak $+$ lub $-$ liczby względnej. Np.: W rys. 4 przedstawia liczbę $+2$ odcinek $\overline{AB}$, liczbę -2 odcinek $\overline{CD}$ lub $\overline{EF}$. Liczbę 0 przedstawiać będziemy na osi odcinkiem zerowym.

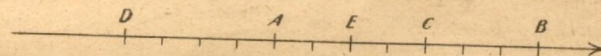
§ 4. Dodawanie liczb względnych.

Przykład 1. Jeżeli zmiany stanu kasy w ciągu dnia wynosiły kolejno: $+60$ zł, -20 zł, -120 zł, $+160$ zł, to zmianę stanu kasy w ciągu całego dnia nazwiemy sumą owych czterech zmian. Łatwo obliczyć, iż wynosi ona $+80$ zł. Napiszemy:

$$(+60) + (-20) + (-120) + (+160) = +80.$$

Liczby względne, będące składnikami sumy, piszemy w nawiasach, aby nie mieszać znaku liczby ze znakiem dodawania.

Przykład 2. Jeżeli wóz na torze kolejowym doznał kolejno po sobie następujących przesunięć: $\overline{AB} = +7$ m, $\overline{BC} = -3$ m, $\overline{CD} = -8$ m, $\overline{DE} = +6$ m, to z rys. 5, na którym te przesunięcia przed-



Rys. 5.

stawione są zapomocą wektorów, zauważymy, że skutek tych czterech przesunięć jest taki, jakgdyby wóz doznał jednego przesunięcia $\overline{AE} = +2$ m. To przesunięcie wypadkowe $\overline{AE}$ nazywamy sumą przesunięć $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$, a liczbę $+2$ sumą liczb: $+7$, -3 , -8 i $+6$. Napiszemy:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE};$$

$$(+7) + (-3) + (-8) + (+6) = +2.$$

Opierając się na ostatnim przykładzie, określamy dodawanie wektorów umieszczonych na osi w następujący sposób:

Mając do jednego wektora umieszczonego na osi dodać drugi, zestawiamy je na osi tak, aby początek drugiego wektora padł na koniec pierwszego; wektor, którego początek znajduje się w początku pierwszego wektora, a koniec w końcu drugiego, nazywamy sumą obu danych wektorów (składników).

Dodawanie liczb względnych określimy tak, aby sumie wektorów odpowiadała suma liczb względnych, odpowiadających wektorom-składnikom.

Rys. 6 przedstawia sumę wektorów $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Wyrażając te wektory zapomocą odpowiadających im liczb względnych, otrzymamy:

Jeżeli $\overline{AB} = +5$, $\overline{BC} = +3$ (rys. 6 a), to $\overline{AC} = +8$; zatem:

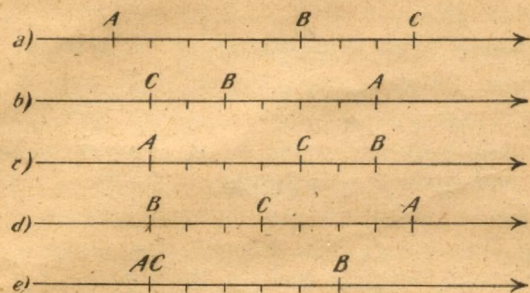
$$(+5) + (+3) = +8.$$

Jeżeli $\overline{AB} = -4$, $\overline{BC} = -2$ (rys. 6 b), to $\overline{AC} = -6$; zatem:

$$(-4) + (-2) = -6.$$

Jeżeli $\overline{AB} = +6$, $\overline{BC} = -2$ (rys. 6 c), to $\overline{AC} = +4$; zatem:
 $(+6) + (-2) = +4$.

Jeżeli $\overline{AB} = -7$, $\overline{BC} = +3$ (rys. 6 d), to $\overline{AC} = -4$; zatem:
 $(-7) + (+3) = -4$.



Rys. 6.

Jeżeli $\overline{AB} = +5$, $\overline{BC} = -5$ (rys. 6 e), to $\overline{AC} = 0$; zatem:
 $(+5) + (-5) = 0$.

Na podstawie tych przykładów określamy:

Liczby względne o jednakowych znakach dodajemy, dodając ich wartości bezwzględne, a wynikowi dając znak wspólny obu liczb. Liczby względne o różnych znakach dodajemy, odejmując ich wartości bezwzględne (mniejszą od większej), a wynikowi dając znak liczby bezwzględnie większej. Gdy dodamy dwie liczby względne o jednakowych wartościach bezwzględnych, a różnych znakach, otrzymamy 0 (mówimy, że te liczby znoszą się). Z tego powodu nazywamy takie dwie liczby liczbami przeciwnymi. Jeżeli jednym z dwóch składników jest zero, to suma równa się drugiemu składnikowi.

Według powyższego określenia można *z a w s z e* dodać dwie dowolnie dane liczby względne; na wynik otrzymamy zawsze ściśle określoną liczbę względną. W tem znaczeniu mówimy, że dodawanie jest w zakresie liczb względnych *zawsze wykonalne*. Dodawanie liczb względnych jest nadto działaniem *jednoznaczne*. Znaczy to, że ilekroć dodamy te same liczby lub liczby równe danym, otrzymamy taki sam wynik. Tę własność dodawania wyrażamy krótko tak:

Jeżeli do równych liczb dodamy równe, otrzymamy równe sumy.

Z określenia dodawania wynika też bezpośrednio, że wartość sumy dwu liczb nie zmienia się, jeżeli składniki przestawimy.

§ 5. Odejmowanie liczb względnych.

Odjęć od jednej liczby (odjemnej) drugą (odjemnik) znaczy znaleźć taką trzecią liczbę (różnicę), która dodana do odjemnika daje odjemną.

Taką samą definicję przyjmujemy dla odejmowania wektorów umieszczonych na osi.

Aby znaleźć praktyczny sposób odejmowania liczb względnych, zajmiemy się najpierw odejmowaniem wektorów.

W rys. 6 na str. 8 jest we wszystkich pięciu przykładach: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. Według określenia odejmowania jest więc: $\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AB}$. Lecz taki sam wektor $\overline{AB}$ otrzymamy, jeżeli do wektora $\overline{AC}$ (odjemnej), dodamy wektor $\overline{CB}$ (przeciwny odjemnikowi $\overline{BC}$). Jest bowiem: $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$.

Zatem: $\overline{AC} - \overline{BC} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$. Znajdujemy więc:

Odejmowanie wektora można zastąpić dodawaniem wektora przeciwnego.

To twierdzenie prowadzi natychmiast do następującej reguły odejmowania liczb względnych:

Odejmowanie liczby względnej zastąpić można dodawaniem liczby przeciwnej.

Np.: $(-7) - (+3) = (-7) + (-3) = -10$. I rzeczywiście -10 jest różnicą liczb -7 i $+3$, ponieważ $(-10) + (+3) = -7$. Podobnie:

$(+4) - (+6) = (+4) + (-6) = -2$,	ponieważ $(-2) + (+6) = +4$.
$(-3) - (-5) = (-3) + (+5) = +2$,	ponieważ $(+2) + (-5) = -3$.
$(+2) - (-4) = (+2) + (+4) = +6$,	ponieważ $(+6) + (-4) = +2$.
$0 - (-2) = 0 + (+2) = +2$,	ponieważ $(+2) + (-2) = 0$.
$(-3) - 0 = -3$,	ponieważ $(-3) + 0 = -3$.
$(-3) - (-3) = (-3) + (+3) = 0$,	ponieważ $0 + (-3) = -3$.

Z ostatniego twierdzenia wynika, że odejmowanie liczb względnych jest działaniem *zawsze wykonalne*. Pod tym względem zachodzi istotna różnica między odejmowaniem liczb względnych a odejmowaniem liczb bezwzględnych; to ostatnie jest bowiem, jak wiemy, wykonalne tylko wtedy, gdy odjemnik nie jest większy od odjemnej.

Odejmowanie liczb względnych jest też działaniem *jednoznaczne*:

Jeżeli od równych liczb odejmiemy równe, otrzymamy równe różnice.

I rzeczywiście otrzymamy zawsze: $(-7) - (+2) = -9$, bo tylko (-9) dodane do $(+2)$ daje (-7) . Gdybyśmy zamiast -9 dodali do

+2 inną liczbę, nie otrzymalibyśmy sumy -7 . Sprawdź, przyjmując zamiast -9 liczby: $-10, -11, -8, +5$ i t. p.

Z określenia odejmowania wynika bezpośrednio twierdzenie:
Jeżeli do różnicy dodamy odjemnik, otrzymamy odjemną.

Z szczególnych wypadków odejmowania zapamiętać należy:

Liczba nie zmienia się, gdy od niej odejmiemy zero.

Różnica równych liczb równa się zero.

—X—

§ 6. Suma algebraiczna.

Przykład. Wykonać działanie:

$$[(-4) + (-2)] - [(+5) - (-3)].$$

Stosownie do znanego znaczenia nawiasów, należy najpierw wykonać działania w nawiasach graniastych, a potem pozostałe działanie. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} & [(-4) + (-2)] - [(+5) - (-3)] = \\ & = [(-4) + (-2)] - [(+5) + (+3)] = \\ & = (-6) - (+8) = (-6) + (-8) = -14. \end{aligned}$$

W tym przykładzie rozróżnić należy dwa rodzaje znaków i dwa rodzaje nawiasów. Niektóre znaki $+$ i $-$ są znakami działań (wskaż je w powyższym przykładzie), inne są znakami liczb (wskaż je). Podobnie służą niektóre nawiasy (graniaste) do naznaczania porządku działań, inne (okrągłe) należą do sposobu pisania liczb względnych, zaznaczając wyraźnie, który znak należy do której liczby.

Aby uniknąć niewygodnego sposobu pisania dwojakich znaków i ogromnej ilości nawiasów, zgodzono się przy naznaczaniu dodawania liczb względnych opuszczać znaki dodawania i nawiasy, a liczby względne pisać obok siebie z ich znakami. Tak więc zamiast $(+5) + (-2) + (+4)$ pisać będziemy krótko: $+5 - 2 + 4$, a nadto umówimy się opuszczać przy pierwszej liczbie, o ile jest ona liczbą dodatnią, znak $+$. Powyższą sumę zapiszemy więc tak: $5 - 2 + 4$. Podobnie zamiast $(-5) + (-3) + (+7)$ napiszemy: $-5 - 3 + 7$. Naodwrot: $-8 + 3 - 2$ oznacza $(-8) + (+3) + (-2)$; $6 + 2 - 7$ oznacza $(+6) + (+2) + (-7)$.

Przyjmujemy następującą umowę:

Dodawanie liczb względnych naznaczamy, pisząc te liczby obok siebie z ich znakami.

Ponieważ odejmowanie liczby względnej można zastąpić dodawaniem liczby przeciwnej, to:

Odejmowanie liczb względnych naznaczamy, pisząc obok niezmienionej odjemnej odjemnik ze znakiem przeciwnym.

Naznaczoną według tej umowy sumę liczb względnych (a więc np. $3 - 2, 4 - 7\frac{1}{2} + 5$) nazywamy *sumą algebraiczną*.

Np.: $(-1\frac{1}{2}) - (-2) + (-1) - (+\frac{1}{2}) = -1\frac{1}{2} + 2 - 1 - \frac{1}{2}$.

Naznaczone w sumie algebraicznej dodawanie liczb względnych można

wykonać, wskutek czego suma algebraiczna *redukuje się* do jednej liczby:
 $-1\frac{1}{2} + 2 - 1 - \frac{1}{2} = -1\frac{1}{2}$.

Wykonywanie dodawań liczb względnych naznaczonych w sumie algebraicznej nazywamy *redukowaniem*.

Przerobimy jeszcze raz przykład podany na początku, posługując się nową pisownią:

$$[(-4) + (-2)] - [(+5) - (-3)] = [-4 - 2] - [5 + 3] = -6 - 8 = -14.$$

§ 7. Oś liczbowa. Porównywanie liczb względnych.

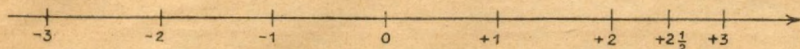
Wbiwszy słup w koryto rzeki, możemy obserwować na nim wznoszenie się i opadanie wody w czasie powodzi. Te wznoszenia się i opadania poziomu wyrażamy liczbami względnymi. Liczby te nie podają nam jednak, jaki był stan wody w pewnej chwili, wyrażają tylko, czy poziom wody podniósł się w porównaniu z poprzednim stanem, czy obniżył. Aby móc stany poziomu wody w różnych czasach wygodnie ze sobą porównywać, należy przyjąć pewien stan wody za zasadniczy czyli, jak mówimy, za normalny i notować zapomocą liczb względnych odchylenia od owego stanu. Owemu normalnemu stanowi podporządkujemy na podziałce, umieszczonej na słupie, liczbę 0. Zamiast podawać zmiany stanu wody, porównując stan wody w pewnej chwili ze stanem wody np. z dnia poprzedniego, podajemy zmiany stanu wody w odniesieniu do owego stanu, przyjętego za normalny. Jeżeli powiemy, że stan wody w pewnej chwili wynosi $+27$ cm, lub -15 cm, to zaznaczamy przez to, że stan poziomu wody jest wyższy o 27 cm lub niższy o 15 cm od stanu, przyjętego za normalny. Podkreślić należy, że jest rzeczą zależną zupełnie od nas, któremu stanowi podporządkujemy liczbę 0, który więc uznamy za normalny. Gdybyśmy przyjęli inny stan wody za normalny, otrzymalibyśmy na oznaczenie tych samych stanów inne liczby względne. Liczby względne charakteryzują nam różne stany wody tylko w odniesieniu do pewnego stanu, przyjętego za normalny; zero nie oznacza tu (jak przy liczbach bezwzględnych) braku jednostek, lecz pewien stan, przyjęty dowolnie (ale raz na zawsze przy wszystkich pomiarach) za normalny.

Wyjaśnij podobnie, jak można wyrazić w liczbach względnych: położenie pociągu na torze kolejowym, temperaturę, wzniesienie pionowe różnych miejscowości, stan majątkowy, datę (u nas, u starożytnych Rzymian, u Arabów) i t. p. Powiemy:

Liczby względne służyć mogą nie tylko do wyrażania zmian wielkości, lecz także do oznaczania stanów wielkości, mogących się zmieniać w dwóch przeciwnych kierunkach, jeżeli pewien stan przyjmujemy za normalny i podporządkujemy mu liczbę 0.

Wiemy, że liczby względne można przedstawiać zapomocą wektorów na osi i że wektory na osi można przesuwac. Wykreślmy tedy oś (rys. 7) i na niej wektory, odpowiadające liczbom: $+1, +2, +2\frac{1}{2}, +3, -1, -2$ i t. d. tak, aby wszystkie te wektory miały wspólny początek w dowolnie wybranym punkcie na osi. Punkt ten (wspólny początek wszystkich wekto-

rów) oznaczmy cyfrą 0, a koniec każdego wektora tą liczbą, którą ten wektor przedstawia. Otrzymamy wektory: $0(+1)$, $0(+2)$, $0(-2)$, ... odpowiadające kolejno liczbom: $+1$, $+2$, -2 ... Ponieważ wszystkie te



Rys. 7.

wektory mają wspólny początek, to każdy z nich jest określony, gdy podamy jego koniec. Podporządkujemy koniec każdego wektora tej liczbie, którą wektor przedstawia. Wtedy każdej liczbie względnej odpowiadać będzie ściśle oznaczony punkt na osi. Oś taką, której punkty podporządkowane są w powyższy sposób liczbom względnym, nazywamy *linią (osią) liczbową*.

Ustaliliśmy tedy między liczbami względnymi a punktami linii liczbowej pewną odpowiedniość, polegającą na tem, że każdej liczbie względnej odpowiada ściśle oznaczony punkt na linii liczbowej. Lecz punkty linii liczbowej są w pewien sposób uporządkowane: każdy punkt leży albo na prawo (t. j. w kierunku przyjętym za dodatni), albo na lewo od drugiego. Otóż korzystając z tego, określimy porównywanie liczb względnych, umawiając się, że za *większą* z dwu danych nierównych liczb względnych uważać będziemy tę, której odpowiada na linii liczbowej punkt, leżący na prawo od punktu, odpowiadającego drugiej liczbie; tę drugą liczbę, której odpowiada punkt, leżący na lewo od punktu, odpowiadającego pierwszej liczbie, nazywać będziemy *mniejszą* od pierwszej. Stosownie do tego wprowadzamy następujące określenia:

Każda liczba dodatnia jest większa od zera i od każdej liczby ujemnej; każda liczba ujemna jest mniejsza od zera i od każdej liczby dodatniej.

Z dwu liczb dodatnich ta jest większa, która ma większą wartość bezwzględną; z dwu liczb ujemnych ta jest większa, która ma mniejszą wartość bezwzględną.

Np.: $-2 < +1$, $+3 > 0$, $-4 < 0$, $+5 > +3$, $-5 < -2$.

Przyjęte powyżej określenie liczby większej i liczby mniejszej zgadza się w wielu przypadkach z przyjętym powszechnie sposobem mówienia. Tak np. jeżeli liczby względne oznaczają stan majątkowy (dodatnie — majątek, ujemne — dług), to powiemy, że więcej ma ten, co ma 6 zł majątku od tego, co nie ma nic, lub od tego, co ma 7 zł długu, zgodnie z nierównościami: $+6 > 0$ i $+6 > -7$. Czasami jednak znaki $>$ i $<$ nie odpowiadają związkowi, które w codziennym życiu określamy wyrazami: większe i mniejsze. Jeżeli np. liczby względne oznaczają odległości pociągu od stacji (dodatnie na wschód, ujemne na zachód), to nierówność $+3 \text{ km} > -5 \text{ km}$ należy tak rozumieć, że pociąg oddalony od stacji

o $+3 \text{ km}$ znajduje się na wschód od pociągu oddalonego od stacji o -5 km . Jeżeli liczby -100 i $+40$ oznaczają daty dwóch zdarzeń historycznych, to nierówność $-100 < +40$ znaczy, że pierwsze zdarzenie jest wcześniejsze od drugiego i t. p.

§ 8. Zastosowania dodawania i odejmowania liczb względnych.

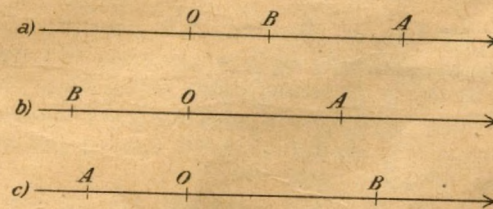
Jeżeli chodzi o zastosowanie dodawania i odejmowania liczb względnych w zagadnieniach praktycznych, należy pamiętać, że działania te mają inne znaczenie, niż dodawanie i odejmowanie liczb bezwzględnych. Aby zdać sobie sprawę, czy w danym zagadnieniu należy zastosować dodawanie, czy odejmowanie, przedstawiamy liczby względne zapomocą wektorów na osi. Jeżeli początek drugiego wektora leży w końcu pierwszego wektora, a chodzi o znalezienie odległości końca drugiego wektora od początku pierwszego, mamy do czynienia z dodawaniem (§ 4).

Przykład 1. Pociąg I jest oddalony od stacji A o $+7 \text{ km}$, a pociąg II jest oddalony od pociągu I o -18 km . Jaka jest odległość pociągu II od stacji A?

Pierwszą odległość przedstawia wektor $\overline{AI}$, drugą $\overline{II}$; chodzi o znalezienie wektora $\overline{AII}$. Łatwo zauważyć, że ten ostatni jest sumą dwóch poprzednich; zatem: $(+7) + (-18) = 7 - 18 = -11$.

Odległość pociągu II od stacji A wynosi -11 km .

Aby wyjaśnić znaczenie różnicy liczb względnych, przedstawmy te liczby na osi liczbowej zapomocą wektorów. Niechaj odjemną przedstawia wektor $\overline{OA}$ (rys. 8 a, b lub c), odjemnik wektor $\overline{OB}$; punkt O odpowiada liczbie 0. Wtedy:



Rys. 8.

$$\begin{aligned}\overline{OA} - \overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{BO} \quad (\text{według tw. o zastępowaniu odejmowania dodawaniem}); \\ &= \overline{BO} + \overline{OA} \quad (\text{według prawa przemienności}); \\ &= \overline{BA} \quad (\text{według definicji dodawania wektorów}).\end{aligned}$$

Ze wzoru $\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$ odczytujemy, że różnicą dwóch wektorów, mających wspólny początek, jest wektor, podający odległość końca wektora-odjemnej od końca wektora-odjemnika. Zatem:

Jeżeli w zadaniu chodzi o znalezienie odległości końców dwóch wektorów, mających wspólny początek, należy zastosować odejmowanie.

Przykład 2. O ile m wyżej leży Warszawa, położona $+110 m$ względem poziomu morza, od morza Martwego, położonego $-394 m$ względem poziomu morza?

Przedstawiając wektorami odległości obu miejscowości od poziomu morza (przyjętego za 0), zauważymy, że chodzi tu o odległość końców wektorów, mających wspólny początek. Zadanie rozwiążemy zapomocą odejmowania:

$$(+110) - (-394) = 110 + 394 = +504.$$

Warszawa leży o $504 m$ wyżej (znak $+$ wyniku) od morza Martwego.

§ 9. Mnożenie liczb względnych.

Przykład 1.* Pewien kupiec prowadził z dwiema firmami A i B rachunki w dolarach. Firma A była winna kupcowi 300 dolarów, a firmie B był winien kupiec 150 dolarów. Ile złotych zyskał lub stracił kupiec na każdej z tych kwot, gdy wartość dolara $a)$ wzrosła o $0,3$ zł? $b)$ spadła o $0,4$ zł?

Rozwiążmy zadanie najpierw w liczbach bezwzględnych:

$a)$ Gdy wartość każdego dolara wzrosła o $0,3$ zł, to wartość 300 dolarów wzrosła o $300 \cdot 0,3$ zł $= 90$ zł, co stanowiło zysk kupca; wartość 150 dolarów wzrosła o $150 \cdot 0,3$ zł $= 45$ zł, co stanowiło stratę dla kupca, bo o tyle wzrósł jego dług.

$b)$ Gdy wartość dolara spadła o $0,4$ zł, to wartość 300 dolarów, które firma A winna była kupcowi, zmniejszyła się o $300 \cdot 0,4$ zł $= 120$ zł; stanowiło to stratę dla kupca. Wartość 150 dolarów zmniejszyła się o $150 \cdot 0,4$ zł $= 60$ zł, co stanowiło zysk kupca, bo o tyle mniej był winien firmie B .

Mnożenie liczb względnych określimy tak, aby to samo zadanie dało się rozwiązać zapomocą mnożenia liczb względnych. Wierzytelności kupca uważamy przytem za liczby dodatnie, długi za ujemne; przyrost wartości dolara wyrażamy liczbą dodatnią, spadek wartości liczbą ujemną; zysk kupca przedstawimy liczbą dodatnią, stratę liczbą ujemną. Aby wyniki były zgodne z rzeczywistością, musi być:

$$\begin{aligned} (+300) \cdot (+0,3) &= +90, & (+300) \cdot (-0,4) &= -120, \\ (-150) \cdot (+0,3) &= -45, & (-150) \cdot (-0,4) &= +60. \end{aligned}$$

Zgodnie z tem określamy:

Liczbę względną mnożymy, mnożąc ich wartości bezwzględne, a wynikowi dając znak $+$, jeżeli oba czynniki mają jednakowe znaki, a znak $-$, jeżeli mają znaki różne.

Liczbę którą mnożymy, nazywamy *czynnikiem*, wynik mnożenia nazywamy *iloczynem*.

* Przykład zaczerpnięty z rozprawki A. M. Rusieckiego.

Stosownie do powyższego określenia:

$$\begin{aligned} (+5) \cdot (+2) &= +10; & (-\frac{3}{4}) \cdot (+6) &= -4\frac{1}{2}; & (-3) \cdot (-7) &= +21; \\ (+\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{5}{7}) &= -\frac{10}{21}; & (+5) \cdot (+1) &= +5; & (-4) \cdot (+1) &= -4; \\ (+3) \cdot (-1) &= -3; & (-1) \cdot (-7) &= +7; & (-3) \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Z powyższego określenia mnożenia wynika, że mnożenie liczb względnych jest działaniem zawsze wykonalnym i jednoznacz-
nem, t. j.

Jeżeli równe liczby pomnożymy przez równe, otrzymamy równe iloczyny.

Również bezpośrednio z określenia mnożenia wynika, że wartość iloczynu dwu liczb nie zależy od porządku czynników; różniczenie mnożnej i mnożnika staje się zbędnem.

Z szczególnych przypadków mnożenia zapamiętajmy:

Liczba nie zmienia się, gdy ją przez $+1$ pomnożymy.

Jeżeli liczbę jakąś pomnożymy przez -1 , otrzymamy liczbę przeciwną danej liczbie.

Iloczyn jest zerem wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z czynników jest zerem.

Praktyczne zastosowanie mnożenia liczb względnych wyjaśnimy jeszcze na jednym przykładzie:

Przykład 2. Przy torze kolejowym biegnącym od zachodu ku wschodowi leży stacja A . Kierunek toru ku wschodowi uważamy za dodatni, ku zachodowi za ujemny. Odległości od A liczyć będziemy ku wschodowi dodatnio, ku zachodowi ujemnie. Podobnie wyrażać będziemy liczbą dodatnią prędkość (ilość m przebywanych w 1 min.) pociągu jadącego od zachodu ku wschodowi, a ujemną, prędkość w kierunku przeciwnym. Czas (ilość minut) po godz. 12-tej liczyć będziemy dodatnio, przed godz. 12-tą ujemnie. Rozwiążmy następujące zadania:

O godz. 12-tej przejeżdża przez A pociąg z prędkością $a)$ $+500 m/min$. $b)$ $-500 m/min$. Jak daleko od A jest ten pociąg: 1) 4 min. po godz. 12-tej? 2) 4 min. przed godz. 12-tą?

Stosując mnożenie liczb względnych, znajdziemy:

$$\begin{aligned} 1 a) & (+500) \cdot (+4) = +2000; & 1 b) & (-500) \cdot (+4) = -2000; \\ 2 a) & (+500) \cdot (-4) = -2000; & 2 b) & (-500) \cdot (-4) = +2000. \end{aligned}$$

Stwierdź przy pomocy stosownego rysunku zgodność otrzymanych wyników z rzeczywistością.

§ 10. Dzielenie liczb względnych.

Podzielić jedną liczbę (dzielną) przez drugą (dzielnik) znaczy znaleźć taką trzecią liczbę (iloraz), która pomnożona przez drugą daje pierwszą.

Stosownie do tego określenia:

$$(+5) : (+3) = +\frac{5}{3}, \text{ bo tylko } (+\frac{5}{3}) \cdot (+3) = +5;$$

$$\begin{aligned} (+5) : (-3) &= -\frac{5}{3}, \text{ bo tylko } (-\frac{5}{3}) \cdot (-3) = +5; \\ (-5) : (+3) &= -\frac{5}{3}, \text{ bo tylko } (-\frac{5}{3}) \cdot (+3) = -5; \\ (-5) : (-3) &= +\frac{5}{3}, \text{ bo tylko } (+\frac{5}{3}) \cdot (-3) = -5. \end{aligned}$$

Z tych przykładów wysnuwamy regułę:

Liczby względne dzielimy, dzieląc ich wartości bezwzględne, a wynikowi dając znak +, jeżeli dzielna i dzielnik mają jednokowe znaki, a znak —, jeżeli dzielna i dzielnik mają znaki różne.

Dzielenie jest działaniem jednoznaczne:

Jeżeli równe liczby podzielimy przez równe, otrzymamy równe ilorazy.

Z przykładów:

$$\begin{aligned} (+7) : (+7) &= +1; & (-6) : (-6) &= +1; & (+5) : (-1) &= -5; \\ (-5) : (-1) &= +5; & (+4) : (-4) &= -1; & (-4) : (+4) &= -1; \\ (+3) : (+1) &= +3; & (-3) : (+1) &= -3; & 0 : (-2) &= 0. \end{aligned}$$

wysnuwamy:

Iloraz równych liczb wynosi +1; iloraz liczb przeciwnych równa się —1.

Liczba nie zmienia się, gdy ją przez +1 podzielimy; liczba zmienia się na przeciwną, gdy ją podzielimy przez —1.

0 podzielone przez każdą liczbę różną od zera daje na iloraz 0.

Próbujemy wykonać dzielenia: $(+4) : 0$ i $(-4) : 0$. Chodzi o znalezienie takiej liczby, która mnożona przez 0 daje na iloczyn +4 lub —4. Lecząc takiej liczby nie ma, bo każda liczba mnożona przez 0 daje na iloczyn 0, a nigdy +4 czy —4.

Nawet i dzielenie $0 : 0$ jest nieokreślone. Szukając liczby, która mnożona przez 0 daje na iloczyn 0, zauważymy, że każdą liczbę można uważać za iloraz dzielenia $0 : 0$. Ale właśnie wskutek tego działanie $0 : 0$ uważać musimy za nieoznaczone.

Dzielenie jest działaniem zawsze wykonalne, o ile dzielnik jest różny od zera. Dzielenie przez 0 jest niewykonalne; dzielenie przez 0 nie wolno.

§ 11. Liczby względne a liczby bezwzględne.

Porównajmy rys. 2 na str. 4 z rys. 7 na str. 12; zauważymy, że pierwszy z nich otrzymamy, gdy w drugim odrzucimy półprostą, na której przedstawione są liczby ujemne. Oś liczb dodatnich nie różni się niczym od osi liczb bezwzględnych.

Zwróćmy uwagę na następujące zestawienie:

$$\begin{array}{ll} 0 < 3 < 7, & 0 < +3 < +7; \\ 5 + 3 = 8, & (+5) + (+3) = +8; \\ 15 - 9 = 6, & (+15) - (+9) = +6; \\ 8 \cdot 7 = 56, & (+8) \cdot (+7) = +56; \\ 18 : 6 = 3, & (+18) : (+6) = +3. \end{array}$$

Przykłady te wskazują, że wyniki działań na liczbach bezwzględnych są takie same, jak wyniki działań na liczbach dodatnich o takich samych wartościach bezwzględnych, jeśli w tych wynikach znak + opuścimy.

Te spostrzeżenia pozwalają nam uważać liczby bezwzględne za identyczne z liczbami dodatnimi. Wszelkie rachunki wykonywać będziemy odtąd w zakresie liczb względnych; liczby bezwzględne stanowiąc będą szczególny przypadek liczb względnych: będą identyczne z liczbami dodatnimi.

§ 12. Wyrażenia algebraiczne.

Literami $a, b, c, \dots m, n, \dots x, y, \dots$ oznaczać będziemy dowolne liczby względne. Liczby wyrażone cyframi nazywamy liczbami szczególnymi. Działania na symbolach literowych, jak wiemy, nie można zawsze wykonywać tak, jak je wykonywamy na liczbach szczególnych, gdzie wynik przedstawia się jedną liczbą, różną w ogólności od liczb, na których działania wykonaliśmy. Działania na symbolach literowych nazywamy zazwyczaj tylko. I tak:

1. Liczby, które dodajemy, łączymy znakiem +. Np.: $a + b$.
2. Liczby, które odejmujemy, łączymy znakiem —. Np.: $a - b$.
3. Liczby, które mnożymy, łączymy znakiem $\cdot$ (rzadziej $\times$), albo piszemy obok siebie bez znaku. Np.: $a \cdot b = a \times b = ab$.
4. Liczby, które dzielimy, łączymy znakiem : lub naznaczamy dzielenie w postaci ułamka. Np.: $a : b = \frac{a}{b}$.

Symbole $a + b, a - b, ab, a : b$ oznaczają naznaczone działania, a zarazem wyniki tych działań, a więc kolejno: sumę, różnicę, iloczyn, iloraz.

Gdy mamy naznaczyć kilka działań, należy oprócz samych działań naznaczyć także porządek, w jakim te działania mają być wykonane. Przypominamy umowy, dotyczące naznaczania porządku działań:

1. Naznaczone a) dodawania i odejmowania lub b) same mnożenia wykonywamy w takim porządku, w jakim są naznaczone od strony lewej ku prawej.

Np.: $a + b - c + d$ oznacza, że do a należy dodać b , od otrzymanej sumy odjąć c , a do otrzymanej różnicy dodać d .

abc oznacza, że a należy pomnożyć przez b , a otrzymany iloczyn przez c .

2. Jeżeli naznaczone są dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia, wykonywamy najpierw mnożenia i dzielenia, a potem

dodawania i odejmowania otrzymanych iloczynów i ilorazów według umowy 1.

Np.: $a + bc$ oznacza, że najpierw należy wykonać mnożenie bc , a potem otrzymany iloczyn dodać do a .

3. Jeżeli porządek działań ma być inny, niż wynika z umów 1 i 2, używamy do naznaczania tego porządku *nawiasów*. Nawiasy oznaczają, że działania wewnątrz nich naznaczone mają być wykonane najpierw; dopiero gdy działania w nawiasach zostały wykonane, należy wykonać pozostałe działania według umowy 1 lub 2. Jeżeli w wyrażeniu znajduje się kilka par nawiasów, jedne wewnątrz drugich, wykonać należy najpierw działania w nawiasie wewnętrznym. Gdy te zostały wykonane, należy wykonać znów działania w nawiasie wewnętrznym i t. d.

Np.: $a + (b + c)d$ oznacza, że najpierw należy do b dodać c (umowa 3), następnie otrzymaną sumę pomnożyć przez d (umowa 2), a dopiero ten iloczyn dodać do a (umowa 1).

$a \cdot \{b - [c + d(e - f)] + g\}$ oznacza, że najpierw należy obliczyć różnicę $e - f$; następnie należy przez tę różnicę pomnożyć d , a otrzymany iloczyn dodać do c . Otrzymaną sumę należy odjąć od b , a do znalezionej różnicy dodać g . Przez tę sumę należy wreszcie pomnożyć a .

Gdy chcemy naznaczyć kilka dzieleni lub kilka mnożeń i dzieleni, należy używać nawiasów lub naznaczać dzielenia przy pomocy kreski ułamkowej. Należy tedy unikać pisania: $18 : 6 : 3$ lub $18 : 6 \cdot 2$. W pierwszym przykładzie należy pisać $(18 : 6) : 3$ lub $18 : (6 : 3)$, co nie jest to samo (stwierdź rachunkiem); wyrażenie $18 : 6 : 3$ oznacza natomiast stosunek trzech liczb. W drugim przykładzie należy pisać $(18 : 6) \cdot 2$ lub $18 : (6 \cdot 2)$, co również nie jest to samo (stwierdź rachunkiem). Ilozyni jednak, w którym znak mnożenia opuszczono, należy traktować jak ujęty w nawias. Zatem: $a : bc = a : (bc)$.

Do naznaczania dzielenia używamy najchętniej kreski ułamkowej. Kreska ułamkowa nie tylko naznacza dzielenie, lecz zastępuje ujęcie w nawias dzielnej, dzielnika i ilorazu.

Np.: $\frac{a+b}{a-b} \cdot c$ znaczy to samo, co $[(a+b) : (a-b)] \cdot c$.

Jeżeli mamy naznaczyć kilka dzieleni, używamy chętnie i kreski ułamkowej i znaku dzielenia.

Np.: $c : \frac{a+b}{a-b}$ znaczy: $c : [(a+b) : (a-b)]$.

Kilka liczb szczególnych i symboli literowych, albo samych liczb szczególnych lub samych symboli literowych, połączone znakami działań tworzy *wyrażenie algebraiczne*, lub krótko *wyrażenie*. Jeżeli w wyrażeniu zamiast liter napiszemy pewne wartości szczególne i wykonamy naznaczone działania, otrzymam

pewną liczbę, którą nazywamy *wartością danego wyrażenia dla przyjętych wartości liter*.

Np.: Wyrażenie $(ab+c) : d$ przyjmuje dla $a = -\frac{5}{4}$, $b = +12$, $c = -6$, $d = +7$, wartość -3 , ponieważ $[(-\frac{5}{4}) \cdot 12 + (-6)] : (+7) = [-15 - 6] : (+7) = (-21) : (+7) = -3$.

Dwa wyrażenia nazywamy *równymi* i łączymy znakiem równości, jeżeli dla wszelkich wartości liter (albo przynajmniej dla wszelkich wartości liter z pewnego ściśle oznaczonego zakresu) mają równe wartości. Dwa równe wyrażenia połączone znakiem $=$ tworzą *równość*. Wyrażenie napisane przed znakiem $=$ nazywa się *lewą stroną* równości; wyrażenie napisane po znaku $=$ nazywa się *prawą stroną* równości.

Np.: $a + b : c = (ac + b) : c$, ($c \neq 0$).

Oba wyrażenia połączone znakiem równości mają równe wartości dla wszelkich wartości liter (stwierdź, podstawiając za a , b i c dowolne liczby) z wyjątkiem $c = 0$. Zaznaczono to powyżej w postaci $c \neq 0$.

Jeżeli dane wyrażenie zastępujemy wyrażeniem równym, to mówimy, że dane wyrażenie *przekształcamy*. Przy przekształcaniu wyrażeń opieramy się na własnościach działań. Te własności działań można wyrazić w krótkiej i przejrzystej postaci przy pomocy symboli literowych.

Np.: Równość: $a + b = b + a$ wyraża, że wartość sumy dwu liczb nie zmienia się, jeżeli jej składniki przestawimy.

Zadaniem naszym w najbliższym rozdziale będzie zestawienie zasadniczych własności działań na liczbach względnych.

Ćwiczenia.

1. a) Przyjąwszy dowolny odcinek za jednostkę, wykreśl odcinki, których miarami są liczby: 3 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $1,3$; $2\frac{1}{3}$.
- b) Przedstawić na linii liczbowej liczby: 2 ; $3\frac{1}{2}$; 0 ; $\frac{1}{3}$; $1,5$.
2. a) Podaj kilka przykładów wielkości, mogących się zmieniać w dwóch przeciwnych kierunkach. Podaj kilka takich zmian i przedstaw je odcinkami kierunkowymi i liczbami względnymi.
- b) Przedstaw zapomocą odcinków kierunkowych liczby: $+1$; -1 ; $+2$; -3 ; $-0,5$; $+1\frac{1}{2}$; $-2,6$; 0 ; $-6,2$; $+0,8$.
- a) Oblicz: $|-0,3|$, $|+26,7|$, $|\frac{1}{2}|$, $|+0,5|$, $|0|$, $|-6\frac{3}{4}|$.
- b) Oblicz: $|-5| + |-2| + |+4| - |-3,6| - |+2,4| = ?$
- c) Oblicz: $|+2\frac{3}{4}| - |-0,5| + |+2,7| - |+1\frac{1}{2}| + |-2| = ?$

4. Mając dane wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ (rys. 9), wykreśl sumy: $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} + \bar{c}$, $\bar{a} + \bar{d}$, $\bar{c} + \bar{a}$, $\bar{c} + \bar{d}$, $\bar{d} + \bar{a}$, $\bar{d} + \bar{b}$.



Rys. 9.

5. Temperatura wody w kotle doznała następujących dwu kolejnych zmian: a) Podniosła się o 3° , potem podniosła się o 5° . b) Opadła o 2° , potem opadła o 5° . c) Podniosła się o 13° , potem opadła o 8° . d) Podniosła się o 6° , potem opadła o 10° . e) Opadła o 6° , potem podniosła się o 8° . f) Opadła o 5° , potem podniosła się o 8° . g) Podniosła się o 7° , potem opadła o 7° . h) Opadła o 5° , potem podniosła się o 5° .

Przedstawiając te zmiany zapomocą wektorów, odpowiedz, jaka była ostateczna zmiana pierwotnej temperatury. Wyraż to zapomocą liczb względnych.

6. Ułóż i rozwiąż podobne zagadnienia jak w zad. 5, biorąc pod uwagę: a) zmiany stanu wody w rzece; b) zmiany kursu dolara na giełdzie; c) zmiany prędkości ruchu pociągu; d) wzbijanie się i opadanie aeroplanu; e) zmiany długości szyny wskutek zmian temperatury.

7. Wykonać następujące działania tak według definicji dodawania, jako też przedstawiając liczby względne zapomocą wektorów:

$$\begin{aligned} a) & (+3) + (+2) + (-4) + (-5) = ? \\ b) & (-5) + (-3) + (+8) + (-2) = ? \\ c) & (-2) + (+2) + (-1) + (-3) = ? \\ d) & (+4) + (-7) + (+5) + (-1) = ? \end{aligned}$$

8. Wykonać dodawania:

$$\begin{aligned} a) & (+3) + (+4) = ? & (+7) + (-3) = ? \\ & (-6) + (-2) = ? & (+2) + (-7) = ? \\ & (-5) + (+3) = ? & (-5) + (+5) = ? \\ b) & (-2,3) + (+3) = ? & (-5) + (-6,4) = ? \\ & (+2) + (-3,1) = ? & (-6,4) + (+5,9) = ? \\ & (+0,7) + (-1) = ? & 0 + (6,7) = ? \\ c) & (-\frac{3}{8}) + (-\frac{5}{8}) = ? & (+\frac{3}{4}) + (-\frac{5}{8}) = ? & (+\frac{3}{8}) + (+\frac{3}{10}) = ? \\ & (-\frac{5}{12}) + (+\frac{5}{18}) = ? & (+\frac{5}{8}) + (-1) = ? & (-2\frac{1}{3}) + (+1\frac{2}{3}) = ? \\ d) & (+5) + (-8) + (-4) + (+7) + (-3) + (-8) + (+10) = ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) & (+3,4) + (+2) + (9,6) + (-15,4) + (-0,7) + (5,4) + (+6) = ? \\ f) & (-\frac{3}{8}) + (-\frac{5}{8}) + (+\frac{1}{2}) + (-\frac{3}{4}) + (+\frac{1}{6}) + (-\frac{1}{4}) = ? \\ g) & (+247) + (-384) + (-129) + (+210) + (+107) = ? \\ h) & (-5\frac{5}{8}) + (-7\frac{2}{9}) + (+6\frac{2}{3}) + (+4\frac{1}{3}) + (-1\frac{1}{2}) = ? \\ i) & (+0,88) + (-1,2) + (-0,15) + (+0,96) + (-0,07) = ? \\ j) & (-0,8) + (+\frac{3}{4}) + (+\frac{1}{15}) + (-1\frac{2}{3}) + (+3\frac{2}{3}) = ? \end{aligned}$$

9. Dodawaj szybko w pamięci do a) $+5$, b) -7 kolejno każdą z następujących liczb:

$$+3, -2, -7, +15, -8, -2, -5, +7, -10, +10.$$

[Rachuj: $(+5) + (+3) = ?$, $(+5) + (-2) = ?$ i t. d.]

10. Mając dane wektory $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ i $\bar{d}$ (rys. 9 na str. 20), wykreśl: $\bar{a} - \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{d}$, $\bar{c} - \bar{b}$, $\bar{d} - \bar{a}$, $\bar{c} - \bar{d}$, $\bar{d} - \bar{c}$.

11. Wykonać działania:

$$\begin{aligned} a) & (+7) - (+3) = ? & (+3) - (+8) = ? & (-3) - (+5) = ? \\ & (-4) - (-3) = ? & (-2) - (-7) = ? & (+2) - (-6) = ? \\ b) & (+3) - (+3) = ? & (+3) - (-3) = ? & (-4) - (+4) = ? \\ & (-4) - (-4) = ? & 0 - (+7) = ? & 0 - (-7) = ? \\ & (-5) - 0 = ? \\ c) & (-0,2) - (-0,5) = ? & (+37) - (+41,5) = ? \\ & (+\frac{3}{4}) - (-\frac{5}{8}) = ? & (-4\frac{3}{4}) - (+1,2) = ? \\ & (+0,3) - (+\frac{2}{10}) = ? & (-3,65) - (-3,8) = ? \\ d) & (-2) + (+5) - (+7) - (-6) + (-2) - (+3) - (-9) = ? \\ e) & (-2,5) + (+1,6) - (-1,2) - (+3,4) + (-0,2) - (-2) = ? \\ f) & (+\frac{5}{12}) + (-\frac{5}{8}) - (+\frac{5}{6}) - (-\frac{3}{4}) + (+\frac{1}{2}) - (+\frac{1}{3}) = ? \\ g) & (-2\frac{2}{9}) + (+2,2) - (-1\frac{4}{15}) - (+1,05) - (-\frac{5}{6}) + (-1\frac{1}{4}) = ? \\ h) & (+245) - (-55) + (-400) - (-100) + (120) - (+30) = ? \\ i) & (-3,5) - (+2,5) + (+7) - (+1) - (-3) + (-5) = ? \\ j) & (-3,6) - (-2,4) + (-3,5) - (-4,2) - (+2,5) + (+3) = ? \end{aligned}$$

12. Wykonaj na odcinkach $\bar{a} = +2,4$ cm, $\bar{b} = -3$ cm, $\bar{c} = -1,8$ cm, $\bar{d} = +3,6$ cm następujące działania:

$$\begin{aligned} a) & \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}; & b) & \bar{a} - \bar{b} + \bar{c} - \bar{d}; & c) & \bar{a} - \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}; \\ d) & (\bar{a} + \bar{b}) - (\bar{c} - \bar{d}); & e) & \bar{a} - (\bar{b} + \bar{c}) + \bar{d}; & f) & (\bar{b} + \bar{c}) - (\bar{d} - \bar{a}). \end{aligned}$$

Sprawdź wyniki rachunkiem.

13. Napisać w postaci sum algebraicznych (według umowy w § 6) podane niżej wyrażenia, a następnie zredukować:

$$\begin{aligned} a) & (+5) + (-3) + (+5) + (-7) = ? \\ b) & (-3) + (-8) + (-2) + (-3) = ? \\ c) & (-3) - (+4) - (+7) = ? \\ d) & (+5) - (-4) - (-3) = ? \end{aligned}$$

- e) $(+2)+(-3)-(+5)-(-4)+(+7)-(+2)-(-5)=?$
 f) $(-1,2)+(+2,7)-(-3,5)-(+2)+(-3,4)-(+6,4)=?$
 g) $(+2)-(-3)+(+4)-(+5)+(-7)-(-1)+(-9)=?$
14. Odczytać, jakie działania naznaczone są w następujących przykładach i wykonać je w porządku naznaczonym przez nawiasy:
- a) $[(+3)+(-2)] + [(-5)+(-7)]=?$
 b) $[(+4)+(-2)] - [(-3)-(-8)]=?$
 c) $[(-2)-(+2)] - [(+5)-(-3)]=?$
 d) $[(-3)-(+5)] - [(+1)-(-2)] - [(-4)+(+6)]=?$
 e) $(-3) + \{[(+2)+(+4)] - [(-3)+(-8)]\}=?$
 f) $(-3) - \{[(-5)-(-2)] - [(-4)-(+2)]\}=?$
 g) $[(-7)+(-1)] - \{[(-2)+(+5)] - [(-7)-(+4)]\}=?$
 h) $\{(-3) - [(-7)-(-4)]\} - \{(+5) - [(+1)-(+7)]\}=?$
 i) $\{(-\frac{5}{8}) - [(-\frac{3}{8}) + (-\frac{1}{16})]\} + \{(-\frac{1}{16}) + [(-\frac{3}{16}) - (-\frac{1}{16})]\}=?$
 j) $\{[(-6,4)+(-2,6)] - [(+5,3)-(+2,3)]\} - \{[(-8,5)+(-1,5)] - [(-4,6)-(-2,6)]\}=?$
15. Przedstawić na osi liczbowej liczby:
 $-2; +7; -3; -\frac{1}{2}; 0; +1,5; +2; -2\frac{1}{2}$.
16. Uporządkować według wielkości liczby:
 a) $-3; +4; 0; +2; -6; -2; +1;$
 b) $-8; +7; -1; 0; -7; +1; -3; +3;$
 c) $-\frac{3}{4}; +\frac{5}{8}; -1\frac{3}{8}; -1,6; +1,5; 0; -\frac{2}{3};$
 d) $+1,4; -2,5; -\frac{5}{8}; -\frac{5}{4}; +1\frac{7}{8}; -2\frac{1}{8}; 0.$
17. Jakie znaczenie może mieć dodatnia, a jakie ujemna wartość liczby, oznaczające: a) temperaturę, b) stan majątkowy c) odległość pociągu od stacji, d) czas liczony od godz. 0 e) długość geograficzną pewnej miejscowości, f) szerokość geograficzną, g) wzniesienie miejscowości ponad poziom morza, h) prędkość, i) stan wody w rzece, j) datę.
18. Na osi dany jest punkt O , oraz takie punkty A i B , że:
 a) $\overline{OA}=+7,5; \overline{OB}=+4,8;$ b) $\overline{OA}=+3,6; \overline{OB}=+4,5$
 c) $\overline{OA}=-6,2; \overline{OB}=-3,6;$ d) $\overline{OA}=-2,8; \overline{OB}=-4,2$
 e) $\overline{OA}=-3,2; \overline{OB}=+4,2;$ f) $\overline{OA}=+5,2; \overline{OB}=-1,4$
 g) $\overline{OA}=-2,6; \overline{OB}=0;$ h) $\overline{OA}=-3,5; \overline{OB}=0;$
 i) $\overline{OA}=0; \overline{OB}=+3,4;$ j) $\overline{OA}=0; \overline{OB}=-5,6.$
- Znaleźć rysunkiem i rachunkiem różnicę $\overline{OA} - \overline{OB}$ i podać jej znaczenie. Jakie położenie ma A względem B zależnie o znaku tej różnicy?
19. W pewnej chwili pociąg I jest oddalony od stacji A o km :
 a) $+2,4$; b) $+3,5$; c) $+9,5$; d) $-2,3$; e) $-4,2$; f) $-8,4$.
 Odległość zaś pociągu II od pociągu I (t. j. I II) wynosi km :
 a) $+8,8$; b) $-6,5$; c) $-6,5$; d) $-5,4$; e) $+9,4$; f) $+3,4$.
 Jaka jest odległość pociągu II od A (t. j. A II)?
20. Statek porusza się po prostej biegnącej od brzegu z prędkością w m/sec .:
 a) $+1,8$; b) $+1,8$; c) $-1,8$; d) $-1,8$; e) $+1$; f) -1 ; g) -1 ;
 a podróżny porusza się po tej samej prostej po pokładzie statku z prędkością w m/sec .:
 a) $+1,2$; b) $-1,2$; c) $+1,2$; d) $-1,2$; e) $-1,2$; f) $+1,2$; g) $+1$.
 Z jaką prędkością oddala się podróżny od brzegu, lub zbliża do brzegu?
21. W pewnej chwili odległość jednego pociągu od stacji wynosi w km :
 a) $+4,5$; b) $+7,4$; c) $-5,6$; d) $-4,8$; e) $-6,2$;
 a drugiego:
 a) $+12$; b) $-4,6$; c) $+2,7$; d) -10 ; e) $-6,2$.
 Jaka jest odległość drugiego pociągu od pierwszego? Co oznacza znak wyniku?
22. a) Następujące miejscowości, leżące na jednym południku, mają szerokości geograficzne: Gdańsk $+54^{\circ} 21'$, Capetown $-33^{\circ} 56'$, biegun połudn. -90° . Ile stopni ma łuk południka między Gdańskiem a Capetown, między Gdańskiem a biegunem, między Capetown a biegunem?
 b) Nowy-Jork, Madryt, Neapol i Konstantynopol leżą niemal na jednym równoleżniku. Madryt leży pod $3^{\circ} 41'$ długości geogr. wschodniej, Nowy-Jork leży $70^{\circ} 17'$ na zachód, Neapol $17^{\circ} 57'$ na wschód, Konstantynopol $32^{\circ} 10'$ na wschód od Madrytu. Jaka jest długość geogr. każdej z tych miejscowości? Ile stopni ma łuk równoleżnika między Nowym-Jorkiem a Konstantynopolem?
23. a) Państwo rzymskie było według podania królestwem od r. 753 przed Chr. do r. 510 przed Chr., następnie republiką do r. 31 przed Chr., a wreszcie cesarstwem do r. 476 po Chr. Jak długo istniało państwo rzymskie? Ile lat było królestwem? republiką? cesarstwem?
 b) Cesarz rzymski August urodził się 63 r. przed Chr. i żył lat 77. W którym roku umarł?

24. Wykonać działania:

- a) $(+4)(-2)=?$ $(-3)(-1)=?$ $(-6)(+2)=?$
 $(+4)(+2)=?$ $(+5)(-1)=?$ $(-4) \cdot 0=?$
b) $(+7)(-8)=?$ $(-1)(-1)=?$ $0 \cdot (+7)=?$
 $(-1)(+1)=?$ $(+5)(-8)=?$ $(-7)(-6)=?$
c) $(-5)(+3)(+2)=?$ $(-8)(+2)(-3)=?$
d) $(-2\frac{1}{2})(-\frac{2}{3})(-2\frac{3}{4})(-1\frac{2}{11})=?$ $(-\frac{3}{4})(+\frac{2}{3})(+\frac{2}{5})(-10)=?$
e) $(-2)(+3)+(-5)(-4)-(-7)(+2)+(-4)(+2)+(+5)(+7)=?$
f) $(-7)(-2)-(-3)(+4)-(+8)(+3)+(-2)(-3)-(+2)(-4)=?$
g) $(-\frac{3}{4})(+\frac{2}{5})-(-\frac{2}{3})(+\frac{6}{5})+(-\frac{1}{2})(-\frac{4}{15})-(+\frac{4}{3})(+\frac{9}{10})-(-+\frac{2}{3})(-\frac{1}{10})=?$
h) $(-5)(+3)(-2)-(+4)(-2)(-3)-(-3)(-5)(-4)=?$
i) $(-3)(+3)(-1)+(-2)(+8)(+3)-(-7)(-8)(+1)=?$
j) $(+0,4)(-3)(-0,5)(+0,5)-(-0,2)(-0,5)(-5)(-0,4)=?$

25. a) Tworzyć szybko w pamięci kolejno sumę, a następnie iloczyn liczby α -4 , β $+3$ i każdej z następujących liczb $+3, -2, +5, -4, +4, -3, -1, 0, +1, -5$.

Rachuj tak: $-4+3=?$, $(-4)(+3)=?$, $-4-2=?$ i t. d.

- b) Znajdź podobnie sumę i iloczyn liczby α $-0,7$; β $+0$; i każdej z liczb: $-1; -0,4; +1,2; -0,9; +0,3; +2; 0; -3; +0,6; -0,3$.

26. a) Przez stację A przejeżdżają równocześnie dwa pociągi jeden jedzie z prędkością $+500$ m/min., drugi z prędkością -600 m/min. Jaka będzie ich wzajemna odległość po 5 min. po przejściu przez stację A? Jaka była ich wzajemna odległość 4 min. przed przybyciem na stację A?
b) Z miasta A wyjeżdżają równocześnie 3 samochody z prędkościami: -60 km/godz., -30 km/godz., $+45$ km/godz. Jaka będzie odległość pierwszego, a jaka trzeciego samochodu od drugiego po 20 min.?

27. Wykonać działania:

- a) $(-14):(+7)=?$ $(+12):(+6)=?$ $(-36):(-9)=?$
 $(-8):(+1)=?$ $(+5):(-1)=?$ $0:(-4)=?$
b) $(+3):(+4)=?$ $(-5):(+6)=?$ $(-1):(-5)=?$
 $(+4):(-4)=?$ $(+1):(-4)=?$ $(-1):(+6)=?$

- c) $(-\frac{3}{4}):(+\frac{1}{2})=?$ $(-\frac{2}{3}):(+4)=?$ $(+1,2):(-6)=?$
 $(-1\frac{1}{2}):(-3)=?$ $(+5):(+1\frac{1}{4})=?$ $(-0,3):(-\frac{5}{6})=?$
d) $(-6):(-2)+(-4):(+2)-(+15):(+5)+(+20):(+4)-(+12):(-3)=?$
e) $(-4):(+2)+(-15):(-3)-(+18):(-6)-(-+30):(+5)+(-4):(-4)=?$

28. Pewnego dnia odczytywano co 3 godziny termometr i zanotowano następujące temperatury: $-8,6^\circ$, $-11,4^\circ$, $-6,3^\circ$, $-1,2^\circ$, $+4,6^\circ$, $+2,1^\circ$, $-2,3^\circ$, -5° . Jaka była średnia temperatura tego dnia? O ile odbiegała najwyższa temperatura od średniej? Ile wynosiła różnica między najwyższą a najniższą temperaturą?

29. Odczytać porządek działań w podanych niżej wyrażeniach i obliczyć wartość każdego z tych wyrażeń dla wartości liter wymienionych obok każdego wyrażenia:

- a) $a-b+c$; $a=-3$, $b=+5$, $c=+7$;
a') $a-(b+c)$; $a=-3$, $b=+5$, $c=+7$;
b) $a+bc$; $a=+7$, $b=-5$, $c=-3$;
b') $(a+b)c$; $a=+7$, $b=-5$, $c=-3$;
c) $a-b:c$; $a=-2$, $b=-8$, $c=-2$;
c') $(a-b):c$; $a=-2$, $b=-8$; $c=-2$;
d) $ab-ac$; $a=+3$, $b=-5$, $c=-4$;
d') $(ab-a)c$; $a=+3$, $b=-5$, $c=-4$;
e) $2a-3b$; $a=-4$, $b=+4$;
e') $2(a-3b)$; $a=-4$, $b=+4$;
f) $a:b+c$; $a=-24$, $b=+3$, $c=-5$;
f') $a:(b+c)$; $a=-24$, $b=+3$, $c=-5$;
g) $(a+b)(c+d)$; $a=-3$, $b=+5$, $c=-2$, $d=+7$;
g') $a+bc+d$; $a=-3$, $b=+5$, $c=-2$; $d=+7$;
h) $a:b-c$; $a=-12$, $b=-3$, $c=-4$;
h') $a:(b-c)$; $a=-12$, $b=-3$, $c=-4$;
i) $a-[b-(c-d)]$; $a=+7$, $b=-4$, $c=-3$, $d=+1$;
j) $a[b+c(d-a)]$; $a=+2$, $b=+3$, $c=-4$, $d=-1$;
k) $a\{b+a[b-b(a-b)]\}$; $a=-5$, $b=-2$;
l) $\{[(a-b)a-b]a-b\}a-b$; $a=-3$, $b=-2$;
m) $\frac{a-b}{a+b}$; $a=-\frac{3}{4}$, $b=+\frac{5}{6}$; n) $\frac{1+ab}{1-ab}$; $a=+\frac{3}{4}$, $b=-\frac{5}{6}$;
o) $\frac{a+b}{1-ab}$; $a=-0,4$, $b=-5$; p) $\frac{b}{1-a}$; $a=-\frac{3}{5}$, $b=-\frac{5}{6}$

30. a) Objętość jednego m^3 gazu przy temperaturze 0° wynosi w temperaturze t° przy niezmiennych innych warunkach $y = 1 + \frac{t}{273}$. Jaka jest objętość gazu przy temperaturze $t = \pm 136,5^\circ, +273^\circ, \pm 91^\circ, \pm 39^\circ$?

b) Oblicz wartość wyrażenia $y = ax + b$ dla $a = -0,5; b = +2,5$ przyjmując kolejno: $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$. Zestaw odpowiadające sobie wartości x i y w tabelce.

c) Oblicz wartość wyrażenia $y = \frac{a-x}{a+x}$ dla $a = -1$, przyjmując kolejno: $x = 0, -1, -2, -3, -4, +1(?), +2, +3, +4$

Rozdział II

Własności działań na liczbach względnych

§ 1. Własności sumy.

Przykład 1. Kupiec zanotował w ciągu pewnego dnia następujące kwoty (w złotych), które do kasy wpłynęły, względnie które kasa wypłaciła: $+15, -12, +6, -17$ do południa i $+34, +13, -11$ po południu. Stan kasy uległ w ciągu dnia pewnej zmianie, która jest sumą algebraiczną wszystkich wpływów i wydatków, a więc wynosi: $15 - 12 + 6 - 17 + 34 - 13 - 11 = +28$. Jasnym jest, że na wartość tej sumy nie wpływa wcale porządek, w jakim kasa poszczególne kwoty otrzymywała i wypłacała. I rzeczywiście otrzymamy również $-12 + 15 + 13 - 11 + 6 - 17 + 34 = +28$.

Można też zmianę stanu kasy w ciągu całego dnia obliczyć, tworząc oddzielnie sumy wpływów i wypłat przedpołudniowych i popołudniowych, a następnie dodając te sumy. Otrzymamy: $(15 - 12 + 6 - 17) + (34 + 13 - 11) = (-8) + (+36) = +28$.

Przykład 2. Zbiornik mający kształt walca jest wypełniony częściowo naftą. W ciągu dnia doprowadzamy w pewnych godzinach do zbiornika naftę, w innych godzinach wybieramy z niego naftę. Wskutek tego poziom nafty w zbiorniku podnosi się i opada. Każdą taką zmianę stanu poziomu zaznaczamy za pomocą wektora na osi pionowej, narysowanej na ścianie zbiornika (rys. 10). Otrzymamy kolejno wektory: $\vec{OA}, \vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DE}$, przy czym punkty O, A, B, C, D, E oznaczają każdorazowy stan poziomu nafty. Zmianę stanu poziomu po upływie całego dnia wskazuje wektor $\vec{OE}$, będący sumą owych wektorów, kreślonych przez cały dzień. Łatwo zrozumieć, że ostateczny stan poziomu nafty byłby taki sam, gdyby takie same ilości nafty w ciągu dnia dopływały i odpływały, ale w innym porządku. Przeto i suma wektorów, przedstawiająca zmianę stanu poziomu w ciągu dnia, nie ulega zmianie przez przestawienie składników. Również znajdziemy taką samą zmianę sta-

poziomu w ciągu dnia, jeżeli uwzględnimy najpierw zmianę stanu poziomu do południa, a potem zmianę stanu poziomu od południa do wieczora. Z tego wnosimy, że i suma wektorów nie ulegnie zmianie, jeżeli składniki jej połączymy w częściowe sumy, a potem te częściowe sumy dodamy. Zgodnie z temi przykładami przyjmujemy:

Do sumy liczb względnych oraz do sumy wektorów na osi stosują się następujące prawa:

1. Prawo przemienności: Wartość sumy nie zależy od porządku składników.

Prawo to możemy wyrazić bardzo przejrzyście przy pomocy symboli literowych. Dla sumy dwu liczb wyraża to prawo równość:

$$a + b = b + a.$$

Dla sumy trzech liczb sformułujemy to prawo tak:

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = b + c + a = c + a + b = c + b + a.$$

2. Prawo łączności: Wartość sumy więcej niż dwóch składników nie zmienia się, jeżeli składniki połączymy dowolnie w częściowe sumy, a następnie te częściowe sumy dodamy. Czyli:

Dla trzech składników:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c).$$

Dla czterech składników:

$$a + b + c + d = a + (b + c + d) = a + (b + c) + d = (a + b) + (c + d) \text{ i t. d.}$$

Z praw przemienności i łączności korzystamy często przy redukowaniu sum algebraicznych.

I tak w przykładzie: $-37,5 + 28,4 - 6,4 + 37,5 = 22$ skreślamy najpierw wyraz pierwszy i czwarty, które są liczbami przeciwnymi, a potem redukujemy pozostałe wyrazy.

Przy redukowaniu sum, których składniki są wielocyfrowymi liczbami, praktycznie jest zredukować oddzielnie składniki dodatnie, oddzielnie ujemne, a wreszcie dodać otrzymane sumy. Np.:

$$\begin{aligned} & 48,5 - 54,7 - 28,7 - 63,5 + 104,3 + 28,4 - 13,6 = \\ & = (48,5 + 104,3 + 28,4) + (-54,7 - 28,7 - 63,5 - 13,6) = \\ & = 181,2 - 160,5 = 20,7. \end{aligned}$$

§ 2. Własności różnicy; wielomian.

Zasadniczą własność różnicy, że suma różnicy i odjemnika równa się odjemnej, formułujemy przy pomocy symboli literowych tak:

$$(a - b) + b = a \text{ lub } a - b + b = a.$$

Wiemy, że każde odejmowanie zastąpić można dodawaniem liczby przeciwnej. Np.: $(+4) - (-2) = (+4) + (+2)$. Postaramy się w podobny sposób sprowadzić odejmowanie symboli literowych do dodawania. Łatwość leży tylko w tem, jak oznaczać liczbę przeciwną liczbie a .

Wydźmy z przykładów:

$$0 + (+4) = +4, \quad 0 + (-3) = -3, \quad 0 - (+4) = -4, \quad 0 - (-3) = +3$$

Umówmy się naznaczać te działania, opuszczając początkowe 0. Otrzymamy:

$$+ (+4) = +4, \quad + (-3) = -3, \quad - (+4) = -4, \quad - (-3) = +3$$

Oznaczając literą a dowolną liczbę względną, napiszemy podobnie $0 + a = +a = a$, $0 - a = -a =$ liczbie przeciwnej liczbie a .

Symbole literowe, oznaczające liczby względne, piszemy częściej ze znakami $+$ lub $-$, przyczem $+a$ oznacza to samo co $0 + a$, czyli a , zaś $-a$ oznacza to samo co $0 - a$, a więc liczbę przeciwną liczbie a .

Pamiętać więc należy, że gdy a oznacza liczbę względną, to $+a$ niekoniecznie oznacza liczbę dodatnią, a $-a$ liczbę ujemną. Jeżeli np. $a = -7$, to $+a$ jest liczbą ujemną: $+a = -7$, a $-a$ jest liczbą dodatnią: $-a = +7$.

Stosownie do powyższej umowy zastępujemy każde odejmowanie dodawaniem liczby przeciwnej w następujący sposób: $a - b = a + (-b)$.

Ponieważ zamiast a, b, d można napisać $+a, +b, +d$, możemy uważać wyrażenie $a + b - c + d - e$ za sumę $(+a) + (+b) + (-c) + (+d) + (-e)$. Powiemy więc:

Dodawanie symboli literowych ze znakami naznaczamy, pisząc je obok siebie z ich znakami.

Zastępując w następujących przykładach każde odejmowanie dodawaniem liczby przeciwnej i naznaczając to dodawanie według ostatniej umowy, otrzymamy:

$$a - (+b) = a + (-b) = a - b;$$

$$a - (-b) = a + (+b) = a + b. \text{ Powiemy więc:}$$

Odejmowanie symboli literowych ze znakami sprowadzamy do dodawania, pisząc obok niezmienionej odjemnej odjemnik ze znakiem przeciwnym.

Podobnie jak litery piszemy także czasem wyrażenia algebraiczne znakami. Np.:

$+2a$ oznacza to samo, co $2a$, t. j. $(+2) \cdot a$; liczbę 2 uważamy bowiem za liczbę dodatnią.

$-2a$ oznacza liczbę przeciwną liczbie $2a$.

$-(a+b)$ oznacza liczbę przeciwną sumie $a+b$.

$2a - 3b$ możemy uważać bądź za różnicę iloczynów $2a$ i $3b$, bądź za sumę: $2a + (-3b)$, gdzie $-3b$ oznacza liczbę przeciwną iloczynowi

Naznaczoną według powyższych umów sumę symboli literowych, czy też wyrażenie nazywamy *sumą algebraiczną* lub *wie-*

mianem; składniki tej sumy nazywamy *składnikami* lub *wyrazami*.

Suma algebraiczna (wielomian) ma wszystkie własności sumy. Stosując w szczególności prawo przemienności, otrzymamy:

$$a + b - c - d + e = a - c + e - d + b.$$

Równość tę możemy tak odczytać:

Naznaczone dodawania i odejmowania wolno wykonywać w dowolnym porządku.

§ 3. Dodawanie i odejmowanie sumy.

1. Według prawa łączności jest:

$$a + (b + c + d) = a + b + c + d.$$

Równość tę tak możemy odczytać:

Sumę dodajemy, dodając kolejno każdy jej składnik.

Stosując to twierdzenie, możemy dodawać wielomiany. Np.:

$$a + (-b + c - d) = a - b + c - d;$$

$$(2x + 3y) + (2z - 5) = 2x + 3y + 2z - 5.$$

2. Jeżeli do sumy $a + b + c$ dodamy sumę liczb przeciwnych, a więc $-a - b - c$, to możemy, korzystając z praw przemienności i łączności, łączyć w częściowe sumy składniki, będące liczbami przeciwnymi. Składniki te znoszą się tak, że z dodania owych sum otrzymamy 0. A że dwie liczby, których suma wynosi 0, nazywamy liczbami przeciwnymi, zatem:

Liczbę przeciwną sumie znajdujemy, tworząc sumę liczb przeciwnych składnikom sumy.

Stąd łatwo znajdziemy sposób odejmowania sumy. Mając odjąć sumę, dodajemy liczbę przeciwną sumie:

$$a - (b + c + d) = a + (-b - c - d) = a - b - c - d.$$

Otrzymany wzór: $a - (b + c + d) = a - b - c - d$ tak odczytamy:

Sumę odejmujemy, odejmując kolejno każdy jej składnik.

$$\text{Np.: } -\frac{3}{4} + (+\frac{1}{4} + \frac{7}{4}) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = -\frac{9}{4}.$$

Z twierdzenia tego korzystamy przy odejmowaniu wielomianów. Np.:

$$a - (b - c + d) = a - b + c - d.$$

$$(2x + 3y) - (2z - 5) = 2x + 3y - 2z + 5.$$

§ 4. Własności iloczynu.

Wykonajmy mnożenia:

$$+7)(-2)(+3) = -42,$$

$$(+7)(+3)(-2) = -42,$$

$$(-2)(+7)(+3) = -42;$$

$$\begin{array}{ll}
 (-5)(+2)(-1) = +10, & (-1)(+2)(-5) = +10, \\
 (+2)(-1)(-5) = +10; & \\
 (-4)(-2)(+3)(-1) = -24, & (+3)(-2)(-1)(-4) = -24, \\
 (+5)(-2)(-1)(+3) = +30, & (-2)(+3)(+5)(-1) = +30.
 \end{array}$$

Porównując wyniki działań w każdym wierszu, zauważymy, że do iloczynu ilużkolwiek czynników stosuje się:

1. *Prawo przemienności: Wartość iloczynu nie zależy od porządku czynników, czyli:*

$$ab = ba, abc = acb = bac = bca = cab = cba \text{ i t. d.}$$

Wykonajmy mnożenia:

$$\begin{array}{l}
 (-3)(+2)(+5) = (-6)(+5) = -30, \\
 (-3)[(+2)(+5)] = (-3)(+10) = -30; \\
 (-2)(-4)(-3) = (+8)(-3) = -24, \\
 (-2)[(-4)(-3)] = (-2)(+12) = -24; \\
 [(+4)(+2)][(-3)(+5)] = (+8)(-15) = -120, \\
 (+4)[(+2)(-3)(+5)] = (+4)(-30) = -120, \\
 (+4)[(+2)(-3)](+5) = (+4)(-6)(+5) = -120.
 \end{array}$$

Na podstawie tych przykładów przyjmujemy, że do iloczynu liczb względnych stosuje się:

2. *Prawo łączności: Wartość iloczynu więcej niż dwóch czynników nie zmienia się, jeżeli czynniki połączymy dowolnie w częściowe iloczyny, a następnie te częściowe iloczyny pomnożymy, czyli:*

$$(ab)c = a(bc);$$

$$(abc)d = a(bcd) = (ab)(cd) = a(bc)d \text{ i t. d.}$$

§ 5. Wnioski z praw przemienności i łączności.

Jeżeli mamy mnożyć kilka liczb względnych, to znak iloczynu możemy zgóry podać, gdy zważymy, że co dwa czynniki ujemne dają na iloczyn liczbę dodatnią, a iloczyn liczb dodatnich jest dodatni. Dochodzimy do reguły:

Iloczyn kilku liczb względnych jest dodatni, jeżeli albo wszystkie czynniki są dodatnie, albo ilość czynników ujemnych jest parzysta; iloczyn ten jest ujemny, jeżeli ilość jego czynników ujemnych jest nieparzysta.

Jeżeli w iloczynie kilku liczb względnych zmienimy znak jednego czynnika na przeciwny, to ilość czynników ujemnych albo się powiększy o 1, albo pomniejszy o 1. Jeżeli ilość czynników ujemnych iloczynu była parzysta (0 uważamy za liczbę parzystą), to po zmianie znaku jednego czynnika na przeciwny będzie nieparzysta; jeżeli ilość czynników ujemnych była nieparzysta, to po zmianie znaku jednego czynnika na przeciwny, stanie się parzystą. Zatem:

Jeżeli znak jednego czynnika iloczynu zmienimy na przeciwny, to cały iloczyn zmieni znak na przeciwny. Stąd wynika dalej: Jeżeli dwa czynniki iloczynu zmienią znaki na przeciwnie, to iloczyn nie zmienia się.

Uczynmy to w iloczynie ab , w którym a i b oznaczają dowolne liczby względne. Zważywszy, że $+a$ i $+b$ oznaczają to samo, co a i b , a $-a$ i $-b$ różnią się od a i b tylko znakami, otrzymamy według ostatnich dwóch twierdzeń:

$$(+a) \cdot (+b) = +ab,$$

$$(+a) \cdot (-b) = -ab,$$

$$(-a) \cdot (+b) = -ab,$$

$$(-a) \cdot (-b) = +ab.$$

Wzory te wskazują, że przy mnożeniu symboli literowych ze znakami obowiązuje taka sama reguła co do znaków, jak przy mnożeniu liczb względnych.

$$\text{Przykłady: } (-2) \cdot (+a) = -2a;$$

$$(-5) \cdot (-a) = +5a;$$

$$(+3)(-a)(-x) = +3ax.$$

Iloczyn czynników literowych i liczb szczegółowych nazywamy jednomianem. Czynniki szczegółowe lub jeden z czynników literowych nazywamy współczynnikiem jednomianu; pozostały czynnik lub iloczyn pozostałych czynników nazywamy liczbą główną jednomianu. Narazie (aż do rozdz. IV) uważać będziemy za współczynnik zawsze czynnik szczegółowy; w razie braku takiego współczynnika będziemy się domyślali współczynnika 1.

Jednomianami są przeto wyrażenia: $2a$, $-\frac{3}{4}x$, $5ab$, x , $-m$ i t. p. Liczbami głównymi w tych jednomianach są kolejno: a , x , ab , x , m , współczynniki: $+2$, $-\frac{3}{4}$, $+5$, $+1$, -1 .

Zdajmy sobie sprawę ze znaku przed jednomianem. Wyrażenie $-5x$ można uważać według ostatniego twierdzenia albo za iloczyn liczb względnych $(-5) \cdot (+x)$, albo za liczbę przeciwną iloczynowi $(+5) \cdot (+x)$; oba sposoby pojmowania dają dla $-5a$ tę samą wartość przy jakiegokolwiek wartości a . Aby uniknąć nieporozumienia, umawiamy się, że gdy mówimy o jednomianie, to znak będziemy uważać za znak jednomianu; jeżeli zaś mówimy o samym współczynniku lub o współczynniku i liczbie głównej to znak będziemy dołączali do współczynnika. Jednomian $-5a$ ma więc znak $-$, a współczynnikiem jego jest -5 .

Wzór: $(ab)c = a(bc)$, wyrażający prawo łączności, można także tak odczytać:

Iloczyn mnożymy przez liczbę, mnożąc tylko jeden z czynników przez tę liczbę, a drugi czynnik zostawiając niezmienny.

$$\text{Np.: } (-3a)(-2) = +6a; \quad (-\frac{3}{4}x)(+\frac{2}{3}) = -\frac{1}{2}x.$$

2.3.4

Jeżeli w równości $(ab)c = a(bc)$ przestawimy lewą stronę z prawą, otrzymamy: $a(bc) = (ab)c$. Wzór ten można tak od-
czytać:

Dowolną liczbę mnożymy przez iloczyn, mnożąc ją najpierw przez jeden czynnik, a otrzymany iloczyn, przez drugi czynnik iloczyn.

$$\text{Np.: } (-5) \cdot (-3ab) = +15ab.$$

§ 6. Mnożenie sumy.

Przykład. Pewien dom handlowy prowadzi z czterema firmami rachunki w dolarach. Stan tych rachunków przedstawiał się pewnego dnia pozycjami: +485, -724, +243, -287, t.j. pierwsza firma winna była domowi handlowemu 485 dolarów, drugiej firmie winien był dom handlowy 724 dolarów i t. d. Jaki zysk, lub jaką stratę w złotych miał dom handlowy, jeżeli wtedy kurs dolara a) wzrósł o 0,4 zł? b) spadł o 0,3 zł?

Każde z tych zadań rozwiążemy dwoma sposobami:

a) Sposób 1.

Stan rachunku dolarowego przedstawia suma algebraiczna:

$$485 - 724 + 243 - 287.$$

Wartość w złotych tej kwoty ulegnie skutek wzrostu kursu dolara następującej zmianie:

$$(485 - 724 + 243 - 287) \cdot (+0,4) = (-283) \cdot (+0,4) = -113,2.$$

Wskutek wzrostu kursu dolara dom handlowy stracił 113,20 zł.

Sposób 2.

Wartość w złotych poszczególnych pozycji dolarowych zmieniła się z powodu wzrostu kursu dolara w następujący sposób:

$$\begin{aligned} (+485) \cdot (+0,4) &= +194; & (-724) \cdot (+0,4) &= -289,6; \\ (+243) \cdot (+0,4) &= +97,2; & (-287) \cdot (+0,4) &= -114,8. \end{aligned}$$

Zmiana wartości w złotych wszystkich pozycji wynosiła:

$$\begin{aligned} &(+485) \cdot (+0,4) + (-724) \cdot (+0,4) + (+243) \cdot (+0,4) + \\ &+ (-287) \cdot (+0,4) = 194 - 289,6 + 97,2 - 114,8 = -113,2. \end{aligned}$$

Wynik otrzymujemy taki sam, jak poprzednio. Jest więc:

$$\begin{aligned} &(485 - 724 + 243 - 287) \cdot (+0,4) = \\ &= (+485) \cdot (+0,4) + (-724) \cdot (+0,4) + (+243) \cdot (+0,4) + (-287) \cdot (+0,4). \end{aligned}$$

Rozwiązując zadanie b) również dwoma sposobami i porównując otrzymane wyniki, znajdziemy:

$$\begin{aligned} &(485 - 724 + 243 - 287) \cdot (-0,3) = \\ &= (+485) \cdot (-0,3) + (-724) \cdot (-0,3) + (+243) \cdot (-0,3) + (-287) \cdot (-0,3). \end{aligned}$$

Przyjmujemy ogólnie:

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania: Sumę mnożymy przez dowolną liczbę, mnożąc każdy składnik sumy przez tę liczbę, a otrzymane iloczyny dodając. Czyli:

$$(a + b + c) \cdot d = ad + bd + cd.$$

$$\text{Np.: } (-3a + 2b - 2c) \cdot (-5) = 15a - 10b + 10c.$$

Podajemy niżej kilka przykładów, w których poznane dotąd twierdzenia znajdują zastosowanie:

1. Obliczyć wartość wyrażenia: $x = ab - cd$ dla: $a = +2$, $b = -8$, $c = +3$, $d = -2$.

Wyrażenie $ab - cd$ można pojmować

albo 1) jako różnicę iloczynów ab i cd .

$$\begin{aligned} \text{Ponieważ: } ab &= (+2)(-8) = -16; \quad cd = (+3)(-2) = -6, \text{ to:} \\ x &= (-16) - (-6) = -16 + 6 = -10. \end{aligned}$$

albo 2) jako sumę ab i $-cd$ (liczby przeciwnej liczbie cd).

$$\text{Ponieważ: } ab = -16; \quad -cd = +6, \text{ to:}$$

$$x = (-16) + (+6) = -16 + 6 = -10.$$

albo 3) jako sumę ab i $(-c)d$, bo $(-c)d = -cd$.

$$\text{Ponieważ: } ab = -16; \quad (-c)d = (-3)(-2) = +6, \text{ to:}$$

$$x = (-16) + (+6) = -16 + 6 = -10.$$

2. Obliczyć wartość wyrażenia: $x = 2a - 5b$ dla $a = +3$, $b = -2$.

Stosując trzeci z wymienionych w poprzednim przykładzie sposobów, obliczamy:

$$\begin{aligned} 2a &= (+2)(+3) = +6, & -5b &= (-5)(-2) = +10; \\ x &= 6 + 10 = 16. \end{aligned}$$

3. Wykonać działania: $3(a - b) - 2(c - d)$.

Wyrażenie to uważamy za sumę iloczynów $(+3)(a - b)$ i $(-2)(c - d)$. Wykonując te mnożenia i stosując twierdzenie o dodawaniu sumy, otrzymujemy:

$$3(a - b) - 2(c - d) = 3a - 3b - 2c + 2d.$$

Można też uważać powyższe wyrażenie za różnicę iloczynów $+3(a - b)$ i $(+2)(c - d)$. Wtedy rachunek tak się ukształtuje:

$$3(a - b) - 2(c - d) = (3a - 3b) - (2c - 2d) = 3a - 3b - 2c + 2d.$$

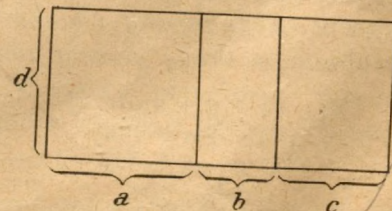
Własności iloczynu dwóch czynników dodatnich możemy w prosty sposób zilustrować geometrycznie.

Jeżeli r i s są liczbami dodatnimi, to każdą z tych liczb można przedstawić odcinkiem, przyjmąwszy np. 1 cm za jednostkę (rozdz. I, § 1). Zbudujmy prostokąt o podstawie r cm i wysokości s cm. Pole takiego prostokąta wynosi rs (t. j. prostokąt ma rs cm²). Zbudujmy drugi prostokąt o podstawie s i wysokości r . Pole tego prostokąta wynosi sr . Lecz oba prostokąty są zupełnie jednakowe (różnią się tylko położeniem); ich pola są przeto równe: $rs = sr$ zgodnie z prawem przemienności.

Aby zilustrować podobnie wzór:

$$(a + b + c)d = ad + bd + cd,$$

określający prawo rozdzielności, wykreślmy prostokąt o podstawie $(a + b + c)$ cm i wysokości d cm (rys. 11). Pole tego prostokąta wynosi $(a + b + c)d$. Prostokąt ten jest jednak, jak widać z rysunku, sumą trzech prostokątów o polach ad i bd i cd zgodnie z powyższym wzorem.



Rys. 11.

§ 7. Wnioski z prawa rozdzielności.

1. W równości, wyrażającej prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania, niezawsze wyrażenie po prawej stronie znaku równości jest prostsze od wyrażenia po stronie lewej. Używamy więc ostatniego wzoru często odwrotnie, t. j. w postaci:

$$ad + bd + cd = (a + b + c) d.$$

Równość tę możemy tak odczytać:

Mając dodawać iloczyny o wspólnym czynniku, możemy prowadząc dodawaniu ten wspólny czynnik opuścić, naznaczając następnie mnożenie sumy czynników niewspólnych przez czynnik wspólny.

Czynność tę nazywamy *wyłaczaniem wspólnego czynnika nawias lub przed nawias*.

$$\text{Np.: } (-47,8) (+3,4) + (-47,8) (+5,6) = (-47,8) \cdot (3,4 + 5,6) \\ = (-47,8) (+9) = -430,2;$$

$$ab - 2ac = a(b - 2c);$$

$$5a - 8a - 3a = (5 - 8 - 3)a = (-6)a = -6a.$$

W ostatnim przykładzie mieliśmy po lewej stronie sumę algebraiczną jednomianów, mających jednakowe liczby główne. Wyłączając wspólną liczbę główną za nawias, otrzymaliśmy w nawiasie sumę liczb względnych, która następnie zredukowała się do jednej liczby. Ostatecznie suma jednomianów zredukowała się do jednego jednomianu.

Rozpatrzmy jeszcze przykład:

$$2a + 3b - 7 - 5b - a + 3 = (2a - a) + (3b - 5b) + (-7 + 3) \\ = (2 - 1)a + (3 - 5)b + (-7 + 3) = \\ = a - 2b - 4.$$

Skorzystaliśmy tu z praw przemienności i łączności, aby połączyć jednomiany, mające jednakowe liczby główne, w częściowe sumy. Następnie wyłączyliśmy w częściowych sumach wspólne liczby główne nawias, a wreszcie zredukowaliśmy sumy w nawiasach. W praktyce konywamy wszystkie te przekształcenia w pamięci, a zapisujemy tylko wynik, stosując regułę:

W sumie algebraicznej jednomianów (w wielomianie) możemy redukować jednomiany podobne, t. j. mające jednakowe liczby główne. Jednomiany podobne redukujemy, redukując ich wspólne czynniki, a liczbę główną zostawiając niezmienną.

$$\text{Np.: } a + a + a = 3a; \quad 5x - 2x = 3x; \\ a - 2a = -a; \quad 2ax - 4,5ax = -2,5ax; \\ 5x - a + 3a - 2x - 4a - 2x = x - 2a.$$

2. Korzystając z prawa rozdzielności, możemy wykonać mnożenie sumy przez sumę w następujący sposób:

$a + b + c) (d + e) = a(d + e) + b(d + e) + c(d + e)$, na podstawie prawa rozdzielności, jeżeli $(d + e)$ uważamy za jedną liczbę.

$$= ad + ae + bd + be + cd + ce, \text{ na podstawie prawa rozdzielności.}$$

Otrzymaną równość wyrazimy słowami:

Sumę mnożymy przez sumę, mnożąc każdy składnik jednej sumy przez każdy składnik drugiej sumy, a otrzymane iloczyny

$$\text{Np.: } (a + 2)(b - 3) = ab + 2b - 3a - 6,$$

Przy mnożeniu uważaliśmy $b - 3$ za sumę $+ (-3)$. Podobnie:

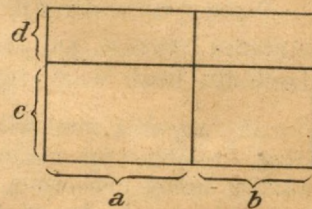
$$(-a + 3) \cdot (x - 2) = -ax + 3x + 2a - 6.$$

Wykonajmy jeszcze mnożenia:

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd;$$

$$(a + b)(c - d) = ac + bc - ad - bd;$$

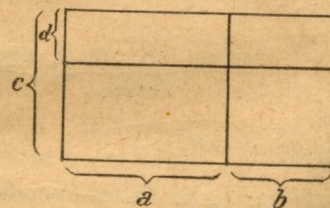
$$(a - b)(c - d) = ac - bc + bd - ad.$$



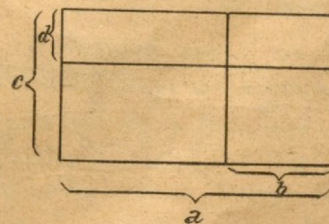
Rys. 12.

Jeżeli a, b i c są liczbami dodatnimi, jeżeli nadto w drugim i trzecim $c > d$, a w trzecim $a > b$, możemy wzory te przedstawić geometrycznie. I tak $(a + b)(c + d)$ przedstawia pole prostokąta o bokach $a + b$ i $c + d$ (rys. 12). Prostokąt ten składa się jednak z czterech prostokątów o polach ac, bc, ad i bd (wskaż te prostokąty). Rysunek potwierdza tedy pierwszy wzór.

Podobnie przedstawiają rys. 13 i 14 dwa następne wzory; objaśnij je.



Rys. 13.



Rys. 14.

§ 8. Własności ilorazu.

Zasadniczą własność dzielenia, że iloraz pomnożony przez dzielnik daje dzielną, możemy zapomocą symboli literowych takrazić:

$$(a : b) \cdot b = a \text{ albo } \frac{a}{b} \cdot b = a, \text{ jeżeli } b \neq 0.$$

Z określenia dzielenia wysnuwamy natychmiast wzory:

$$(+a) : (+b) = +\frac{a}{b}, \text{ ponieważ } \left(+\frac{a}{b}\right) \cdot (+b) = +a; (b \neq 0);$$

$$(+a) : (-b) = -\frac{a}{b}, \text{ ponieważ } \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot (-b) = +a; (b \neq 0);$$

$$(-a) : (+b) = -\frac{a}{b}, \text{ ponieważ } \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot (+b) = -a; (b \neq 0);$$

$$(-a) : (-b) = +\frac{a}{b}, \text{ ponieważ } \left(+\frac{a}{b}\right) \cdot (-b) = -a; (b \neq 0).$$

Wzory te wskazują, że przy dzieleniu symboli literowych znakami stosuje się taką samą regułę co do znaków, jak przy dzieleniu liczb względnych.

Aby uzyskać inne własności ilorazu, sprowadzimy dzielenie do mnożenia. Podobnie jak odejmowanie liczby względnej można zastąpić dodaniem liczby przeciwnej, można, jak zaraz wykażemy, zastąpić dzielenie przez liczbę względną mnożeniem przez stosowną liczbę. Określamy:

Jeżeli iloczyn dwu liczb równa się $+1$, wtedy którąkolwiek z tych liczb nazywa się odwrotnością pozostałej. Stosownie tego odwrotność danej liczby znajdujemy, dzieląc $+1$ przez liczbę.

Odwrotnościami liczb: $+3, -2, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, +1, -1, a, \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$) są kolejno liczby: $+\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -4, +1, -1, \frac{1}{a}, a$.

Liczba 0 nie ma odwrotności, bo żaden iloczyn, którego jeden czynnik jest zerem, nie równa się $+1$.

Wykażemy, że:

Dzielenie przez jakąkolwiek liczbę (różną od zera) zastąpić można mnożeniem przez odwrotność tej liczby; czyli:

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}, \text{ przyczem } b \neq 0.$$

Cheąc dowieść, że równość ta jest prawdziwa, mnożymy domniemy iloraz $a \cdot \frac{1}{b}$ (przypuszczalny wynik dzielenia $a : b$) przez dzielnik

Otrzymamy:

$$\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) \cdot b = a \cdot \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) \text{ (według prawa łączności);}$$

$$= a \cdot 1, \text{ bo } \frac{1}{b} \cdot b = 1;$$

$$= a.$$

Ponieważ z pomnożenia ilorazu przez dzielnik otrzymaliśmy dzieło nasz jest prawdziwy.

Twierdzenie to pozwala z twierdzeń o mnożeniu iloczynu przez li-

i sumy przez liczbę uzyskać natychmiast odpowiednie twierdzenia dla dzielenia. Znajdziemy:

1. Iloczyn dzielimy przez liczbę (różną od zera), dzieląc tylko jeden czynnik iloczynu przez tę liczbę, a pozostałe czynniki zostawiając niezmienione; czyli:

$$(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c), \text{ przyczem } c \neq 0.$$

Dowód: $(a \cdot b) : c = (a \cdot b) \cdot \frac{1}{c}$ (według tw. o zastępowaniu dzielenia mnożeniem);

$$= a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{c}\right) \text{ (według prawa łączności);}$$

$$= a \cdot (b : c) \text{ (według tw. o zastępowaniu dzielenia mnożeniem).}$$

2. Sumę dzielimy przez liczbę (różną od zera), dzieląc każdy składnik sumy przez tę liczbę, a otrzymane ilorazy dodając. Czyli:

$$(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d, \text{ przyczem } d \neq 0.$$

Dowód:

$$(a + b + c) : d = (a + b + c) \cdot \frac{1}{d} \text{ (według tw. o zastępowaniu dzielenia mnożeniem);}$$

$$= a \cdot \frac{1}{d} + b \cdot \frac{1}{d} + c \cdot \frac{1}{d} \text{ (według prawa rozdzielności);}$$

$$= a : d + b : d + c : d \text{ (według tw. o zastępowaniu dzielenia mnożeniem).}$$

Ostatnie twierdzenie nazywamy prawem rozdzielności dzielenia względem dodawania.

§ 9. Najprostsze ułamki algebraiczne.

Ilorazy liczb względnych, a także ilorazy jednomianów i wielomianów nazywamy uławkami algebraicznymi. Dzielną nazywamy licznikiem, a dzielnik mianownikiem.

Uławkami algebraicznymi są np. wyrażenia:

$$\frac{+5}{+3}, \frac{-1}{-7}, \frac{3a}{5}, \frac{2a}{3b}, \frac{x+3}{7}, \frac{2a-1}{a+1}.$$

Narazie zajmować się będziemy tylko takimi uławkami algebraicznymi, których mianowniki są liczbami szczególnymi.

Jeżeli mianownik ułamka jest liczbą ujemną, to ułamek taki oznaczamy na ułamek o mianowniku dodatnim, zmieniając znak licznika i mianownika na przeciwne (zastępując licznik mianownikiem liczbami przeciwnymi).

Że jest to dozwolone, wynika ze wzoru: $(+a) : (+b) = (-a) : (-b)$

$$\text{Np.: } \frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}; \quad \frac{2x-3}{-7} = \frac{-2x+3}{7}.$$

Gdyby mianownik ułamka algebraicznego był ułamkiem, zastępując dzielenie przez ułamek mnożeniem przez odwrotność, przekształcimy taki ułamek na ułamek o mianowniku całkowitym.

$$\text{Np.: } \frac{2x-3}{\frac{3}{4}} = (2x-3) \cdot \frac{4}{3} = \frac{(2x-3) \cdot 4}{3}.$$

Z tych powodów zajmować się będziemy tylko ułamkami, których mianowniki są całkowitymi liczbami dodatnimi. Ułamki takie można łatwo sprowadzić do postaci jednomianów lub wielomianów.

$$\begin{aligned} \text{Np.: } \frac{2x}{3} &= \frac{2}{3}x \text{ (na podstawie tw. o dzieleniu iloczynu przez liczbę)} \\ \frac{2x-3}{5} &= \frac{1}{5}(2x-3), \text{ bo dzielenie przez 5 można zastąpić mnożeniem przez } \frac{1}{5}; \\ &= \frac{2}{5}x - \frac{3}{5} \text{ (na podstawie prawa rozdzielności).} \end{aligned}$$

Naodwrot możemy każde mnożenie jednomianu lub wielomianu przez ułamek zwykły napisać w postaci ułamka algebraicznego, pamiętając, że mnożenie przez ułamek zwykły oznacza mnożenie przez licznik i dzielenie otrzymanego iloczynu przez mianownik.

$$\text{Np.: } \frac{2}{5}x = \frac{2x}{5}; \quad \frac{3}{4}(2x+3) = \frac{3(2x+3)}{4} = \frac{6x+9}{4}.$$

Ułamki algebraiczne mają wiele własności wspólnych z ułamkami zwykłymi; poznamy niektóre z nich. I tak:

Jeżeli licznik i mianownik ułamka pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę (różną od zera), otrzymamy ułamek równy danemu.

$$\text{Np.: } \frac{4(3x-2)}{6} = \frac{2(3x-2)}{3}.$$

Że oba te ułamki są równe, łatwo przekonać się, pisząc pierwszy w postaci $\frac{2}{3}(3x-2)$, a drugi w postaci $\frac{2}{3}(3x-2)$ i uwzględniając, że $\frac{2}{3} \cdot 3 = 2$.

Podobnie: $\frac{5a-3}{7} = \frac{2(5a-3)}{14}$, ponieważ pierwszy ułamek można zastąpić wyrażeniem $\frac{1}{2}(5a-3)$, a drugi wyrażeniem $\frac{2}{14}(5a-3)$, które to wyrażenia są równe, bo $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Mnożenie licznika i mianownika ułamka przez tę samą liczbę nazywamy *rozszerzaniem* ułamka; dzielenie licznika i mianownika ułamka przez tę samą liczbę nazywamy *upraszczaniem* ułamka.

Przy pomocy upraszczania sprowadzamy ułamki do prostszej postaci.

$$\text{Np.: } \frac{4a}{6} = \frac{2a}{3}; \quad \frac{4x-6y}{8} = \frac{2x-3y}{4}.$$

Korzystając z rozszerzania ułamków, możemy ułamki algebraiczne sprowadzać do wspólnego mianownika. Za wspólny mianownik przyjąć należy najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników danych ułamków.

Np.: Ułamki $\frac{2x-3}{8}$ i $\frac{3x+1}{6}$ sprowadzimy do mianownika 24, rozszerzając pierwszy ułamek przez 3, a drugi przez 4. Otrzymamy:

$$\frac{2x-3}{8} = \frac{6x-9}{24}; \quad \frac{3x+1}{6} = \frac{12x+4}{24}.$$

Także każdy jednomian lub wielomian możemy przedstawić w postaci ułamka o dowolnym mianowniku. Wystarczy w tym celu dany jednomian czy wielomian napisać w postaci ułamka z mianownikiem 1 i rozszerzyć ten ułamek przez stosowną liczbę.

Np.: Aby przedstawić $2x-3$ w postaci ułamka o mianowniku 5, pi-

śmiemy: $2x-3 = \frac{2x-3}{1}$ i rozszerzamy ostatni ułamek przez 5. Otrzy-

$$2x-3x = \frac{2x-3}{1} = \frac{10x-15}{5}.$$

Przestawiając w równości, wyrażającej prawo rozdzielności dzielenia

względem dodawania (§ 8): $\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$, stroną prawą

$$\text{lewą, otrzymamy: } \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{d}; \quad (d \neq 0).$$

Zważywszy, że odejmowanie sprowadza się zawsze do dodawania liczby przeciwej, możemy ostatnią równość tak odczytać:

Ułamki algebraiczne o równych mianownikach dodajemy odejmujemy, dodając (odejmując) ich liczniki, a otrzymaną sumę (różnicę) dzieląc przez wspólny mianownik.

Jeżeli ułamki, które mamy dodawać (odejmować), nie mają równych mianowników, należy je przed wykonaniem działania do wspólnego mianownika sprowadzić.

$$\begin{aligned} \text{Np.: } \frac{x-1}{3} - \frac{2x+3}{3} &= \frac{(x-1)-(2x+3)}{3} = \frac{x-1-2x-3}{3} = \frac{-x-4}{3}; \\ \frac{2}{3} + \frac{2a}{3} &= \frac{2}{3} + \frac{2a}{3} = \frac{2+2a}{3} = \frac{2(1+a)}{3}; \\ \frac{9a}{6} + \frac{4a}{6} &= \frac{9a+4a}{6} = \frac{13a}{6}; \end{aligned}$$

dk 2 w

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{4} - \frac{x-1}{6} &= \frac{3x+6}{12} - \frac{2x-2}{12} = \frac{(3x+6)-(2x-2)}{12} = \\ &= \frac{3x+6-2x+2}{12} = \frac{x+8}{12}; \\ x+1 - \frac{2x+3}{5} &= \frac{x+1}{1} - \frac{2x+3}{5} = \frac{5x+5}{5} - \frac{2x+3}{5} = \\ &= \frac{5x+5-2x-3}{5} = \frac{3x+2}{5}. \end{aligned}$$

Mając wykonać działanie: $\frac{2a-3b}{5} \cdot 4$, napiszmy ułamek w postaci $\frac{1}{5}(2a-3b)$ i zastosujmy twierdzenie o mnożeniu iloczynu przez liczbę. Otrzymamy:

$$\frac{2a-3b}{5} \cdot 4 = [\frac{1}{5}(2a-3b)] \cdot 4 = \frac{4}{5}(2a-3b) = \frac{8a-12b}{5}.$$

Podobnie:

$$\frac{2x-3}{5} \cdot (-2) = [\frac{1}{5}(2x-3)] \cdot (-2) = \frac{-2}{5}(2x-3) = \frac{-4x+6}{5}.$$

Podobnie znajdziemy:

$$\frac{2a-3b}{5} : 4 = [\frac{1}{5}(2a-3b)] : 4 = \frac{1}{20}(2a-3b) = \frac{2a-3b}{20}.$$

Z tych przykładów wysuwamy twierdzenia:

Ułamek algebraiczny mnożymy przez dowolną liczbę, mnożąc jego licznik przez tę liczbę, a mianownik pozostawiając niezmienny. Ułamek algebraiczny dzielimy przez dowolną liczbę pozostawiając licznik jego niezmienny, a mianownik mnożąc przez dzielnik.

Pamiętając o znaczeniu mnożenia przez ułamek zwykły, znajdziemy:

$$\frac{3x-1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{3x-1}{2} \cdot \frac{5}{5} \right) : 6 = \frac{15x-5}{2} : 6 = \frac{15x-5}{12}.$$

§ 10. Zestawienie.

Zestawmy wzory, wyprowadzone w tym rozdziale:

1. $a+b=b+a$, (prawo przemienności dla sumy);
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$, (prawo łączności dla sumy, a zarazem o dodawaniu sumy);
3. $(a-b)+b=a$, (definicja różnicy);
4. $a+b-c=a-c+b$, (tw. o dowolności porządku dodawań i odejmowań);
5. $a-b=a+(-b)$, (tw. o zastępowaniu odejmowania dodaniem liczby przeciwnej);
6. $a-(b+c)=a-b-c$, (tw. o odejmowaniu sumy);
7. $ab=ba$, (prawo przemienności dla iloczynu);

8. $(ab)c=a(bc)$, (prawo łączności dla iloczynu, a zarazem tw. o mnożeniu iloczynu przez liczbę i liczby przez iloczyn);
9. $(+a)(+b)=+ab$, $(+a)(-b)=-ab$, $(-a)(+b)=-ab$, $(-a)(-b)=+ab$, (reguła dla znaków przy mnożeniu);
10. $(a+b)c=ac+bc$, (prawo rozdzielności mnożenia wzgl. dodawania, a zarazem tw. o wyłączaniu za nawias);
11. $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$, (tw. o mnożeniu sum);
12. $(a:b) \cdot b=a$, (definicja ilorazu);
13. $(+a):(+b)=+(a:b)$, $(+a):(-b)=-(a:b)$, $(-a):(+b)=-(a:b)$, $(-a):(-b)=+(a:b)$, (reguła dla znaków przy dzieleniu);
14. $a:b=a \cdot \frac{1}{b}$, (tw. o zastępowaniu dzielenia mnożeniem przez odwrotność dzielnika);
15. $(a+b):c=a:c+b:c$, (pr. rozdzielności dzielenia wzgl. dodawania);
16. $(ab):c=a(b:c)$, (tw. o dzieleniu iloczynu przez liczbę).

Ćwiczenia.

1. Korzystając z praw przemienności i łączności napisać różnymi sposobami sumę: $a+b+c$.
2. Zredukować możliwie prostym sposobem sumy:
 - a) $2\frac{3}{4}-4\frac{1}{8}+1\frac{3}{8}-3\frac{3}{8}+1\frac{1}{4}-3-2\frac{1}{8}=?$
 - b) $-4,6+2,8-5,15+4,6-7-2,85+2,2=?$
 - c) $46,5-34,8-5,6+57,3-63,4+81,6=?$
 - d) $-2\frac{3}{4}+6,75-4,6-5,2-4+5,2+3\frac{3}{8}=?$
 - e) $48^{\circ}31'-56^{\circ}15'+20^{\circ}10'-15^{\circ}13'+31^{\circ}48'=?$
3. Jaką wartość ma $+a$, a jaką $-a$, jeżeli $a=+3, -5, -1,0, +2, -3$?
4. Obliczyć:
 - a) $- (+5), +(-7), -(-4), +(-3);$
 - b) $-(-3)(+4), +(+2)(-7), -(-4)(-5),$
 $- (+4)(-5);$
 - c) $+(-2)(-3)(-4), -(+3)(-2)(+5),$
 $-(-4)(-3)(-1)(+2);$
 - d) $+\frac{4}{+2}, -\frac{10}{-5}, +\frac{+2}{+4}, -\frac{+3}{-6}, -\frac{+3}{+4}.$
5. Obliczyć wartości następujących wyrażeń dla podanych obok nich wartości liter:
 - a) $5x; x=-3;$
 - b) $-4z; z=-2;$
 - c) $-4a; a=+2;$

- d) $-7ab$; $a = +3$, $b = -2$;
 e) $+3xy$; $x = -2$, $y = -5$;
 f) $-(a+b)$; $a = -2$, $b = -4$;
 g) $-(a-b)$; $a = +2$, $b = -3$;
 h) $-a(a-1)$; $a = -5$;
 i) $+x(x-3)$; $x = +2$;
 j) $-a(x-a)$; $a = +3$, $x = -1$;
 k) $-a(1-a)$; $a = +3$;
 l) $(+a) + (-b)$; $a = +5$, $b = +7$;
 m) $(-a) + (+b)$; $a = +2$, $b = -3$;
 n) $(-a) - (+b)$; $a = +3$, $b = +2$;
 o) $(-a) - (-b)$; $a = -3$, $b = -4$.

6. Napisać w postaci sum algebraicznych (bez nawiasów):

- a) $(+x) + (+y)$; b) $(+x) + (-y)$; c) $(-x) + (+y)$;
 d) $(-x) + (-y)$; e) $(+x) - (+y)$; f) $(+x) - (-y)$;
 g) $(-x) - (+y)$; h) $(-x) - (-y)$;
 i) $(+a) - (+b) + (-c) - (-d)$;
 j) $(-a) - (-b) - (+c) + (-d)$;
 k) $(+a) + (+b) - (-c) + (-d)$;
 l) $(-a) + (-b) - (-c) - (+d)$.

7. Przedstawić w postaci sumy algebraicznej (bez nawiasów)

- a) $a + (b+c)$, $a + (b-c)$, $a - (b+c)$, $a - (b-c)$ i sprawdzić podstawiając w temacie i w wyniku za litery dowolne liczby względne i wykonując działania w naznaczonym porządku.
 b) $-(a+b-c)$, $-(a-b-c)$, $-(-a+b-c)$, $-(-a-b-c)$;
 c) $a - (b+c+d)$, $a + (-b+c-d)$, $a - (b-c+d)$;
 d) $(2a-3b) + (-3c+2)$; e) $(2x-3y) - (z-5)$.

8. Obliczyć wartości następujących wyrażeń w dwojaki sposób. Raz, wykonując działania w porządku naznaczonym przez nawiasy, drugi raz, uwalniając wyrażenia kolejno od nawiasów i redukując otrzymaną sumę algebraiczną:

- a) $(+7) - [(-4) - (-7)] = ?$
 b) $(-3) - [(+5) + (-9)] = ?$
 c) $[(-\frac{3}{2}) + (-\frac{3}{2})] - [(-\frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2})] = ?$
 d) $[-586 + 76,8] + [-70,8 + 41,3] - [414 + 41,3] = ?$
 e) $(-3) + \{(-7) - [(-3) - (+2)]\} - \{(+5) + [(-2) - (+8)]\} = ?$

f) $-7 - \{-3 - [-4 - (-3 - 2)]\} - \{-4 + [2 - (-5 + 2)]\} = ?$

9. a) Pociąg znajdował się w odległości a km od stacji, a następnie przebył najpierw b km, a potem c km. Jaka jest odległość pociągu od stacji? Obliczyć tę odległość, jeżeli: 1) $a = -20$, $b = +15$, $c = +17$; 2) $a = -20$, $b = -7$, $c = +17$. Wyjaśnić na tym przykładzie prawo łączności dla sumy.

b) W sumie $a+b$ dodano do pierwszego składnika liczbę c . Jak zmieniła się* suma? Sprawdzić, przyjmując raz $a = -7$, $b = +3$, $c = +5$, drugi raz $a = -7$, $b = +3$, $c = -3$.

c) W sumie $a+b$ dodano do pierwszego składnika c , a do drugiego d . Jak zmieniła się* suma? Sprawdzić dla $a = -12$, $b = +5$, $c = +6$, $d = -7$.

d) W sumie $a+b+c$ dodać do pierwszego składnika -5 , do drugiego $+3$, a do trzeciego -2 . Jak zmieni się* suma?

e) Wóz znajdował się na torze kolejowym w odległości p m od magazynu. Następnego dnia znaleziono wóz w odległości r m od magazynu. O ile m przesunięto wóz w nocy? Sprawdzić, przyjmując: 1) $p = -15$, $r = -5$; 2) $p = -15$, $r = +3$; 3) $p = +7$, $r = -2$.

f) W księdze spisane są wydatki i dochody z jednego tygodnia, oraz ich suma s zł. Przy kontrolowaniu rachunków skreślono dwie pozycje: a zł i b zł, które były mylnie wpisane. Jaką poprawkę** należy uskutecznić w sumie s ? Wykonać rachunek przyjmując: 1) $s = 283$, $a = 21$, $b = 35$; 2) $s = 220$, $a = -43$, $b = +34$; 3) $s = -5$, $a = -7$, $b = -4$.

g) Przy poprawianiu księgi, w której były spisane dochody i wydatki oraz obliczona ich suma s zł, skreślono dwie mylnie wpisane pozycje a zł i b zł, a dopisano dwie nowe pozycje c zł i d zł. Ile wyniesie poprawka** dla sumy?

* Przez zmianę sumy rozumiemy różnicę między jej nową wartością a dawną, czyli liczbę (względną), którą należy dodać do nowej wartości, aby otrzymać dawną.

** Przez poprawkę rozumiemy liczbę względną, którą należy do s dodać.

Wykonać rachunek, jeżeli $a = -15$, $b = +3$, $c = +12$, $d = -7$.

h) Do odjemnika różnicy $a - b$ dodano c . Jak zmieniła się różnica? Sprawdzić, przyjmując: 1) $a = -15$, $b = -8$, $c = -6$; 2) $a = +8$, $b = -7$, $c = +5$.

i) Od odjemnika różnicy $a - b$ odjęto c . Jak zmieniła się różnica? Sprawdzić, przyjmując: 1) $a = +3$, $b = -8$, $c = +8$; 2) $a = -7$, $b = +2$, $c = -6$.

j) Narysuj w jednym rzędzie a kresiek, a w drugim o jedną kreskę mniej. Przekreśl w pierwszym rzędzie n kreski, a w drugim tyle, ile w pierwszym zostało. Przekreśl wreszcie wszystkie kreski, które pozostały w pierwszym rzędzie, i oblicz, ile kresiek zostało. Sprawdź doświadczalnie na kilku przykładach. ($a > n$).

10. Korzystając z praw przemienności i łączności, wykonać w najprostszy sposób (ile możliwości w pamięci) mnożenia:

- $(-2\frac{1}{2})(-3\frac{3}{4})(+6)(-4) = ?$
- $(-25)(+125)(+4)(-8)(-9) = ?$
- $(-0,25)(-\frac{3}{8})(-4)(-1,5) = ?$
- $(-\frac{5}{8})(+1\frac{1}{2})(-6)(-20) = ?$
- $(+150)(-1,25)(-8)(+2) = ?$
- $(+2\frac{1}{4})(-3\frac{1}{3})(+0,3)(-4) = ?$

11. Wykonać mnożenia:

- $(-2)(-a) = ?$; $(-3)(+x) = ?$; $(-a)(-1) = ?$; $(+b)(-3) = ?$;
- $(-a)(+b)(-c) = ?$; $(-x)(-y)(-z) = ?$; $(+x)(-y)(+z) = ?$;
- $(-3)(+2)(-a) = ?$; $(-1)(-x)(+3) = ?$; $(-a)(-3)(-b) = ?$;

12. Wykonać mnożenia:

- $(-5a)(+3) = ?$ $(-2a)(-4) = ?$ $(+4a)(-1) = ?$ $(+2a)(+3) = ?$
- $(-\frac{2}{3}x)(-3) = ?$ $(+\frac{3}{4}x)(-6) = ?$ $(-3x)(+\frac{2}{3}) = ?$
- $(-5a)(-\frac{7}{10}) = ?$ $(-\frac{2}{3}a)(+\frac{9}{8}) = ?$ $(+\frac{4}{5}a)(+\frac{3}{2}) = ?$ $(+\frac{2}{3}a)(-\frac{3}{2}) = ?$
- $(-2)(+2a) = ?$ $(-\frac{3}{8})(-3a) = ?$ $(+\frac{3}{4})(-4a) = ?$ $(-2)(+\frac{1}{2}a) = ?$
- $(-5a)(-3b) = ?$ $(-\frac{3}{4}a)(+4b) = ?$ $(+2a)(+1\frac{1}{2}b) = ?$

** Uwzględnić uwagę do zadania 9b).

- $(+4a)(-2x) = ?$ $(-\frac{5}{8}a)(-9x) = ?$ $(-\frac{3}{8}a)(-\frac{9}{10}b) = ?$
- $\frac{2}{3}ab \cdot \frac{3}{4}xy = ?$ $-\frac{3}{8}ax \cdot \frac{4}{5}by = ?$ $\frac{2}{3}ab \cdot (-\frac{3}{4}xy) = ?$

13. Wykonać mnożenia:

- $(a-b)c = ?$ $(-a+b)c = ?$ $(-a-b)c = ?$
- $2(a+b) = ?$ $-3(-a+b) = ?$ $-(a-b) \cdot 4 = ?$
- $-\frac{2}{3}(a+b-c) = ?$ $-\frac{1}{2}(-a-b+c) = ?$
- $a(b-c+d) = ?$ $-(a-b+c)x = ?$
- $(4x+2y) \cdot 5 = ?$ $3(x-2y) = ?$ $7(x-2y) = ?$
- $4(x-3y+2) = ?$ $\frac{2}{3}(6x-12y-\frac{1}{2}) = ?$
- $(8x+4y-12) \cdot \frac{3}{4} = ?$ $(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y - 2) \cdot \frac{6}{5} = ?$

14. Obliczyć wartości następujących wyrażeń dla wartości liter obok nich wymienionych:

- $5a - 3b$; $a = +4$; $b = +5$;
- $-4a - 2b$; $a = -\frac{3}{2}$; $b = +3$;
- $-2a + 5b$; $a = -\frac{3}{4}$; $b = -\frac{3}{8}$;
- $-a - \frac{3}{4}b$; $a = -3$; $b = +4$;
- $2x - 3y + 5z$; $x = -0,5$; $y = -2,4$; $z = -0,24$;
- $-ab + cd$; $a = -3$; $b = -2$; $c = +5$; $d = +2$;
- $ab - cd$; $a = -\frac{3}{4}$; $b = +\frac{6}{8}$; $c = -3$; $d = +1,3$;
- $-ab - cd$; $a = +4,5$; $b = -6$; $c = -9$; $d = -3$.

15. Wykonać działania:

- $3(x-y) + 2(z-u) = ?$
- $2(a-b) - 3(c+d) = ?$
- $2(a+b) - 5(c-d) = ?$
- $-3(-a+b) + 2(c-d) = ?$
- $-3(-a-b) - 4(c+d) = ?$
- $2(a-b) - 3(-c+d) = ?$

16. Zredukować:

- $a + a$, $a + a + a$, $a + a + a + a$, $a + a + a + a + a$;
- $-a - a$, $-a - a - a$, $-a - a - a - a$, $-a - a - a - a - a$;
- $\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}a$, $-\frac{1}{5}a - \frac{1}{5}a - \frac{1}{5}a$, $-\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}a$, $\frac{1}{6}a + \frac{1}{6}a$;
- $5a + 3a$, $5a - 3a$, $-5a + 3a$, $-5a - 3a$;
- $3x + x$, $-3x + x$, $-3x - x$, $3x - x$;
- $2x - 5x + 4x$, $-x + 3x - 2x$, $5x - 7x - 2x$;
- $\frac{2}{3}x - \frac{5}{8}x + x$, $0,3x - 0,8x + 1,5x$, $\frac{3}{4}x - \frac{7}{12}x - \frac{5}{8}x$.

17. Zredukować wyrazy podobne w wielomianach:

- $5 + 2x - 14 + 8$;
- $6 - 2 + x - 5$;
- $2 - x - 3 + 7$;
- $6x - 5 - 5x + 3$;
- $x - 2 - 2x + 3$;
- $-x - 5 + 3x - 2$;
- $x + y + 2x - 3 - 3y - 4$;

- h) $2a - 5 + 2b - 3b - a + 4$;
 i) $a - 3b - 5 - 4b + 8b - a + 1$;
 j) $x - y + 2 - x + 2y - 6$;
 k) $x - 0,2y - 0,7 - 0,8y - 0,5x$;
 l) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y - \frac{5}{8}x - \frac{5}{8}y + \frac{1}{2}x$; m) $\frac{3}{8} - \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}y + x + y - 1$;
 n) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}a + \frac{5}{8}a - b + \frac{3}{4}b - \frac{1}{2}$.

18. Wykonać działania:

- a) $(2a - 4) + (5a + 3) = ?$ $2a - 4 + 5a + 3 = 7a - 1$
 b) $(3x + y - 2) + (-x - y + 3) = ?$
 c) $(x + y - z) + (-x + y - 2z) + (x - y) = ?$
 d) $(3x + 2y - 4) + (x - 4y + 3) + (-x + 2y + 1) = ?$
 e) $3x - (2x + 1) = ?$ f) $(x + 1) - (-x + 2) = ?$
 g) $(5x - 3) - (2x - 4) = ?$ h) $(-x + 3) - (5 - x) = ?$
 i) $4a - (3a - b + 1) = ?$ j) $3 - (x - y + 2) = ?$
 k) $(x - y) - (x + y - 1) = ?$
 l) $(x + y) - (x - y + 1) = ?$
 m) $(a - b) - (2a + b) + (3a + 2b) - (-a + b) = ?$
 n) $(2x - 1) - (3x - 2) - (x + 1) + (3x + 1) = ?$
 o) $3x - (2y + 1) - (x - y - 2) + (3x + y - 1) = ?$
 p) $-(a + b + c) + (-a + b + c) + (a - b + c) + (a + b - c) = ?$
 r) $(a + b + c) - (a - b - c) - (-a + b - c) - (-a - b - c) = ?$
 s) $[a + (b - c)] - [a - (b + c)] - [a - (b - c)] = ?$
 t) $2x - [x - (2x - 1)] - [2x - (3x + 2)] = ?$
 u) $x - \{2x - [4x - (x + 1)]\} = ?$

19. Wykonać działania:

- a) $5(x + y - 3) + 4(2x - y + 1) + 3(x + y - 4) = ?$
 b) $2(x - 3) + 3(2x + 2) + (4x - 6) \cdot 2 = ?$
 c) $3(2x - y + 1) - 4(x - 2y + 1) - 2(-x + 3y) = ?$
 d) $2(x + y + z) - 3(x - 2y - z) - 4(-x + y + z) = ?$
 e) $-(x - 2y + z) - 3(-x + 2y - z) - 2(x - 2y - z) = ?$
 f) $2(x + y) - 3(y - 2) + 4(x - 1) - 5(x - y - 1) = ?$
 g) $\frac{2}{3}(x - 6) - \frac{3}{4}(2x + 5) - \frac{5}{8}(2x - 3) = ?$

20. Wykonać mnożenia:

- a) $(a + b)(c + d) = ?$ b) $(a - b)(c + d) = ?$
 c) $(a + b)(c - d) = ?$ d) $(a - b)(c - d) = ?$
 e) $(-a + b)(c - d) = ?$ f) $(-a - b)(c - d) = ?$
 g) $(x + 1)(y - 2) = ?$ h) $(-x - 1)(2a + 4) = ?$

- i) $(x - 3)(-y + 2) = ?$ j) $(2x + 3)(a - 2) = ?$
 k) $(3x - 5)(2a + 1) = ?$ l) $(5a - 3)(4b - 5) = ?$

21. a) Jak zmieni się* iloczyn ab , jeżeli do pierwszego czynnika dodamy x ? Od czego zależy, czy iloczyn wzrośnie, czy zmniejszy się? Sprawdź przyjmując za a , b i x rozmaite szczegółowe wartości względne.

b) Jak zmieni się* iloczyn ab , jeżeli do jednego czynnika dodamy x , a do drugiego y ? Obliczyć tę zmianę, jeżeli: 1) $a = 7$, $b = 10$, $x = 0,1$, $y = 0,2$; 2) $a = -5$, $b = +8$, $x = +1$, $y = -2$.

c) W fabryce zajętych było w pierwszym roku a robotników, a każdy pobierał m zł za dzień pracy. W drugim roku zmniejszono liczbę robotników o b , a pozostałym podniesiono płacę dzienną o n zł. O ile zł więcej (mniej) wypłacała fabryka dziennie robotnikom w drugim roku? [$a = 23$; $b = 5$; $m = 3,5$; $n = 0,4$].

d) Na zawodach wyznaczono 4 nagrody. Pierwsza nagroda wynosiła a zł, a każda następna była o b zł mniejsza od poprzedniej. Ile wynosiła suma wszystkich nagród? [$a = 50$, $b = 8$].

e) Z dwóch miast oddalonych od siebie o s km wyjeżdżają równocześnie naprzeciw siebie dwaj cykliści. Pierwszy przebywa w jednej minucie c m, drugi $\frac{2}{3}c$ m. Jak daleko będą od siebie po t minutach? [$s = 32$, $c = 240$, $t = 70$].

f) Kupiec kupił a kg towaru po x zł za 1 kg. Z tego sprzedał b kg, zarabiając y zł na każdym kg. Resztę towaru sprzedał ze stratą y zł na każdym kg. Ile zarobił (stracił)? Czy wartość x wpływa na wynik? Przekształcić wzór na wygodny do rachunku i obliczyć zysk (stratę), przyjmując: 1) $a = 115$; $b = 76,5$; $y = 0,85$; 2) $a = 115$; $b = 40,5$; $y = 0,85$.

g) Uczeń miał pieniądze na kupno a zeszytów po x gr i $2a$ zeszytów droższych o n gr na sztuce. Przez pomyłkę kupił jednak a zeszytów droższych i $2a$ tańszych. Ile miał pieniędzy? ile wydał? ile mu zostało? Sprawdzić, przyjmując za a , n i x dowolne wartości szczegółowe.

h) Za zebrane pieniądze miał uczeń kupić a zeszytów po x gr i b zeszytów po y gr. Pierwsze zeszyty okazały się jednak droższe o 3 gr, a drugie tańsze o 2 gr na sztuce. Ile miał

* Uwzględnić uwagę do zadania 9 d.

pieniędzy? Ile zapłacił za zeszyty? Ile pieniędzy pozostało (zabrakło) uczniowi? [$a=17$; $b=15$; $x=22$; $y=15$].

22. Zakładając, gdzie potrzeba, że dzielnik jest różny od zera, wykonać dzielenia:

- a) $(+x) : (-x)$; $(-x) : (+x)$; $(-x) : (-x)$;
 $(+x) : (+x)$;
 b) $(+a) : (+1)$; $(+a) : (-1)$; $(-a) : (+1)$;
 $(-a) : (-1)$;
 c) $(+4a) : (-2)$; $(-6a) : (-3)$; $(-5a) : (+5)$;
 $(+4a) : (+4)$;
 d) $(+3a) : (+a)$; $(-2a) : (-a)$; $(+4a) : (-a)$;
 $(-2a) : (+a)$;
 e) $ab : a$; $2ab : b$; $3ax : x$; $\frac{3}{4}ab : a$; $5ax : a$;
 f) $(+4a) : (-2a)$; $(-6a) : (-2a)$; $(-3a) : (-3a)$;
 g) $8ab : 2a$; $6ax : 3x$; $5ax : 5a$; $4ab : 2a$;
 h) $\frac{2}{3}abc : \frac{5}{6}c$; $abc : \frac{2}{3}a$; $\frac{3}{4}ab : 3a$; $\frac{4}{5}ab : 4ab$;
 i) $(6a - 12b + 2c) : 2 = ?$ j) $(4a + 20b - 8c) : 4 = ?$
 k) $(2a - 4b - 2c) : (-2) = ?$
 l) $(-\frac{2}{3}a + b - 4c) : (-2) = ?$
 m) $(2ax - 3bx + x) : x = ?$
 n) $(2ab - 3bc - b) : (-b) = ?$
 o) $(a - 2b - 3) : (-\frac{6}{5}) = ?$ p) $(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{6}) : (+\frac{5}{12}) = ?$

23. Napisać w postaci ułamków o mianownikach całkowitych datnich:

- a) $-\frac{2}{5}$; b) $\frac{1}{-5}$; c) $\frac{2a}{-3}$; d) $\frac{2x-1}{-3}$; e) $\frac{-3x+4}{-4}$;
 f) $-\frac{3}{\frac{5}{4}}$; g) $\frac{3a}{\frac{2}{4}}$; h) $\frac{2a+3}{\frac{5}{6}}$; i) $\frac{2a-1}{-\frac{3}{4}}$; j) $\frac{-x+1}{-\frac{2}{3}}$

24. Uprościć ułamki:

- a) $\frac{4x}{6}$; b) $\frac{10a}{15}$; c) $\frac{7x}{77}$; d) $\frac{4x+8}{6}$; e) $\frac{10x+15}{25}$;
 f) $\frac{2x-4y}{4}$; g) $\frac{4a-2}{8}$; h) $\frac{6x-6}{12}$; i) $\frac{3x-9y-3}{6}$;
 j) $\frac{2a-4}{4}$; k) $\frac{5x-10y-5}{10}$; l) $\frac{15-5x}{20}$

25. Wykonać działania:

- a) $\frac{a}{4} + \frac{a}{6} - \frac{3a}{8} = ?$ b) $\frac{6x}{5} - \frac{x}{10} + \frac{x}{15} - \frac{x}{6} = ?$
 c) $2x - \frac{3x}{2} = ?$ d) $x + \frac{4x}{5} = ?$ e) $3x - \frac{6x}{5} = ?$

- f) $\frac{2x+3}{10} + \frac{3x-8}{10} = ?$ g) $\frac{6x-5}{4} - \frac{2x-1}{4} = ?$
 h) $\frac{2a-3}{4} + \frac{a+1}{2} = ?$ i) $\frac{x+3}{6} - \frac{x+4}{8} = ?$
 j) $\frac{x-2y+1}{4} - \frac{x-3y-1}{6} = ?$ k) $\frac{2x-3}{6} - \frac{3x+1}{9} = ?$
 l) $x + \frac{a-x}{2} = ?$ m) $a - \frac{a+b}{2} = ?$ n) $x - \frac{x-y}{2} = ?$
 o) $2x+1 - \frac{5x+2}{3} = ?$ p) $x-2 + \frac{5-x}{2} = ?$
 r) $2x - \frac{5x-y+1}{3} = ?$ s) $4x-y - \frac{7x-2y+1}{2} = ?$

26. Wykonać działania:

- a) $\frac{3x}{2} \cdot 5 = ?$ b) $\frac{5a}{4} \cdot 6 = ?$ c) $\frac{x}{3} \cdot 12 = ?$
 d) $\frac{3x}{4} \cdot \frac{1}{2} = ?$ e) $\frac{3}{4} \cdot \frac{2a}{5} = ?$ f) $\frac{2a}{3} \cdot \frac{3}{4} = ?$
 g) $3 \cdot \frac{x-2}{4} = ?$ h) $\frac{2x+1}{3} \cdot 6 = ?$ i) $\frac{3a-4}{6} \cdot 4 = ?$
 j) $\frac{2}{3} \cdot \frac{x+y}{2} = ?$ k) $\frac{3x-1}{2} \cdot \frac{4}{5} = ?$ l) $\frac{2x-4}{5} \cdot \frac{15}{4} = ?$
 m) $\frac{2x+1}{3} : 2 = ?$ n) $\frac{4x+2x}{5} : \frac{2}{3} = ?$ o) $\frac{x+y}{2} : \frac{1}{2} = ?$

27. Wykonać działania:

- a) $2x-3 \cdot \frac{x-1}{2} = ?$ b) $x-2 \cdot \frac{x-y}{3} = ?$
 c) $3 \cdot \frac{x+2}{4} - 5 \cdot \frac{x+1}{6} = ?$ d) $2 \cdot \frac{3x}{5} - 3 \cdot \frac{x-1}{10} = ?$
 e) $4x-2 + 3 \cdot \frac{x-2}{2} = ?$ f) $4 \cdot \frac{x-1}{6} - 3 \cdot \frac{x-2}{2} = ?$
 g) $3x-2 \cdot \frac{2x+z-5}{3} + z-5 = ?$
 h) $7x-2y-4 \cdot \frac{8x-2y+5}{5} + 4 = ?$
 i) $2x-3y-6 \cdot \frac{x-2y-1}{4} - 2 = ?$
 j) $8 \cdot \frac{y-3z-3}{12} - y + 2z + 1 = ?$

W każdym z następujących zadań ułożyć najpierw wzór rozwiązujący zadanie, następnie (jeżeli można) przekształcić

otrzymane wyrażenie tak, aby było możliwie proste, a wreszcie obliczyć wartość wyrażenia dla podanych wartości liter.

a) Za k zł kupiono a q drzewa i b q węgla. Za 1 q drzewa płacono m zł. Ile płacono za 1 q węgla? [$k=91,5$; $a=15$; $m=3,2$] $k = ?$

b) Kupiec sprowadził a q nawozów sztucznych, płacąc m zł za 1 q ; koszt przewozu wynosił n zł. Towar sprzedają po $2m$ zł za 1 q . Ile q musi sprzedać, aby za otrzymane pieniądze móc kupić taką samą ilość towaru i opłacić koszt przewozu? [$a=250$; $m=8,4$; $n=787,5$]

c) Kupiec sprowadził a sztuk płótna po b zł za sztukę i chciał zarobić na całym towarze c zł. Po ile zł musi sprzedawać sztukę? [$a=22$; $b=21,8$; $c=165$]

d) Handlarz kupił a t drzewa po m zł za 1 t i $2a$ t po cenie niższej o n zł za 1 t . Ile kosztowała go średnio 1 t drzewa? [$a=38$; $m=24,5$; $n=3,6$]

e) Kapitał k zł złożono na $p\%$. Jaką wartość będzie miał ten kapitał po roku? [$k=485,6$; $p=5,5$]

f) Pompa miała dostarczać a l wody na 1 min. Z powodu wadliwej konstrukcji dostarcza o $p\%$ mniej. Ile hl wody dostarczy ta pompa w t godz.? [$a=55$; $p=7,5$; $t=4$]

g) Czwartą część kapitału k zł umieszczono na $p\%$, a resztę na $(p-r)\%$. Jaką wartość będzie miał ten kapitał po a miesiącach? [$k=2800$; $p=7,5$; $r=2,5$]

h) Stopiono a kg mosiądzu zawierającego $p\%$ cynku z $2a$ kg mosiądzu zawierającego $r\%$ cynku. Ile kg cynku będzie zawierał stop? [$a=7,3$; $p=23$; $r=31$]

i) Znaleźć średnią arytmetyczną* ułamków: $\frac{x-3}{4}$, $\frac{1-x}{8}$ i $\frac{3x-1}{8}$. [$x=-9$]

j) Na wyścigach wyznaczono 4 nagrody. Pierwsza nagroda wynosiła a zł, a każda następna była o b zł mniejsza od połowy poprzedniej. Ile zł wynosiła suma wszystkich nagród? [$a=1800$; $b=100$]

k) Uczeń A ma x zł; uczeń B ma o m zł więcej, niż uczeń A ; uczeń C ma o m zł mniej, niż uczeń A ; ile mają razem?

* Przez średnią arytmetyczną trzech liczb rozumiemy trzecią część ich sumy.

lową tej kwoty, którą mają A i B razem. Ile zł mają wszyscy trzej uczniowie razem? [$x=3,2$; $m=0,5$]

l) Miałem a zł; wydałem najpierw 3 zł i połowę pozostałej reszty; następnie wydałem 1 zł i połowę pozostałej reszty. Ile mi jeszcze pozostało? [$a=25$]

Rozdział III

Równania i układy równań stopnia pierwszego

§ 1. Twierdzenia o równościach.

Przypominamy następujące twierdzenia: Jeżeli do równych liczb dodamy równe, otrzymamy równe sumy; jeżeli od równych liczb odejmiemy równe, otrzymamy równe różnice; jeżeli równe liczby pomnożymy przez równe, otrzymamy równe iloczyny; jeżeli równe liczby podzielimy przez równe (różne od zera), otrzymamy równe ilorazy. Twierdzenia te wyrażamy w innej nieco postaci; a mianowicie:

Równość pozostaje prawdziwą, jeżeli: 1) do obu stron dodamy tę samą liczbę; 2) od obu stron odejmiemy tę samą liczbę; 3) obie strony pomnożymy przez tę samą liczbę; 4) obie strony podzielimy przez tę samą liczbę, różną od zera.

Do tych twierdzeń dołączymy jeszcze następujące, oczywiste bezpośrednio:

5) Równość pozostaje prawdziwą, jeżeli jakiekolwiek wyrażenie w równości zastąpimy wyrażeniem równym. W szczególności pozostaje równość prawdziwą, jeżeli po jednej stronie lub po obu stronach wykonamy naznaczone działania.

Np.: Napiszmy w równości: $(-5-3) \cdot (-2) = 16$ zamiast $-5-3$ wyrażenie równe $2-10$, a otrzymamy równość prawdziwą:

$$(2-10) \cdot (-2) = 16.$$

Napiszmy w równości: $(a+b+c)d = ad+bd+cd$ po prawej stronie zamiast $ad+bd$ wyrażenie równe $(a+b)d$, a otrzymamy równość prawdziwą: $(a+b+c)d = (a+b)d+cd$.

Jeżeli w równości $4a + (5a-2a) = 7a$ wykonamy działanie w nawiasie, otrzymamy równość prawdziwą: $4a + 3a = 7a$.

§ 2. Określenie równania.

Próbujemy przy pomocy symboli matematycznych zapisać zagadnienie: „Znaleźć liczbę, której ośmiokrotność pomniejszona o 7 jest o 2 większa od jej pięciokrotności“.

Oznaczmy liczbę, o której znalezienie nam chodzi, literą x i nazwijmy ją *niewiadomą*. Ośmiokrotność tej liczby pomniejszona o 7 wynosi $8x - 7$; jej pięciokrotnością jest $5x$; liczbą większą o 2 od $5x$ jest $5x + 2$. W zagadnieniu żąda się znalezienia takiej wartości dla x , aby było:

$$8x - 7 = 5x + 2.$$

Wyrażenia $8x - 7$ i $5x + 2$, połączone znakiem $=$, nie tworzą jednak równości. Łącząc je tym znakiem, nie chcieliśmy bynajmniej stwierdzić, że te wyrażenia mają jednakowe wartości dla wszelkich wartości x . Chodziło nam tylko o zanotowanie pytania, dla jakiej wartości x oba te wyrażenia mają równe wartości. Nazwiemy $8x - 7 = 5x + 2$ równaniem.

Dwa wyrażenia, z których przynajmniej jedno zawiera niewiadomą, połączone znakiem równości, tworzą *równanie*; równanie zawiera pytanie, dla jakiej wartości niewiadomej wyrażenie po lewej stronie znaku równości ma taką samą wartość, jak wyrażenie po stronie prawej. Niewiadomą oznaczamy zwykle jedną z końcowych liter abecadła: $x, y, z, u, v, \dots$. Liczba, która podstawiona za niewiadomą sprawdza równanie, t. j. sprawia, że wyrażenie po lewej stronie znaku równości przyjmuje taką samą wartość, jak wyrażenie po stronie prawej, nazywa się *pierwiastkiem równania*. *Rozwiązać równanie* znaczy obliczyć pierwiastek (lub pierwiastki) równania. Wyrażenia w równaniu połączone znakiem równości nazywamy *stronami równania*, kolejno *lewą* i *prawą*. *Sprawdzić równanie* znaczy podstawić za niewiadomą pierwiastek równania, obliczyć oddzielnie wartości lewej i prawej strony i stwierdzić, że obie są równe.

Przykłady:

1. Równanie $8x - 7 = 5x + 2$ ma pierwiastek 3.

Sprawdzenie:

$$\text{Lewa strona: } L = 8 \cdot 3 - 7 = 17;$$

$$\text{Prawa strona: } P = 5 \cdot 3 + 2 = 17.$$

$$\text{Zatem: } L = P.$$

2. Równanie: $x(x - 1) = 2(2x - 3)$ ma pierwiastki 2 i 3;

$$\text{równanie: } x(x - 3) = \frac{x - 3}{x} \text{ ma pierwiastki } -1, +1 \text{ i } +3.$$

Sprawdź!

3. Równanie: $x \cdot x = -4$ nie ma pierwiastków. Żadna bowiem liczba (ani dodatnia, ani ujemna, ani zero) pomnożona przez siebie nie daje

na iloczyn liczby ujemnej. Nie można jednak powiedzieć, że równanie $x \cdot x = -4$ jest fałszywe, bo pytanie fałszywem być nie może. Na pytanie, postawione w tem równaniu: „Jaka liczba pomnożona przez siebie daje na iloczyn -4 ?“, mamy zupełnie poprawną odpowiedź: „żadna“.

4. Równanie: $x + 2 = 2 + x$ ma niezliczoną ilość pierwiastków; każda liczba sprawdza to równanie.

Przykłady te wskazują, że są równania, które mają jeden, kilka, a nawet niezliczoną ilość pierwiastków. Są też równania, nie mające wcale pierwiastków.

Dotychczas mówiliśmy o równaniach z jedną niewiadomą. Zupełnie tak samo określamy równania z dwiema, trzema i t. d. niewiadomymi.

Np.: Równanie $x + 5y = 7$ jest równaniem z dwiema niewiadomymi x i y i zawiera pytanie, dla jakich wartości x i y ma wyrażenie $x + 5y$ wartość 7.

§ 3. Rozwiązywanie równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą.

Przykład 1. Rozwiązać równanie:

$$(3x + 4) - 2(x + 2) = 3(2x - 1) - 2(3x - 5).$$

Założmy, że równanie to ma pierwiastek i pomyślny sobie ten pierwiastek podstawiony za x . Wtedy równanie przechodzi w równość prawdziwą. Wykonajmy działania naznaczone po obu stronach tej równości, a otrzymamy (§ 1 tw. 5) równość prawdziwą dla tej samej wartości x :

$$3x + 4 - 2x - 4 = 6x - 3 - 6x + 10, \text{ czyli:}$$

$$x = 7.$$

Dochodzimy do wyniku: Jeżeli dane równanie ma pierwiastek, to może nim być tylko liczba 7. Że 7 jest rzeczywiście pierwiastkiem danego równania, stwierdzamy zapomocą sprawdzenia:

$$L = (21 + 4) - 2(7 + 2) = 25 - 2 \cdot 9 = 25 - 18 = 7,$$

$$P = 3(14 - 1) - 2(21 - 5) = 3 \cdot 13 - 2 \cdot 16 = 39 - 32 = 7;$$

$$L = P.$$

Z tego przykładu wysnuwamy twierdzenie:

1. Jeżeli dane równanie ma pierwiastek, to ten pierwiastek sprawdza także równanie, które otrzymamy, jeżeli po obu stronach danego równania wykonamy naznaczone działania. Wypowiadamy to krótko zdaniem:

Po obu stronach równania wolno wykonać naznaczone działania.

Dane w przykładzie 1 równanie udało nam się dlatego łatwo rozwiązać, że sprowadziliśmy je do postaci $x = 7$. Widoczne jest, że ostatnie równa-

nie ma tylko jeden pierwiastek 7, bo żadna inna liczba napisana za x nie sprawdzi tego równania. Będziemy się starali każde równanie sprowadzić do takiej postaci.

Przykład 2. Rozwiązać równanie: $x - 7 = 8$.

Zakładamy, że równanie to ma pierwiastek i myślimy sobie ten pierwiastek podstawiony za x . Równanie dane wtedy sprawdza się i staje się równością prawdziwą. Odejmijmy od obu stron tej równości -7 albo co na jedno wychodzi, dodajmy $+7$ (§ 1 tw. 1 i 2). Ponieważ po lewej stronie $-7 + 7 = 0$, otrzymamy:

$$x = 8 + 7 \text{ czyli:}$$

$$x = 15.$$

Doszlśmy do wyniku: Jeżeli równanie $x - 7 = 8$ ma pierwiastek, to ten pierwiastek sprawdza także równanie $x = 8 + 7$ czyli $x = 15$. Leż ostatnie równanie ma jedyny pierwiastek 15. Tylko 15 może więc być pierwiastkiem danego równania. Że jest nim rzeczywiście, wskazują sprawdzenie:

$$L = 15 - 7 = 8, \quad P = 8; \quad L = P.$$

Z przykładu tego wysnuwamy twierdzenie:

2. Jeżeli dane równanie ma pierwiastek, to pierwiastek ten sprawdza także równanie, które otrzymamy, jeżeli do obu stron danego równania dodamy tę samą liczbę, albo jeżeli od obu stron równania odejmiemy tę samą liczbę. Krótko:

Do obu stron równania wolno dodać tę samą liczbę; od obu stron równania wolno odjąć tę samą liczbę.

Przykład 3. Rozwiązać równanie: $5x - 3 = 4x + 2$.

Stosując ostatnie twierdzenie, staramy się z lewej strony usunąć -3 a z prawej $4x$. W tym celu należy od obu stron równania odjąć najpierw -3 , a następnie $+4x$. Skutek tych działań będzie taki, że po lewej stronie -3 odpadnie, a po prawej stronie pojawi się składnik $-(-3)$ czyli $+3$, po prawej stronie odpadnie $4x$, a po lewej przybędzie składnik $-4x$. Otrzymamy:

$$5x - 4x = 2 + 3, \text{ a po zredukowaniu:}$$

$$x = 5.$$

Rozumując, jak w poprzednich przykładach, dochodzimy, że tylko 5 może być pierwiastkiem danego równania. Że jest nim rzeczywiście, okazuje sprawdzenie:

$$L = 25 - 3 = 22, \quad P = 20 + 2 = 22; \quad L = P.$$

Aby wygodnie opisać powyższe postępowanie, wprowadzimy następującą nazwę.

Jeżeli po którejkolwiek stronie równania znajduje się suma algebraiczna kilku wyrażeń, to składniki tej sumy nazywać będziemy *wyrazami równania*. Wrazem równania nazywać będzie

my także wyrażenie, nie mające postaci sumy, jeżeli znajduje się samo po jednej stronie równania.

Tak np. w równaniu $2x - 7 + 5 = 6x$ wyrazami równania są: $+2x$, -7 , $+5$ i $+6x$.

Na podstawie przykładu 3 powiemy:

Którykolwiek wyraz równania wolno przenieść z jednej strony równania na drugą, zmieniając znak jego na przeciwny, t. j. którykolwiek wyraz równania wolno po jednej stronie równania opuścić, dopisując równocześnie po drugiej stronie taki sam wyraz ze znakiem przeciwnym.

Wyraz „wolno“ należy w tem twierdzeniu rozumieć tak, jak w poprzednich, a mianowicie, że jeżeli dane równanie ma pierwiastek, to ten pierwiastek sprawdza także równanie, które otrzymamy z danego, przenosząc jeden jego wyraz na stronę przeciwną.

Przykład 4. Rozwiązać równanie: $2x = 7$.

Zakładamy, że dane równanie ma pierwiastek i myślimy sobie ten pierwiastek podstawiony za x . Obie strony otrzymanej równości dzielimy przez 2 (mnożymy przez $\frac{1}{2}$) i otrzymamy (§ 1, tw. 3 i 4):

$$x = 3\frac{1}{2}.$$

Rozumując, jak w poprzednich przykładach, znajdujemy, że tylko $3\frac{1}{2}$ może być pierwiastkiem danego równania. Że jest nim rzeczywiście, okazuje sprawdzenie:

$$L = 2 \cdot 3\frac{1}{2} = 7, \quad P = 7; \quad L = P.$$

Z tego przykładu wysnuwamy twierdzenie:

3. Jeżeli dane równanie ma pierwiastek, to ten pierwiastek sprawdza także równanie, które otrzymamy, jeżeli obie strony danego równania przez tę samą liczbę pomnożymy, lub przez tę samą liczbę różną od zera podzielimy. Krócej:

Obie strony równania wolno przez tę samą liczbę pomnożyć lub przez tę samą liczbę różną od zera podzielić.

Powyższe twierdzenia wystarczają do rozwiązania wielu równań. Jak je w praktyce stosujemy, wyjaśnimy na dalszych przykładach.

Przykład 5. Rozwiązać równanie: $3(x + 5) = 13 + x$.

Wykonujemy naznaczone działania: $3x + 15 = 13 + x$;

Przenosimy wyrazy zawierające niewiadomą na lewą stronę, a wyrazy wiadome na prawą

$$\text{stronę: } 3x - x = 13 - 15;$$

$$\text{Redukujemy: } 2x = -2;$$

$$\text{Dzielimy obie strony przez 2: } x = -1.$$

$$\text{Sprawdzenie: } L = 3(-1 + 5) = 3 \cdot 4 = 12, \quad P = 13 - 1 = 12; \quad L = P.$$

Jeżeli przy rozwiązywaniu równania otrzymamy po jednej stronie niewiadomą z jakimś współczynnikiem, a po drugiej stronie liczbę wiadomą, należy w celu rozwiązania równania obie strony równania przez współczynnik przy niewiadomej podzielić.

Przykład 6. Rozwiązać równanie:

$$3 - 4(2x + 5) = -7(1 + x).$$

Wykonujemy działania:

$$3 - 8x - 20 = -7 - 7x;$$

Porządkujemy: $-8x + 7x = -7 - 3 + 20;$

Redukujemy: $-x = 10;$

$$x = -10.$$

Mnożymy obie strony przez -1 :

Sprawdzenie:

$$L = 3 - 4(-20 + 5) = 3 - 4(-15) = 3 + 60 = 63,$$

$$P = -7(1 - 10) = -7(-9) = 63; \quad L = P.$$

Jeżeli przy rozwiązywaniu równania otrzymamy niewiadomą ze znakiem $-$, należy obie strony równania przez -1 pomnożyć lub podzielić.

Przez -1 wolno zresztą zawsze obie strony równania pomnożyć. Ponieważ przez to bezwzględne wartości wyrażeń nie ulegają zmianie, a znaki zmieniają się na przeciwne, to:

W równaniu wolno znaki wszystkich wyrażeń zmienić równocześnie na przeciwne.

Przykład 7. Rozwiązać równanie: $\frac{x}{3} + 2 = x - 2.$

Mnożymy obie strony przez 3: $x + 6 = 3x - 6;$

Porządkujemy: $x - 3x = -6 - 6;$

Redukujemy: $-2x = -12;$

Dzielimy obie strony przez -2 : $x = 6.$

Sprawdzenie: $L = 2 + 2 = 4, \quad P = 6 - 2 = 4; \quad L = P.$

Jeżeli w równaniu znajduje się ułamek, to uwalniamy równanie od ułamka, mnożąc obie strony równania przez liczbę równą mianownikowi ułamka.

Przykład 8. Rozwiązać równanie:

$$x - \frac{x}{4} = \frac{x}{6} + 7.$$

Sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika:

$$x - \frac{3x}{12} = \frac{2x}{12} + 7.$$

Mnożymy obie strony przez 12:

$$12x - 3x = 2x + 84;$$

Porządkujemy: $12x - 3x - 2x = 84;$

Redukujemy: $7x = 84;$

$$x = 12.$$

Dzielimy obie strony przez 7:

Sprawdzenie: $L = 12 - 3 = 9, \quad P = 2 + 7 = 9; \quad L = P.$

Aby równanie uwolnić od ułamków, sprowadzamy wszystkie

ułamki do wspólnego mianownika, a następnie mnożymy obie strony równania przez wspólny mianownik.

Mnożenie przez wspólny mianownik można sobie ułatwić, pamiętając, że mnożąc ułamek (iloraz) przez mianownik (dzielnik) otrzymujemy licznik (dzielną). Można więc sprowadzanie ułamków do wspólnego mianownika i mnożenie obu stron równania przez wspólny mianownik wykonywać równocześnie.

Przykład 9. Rozwiązać równanie:

$$5 - \frac{x-1}{8} = \frac{x+1}{6}.$$

Mnożymy obie strony przez 24:

$$120 - (3x - 3) = 4x + 4;$$

Wykonujemy działania:

$$120 - 3x + 3 = 4x + 4;$$

Porządkujemy:

$$-3x - 4x = 4 - 120 - 3;$$

Redukujemy:

$$-7x = -119;$$

Dzielimy obie strony przez -7 :

$$x = 17.$$

Sprawdzenie: $L = 5 - \frac{16}{8} = 5 - 2 = 3,$

$$P = \frac{18}{6} = 3; \quad L = P.$$

Zestawmy teraz wszystkie czynności, które prowadzą do rozwiązania równania:

Mając rozwiązać równanie:

1. Wykonujemy naznaczone działania (uwalniamy od nawiasów).

2. Jeżeli równanie zawiera ułamki, uwalniamy od nich równanie, mnożąc obie jego strony przez wspólny mianownik ułamków.

3. Porządkujemy równanie, t. j. przenosimy wyrazy zawierające niewiadomą na jedną stronę równania, a wyrazy wiadome na drugą.

4. Redukujemy wyrazy podobne.

5. Uwalniamy niewiadomą od współczynnika, dzieląc obie strony równania przez współczynnik przy niewiadomej.

6. Sprawdzamy.

Stosując czynności, opisane w punktach 1÷5, otrzymujemy z danego równania szereg równań, między którymi (wskutek twierdzeń 1, 2 i 3, wymienionych powyżej) zachodzi następujący związek: Jeżeli liczba jakaś sprawdza pierwsze równanie, to sprawdza i każde następne. Ostatnie równanie ma postać: $x = a$, gdzie a oznacza jakąś liczbę wiadomą, sprawdza się oczywiście tylko wtedy, jeżeli za x podstawimy a . Jeżeli więc dane równanie ma pierwiastek, to może nim być tylko liczba a . Należy jednak stwierdzić, że założenie nasze, że dane równanie ma pierwiastek, jest słuszne. Stwierdzamy to w punkcie 6. Sprawdzania zatem pomijać nie wolno; stanowi ono istotną część rozwiązania równania.

Sposobem, opisanym powyżej, rozwiązać można wszystkie równania, które po uporządkowaniu i zredukowaniu wyrażeń po-

dobnych zawierają niewiadomą tylko w potęgze pierwszej. Równania takie nazywamy *równaniami stopnia pierwszego z jedną niewiadomą*.

§ 4. Zastosowanie równań do rozwiązywania zagadnień.

Już przy wprowadzeniu równań (§ 2) widzieliśmy, że niektóre zagadnienia napisać można w postaci równania. Rozwiązując takie równanie, znajdziemy równocześnie rozwiązanie danego zagadnienia. Ujmowanie zagadnienia w postać równania nazywamy *układaniem równania*. Sposób rozwiązywania zagadnień przy pomocy równań wyjaśnimy na kilku przykładach:

Przykład 1. W oddziale A pewnej klasy jest 43 uczniów, a w oddziale B 35 uczniów. Ilu uczniów przejść ma z oddziału A do B, aby w obu oddziałach była jednakowa liczba uczniów?

Szukana liczbę uczniów, którzy przejść mają z oddziału A do B, oznaczamy literą x . Po przejściu x uczniów z oddziału A do B, będzie w oddziale A $(43 - x)$ uczniów, a w oddziale B $(35 + x)$ uczniów. W zagadnieniu pytamy się, dla jakiej wartości x oba te wyrażenia będą równe. Pytanie to wyrażamy równaniem:

$$43 - x = 35 + x.$$

Rozwiązując to równanie (rozwiąż!), otrzymamy: $x = 4$. Cztery uczniów ma więc przejść z oddziału A do B.

Sprawdzać należy zagadnienie, a nie tylko ułożone równanie. Przecież sprawdzamy również, czy równanie dobrze ułożyliśmy.

Sprawdzenie: Gdy z A przejdzie do B 4 uczniów, to w A będzie $43 - 4 = 39$ uczniów, a w B $35 + 4 = 39$ uczniów. Rzeczywiście więc liczba uczniów w obu oddziałach będzie jednakowa.

Przykład 2. Wydałem trzecią część swoich pieniędzy i pozostało mi o 2 zł więcej, niż połowa kwoty, którą miałem; ile miałem pieniędzy początkowo?

Początkowo miałem x zł. Pozostała kwota wynosi albo $x - \frac{1}{3}x$, albo $\frac{1}{2}x + 2$. Oba te wyrażenia mają być równe; zatem:

$$x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}x + 2.$$

Rozwiązując to równanie (rozwiąż!), otrzymamy: $x = 12$. Początkowo miałem 12 zł.

Sprawdzenie: Po wydaniu trzeciej części 12 zł, t. j. 4 zł, pozostało 8 zł, a więc rzeczywiście o 2 zł więcej niż połowa kwoty 12 zł.

Aby równanie ułożyć, rozstrzygamy najpierw, co obieramy za niewiadomą w danym zagadnieniu, i oznaczamy tę niewiadomą literą x . Następnie staramy się jakąś wielkość wyrazić w dwóch sposobach zapomocą x i danych liczb. Łącząc otrzymane wyrażenia znakiem równości, otrzymujemy równanie, którego pierwiastek

daje rozwiązanie zagadnienia. Sprawdzając należy zawsze zagadnienie tekstowe, a nie tylko ułożone równanie.

Przykład 3. Do 300 g tytoniu po 56 zł za kg chcemy dodać tyle g tytoniu po 44 zł za kg, aby otrzymać mieszankę po 48,8 zł za kg. Ile tytoniu drugiego gatunku należy dodać?

Ilość tytoniu drugiego gatunku w kilogramach oznaczmy x . Cenę mieszanki wyrazimy dwoma sposobami przy pomocy x i danych liczb:

1) Cena 0,3 kg tytoniu po 56 zł za kg i x kg tytoniu po 44 zł za kg wynosi: $0,3 \cdot 56 + x \cdot 44$.

2) Ze zmieszania obu gatunków otrzymamy $(0,3 + x)$ kg tytoniu po 48,8 zł za kg. Wartość tej mieszanki wynosi: $(0,3 + x) \cdot 48,8$.

Ponieważ oba sposoby obliczenia mają dać jednakowe liczby, otrzymamy:

$$0,3 \cdot 56 + 44x = (0,3 + x) \cdot 48,8.$$

Rozwiązując to równanie, znajdziemy $x = 0,45$. Tańszego gatunku należy dodać 450 g. Sprawdź!

Przykład 4. Ojciec ma 48 lat, a syn 18; po ilu latach będzie ojciec 3 razy starszy od syna?

Ze niewiadomą x uważamy ilość lat, po której ojciec będzie 3 razy starszy od syna. Po x latach będzie miał ojciec $48 + x$ lat, a syn $18 + x$. Stosownie do warunków zadania pierwsza liczba ma być 3 razy większa od drugiej; zatem:

$$48 + x = 3(18 + x).$$

Rozwiązując to równanie, znajdziemy: $x = -3$.

Ujemna wartość pierwiastka wymaga wyjaśnienia. Bezpośrednia odpowiedź: „ojciec będzie po -3 latach 3 razy starszy od syna” nie ma sensu i wskazuje na to, że zagadnienie rozwiązania nie posiada. I rzeczywiście; stosunek wieku ojca do wieku syna wynosi obecnie $48 : 18 = 2\frac{2}{3}$ i pomniejsza się w przyszłości coraz bardziej (stwierdź rachunkiem, jaką wartość będzie miał ten stosunek po 2, 3, 12 latach). W przyszłości nie może więc ojciec stać się 3 razy starszym od syna. Próbowaliśmy jednak nadać pewne znaczenie ujemnemu pierwiastkowi. Ponieważ czas przyszły liczyliśmy dodatnio (x oznaczało ilość lat, po której ojciec będzie 3 razy starszy od syna), to za ujemny próbowaliśmy uważać czas ubiegły. Ujemna wartość pierwiastka równania oznacza wtedy, że nie po pewnym czasie ojciec będzie 3 razy starszy od syna, lecz że był od syna 3 razy starszy przed 3 laty. I rzeczywiście miał wtedy ojciec 45 lat, syn 15.

§ 5. Równania z dwiema niewiadomymi.

Przykład. Za 4 q drzewa i 5 q węgla kamiennego zapłaciła pewna osoba 44,6 zł; ile kosztował 1 q drzewa, a ile 1 q węgla?

Oznaczając liczby, o które pytamy się w zagadnieniu, kolejno literami x i y , otrzymamy równanie:

$$4x + 5y = 44,6.$$

Po lewej stronie tego równania jest wielomian, którego jednym składnikiem jest x z jakimś współczynnikiem, a drugim y z jakimś współczynnikiem; po prawej stronie jest liczba wiadoma. Równanie takie nazywamy *równaniem stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi*.

Łatwo widzieć, że równanie takie nie wystarcza do wyznaczenia wartości niewiadomych. Gdyby jednak wiadoma była cena jednego q drzewa (np. $x=3,2$; $3,6$; 4 ; ...), to z danego równania moglibyśmy już obliczyć y . Otrzymalibyśmy bowiem dla y równania:

$$12,8 + 5y = 44,6; 14,4 + 5y = 44,6; 16 + 5y = 44,6; \dots,$$

a z nich wartości $y=6,36$; $6,04$; $5,72$; ..., które wraz z przyjętymi wartościami dla x sprawdzają dane równanie.

Równanie stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi nie wystarcza do wyznaczenia tych niewiadomych, podporządkowując jednak każdej wartości przyjętej dla jednej niewiadomej pewną wartość drugiej niewiadomej. Mówimy, że równanie takie jest nieoznaczone.

Uzupełnijmy nasze zadanie następującym warunkiem:

Druga osoba kupiła po tej samej cenie $3 q$ drzewa i $5 q$ węgla i zapłaciła $41,2$ zł.

Otrzymamy drugie równanie:

$$3x + 5y = 41,2,$$

które sprawdza się dla tych samych wartości x i y .

Łatwo widzieć, że zadanie staje się teraz oznaczonym; rozwiązując można np. zapomocą następującego rozumowania: Pierwsza osoba kupiła tyle q węgla, ile druga, a drzewa o $1 q$ więcej. Ponieważ zapłaciła o $3,4$ zł więcej od drugiej, to widocznie $1 q$ drzewa kosztował $3,4$ zł. Za $4 q$ drzewa zapłaciła pierwsza osoba $13,6$ zł, a resztę t. j. 31 zł za $5 q$ węgla; $1 q$ węgla kosztował $6,2$ zł. Układ równań: $4x + 5y = 41,2$ i $3x + 5y = 41,2$ ma rozwiązanie: $x=3,4$; $y=6,2$.

§ 6. Rozwiązywanie układu dwu równań z dwiema niewiadomymi.

Rozwiązać układ dwu równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi x i y znaczy znaleźć dwie liczby, któreby spełniały oba równania, gdy jedną z nich podstawimy za x , a drugą za y w obu równaniach.

Przykład 1. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 12, \\ 4x - 3y &= -1. \end{aligned}$$

Przyjmujemy, że istnieją liczby, które podstawione za x i y sprawdzają oba równania. Pomyślmy sobie, że w pierwszym równaniu

podstawiliśmy za x tę wartość i obliczmy odpowiednią wartość y . Otrzymamy:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 12, \\ 2y &= 12 - 3x, \\ y &= 6 - \frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

Ta wartość y wraz z przyjętą wartością x sprawdza także drugie równanie. Podstawiając tedy w drugim równaniu $6 - \frac{3}{2}x$ za y , otrzymamy:

$$4x - 3(6 - \frac{3}{2}x) = -1.$$

Takie równanie spełnia wartość x , która wraz z odpowiednią wartością y sprawdza układ równań. Rozwiązujemy to równanie:

$$\begin{aligned} 4x - 18 + \frac{9}{2}x &= -1, \\ 8x - 36 + 9x &= -2, \\ 17x &= 34, \\ x &= 2, \end{aligned}$$

Wartością x , sprawdzającą układ równań, może być tylko liczba 2. Podstawmy 2 za x w któremkolwiek z danych równań, np. w pierwszym. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} 6 + 2y &= 12, \text{ a stąd:} \\ 2y &= 6, \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Przystępując do rozwiązywania układu równań, założyliśmy, że istnieją dwie liczby, które podstawione za x i y sprawdzają oba równania. Przy tem założeniu znaleźliśmy, że takimi liczbami mogą być tylko wartości $x=2$, $y=3$. Że wartości te sprawdzają rzeczywiście oba równania układu, stwierdzić należy przez sprawdzenie. Oznaczając lewą stronę pierwszego równania L_1 , prawą stronę P_1 , lewą stronę drugiego równania L_2 , a prawą stronę P_2 , obliczamy:

$$\begin{aligned} L_1 &= 6 + 6 = 12, & P_1 &= 12; & L_1 &= P_1, \\ L_2 &= 8 - 9 = -1; & P_2 &= -1; & L_2 &= P_2. \end{aligned}$$

Wartości $x=2$, $y=3$ stanowią więc rzeczywiście jedyne rozwiązanie danego układu równań.

Metodę rozwiązywania układu dwu równań, której tu użyliśmy, nazywamy *metodą podstawiania*. Polega ona na tem, że z jednego równania wyrażamy jedną niewiadomą przez drugą i podstawiamy znalezione wyrażenie w drugim równaniu. Otrzymane równanie z jedną niewiadomą rozwiązujemy, a znaną wartość podstawiamy w któremkolwiek z danych równań. Z otrzymanego równania z jedną niewiadomą wyznaczamy drugą niewiadomą. Te znalezione wartości stanowią rozwiązanie danego układu równań, stwierdzamy przez sprawdzenie.

Odmianą tylko pewną metody podstawiania, jest *metoda porównania*. Polega ona na tem, że z obu równań układu wyrażamy samą niewiadomą przez drugą i łączymy otrzymane wyrażenia

znakiem równości. Uzyskujemy w ten sposób równanie z jedną niewiadomą, z którego tę niewiadomą wyznaczamy. Dalej postępujemy jak przy metodzie podstawiania.

Przykład 2. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 2, \\ 2x - 3y &= 7. \end{aligned}$$

Z pierwszego równania:

$$\begin{aligned} 3x &= 2 - 4y, \\ x &= \frac{2 - 4y}{3}. \end{aligned}$$

Z drugiego równania:

$$\begin{aligned} 2x &= 7 + 3y, \\ x &= \frac{7 + 3y}{2}. \end{aligned}$$

Oba wyrażenia dla x łączymy znakiem równości i rozwiązujemy otrzymane równanie:

$$\begin{aligned} \frac{2 - 4y}{3} &= \frac{7 + 3y}{2}, \\ 4 - 8y &= 21 + 9y, \\ -17y &= 17, \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Tę wartość podstawiamy w 2 równaniu: $2x + 3 = 7$,
a stąd: $2x = 4$,
 $x = 2$.

Sprawdzenie: $L_1 = 6 - 4 = 2$, $P_1 = 2$; $L_1 = P_1$.
 $L_2 = 4 + 3 = 7$, $P_2 = 7$; $L_2 = P_2$.

Przykład 3. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 39,3; \\ 3x + 5y &= 35,1. \end{aligned}$$

Zakładamy, że istnieje rozwiązanie układu, a więc, że istnieje para wartości x i y , która sprawdza oba równania układu. Jeżeli pomyślimy sobie te wartości podstawione w obu równaniach za x i y , wtedy oba równania stają się równościami, możemy więc do nich zastosować twierdzenia o równościach. Odejmijmy te równości stronami:

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 39,3; \\ 3x + 5y &= 35,1. \end{aligned} \quad \text{(Zmieniamy znaki na przeciwnie).}$$

Otrzymamy:

$$x = 4,2.$$

Podstawmy w pierwszym równaniu 4,2 za x . Otrzymamy:

$$\begin{aligned} 16,8 + 5y &= 39,3; \\ a \text{ stąd: } 5y &= 22,5; \\ y &= 4,5. \end{aligned}$$

Dochodzimy tedy do następującego wyniku: Jeżeli istnieje rozwiązanie danego układu równań, to może nim być tylko para wartości $x = 4,2$ i $y = 4,5$. Że te wartości stanowią rzeczywiście rozwiązanie danego układu, stwierdzamy zapomocą sprawdzenia:

$$\begin{aligned} L_1 &= 16,8 + 22,5 = 39,3; & P_1 &= 39,3; & L_1 &= P_1. \\ L_2 &= 12,6 + 22,5 = 35,1; & P_2 &= 35,1; & L_2 &= P_2. \end{aligned}$$

Zatem wartości $x = 4,2$, $y = 4,5$ stanowią rzeczywiście jedyne rozwiązanie danego układu równań.

Przykład 4. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 0, \\ x + 3y &= 15. \end{aligned}$$

Rozumując jak w przykładzie 2, dodajemy stronami oba równania. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} 5x &= 15, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Podstawiamy znaną wartość x np. w drugim równaniu:

$$\begin{aligned} 3 + 3y &= 15, \\ 3y &= 12, \\ y &= 4. \end{aligned}$$

Sprawdzenie: $L_1 = 12 - 12 = 0$, $P_1 = 0$; $L_1 = P_1$.
 $L_2 = 3 + 12 = 15$, $P_2 = 15$; $L_2 = P_2$.

Układ równań ma rozwiązanie: $x = 3$, $y = 4$.

Metoda rozwiązywania układu równań, wyjaśniona na ostatnich dwóch przykładach, nazywa się metodą *równych współczynników*. Znajduje ona zastosowanie wtedy, jeżeli w obu równaniach przy jednej niewiadomej są równe co do bezwzględnej wartości współczynniki. Dodając takie dwa równania (jeżeli równe bezwzględnie współczynniki mają znaki przeciwne) lub odejmując (jeżeli równe bezwzględnie współczynniki mają jednakowe znaki), otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą, z którego tę niewiadomą możemy wyznaczyć. Dalej postępujemy jak przy metodzie podstawiania.

Jeżeli współczynniki przy żadnej niewiadomej nie są równe, to przez pomnożenie jednego lub obu równań przez stosowne liczby można uzyskać przy jednej niewiadomej współczynniki równe. Przy wyszukaniu owych liczb, przez które należy mnożyć równania, może być pomocnym wzgląd na to, że równy współczynnik musi być wspólną wielokrotnością współczynników przy tej samej niewiadomej w pierwszym i w drugim równaniu.

Przykład 5. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 6x - 5y &= 10, \\ 4x - 3y &= 8. \end{aligned}$$

Aby uzyskać przy x w obu równaniach jednakowe współczynniki, należy pomnożyć oba równania przez stosowne liczby. Jednakowy współczynnik przy x będzie wspólną wielokrotnością liczb 6 i 4, a więc np. najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 6 i 4, t. j. 12. Pierwsze równanie pomnożymy przez 2, a drugie przez 3. Otrzymamy:

$$\begin{aligned} 12x - 10y &= 20, \\ 12x - 9y &= 24. \end{aligned}$$

Ten układ równań rozwiązujemy jak w przykładzie 1:

$$\begin{array}{r} + 12x - 10y = + 20, \\ - \quad + \quad - \\ 12x - 9y = 24; \\ \hline y = 4. \\ 4x - 12 = 8, \\ 4x = 20, \\ x = 5. \end{array}$$

Sprawdzenie:

$$\begin{array}{lll} L_1 = 30 - 20 = 10, & P_1 = 10; & L_1 = P_1. \\ L_2 = 20 - 12 = 8, & P_2 = 8; & L_2 = P_2. \end{array}$$

§ 7. Zastosowanie do rozwiązywania zagadnień.

Przykład 1. Kupiec sprowadził za 439 zł 50 kg kawy w dwóch gatunkach: po 8 zł i po 11 zł za kg. Ile kg kawy było każdego gatunku? **Zagadnienie** podane w przykładzie 1 rozwiązać w następujący sposób:

Pierwszego gatunku było x kg, drugiego y kg. **Zagadnienie** zawiera dwie niewiadome, ale także i dwa warunki, które można zapisać w postaci dwóch równań; a mianowicie:

1) Cały transport ważył 50 kg.

2) x kg kawy po 8 zł za kg i y kg po 11 zł za kg kosztuje 439 zł. Wyrażając te dwa warunki w postaci równań, otrzymamy:

$$\begin{array}{l} x + y = 50, \\ 8x + 11y = 439. \end{array}$$

Rozwiązując ten układ równań, znajdziemy: $x = 37$, $y = 13$; zatem kawy po 8 zł było 37 kg, a kawy po 11 zł było 13 kg.

Sprawdzenie: Kupiec sprowadził 37 kg + 13 kg = 50 kg zgodnie z pierwszym warunkiem zadania. Za 37 kg zapłacił $37 \cdot 8$ zł = 296 zł, a za 13 kg zapłacił $13 \cdot 11$ zł = 143 zł. Za cały transport zapłacił 296 zł + 143 zł = 439 zł, zgodnie z drugim warunkiem zadania.

Zagadnienia, zawierające dwie niewiadome, rozwiązywać można przy pomocy układu dwu równań z dwiema niewiadomymi. W tym celu należy najpierw rozstrzygnąć, które liczby uważamy za dane, a które za niewiadome; następnie należy wyrazić oddzielnie i łącznie oba warunki, które te niewiadome mają spełniać; a wreszcie należy ułożyć z każdego warunku równanie. Rozwiązanie otrzymanego układu równań daje rozwiązanie zadania.

Przykład 2. Podróżny obliczył, że jadąc rowerem przebędzie całą drogę w $2\frac{1}{3}$ godz. Ponieważ jednak w drodze popsuł mu się rower, musiał resztę drogi przebyć pieszo; wskutek tego podróż trwała $3\frac{1}{2}$ godz. Ile km przebył rowerem, a ile km piechotą, jeżeli rowerem jechał z prędkością 12 km/godz., a piechotą szedł z prędkością 5 km/godz.?

Rowerem przebył x km, piechotą y km.

Warunek 1. Suma dróg x i y jest tak wielka, jak droga, którą byłby w $2\frac{1}{3}$ godz., jadąc z prędkością 12 km/godz.

Warunek 2. Czas jazdy rowerem z prędkością 12 km/godz. i czas chodu z prędkością 5 km/godz. wynosi $3\frac{1}{2}$ godz.

Warunkom tym odpowiadają równania:

$$x + y = 12 \cdot 2\frac{1}{3}; \quad \frac{x}{12} + \frac{y}{5} = 3\frac{1}{2}.$$

Rozwiązując ten układ równań, znajdziemy: $x = 18$, $y = 10$.

Podróżny przebył 18 km rowerem i 10 km piechotą.

Sprawdzenie: Cała droga wynosiła $18 \text{ km} + 10 \text{ km} = 28 \text{ km}$. Do przebycia jej rowerem potrzebowałby podróżny $\frac{28}{12}$ godz. = $2\frac{1}{3}$ godz. zgodnie z warunkiem 1 zadania. Rowerem przebył jednak podróżny tylko 18 km, na co zużył $\frac{18}{12}$ godz. = $1\frac{1}{2}$ godz.; resztę drogi, t. j. 10 km przebył podróżny pieszo, na co zużył $\frac{10}{5}$ godz. = 2 godz. Cała podróż trwała $1\frac{1}{2}$ godz. + 2 godz. = $3\frac{1}{2}$ godz. zgodnie z warunkiem 2 zadania.

Zagadnienia z dwiema niewiadomymi można bardzo często rozwiązywać także przy pomocy równania z jedną tylko niewiadomą. Tak np. można zagadnienie podane w przykładzie 1 rozwiązać w następujący sposób:

Kawy pierwszego gatunku było x kg, drugiego gatunku $(50 - x)$ kg. Ponieważ 1 kg kawy pierwszego gatunku kosztował 8 zł, a drugiego gatunku 11 zł, to cały towar kosztował $x \cdot 8$ zł + $(50 - x) \cdot 11$ zł, która to suma według warunków zadania ma wynosić 439 zł. Stąd równanie: $8x + 11(50 - x) = 439$. Rozwiązując to równanie, dochodzimy do takiego samego wyniku jak poprzednio.

§ 8. Równania z trzema niewiadomymi.

Podobnie jak równanie z dwiema niewiadomymi, jest również równanie z trzema niewiadomymi równaniem nieoznaczonym. Można w nim bowiem za dwie niewiadome podstawić dowolne liczby, a trzecią niewiadomą wyznaczyć z otrzymanego równania (z jedną niewiadomą) tak, aby się dane równanie sprawdziło. Nieoznaczony jest również układ dwu równań z trzema niewiadomymi. Można w nim bowiem za jedną niewiadomą podstawić dowolną liczbę, a z otrzymanego układu równań z dwiema niewiadomymi wyznaczyć pozostałe niewiadome tak, aby układ równań się sprawdził. Dopiero układ trzech równań z trzema niewiadomymi staje się ogólnie oznaczonym. Aby uzyskać sposób rozwiązania takiego układu, przyglądnijmy się metodom rozwiązywania układu dwu równań z dwiema niewiadomymi. Zauważymy, że zmierzają one wszystkie do jednego celu: uzyskania równania z jedną niewiadomą przez wyrugowanie jednej niewiadomej z obu równań układu. Podobnie postąpimy z układem trzech równań z trzema niewiadomymi.

Aby rozwiązać układ trzech równań stopnia pierwszego z trzema niewiadomymi, *ruguje się* (eliminuje, usuwa) zapomocą metody podstawiania, porównania lub równych współczynników dwu równań jedną niewiadomą i uzyskuje się równanie z dwiema niewiadomymi. Następnie *ruguje się* tę samą niewiadomą z dwu innych równań i otrzymuje się drugie równanie z dwiema

niewiadomymi. Z otrzymanych dwu równań z dwiema niewiadomymi wyznacza się te dwie niewiadome; trzecią niewiadomą wyznacza się, podstawiając znalezione wartości w któremkolwiek z danych równań i rozwiązując otrzymane równanie. Przez sprawdzenie stwierdzamy, że znalezione liczby stanowią rzeczywiste rozwiązanie danego układu równań.

Podobnie sprowadzamy rozwiązanie układu czterech równań z czterema niewiadomymi przez wyrugowanie jednej niewiadomej z każdym z dwu równań do rozwiązania układu trzech równań z trzema niewiadomymi.

Przykład 1. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 6, \\ x + 2y + 5z &= 3, \\ 3x - 2y - 3z &= 3. \end{aligned}$$

Zakładamy, że układ równań ma rozwiązanie.

Rugujemy y z pierwszego i drugiego równania metodą podstawiania:

$$\begin{aligned} y &= 6 - 2x - z, \\ x + 12 - 4x - 2z + 5z &= 3, \\ -3x + 3z &= -9. \end{aligned}$$

Upraszczamy przez 3:

$$-x + z = -3.$$

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{aligned} -x + z &= -3, \\ 2x + z &= 3, \end{aligned}$$

i znajdujemy: $x = 2, z = -1$.

Aby wyznaczyć y , podstawiamy $x = 2, z = -1$ w pierwszym równaniu

i znajdujemy stąd:

$$\begin{aligned} \text{Sprawdzenie: } L_1 &= 4 + 3 - 1 = 6, & P_1 &= 6; & L_1 &= P_1. \\ L_2 &= 2 + 6 - 5 = 3, & P_2 &= 3; & L_2 &= P_2. \\ L_3 &= 6 - 6 + 3 = 3, & P_3 &= 3; & L_3 &= P_3. \end{aligned}$$

Przykład 2. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} x + y &= 3, \\ 2x + 4y - z &= 1, \\ x + z &= 6. \end{aligned}$$

Pierwsze z tych równań zawiera już tylko dwie niewiadome: x i y . Aby uzyskać drugie równanie z temi samymi niewiadomymi, rugujemy z z drugiego i trzeciego równania. Dodając te równania, otrzymamy:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 7, \\ x + y &= 3. \end{aligned}$$

Równanie to łączymy z pierwszym:

Rozwiązując ten układ równań, znajdujemy:

$$x = 5, y = -2.$$

Z trzeciego równania znajdujemy:

$$\begin{aligned} 5 + z &= 6, \\ z &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sprawdzenie: } L_1 &= 5 - 2 = 3, & P_1 &= 3; & L_1 &= P_1. \\ L_2 &= 10 - 8 - 1 = 1, & P_2 &= 1; & L_2 &= P_2. \\ L_3 &= 5 + 1 = 6, & P_3 &= 6; & L_3 &= P_3. \end{aligned}$$

Przykład 3. Wypłacono 100 zł monetami po 10 zł, 5 zł i 2 zł. Wszystkich monet było 22; liczba monet po 2 zł była o 2 mniejsza od liczby pozostałych monet. Ile było monet po 10 zł, po 5 zł i po 2 zł? Oznaczając liczbę monet po 10 zł, po 5 zł i po 2 zł kolejno literami x, y i z , ułożymy z łatwością z powyższych trzech warunków równania:

$$\begin{aligned} 10x + 5y + 2z &= 100, \\ x + y + z &= 22, \\ x + y - z &= 2. \end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ równań, znajdziemy: $x = 4, y = 8, z = 10$. Sprawdź!

Ćwiczenia.

1. Rozwiązać równania:

$$\begin{aligned} a) \quad x + 5 &= 7; & i) \quad -4 &= x - 9; \\ b) \quad x - 3 &= 5; & j) \quad 7 &= 2 - x; \\ c) \quad x + 7 &= 3; & k) \quad 3 &= 5 - x; \\ d) \quad x - 2 &= -1; & l) \quad 4 &= -x + 7; \\ e) \quad x + 3 &= 3; & m) \quad 2x - 3 &= x - 5; \\ f) \quad 3 &= x - 2; & n) \quad 3x + 5 &= 2x; \\ g) \quad 5 &= x + 8; & o) \quad 5 - 2x &= 6 - 3x; \\ h) \quad -3 &= x + 2; & p) \quad 4x - 1 &= 3x - 1; \\ r) \quad 2x - 3 &= 3x + 2; \\ s) \quad 8 - 3x &= 10 - 2x; \\ t) \quad 5 - x &= 26 + 2x; \\ u) \quad 3x + 2 &= x - 4; \\ w) \quad 4x + 7 &= x - 2; \\ x) \quad 3 - 6x &= 5 - x; \\ y) \quad 4x - 7 &= x + 2; \\ z) \quad x + 5 &= 7x - 7. \end{aligned}$$

Rozwiązać równania:

$$\begin{aligned} a) \quad 0,6 - x &= x + 1,2; & i) \quad 0,3x - 0,2 &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}; \\ b) \quad 2x - \frac{3}{4} &= x + \frac{1}{2}; & j) \quad \frac{3}{4}x - 2 &= \frac{5}{6}x - 3; \\ c) \quad x + \frac{2}{3} &= 2x - \frac{1}{6}; & k) \quad \frac{4}{3}x + \frac{1}{4} &= \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}; \\ d) \quad \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} &= \frac{1}{4}x + 1; & l) \quad x - \frac{5}{6}x &= \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{2}; \\ e) \quad \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x &= \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}; & m) \quad \frac{1}{4}x - 9,5 &= \frac{7}{10}x + 7,5; \\ f) \quad \frac{1}{5}x - \frac{3}{4} &= \frac{1}{6}x - 6,5; & n) \quad 13 - \frac{3}{4}x &= \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x; \\ g) \quad \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}; & o) \quad 0,5x + 1,3 &= 5 - 0,04x. \\ h) \quad \frac{2}{3}x - \frac{1}{2} &= \frac{2}{7}x + 0,1 \end{aligned}$$

3. Rozwiązać równania:

- a) $(3x+2) + (2x-5) = (7x-1) + (x+7)$;
 b) $(\frac{1}{2}x+1) + (\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}) = (2x-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{4}x-3)$;
 c) $3x - (4x+3) = 7 - (2x+2)$;
 d) $5 - (2x-1) = 8 - (2-3x)$;
 e) $(2x+1) - (3x+2) = (5x+4) - (7x-1)$;
 f) $(3x-2) - (5x+3) = (2x+1) + (2x-3)$;
 g) $\frac{4}{5}x - (\frac{3}{10}x + \frac{1}{2}) = \frac{7}{10} - (\frac{1}{2}x - \frac{4}{5})$;
 h) $(0,3x + 0,5) - (2,7x - 3,1) = 2,3 - (1,4x - 1,3)$;
 i) $5x - \{3 + [5x + (x+2)]\} = 1$;
 j) $5x - \{6x + [5 - (x+1)]\} = -2x + 1$;
 k) $-7 = 4 - \{2 - [3x - (2x-5)]\}$;
 l) $3x - \{-2 + [2x - (5-x)]\} = 2 - (x-8)$;
 m) $2(2x-3) = 6$; n) $3(x+2) = 4x$;
 o) $5 - 3(x+2) = 2(1-2x)$;
 p) $7x - 5(x-1) = 2(4x-5)$;
 r) $3(x-2) - 2(x-3) = 2(2x-5) - 5(x-4)$;
 s) $3x - 2(5x-6) = 5(x+3) - 3(2x-1)$.

4. Rozwiązać równania:

- a) $\frac{2x}{3} = 8$; b) $\frac{5x}{4} = 2x$; c) $\frac{3x}{16} = 1\frac{7}{8}$; d) $\frac{3x}{5} = 0,9$;
 e) $\frac{x-5}{3} = 2$; f) $\frac{x-2}{5} = x$; g) $\frac{7-x}{2} = 1-x$;
 h) $\frac{5(x-2)}{3} = 2x+1$; i) $\frac{3(x-1)}{2} = 2x+1$;
 j) $\frac{2}{3}(5x+2) = \frac{4}{5}(7x-4)$; k) $1\frac{2}{5} - \frac{1}{5}(5x-1) = x$;
 l) $\frac{1}{2}(x-3) - \frac{1}{3}(x+1) = \frac{1}{2} - x$;
 m) $3(x-\frac{1}{2}) + 4(\frac{1}{2}x+3) = \frac{1}{2}x + 3,75$;
 n) $\frac{3}{4}(5x-4) - \frac{1}{8}(5x-2) = \frac{3}{8}(x+2) + 5$;
 o) $2 - \frac{3}{4}\{x - \frac{1}{2}[3x - \frac{3}{2}(x-\frac{1}{2})]\} = 1-x$;
 p) $1 + \frac{1}{4}\{x + \frac{1}{5}[x - \frac{1}{2}(x-1)]\} = 0,2$;
 r) $x - \frac{1}{2}\{x - \frac{1}{3}[x - \frac{2}{3}(x-1)]\} = 2 + \frac{1}{2}(x-1)$;
 s) $2\{3[2(x-4) + 2x] - 6\} - x = 9$;
 t) $x - \frac{2}{3}\{\frac{2}{3}[\frac{1}{2}(3x+5) - \frac{1}{3}(x+2)] + 2\} = 3$;
 u) $3x - \{5[\frac{1}{2}(x - \frac{2}{3}) - \frac{5}{6}]\} - 2 = 8$;
 w) $\frac{5}{8} - \frac{1-x}{3} = x$; x) $\frac{x-2}{8} - \frac{x-6}{12} = 1$; y) $x - \frac{x-3}{4}$;
 z) $\frac{5(x+1)}{6} - \frac{x-2}{4} = 6$; ż) $\frac{7(4x+3)}{10} - \frac{4(x+1)}{15} = 5$

5. Rozwiązuć w pamięci równania:

- a) $x+3=0$, $x-7=0$, $4-x=0$, $-5-x=0$;
 d) $2-x=3$, $3-x=-2$, $-3-x=4$, $-5-x=-7$;
 g) $2x-4=0$, $6-2x=0$, $0=4x+8$, $0=5-5x$;
 j) $3=2x+7$, $7=3x-2$, $-3=2x+9$, $-1=5x-6$;
 m) $0,1x=0,5$, $0,3x=6$, $0,4x=0,08$, $0,2x=40$;
 p) $\frac{2}{3}x+4=0$, $0=\frac{2}{3}x+6$, $0=5-\frac{5}{3}x$, $\frac{2}{3}x-4=0$;
 t) $x+2=8-x$, $x-5=7-2x$, $x+3=-9-3x$, $x-1=9-x$;
 w) $3-x=5-2x$, $4-3x=-6-2x$, $7-2x=2-7x$, $2-x=8-4x$;
 b) $0=x-2$, $0=3-x$, $0=x+5$, $0=-7-x$;
 e) $4=x+1$, $5=x-3$, $2=x+8$, $-3=x-2$;
 h) $2x+1=7$, $3x+5=2$, $3x-2=10$, $5x-1=-16$;
 k) $2=5-3x$, $12=5-7x$, $-5=7-2x$, $1=-3-2x$;
 n) $\frac{2}{3}x=-4$, $\frac{2}{3}x=9$, $8=\frac{2}{3}x$, $6=\frac{2}{3}x$;
 c) $x+3=7$, $x-2=5$, $x+3=-2$, $x-3=-5$;
 f) $4=2-x$, $6=8-x$, $2=-1-x$, $-3=3-x$;
 i) $5-2x=7$, $8-3x=-4$, $1-4x=5$, $-12-7x=2$;
 l) $\frac{1}{3}x=2$, $\frac{1}{3}x=-1$, $0,5x=3$, $0,25x=-2$;
 o) $\frac{2}{3}x-1=0$, $\frac{5}{4}x-20=0$, $0=6-\frac{2}{3}x$, $6-\frac{2}{3}x=0$;
 r) $2x+3=x-7$, $3x-1=x+9$, $4x-3=2x-7$, $5x+2=2x+11$;
 s) $4x-3=5x-2$, $x-3=3x+5$, $2x-3=6x-11$, $x+3=3x+7$;
 u) $3-x=2x+6$, $4-2x=x-8$, $3-x=x-9$, $2-4x=x-8$;
 z) $-x-5=-2x-7$, $-2x-5=-5x-2$, $-6x-7=-2x-3$, $-5x-5=-3x-3$;

6. a) Na jednym talerzu wagi leżały 3 jednakowe kulki żelazne i 2 ciężarki kilogramowe, a na drugim 2 takie same kulki i 3 ciężarki kilogramowe; waga była w równowadze. Ile ważyła 1 kulka?

b) Na jednym talerzu wagi położono 4 pudełka cukru, z których jednak wybrano poprzednio 3 kg cukru; na drugim talerzu położono 3 takie same, lecz pełne pudełka cukru

i 2 ciężarki kilogramowe; wtedy nastąpiła równowaga. I waży jedno pudełko cukru?

c) Obwód trójkąta równoramiennego wynosi $8,4 \text{ cm}$, a każde ramię $3,2 \text{ cm}$; ile cm ma podstawa?

d) Suma dwóch odcinków, różniących się o 3 cm , jest o 8 cm większa od mniejszego z tych odcinków. Oblicz długość mniejszego odcinka.

Mniejszy odcinek jest x , większy $x + 3$.

e) Gdy zrobię wzdłuż pola 40 kroków, to wystąpię poza granicę o 30 cm ; gdy zrobię 39 kroków, to do granicy brakuje 20 cm . Ile cm wynosi 1 krok?

7. a) Trzej uczniowie mają razem $4 \text{ zł } 37 \text{ gr}$; drugi ma o 35 a trzeci o 42 gr więcej niż pierwszy. Ile gr ma pierwszy? Pierwszy ma $\text{gr } x$, drugi $x + 35$ i t. d.

b) Suma trzech bezpośrednio po sobie następujących liczb naturalnych wynosi 84 . Znaleźć te liczby.

c) Suma trzech następujących po sobie liczb parzystych wynosi 78 . Obliczyć najmniejszą z nich.

d) Znaleźć liczbę, która jest o tyle większa od 17 , o ile mniejsza od 45 .

e) Znaleźć liczbę, która jest o tyle większa od -7 , o ile mniejsza od $+15$.

8. a) Jeżeli do pięciokrotności jakiejś liczby dodamy 14 , otrzymamy 99 . Jaka to liczba?

b) Pewien przedsiębiorca powiększył najpierw 3-krotnie swój majątek, lecz stracił potem 23000 zł ; pozostało mu w 28000 zł . Jaki był pierwotnie jego majątek?

c) Znaleźć liczbę, której pięciokrotność pomniejszona o 7 jest o 9 większa od tej liczby.

d) Pięciokrotność pewnej liczby równa się sześciokrotności tej liczby o 7 mniejszej. Jaka to liczba?

e) Pięciokrotność pewnej liczby jest od sześciokrotności tej liczby, mniejszej od niej o 2 , o 1 większa. Jaka to liczba?

9. a) Suma pewnej liczby, jej pięciokrotności i siedmiokrotności wynosi 143 . Jaka to liczba?

b) Trzej uczniowie mają razem $2 \text{ zł } 40 \text{ gr}$; drugi ma 2 a trzeci 5 razy więcej pieniędzy niż pierwszy. Ile pieniędzy ma pierwszy?

c) Trzej robotnicy zarobili razem 56 zł ; pierwszy pracował 7 dni, drugi 5 dni, a trzeci 4 dni. Ile wynosił zarobek dzienny robotnika? Jak podzielili się zarobkiem?

d) Rozdzielić 91 zł między 3 osoby tak, aby pierwsza otrzymała 5 razy tyle, ile druga, a druga 2 razy tyle, ile trzecia.

e) Proch strzelniczy składa się z węgla, saletry i siarki. Saletry zawiera 4 razy tyle, ile siarki, a węgla 3 razy tyle, ile siarki. Ile siarki jest w 24 kg prochu strzelniczego?

f) Trzej kupcy założyli sklep kosztem 30000 zł . Drugi dał na ten cel o 2000 zł więcej niż pierwszy, a trzeci 2 razy tyle ile pierwszy. Ile wpłacił pierwszy?

g) Jeżeli w pewnej sali szkolnej po dwóch uczniów pewnej klasy usiądzie w każdej ławce, braknie miejsca dla 6 uczniów; jeżeli zaś usiądzie w każdej ławce trzech uczniów, pozostaną 2 ławki wolne. Ile jest ławek w tej sali?

10. a) Jeden uczeń miał 75 gr , drugi 45 gr . Gdy obaj wydali na śniadanie jednakowe kwoty, okazało się, że pierwszy miał 2 razy więcej pieniędzy niż drugi. Ile gr wydał każdy uczeń?

b) Ojciec ma 42 lat, a syn 12 . Po ilu latach ojciec będzie 3 razy starszy od syna? Przed ilu laty był ojciec od syna 4 razy starszy?

c) Uczeń zapytany, ile ma lat, odpowiada: „Za 5 lat będę miał 2 razy tyle lat, ile miałem przed 4 laty”. Ile lat ma uczeń?

11. a) Liczba dwucyfrowa, mająca na miejscu jednostek cyfrę 1 , zmniejsza się o 9 , gdy cyfry jej przestawimy. Znaleźć tę liczbę.

Uważać za niewiadomą x cyfrę, stojącą na miejscu dziesiątek. Szukaną liczbą będzie $10x + 1$. Po przestawieniu cyfr otrzymamy $10 + x$.

b) Jeżeli w pewnej liczbie dwucyfrowej, mającej na miejscu dziesiątek cyfrę 4 , przestawimy cyfry, otrzymamy liczbę o 12 mniejszą od dwukrotności wymienionej najpierw liczby. Znaleźć tę liczbę.

12. a) Suma trzeciej i czwartej części pewnej liczby jest o 10 mniejsza od tej liczby. Jaka to liczba?

b) Jaką liczbę należy pomnożyć przez $\frac{3}{4}$, aby ją zmniejszyć o 5 ?

c) Suma czwartej i szóstej części pewnej liczby jest o 7 mniejsza od tej liczby. Jaka to liczba?

- d) Suma trzeciej i czwartej części pewnej liczby jest o 4 mniejsza od sumy jej połowy i szóstej części. Znaleźć tę liczbę!
- e) Przekupka przyniosła na targ jabłka i sprzedawała z nich najpierw $\frac{1}{3}$, potem $\frac{1}{4}$, a w końcu $\frac{1}{5}$ część pierwotnego zapasu. Po obliczeniu okazało się, że miała jeszcze o 1 jabłko więcej, niż połowę pierwotnego zapasu. Ile jabłek przyniosła na targ?
- f) Pitagoras zapytany, ilu ma uczniów, odpowiedział, że połowa jego uczniów uczy się matematyki, czwarta część przyrody, siódma część uczy się mileczeń, a nadto uczą się u niego 3 kobiety. Ilu uczniów miał Pitagoras?
- g) W dno rzeki wbito słup; $\frac{1}{4}$ słupa tkwi w dnie rzeki, $\frac{3}{10}$ znajduje się w wodzie, a ponad wodę wystaje 135 cm. Jak wysoki jest słup?
- h) Przy wyścigach wyznaczono 3 nagrody, z których każda następna była 2 razy mniejsza od poprzedniej. Ile wynosiła największa nagroda, jeżeli suma wszystkich wynosiła 2100 zł?
- i) Z pieniędzy, które miałem, wydałem 4 zł i $\frac{3}{4}$ pozostałej reszty. Wtedy pozostała mi jeszcze $\frac{1}{4}$ kwoty, którą miałem na początku. Ile pieniędzy miałem początkowo?
- j) Z 320 zł wydałem najpierw x zł, a potem $\frac{1}{3}$ pozostałej reszty wtedy pozostało mi 80 zł. Obliczyć x .
- k) Wieśniak wioził na targ jabłka z zamiarem sprzedawania 1 sztuk za 1 zł. Musiał jednak zapłacić 2 zł opłaty targowej, której nie przewidywał. Aby uzyskać tę samą kwotę, sprzedawał 15 jabłek za 1 zł. Ile miał jabłek?
- l) 520 zł rozdzielić między 3 osoby tak, aby druga otrzymała $\frac{2}{3}$ tego, co pierwsza, a trzecia $\frac{1}{3}$ tego, co druga.
Pierwsza otrzymała x zł, druga $\frac{2}{3}x$ i t. d.
- m) Jeden bok trójkąta wynosi $\frac{3}{4}$ obwodu, drugi bok $\frac{5}{12}$ obwodu, a trzeci bok ma 10 cm. Obliczyć obwód trójkąta.
- n) Prędkość prądu wynosi 2,4 km/godz. Statek płynie z prądem $2\frac{1}{3}$ razy prężej, niż przeciw prądowi. Jaka jest prędkość statku na spokojnej wodzie?
13. a) Znaleźć liczbę, której 12% wynosi 108.
b) Pewną liczbę zmniejszono o 15% i otrzymano 119. Jaka liczba?

- c) Pewnego dnia było na lekcji $8\frac{1}{3}\%$ uczniów nieobecnych, a 33 uczniów było obecnych. Ilu uczniów liczyła klasa?
- d) Towar netto ważył 273 kg; ile ważył towar brutto, jeżeli tara wynosiła 22% ciężaru towaru brutto?
- e) Kupiec sprzedał towar z 30-procentowym zyskiem (obliczonym z ceny kupna) za 936 zł. Ile kosztował go ten towar?
- f) 10% uczniów ukończyło klasę z postępowaniem bardzo dobrym, 37,5% z postępowaniem dobrym, 35% z postępowaniem dostatecznym, a 7 uczniów z postępowaniem niedostatecznym. Ilu uczniów było w klasie?
- g) Kapitalista umieścił $\frac{2}{3}$ swojego majątku w papierach wartościowych, przynoszących 8% dochodu; $\frac{1}{4}$ część w papierach, przynoszących 7% dochodu, a resztę złożył w kasie oszczędności na 6%. Miał wtedy 10010 zł rocznego dochodu. Jaki był cały kapitał?
- h) Pewien kapitał wynosił wraz z 8-procentowym dochodem za 4 miesiące 1909,6 zł. Jaki to był kapitał?
- i) Wieśniak sprzedał zboże i chce z otrzymanej gotówki odłożyć sobie taką kwotę, aby za 6 miesięcy mógł nią zapłacić ratę długu, wynoszącą 130 zł. Jak wysoka musi być ta kwota, jeżeli pieniądze może umieścić na 8%?
- j) Ktoś, mając 120000 zł kupił dom, trzecią część pozostałych pieniędzy umieścił na 6%, a resztę na 8%. Pieniądze te przynoszą mu 4840 zł rocznego dochodu. Ile zapłacił za dom?
14. a) 5 kg kawy po 4,2 zł za kg zmieszano z 7 kg kawy drugiego gatunku i otrzymano mieszaninę po 3,5 zł za kg. Ile kosztował 1 kg kawy drugiego gatunku?
- b) Do 600 g 20-procentowego roztworu soli (na 100 g roztworu 80 g wody i 20 g soli) dolano 400 g innego roztworu soli i otrzymano roztwór 14-procentowy. Jaki procent soli zawierał ten drugi roztwór?
- c) Ile kg herbaty po 8 zł za kg dosypać należy do 6 kg herbaty po 12 zł za kg, aby otrzymać herbatę po 11 zł za kg?
- d) Ile g złota próby 900‰ dodać należy do 400 g złota próby 800‰, aby otrzymać złoto próby 836‰?
- e) Ile g wody dolać należy do 1 kg 96-procentowego spirytusu, aby otrzymać spirytus 50-procentowy?

f) Ile g czystego srebra dodać należy do $200 g$ srebra próby 800‰ , aby otrzymać złoto próby 945‰ ?

15. a) Zbiornik napełnia się wodą w 2 godzinach, jeżeli woda dopływa do niego tylko pierwszą rurą, w 3 godzinach, jeżeli dopływa tylko drugą rurą, w 6 godzinach, jeżeli woda dopływa tylko trzecią rurą. W ilu godzinach napełni się zbiornik, jeżeli woda dopływać będzie trzema rurami równocześnie?

Pierwszą rurą dopływa w 1 godz. $\frac{1}{2}$ zbiornika, drugą $\frac{1}{3}$ zbiornika, trzecią $\frac{1}{6}$ zbiornika. W x godzinach dopływa $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x)$ zbiornika, co ma dać 1 cały zbiornik.

- b) Jeden robotnik, pracując sam, wykonałby pewną pracę w x dniach; drugi robotnik, pracując sam, wykonałby tę pracę w 30 dniach. W ilu dniach wykonają tę pracę pracując równocześnie?

Pierwszy robotnik wykonywa w 1 dniu $\frac{1}{x}$, drugi $\frac{1}{30}$ pracy; i t.

- c) Rozwiązać poprzednie zadanie, przyjmując, że drugi robotnik stanął do pracy o 5 dni później od pierwszego.

16. a) Uczeń A ma 70 gr i dokłada do tej kwoty codziennie 2 gr, uczeń B ma 30 gr i dokłada do tej kwoty codziennie 4 gr. Za ile dni obaj uczniowie będą mieli jednakowe kwoty?

- b) W chwili gdy posłaniec pieszy, idący z prędkością 4 km/godz. , przeszedł już 7 km , wysłano za nim posłańca konnego, jadącego z prędkością 8 km/godz. Po ilu godzinach dopędzi posłaniec konny pieszego?

- c) Za posłańcem, idącym z prędkością 4 km/godz. , wysłano o $1\frac{1}{2}$ godz. później drugiego posłańca, idącego z prędkością $5\frac{1}{2} \text{ km/godz.}$ Kiedy drugi posłaniec dopędzi pierwszego?

- d) O godz. 5 wysłano z A posłańca, idącego z prędkością 4 km/godz. z ważną wiadomością do B , oddalonego od A o $19,5 \text{ km}$. O godz. 7 zaszła potrzeba odwołania tego posłańca. Wysłano więc za nim gońca, który ma posłańca dopędzić w chwili, gdy ten przybędzie do B . Z jaką prędkością musi jechać goniec?

- e) Po ilu latach zrównają się kapitały 1850 zł i 1700 zł , oddane na procent prosty, pierwszy na $4,5\%$, a drugi na 6% ?

- f) Kapitał 700 zł złożono na 5% , a kapitał 1300 zł na 6% . Po ilu latach będzie drugi kapitał 2 razy większy od pierwszego, jeżeli liczy się procent prosty?

mar 2 odsetkami

- g) Uczeń A ma 6 zł i kupuje sobie z tej kwoty codziennie za 20 gr drugie śniadanie. Uczeń B otrzymuje codziennie 20 gr, wydaje jednak na śniadanie tylko 15 gr, a resztę oszczędza. Po ilu dniach obaj uczniowie będą mieli jednakowe kwoty?

- h) Ze stacji A wyjeżdża pociąg o godz. 8 do stacji B , z B zaś wyjeżdża do A pociąg o godz. 8 min. 6. Kiedy spotkają się, jeżeli oba jadą z jednakową prędkością $0,6 \text{ km/min}$, a odległość $AB = 18 \text{ km}$? Jak daleko od A spotkają się?

- i) Ze stacji A i B , oddalonych od siebie o 22 km , wyjeżdżają naprzeciw siebie równocześnie dwa pociągi; pierwszy jedzie z prędkością 26 km/godz. , drugi z prędkością 40 km/godz. Po ilu godzinach od chwili wyjazdu spotkają się?

17. a) Suma trzech liczb, z których każda następna jest o $2\frac{2}{3}$ większa od poprzedniej, wynosi 6. Znaleźć najmniejszą z tych liczb.

- b) Pociąg przebywa w każdej godzinie 36 km , a ma przebyć 450 km . Za ile godzin od obecnej chwili przebędzie $\frac{1}{2}$, za ile $\frac{1}{3}$, za ile $\frac{1}{4}$ część całej drogi, jeżeli dotąd jest w ruchu już 5 godzin?

- c) Na spłacenie długu 2592 zł , zaciągniętego przed 5 laty, płacił dłużnik i płaci co roku (oprócz procentów) 216 zł . Za ile lat od chwili obecnej spłaci połowę, za ile $\frac{1}{3}$, a za ile $\frac{1}{4}$ część całego długu?

- d) Do $450 g$ kwasu siarkowego dolano $750 g$ wody. Ile kwasu siarkowego należy jeszcze dodać (lub usunąć), jeżeli chcemy otrzymać roztwór: a) 40-procentowy? b) 30-procentowy?

- e) Stacje kolejowe A i B są oddalone od siebie o 12 km . O godz. 12 przejeżdża przez stację A jeden pociąg, a przez stację B drugi pociąg; oba pociągi jadą w tym samym kierunku: od A przez B dalej. Ile minut po godz. 12 (lub przed godz. 12) mijają się te pociągi, jeżeli a) pierwszy przebywa $\frac{2}{3} \text{ km}$, a drugi $\frac{2}{3} \text{ km}$ w 1 min.? b) pierwszy przebywa $\frac{1}{2} \text{ km}$, a drugi $\frac{2}{4} \text{ km}$ w 1 min?

Pociągi mijają się, gdy ich odległości od A są jednakowe.

- f) Kupiec sprowadził 527 kg towaru, płacąc $3,48 \text{ zł}$ za 1 kg . Towar sprzedał w dwóch partjach: Najpierw sprzedał 212 kg , a potem 315 kg , drugim razem po cenie o 40 gr na 1 kg wyższej, niż przy sprzedaży pierwszej partji. Za cały towar

otrzymał 1949,30 zł. Ile zyskiwał (tracił) przy sprzedaży 1 kg w pierwszej partii?

W pierwszej partii sprzedawał 1 kg po $(3,48 + x)$ zł, w drugiej po $(3,48 + x + 0,4)$ zł.

18. Rozwiązać układy równań:

a) $x + y = 12,$
 $x - y = 2;$

c) $2x - y = 4,$
 $x + 2y = 7;$

e) $4x - 5y = 5,$
 $6x - 7y = 9;$

g) $6x + 2y = 7,$
 $9x - 4y = 0;$

i) $14x + 15y = 12,$
 $21x + 25y = 13;$

k) $3x - 7y = 0,$
 $2x + 5y = 0;$

m) $5x - 4y = 10,$
 $3x - 8y = 20;$

o) $5x - 3y = 6,$
 $4x - 5y = 10.$

b) $2x + 3y = 1,$
 $x - y = 3;$

d) $4x + 3y = 11,$
 $4x - 3y = 5;$

f) $18x - 49y = 5,$
 $12x - 35y = 1;$

h) $x + 4y = 1,$
 $x - 8y = -1;$

j) $2x - y = 3,$
 $3x - 2y = 1;$

l) $3x + 2y = 6,$
 $5x - 3y = 10;$

n) $23x - 24y = 17,$
 $17x - 18y = 11;$

19. Rozwiązać układy równań:

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 7,$
 $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 0;$

b) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1,$
 $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1;$

c) $\frac{4x}{9} - \frac{5y}{3} = 1\frac{1}{3},$
 $\frac{2x}{3} + \frac{2y}{3} = -0,1$

d) $3x - 2y = 3,$
 $\frac{6x}{5} - \frac{2y}{3} = \frac{8}{5};$

e) $x + y = -2,$
 $\frac{x+1}{4} + \frac{y-2}{7} = 0;$

f) $x + 2y = 11,$
 $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2};$

g) $\frac{2x+5y}{6} - \frac{3x-2y}{4} = 1,$
 $2x - 3y = 2;$

h) $\frac{5x+y}{12} - \frac{2x-5y}{9} = 2,$
 $x - 4y = 3;$

i) $\frac{2x+y}{6} - \frac{2x-y-1}{15} = 1,$
 $x + 3y = 1;$

j) $\frac{2x+9y}{6} - \frac{x+6y}{9} = 1,$
 $x + 2y = 1;$

k) $\frac{2x+1}{3} - \frac{y-1}{4} = 1,$
 $\frac{x+2}{2} - \frac{y+1}{5} = 1;$

l) $\frac{x+1}{4} - \frac{x-y}{6} = 0,5,$
 $\frac{y+1}{12} - \frac{2x+y}{18} = 1;$

m) $\frac{4x+y}{8} - \frac{5x+y-7}{12} = 1,$ n) $\frac{x+y}{2} + \frac{18+y-4}{6} = \frac{4}{3},$
 $\frac{2x+3y}{3} - \frac{2x+y}{5} = 4;$ $\frac{3x+1}{3} - \frac{3-2y}{4} = 0.$

20. Rozwiązuć w pamięci układy równań:

a) $2x + 3y = 7,$
 $y = 1;$

b) $x - 5y = 2,$
 $y = -2;$

c) $2x + 5y = 4,$
 $x = -3;$

d) $2x - 3y = 4,$
 $y = 4;$

e) $2x - 3y = 2,$
 $x = -2;$

f) $x + y = 7,$
 $x - y = 1;$

g) $x + y = 1,$
 $x + 2y = -1;$

h) $x + y = 6,$
 $2x - y = 9;$

i) $x - y = 7,$
 $2x + y = 2;$

j) $x - y = 2,$
 $x + 2y = 5;$

k) $x - y = 5,$
 $x - 2y = 3;$

l) $x + 2y = 10,$
 $y = 2x;$

m) $3x - 2y = 14,$
 $y = -2x;$

n) $x - 3y = 6,$
 $x = 5y;$

o) $5x - 7y = 9,$
 $x = 2y;$

p) $x = -2y,$
 $2x - y = 10;$

r) $y = 2x + 3,$
 $y = x - 1;$

s) $x = y + 3,$
 $x = 2y - 3.$

21.* a) Liczbę 100 rozłożyć na 2 składniki, z których jeden byłby o 8 większy od drugiego.

b) Przy wyborach otrzymał jeden kandydat o 12 głosów więcej od drugiego. Ile głosów otrzymał każdy kandydat, jeżeli na obu razem oddano 78 głosów?

c) Kąty ostre w pewnym trójkącie prostokątnym różnią się o 12° ; obliczyć oba kąty ostre.

d) Kąt przypołożony w pewnym trójkącie równoramiennym jest dwa razy większy od kąta u wierzchołka. Obliczyć oba kąty.

e) Zmieniano 1 zł na monety 5-groszowe i 10-groszowe, przy czym monet 10-groszowych było o 1 więcej niż 5-groszowych. Ile było monet 5-groszowych, a ile 10-groszowych?

* Zadania rozwiązywać bądź zapomocą układu równań z dwiema niewiadanymi, bądź zapomocą równania z jedną niewiadomą.

- f) Mam dwa razy tyle książek, co zeszytów. Gdy dokupię 7 książek i 1 zeszyt, będę miał 3 razy tyle książek, co zeszytów. Ile mam książek, a ile zeszytów?
- g) Za każde zadanie, rozwiązane bez pomyłki, otrzymywałem uczeń od matki 4 gr, a za każde zadanie z pomyłką zwracałem 3 gr; po rozwiązaniu 10 zadań miał uczeń 19 gr. Ile zadań rozwiązał bez pomyłki, a ile z pomyłką?
- h) Podstawa pewnego prostokąta jest 3 razy większa od wysokości. Gdy podstawę zwiększymy o 2 cm, a wysokość zmniejszymy o 3 cm, to obwód jego wyniesie 62 cm. Obliczyć podstawę i wysokość prostokąta.
- i) Liczbę 54 rozłożyć na takie dwa składniki, aby suma 6-tej części jednego z nich i 5-tej części drugiego, wynosiła 10.
- j) Obwód trójkąta równoramiennego wynosi 28 cm, a ramię wynosi $\frac{5}{4}$ podstawy. Obliczyć podstawę i ramię.
- k) Obwód prostokąta wynosi 18 cm; wysokość jego wynosi podstawy. Obliczyć podstawę i wysokość.
- l) Kąt u wierzchołka trójkąta równoramiennego wynosi przyległego do niego kąta zewnętrznego. Obliczyć kąty wewnętrzne tego trójkąta.
- m) Głos rozchodził się przy pewnym doświadczeniu w kierunku wiatru z prędkością 342 m/sek., a w kierunku przeciwnym z prędkością 338 m/sek. Jaka była prędkość głosu, a jaka prędkość wiatru?
- n) Parowiec przebywa drogę 70 km w 4 godz., gdy płynie z prądem rzeki; tę samą drogę przebywa w 5 godz. 36 min, gdy płynie przeciw prądowi. Jaka jest prędkość parowca, a jaka prędkość prądu?
- o) Liczba dwucyfrowa, w której suma cyfr wynosi 7, jest o 9 większa od liczby, która z niej powstaje przez przestawienie cyfr. Jaka to liczba?
- p) Liczba trzycyfrowa, mająca na miejscu dziesiątek cyfrę jest większa od liczby, która powstaje z niej przez przestawienie cyfry jednostek z cyfrą setek, o 396; cyfra na miejscu setek jest 3 razy większa od cyfry na miejscu jednostek. Jaka to liczba?

22.* a) W dwóch oddziałach pewnej klasy jest 62 uczniów; gdy

* Porównaj uwagę do zad. 21.

- z liczniejszego oddziału przeszło do mniej liczniejszego 5 uczniów, liczba uczniów w obu oddziałach byłaby jednakowa. Ilu uczniów jest w każdym oddziale?
- b) W oddziale A pewnej klasy było o 6 uczniów więcej niż w oddziale B. Przy tworzeniu oddziału C przeznaczono do tego oddziału $\frac{1}{3}$ część uczniów oddziału A i $\frac{1}{4}$ część uczniów oddziału B; wtedy pozostała w oddziałach A i B jednakowa liczba uczniów. Ilu uczniów było pierwotnie w oddziale A, ilu w oddziale B?
- c) W dwóch naczyniach znajduje się woda. Gdybym z pierwszego naczynia przelał do drugiego 5 l, to w obu naczyniach pozostałaby jednakowa ilość wody; gdybym z drugiego naczynia przelał do pierwszego 8 l, to w drugim naczyniu byłoby 2 razy mniej wody niż w pierwszym. Ile wody znajduje się w każdym naczyniu?
- d) Ojciec jest o 28 lat starszy od syna; przed 2 laty był od syna 3 razy starszy. Ile lat ma ojciec, a ile syn?
- e) Ojciec ma 2 razy tyle lat, ile dwaj jego synowie, z których starszy ma 11 lat; za 20 lat będzie miał ojciec tyle lat, ile obaj jego synowie. Ile lat ma ojciec, a ile młodszy syn?
- a) Kapitał 12 000 zł rozdzielono na 2 (nierówne) części, które włożono w dwa różne przedsiębiorstwa. Gdy pierwsze przedsiębiorstwo przyniosło 15% dochodu, a drugie 12%, wynosił dochód 1650 zł. Ile włożono w pierwsze, a ile w drugie przedsiębiorstwo?
- b) Czteroklasowe gimnazjum liczy 250 uczniów. W dwóch klasach niższych uwolniono od opłaty szkolnej $8\frac{2}{3}\%$ uczniów, a w dwóch klasach wyższych 12%. W całej szkole uwolniono 10% uczniów. Ilu uczniów było w dwóch klasach niższych, a ilu w dwóch klasach wyższych?
- c) Kapitały 4800 zł i 6000 zł, złożone na różny procent, przynosiły jednakowy dochód roczny. Gdy stopę procentową obu kapitałów obniżono o $\frac{1}{2}$, dochód roczny od obu kapitałów wynosił 426 zł. Obliczyć, na jaki procent złożony był pierwotnie każdy kapitał.
- d) Na terenie falistym jechał cyklista z prędkością 21 km/godz. nadół, a 9 km/godz. pod górę i przebył pewną drogę w 2 godz. 20 min. Jak długa jest ta droga, jeżeli do przeby-

cia jej zpowrotem potrzebował cyklista przy tych samych prędkościach 2 godz. 40 min.?

[Suma wszystkich odcinków drogi w górę wynosi x km., suma wszystkich odcinków drogi na dół y km. Do przebycia odcinków potrzebował cyklista $\frac{x}{9}$ godz. i t. d.]

24. a) Za 4 zeszyty i 2 ołówki zapłaciłem 84 gr; mój kolega zapłacił za takich samych 5 zeszytów i 3 ołówki 1 zł 10 gr. Ile kosztował 1 zeszyt, a ile 1 ołówek?

b) Opał kosztował w jednym miesiącu 60 zł, gdy spalono 6 węgli i 5 q drzewa. W drugim miesiącu kosztował opał 68 zł, gdy spalono 4 q węgla i 10 q drzewa. Obliczyć cenę 1 q węgla i 1 q drzewa.

c) Złotnik ma dwa gatunki stopu złota. Mieszając 100 g pierwszego gatunku z 200 g drugiego, otrzymał złoto próby 800‰; mieszając zaś 50 g pierwszego z 350 g drugiego, otrzymał złoto próby 750‰. Obliczyć, jakiej próby był każdy gatunek stopu.

d) Złotnik potrzebuje 232 g złota próby 850‰, a ma tylko złoto próby 900‰ i 700‰. Ile g każdego gatunku musi ze sobą zmieszać, aby otrzymać żądany stop?

e) Ile g 20-procentowego roztworu soli, a ile 12-procentowego zmieszać należy, aby otrzymać 400 g 15-procentowego roztworu?

25. a) Fabryka otrzymuje co tydzień 100 t węgla. Węgiel przewozi pociąg złożony z 4 większych i 4 mniejszych wozów albo z 2 większych i 7 mniejszych wozów. Ile t węgla przewozi się w większym wozie, a ile w mniejszym?

b) Ruch pewnej maszyny przenosi się z jednej osi na drugą za pomocą dwóch kół zębatych umieszczonych na osiach. Gdy pierwsze koło wykona 3 obroty, wykona drugie 2 obroty. Gdyby koła zmieniono tak, żeby pierwsze wykonało 30 zębów mniej, a drugie o 7 zębów więcej, wtedy 1 obrót pierwszego koła przypadłaby 2 obroty drugiego. Ile zębów ma każde koło?

c) Jeżeli skrócimy dłuższe boki pewnego prostokąta o 11 cm, a krótsze przedłużymy o 3 cm, otrzymamy kwadrat, którego obwód jest 2 razy mniejszy, niż obwód prostokąta. Obliczyć boki prostokąta.

d) Dwaj uczniowie A i B chcą kupić rower za 130 zł; żaden z nich nie ma jednak tyle pieniędzy. A mógłby go kupić, gdyby mu B pożyczył $\frac{1}{3}$ swoich pieniędzy; B mógłby go kupić, gdyby mu A pożyczył $\frac{2}{3}$ swoich pieniędzy. Ile zł ma A, a ile B?

e) Dla oddziału wojska przygotowano zapas żywności na pewien czas. Gdyby do oddziału przyłączyło się jeszcze 600 ludzi, zapas wystarczyłby na czas krótszy o 10 dni; gdyby komendant odesłał z oddziału 160 ludzi, zapas wystarczyłby na czas dłuższy o 3 dni. Ilu ludzi liczył oddział i na ile dni przygotowano zapas żywności?

[Przy układaniu równań zwrócić uwagę, że liczba przygotowanych porcji dziennych pozostaje zawsze ta sama.]

f) Kupiec ma dwa gatunki towaru. Towar pierwszy sprzedaje z 25-procentowym zyskiem (obliczonym z ceny kupna), drugi z 12-procentową stratą. Gdy sprzeda 15 kg towaru pierwszego i 24 kg towaru drugiego, traci 2,40 zł; gdy sprzeda 20 kg pierwszego towaru i 18 kg drugiego, zarabia 5,20 zł. Obliczyć ile płać kupiec za 1 kg towaru każdego gatunku.

26. a) Między miejscowościami A i B, oddalonymi od siebie o 45 km, kursują dwa autobusy. Gdy jeden z nich wyjeżdża z A, a drugi równocześnie z B, to spotykają się po 45 minutach od chwili wyjazdu. Gdy zaś szybszy z nich wyjeżdża z A o 20 minut wcześniej, niż drugi z B, spotykają się po 54 minutach od chwili wyjazdu szybszego. Obliczyć ile km na godzinę przebywa każdy autobus.

b) Po torze wyścigowym, mającym kształt koła o obwodzie 456 m jadą dwaj cykliści. Jeżeli jadą w kierunkach zgodnych, mijają się co $9\frac{1}{2}$ min.; gdy jadą w kierunkach przeciwnych, spotykają się co $\frac{1}{2}$ min. Obliczyć prędkość każdego cyklisty.

Cykliści mijają się, gdy różnica ich dróg wynosi 456 m.

c) Za dwa weksle, jeden opiewający na x zł płatnych za 3 mies., drugi na y zł płatnych za 5 mies., otrzymał kupiec 2032,5 zł, przyczem odliczono 10% eskontu. Gdyby pierwszy weksel był płatny za 5 mies., a drugi za 3 mies., otrzymałby za te weksle 2027,5 zł. Obliczyć x i y .

[Eskont od x zł za 3 mies. oblicza się w praktyce tak, jak dochód od x zł za 3 mies.].

- d) Pewien kapitał złożony na procent wzrósł po 6 mies. do kwoty 6765 zł. Gdyby ten kapitał procentował się nie 6, lecz 10 mies. wzrósłby do kwoty 6875 zł. Obliczyć kapitał (x) i stopę procentową (y).

[W ułożonym układzie równań uważać za niewiadome x i xy .]

- e) Pewien kapitał złożony na 4% wzrósł w pewnym czasie do kwoty 4340 zł. Drugi, taki sam kapitał złożony na 5% wzrósł w tym samym czasie do kwoty 4375 zł. Jaki był ten kapitał i jak długo się procentował?

[Uwzględnić uwagę do poprzedniego zadania.]

27. Rozwiązać układy równań:

$$\begin{array}{l} a) \quad 3x + 2y - z = 5, \\ \quad 2x - y + 2z = 9, \\ \quad x - 5y + 3z = 6; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c) \quad 5x - 9y + 4z = -1, \\ \quad 10x + 6y - 5z = 18, \\ \quad 15x - 2y - z = 20; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} e) \quad 6x - 4y + 3z = 2, \\ \quad 4x - y - 3z = 13, \\ \quad 2x - 3y + 4z = -7; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g) \quad 2x + 7y - z = -1, \\ \quad 3x - 2y + 3z = 29, \\ \quad 5x + 5y - 2z = 12; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} i) \quad x + 4y = 7, \\ \quad 2x - 6y + 5z = 2, \\ \quad 2x + 6y - z = 14; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} k) \quad x + y = 5, \\ \quad x + z = 11, \\ \quad x - y - z = 5; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} m) \quad \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{2}z = 11, \\ \quad \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}y + \frac{1}{4}z = 5, \\ \quad \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{5}z = 1; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} o) \quad \frac{5x}{6} - \frac{y}{2} + 3z = 2, \\ \quad \frac{x}{2} - \frac{2y}{5} - z = \frac{1}{2}, \\ \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{4} + 2z = 1; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} b) \quad 4x + y + 4z = 1, \\ \quad 6x + 3y + 10z = 17, \\ \quad 12x + 4y + 15z = 14; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} d) \quad x + 2y - z = -1, \\ \quad 3x + y - z = 26, \\ \quad x - y - 2z = 1; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f) \quad 3x - 2y + 2z = 9, \\ \quad 2x - 3y + 5z = 15, \\ \quad 5x - 4y + 3z = 15; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} h) \quad 3x - 4y + 5z = 18, \\ \quad 5x - 6y - 4z = 19, \\ \quad 4x + 2y + 3z = 35; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} j) \quad x + y = 4, \\ \quad x + z = 9, \\ \quad y + z = 1; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} l) \quad x + y - z = 0, \\ \quad 2x + y = 4, \\ \quad x - z = 4; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} n) \quad \frac{2}{3}x + y = 0, \\ \quad x - \frac{2}{3}z = 2, \\ \quad \frac{1}{2}y + z = 6; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p) \quad \frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{3} - \frac{z-1}{6} = 3, \\ \quad \frac{3x+1}{5} - \frac{y-2}{2} + \frac{z}{2} = 4, \\ \quad \frac{x+1}{4} - \frac{y+1}{6} + \frac{z+1}{4} = 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} r) \quad \frac{1}{2}(x+y) - \frac{2}{3}(z+5) = 2, \\ \quad \frac{5}{6}(2y-z) - \frac{3}{4}(x+y) = 4, \\ \quad y+z = x; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} s) \quad \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y + 2z = 2, \\ \quad \frac{1}{5}(x+y) = \frac{1}{3}y, \\ \quad \frac{1}{2}(z-x) = \frac{1}{3}x. \end{array}$$

28. a) W pewnym pociągu było 200 osób. Ilość osób, jadących trzecią klasą, była 5 razy większa od ilości osób, jadących pierwszą klasą, a o 9 mniejsza od podwójnej ilości osób, jadących drugą klasą. Ile osób jechało każdą klasą?

- b) Kwas siarkowy składa się z wodoru, siarki i tlenu. Siarki zawiera 16 razy więcej niż wodoru, a tlenu dwa razy więcej niż siarki. Ile g wodoru, ile siarki i ile tlenu zawiera 637 g kwasu siarkowego?

- c) W trzech oddziałach pewnej klasy jest 96 uczniów. Gdyby z oddziału A przeszło do oddziału B trzech uczniów, liczba uczniów we wszystkich oddziałach byłaby jednakowa. Ilu uczniów liczy każdy oddział?

- d) Na brzegu rzeki leżą dwa miasta A i B , oddalone od siebie o 56 km ; A leży wyżej, B niżej. Dwa statki, z których drugi wyprzedza pierwszy na spokojnej wodzie w 1 godzinie o 4 km , kursują między temi miastami. Gdy pierwszy statek wyjeżdża z A , a drugi równocześnie z B naprzeciw pierwszego, to spotykają się w odległości 30 km od A ; gdy zaś drugi statek wyjeżdża z A , a równocześnie z nim pierwszy z B , to spotykają się w odległości 38 km od A . Obliczyć, jaka jest prędkość każdego statku na spokojnej wodzie, a jaka prędkość, którą prąd nadaje statkom.

- e) W trójkącie ABC suma boków $AB + BC = 11$ cm , $BC + AC = 12$ cm , $AB + AC = 13$ cm . Obliczyć boki trójkąta.

- f) Obwód trójkąta wynosi 21 cm . Suma dwóch boków jest 2 razy większa, a ich różnica 2 razy mniejsza od boku trzeciego. Obliczyć boki trójkąta.

- g) Obliczyć kąty wewnętrzne α , β , γ trójkąta, jeżeli: $\alpha + \beta = 139^\circ$, $\beta + \gamma = 143^\circ$.

- h) Suma dwóch kątów wewnętrznych trójkąta jest 2 razy większa, a różnica ich jest 2 razy mniejsza od trzeciego kąta wewnętrznego. Obliczyć te trzy kąty.

29. a) Trzy liczby mają tę własność, że gdy kolejno do każdej

z nich dodamy średnią arytmetyczną (połowę sumy) dwu pozostałych, otrzymamy liczby: 7, 3, 8. Znaleźć te liczby.

- b) Znaleźć liczbę trzycyfrową, w której różnica cyfr setek i jednostek jest o 4 mniejsza od cyfry dziesiątek, a suma cyfr dziesiątek i jednostek równa się podwójnej cyfrze setek. Jeżeli przestawimy w tej liczbie cyfry jednostek i setek, otrzymamy nową liczbę, wynoszącą $\frac{1}{4}$ liczby szukanej.

- c) Trzej uczniowie A , B i C zakładają się, który z nich pierwszy dobiegnie do obranej mety. Bieg ma się odbyć trzy razy. Przed każdym biegiem składa każdy z uczniów $\frac{1}{4}$ część wszystkich posiadanych pieniędzy. Złożone pieniądze otrzymuje zaraz po biegu każdorazowy zwycięzca. W pierwszym biegu zwyciężył A , w drugim B , a w trzecim C i wtedy okazało się, że wszyscy trzej mają po 432 gr. Ile pieniędzy miał A , ile B , a ile C na początku?

- d) Trzej uczniowie A , B i C mieli razem 48 orzechów. A rozdał połowę swoich orzechów między dwóch pozostałych kolegów, dając każdemu jednakową ilość; tak samo postąpił potem B , a wreszcie C . Wtedy okazało się, że każdy z nich miał jednakową ilość orzechów. Ile orzechów miał początkowo A , ile B , a ile C ?

- 30/a) Dom bankowy sprzedał jednego dnia: 8 dolarów ameryk., 200 franków franc. i 120 marek niem. za 364 zł;

12 dolarów ameryk., 300 franków franc. i 150 marek niem. za 483 zł;

40 dolarów ameryk., 100 franków franc. i 100 marek niem. za 455 zł.

Jaki był w tym dniu kurs dolara, franka i marki?

- b) Trzej bracia podzielili się spadkiem wynoszącym 34 000 zł. Pierwszy złożył swoją część na $4\frac{1}{2}\%$, drugi na 5% ; trzeci wydał 3465 zł, a resztę umieścił w przedsiębiorstwie, przynoszącym 8% rocznego dochodu. Wtedy mieli wszyscy trzej bracia jednakowy dochód roczny. Ile zł otrzymał każdy z braci przy podziale spadku?

- c) O godz. 8 wyjeżdża ze stacji A do B pociąg osobowy, a 2 godziny później pociąg pośpieszny. Pociąg pośpieszny dopędza pociąg osobowy o godz. 14, a o godz. 15 min. 30

przyjeżdża do B . Pociąg osobowy jest w tej chwili od B oddalony jeszcze o 27 km. Obliczyć prędkość każdego pociągu i odległość A od B .

- d) Obwody trzech różnych ścian prostopadłościanu wynoszą: 16 cm, 19 cm i 21 cm. Obliczyć krawędzie prostopadłościanu.

- e) W prostopadłościanie pomniejszono jedną krawędź przy podstawną o 0,5 cm, a drugą o 4 cm, wysokość zaś powiększono o 1,5 cm. Pole pobocznic nie uległo przytem zmianie; obwód ściany bocznej, której podstawę pomniejszono o 0,5 cm, powiększył się dwa razy, obwód zaś drugiej ściany bocznej pomniejszył się dwa razy. Obliczyć krawędzie danego pierwotnie prostopadłościanu.

- f) Mają być wykonane pewne roboty ziemne. Obliczono, ilu robotników należy przyjąć do tej pracy, po ile godzin dziennie mają pracować i w ilu dniach praca będzie ukończona. W pierwotnym projekcie zaproponowano pewne zmiany, wysuwając następujące żądania: 1) Należy zmniejszyć o dwie ilości godzin dziennej pracy, nie zmieniając ilości robotników; robota trwać będzie wtedy dłużej o 18 dni. 2) Należy zmniejszyć o 2 ilości godzin dziennej pracy, a zatrudnić o 16 robotników więcej; robota będzie wykonana w tym samym czasie. 3) Nie zmieniając ilości godzin dnia roboczego, należy przyspieszyć termin ukończenia pracy, o 18 dni przyjmując o 24 robotników więcej. — Ilu (x) robotników miano przyjąć według pierwotnego projektu? Po ile (y) godzin mieli pracować? W ilu (z) dniach mieli ukończyć pracę?

[Ilość ogólna godzin roboczych pozostaje zawsze ta sama: xyz . W uporządkowanym równaniu podzielić obie strony (uproszczyć) przez x , y lub z .]

Rozdział IV

Jednomiany i wielomiany

§ 1. Potęga.

Iloczyn równych czynników nazywamy *potęgą* i oznaczamy: $\times$

$a \cdot a = a^2$ (a do drugiej potęgi czyli do kwadratu),

$a \cdot a \cdot a = a^3$ (a do trzeciej potęgi czyli do sześciannu),

$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4 \text{ (} a \text{ do czwartej potęgi),}$$

.....

$$\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n \text{ razy}} = a^n \text{ (} a \text{ do } n\text{-tej potęgi).}$$

Powtarzający się czynnik a nazywamy *podstawą (zasadą)*; liczba n , która wskazuje, ile razy podstawa występuje jako czynnik, nazywa się *wykładnikiem potęgowym*, albo krótko *wykładnikiem*.

a^1 , czyli potęga z wykładnikiem 1, nie jest objęta powyższem określeniem. Umawiamy się, że a^1 będzie oznaczało a .

Wprowadziwszy nowe działanie uzupełniamy nasze umowy, dotyczące porządku wykonywania działań naznaczonych w wyrażeniach algebraicznych (§ 12 rozdz. I) następującą:

Naznaczone w wyrażeniu algebraicznym potęgowania należy wykonać przed mnożeniami i dzieleniami (a więc tem bardziej przed dodawaniami i odejmowaniami), o ile nawiasy nie wskazują innego porządku.

Np.: ab^2 oznacza, że należy najpierw wykonać b^2 , a otrzymaną liczbę pomnożyć przez a .

$a-b^2$ oznacza, że należy najpierw obliczyć b^2 , a otrzymaną liczbę odjąć od a .

Ze znaczenia wykładnika wynika, że może on być tylko liczbą naturalną; potęgi z wykładnikiem ułamkowym, zerowym lub ujemnym nie określiliśmy. Natomiast podstawa może być dowolną liczbą względną. Stosując definicje potęgi i mnożenia liczb względnych, oraz twierdzenia o znaku iloczynu większej ilości czynników (§ 5 rozdz. II), obliczamy łatwo:

$$\begin{aligned} (+2)^1 &= +2, & (+2)^2 &= +4, & (+2)^3 &= +8, & (+2)^4 &= +16, & (+2)^5 &= +32 \\ (-2)^1 &= -2, & (-2)^2 &= +4, & (-2)^3 &= -8, & (-2)^4 &= +16, & (-2)^5 &= -32 \end{aligned}$$

Ogólnie:

Liczyby względne potęgujemy, potęgując ich wartości bezwzględne, a wynikowi dając znak $+$, jeżeli podstawa jest dodatnia (zawsze), albo jeżeli podstawa jest ujemna, a wykładnik parzysty; znak $-$ zaś, jeżeli podstawą jest ujemna, a wykładnik nieparzysty.

§ 2. Działania na potęgach.

1. Mając wykonać działanie $(ab)^3$, przedstawiamy tę potęgę jako iloczyn, a stosując do tego iloczynu prawo łączności i przemienności, znajdujemy:

$$(ab)^3 = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) = ababab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3 \cdot b^3. \text{ Ogólnie:}$$

$$(ab)^n = \overbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdots}^{n \text{ razy}}, \text{ według określenia potęgi.}$$

$$\begin{aligned} &= \overbrace{aaa \cdots}^{n \text{ razy}} \overbrace{bbb \cdots}^{n \text{ razy}}, \text{ według praw przemienności i łączności.} \\ &= a^n b^n, \text{ według określenia potęgi.} \end{aligned}$$

Otrzymany wzór: $(ab)^n = a^n b^n$ odczytamy słowami:

Iloczyn potęgujemy, potęgując każdy czynnik, a otrzymane potęgi mnożąc.

$$\text{Np.: } (2a)^2 = 4a^2; (-3xy)^3 = -27x^3y^3; (-3xy)^2 = 9x^2y^2.$$

2. Uogólniając przykład: $a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = aaaaa = a^5$, znajdujemy:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \overbrace{(aaa \cdots)}^{m \text{ razy}} \overbrace{(aaa \cdots)}^{n \text{ razy}}, \text{ według określenia potęgi.} \\ &= \overbrace{aaaa \cdots}^{(m+n) \text{ razy}}, \text{ według prawa łączności} \\ &= a^{m+n}, \text{ według określenia potęgi.} \end{aligned}$$

Otrzymany wzór: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ wyrazimy słowami:

Potęgi o równych podstawach mnożymy, potęgując wspólną podstawę przez sumę wykładników.

$$\text{Np.: } a^4 \cdot a^3 = a^7; a \cdot a^2 = a^1 \cdot a^2 = a^3.$$

3. Uogólniając przykład: $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^{2 \cdot 3} = a^6$, znajdziemy:

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \overbrace{a^m a^m a^m \cdots}^{n \text{ razy}}, \text{ według określenia } n\text{-tej potęgi.} \\ &= \overbrace{a^{m+m+m+\cdots}}^{n \text{ razy}}, \text{ według twierdzenia 2.} \\ &= a^{mn}, \text{ według określenia mnożenia.} \end{aligned}$$

Otrzymany wzór: $(a^m)^n = a^{mn}$ odczytamy tak:

Potęę potęgujemy, potęgując podstawę przez iloczyn wykładników.

$$\text{Np.: } (a^4)^2 = a^8; (-2x^3y^2)^2 = 4x^6y^4.$$

4. Mając a^7 podzielić przez a^3 , szukamy takiej liczby, która pomnożona przez a^3 daje a^7 . Próbuje, czy taką liczbą nie może być jakaś potęga. Liczby a , np. a^x . Jeżeli ma być $a^7 : a^3 = a^x$, musi być $a^x \cdot a^3 = a^7$, czyli $a^{x+3} = a^7$. Ostatnia równość będzie prawdziwa, jeżeli x będzie sprawdzać równanie $x+3=7$. Rozwiązując je, znajdziemy: $x=7-3=4$, zatem: $a^7 : a^3 = a^4$.

Ogólnie: $a^m : a^n = a^{m-n}$, jeżeli $a \neq 0$ i $m > n$; czyli:

Potęgi o równych podstawach dzielimy, potęgując wspólną podstawę przez różnicę wykładników dzielnej i dzielnika.

Wzór ogólny udowodnimy, wykazując, że iloraz a^{m-n} pomnożony przez dzielnik a^n daje na wynik dzielną a^m . I rzeczywiście:

$a^m \cdot a^n = a^{(m-n)+n}$, według tw. o mnożeniu potęg o równych podstawach.
 $= a^n$, bo różnica $(m-n)$ powiększona o odjemnik n daje odjemną m .

Np.: $a^5 : a^2 = a^3$; $x^4 : x = x^4 : x^1 = x^3$.

Ostatnie twierdzenie udowodniliśmy tylko przy zastrzeżeniach, że podstawa potęg jest różna od zera i że wykładnik dzielnej jest większy od wykładnika dzielnika.

Pierwsze z tych zastrzeżeń jest konieczne z tego powodu, że dzielenie przez zero jest działaniem nieokreślone; drugie jest konieczne ze względu na to, że wykładnik $m-n$ musi być liczbą całkowitą dodatnią, bo tylko dla takich wykładników określiliśmy potęgę. Lecz dzielenie $a^m : a^n$ można też łatwo wykonać, jeżeli $m = n$. Wtedy dzielna staje się równą dzielnikowi, a iloraz ma wartość 1.

§ 3. Jednomiany i działania na nich.

Jednomianem nazwaliśmy iloczyn liter i liczby szczegółowej. Czynniki szczegółowy, czasami wraz z czynnikiem literowym, nazywamy *współczynnikiem*; pozostały czynnik literowy, lub iloczyn pozostałych czynników literowych nazywamy *liczbą główną*. Jeżeli w liczbie głównej iloczynu równych czynników napiszemy w postaci potęg, to liczba główna jednomianu będzie miała postać potęgi lub iloczynu potęg.

Np.: $-3a$, $+2a^2$, $-4ab$, $+2b^3c^2$, $-5x^2yz$.

Definicja współczynnika pozostawia pewną dowolność pod tym względem, który czynnik mamy uważać za współczynnik. Np.: W jednomianie $2ax^2$ można równie dobrze uważać za współczynnik 2, jak $2a$; liczbą główną będzie w pierwszym przypadku ax^2 , w drugim x^2 . Zwykle jednak mamy do czynienia z jednomianami, które powstały w następujący sposób: Dana jest jedna litera lub kilka liter; piszemy te litery, lub tworzymy z nich iloczyny, powtarzając dowolnie każdą (np. y , x^2 , xy , x^3y^2 , y^4); iloczyny te mnożymy przez dowolne liczby i otrzymujemy jednomiany: $2y$, $-\frac{2}{3}x^2$, $2axy$, bx^3y^2 , c^2y^4 . W jednomianach tych uważać będziemy kolejno: 2, $-\frac{2}{3}$, $2a$, b , c^2 za współczynniki, a y , x^2 , xy , x^3y^2 , y^4 za liczby główne.

Przez *stopień jednomianu* rozumiemy ilość czynników literowych w liczbie głównej. Jeżeli liczba główna jest potęgą, to stopień jednomianu równa się wykładnikowi potęgi; jeżeli liczba główna jest iloczynem potęg, to stopień jednomianu równa się sumie wykładników potęg liter.

Stopnie wymienionych na początku jednomianów wynoszą kolejno 1, 2, $1+1=2$, $3+2=5$, $2+1+1=4$.

Do jednomianów zaliczamy także liczby szczególne (-7 , $+5$, $-\frac{2}{3}$ i t. p.); nazywamy je jednomianami stopnia zerowego.

Zajmiemy się obecnie działaniami na jednomianach. Zestawmy najpierw znane nam już umowy i twierdzenia:

Dodawanie jednomianów naznaczamy, pisząc je obok siebie z ich znakami; *odejmowanie jednomianów* sprowadzamy do dodawania, pisząc obok niezmiennionej odjemnej odjemnik ze znakiem przeciwnym. W sumie algebraicznej możemy zredukować jednomiany podobne, t. j. mające jednakowe liczby główne. *Jednomiany podobne o współczynnikach szczegółowych redukujemy, redukując ich współczynniki, a liczbę główną zostawiając niezmienną* (§ 7 rozdz. II). Redukcję jednomianów o współczynnikach literowych omówimy w §-ie 4.

Np.: $(+5a^2b) - (-4ab^2) + (-3ab^2) - (+2a^2b) =$
 $= 5a^2b + 4ab^2 - 3ab^2 - 2a^2b = 3a^2b + ab^2$.

Przechodząc do mnożenia jednomianów, zauważymy, że jednomiany są iloczynami. Stosując do iloczynów prawa łączności i przemienności, otrzymamy:

$(-2a^3b^2)(+3ab^3c) = (-2)(+3) \cdot a^3a \cdot b^2b^3 \cdot c = -6a^4b^5c$.

Stąd wysnuwamy regułę:

Jednomiany mnożymy, mnożąc iloczyn ich współczynników przez iloczyn ich liczb głównych.

Mając jednomian potęgować, stosujemy twierdzenie o potęgowaniu iloczynu:

$(-3a^3b)^2 = (-3)^2 (a^3)^2 b^2 = 9a^6b^2$. Stąd reguła:

Jednomian potęgujemy, potęgując współczynnik i liczbę główną, a otrzymane potęgi mnożąc.

Chcąc wykonać dzielenie $(-3ab^5) : (-4b^2)$, gdzie $b \neq 0$, szukamy takiego jednomianu, przez który należy pomnożyć dzielnik, aby otrzymać dzielną. Znajdziemy: $+\frac{3}{4}ab^3$. Zatem: $(-3ab^5) : (-4b^2) = \frac{3}{4}ab^3$.

Podobnie, jeżeli $a \neq 0$ i $b \neq 0$:

$6a^3b : 4ab = \frac{3}{2}a^2$, ponieważ $4ab \cdot \frac{3}{2}a^2 = 6a^3b$.

Nie można natomiast wykonać dzielenia $3a : 4a^3$, gdzie $a \neq 0$, w tem znaczeniu, aby otrzymać iloraz w postaci jednomianu. Zadowolamy się więc naznaczeniem dzielenia w postaci ułamka:

$3a : 4a^3 = \frac{3a}{4a^3}$.

Z tych przykładów wysnuwamy:

Jednomiany dzielimy, mnożąc iloraz ich współczynników przez iloraz ich liczb głównych. Z tego sposobu dzielenia możemy jed-

*Iloraz liczb
 Iloraz cyfr*

nak korzystać tylko wtedy, gdy dzielnik zawiera jako czynniki tylko takie litery, które są zawarte w dzielnej, i to w potęgach nie wyższych niż dzielna.

§ 4. Wielomiany; ich dodawanie i odejmowanie.

Wielomianem nazywamy sumę algebraiczną jednomianów. Składniki sumy nazywamy *składnikami* lub *wyrazami* wielomianu. Składniki wielomianu mogą być jednomianami różnych stopni. Składnik stopnia najwyższego nazywa się *składnikiem najwyższym*; najwyższych składników może być kilka. Stopień najwyższego składnika nazywamy *stopniem wielomianu*.

Np.: Składnikami wielomianu $2a^3b^2 - 3a^2bc - 3b^2c^4$ są jednomiany: $+2a^3b^2$, $-3a^2bc$, $-3b^2c^4$. Jednomiany te są kolejno stopnia 5-go, 4-go, 6-go. Najwyższym składnikiem jest $-3b^2c^4$. Wielomian jest wielomianem stopnia szóstego.

Ponieważ wielomian jest sumą, to korzystając z prawa przemienności możemy składniki wielomianu przestawiać. Czynimy to, gdy chcemy wielomian *uporządkować*. Wielomiany porządkujemy *według potęg rosnących lub malejących* dowolnej litery zawartej w składnikach wielomianu.

Tak np. można uporządkować wielomian: $4ab^3 - 2a^2b^5 - b + 3a^3$ malejąco według potęg a :
 $3a^3 - 2a^2b^5 - b + 4ab^3$ rosnąco według potęg a :
 $-b + 4ab^3 - 2a^2b^5 + 3a^3$ malejąco według potęg b :
 $-2a^2b^5 + 4ab^3 - b + 3a^3$ rosnąco według potęg b :
 $3a^3 - b + 4ab^3 - 2a^2b^5$

Przy porządkowaniu wielomianów zwracamy zwykle uwagę na stopień składników tylko ze względu na jedną literę. Podobnie postępujemy czasem i przy oznaczaniu stopnia wielomianu. Mówimy np. że powyższy wielomian jest stopnia trzeciego ze względu na a , a najwyższym jego składnikiem $3a^3$, chociaż uwzględniając i literę b , musielibyśmy nazwać ten wielomian wielomianem stopnia siódmego, a za najwyższy składnik uważać $-2a^2b^5$.

Wielomiany $2x^2 - 3x + 5$, $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$, i t. p. są trójmianami stopnia drugiego ze względu na x . Jeżeli chcemy ogólnie taki trójmian stopnia drugiego napisać, zważmy, że zawiera on x^2 z dowolnym współczynnikiem (oznaczamy ten współczynnik literą a), zawiera x z dowolnym współczynnikiem (np. b) i wyraz niezawierający x (np. c). Ogólną postać takiego trójmianu jest: $ax^2 + bx + c$. — Wielomian $mx^2 + (m+1)x + (m+2)$ jest trójmianem stopnia drugiego ze względu na x , w którym współczynnik przy x^2 jest dowolną liczbą m , współczynnik przy x jest o 1, a wyraz wolny od x o 2 większy od współczynnika przy x^2 .

Zajmować się będziemy także wielomianami, których wyrazy są jednomianami o współczynnikach literowych. Jednomiany p

dobne o współczynnikach literowych redukujemy, wyłączając z nich wspólną liczbę główną za nawias; w sumie, otrzymanej w nawiasie, można czasem jeszcze pewne wyrazy zredukować.

$$\text{Np.: } (2m+1)x^2 + mx^2 = (2m+1+m)x^2 = (3m+1)x^2; \\ ax + bx = (a+b)x.$$

Przejdźmy do działań na wielomianach.

Wielomiany dodajemy, pisząc ich składniki obok siebie z ich znakami; w wyniku redukujemy podobne wyrazy.

Wielomian jest bowiem sumą składników; dodajemy go przeto jak sumę, dodając kolejno każdy składnik, t. j. (według twierdzenia o dodawaniu jednomianów) pisząc obok wyrażenia, do którego wielomian mamy dodać, kolejno każdy składnik wielomianu z niezmienionym znakiem.

$$\text{Np.: } (3x^2 - 2x + 3) + (-2x^2 + 2x + 1) = 3x^2 - 2x + 3 - 2x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4; \\ (mx^2 + nx + m) + (x^2 - mx - 2) = mx^2 + nx + m + x^2 - mx - 2 = \\ = (m+1)x^2 + (n-m)x + (m-2).$$

Wielomian odejmujemy, pisząc obok niezmienionej odjemnej składniki odjemnika (wielomianu) z przeciwnymi znakami. W wyniku redukujemy podobne wyrazy.

Wielomian bowiem jest sumą; odejmujemy go przeto jak sumę, odejmując kolejno każdy składnik, t. j. (według twierdzenia o odejmowaniu jednomianów) pisząc obok niezmienionej odjemnej kolejno każdy składnik wielomianu (odjemnika) ze znakiem przeciwnym.

$$\text{Np.: } 3x^2y - (2xy^2 + 3x^2y - y^3) = 3x^2y - 2xy^2 - 3x^2y + y^3 = \\ = -2xy^2 + y^3; \\ [mx^3 + (m+1)x] - [2x^3 + mx] = mx^3 + (m+1)x - 2x^3 - mx = \\ = (m-2)x^3 + (m+1-m)x = (m-2)x^3 + x.$$

Ponieważ wielomian jest sumą składników, a liczbę przeciwną sumie otrzymujemy, tworząc sumę liczb przeciwnych składnikom sumy (§ 3 rozdz. II), to wielomiany: $2x^3 - 3x^2 + 1$ i $-2x^3 + 3x^2 - 1$ oznaczają dla wszelkich wartości x liczby przeciwne. Możemy tedy napisać:

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = -(-2x^3 + 3x^2 - 1). \text{ Powiemy:}$$

Z wielomianu można wyłączyć znak — przed nawias, zmieniając równocześnie znaki wszystkich składników na przeciwne.

Korzystamy bardzo często z tego twierdzenia przy redukowaniu wyrazów podobnych o współczynnikach literowych. Np.:

$$-mx - x = (-m-1)x = -(m+1)x; \\ ax + 2x - 4ax = (a+2-4a)x = (-3a+2)x = -(3a-2)x.$$

§ 5. Mnożenie wielomianu przez jednomian; mnożenie wielomianów.

Uważając wielomian za sumę i stosując prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania, otrzymamy:

Wielomian mnożymy przez jednomian, mnożąc każdy składnik wielomianu przez jednomian, a otrzymane iloczyny pisząc obok siebie z ich znakami.

Wielomian jest bowiem sumą składników; pomnożymy go zatem przez jednomian, mnożąc każdy składnik wielomianu przez jednomian, a otrzymane iloczyny dodając jak jednomiany, t. j. pisząc obok siebie z ich znakami.

$$\text{Np.: } (\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}x) \cdot (-2x^2) = -x^5 + 4x^4 - \frac{4}{3}x^3.$$

Stosując twierdzenie o mnożeniu sum (§ 7 rozdz. II), znajdziemy:

Wielomian mnożymy przez wielomian, mnożąc każdy składnik jednego wielomianu przez każdy składnik drugiego wielomianu, a otrzymane iloczyny pisząc obok siebie z ich znakami. W wyniku redukujemy jednomiany podobne.

Wielomiany są bowiem sumami, mnożymy je zatem jak sumy. Otrzymane iloczyny częściowe są jednomianami; dodajemy je przeto, pisząc je obok siebie z ich znakami. Np.:

$$(2a^2 - a - 3)(a - 2) = 2a^3 - a^2 - 3a - 4a^2 + 2a + 6 = 2a^3 - 5a^2 - a + 6.$$

Dla ułatwienia późniejszej redukcji porządkujemy zwykle wielomiany, które mamy mnożyć, według potęg tej samej podstawy, a wykonując mnożenie, piszemy podobne jednomiany pod sobą.

Przykłady: 1) $(3x^3 - 2x^2y - 4xy^2 + y^3) \cdot (x^2 - 3xy - 2y^2)$

$$\begin{array}{r} 3x^5 - 2x^4y - 4x^3y^2 + x^2y^3 \\ - 9x^4y + 6x^3y^2 + 12x^2y^3 - 3xy^4 \\ - 6x^3y^2 + 4x^2y^3 + 8xy^4 - 2y^5 \\ \hline 3x^5 - 11x^4y - 4x^3y^2 + 17x^2y^3 + 5xy^4 - 2y^5. \end{array}$$

$$2) (a^3 - a^2 + 1) \cdot (a^2 + a + 1)$$

$$\begin{array}{r} a^5 - a^4 + a^2 \\ + a^4 - a^3 + a \\ + a^3 - a^2 + 1 \\ \hline a^5 + a + 1. \end{array}$$

$$3) [x^2 + (a-1)x + a] \cdot [x-1]$$

$$\begin{array}{r} x^3 + (a-1)x^2 + ax \\ - x^2 - (a-1)x - a \\ \hline x^3 + (a-2)x^2 + x^2 - a. \end{array}$$

§ 6. Niektóre szczególne przypadki mnożenia wielomianów

Omówimy niektóre szczególne przypadki mnożenia wielomianów. Wyniki tych mnożeń należy sobie zapamiętać. Litery a i b w

wzorach, które niżej wyprowadzimy, oznaczać będą dowolne liczby lub dowolne wyrażenia.

1. Wykonajmy działanie:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Uważając w otrzymanym wzorze: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ litery a i b za dowolne jednomiany, powiemy:

Kwadrat dwumianu jest trójmianem, którego składnikami są: kwadrat pierwszego składnika dwumianu, podwójny iloczyn obu składników i kwadrat drugiego składnika.

Np.:

$$(3x - 2xy)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot (-2xy) + (-2xy)^2 = 9x^2 - 12x^2y + 4x^2y^2;$$

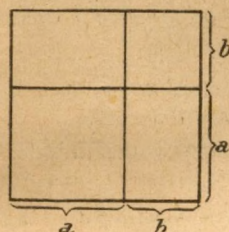
$$(-5n - 2n^2)^2 = (-5n)^2 + 2 \cdot (-5n) \cdot (-2n^2) + (-2n^2)^2 = 25n^2 + 20n^3 + 4n^4.$$

Zwracamy uwagę, że w trójmianie, który powstał z podniesienia dwumianu do kwadratu, składniki, które są kwadratami wyrazów dwumianu, mają zawsze znak +; składnik natomiast, będący podwójnym iloczynem wyrazów dwumianu, ma znak + lub - zależnie od tego, czy wyrazy dwumianu mają znaki jednakowe, czy różne.

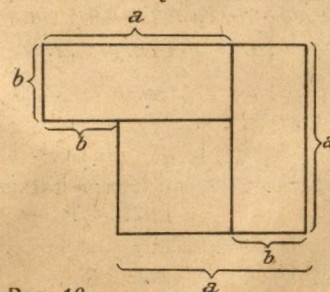
Jeżeli a i b są liczbami dodatnimi, możemy wzory:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ i } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

interpretować geometrycznie, przedstawiając a i b odcinkami, ich iloczyn polem prostokąta, a ich kwadraty polami kwadratów. Rys. 15 przedstawia kwadrat o boku $a+b$; kwadrat ten składa się z kwadratu o boku a , z kwadratu o boku b , oraz dwóch prostokątów o bokach a i b , zgodnie z pierwszym wzorem. — Rys. 16 przedstawia sumę dwóch kwadratów,



Rys. 15.



Rys. 16.

z których jeden ma bok a , a drugi bok b (wskaż je na rysunku). Jeżeli z tej figury odrzucimy dwa prostokąty o bokach a i b (wskaż je na rysunku) pozostanie kwadrat o boku $a-b$ (wskaż go na rysunku). Jest więc: $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ zgodnie z drugim wzorem.

Ze wzoru na kwadrat sumy korzystamy przy obliczaniu kwadratów liczb dwucyfrowych. Zważywszy, że: $46^2 = (6+40)^2 = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 40 + 40^2$, rachujemy tak:

$6^2 = 36$; zapisujemy 6 jednostek, a 3 dziesiątki zatrzymujemy w pamięci. $2 \cdot 6 \cdot 4$ dziesiątki = 48 dziesiątek; doliczamy 3 dziesiątki i otrzymujemy 51 dziesiątek. Zapisujemy 1 dziesiątkę a 5 setek zatrzymujemy w pamięci.

2146

$40^2 = 1600 = 16$ setek; po doliczeniu 5 setek otrzymujemy 21 setek. Zapisujemy je w całości.

Otrzymujemy 2116 jako kwadrat liczby 46.

2. Wykonajmy działanie:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = \frac{(a^2+2ab+b^2)(a+b)}{a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3} = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Otrzymany wzór odczytamy tak:

Sześcian dwumianu jest czworomianem, którego składnikami są: sześcian pierwszego składnika dwumianu, potrójny iloczyn kwadratu pierwszego składnika i drugiego składnika dwumianu, potrójny iloczyn pierwszego składnika i kwadratu drugiego składnika dwumianu i sześcian drugiego składnika dwumianu.

Np.:

$$(-2x^2+3x)^3 = (-2x^2)^3 + 3(-2x^2)^2(3x) + 3(-2x^2)(3x)^2 + (3x)^3 = -8x^6 + 36x^5 - 54x^4 + 27x^3.$$

3. Wynik mnożenia: $(a+b)(a-b)$

$$\begin{array}{r} a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

możemy tak wypowiedzieć słowami:

Gdy pomnożymy sumę dwu liczb lub sumę dwu wyrażeń przez ich różnicę, otrzymamy różnicę kwadratów odjemnej i odjemnika.

$$\text{Np.: } (3x+1)(3x-1) = (3x)^2 - 1^2 = 9x^2 - 1.$$

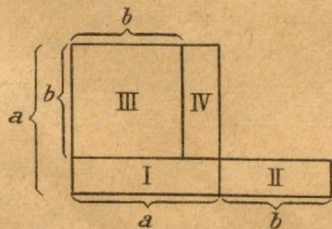
$$(2x^2+x-1)(2x^2-x+1) = [2x^2+(x-1)][2x^2-(x-1)] = (2x^2)^2 - (x-1)^2 = 4x^4 - x^2 + 2x - 1.$$

Z ostatniego twierdzenia korzystamy też czasem w postaci:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

$$\text{Np.: } (2x+3)^2 - (2x-4)^2 = (2x+3+2x-4)(2x+3-2x+4) = (4x-1) \cdot 7 = 28x-7.$$

Jeżeli a i b są liczbami dodatnimi i $a > b$, to wzór $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ można przedstawić geometrycznie. Na rys. 17 przedstawiono są liczby a i b odcinkami. Nadto:



Rys. 17.

$(a+b)(a-b)$ przedstawia pole prostokąta I + II;

a^2 przedstawia pole kwadratu I + III + IV;

b^2 przedstawia pole kwadratu III;

$a^2 - b^2$ przedstawia pole sumy prostokątów I + IV.

Ponieważ prostokąty II i IV są równe (mają jednakowe boki a i $a-b$), to $I + II = I + IV$ zgodnie z powyższym wzorem.

§ 7. Dzielenie wielomianów.

1. Z twierdzenia o dzieleniu sumy (§ 8 rozdz. II) otrzymujemy:

Wielomian dzielimy przez jednomian, dzieląc każdy składnik wielomianu przez jednomian, a otrzymane ilorazy pisząc obok siebie z ich znakami.

Wielomian bowiem jest sumą; dzielimy go przeto przez jednomian, dzieląc każdy składnik, a otrzymane ilorazy dodając, t. j. pisząc obok siebie z ich znakami. Np.:

$$(8a^5 - 12a^4 + 4a^3) : (-4a^3) = -2a^2 + 3a - 1; (a \neq 0).$$

Z dzielenia wielomianu przez jednomian korzystamy, gdy chcemy z wielomianu wyłączyć przed nawias wspólny czynnik wszystkich składników. Wtedy dzielimy cały wielomian przez ów wspólny czynnik, naznaczając równocześnie mnożenie przez ten czynnik.

Np.: Zauważywszy, że każdy składnik wielomianu $4x^3y - 6x^2y^2 + 2xy^3$ da się podzielić przez $2xy$, dzielimy wielomian przez $2xy$, a otrzymany iloraz mnożymy przez $2xy$. Otrzymamy:

$$4x^3y - 6x^2y^2 + 2xy^3 = 2xy(2x^2 - 3xy + y^2).$$

Wyłączmy z wielomianu $x^2 - 2x + 3$ przed nawias -1 . Otrzymamy:

$$x^2 - 2x + 3 = (-1)(-x^2 + 2x - 3).$$

A że mnożenie liczby przez -1 zmienia tę liczbę na przeciwną, otrzymamy:

$$x^2 - 2x + 3 = -(-x^2 + 2x - 3).$$

Z tego przykładu widzimy, że znane nam z § 4 wyłączanie znaku $-$ przed nawias można uważać za wyłączanie przed nawias czynnika -1 .

2. Z dzielenia wielomianu przez wielomian zajmiemy się tylko dzieleniem wielomianów zawierających tylko jedną literę np. x przez dwumiany takie jak np. $x+2$, $x-1$, $x-3$ i t. p.

Rozważmy najpierw pewne przekształcenie ilorazu:

$$(2x^3 - 3x^2 - 5x - 12) : (x-3), (x-3 \neq 0).$$

Podzielmy najwyższy składnik dzielnej przez najwyższy składnik dzielnika, a przez otrzymany iloraz pomnóżmy dzielnik:

$$2x^3 : x = 2x^2; \quad 2x^2(x-3) = 2x^3 - 6x^2.$$

Odejmując ostatni dwumian od dzielnej, otrzymamy:

$$(2x^3 - 3x^2 - 5x - 12) - 2x^2(x-3) = 3x^2 - 5x - 12.$$

Ponieważ odjemna równa się sumie odjemnika i różnicy, to:

$$2x^3 - 3x^2 - 5x - 12 = 2x^2(x-3) + (3x^2 - 5x - 12).$$

Dzieląc obie strony tej równości przez $(x-3)$, otrzymamy:

$$(2x^3 - 3x^2 - 5x - 12) : (x-3) = 2x^2 + (3x^2 - 5x - 12) : (x-3).$$

Otrzymaliśmy następujące przekształcenie:

Iloraz wielomianu uporządkowanego według potęg x przez $(x-3)$ równa się ilorazowi najwyższych składników dzielnej i dzielnika, powiększonemu o iloraz wielomianu stopnia niższego niż dzielna przez $(x-3)$. W ten sposób sprowadzamy dzielenie wielomianu przez $(x-3)$ do dzielenia przez $(x-3)$ wielomianu stopnia niższego niż dany wielomian.

Przekształcenie powyższe zapisujemy tak:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 3x^2 - 5x - 12) : (x-3) = 2x^2 + \\ + 2x^3 - 6x^2 \\ \hline 3x^2 - 5x - 12. \end{array}$$

Dzielimy więc najwyższy składnik dzielnej przez najwyższy składnik dzielnika (zapisujemy $2x^2$). Przez otrzymany iloraz $2x^2$ mnożymy dzielnik, a otrzymany iloczyn podpisujemy pod dzielną i odejmujemy od dzielnej. Do $2x^2$ (w ilorazie) powinniśmy dopisać $+(3x^2 - 5x - 12) : (x-3)$. Nie czynimy tego, lecz przekształcamy ten iloraz jak poprzedni:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 3x^2 - 5x - 12) : (x-3) = 2x^2 + 3x + \\ + 2x^3 - 6x^2 \\ \hline 3x^2 - 5x - 12 \\ 3x^2 - 9x \\ \hline 4x - 12. \end{array}$$

Do $2x^2 + 3x$ powinniśmy dopisać $+(4x - 12) : (x-3)$. Przekształcamy jednak ten iloraz tak jak poprzednie i otrzymujemy ostatecznie:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 3x^2 - 5x - 12) : (x-3) = 2x^2 + 3x + 4 \\ + 2x^3 - 6x^2 \\ \hline 3x^2 - 5x - 12 \\ + 3x^2 - 9x \\ \hline 4x - 12 \\ + 4x - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Do $2x^2 + 3x + 4$ należy jeszcze dodać iloraz $0 : (x-3)$, który jednak ma wartość 0 tak, że:

$$(2x^3 - 3x^2 - 5x - 12) : (x-3) = 2x^2 + 3x + 4.$$

Przeróbmy jeszcze następujący przykład:

$$(x^3 + 3x^2 - 5x - 4) : (x+2) = x^2 + x - 7 + 10 : (x+2) + x^3 + 2x^2$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 5x - 4 \\ + x^2 + 2x \\ \hline -7x - 4 \\ -7x - 14 \\ \hline 10 \end{array}$$

W tym przykładzie ostatnia reszta jest różna od zera; iloraz nie dał się przedstawić w postaci wielomianu.

§ 8. Rozkładanie wielomianów na czynniki.

W paragrafach 5 i 6 tworzyliśmy iloczyn wielomianów. Nie należy jednak uważać wykonanego iloczynu dwóch wielomianów za wyrażenie prostsze od iloczynu naznaczonego. Zwłaszcza gdy chodzi o obliczenie wartości wielomianu dla pewnych wartości liter, staramy się zwykle przedstawić dany wielomian w postaci iloczynu kilku czynników, czyli rozłożyć na czynniki. Jeżeli np. mamy obliczyć $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ dla $a = 47,5$, $b = 36,5$, to pierwsza postać wymaga obliczeń: $a^2 = 47,5^2 = 2256,25$; $b^2 = 36,5^2 = 1332,25$ i $a^2 - b^2 = 2256,25 - 1332,25 = 924$; druga postać wymaga obliczeń: $(a+b) = 84$, $(a-b) = 11$ i $(a+b)(a-b) = 84 \cdot 11 = 924$. Widzimy, że postać wielomianu rozłożonego na czynniki wymaga czasami przy obliczeniu jego wartości o wiele mniej rachunków. Zajmiemy się tedy rozkładaniem wielomianów na czynniki.

Stosując znane twierdzenia o mnożeniu wielomianów, potrafimy wielomian rozłożyć na czynniki w następujących przypadkach:

1. Jeżeli wszystkie składniki wielomianu mają wspólny czynnik, *wyłączamy ten czynnik przed nawias*.

$$\text{Np.: } ab + ac + ad = a(b + c + d);$$

$$6x^3y^2 - 4x^2y^3 - 2xy^4 = 2xy^2(3x^2 - 2xy - y^2).$$

2. O ile w iloczynie dwóch wielomianów składniki nie dały się zredukować, można przez stosowne ugrupowanie wyrazów i wyłączenie przed nawias wspólnych czynników odzyskać pierwotny rozkład na czynniki.

Np.: Mając dany wielomian $ac + bd + ae - bc - ad - be$, zauważymy, że trzy jego składniki zawierają czynnik a , a trzy pozostałe czynnik b . Zestawiamy tedy wyrazy mające czynnik a razem i wyrazy mające czynnik b razem i wyłączamy z nich a względnie b przed nawias. Otrzymamy:

$$ac + bd + ae - bc - ad - be = (ac - ad + ae) + (-bc + bd - be) = a(c - d + e) - b(c - d + e).$$

Wyłączając z ostatniej różnicy $(c - d + e)$ za nawias, otrzymamy:

$$ac + bd + ae - bc - ad - be = (a - b)(c - d + e).$$

W niektórych prostszych przypadkach możemy stosować tę metodę także wtedy, gdy wyrazy po pomnożeniu dwóch wielomianów zostały zredukowane.

Rozważmy np. wynik mnożenia:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Mając naodwrot dany trójmian stopnia drugiego: $x^2 + (a + b)x + ab$, możemy go tak przekształcić:

$$x^2 + (a + b)x + ab = x^2 + ax + bx + ab = x(x + a) + b(x + a) = (x + a)(x + b).$$

Sposób ten możemy zastosować także do trójmianu stopnia drugiego ze względu na x o współczynnikach cyfrowych, jeżeli wyraz zerowego stopnia da się rozłożyć na dwa czynniki, których suma jest współczynnikiem przy x .

Np.: W trójmianie $x^2 - 5x + 6$ wyraz 6 da się tak rozłożyć na czynniki: $6 = (+1)(+6) = (-1)(-6) = (+2)(+3) = (-2)(-3)$. Badamy, czy współczynnik -5 przy x da się przedstawić jako sumę dwóch z tych czynników. Zauważymy, że $-5 = (-2) + (-3)$. Zatem:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 + (-2 - 3)x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3).$$

Wyjaśnij następujące przekształcenia:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x^2 - 12x &= 2x(x^2 - x - 6) = 2x[x^2 + (2 - 3)x - 6] = \\ &= 2x[x^2 + 2x - 3x - 6] = 2x[x(x + 2) - \\ &\quad - 3(x + 2)] = \\ &= 2x(x + 2)(x - 3). \end{aligned}$$

3. Przy rozkładaniu wielomianów na czynniki korzystamy też często ze wzorów, które wyprowadziliśmy w §-ie 6. Przystawiając w tych wzorach lewą stronę z prawą, otrzymamy:

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2; \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 &= (a + b)^3; \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b). \end{aligned}$$

Np.: 1) Mając rozłożyć na czynniki wielomian: $4x^2 - 12x + 9$, zauważymy, że pierwszy jego składnik jest kwadratem jednomianu $2x$, ostatni kwadratem liczby 3. Ponieważ drugi wyraz, gdy pominiemy jego znak, jest podwójnym iloczynem $2x$ i 3 i ma znak $-$, to dany trójmian powstaje

z podniesienia do kwadratu dwumianu $2x - 3$ lub $-2x + 3$. Otrzymamy:

$$4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2 = (-2x + 3)^2.$$

Nie należy dziwić się, że otrzymaliśmy pozornie dwa różne wyniki. Wielomiany $2x - 3$ i $-2x + 3$ przedstawiają dla wszelkich wartości x liczby przeciwne; kwadraty zaś takich liczb są zawsze równe; Np.: $(+3)^2 = (-3)^2 = 9$.

$$\text{Podobnie: } 9a^2 + 6ab + b^2 = (3a + b)^2 = (-3a - b)^2.$$

2) Mając rozłożyć na czynniki wielomian: $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$, zauważymy, że pierwszy jego składnik jest sześcianiem jednomianu $2a$, a czwarty sześcianiem liczby -1 . Ponieważ drugi wyraz można przedstawić w postaci $3 \cdot (2a)^2 \cdot (-1)$, a trzeci w postaci $3 \cdot 2a \cdot (-1)^2$, to dany wielomian powstał z podniesienia do sześcianu dwumianu $2a - 1$. Jest więc:

$$8a^3 - 12a^2 + 6a - 1 = (2a - 1)^3.$$

3) Dwumian $4a^2 - 9b^2$ jest różnicą kwadratów jednomianów $2a$ i $3b$. Powstał on więc z pomnożenia sumy tych jednomianów przez ich różnicę:

$$4a^2 - 9b^2 = (2a + 3b)(2a - 3b).$$

Często stosujemy powyższe twierdzenia i wzory kolejno i uzyskujemy rozkład wielomianu na większą ilość czynników. Np.:

$$\begin{aligned} 3a^5 - 6a^3 + 3a &= 3a(a^4 - 2a^2 + 1) = 3a(a^2 - 1)^2 = \\ &= 3a(a + 1)^2(a - 1)^2; \\ x^4 - 5x^2 + 4 &= x^4 - x^2 - 4x^2 + 4 = x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2). \end{aligned}$$

Ćwiczenia.

1. Wykonać działania:

$$[a] (-3)^2 + (+3)^2 - (-2)^3 - (+2)^3 = ?$$

$$[b] (-2)^4 + (+2)^4 - (-1)^3 + (-2)^3 = ?$$

$$[c] (-2)^3 + (-4)^2 - (+2)^3 + (-3)^3 = ?$$

$$[d] (-3)^3 - (-5)^3 + (+2)^3 + (-4)^3 = ?$$

$$[e] (-2)^2(+3) - (+2)^2(+4) - (-2)^3(-1) + (+2)^3(+3) = ?$$

$$[f] (-2)^3(+3)^2 - (-1)^5(+3)^3 + (+2)^2(-2)^5 - (-3)^3(-1)^3 = ?$$

$$[g] (-2)(-1\frac{1}{2})^2 - (+\frac{2}{3})^2(-1\frac{1}{2})^3 + (-\frac{2}{3})^2(-2\frac{1}{2})^3 = ?$$

$$[h] (-0,2)^3(-0,5)^2(+10)^3 - (-0,4)^3(+0,5)^2(+10)^4 = ?$$

2. Obliczyć wartości następujących wyrażeń dla wartości liter, podanych obok każdego wyrażenia:

- a) $x^3 - x^2 + x - 1$; $x = -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}, +1, +2$;
 b) $x^4 - x^3$; $x = -2, -1, 0, +1, +2$;
 c) $x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3$; $x = -2, y = +2$;
 d) $x^4 - 3x^3 y + 2x^2 y^2 - xy^3$; $x = -1, y = -2$.

3. a) Powierzchnię p i objętość v kuli o promieniu r oblicza się według wzorów: $p = 4\pi r^2$; $v = \frac{4}{3}\pi r^3$. Litera π oznacza liczbę, która w przybliżeniu wynosi 3,14159. Obliczyć powierzchnię i objętości kul o promieniach: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm i odpowiedzieć na podstawie otrzymanych wyników, ile razy powiększy się powierzchnia, a ile razy objętość kuli, gdy promień wzrośnie 2, 3, 4 razy.

b) Jeżeli z drutu stalowego o średnicy d cm sporządzimy sprężynę, złożoną z n zwojów o promieniu r cm, to sprężyna taka pod wpływem siły p kg wydłuża się o f cm. Wielkość f oblicza się w technice według wzoru:

$$f = \frac{64\pi r^3 p}{G \cdot d^4}, \text{ gdzie } G = 75 \cdot 10^4 \text{ (dla stali).}$$

Obliczyć f , jeżeli $n = 20$, $r = 3$, $p = 1$, przyjmując za d kolejno 0,2; 0,4; 0,6; 0,8. Ile razy zmniejsza się f , gdy d powiększa się 2, 3, 4 razy?

4. Wykonać działania:

- a) $(abc)^3 = ?$ b) $(-3a)^2 = ?$ c) $(+2ab)^3 = ?$
 d) $(-3x)^3 = ?$ e) $-(-2a)^2 = ?$ f) $-(-2a)^3 = ?$
 g) $[(-a)(-b)]^2 = ?$ h) $[(+a)(-b)]^4 = ?$
 i) $[(-a)(-b)]^3 = ?$ j) $[(-a)(+b)]^5 = ?$
 k) $(-2ac)^5 = ?$ l) $(-abc)^6 = ?$

5. Wykonać działania:

- a) $a^5 \cdot a^3 = ?$ b) $a^3 \cdot a = ?$ c) $a^n \cdot a^2 = ?$
 d) $a^{2n} \cdot a^n = ?$ e) $a \cdot a^n = ?$ f) $a^n \cdot a^{n+1} = ?$
 g) $a^{2n+1} \cdot a^{2n-1} = ?$ h) $a^{2n} \cdot a^{n+1} = ?$ i) $a^{n+1} \cdot a^{2n-1} = ?$
 j) $a^3 \cdot a^2 \cdot a = ?$ k) $x^4 \cdot x \cdot x = ?$ l) $x^3 \cdot x \cdot x^2 \cdot x = ?$

[n oznacza w zad. c)÷i) dowolną liczbę naturalną.]

6. Wykonać działania:

- a) $(x^3)^2 = ?$ b) $(x^2)^3 = ?$ c) $(x^3)^3 = ?$
 d) $(x^2 y^3)^2 = ?$ e) $(abc^2)^3 = ?$ f) $(a^3 bc^2)^3 = ?$
 g) $(2a^2 bc^3)^2 = ?$ h) $(-3ab^4 c^2)^2 = ?$
 i) $(-2a^2 b)^5 = ?$ j) $(a^2)^3 \cdot (a^3)^2 = ?$
 k) $(-a^2)^3 \cdot (-a^3)^2 = ?$ l) $(a^3)^3 \cdot (a^2)^2 = ?$

7. Wykonać działania, przyjmując, że $a \neq 0$:

- a) $a^5 : a^3 = ?$ b) $a^7 : a^6 = ?$ c) $a^3 : a = ?$
 d) $a^5 : a^5 = ?$ e) $a^n : a = ?$ f) $a^{2n} : a^n = ?$
 g) $(a^4)^2 : (a^2)^4 = ?$ h) $(a^5)^2 : (a^2)^3 = ?$
 i) $(a^5)^2 : (a^3)^3 = ?$

[W zad. e) i f) oznacza n dowolną liczbę naturalną.]

8. Wykonać działania:

- a) $(-3a^2) + (+5a) + (-7a) + (+5a^2) + (+2a) = ?$
 b) $(+\frac{3}{8}x) + (-0,2x^2) + (-3,8x^2) + (-\frac{1}{6}x) + (+\frac{1}{2}x) = ?$
 c) $(+5b^2) - (+2b^3) - (-b^3) - (+3b^2) - (-2b^3) = ?$
 d) $(+\frac{5}{8}a^2b) + (+\frac{3}{4}ab^2) - (-\frac{3}{8}a^2b) - (+\frac{1}{2}ab^2) + (-\frac{1}{2}a^2b) = ?$
 e) $(-2,3a^2) - (-0,4a^2b) + (+0,6a^2b) + (-a^2b) - (-2,8a^2) = ?$
 f) $(-x^3) - (-x^2) + (+2x^3) - (+2x) + (-3x^2) - (+x^2) + (-x) = ?$

9. Wykonać działania:

- a) $(-5x^2y) \cdot (-3xy^2) = ?$ b) $(-3mn^2p^3) \cdot (+2m^2np^2) = ?$
 c) $\frac{2}{3}a^2b \cdot \frac{5}{6}a^2b^2 = ?$ d) $2a^3 \cdot 3a \cdot 5a^2b = ?$
 e) $\frac{1}{3}xyz \cdot \frac{2}{3}xy^2z^3 = ?$ f) $-3x^2z \cdot \frac{2}{3}xy \cdot 2y^2z = ?$
 g) $(-2ab^2)^3 \cdot (-2a)^2 = ?$ h) $(2a^2b)^2 \cdot (3a^2)^3 \cdot (\frac{1}{6}b)^2 = ?$
 i) $(-2)(+3ab^2)^2(-a^2b)^3 = ?$
 j) $(-a)^2(-b)^3(-2a)(+3b)^2 = ?$
 k) $(\frac{2}{3}xy)^3(\frac{3}{4}x^2y)^2(\frac{1}{2}yz)^2 = ?$ l) $(-\frac{1}{3}x)^2(-3y^2)^3(-2xy) = ?$

10. Wykonać działania:

- a) $(-5a^3)(+2a^2) + (-2a)(-3a^4) = ?$
 b) $(-6a^2b)(-a^3b^2) - (-2a^4b^3)(+4a) = ?$
 c) $(-2a)(+3a^2)(+5a) + (-3a^2)^2 - (-12a^3)(-2a)(-1) = ?$
 d) $(-2a^3)^2 - (-3a^2)^3 + (+2)^3(-a^3)^2 - (-5a^4)(-2a)^2 = ?$
 e) $[(+3a^4) - (-2a^4)] \cdot [(-2a^2) + (+3a^2)] = ?$
 f) $[(-3b^2) - (+2b^2)]^2 \cdot [(-4b) - (-5b)] = ?$
 g) $[(+5a^2) - (+3a^2)]^2 - [(-7a^2) - (-5a^2)]^2 = ?$
 h) $[(-3x^3)(+2x^2) - (-x)(-4x^4)]^3 = ?$

11. Wykonać działania:

- a) $2a^2c : a^2c = ?$ b) $5ab^3c : b^2c = ?$ c) $(-5a^3b) : (+5a^2) = ?$
 d) $(-\frac{2}{3}a^5) : (-\frac{1}{3}a^2) = ?$ e) $(+\frac{2}{3}a^5b^2) : (-4a^2b^2) = ?$
 f) $(+10a^3b^2) : (+0,1a^3b) = ?$
 g) $(-7a^3b^2c^5) : (+7a^3b^2c^3) = ?$

12. Uporządkować różnymi sposobami wielomiany:

a) $x^2 - 5x^3 + 3 - x^4 + 2x$;

- b) $3xy^2 - 2x^3 + 2x^2y - y^3$;
 c) $2y^2z - 3x^2y + 4xz^2$;
 d) $5a^3b^3 - 3a^2b - 2b^4 + 3ab^2$;
 e) $x^5 + 2x^6 - 3x^3 - 5$;
 f) $3x^3y^2 - 2xy^4 - 3x^4y + 5y^5$.

13. Wykonać działania:

- a) $(3x^2 - 2x + 1) + (-2x^2 + x - 2) + (x^2 - x + 1) = ?$
 b) $(x^2 - 2x + 3) - (2x^2 + x - 5) - (-3x^2 + x + 7) = ?$
 c) $(a^3 - 3a + 2) + (2a^2 + 2a - 3) - (a^3 + a^2 - 2a) = ?$
 d) $[x^2 - (x + 1)] - [x^2 - (x - 1)] - [-x^2 - (-x + 1)] = ?$
 e) $[(-2x + 3) - (4 - x^2)] + [(2x^2 + x) - (x^2 + 2)] = ?$
 f) $[(c^2 + 2) - (c - 1)] - [(2c - c^2) + (3c + 2)] = ?$
 g) $(3a - 2) - \{2a^2 - [3a - (a^2 + 2a - 1)]\} = ?$
 h) $(ax^2 - bx + c) - (cx^2 + bx - a) = ?$
 i) $[mx^2 - (m + 1)x + m^2] - [x^2 - mx + (1 - m^2)] = ?$
 j) $(ax^2 + bx + a) - (ax^2 - bx - b) = ?$
 k) $[(2n + 1)x^2 - (2n - 1)x + (n - 1)] - [(n - 1)x^2 - (n - 1)x + n] = ?$
 l) $[nx^2 - (n + 1)x + n] + [x^2 + (n - 1)] - [nx^2 - nx + 2n] = ?$

14. a) Przedstawić w postaci różnicy jednomianu a i stosownego dwumianu trójmiany: $a - b - c$, $a + b - c$, $a + b + c$.

b) Przedstawić (kilku sposobami) w postaci różnicy dwóch dwumianów czworomiany: $2x^3 - x^2 - x - 2$, $x^3 + x^2 - 2x + 1$, $x^3 - x^2 + x + 1$, $x^3 - x^2 + x - 1$.

15. Wykonać działania:

- a) $(3a^3 - 2a^2 - a - 5) \cdot (-3a^2) = ?$
 b) $(2m^3 - 5mn^2 + n^4) \cdot (-4m^2n) = ?$
 c) $-2x^2(-3x^3 + 2x^2 - 4x + 1) = ?$
 d) $-6xy^2(\frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{8}x^2) = ?$
 e) $3a(2a - 4) + 2a(3a + 5) = ?$
 f) $2x(x - 3) - 3x(2x + 1) = ?$
 g) $3x(x^2 - 2x - 1) - 2x^2(x - 3) - 2(x^3 - 2x + 1) = ?$
 h) $2a^2(a^2 - 3) - a^3(a + 2) - 3a(a^2 - 2a^3) = ?$
 i) $8x^5 - x\{x^4 - x[4x^2 - 2x^2(3x + 2)]\} = ?$
 j) $n - n\{n^2 - 2n^2(n - 1) - n[2n - n(2n - 1)]\} = ?$
 k) $-2x^3[x - 2(x^2 - \frac{3}{4})] - 5x[2x^2(x - \frac{1}{10}) + x(\frac{1}{2}x - 1)] = ?$
 l) $\frac{1}{2}a^2b^4 - \frac{1}{6}a\{a^5 - a[3(a^2 + b^2)a^2 - 3(a^2 + b^2)b^2]\} = ?$

16. Wykonać mnożenia:

- a) $(x + 3)(x - 2) = ?$ b) $(x - 5)(x - 1) = ?$

- c) $(2n - 1)(3n + 2) = ?$
 d) $(x - \frac{1}{4})(x - \frac{3}{4}) = ?$
 e) $(x^2 - x + 1)(x + 1) = ?$
 f) $(x^2 - 3x + 2)(x - \frac{1}{2}) = ?$
 g) $(a^3 - 2a^2 - a + 2) \cdot (a^2 + 2a - 1) = ?$
 h) $(2a^2 - 3a + 1) \cdot (a^3 - 3a^2 + 2a - 2) = ?$
 i) $(\frac{3}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^2b + ab^2 - 2b^3) \cdot (2a^3 - 4a^2b - \frac{3}{8}ab^2 + 2b^3) = ?$
 j) $(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x^2 - x^3) \cdot (16 + 8x + 4x^2 - 2x^3 - x^4) = ?$
 k) $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) \cdot (x - y) = ?$
 l) $(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) \cdot (x + y) = ?$
 m) $(x^3 - 2x + 1) \cdot (x^2 - 3x + 2) = ?$
 n) $(a^4 - 2a^3 - 3) \cdot (a^3 - 2a + 1) = ?$
 o) $(x^4 - 2x^3 - x - 1) \cdot (x^2 - 3x - 1) = ?$
 p) $(x^3 - 2x^2 - x + 2) \cdot (x^3 + 2x^2 - 3) = ?$
 r) $(x + a)(x + b) = ?$ s) $(x + a)(x - b) = ?$
 t) $(x - a)(x + b) = ?$ u) $(x - a)(x - b) = ?$
 v) $(x - m)(x + 1) = ?$ w) $(x - 2)(x - m) = ?$
 x) $(ax + b)(bx - a) = ?$
 y) $(mx - 1)(x - m) = ?$
 z) $[x^2 - (m - 1)x + 2m] \cdot (x + 1) = ?$
 ż) $[mx^2 - (m + 1)x - (m - 1)] \cdot (x - 2) = ?$
 ź) $[x^2 + (m - 1)x - 1] \cdot (x - m) = ?$

17. Wykonać działania:

- a) $(x - \frac{2}{3})(3x + \frac{1}{2}) - (x - \frac{1}{2})(2x - \frac{1}{3}) = ?$
 b) $(n + 2)(n + 1) + (n - 2)(n - 1) = ?$
 c) $(n + 1)(n + 2)(n + 3) - n(n - 1)(n - 2) = ?$
 d) $(n - 1)(n - 3)(n - 5) - (n - 2)(n - 4)(n - 6) = ?$
 e) $(x - y)(x^2 + xy + y^2) - (x + y)(x^2 - xy + y^2) = ?$
 f) $(a + b)[(a - b + 1)(-a + b - 1) - (a - b - 1)(-a + b + 1)] = ?$
 g) $(a + b - c)(a - b) - (a - b + c)(a - c) + (-a + b + c)(b - c) = ?$
 h) $(x - x^2)(yz^3 - y^2z) - (y - y^2)(xz^3 - x^2z) + (z - z^2)(xy^2 - x^2y) = ?$
 i) $(x - a)(x - b) - (x + a)(x + b) = ?$
 j) $(x^2 - mx - m)(x + 1) - (x^2 + x - 1)(x + m) = ?$
 k) $[x^2 - (m - 1)x - m] \cdot (x - 1) - (x^2 - 2x + 1)(x - m) = ?$
 l) $[(m - 1)x + 1] \cdot (x + m) + (mx - 1)(x - m) = ?$
 m) $(ax^2 + bx + c)(x - 1) - (ax^2 - bx + c)(x + 1) = ?$
 n) $(ax + b)(cx + d) - (ax - b)(cx - d) + (ax + b)(cx - d) = ?$

$$o) (x^2 + x + 1)(px + q) - (x^2 + px + q)(x + 1) = ?$$

$$p) (x + a)(x + b)(x + c) - (x - a)(x - b)(x - c) = ?$$

18. Wykonać działania:

$$a) (a^3 + 2a^2)^2 = ? \quad b) (3a - 2a^2)^2 = ? \quad c) (a - \frac{1}{2})^2 = ?$$

$$d) (2ab + \frac{1}{2}b)^2 = ? \quad e) (4a - \frac{3}{2}x^2)^2 = ? \quad f) (-3a - 1)^2 = ?$$

$$g) (-x^2 - 1)^2 = ? \quad h) (-\frac{1}{2}ab + 2)^2 = ? \quad i) (-0,1x + 10)^2 = ?$$

$$j) (x + 2)^2 + (-x + 2)^2 = ? \quad k) (a + b)^2 - (a - b)^2 = ?$$

$$l) (x + 2)^2 \cdot (x - 2)^2 = ? \quad m) (x + a)^2 \cdot (x - b)^2 = ?$$

$$n) 2(x + 1)^2 - 3(x - 1)^2 = ? \quad o) 2(x - a)^2 - (x - 2a)^2 = ?$$

19. Wykonać działania:

$$a) (2a + 3)^3 = ? \quad b) (3a^2 - 1)^3 = ? \quad c) (a - ab^2)^3 = ?$$

$$d) (-\frac{1}{3} + a)^3 = ? \quad e) (-2xy - 3y)^3 = ? \quad f) (-\frac{1}{3}z - 3yz)^3 = ?$$

$$g) (a + b)^3 + (a - b)^3 = ? \quad h) (a + b)^3 - (a - b)^3 = ?$$

$$i) (2x^3 + 3x^2)^2 - (2x^2 + x)^3 = ? \quad j) (x - 2)^3 - (x + 3)^3 = ?$$

20. Wykonać działania:

$$a) (2x + 1)(2x - 1) = ? \quad b) (3a^2 - \frac{1}{2}a)(3a^2 + \frac{1}{2}a) = ?$$

$$c) (-3a + 2)(-3a - 2) = ?$$

$$d) (-2a^2 - \frac{3}{4})(-2a^2 + \frac{3}{4}) = ?$$

$$e) (-x + 1)(x + 1) = ?$$

$$f) (3x^2y - 5x^3)(-3x^2y - 5x^3) = ?$$

$$g) (3x + 1)(3x - 1) - (3x + 2)(3x - 2) = ?$$

$$h) (3a - 2b^2)(-3a - 2b^2) + (3a - b^2)(3a + b^2) = ?$$

21. Wykonać działania:

$$a) (2x - 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1) = ?$$

$$b) (2x^2 + 3x)^2 + (-2x^2 + 3x)(-2x^2 - 3x) = ?$$

$$c) [(m^2 + 1)(m^2 - 1)]^3 - [(m^3 + 1)(m^3 - 1)]^2 = ?$$

$$d) [a + (b + c)] \cdot [a - (b + c)] = ?$$

$$e) [(a + b) + (c + d)][(a + b) - (c + d)] = ?$$

$$f) [2a^3 - 3a(2a^2 - a)] \cdot [2a^3 + 3a(2a^2 - a)] = ?$$

$$g) [(3a^2 - 2a) + (4a - 1)] \cdot [(3a^2 - 2a) - (4a - 1)] = ?$$

$$h) (a^2 - 2ab + 3b^2)(a^2 - 2ab - 3b^2) = ?$$

$$i) (2x^2 + 3x - 1)(2x^2 - 3x + 1) = ?$$

$$j) (2x + 3y + 2)(2x - 3y - 2) = ?$$

$$k) (3a + 2)^2 - (3a - 2)^2 = ?$$

$$l) (3ab + b^2)^2 - (3ab - b^2)^2 = ?$$

$$m) (3x^2 + 2x - 1)^2 - (3x^2 - 2x + 1)^2 = ?$$

$$n) (a + b + c)^2 - (a - b - c)^2 = ?$$

$$o) (x^2 - x + 1)^2 - (x^2 - x - 1)^2 = ?$$

$$p) (a + b + c)^2 - (a + b - c)(a - b + c) = ?$$

$$r) (a + b)^3 + (b + c)^3 - (a - b)(a + b)^2 - (b + c)(c - b)^2 = ?$$

$$s) (a - b)^2 - (a - b)(b - a) = ?$$

$$t) 1 - [a^2 - (a - 1)^2][a^2 - (a + 1)^2] = ?$$

$$u) [4x^2 - (2x + 3)(2x - 3)][4x^2 - (2x + 3)(3 - 2x)] - 72x^2 = ?$$

$$v) b^2(2a - b)^2 + [(a + b)^2 - a^2][(a - b)^2 - a^2] = ?$$

$$w) (x + 1)^3 - (x + 1)[x(x - 1) + 3x] - (x - 1) = ?$$

$$x) [(3x + 2)^2 - 6x][(3x + 2)(3x - 2) - (3x - 2)^2] = ?$$

$$y) \frac{1}{24}[(2x + 5)^2 - (2x - 1)^2][(1 - \frac{1}{2}x)^2 + \frac{3}{4}x^2] = ?$$

$$z) [(a - 3)^2 - (a + 3)^2](2a + 1) - [(a + 1)^3 - a(a - 2)^2] = ?$$

22. Rozwiązać równania:

$$a) x(x + 2) = x^2 - 4;$$

$$b) 2x(x - 1) = 2x^2;$$

$$c) 3x(x + 2) - (x + 1)(x - 1) = 2x(x + 1) - 7;$$

$$d) (x + 1)(x + 2) - x(x + 5) = 6;$$

$$e) (x - 3)(x - 2) - (x - 3)(x - 1) = 5;$$

$$f) (2x + 3)(2x + 5) - (4x + 2)(x + 4) = x + 10;$$

$$g) (x - 1)(2x + 1) - (3x + 13) = 2(x + 2)(x - 3);$$

$$h) (x + 2)^2 - 7(x + 1) = (x - 1)^2;$$

$$i) (5x - 1)^2 - (3x - 1)^2 = (4x - 1)^2 - 5;$$

$$j) x(x - 2)^2 - (x - 1)^3 = 3 - (x - 1)^2;$$

$$k) [(x - 2)^2 - x^2] \cdot \{3 - 2[x - 2(x - 3)]\} = 2 - 2(2x - 1)^2;$$

$$l) (x + \frac{1}{3})^2 = x(x - \frac{1}{3});$$

$$m) (x + 1)^3 - (x - 1)[(x + 1)^2 - x] = 5 + 3(x + 1)^2;$$

$$n) (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) = (x^2 - 1)^2 + (x + 2)^2;$$

$$o) (x^3 + 1)(x^3 - 1) + 3(x^2 - 1)^2 = (x^2 + 1)^3 - (3x - 1)^2;$$

$$p) 1 + (x + 2)(x - 3)(x - 5) = (x - 2)^3;$$

$$r) (x + 1)^3 - (x - 2)^3 = (5x + 1)^2 - (4x - 1)^2;$$

$$s) [x^2 - (x + 1)^2] \cdot [x^2 - (x - 1)^2] = 2 - (2x - 3)^2.$$

23. a) Rozłożyć 20 na takie dwa składniki, aby różnica ich kwadratów wynosiła 40.

b) Boki jednego prostokąta mają 4 cm i 2 cm, a boki drugiego 5 cm i 10 cm. Boki pierwszego prostokąta powiększono o x , a boki drugiego pomniejszono o x ; wtedy pola obu prostokątów były równe. Obliczyć x .

c) Oddział harcerzy ustawił się w x rzędach, po x harcerzy w każdym rzędzie. Gdy do oddziału przyłączyło się 36 harcerzy, powiększyła się liczba rzędów o 3, a w każdym rzędzie stało o 2 harcerzy więcej. Ilu harcerzy liczył oddział pierwotnie?

$$x \cdot x + 36 = (x + 3)(x + 2)$$

d) Prostokątny obraz, którego szerokość wynosi $\frac{3}{4}$ wysokości, naklejono na prostokątnym kartonie tak, że brzeg kartonu jest wszędzie o 3 cm oddalony od brzegu obrazu. Powierzchnia kartonu jest od powierzchni obrazu większa o 351 cm². Obliczyć wymiary obrazu.

e) Pole koła wzrosło o 75,36 cm², gdy promień jego zwiększono o 2 cm. Jak wielki był pierwotnie promień koła?

Pole p koła o promieniu r oblicza się według wzoru: $p = \pi r^2$, gdzie $\pi = 3,14$ (w przybliżeniu).

f) Dokoła klombu, mającego kształt koła, biegnie ścieżka o szerokości 1,6 m. Ścieżkę rozszerzono z obu stron, dodając od strony klombu 16 cm, a od strony zewnętrznej 12 cm. Dodane z obu stron powierzchnie były równe. Obliczyć pierwotną średnicę klombu.

24. Wykonać dzielenia:

- a) $(8a^4b^3 - 12a^3b^4) : 4a^3b^3 = ?$
 b) $(12a^4 - 6a^3) : 6a^3 = ?$
 c) $(\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3) : (-\frac{2}{3}x^3) = ?$
 d) $(x^5 - 4x^3) : (+\frac{4}{5}x^3) = ?$
 e) $(12a^5b - 18a^4b^2 - 6a^3b^3) : (+6a^3b) = ?$
 f) $(-\frac{3}{4}a^5b + \frac{5}{6}a^3b^3 - \frac{2}{3}a^2b^4) : (-\frac{5}{12}a^2b) = ?$
 g) $(x^2 - 6x + 8) : (x - 4) = ?$
 h) $(2x^2 - x - 1) : (x - 1) = ?$
 i) $(3x^2 + 7x - 6) : (x + 3) = ?$
 j) $(-5x^2 - 9x + 2) : (x + 2) = ?$
 k) $(3x^3 - 11x^2 + 7x - 3) : (x - 3) = ?$
 l) $(2x^3 - 5x^2 - x + 6) : (x - 2) = ?$
 m) $(x^3 - 2x + 1) : (x - 1) = ?$
 n) $(x^3 + 1) : (x + 1) = ?$
 o) $(x^3 - 8) : (x - 2) = ?$
 p) $(x^4 - 1) : (x - 1) = ?$
 q) $(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6) : (x - 3) = ?$
 r) $[(x^4 - 2x^2 - 3x - 2) : (x + 1)] : (x - 2) = ?$
 s) $[(2x^4 + x^3 - 5x^2 - x + 3) : (x - 1)] : (x + 1) = ?$
 t) $(2x^3 - 12x^2 + 9x + 6) : (x - 5) = ?$
 u) $(x^3 - 2x^2 - 3x - 2) : (x + 1) = ?$

25. W podanych niżej wielomianach podstawić za x (względnie za x i y) podane obok wyrażenia, wykonać naznaczone działania i uporządkować otrzymany wielomian:

- a) $x^2 - 2x + 3$; $x = 2a - 1$;
 b) $x^2 - 2xy - 2y^2$; $x = a + b$, $y = a - b$;

c) $x^2 + xy - y^2$; $x = 2a + b - 1$, $y = 2a - b + 1$;

d) $x^3 - 2x^2 + x - 1$; $x = a - 2$;

e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$; $x = a + 1$, $y = b - 2$.

26. Z następujących wielomianów wyłączyć wspólny czynnik przed nawias:

- a) $5x^3 - 4x^2$; b) $4x^2 - 4x$; c) $6x^2 - 3x$;
 d) $4a^5 + 2a^3$; e) $a^2b - ab^2$; f) $a^3 + a^2b$;
 g) $8a^4b^2 - 6a^3b^3 + 4a^2b^4$; h) $7a^3x - 14a^4x^2$;
 i) $15a^5 - 20a^4 + 10a^3 - 5a^2$; j) $4x^3 - 8x^2y + 12xy^2$;
 k) $6m^2n^2 + 42m^2n^3 - 12m^2n^4$; l) $4x^2yz + 8xy^2z + 4xyz^2$.

27. Po stosownym ugrupowaniu wyrazów rozłożyć na czynniki:

- a) $ac - bd + bc - ad$; b) $ax - ay + by - bx$;
 c) $x^2 + 7x + 12$; d) $x^2 + 6x + 8$; e) $x^2 - 5x + 4$;
 f) $x^2 - 3x + 2$; g) $x^2 + 2x - 3$; h) $x^2 + x - 6$;
 i) $x^2 - 3x - 10$; j) $x^2 - x - 12$; k) $x^2 - x - 2$;
 l) $ab + a + b + 1$; m) $1 + a - b - ab$;
 n) $ab + a - 2b - 2$; o) $ab + 2a - 3b - 6$;
 p) $a^3 + 2a^2 - a - 2$; r) $3x + y - xy - 3$;
 s) $x^3 + x^2 + x + 1$; t) $x^2 + xy - x - y$;
 u) $a^2 - a + 2ab - 2b$; w) $ac - bc + a - b + c + 1$;
 y) $ac + bc + a + b + 2c + 2$; z) $a^2 - ab - a + ac - bc - c$.

28. Rozłożyć na czynniki wielomiany:

- a) $x^2 + 2x + 1$; b) $4a^4 + 4a^2 + 1$; c) $x^2 - 6x + 9$;
 d) $4a^2 - 12ab + 9b^2$; e) $x^4 + 8x^2 + 16$; f) $4a^2b^2 - 4ab + 1$;
 g) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; h) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$;
 i) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$; j) $8x^3 - 36ax^2 + 54a^2x - 27a^3$;
 k) $a^6 + 3a^4 + 3a^2 + 1$; l) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$;
 m) $a^2 - 9$; n) $4x^2 - 1$; o) $4x^2 - 9y^2$;
 p) $x^4 - 25y^2$; r) $1 - x^2$; s) $x^2y^3 - 4$.

29. Rozłożyć na możliwie wielką ilość czynników:

- a) $x^3 - 3x^2 - 10x$; b) $2x^3 - 10x^2 + 6x$; c) $3x^4 + 3x^3 - 6x^2$;
 d) $a^2b - ab^5$; e) $4a^3 - 4a$; f) $3a^2 - 12b^2$;
 g) $a^4 - b^4$; h) $a^5 - a$; i) $a^8 - 1$;
 j) $4x^5 - 64x$; k) $16x^2 - x^6$; l) $32x^4 - 162$;
 m) $3x^3 - 12x^2 + 12x$; n) $9x^3 + 6x^2 + x$; o) $x^4 - 2x^2 + 1$;
 p) $2a^5 - 16a^3 + 32a$; r) $x^8 - 2x^4 + 1$; s) $16a^5 - 8a^3 + a$;
 t) $a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$; u) $2x^7 - 6x^5 + 6x^3 - 2x$.

30. a) W sadzie posadzono a rzędów drzewek, po a drzewek w każdym rzędzie. Ile drzewek należy dosadzić, aby mieć o 3 rzędy więcej, a w każdym rzędzie o 3 drzewka więcej? [Sprawdzić dla $a = 35$.]
- b) Po wypraniu zbiega się płótno o $p\%$ na długość, a $r\%$ na szerokość. O ile zmniejszy się po wypraniu powierzchnia prostokątnego kawałka płótna o długości a m, a szerokości b m? [Sprawdzić dla $a = 6$; $b = 0,8$; $p = 5$; $r = 1$.]
- c) Wzór $2n - 1$ przedstawia liczbę nieparzystą, jeżeli n oznacza dowolną liczbę całkowitą. Jaka jest najbliższa liczba nieparzysta większa od $2n - 1$? Obliczyć różnicę kwadratów tych liczb. Sprawdzić, przyjmując za n dowolne wartości.
- d) O ile wzrośnie (zmniejszy się) powierzchnia, a o ile objętość kuli o promieniu r , jeżeli promień powiększymy (pomniejszymy) o x ? [$r = 10$; $x = 1$.]

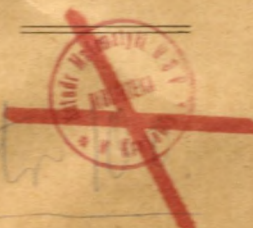
[Porównaj zadanie 3 a.]

- e) Liczbę 10 rozłożono na dwa składniki, z których jednym jest x . Obliczyć o ile różni się potrójna suma kwadratów tych składników od piątej części sumy sześciątów tych składników. Sprawdzić, obawszy dowolnie x .
- f) Z prostokątnego kawałka blachy o długości a cm i szerokości b cm odcięto po czterech rogach kwadraty o bokach mających po x cm. Przeginając wystające kawałki, otrzymano pudełko. Obliczyć pojemność tego pudełka. Uporządkować otrzymany wielomian według potęg x . O ile zwiększy (zmniejszy) się pojemność pudełka, jeżeli powiększymy x o 1? [Sprawdzić dla $a = 12$, $b = 8$, przyjmując raz $x = 1$, drugi raz $x = 2,5$.]
- g) Liczba trzycyfrowa ma na miejscu jednostek, dziesiątek i setek kolejno cyfry a , b , c . Przestawiaj w tej liczbie różnymi sposobami cyfry i odejmuj każdym razem otrzymaną liczbę od danej. Z otrzymanej różnicy wyłącz przed nawias co można. Uzasadnij na podstawie otrzymanego wzoru, że znaleziona różnica jest zawsze przez 9 podzielna. Czy twierdzenie to będzie prawdziwe i dla liczb mających 2; 4; 5; ... cyfr?
- h) Wykaż podobnie, jak w poprzednim zadaniu, że różnica kwadratów dwu liczb niepodzielnych przez 3, jest przez 3 podzielna.

Liczba przez 3 niepodzielna da się napisać w postaci $3n + 1$, albo $3n + 2$; inna liczba niepodzielna przez 3 będzie $3m + 1$, albo $3m + 2$ (m i n oznaczają dowolne liczby całkowite).

- i) Druk żelazny, którego długość przy 0°C wynosi 1 m, wydłuża się przy ogrzaniu o każdy stopień $^\circ \text{C}$ o a m. Tak samo zmienia się z temperaturą każdy wymiar przedmiotu żelaznego. — Arkusz blachy żelaznej ma przy 0°C długość l m i szerokość l m. Jaka będzie powierzchnia tego arkusza przy $t^\circ \text{C}$? Jaka będzie ta powierzchnia przy temperaturze wyższej od t° o x° ? O ile m^2 wzrasta powierzchnia tego arkusza, gdy go ogrzejemy od t° do $(t + x)^\circ$? Obliczyć ten przyrost powierzchni, jeżeli $l = 1,2$; $a = 0,000012$; $t = -35$; $x = 70$.
- j) Kapitalista składa k zł na $p\%$. Po roku nie pobiera dochodu, lecz składa go wraz z kapitałem na $p\%$. Tak samo postępuje po dwóch latach. Jaką kwotę miał kapitalista po dwóch latach? Jaką będzie miał po trzech latach? [$k = 2000$; $p = 5$.]
- k) Wartość mebli maleje w każdym roku o $p\%$ tej wartości, jaką przedstawiały na początku roku. Jaką wartość przedstawiać będą meble, kupione za a zł, po roku, jaką po dwóch, a jaką po trzech latach? [$a = 3000$; $p = 10$.]

Kulob. str. 109



Spis treści

	Str.
Rozdział I. Liczby względne	3—26
1. Liczby bezwzględne	3
2. Liczby względne	4
3. Odcinki kierunkowe	5
4. Dodawanie liczb względnych	7
5. Odejmowanie liczb względnych	9
6. Suma algebraiczna	10
7. Oś liczbowa. Porównywanie liczb względnych	11
8. Zastosowanie dodawania i odejmowania liczb względnych	13
9. Mnożenie liczb względnych	14
10. Dzielenie liczb względnych	15
11. Liczby względne, a liczby bezwzględne	16
12. Wyrażenia algebraiczne	17
Ćwiczenia	19
 Rozdział II. Własności działań na liczbach względnych	 26—51
§ 1. Własności sumy	26
§ 2. Własności różnicy; wielomian	27
§ 3. Dodawanie i odejmowanie sumy	29
§ 4. Własności iloczynu	29
§ 5. Wnioski z praw przemienności i łączności	30
§ 6. Mnożenie sumy	32
§ 7. Wnioski z prawa rozdzielności	34
§ 8. Własności ilorazu	35
§ 9. Najprostsze ułamki algebraiczne	37
§ 10. Zestawienie	40
Ćwiczenia	41
 Rozdział III. Równania i układy równań stopnia pierwszego	 51—85
1. Twierdzenia o równościach	51
2. Określenie równania	52

§ 3. Rozwiązywanie równań stopnia pierwszego z jedną niewiadomą	
§ 4. Zastosowanie równań do rozwiązywania zagadnień	
§ 5. Równania z dwiema niewiadomymi	
§ 6. Rozwiązywanie układu dwu równań z dwiema niewiadomymi	
§ 7. Zastosowanie do rozwiązywania zagadnień	
§ 8. Równania z trzema niewiadomymi	
Ćwiczenia	

Rozdział IV. Jednomiany i wielomiany 85—10

§ 1. Potęga	85
§ 2. Działania na potęgach	86
§ 3. Jednomiany i działania na nich	87
§ 4. Wielomiany; dodawanie i odejmowanie	88
§ 5. Mnożenie wielomianu przez jednomian; mnożenie wielomianów	90
§ 6. Niektóre szczególne przypadki mnożenia wielomianów	91
§ 7. Dzielenie wielomianów	92
§ 8. Rozkładanie wielomianów na czynniki	93
Ćwiczenia	94

W A L N A P O M O C

PRZY NAUCE SZKOLNEJ W ZAKRESIE
WSZYSTKICH PRZEDMIOTÓW NAUCZANIA

STANOWI ENCYKLOPEDJA

ŚWIAT I ŻYCIE

wydawana pod naczelną redakcją Prof. Dr Z. ŁEMPICKIEGO
a polecona do użytku szkolnego przez Ministerstwo W. R. i O. P.

Bogato ilustrowana, drukowana na bezdrzewnym papierze

Z ZAKRESU MATEMATYKI I FIZYKI
zawiera encyklopedia takie artykuły,
jak: arytmetyka i algebra, astronomja,
atmosfera ziemi, atom, ciężenie po-
wszechne, ciepło, ciśnienie, Curie-
Skłodowska, czas astronomiczny, dźwięk,
elektron, elektryczność, energja, fizyka,
fotoelektryczność, geometrja i w. i.

Ilustrowane prospekty wysyła na żądanie bezpłatnie

ADMINISTRACJA ŚWIATA I ŻYCIA

KSIĄŻNICA - ATLAS S.

Lwów, Czarnieckiego 12 — Warszawa, Nowy Świat



M 54254/1

UP - Kraków BG



1050307199

